Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

ÁREA E VOLUME COM O AUXÍLIO DO MULTIPLANO, BLOCOS CÚBICOS e SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

por

Eli Paulo Campos

sob orientação do

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/2014
João Pessoa - PB

Catalogação na publicação

Universidade Federal da Paraíba

Biblioteca Setorial do CCEN

C198a Campos, Eli Paulo.
Área e volume com o auxílio do multiplano, blocos cúbicos e sólidos geométricos / Eli Paulo Campos.– João Pessoa, 2014.
47f. : il.
Orientador: Manassés Xavier de Sousa
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Cálculo de áreas. 3. Cálculo de volumes. 4. Figuras planas. 5. Sólidos geométricos.

UFPB/BC CDU: 51(043)

ÁREA E VOLUME COM O AUXÍLIO DO MULTIPLANO, BLOCOS CÚBICOS e SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

por

Eli Paulo Campos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Manassés Xavier de Souza

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza - UFPB (Orientador)

Adriano Alves de Medeiros

Prof. Dr. Adriano Alves de Medeiros - UFPB

Bárbara Costa da Silva

Prof. Dra. Bárbara Costa da Silva - UFRPE

Agosto/2014

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pois sem ele nada seria possível.

Aos meus pais, Severino Paulo e Iracema Maria, que são minha base, meus exemplos de vida.

A meus irmãos, Rangel Paulo, Rute e Jandira e à minha noiva, Edna Maria pela compreensão e o incentivo que me proporcionaram.

Aos professores do PROFMAT, pelo empenho e dedicação, em especial quero agradecer ao meu orientador o Prof. Manassés Xavier de Souza, por ajudar na elaboração do meu trabalho e contribuir para a conclusão deste sonho.

À Banca composta pelos professores: Adriano Alves de Medeiros e Bárbara Costa da Silva.

Aos meus colegas de curso pelo convívio harmonioso que tivemos nesses dois anos e toda troca de conhecimentos que tanto me enriqueceram.

Aos colegas de estudo do PROFMAT, João Paulo, Renato, Edjane, Josildo, Marcondes, Demilson e Antônio pela amizade, força e incentivo nos momentos mais difíceis do curso.

A todos que fazem parte de minha vida e que contribuíram direta, ou indiretamente, para que eu chegasse até aqui.

À Capes pelo apoio financeiro para realização desse curso.

Dedicatória

A meus pais: ***Iracema Maria*** e ***Severino Paulo***.

Resumo

O cálculo de áreas e volumes é de grande importância na Matemática e possui vasta aplicação no nosso cotidiano. O objetivo deste trabalho foi produzir um material de apoio para dar aulas sobre o cálculo de áreas de figuras planas e volume de sólidos geométricos aos alunos do 2° ano do ensino médio da Escola Jarina Maia, localizada no município de João Alfredo, Pernambuco. Um teste diagnóstico foi aplicado antes da preparação do material para identificar as dificuldades dos alunos na resolução de questões envolvendo os conceitos de área e volume. Depois de trabalhados os conteúdos, outro teste foi aplicado para verificar se houve algum avanço. O material produzido tem o nível do ensino médio, ou seja, não tem toda a rigidez das demonstrações do ensino superior, apresenta apenas algumas deduções e/ou demonstrações simples para facilitar o processo de ensino-aprendizagem. Também usamos materiais do laboratório de Matemática em uma oficina para explicar os conceitos e fórmulas de área e volume.

Palavras-chave: Área, Volume, figuras planas, sólidos geométricos.

Abstract

The calculation of areas and volumes is of great importance in Mathematics, and is widely applicable in our daily lives. The objective of this study was to produce support material for classes teaching how to calculate the areas of flat figures and the volumes of geometric solids. These classes were given to second-year high school students at the Jarina Maia School, located in the town of João Alfredo, Pernambuco. A diagnostic test was given before the material was prepared, to identify students' difficulties in solving problems involving the concepts of area and volume. After the content was taught, another test was given to verify whether there had been any progress. The material produced was made for high school level, in other words, it was not as rigid as a higher education presentation would have been; it only presented some simple deductions and/or demonstrations to facilitate the teaching-learning process. We also used mathematics laboratory materials in a workshop to explain the concepts and formulas for area and volume.

Keywords: Area, Volume, plane figures, geometric solids.

Sumário

Introdução

Calcular a área de figuras planas e o volume de sólidos geométricos não é uma necessidade recente, desde as civilizações antigas esse problema apareceu, em muitos casos, por necessidades do cotidiano, como aplicação na agricultura, nas construções, etc. e em outros apenas pela beleza que a Matemática pode proporcionar. Essas necessidades levaram o homem a desenvolver ideias e métodos para a realização desse tipo de cálculo.

Desde o Ensino Fundamental, os alunos já estudam os conceitos de área e volume. Mas na maioria das vezes apresentamos apenas as fórmulas e pedimos pra eles resolverem as questões propostas. Ao longo dos anos ensinando esse conteúdo, percebemos as dificuldades que muitos alunos apresentam na compreensão desses conceitos. Muitos livros didáticos do ensino básico e professores apresentam apenas as fórmulas sem nenhuma demonstração ou pelo menos uma dedução das mesmas, com isso a maioria dos alunos faz os cálculos de forma mecânica. Talvez por causa disso confundam tanto, os conceitos de perímetro, área e volume.

Neste trabalho preparamos um material de apoio (Capítulo 2) para o estudo de áreas de figuras planas e volume de alguns sólidos geométricos para alunos do segundo ano do ensino médio. Antes de produzir o material aplicamos um teste diagnóstico com exercícios sobre área e volume. Depois analisamos os resultados obtidos, levando em consideração principalmente as dificuldades e erros dos alunos na resolução das questões e com base nesses dados elaboramos o material.

A maneira como este trabalho foi desenvolvido lembra a metodologia da Engenharia Didática que emergiu no início da década de 80, criada por Michèle Artigue. Segundo Artigue (1996, p. 196), Engenharia Didática se caracteriza por um esquema experimental baseado em realizações didáticas na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino. A sequência deste trabalho foi aplicada seguindo esta metodologia: foram feitas análises *a priori* dos conhecimentos prévios dos alunos, com base no teste diagnóstico inicial, em seguida foi desenvolvido o material de apoio e por fim foram feitas análises dos resultados no teste diagnóstico final comparando os resultados obtidos.

Além do material de apoio para as aulas, fizemos uma oficina com várias atividades utilizando materiais do Laboratório de Matemática para facilitar a compreensão dos conceitos de área e volume.

Capítulo 1

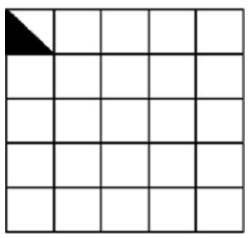
Teste diagnóstico e análise dos resultados

O teste diagnóstico foi aplicado para 107 alunos de três turmas do 2º ano do ensino médio da Escola Estadual Jarina Maia, localizada no município de João Alfredo, Pernambuco. O objetivo do teste era verificar quais eram as dificuldades dos alunos em resolver problemas que envolviam o conceito de área de figuras planas e o volume de alguns sólidos geométricos. O teste foi composto por quinze questões, sendo nove sobre área de figuras planas e seis sobre volume. Primeiro analisamos as respostas dos alunos em cada questão. Abaixo temos o teste e ao lado das alternativas temos o percentual de alunos que a marcaram.

1.1 Questões seguidas de suas análises

Questão 1 - Sabendo que a figura abaixo é formada por 25 quadradinhos iguais e que a medida da área do triângulo hachurado é igual a $1cm^2$. Qual é a medida da área total da figura?

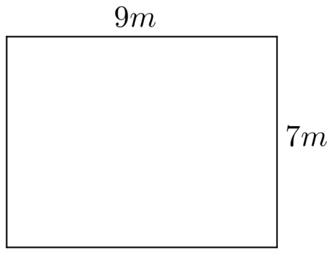
(a)	$25cm^2$	37%
(b)	$30cm^2$	1%
(c)	$35cm^2$	0%
(d)	$40cm^2$	0%
(e)	$50cm^2$	62%



Alternativa correta: E

O objetivo dessa questão era verificar se os alunos compreendiam o conceito de unidade de área. Essa questão tem um nível bem simples para alunos do 2º ano do ensino médio, e mesmo assim somente 62% *marcaram a alternativa* E, *que é a alternativa correta, o que é um percentual baixo levando em consideração o nível da questão e a série dos alunos. Outro fato importante é que* 37% *dos alunos marcaram a alternativa* A, *ou seja, contaram apenas o número de quadrados e não perceberam que a área de cada quadrado equivale à área de dois triângulos.*

Questão 2 - Um pedreiro precisa revestir o piso de uma sala retangular de $9m$ por $7m$ com cerâmica. Quantos metros quadrados de cerâmica são necessários para revestir o piso dessa sala?



(a)	$16m^2$	10%
(b)	$63m^2$	57%
(c)	$32m^2$	23%
(d)	$64m^2$	5%
(e)	$126m^2$	5%

Alternativa correta: B

Essa questão também de nível fácil, procurava verificar se os alunos sabiam calcular a área de um retângulo. 57% *deles marcaram a alternativa B que é a a alternativa correta. Mas o que chama atenção é que* 23% *marcaram a letra C que é o perímetro da figura e outros* 10% *marcaram a letra A, que é o semiperímetro ou a soma dos números mostrados na figura.*

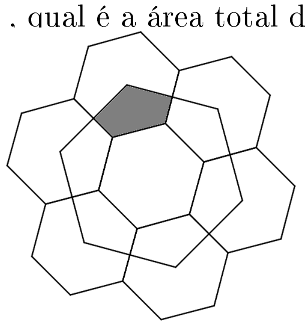
Questão 3 - Uma festa foi realizada num espaço de formato retangular de $220m$ por $50m$. Sabendo que em cada m^2 havia em média 4 pessoas, podemos afirmar que na festa havia:

(a) 274 pessoas	11%
(b) 11004 pessoas	14%
(c) 44000 pessoas	28%
(d) 2750 pessoas	24%
(e) 11000 pessoas	23%

Alternativa correta: C

Para responder essa questão corretamente, o aluno precisava calcular a área corretamente e depois perceber que em cada metro quadrado havia em média quatro pessoas, ou seja, deveria multiplicar a área por 4. *Somente* 28% *acertaram essa questão. Outros* 24% *marcaram letra D, ou seja, dividiram a área por* 4*; e* 23% *marcaram a letra E, esses consideraram apenas a área da figura. Os* 14% *que marcaram a letra B somaram a área com* 4 *e os* 11% *que marcaram a letra A, apenas somaram os dados da questão.*

Questão 4 - A figura abaixo representa sete hexágonos regulares menores iguais e um hexágono maior, cujos vértices coincidem com os centros de seis dos hexágonos menores. Sabendo que a área da figura hachurada é $2cm^2$, qual é a área total da figura em cm^2 ?



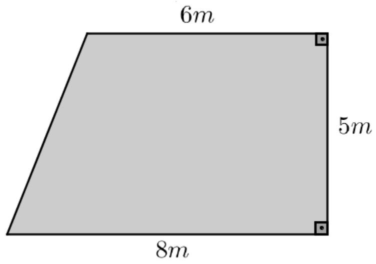
(a)	42	35%
(b)	6	12%
(c)	14	30%
(d)	16	21%
(e)	50	2%

Alternativa correta: A

Nessa questão, o aluno deveria perceber que cada parte hachurada da figura tinha área $2cm^2$ e depois ver que quantidade de figuras pintadas cobria toda a figura maior formada pelos sete hexágonos. Somente 35% acertaram. Outros 30% marcaram letra C e 21% marcaram a letra D, ou seja, consideraram que cada hexágono era formado por apenas duas figuras pintadas e na letra C ainda consideraram os oitos hexágonos.

Questão 5 - Uma escola tem seus canteiros em forma geométrica. Um deles tem o formato do trapézio retângulo, com as medidas indicadas na figura abaixo. A área do canteiro representada pela figura é:

(a)	$40m^2$	30%
(b)	$30m^2$	17%
(c)	$25m^2$	23%
(d)	$35m^2$	14%
(e)	$45m^2$	16%

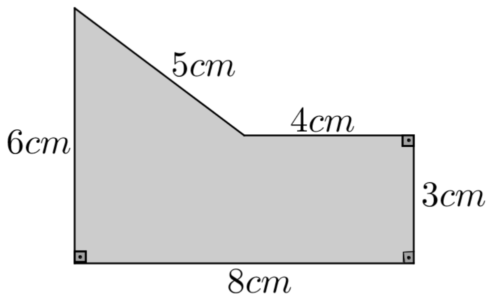


Alternativa correta: D

O objetivo da questão era verificar se o aluno sabia calcular a área de um trapézio. Mas somente 14% deles responderam-na corretamente. O maior percentual de alunos (30%) marcou letra A, ou seja, multiplicou apenas a base maior pela altura, outros marcaram as letras B, C ou E que não tinham qualquer lógica. Isso nos leva a conclusão de que a maioria dos alunos não compreendem o conceito de área, pois se eles não soubessem a fórmula da área do trapézio poderiam decompor essa figura em um triângulo e um retângulo e calcular suas áreas obtendo com isso o mesmo resultado.

Questão 6 - A medida da área da figura abaixo é:

(a)	$24cm^2$	3%
(b)	$30cm^2$	6%
(c)	$33cm^2$	8%
(d)	$26cm^2$	73%
(e)	$48cm^2$	10%

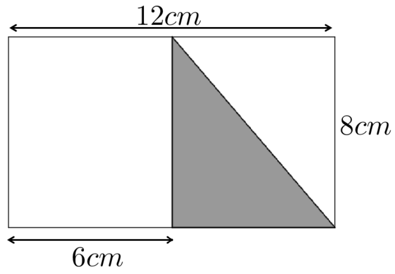


Alternativa correta: B

Nessa questão, o aluno deveria decompor a figura em polígonos conhecidos, calcular suas áreas e depois somá-las. Mas apenas 6% conseguiram perceber isso. Foi a questão com o menor percentual de acerto. A maioria absoluta (73%) marcou a letra D, que é a medida do perímetro da figura. Mesmo no ensino médio muitos alunos ainda confundem o conceito de perímetro com o conceito de área.

Questão 7 - Qual a medida da área correspondente à parte pintada da figura?

(a)	$24cm^2$	33%
(b)	$28cm^2$	9%
(c)	$40cm^2$	9%
(d)	$48cm^2$	31%
(e)	$96cm^2$	18%

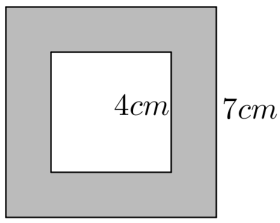


Alternativa correta: A

As alternativas A (correta) e D ficaram bem equilibradas com 33% e 31%, ou seja, muitos alunos multiplicaram 6 *por* 8*, mas não dividiram por* 2 *para encontrar apenas a área do triângulo. Outros 18% ainda marcaram a letra E, calculando com isso a área do retângulo.*

Questão 8 - Na figura abaixo, o quadrado externo tem lado medindo $7cm$, enquanto o lado do quadrado menor mede $4cm$. Qual é a medida da área da parte pintada da figura?

(a)	$33cm^2$	15%
(b)	$28cm^2$	57%
(c)	$11cm^2$	10%
(d)	$12cm^2$	8%
(e)	$44cm^2$	10%

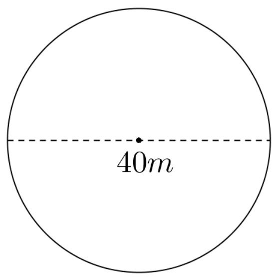


Alternativa correta: A

Nessa questão, o aluno deveria calcular as áreas dos quadrados, subtrair a menor da maior para encontrar a área da parte hachurada, mas apenas 15% fizeram isso marcando a letra A. A maioria (57%) marcou a letra B, ou seja, apenas multiplicaram 7cm por 4cm e 10% somaram 7cm com 4cm.

Questão 9 - Um engenheiro deseja construir uma praça com a forma de um círculo. Sabendo que a praça tem o diâmetro de $40m$, qual é sua área? Considere $\pi = 3,14$.

(a)	$314m^2$	15%
(b)	$1600m^2$	26%
(c)	$1256m^2$	47%
(d)	$2512m^2$	6%
(e)	$1570m^2$	6%

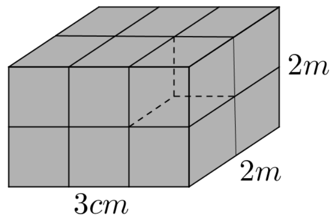


Alternativa correta: C

Quase metade (47%) dos alunos acertou essa questão, isso indica que eles talvez tenham decorado a fórmula da área do círculo, pois erraram questões mais simples e *acertaram uma questão de um nível muito mais difícil. Isso mostra mais uma vez que a maioria apenas decora fórmulas, mas não compreende o conceito de área. 26% marcaram letra B, que é a área do quadrado circunscrito ao círculo e muitos deles fizeram até o desenho mostrando isso, mas não perceberam que a área do círculo era menor que a área do quadrado.*

Questão 10 - Sabendo que cada cubinho da figura abaixo tem $1cm^3$ de volume, qual o volume do paralelepípedo abaixo?

(a)	$7cm^3$	24%
(b)	$6cm^3$	8%
(c)	$4cm^3$	10%
(d)	$8cm^3$	2%
(e)	$12cm^3$	56%

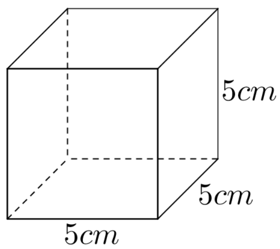


Alternativa correta: E

Mesmo a questão sendo de nível muito fácil para a série, ainda assim 44% dos alunos erraram, sendo que 24% somaram apenas os valores que apareciam na figura desenhada.

Questão 11 - Qual a medida do volume de um cubo cuja aresta mede $5cm$?

(a)	$15cm^3$	21%
(b)	$25cm^3$	22%
(c)	$30cm^3$	8%
(d)	$125cm^3$	47%
(e)	$150cm^3$	2%



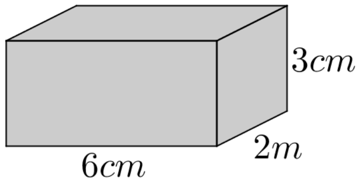
Alternativa correta: D

Quase metade dos alunos (47%) acertou a questão, talvez porque bastava multiplicar os lados do cubo que já estava desenhado. Mesmo com toda essa facilidade 53% erraram a questão, marcando principalmente as letras A (21%) e B (22%). No caso da letra A, somaram os números que apareciam na figura representada no desenho. Na letra B, multiplicaram apenas os valores da base.

Questão 12 - Uma caixa dágua, em forma de paralelepípedo retângulo, de dimensão $6m$,

$2m$ e $3m$ tem capacidade de:

(a)	$10000litros$	7%
(b)	$11000litros$	29%
(c)	$36000litros$	53%
(d)	$24000litros$	7%
(e)	$2400litros$	4%

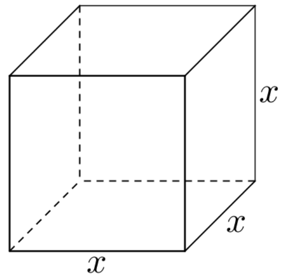


Alternativa correta: C

Observando os resultados percebemos que muitos alunos (29%) marcaram a letra B, ou seja, apenas somaram as dimensões do paralelepípedo em vez de multiplicá-las. Assim como nas questões 10 *e* 11, *muitos alunos não compreendem o conceito de volume de um sólido simples como o cubo e o paralelepípedo e por isso fazem qualquer cálculo que tenha alguma alternativa como resposta.*

Questão 13 - Sabendo que o volume de um cubo é $64cm^3$, qual a medida de sua aresta?

(a)	$6cm$	12%
(b)	$3cm$	9%
(c)	$4cm$	42%
(d)	$5cm$	6%
(e)	$8cm$	31%

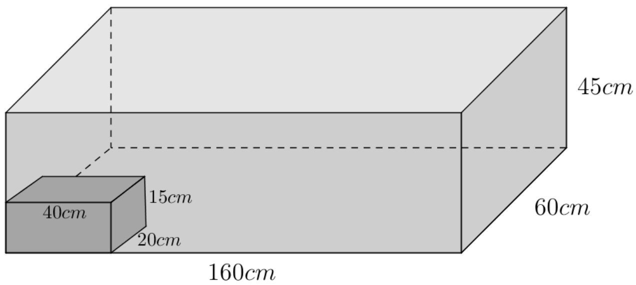


Alternativa correta: C

Nesta questão queríamos verificar se o aluno sabia fazer o cálculo para encontrar os valores dos lados, dado o valor do volume. Apenas 42% acertaram a questão, sendo que 31% marcaram a letra E que tem como resposta o número que elevado ao quadrado resulta em 64.

Questão 14 - Um bloco retangular de madeira tem $160cm$ de comprimento, $60cm$ de largura e $45cm$ de altura. O bloco é cortado várias vezes, com cortes paralelos às suas faces, de modo a subdividi-lo em blocos também retangulares de $40cm$ de comprimento por $20cm$ de largura por $15cm$ de altura. Quantas peças foram obtidas?

(a)	36	33%
(b)	28	23%
(c)	60	24%
(d)	40	10%
(e)	30	10%

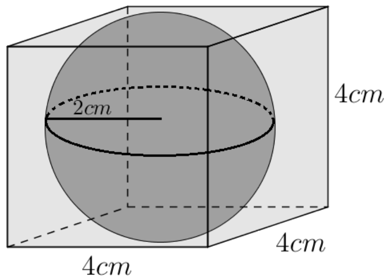


Alternativa correta: A

Uma boa parte dos alunos (67%) não conseguiu visualizar a ideia da questão, que era preencher o paralelepípedo maior com os paralelepípedos menores.

Questão 15- Qual é o volume aproximado de uma esfera de raio $2cm$ que está inscrita em um cubo cuja aresta mede $4cm$, como mostra a figura abaixo?

(a)	$64cm^3$	52%
(b)	$70cm^3$	12%
(c)	$20cm^3$	11%
(d)	$34cm^3$	12%
(e)	$10cm^3$	13%



Alternativa correta: D

O objetivo da última questão era verificar se o aluno mesmo não sabendo a fórmula do volume da esfera conseguiria obter um valor aproximado para seu volume, através do volume do cubo circunscrito à esfera. Mas 52% marcaram a letra A, que é o volume do cubo e não o volume da esfera.

1.2 Análise dos resultados

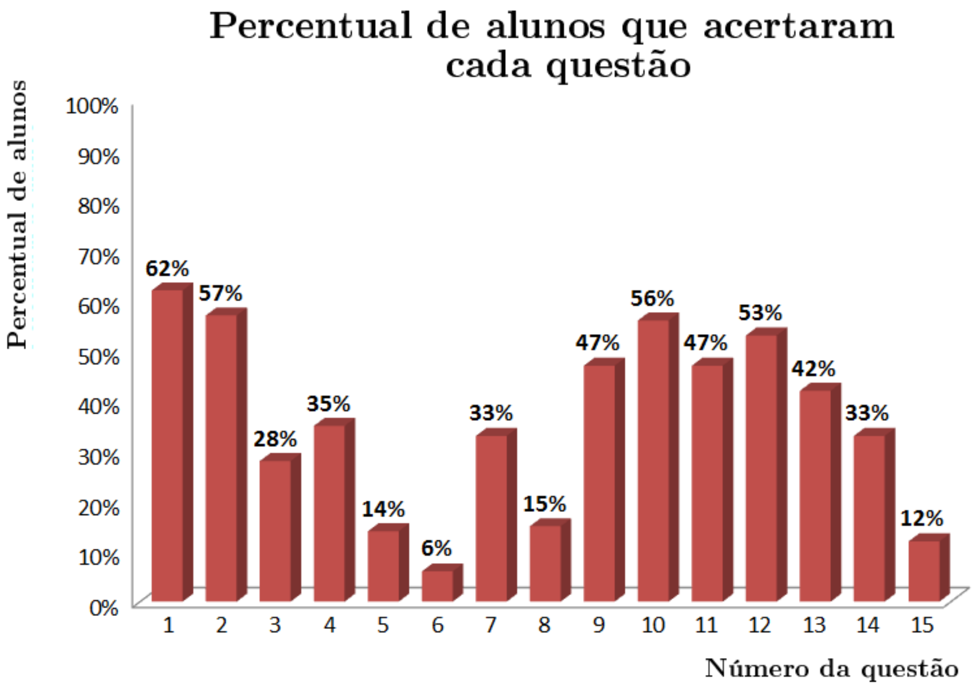
1.2.1 Quantitativo/percentual de alunos que acertaram cada questão

A tabela e o gráfico abaixo mostram o percentual de alunos (de um total de 107 participantes) que acertaram cada questão. O percentual médio de acertos por questão foi de 36% aproximadamente.

Questão	Percentual de acertos
01	62%
02	57%
03	28%
04	35%
05	14%
06	6%
07	33%
08	15%
09	47%
10	56%
11	47%
12	53%
13	42%

14	33%
15	12%

Após criteriosa análise da tabela e do gráfico, pode-se concluir que o índice de acertos na maioria das questões não foi satisfatório. As questões 5, 6 e 8 tiveram um índice de acertos muito baixo. A maioria dos alunos confundiu o conceito de perímetro e área, outros apenas multiplicaram os valores explícitos nas questões pois não souberam decompor as figuras e calcular suas áreas. A questão com maior índice de acertos foi a 1 com 62% de acertos, enquanto isso, a questão onde os alunos mais se equivocaram foi a 6 com 6% de acertos. Através da análise da tabela e do gráfico será feito um levantamento dos pontos onde os estudantes apresentam maiores dificuldades a respeito dos conceitos abordados.



1.2.2 Quantidade de acertos dos alunos

Também analisamos o percentual de alunos em relação ao número de questões respondidas corretamente pelos mesmos. A maioria dos alunos acertou entre 4 e 7 questões das 15 propostas, um aluno não acertou nenhuma questão, e somente um acertou 15 questões, o que é um número baixo, levando em consideração o nível do teste e a série deles. A tabela abaixo mostra esses dados.

Percentual de alunos	Número de acertos
1%	00
7%	01
8%	02
8%	03

16%	04
14%	05
13%	06
13%	07
9%	08
4%	09
2%	10
2%	11
1%	12
1%	13
0%	14
1%	15

Analisando os resultados obtidos percebemos que a maioria dos alunos, embora já estejam no 2º ano do ensino médio ainda não compreendem os conceitos de área de figuras planas e volume de sólidos geométricos. Muitos confundem área com perímetro, volume com área ou apenas fazem cálculos sem sentido para a questão. Com base nesses dados foi produzido o material de apoio para as aulas, que será o capítulo II desse trabalho. Com o material produzido pretendemos:

- Trabalhar os conceitos de área e volume, pois muitos alunos os confundem com perímetro.
- Deduzir ou demonstrar as fórmulas para o cálculo de áreas e volumes de maneira que os alunos compreendam as mesmas, para que não somente façam cálculos sem significado.
- Decompor uma figura em outras mais simples e calcular sua área.
- Calcular área e volume por aproximação.
- Calcular a área da parte hachurada de figuras planas ou volume que sobra ou que falta depois da inscrição de um sólido em outro.
- Conhecer a relação entre volume e capacidade de um sólido.

Capítulo 2

Estudo de áreas e volume

Neste capítulo apresentaremos o material de apoio que foi usado na sala de aula nas turmas que fizeram o teste diagnóstico sobre os conceitos de área e volume apresentado no capítulo 1. Focamos o estudo de áreas de figuras planas, quanto ao volume exploraremos apenas o de alguns sólidos. Primeiro apresentamos os conceitos de área e volume, deduzimos algumas fórmulas e depois desenvolvemos algumas atividades com materiais do Laboratório de Matemática que facilitam a aprendizagem dos conteúdos.

O texto a seguir foi baseado nos livros do ensino médio : Contexto e aplicações de Luiz Roberto Dante, Ciência e aplicações de Gelson Iezzi, Matemática de Manoel Paiva, Novo Olhar Matemática de Joamir Souza e nos livros da SBM: Tópicos de Matemática Elementar de Antônio Caminha Muniz Neto e A Matemática do Ensino Médio de Elon Lages.

2.1 Área de figuras planas

O estudo da área de figuras planas está ligado aos conceitos relacionados à Geometria Euclidiana, que surgiu na Grécia antiga embasada no estudo do ponto, da reta e do plano. Os egípcios também utilizavam o conceito de áreas há milhares de anos. Depois das cheias do rio Nilo, as águas começavam a baixar e as margens ficavam cobertas por uma lama contendo vários nutrientes, que tornavam o solo fértil para a agricultura. No entanto, ao baixarem as águas, as demarcações que delimitavam as propriedades eram desfeitas, sendo necessária a realização de novas medições. Muitos registros envolvendo o cálculo de áreas podem ser encontrados no papiro de Rhind, importante documento egípcio século XVII a.C.

No mundo em que vivemos, o cálculo de áreas tem muita aplicabilidade em diferentes momentos, seja em atividades puramente cognitivas, ou até mesmo trabalhistas. Um exemplo de profissional que faz uso dessa ferramenta para tornar possível o desempenho do seu trabalho é o Engenheiro Civil. É através do conhecimento de área que é possível estimar a quantidade de cerâmica necessária para pavimentar um determinado cômodo de uma casa, por exemplo.

2.1.1 Conceito da unidade de área

A ideia de área está relacionada à medida de uma superfície. A área de uma região ou superfície pode ser obtida relacionando-a com uma unidade de área. Se quisermos medir a área da região hachurada da figura (2.1), precisamos compará-la com uma unidade de área U. O resultado dessa comparação é um número que exprime quantas vezes a unidade de área U cabe na região destacada.

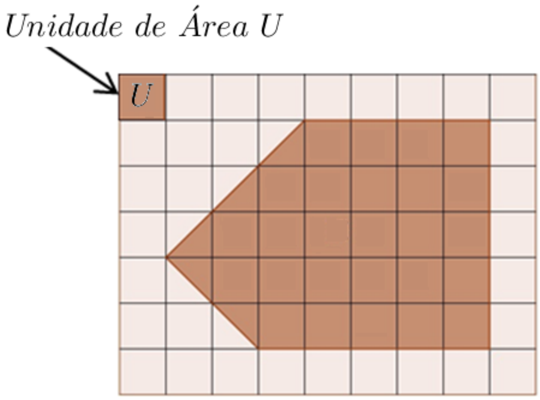


Figura 2.1: Unidade de área

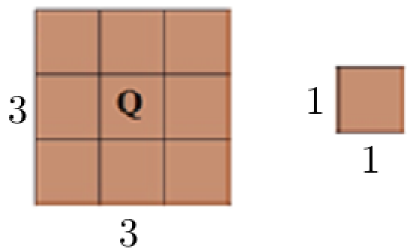
Observando a parte destacada da figura 2.1, podemos notar que são necessários $28,5U$ para cobri-la. Dizemos então que a área da figura é $28,5U$.

Se considerássemos qualquer coisa como unidade de área, uma mesma figura teria vários valores como área. Para que isto não aconteça estabeleceremos como unidade de área uma região quadrada cujo lado mede uma unidade de comprimento. A unidade padrão de área é o quadrado de lado 1. Por exemplo, se o quadrado tem lados de $1m$ a sua área é um metro quadrado m^2.

A seguir vamos estudar o cálculo da medida da área de algumas figuras planas e suas respectivas fórmulas.

2.1.2 Área do quadrado

Consideremos uma região quadrada Q cujo lado mede n, onde n é um número natural. Ela pode ser decomposta em n^2 regiões quadradas justapostas, cada uma com lado unitário e, portanto, com área 1. Logo, a região quadrada tem área n^2.



Região quadrada de lado 3, decomposta em $9 = 3^2$ regiões quadradas unitárias. A mesma ideia vale para qualquer número real positivo. Com isso deduzimos que a medida da área de qualquer quadrado de lado l é dado por:

$$\textbf{Área do quadrado} = l^2.$$

A área do quadrado é igual ao quadrado da medida de seu lado.

Exemplo: Para colocar cerâmica na sala de sua casa, D. Luzia comprou $26m^2$ de piso. Sabendo que a sala tem o formato quadrangular e que um dos lados mede $5m$, diga se o piso comprado por D. Luzia será suficiente para pavimentar a sua sala.

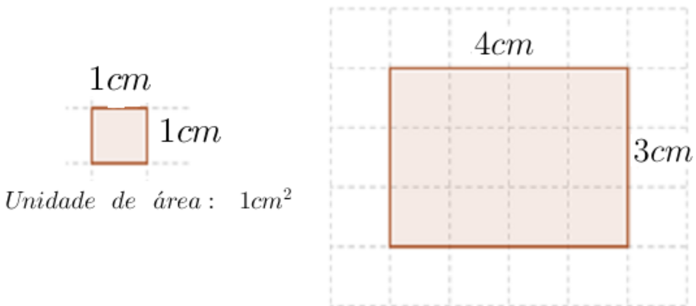
Resolução: *A sala tem o formato quadrangular e seu lado mede* $5m$.

$$\textit{Área} = 5^2 = 25m^2.$$

Como ela comprou $26m^2$ *e a área da sala só é de* $25m^2$*, então a cerâmica será o suficiente para pavimentar a sua sala.*

2.1.3 Área do retângulo

A região retangular abaixo pintada contém 12 unidades de área. Portanto, sua área é de $12cm^2$.



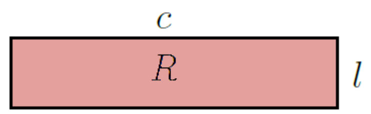
Observe que, em vez de contar quantas unidades de área estão contidas na região retangular, basta multiplicar a medida do comprimento pela medida da largura.

$$3cm \cdot 4cm = 12cm^2.$$

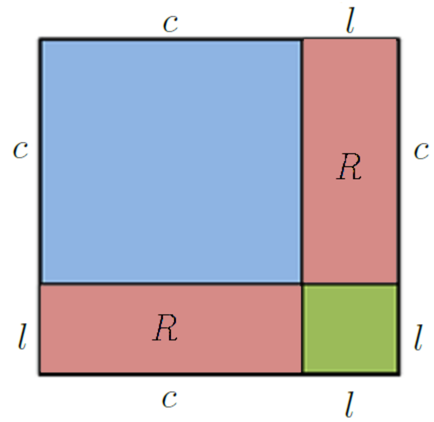
No exemplo mostrado acima usamos números naturais. Vamos provar que, se a medida do comprimento c e a medida da largura l forem números reais quaisquer, a área da região retangular R é dada por:

$$\textit{Área do retângulo} = c \cdot l.$$

Consideremos uma região retangular R de comprimento c e largura l, em que c e l são números reais.



Construímos uma região quadrada cuja medida do lado $c+l$, que contém dois retângulos R e duas regiões quadradas, uma de lado c e outra de lado l.



A área dessa região quadrada de lado $c+l$ é dada pelo quadrado da soma:

$$\text{Área do quadrado} = (c+l)^2 = c^2 + 2cl + l^2. \tag{2.1}$$

Como as regiões quadradas de lados c e l têm áreas, respectivamente iguais a l^2 e c^2, concluímos que a área do quadrado de lado $c+l$ é:

$$\text{Área do quadrado} = c^2 + l^2 + 2 \cdot (\text{área de R}). \tag{2.2}$$

Comparando as expressões (2.1) e (2.2), temos:

$$c^2 + 2cl + l^2 = c^2 + l^2 + 2\cdot(\text{área de R}) \implies \text{2cl=2}\cdot(\text{área de R})$$

$$\text{Área do Retângulo R} = \text{c } \cdot l.$$

A área do retângulo é igual ao produto da medida do comprimento pela medida da largura.

Exemplo: Um dos lados do retângulo 1 mede $18cm$. Qual deve ser a medida do outro lado perpendicular para que a área do retângulo 1 seja equivalente à área do retângulo 2 cujos lados medem $9cm$ e $12cm$?

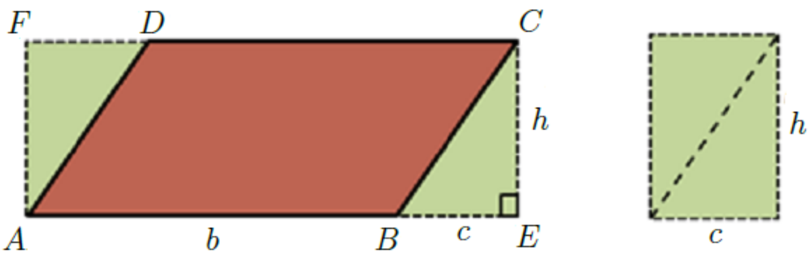
Resolução: *Como já conhecemos as medidas de comprimento e largura do retângulo 2, podemos calcular sua área que é:* $A = 12 \cdot 9 = 108cm^2$. *O retângulo 1 tem a área equivalente à calculada acima, sabemos que um de seus lados tem* $18cm$*, queremos saber quanto mede seu outro lado. Para isso basta resolver a expressão abaixo e encontrar a medida do outro lado:*

$$108 = 18 \cdot l \Longrightarrow l = \frac{108}{18} = 6cm.$$

Logo, o outro lado do retângulo 1 mede $6cm$*.*

2.1.4 Área do Paralelogramo

Determinemos a área do paralelogramo $ABCD$ tomando como base o lado AB de medida b e altura CE (perpendicular a AB) de medida h.



A região limitada pelo paralelogramo está contida em uma região retangular de base $b+c$ e altura h. A área desse retângulo é dada por:

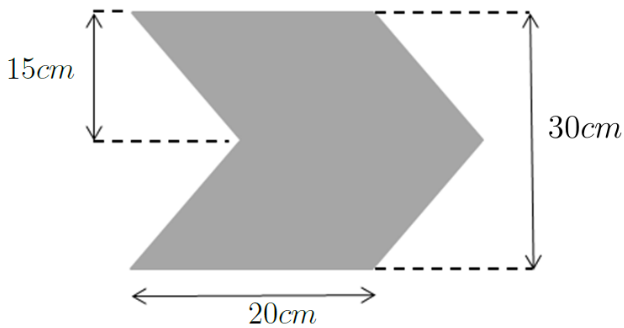
$$(b+c)h = bh + ch.$$

Mas o retângulo $AECF$ é formado pelo paralelogramo mais dois triângulos congruentes de base c e altura h. Os dois triângulos juntos formam o retângulo de área $c \cdot h$. Logo retirando-se esse retângulo de área $c \cdot h$, do retângulo $AECF$ de área $(b+c)h$ temos que:

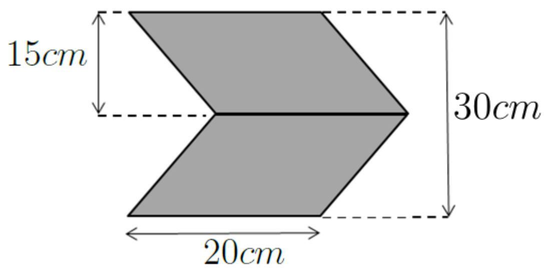
$$\textbf{Área do paralelogramo} = b \cdot h.$$

A área do paralelogramo é igual ao produto do lado pela altura relativa a esse lado.

Exemplo: Calcule a área da figura abaixo:



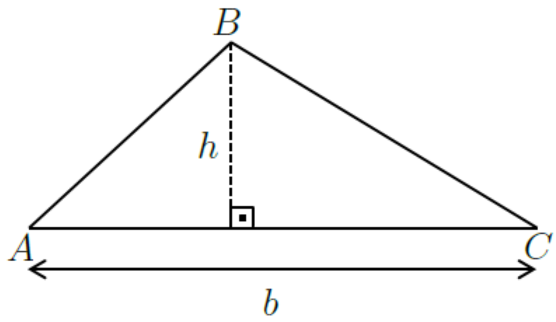
Resolução: *Podemos observar que a figura acima pode ser decomposta em dois paralelogramos de base* $20cm$ *e altura de* $15cm$.



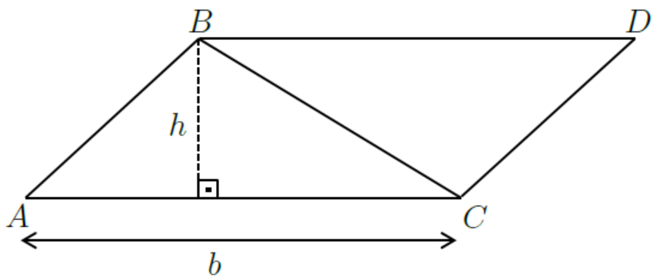
Então a área da figura é a seguinte: $A = 20 \cdot 15 \cdot 2 = 600cm^2$.

2.1.5 Área do triângulo

Seja o triângulo ABC, cuja base AC mede b e a altura relativa a essa base mede h, representado na figura abaixo:



Note que as respectivas paralelas aos lados AC e AB, traçadas pelos vértices B e C, interceptam-se no ponto D, determinando assim o paralelogramo $ABDC$, cujas medidas da base e da altura são b e h, conforme mostra a figura abaixo.



Como a $med(\overline{AB}) = med(\overline{DC})$, $med(B\hat{A}C) = med(B\hat{D}C)$ e $med(\overline{AC}) = med(\overline{BD})$, os triângulos ABC e DCB são congruentes (pelo caso de congruência LAL: têm um ângulo comum compreendido entre dois lados de mesma medida), logo suas áreas são iguais. Portanto, a área do triângulo ABC é igual à metade da área do paralelogramo $ABDC$.

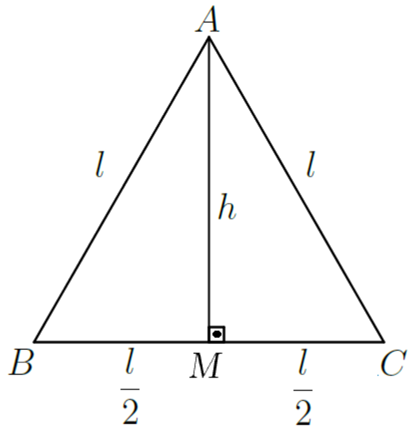
$$\textbf{Área do triângulo} = \frac{b \cdot h}{2}.$$

A área de um triângulo é igual à metade do produto da medida da base pela medida da altura relativa a essa base.

Área de um triângulo equilátero

Se o triângulo for equilátero todos os lados e ângulos são congruentes e toda altura é também mediana e bissetriz. Podemos determinar a altura h em função de l, usando o teorema de Pitágoras como mostramos a seguir:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$
$$h^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2$$
$$h^2 = \frac{3l^2}{4}$$
$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$



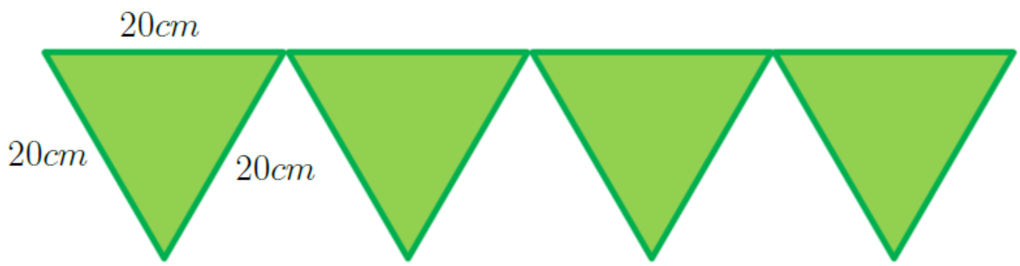
Então a área delimitada pelo triângulo ABC é dada por:

$$A = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{l \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2}}{2} = l \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}.$$

Portanto, a área de um triângulo equilátero de lado l é dada por:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{l^2\sqrt{3}}}{\mathbf{4}}.$$

Exemplo: Quantos cm^2 de papel são necessários para fazer as quatro bandeirinhas abaixo, sabendo que todas são iguais?



Resolução: *Como os triângulos são equiláteros de lado $l = 20cm$, podemos usar a fórmula: $A = l^2\sqrt{3}/4$, e multiplicar por 4, pois todos são iguais.*

$$A = \frac{20^2\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = 20^2\sqrt{3} = 400\sqrt{3}cm^2.$$

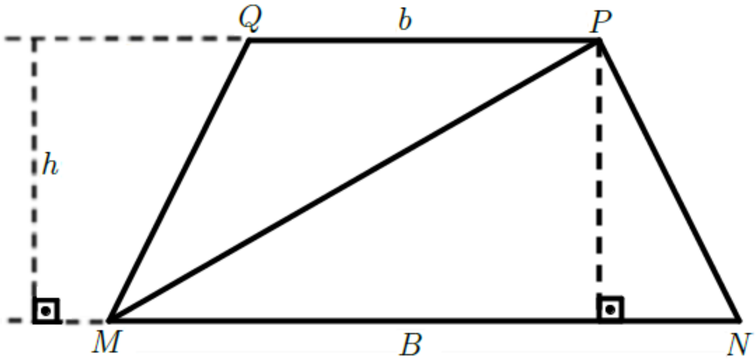
Se quisermos saber a quantidade de papel aproximado podemos substituir $\sqrt{3} \approx 1,73$. Assim, temos:

$$A = 400\sqrt{3} = 400 \cdot 1,73 = 692cm^2.$$

Logo para fazer as quatro bandeirinhas uma pessoa precisa de aproximadamente $692cm^2$ de papel.

2.1.6 Área do trapézio

Vamos decompor o trapézio $MNPQ$ em dois triângulos traçando uma de suas diagonais, pois já conhecemos como se calcula a área de um triângulo. Um triângulo tem base B e altura h e o outro tem base b e altura h.



Como já sabemos calcular a área do triângulo, basta fazermos:

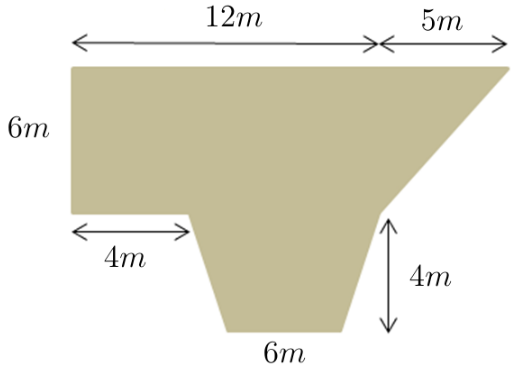
$$\text{Área do trapézio} = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{B \cdot h + b \cdot h}{2} = \frac{(B+b) \cdot h}{2}.$$

$$\text{Área do trapézio} = \frac{(B+b) \cdot h}{2},$$

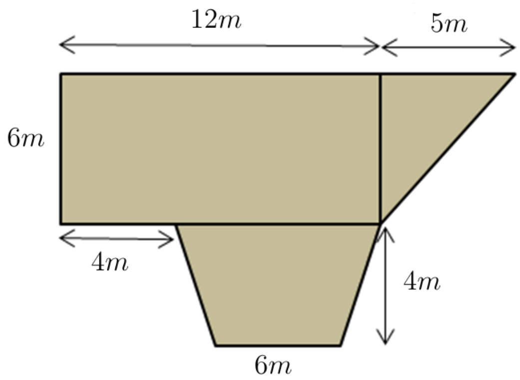
onde $B=$ Base maior, b = base menor e h = altura.

A área de um trapézio é igual ao produto da metade da soma das bases pela altura.

Exemplo: Manoel quer plantar grama em uma parte de sua chácara que tem o formato e dimensões mostradas na figura abaixo. Quantos metros quadrados de grama ele precisa comprar?



Resolução: *Olhando a figura acima de imediato parece não ter como calcular sua área, mas depois percebemos que podemos dividi-la em formas conhecidas como mostra a imagem a seguir.*



Temos um retângulo, um triângulo e um trapézio. Como já sabemos calcular a área de cada uma delas, a soma das três nos dará a área do terreno.

$$\text{\textit{Área do retângulo}} = 12 \cdot 6 = 72m^2,$$

$$\text{\textit{Área do triângulo}} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15m^2,$$

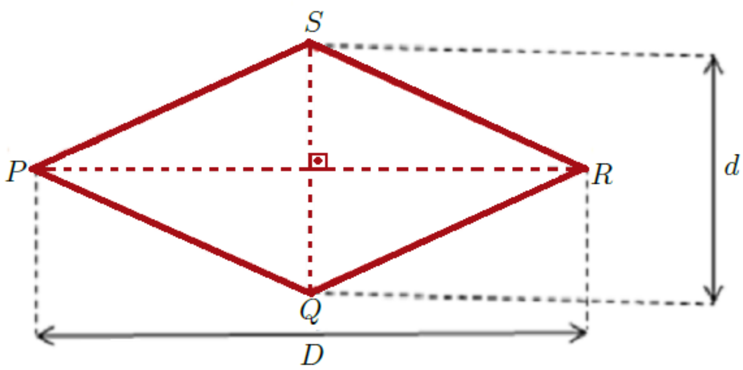
$$\text{\textit{Área do trapézio}} = \frac{(8+6) \cdot 4}{2} = 28m^{2,}$$

$$\text{\textit{Área Total}} = 72m^2 + 15m^2 + 28m^2 = 115m^2.$$

Portanto, Manoel precisará de $115m^2$ *de grama para cobrir todo o terreno.*

2.1.7 Área do losango

Considerando que o losango é um paralelogramo cujas medidas dos lados são iguais e as diagonais são perpendiculares entre si, ele pode ser decomposto em quatro triângulos congruentes, como mostra a figura abaixo, e sua área é a soma das áreas desses triângulos.



No losango $PQRS$, se D é medida da diagonal maior e d é a medida da diagonal menor, a área desse losango é tal que:

$$\text{Área do losango}= 4 \cdot \frac{\frac{D}{2} \cdot \frac{d}{2}}{2} = 4 \cdot \frac{D \cdot d}{8} = \frac{D \cdot d}{2}.$$

$$\text{Área do losango} = \frac{D \cdot d}{2}.$$

A área de um losango é metade do produto da medida de suas diagonais.

Exemplo: Num losango, a medida da diagonal maior é o dobro da medida da diagonal menor. Sabendo que $D = 50cm$, qual será a medida da área desse losango?

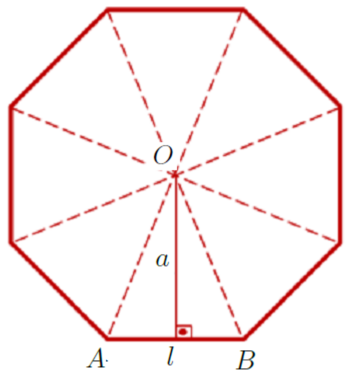
Resolução: *Sabemos que a diagonal maior é o dobro da diagonal menor. Como* $D = 50cm$*, podemos afirmar que* $d = 25cm$*. Conhecidas as medidas das diagonais, basta utilizar a fórmula da área.*

$$A = \frac{50 \cdot 25}{2} = \frac{1250}{2} = 625cm^2$$

Portanto, o losango tem $625cm^2$ *de área.*

2.1.8 Área de um Polígono regular

Podemos perceber que, se o polígono regular tem n lados, a região limitada por ele pode ser decomposta em n triângulos isósceles, que tem dois lados iguais. Em cada um desses triângulos, a base do triângulo é o lado l do polígono e a altura do triângulo é o apótema a do polígono.



A área de cada triângulo é calculada por: $l \cdot a/2$. Supondo um polígono regular de n lados, temos: $n \cdot l \cdot a/2$ como a área do polígono. Como $p = n \cdot l/2$ é o semiperímetro do polígono, segue que:

$$\textbf{\textit{Área do polígono regular}} = p \cdot a.$$

Em que p é medida do semiperímetro e a é a medida do apótema.

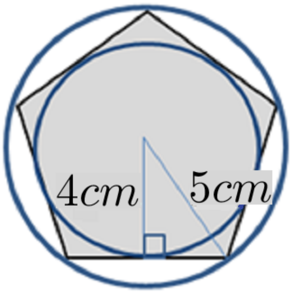
A área de um polígono regular é igual ao produto do semiperímetro pelo apótema.

Área do hexágono regular

O hexágono regular é formado por seis triângulos equiláteros. Como a área do triângulo equilátero de lado l é $l^2\sqrt{3}/4$, então a área do hexágono é:

$$\text{Área do hexágono regular} = 6 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}.$$

Exemplo: Determine a área de um pentágono regular circunscrito a uma circunferência de raio $4cm$ e em uma circunferência de raio $5cm$.



Resolução: *O raio da circunferência inscrita determina a medida a do apótema do pentágono de lado l. A medida do raio da circunferência circunscrita determina a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos a e $l/2$. Obtemos a medida do lado do pentágono utilizando o teorema de Pitágoras:*

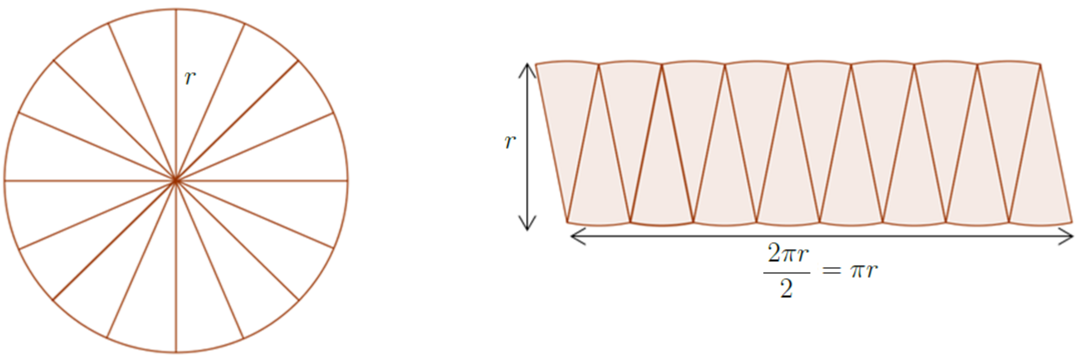
$$5^2 = 4^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Longrightarrow \frac{l^2}{4} = 9 \Longrightarrow l = 6cm.$$

Como a medida do lado do pentágono mede $6cm$ *e o apótema mede* $4cm$*, temos:*

$$A = \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 4 = 60cm^2.$$

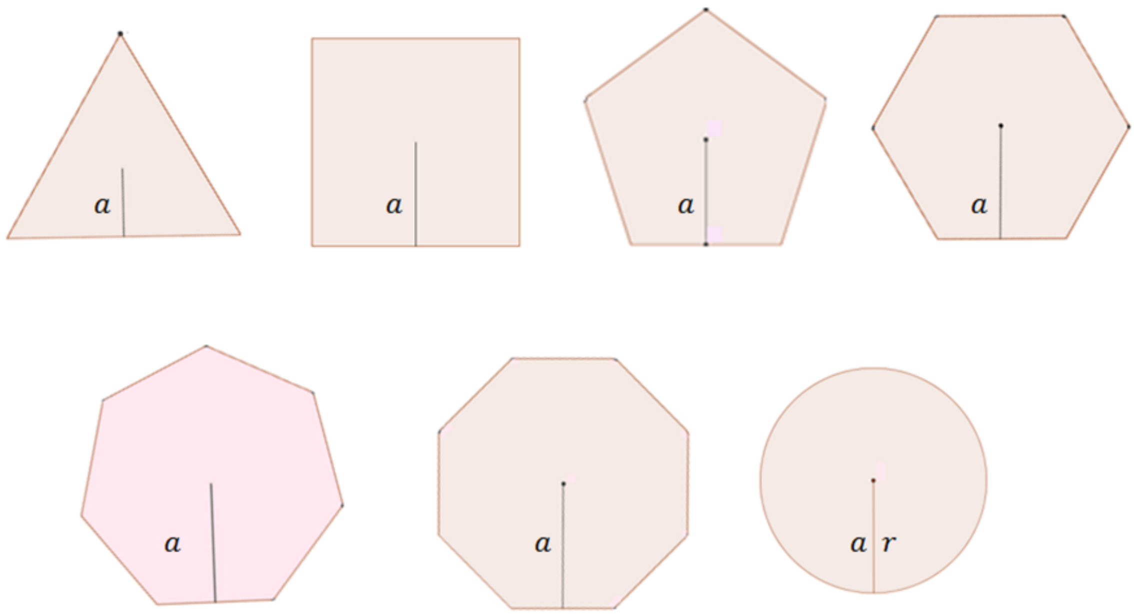
2.1.9 Área do círculo

O círculo abaixo foi dividido em um número par de setores que formaram uma figura cujo formato lembra um paralelogramo. Sua base mede a metade do comprimento da circunferência πr e sua altura mede r, que é o raio do círculo.



Se dividirmos o círculo em um número muito grande de setores, a área da figura se aproxima muito da área do círculo que é: $\pi \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \pi \mathbf{r^2}$.

Outra maneira de se chegar a fórmula da área do círculo é através da fórmula da área de um polígono regular. Já vimos que a área da região determinada por um polígono regular é dada por: $P \cdot a/2$, onde a é a apótema e P é a medida do perímetro.



À medida que aumentamos o número de lados de um polígono regular, vamos nos aproximando do formato de um círculo, no qual o apótema a passa a ser o raio r e o perímetro passa a ser o comprimento da circunferência $2\pi r$.

Logo, usando a fórmula da área de um polígono regular, podemos chegar a área do círculo que pode ser representada por:

$$\frac{a \cdot P}{2} = \frac{r \cdot 2\pi r}{2} = \pi r^2.$$

Área do círculo $= \pi r^2$.

A área de um círculo é calculada multiplicando-se o número π pelo quadrado da medida de seu raio.

Observação: O número π é um número irracional que equivale à medida da área de um círculo de raio 1 ou a razão entre o comprimento de uma circunferência qualquer e seu diâmetro. Aproximando π em cinco casas decimais, temos: $\pi \approx 3,14159$.

Exemplo: Uma pessoa vai comprar pizza e encontra os seguintes preços: uma pizza grande com $40cm$ de diâmetro custa 30 reais e uma pizza média com diâmetro $26cm$ custa 15 reais. Qual é o mais vantajoso ela comprar uma pizza grande ou duas médias?

Resolução: *Vamos calcular a área superficial da pizza grande que tem raio $r = 20cm$ e das duas pizzas média que tem raio $r = 13cm$. Aproximando $\pi \approx 3,14$, temos:*

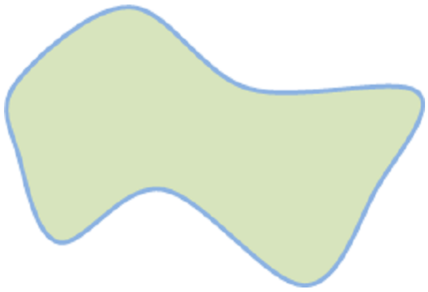
Área da pizza grande $= \pi \cdot 20^2 = 400\pi = 400 \cdot 3,14 = 1296cm^2$.

Área das duas pizzas médias $= 2 \cdot \pi \cdot 13^2 = 338\pi = 338 \cdot 3,14 = 1061,32cm^2$.

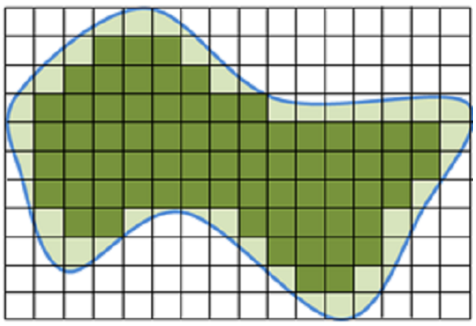
Observando os resultados podemos ver que é mais vantajoso comprar uma pizza grande do que duas médias, pois a área superficial das duas pizzas médias é menor que a área da grande.

2.1.10 Calculando áreas por aproximação

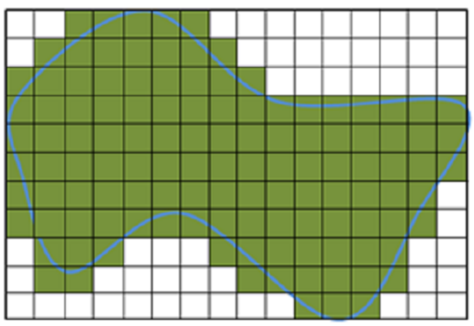
A maioria das figuras do nosso cotidiano não é da forma poligonal ou circular. Para calcular as áreas de figuras que não têm um formato simples, podemos usar aproximações. Por exemplo, como calcular a área da figura abaixo?



Um dos métodos que poderíamos utilizar para o cálculo dessa área seria quadricular essa região e tomar o quadrado como a unidade de medida de área. Primeiro contamos o maior número possível de regiões quadradas inteiras que cabem dentro dela.



Observamos que cabem 70 quadradinhos dentro da figura. Dizemos que a área por falta é 70. Agora contamos o menor número possível de regiões quadradas inteiras que cobrem a figura totalmente.



Observamos que 120 quadradinhos inteiros cobrem a figura. Dizemos que a área por excesso é 120. Uma boa aproximação para a área da figura é a média aritmética entre os dois valores encontrados.

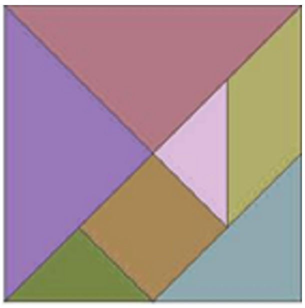
$$\acute{A}rea\ aproximada = \frac{70+120}{2} = 95$$

Logo a área aproximada da figura é 95 quadradinhos, a unidade de área adotada.

2.1.11 Atividades com materiais concretos e alguns exercícios trabalhados com os alunos

Foram desenvolvidas algumas atividades durante as aulas para facilitar a aprendizagem e compreensão dos conceitos e das fórmulas de áreas de figuras planas . Abaixo seguem algumas atividades realizadas.

1 - O Tangram é um quebra-cabeça chinês, de origem milenar; formado por um quadrado decomposto em 7 peças, com as quais é possível criar e montar mais de 1700 figuras, entre animais, plantas pessoas, objetos, números, figuras geométricas e outros.



Trabalhamos com o tangram em sala de aula para que os alunos visualizassem e depois respondessem as seguintes perguntas.

a) Tomando o triângulo menor como unidade de área, qual é a área do quadrado formado pelas sete partes do tangram?

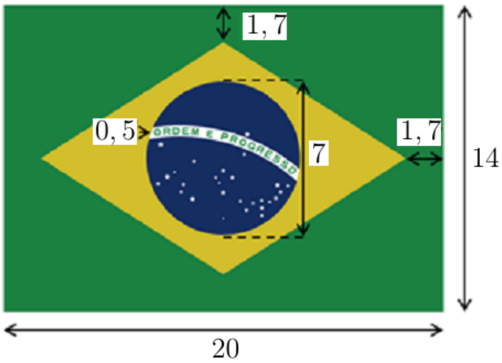
b) Se o lado do quadrado medir $2cm$, qual á área do triângulo menor?

c) Determine a área de cada peça, sabendo que o triângulo médio tem $10cm^2$ de área.

d) Qual a razão entre a área do paralelogramo e do triângulo maior?

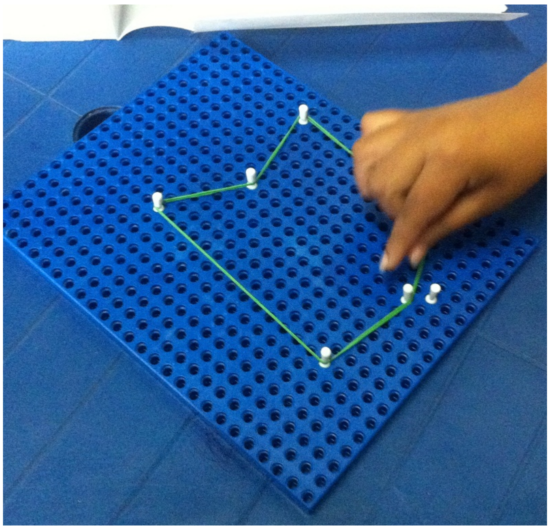
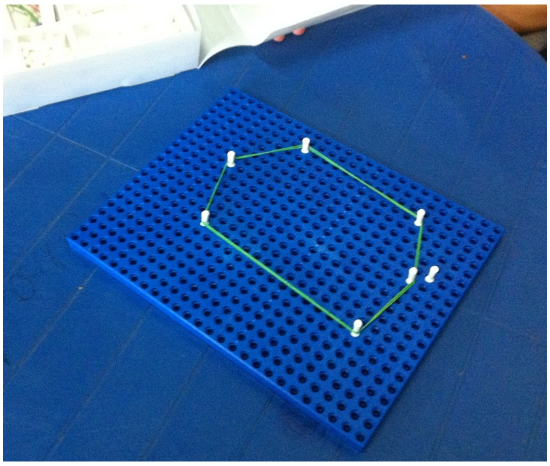
2 - Medimos com os alunos e calculamos a área de algumas regiões da escola.

3 - A bandeira brasileira para que esteja dentro das normas estipuladas por lei deve ter as proporções indicadas a seguir:



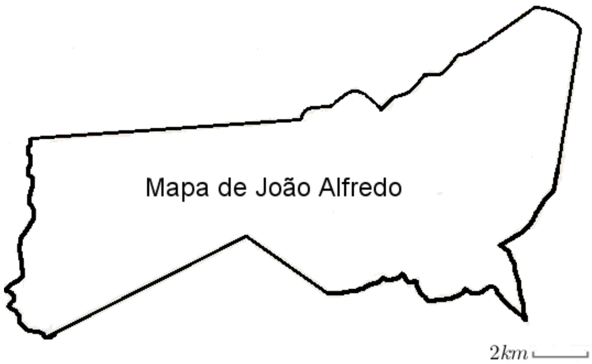
Sabendo das informações acima, calcular a quantidade de tecido de cada cor (verde, amarelo, azul e branco) que é necessário para fazer uma bandeira de $4m$ de comprimento.

4 - Representar figuras geométricas ou desenhos quaisquer num tabuleiro retangular com pinos e ligas e depois calcular ou estimar suas áreas usando os quadrados delimitados pelos pinos ou furos como unidade de área. Veja alguns exemplos de figuras que podem ser montadas e estudadas abaixo.

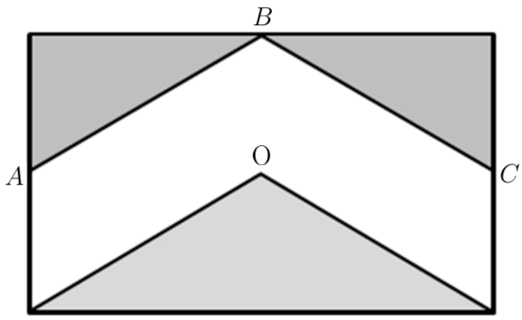
5 - A moeda de um real é formada por uma parte prata e outra dourada. Medir o diâmetro da moeda e o diâmetro da parte prata e calcular a área superficial da parte dourada de uma face circular da moeda.

6 - Calcular a área territorial aproximada do município de João Alfredo a partir de um mapa. Quadricular o mapa usando como unidade de medida a escala do mesmo. Nesta atividade o aluno deve observar que quanto menor o tamanho do quadrado maior a aproximação da área exata.

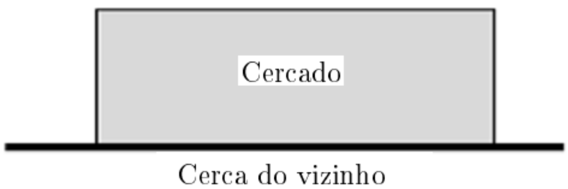


7 - Um cavalo está amarrado por uma corda de $12m$ do lado de fora de um galpão de formato retangular de 8m de comprimento por $6m$ de largura. Determine a área total da região em que o cavalo pode se deslocar.

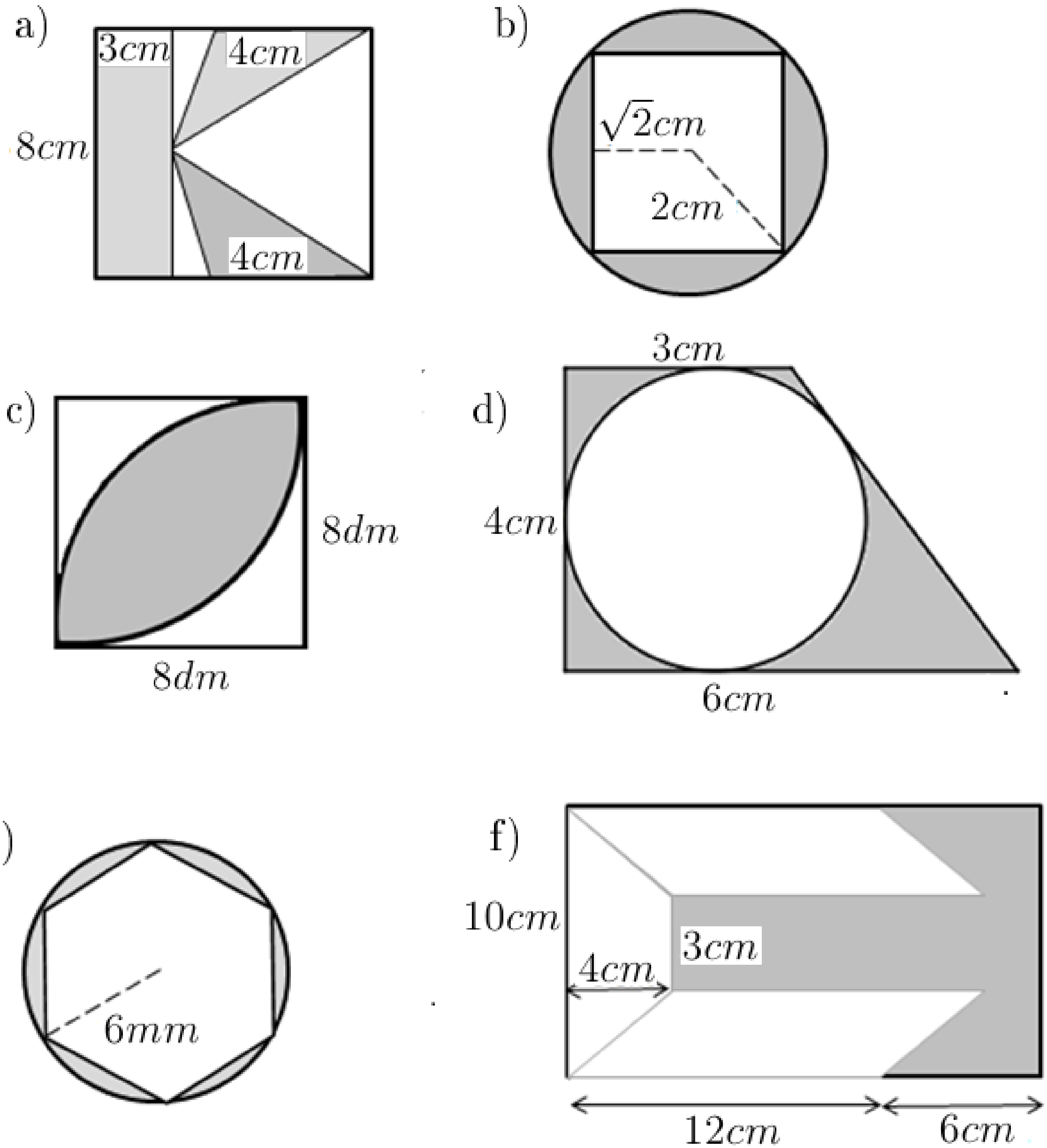
8 - Qual é a razão entre a área da parte hachurada da figura e a área da figura toda, sabendo que A, B e C são pontos médios dos lados do retângulo e O é o encontro entre as duas diagonais.



9 - Um fazendeiro queria construir um cercado em forma de um retângulo para criar gado. Como o dinheiro que ele tinha era suficiente para fazer apenas 200 metros de cerca, resolveu aproveitar uma parte reta da cerca do vizinho para economizar e construiu, com apenas três lances de cerca, um cercado retangular de área máxima. Qual a área desse cercado?



10 - Determine a área das partes hachuradas das figuras seguintes:



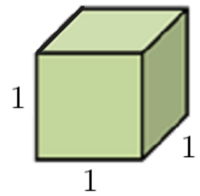
2.2 Volume de sólidos geométricos

Podemos ter muitas definições para a palavra volume, mas para a Matemática é o espaço ocupado por um corpo. Todo sólido geométrico possui volume e ocupa espaço. Para exprimir essa quantidade de espaço através de um número, precisamos compará-lo com uma unidade de medida; e o resultado dessa comparação é chamado de volume.

Por exemplo, podemos medir o volume de uma jarra de suco tomando como unidade de medida um copo. Enchendo o copo e colocando o suco na jarra várias vezes até que esteja completamente cheia, estamos realizando uma medida de volume. É possível que essa comparação seja um número inteiro, ou seja, não sobre nada no copo quando a jarra encher como, por exemplo, a jarra cabe exatamente cinco copos de suco. Então diríamos que o volume da jarra é cinco copos. Mas é muito provável que na última operação, quando a jarra encher, sobre ainda suco no copo. Estudaremos a seguir uma unidade padrão para o volume e as fórmulas para o cálculo do volume de alguns sólidos.

2.2.1 Unidade padrão de volume

Como qualquer sólido ou qualquer coisa poderia ser escolhida como unidade de medida de volume para medir o espaço ocupado por um determinado sólido, existiriam diferentes valores, dependendo da unidade de medida usada. Para não haver essa variação nos valores das medidas de volume, definiu-se uma unidade de medida padrão, isto é, uma unidade com forma e tamanho conhecidos e aceita por todas as pessoas. Esta unidade padrão de medida é o cubo de aresta 1, que terá volume 1.



Cubo unitário

Assim, o volume de um sólido S deve ser o número que exprima quantas vezes o sólido S contém o cubo unitário. Para cada unidade de comprimento, temos uma unidade correspondente de volume. Se, por exemplo, a unidade de comprimento for o metro m, então, a unidade de volume será o m^3, pois o volume é uma grandeza tridimensional. Se a unidade de comprimento for o centímetro cm, então, a unidade de volume será o cm^3, e assim por diante.

Estudaremos agora métodos que nos permitem obter fórmulas para o cálculo do volume de alguns sólidos.

Volume do paralelepípedo retângulo

O paralelepípedo retângulo ou bloco retangular é determinado por três medidas: o seu comprimento a, a sua largura b e a sua altura c.

O volume do paralelepípedo retângulo é proporcional a cada uma de suas dimensões, ou seja, se mantivermos constantes duas de suas dimensões e multiplicarmos a terceira dimensão por um número natural qualquer, o volume também será multiplicado pelo mesmo número natural. Por exemplo, se mantivermos constantes a largura e a altura e, se multiplicarmos o comprimento por um número natural n, o volume também será multiplicado por n, ou seja, $V(na, b, c) = nV(a, b, c)$.

Esse fato constatado com números naturais, também é válido para qualquer número real positivo.

Portanto sendo a, b e c as dimensões de um paralelepípedo retângulo, temos:

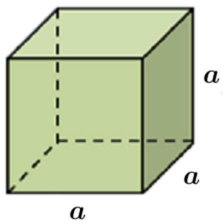
$V(a,b,c) = V(a \cdot 1, b, c)$
$V(a,b,c) = aV(1,b,c) = aV(1, b \cdot 1, c)$
$V(a,b,c) = abV(1,1,c \cdot 1) = abcV(1,1,1)$
Como o volume de um cubo unitário é 1, temos:
$V(a,b,c) = abc \cdot 1$
Logo, o volume do paralelepípedo retângulo é dado por:

$$V(a,b,c) = abc.$$

O volume de um paralelepípedo retângulo é o produto de suas dimensões (comprimento a, largura b e altura c).

Volume do cubo

Como o cubo é um caso particular de paralelepípedo retângulo com todas as arestas de medidas iguais, seu volume é dado por:



$$V = a^3.$$

O volume do cubo é calculado pelo cubo da medida de sua aresta a.

Exemplo: Qual o volume de concreto necessário para construir uma laje de $25cm$ de espessura em uma sala de $4m$ por $5m$?

Resolução: *A medida da espessura está em cm, temos que transformá-la em m para fazer o cálculo com uma única unidade de medida. Como $25cm = 0,25m$, segue que:*

$$V = 4 \cdot 5 \cdot 0,25 = 5m^3.$$

Portanto, é necessário $5m^3$ de concreto para se fazer a laje.

2.2.2 Relação entre medida de volume e capacidade

A unidade de medida padrão de capacidade é o litro l. Podemos relacionar as medidas de volume com a capacidade de um sólido geométrico ou qualquer objeto como recipiente. A seguir temos algumas comparações.

Medidas de volume	Medidas de capacidade
1 centímetro cúbico cm^3	1 mililitro ml
1 decímetro cúbico dm^3	1 litro l
1 metro cúbico m^3	1000 litros l

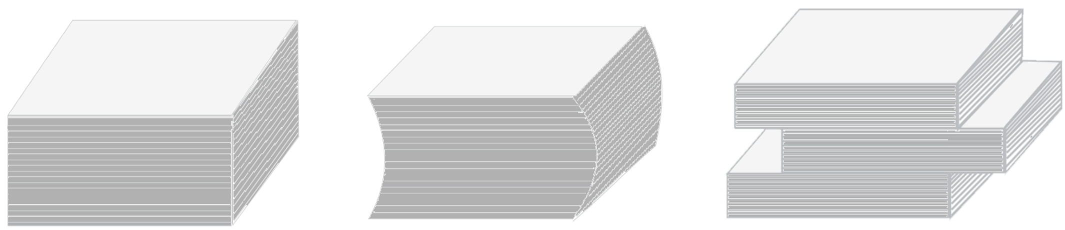
Exemplo: Uma lata de refrigerante contém $350ml$ de líquido, dessa forma podemos dizer que o seu volume é igual a $350cm^3$.

Exemplo: Uma piscina tem formato de um paralelepípedo retângulo de dimensões: $6m$ de comprimento por $4m$ de largura e $2m$ de altura. Quantos litros de água enchem essa piscina?

Resolução: *O volume do paralelepípedo é calculado por:* $V = 6 \cdot 4 \cdot 2 = 48m^3$. *Como cada metro cúbico é equivalente a mil litros, a capacidade da piscina é de* 48000 *litros.*

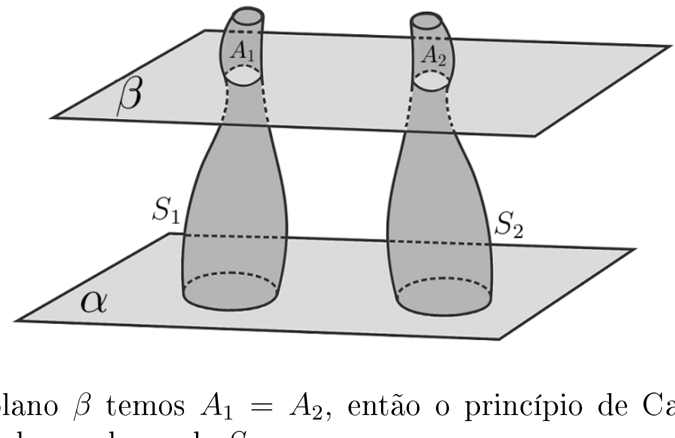
2.2.3 Princípio de Cavalieri

Imagine três pilhas com o mesmo número de folhas de papel, arrumadas de formas diferentes como indicam as figuras:



Note que qualquer plano horizontal que seccione as três pilhas terá intersecções de mesma área. Percebemos intuitivamente também que as três pilhas têm volumes iguais.

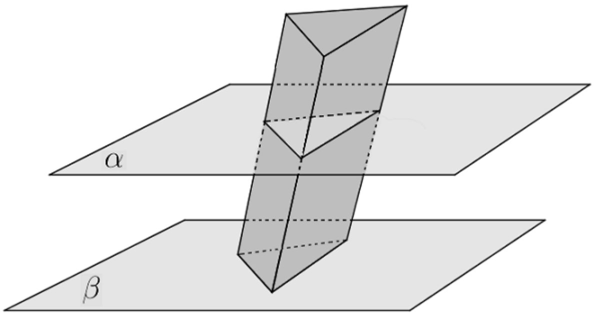
Considere os dois sólidos S_1 e S_2 apoiados em um plano horizontal α. Consideremos também o plano β, paralelo a α, que, ao seccionar S_1, também secciona S_2, determinando duas regiões planas de área A_1 e A_2.



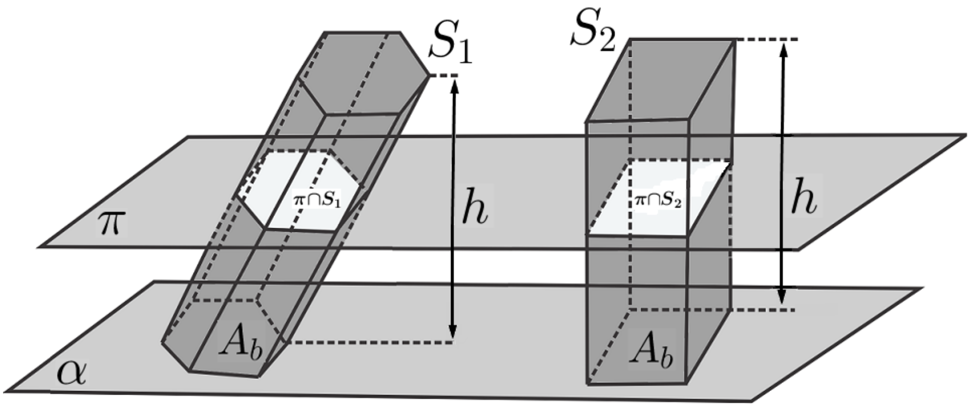
Se para todo plano β temos $A_1 = A_2$, então o princípio de Cavalieri afirma que o volume de S_1 é igual ao volume de S_2.

2.2.4 Volume do prisma

Com o princípio de Cavalieri, podemos obter a fórmula para o cálculo do volume de um prisma qualquer. Inicialmente, observamos que, num prisma qualquer com base contida num plano β, se α é paralelo a β, a secção determinada por α no prisma será sempre congruente à base, e por isso essa secção e a base terão áreas iguais.



Podemos calcular o volume de um prisma qualquer, utilizando o paralelepípedo retângulo como auxílio.



Vamos considerar um prisma S_1, cuja área da base é A_b e a altura é h, e também um paralelepípedo retângulo S_2, cuja área da base é A_b e a altura é h. O plano α que contém as bases é horizontal.

Qualquer plano horizontal π que secciona os dois sólidos determina no prisma S_1 a secção $\pi \cap S_1$, cuja área é igual a A_b e no paralelepípedo retângulo S_2 determina a secção $\pi \cap S_2$, cuja área é igual a A_b.

Como área $(\pi \cap S_1) = A_b$ e área $(\pi \cap S_2) = A_b$, para qualquer plano horizontal π temos:

$$\text{Área } (\pi \cap S_1) = \text{Área } (\pi \cap S_2)$$

Pelo princípio de Cavalieri, concluímos que o volume do prisma é igual ao volume do paralelepípedo retângulo. Logo o volume do prisma é:

$$V = A_b \cdot h$$

O volume de um prisma qualquer é dado pelo produto da área da base A_b pela altura h.

Exemplo: Uma barra de ouro é fundida na forma de um prisma cuja base é um trapézio. As bases do trapézio medem 8cm e 12cm e a altura mede 5cm. O comprimento da barra é 30cm. Qual é seu volume?

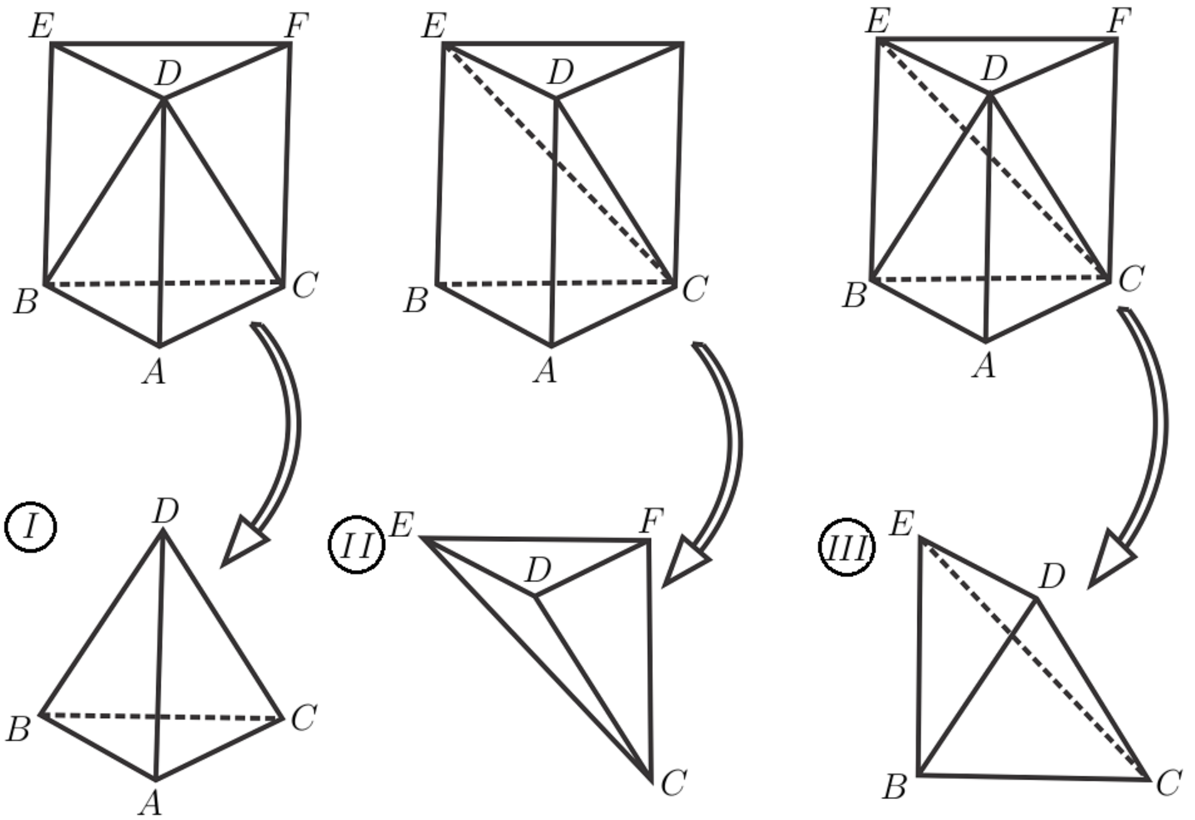
Resolução: *Primeiro calculamos a área da base desse prisma que é um trapézio:*

$$A_b = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(8+12)\cdot 5}{2} = 50cm^2.$$

Agora basta multiplicarmos a área da base pela altura do prisma, ou seja, o comprimento da barra: $V = 50 \cdot 30 = 1500cm^3$. *Logo, o volume da barra de ouro é de* $1500cm^3$.

2.2.5 Volume da pirâmide

Inicialmente vamos decompor um prisma triangular em três pirâmides, como indicam as figuras abaixo.

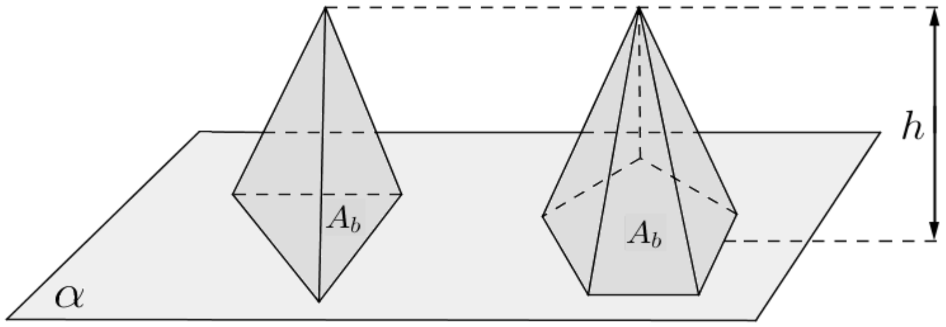


Observamos que as pirâmides I e II têm bases congruentes e alturas iguais, pois os triângulos ABC e DEF são congruentes e a distância de D ao plano (ABC) é igual à distância de C ao plano (DEF), altura do prisma original. Logo, I e II têm mesmo volume.

As pirâmides II e III também têm bases congruentes a alturas iguais, pois o triângulo CEF é congruente ao triângulo BCE, pois cada um deles é a metade do paralelogramo $BCFE$, e a altura de cada uma dessas pirâmides é a distância de D ao plano $(BCFE)$. Logo, II e III têm o mesmo volume. Assim, $V_I = V_{II}$ e $V_{II} = V_{III}$ e, portanto, os três volumes são iguais.

$$\text{Logo, o volume de cada pirâmide} = \frac{\text{volume do prisma}}{3}.$$

Para determinar o volume de uma pirâmide qualquer, usamos a conclusão anterior e o princípio de Cavalieri. Assim, dada uma pirâmide qualquer, consideramos uma pirâmide triangular que tenha a mesma área da base e a mesma altura que a pirâmide qualquer.



O princípio de Cavalieri garante que duas pirâmides com áreas das bases iguais e com a mesma altura têm volumes iguais. Como o volume da pirâmide triangular é um terço do produto da área da base pela altura, concluímos que o volume de qualquer pirâmide é um terço do produto da área da base pela altura.

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}.$$

O volume da pirâmide é igual ao produto de um terço da área da base pela altura

Exemplo: Quando a pirâmide de Quéops foi construída tinha $146m$ de altura e $233m$ de aresta da base. Sabendo que essa pirâmide tem a base quadrangular, qual é seu volume?

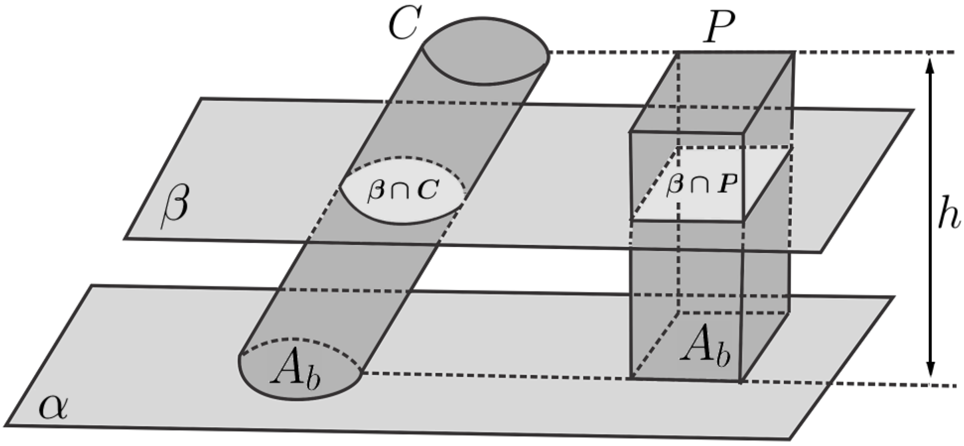
Resolução: *Primeiro calculamos a área da base que é:* $A_b = 233^2 = 54289m^2$*, então o volume é:*

$$V = \frac{54289 \cdot 146}{3} = 2642064,67m^3.$$

Logo, o volume da pirâmide de Quéops na época da construção era de $2642064,67m^3$.

2.2.6 Volume do cilindro

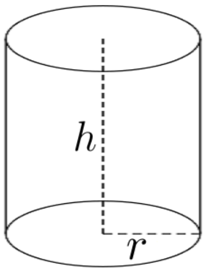
Dado um cilindro com base contida em um plano α, consideraremos um paralelepípedo retângulo, também com base contida no plano α, que tem a área da base igual à área da base do cilindro e altura igual à do cilindro.



Como a área $(\beta \cap C) = A_b$ e a área $(\beta \cap P) = A_b$, temos:

$$\text{Área } (\beta \cap C) = \text{Área } (\beta \cap P).$$

Pelo princípio de Cavalieri concluímos que o volume do cilindro é igual ao volume do paralelepípedo retângulo. Logo o volume do cilindro é dado pelo produto da área da base pela altura. Como a base do cilindro é um círculo de raio r, cuja área é πr^2, temos:



$$\text{Volume do cilindro:} V = \pi r^2 \cdot h.$$

O volume do cilindro é igual ao produto da área base pela altura.

Exemplo: Qual o volume de cera é necessário para fabricar uma vela que tem o formato de um cilindro reto de $4cm$ de diâmetro da base e altura de $15cm$? Use $\pi = 3,14$.

Resolução: *A área da base do cilindro é:*

$$A_b = \pi \cdot 2^2 = 4\pi = 4 \cdot 3,14 = 12,56cm^2.$$

Como o volume do cilindro é o produto da área pela altura, temos:

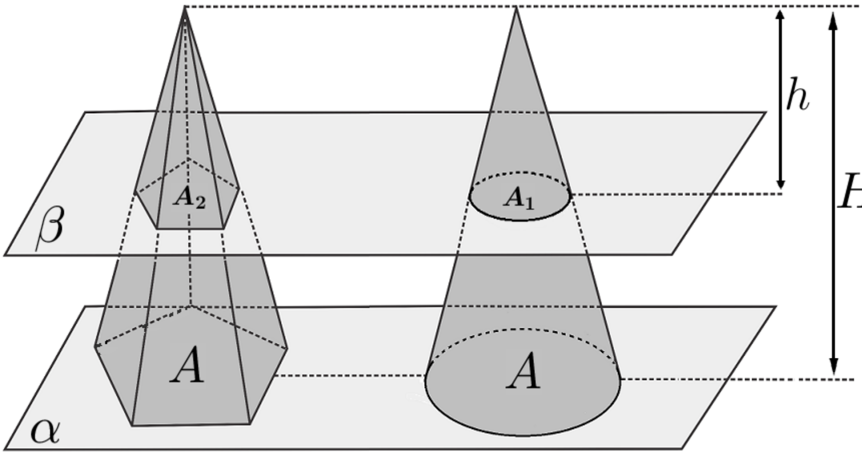
$$V = 12,56 \cdot 15 = 188,4cm^3.$$

Então é necessário $188,4cm^3$ *de cera para se fabricar a vela.*

2.2.7 Volume do cone

Lembrando a relação entre os volumes do prisma e da pirâmide de mesma altura e mesma base e usando o princípio de Cavalieri, temos que o volume do cone de mesma área da base e mesma altura de um cilindro é igual a um terço do volume do cilindro.

Consideremos um cone de altura H e base de área A contida em um plano horizontal α e uma pirâmide de altura H e base de área A também contida em α.

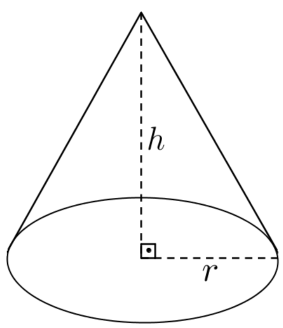


Se um plano horizontal β com distância h dos vértices secciona os dois sólidos, determinando regiões planas de áreas A_1 e A_2, temos:

$$\frac{A_1}{A} = \frac{h^2}{H^2} \quad e \quad \frac{A_2}{A} = \frac{h^2}{H^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{A_2}{A} = \frac{A_1}{A} \quad \Longrightarrow \quad A_1 = A_2.$$

Pelo princípio de Cavalieri podemos afirmar que o cone e a pirâmide iniciais têm o mesmo volume. Como sabemos o volume da pirâmide que é $V = A \cdot H/3$, o volume do cone também é o mesmo.

$$\text{Volume do cone} = \frac{A_b \cdot h}{3}.$$



Então para um cone de raio r e altura h, como a área do círculo é πr^2, podemos dizer que:

$$\text{Volume do cone} : V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}.$$

O volume do cone é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

Exemplo: Um tanque cônico tem $6m$ de profundidade e seu topo circular tem $4m$ de diâmetro. Qual o volume máximo em litros, que esse tanque pode conter de líquido?

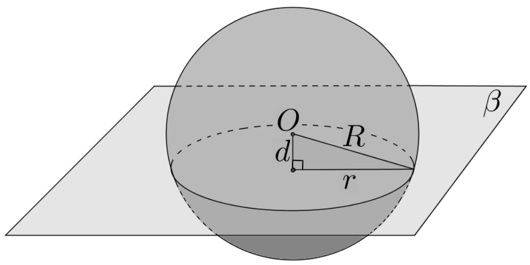
Resolução: *O volume do cone é:*

$$V = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 6}{3} = \frac{24\pi}{3} = 8 \cdot 3,14 = 25,12m^3$$

Como cada m^3 *equivale a mil litros, o tanque cabe* 25120 *litros de líquido.*

2.2.8 Volume da esfera

Observe a figura abaixo, em que aparece a secção determinada em uma esfera de raio R por um plano β.

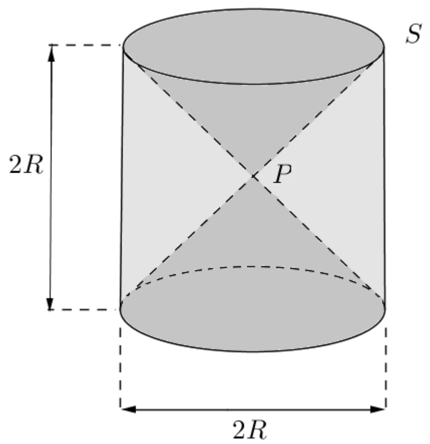


A intersecção do plano β com a esfera é um círculo de raio r. Se d é a distância de O (centro da esfera) ao plano β, temos:

$$R^2 = d^2 + r^2 \qquad \Longrightarrow \qquad r^2 = R^2 - d^2.$$

Portanto, sabendo a medida de r, a área da secção é dada por: $\pi(R^2 - d^2)$.

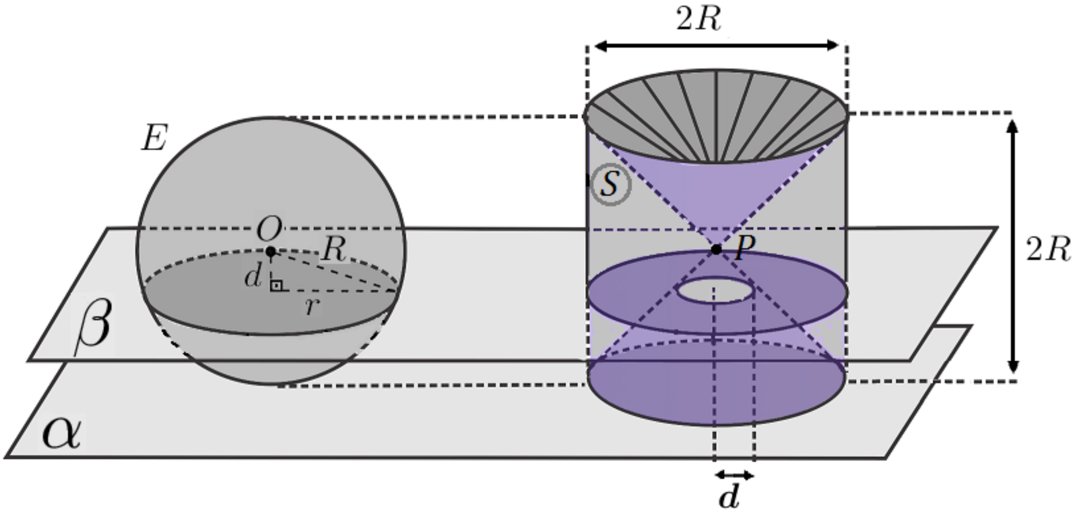
O volume da esfera será determinado utilizando-se o princípio de Cavalieri. Consideremos um sólido S que será obtido da seguinte maneira: de um cilindro equilátero de raio R e altura $2R$ retiramos dois cones de raio R, altura R e vértice P.



O volume do sólido S é:

$$V = \pi R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Agora podemos considerar, apoiados em um plano α, esse sólido S e uma esfera E de raio R, conforme mostra a figura abaixo.



Se um plano β, paralelo a α, seccionar a esfera E, a área da secção será $\pi(R^2 - d^2)$. Além disso, β também secciona o sólido S e a secção será uma coroa circular de raios R e d, e também de área igual a $\pi(R^2 - d^2)$.

A igualdade das áreas das secções permite concluir, pelo princípio de Cavalieri, que a esfera E tem o mesmo volume que o sólido S, que como sabemos é $4\pi R^3/3$. Podemos então concluir que, se uma esfera tem raio R, seu volume é:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

O volume de uma esfera é dado pelo produto de quatro terços de π pelo cubo do raio R.

Exemplo: Uma laranja tem a forma esférica com diâmetro de 10 cm. Qual o volume dessa laranja?

Resolução: *O raio da laranja mede* $5cm$. *Aplicando a fórmula do volume da esfera, temos:*

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 = \frac{500\pi}{3} = 523,3cm^3.$$

Portanto, a laranja tem um volume de $523,3cm^3$.

2.2.9 Atividades desenvolvidas com os alunos sobre volume

Foram desenvolvidas algumas atividades durante as aulas para facilitar a aprendizagem e compreensão dos conceito e das fórmulas de volume dos sólidos geométricos. Abaixo segue algumas atividades realizadas com algumas fotos.

Atividade 1 - Usar várias embalagens ou recipientes de vários tamanhos e formas para juntos com os alunos discutirmos a ideia de volume e capacidade e comparar ou estimar seus volumes. Depois usar as fórmulas e tentar calcular seus volumes.

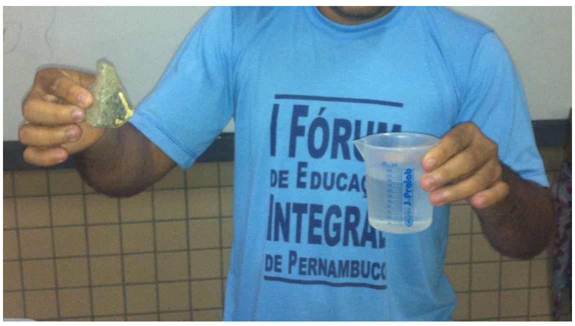
Atividade 2 - Utilizar o material dourado para explicar o conceito de unidade de medida de volume, volume de cubos e paralelepípedos retângulos.

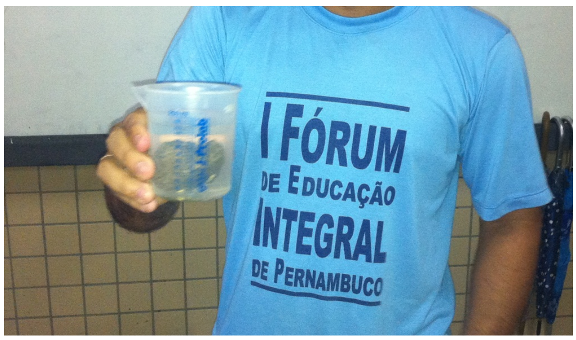
Atividade 3 - Usar blocos cúbicos para explicar o conceito da unidade de medida de volume, e o volume de cubo, paralelepípedos, prismas retos de bases retangulares, através de construção dos sólidos, visualização e cálculo de seu volume.

Atividade 4 - Para a explicação das fórmulas do cone e da pirâmide, utilizar cone e cilindro, pirâmide e prisma com mesma base e altura com abertura para enchê-los de água e mostrar que o volume do cone é um terço do volume do cilindro e o volume da pirâmide é um terço do volume do prisma de mesma altura e base.

Atividade 5 - Fazer as medidas dos sólidos (paralelepípedo, prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera), calcular seu volume e capacidade e depois colocar água (que estará em um recipiente milimetrado) neles para mostrar que os cálculos estão corretos.

Atividade 6 - Encontrar o volume de um objeto irregular como uma pedra, por exemplo, com a ajuda de um recipiente milimetrado e com água. Nesta atividade podemos discutir a relação entre volume e capacidade e também a densidade do objeto. Colocando uma pedra dentro do recipiente, o nível da água vai subir e podemos saber seu volume.





Capítulo 3

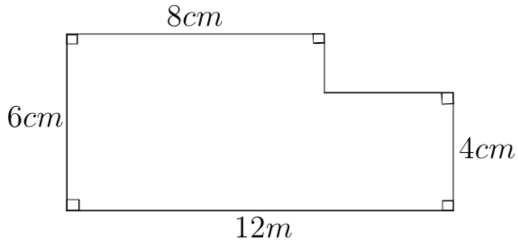
Exame diagnóstico final e análise dos resultados

Depois de trabalharmos os conteúdos, Área de figuras planas e Volume de sólidos geométricos, com o auxílio do material produzido e apresentado no capítulo anterior, foi aplicado uma nova atividade diagnóstica com 10 questões objetivas para os mesmos alunos que fizeram o teste inicial. Apresentamos primeiro as questões, com as quais os alunos foram avaliados em relação aos conceitos de área e volume e em seguida fizemos a análise dos resultados. O nível da prova foi um pouco mais elevado tomando por base a primeira, pois todos os conteúdos foram trabalhados e com isso os alunos ficaram supostamente mais preparados.

3.1 Teste diagnóstico

Questão 1 - Uma pessoa pretende plantar grama em um terreno que tem o formato e medida representados na figura abaixo. Quantos m^2 de grama é suficiente para cobrir todo o terreno?

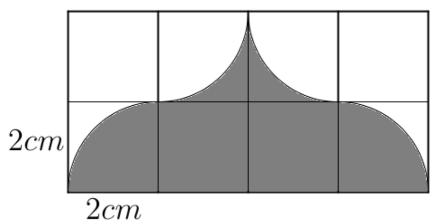
(a) 72
(b) 30
(c) 48
(d) 64
(e) 36



Alternativa correta: D

Questão 2 - Um jardineiro fez um cercado para plantar flores no formato da figura hachurada abaixo. Sabendo que a medida dos lados dos quadrados da figura abaixo é de $2m$, a medida da área destinada ao plantio de flores é de:

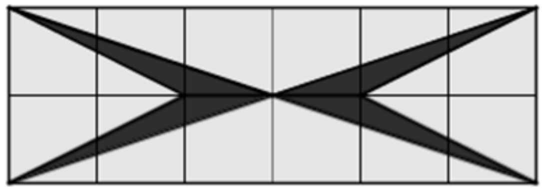
(a) $8m^2$
(b) $16m^2$
(c) $4m^2$
(d) $32m^2$
(e) $24m^2$



Alternativa correta: B

Questão 3 - A figura abaixo foi montada com doze azulejos quadrados de lados iguais a $10cm$. Qual é a área da região hachurada em cm^2?

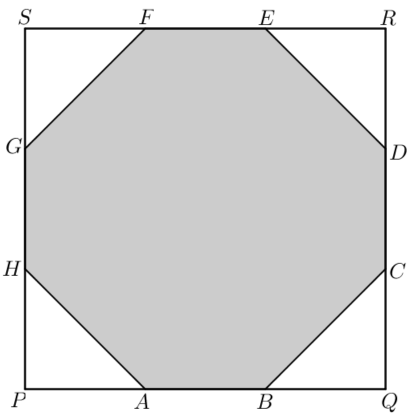
(a) 200
(b) 600
(c) 100
(d) 240
(e) 160



Alternativa correta: A

Questão 4 - Na figura tem-se um octógono de vértices $ABCDEFGH$ inscrito em um quadrado de vértices $PQRS$ de lado $12cm$. Os lados do quadrado estão divididos em três partes iguais. Então, é correto afirmar que a área desse octógono em cm^2 é:

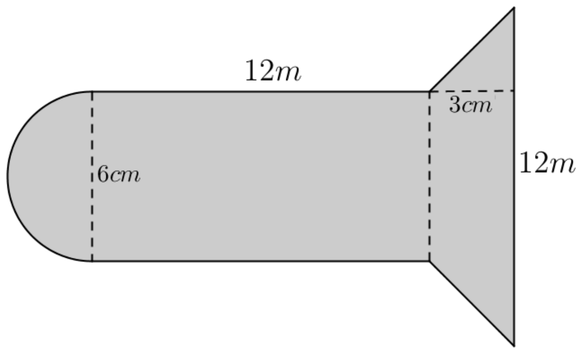
(a) 144
(b) 64
(c) 32
(d) 112
(e) 80



Alternativa correta: D

Questão 5 - Qual a medida da área da superfície total da figura abaixo? Considere $\pi = 3,14$.

(a) $72m^2$
(b) $113,13m^2$
(c) $33m^2$
(d) $144m^2$
(e) $132m^2$



Alternativa correta: B

Questão 6 - As dimensões de uma piscina olímpica são: 50m de comprimento, 25m de largura e 3m de profundidade. Calcule o seu volume em litros. Quantos metros quadrados de azulejos são necessários para revestir toda a piscina?

(a) $1700m^2$
(b) $1250m^2$
(c) $78m^2$
(d) $3750m^2$
(e) $2950m^2$

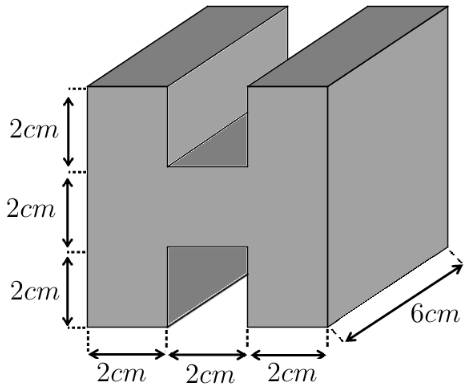
Alternativa correta: A

Questão 7 - Qual é o volume em m^3 da piscina olímpica com as medidas descritas na questão anterior?
(a) $1250m^3$
(b) $150m^3$
(c) $3750m^3$
(d) $78m^3$
(e) $75m^3$

Alternativa correta: C

Questão 8 - De um bloco cúbico de madeira, de aresta 6cm, recorta-se o sólido H mostrado na figura abaixo. Qual o volume do sólido H?

(a) $216cm^3$
(b) $168cm^3$
(c) $192cm^3$
(d) $144cm^3$
(e) $36cm^3$



Alternativa correta: B

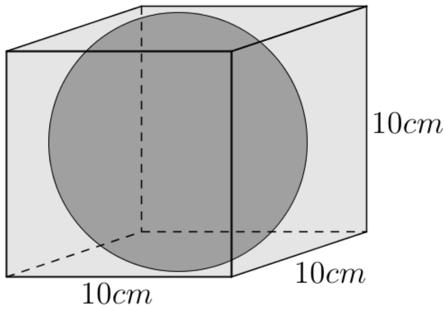
Questão 9 - Um tanque de gasolina tem forma cilíndrica. O raio da base é de $3m$ e o comprimento do tanque é de $6m$. Quantos litros de gasolina cabem nesse tanque? (Use $\pi = 3,14$).

(a) 18000
(b) 56520
(c) 169560
(d) 160000
(e) 18

Alternativa correta: C

Questão 10 - Num recipiente aberto em forma de cubo cuja aresta mede $10cm$, existem $500cm^3$ de água. No interior do recipiente é colocada uma esfera que se ajusta perfeitamente a ele como mostra a figura abaixo. Podemos afirmar que haverá derramamento de água? Considere $\pi = 3,14$.

(a) não
(b) sim, de $523cm^3$
(c) sim, de $1000cm^3$
(d) sim, de $500cm^3$
(e) sim, de $23cm^3$



Alternativa correta: E

3.2 Análise dos resultados obtidos

3.2.1 Percentual de alunos que marcaram cada alternativa por questão

A tabela abaixo mostra o percentual de alunos (de um total de 105 participantes) que marcaram cada alternativa por questão. As Células em negrito representam os gabaritos corretos.

Questão/Gabarito	A	B	C	D	E
1	10	6	4	**78**	2
2	4	**82**	12	2	0
3	**62**	13	12	3	11
4	14	4	6	**75**	1
5	8	**70**	7	10	5
6	**77**	4	1	6	12
7	7	2	**85**	4	2
8	7	**76**	9	3	5
9	10	15	**65**	7	3
10	18	8	4	9	**61**

Questão 1 - O objetivo dessa questão era verificar se os alunos conseguiram diferenciar os conceitos de área e perímetro, pois na questão 7 do primeiro teste, que era semelhante a essa, somente 6% responderam corretamente. Percebemos que houve um grande avanço pois 78% dos alunos acertaram a questão.

Questões 2 e 3 - O objetivo dessas questões era verificar se o alunos compreenderam o conceito de área de figuras planas. A primeira tem um nível fácil, basta completar os quadrados e calcular a área de cada quadrado. Na segunda o nível é um pouco mais elevado, o aluno precisava calcular a área de cada um dos quatro triângulos hachurados e somar os resultados ou calcular a área dos quatro triângulos não hachurados e subtrair da área do retângulo. O resultado foi bom nas duas questões, 82% e 62% respectivamente.

Questões 4, 5 e 6 - Para calcular as áreas dessas figuras, os alunos precisavam decompor as mesmas em figuras conhecidas para depois calcular suas áreas. O resultado também foi bom, pois 75% dos alunos acertaram a questão 4, 70% acertaram a 5 e 77% acertaram a 6.

Questões 7 e 9 - Nessas questões, os alunos precisavam conhecer o conceito de volume e as fórmulas do volume do paralelepípedo e do cilindro. A grande maioria dos alunos acertou as duas questões, 85% dos alunos acertaram a 7 e 65% acertaram a 9.

Questões 8 e 10 - Nessas duas questões, os alunos precisavam calcular o volume de uma figura e depois subtrair ou somar o volume da outra. 78% dos alunos acertaram a 8 e 61% acertaram a 10, o que foi um resultado muito bom, pois na primeira avaliação somente 12% dos alunos acertaram a questão 15 que era semelhante a estas.

A tabela e o gráfico abaixo mostram o percentual de alunos (de um total de 105 participantes) que acertaram cada questão. O percentual médio de acertos por questão foi de 73% aproximadamente.

Questão	Percentual de acertos
01	78%
02	82%
03	62%
04	75%
05	70%
06	77%
07	85%
08	76%
09	65%
10	61%

Analisando a tabela acima e o gráfico abaixo, observamos que o índice de acertos foi sempre acima de 60%, o que é número bom levando em consideração o nível de conhecimento básico dos alunos que é muito baixo. A questão com maior índice de acertos foi a

7 com 85% de acertos, enquanto isso, a questão onde os alunos mais se equivocaram foi a 10 com 61% de acertos.

3.2.2 Percentual de alunos versus número de acertos

A tabela abaixo mostra a quantidade de questões respondidas corretamente pelos alunos. A maioria (70%) dos alunos acertaram entre 6 e 9 questões das 10 propostas, nenhum aluno zerou ou acertou somente uma questão, e somente um acertou 2 e 3 questões, o que é um número bom, comparado ao resultado inicial. A tabela abaixo mostra esses dados.

Percentual de alunos	Número de acertos
0%	00
0%	01
1%	02
1%	03
4%	04
7%	05
11%	06
29%	07
24%	08
16%	09
7%	10

Comparando os resultados dos testes inicial e final observamos que houve um grande avanço no índice de acertos das questões. A média de acertos no teste inicial foi de 36% enquanto que no final foi de 73%.

Considerações Finais

Com o decorrer da aplicação das atividades pode-se perceber que a maioria dos alunos conseguiu compreender os conceitos de área e volume. A sequência foi desenvolvida de maneira progressiva, gradual, de tal forma que nos é permitido concluir que houve uma melhoria considerável na compreensão dos conceitos abordados, embora ainda tenha alguns alunos que precisam melhorar muito, talvez por terem muita dificuldade nos conteúdos básicos da matemática do ensino fundamental.

Analisando os resultados dos testes diagnósticos inicial e final observamos que houve um grande avanço em relação aos percentuais de acertos dos alunos em todas as questões. No teste inicial os alunos erraram muitas questões fáceis, confundiram os conceitos de área e perímetro, área e volume, enquanto no teste final esses erros caíram drasticamente. Houve um avanço na compreensão dos conceitos e fórmulas de área e volume, devido às aulas com materiais concretos e explicações das fórmulas. A média de acertos no teste inicial ficou em 36%, enquanto na avaliação final a média ficou em 73%, mesmo o nível da prova sendo um pouco mais difícil. No início a maioria dos alunos acertou menos da metade das questões e na prova final a maioria acertou acima de 60% das questões.

Com os resultados deste trabalho, nota-se o quanto é importante o ensino com o auxílio de materiais concretos e as demonstrações ou deduções, embora simples, mas que despertam o interesse dos alunos e faz com que eles compreendam o assunto e não somente decorem fórmulas. Espera-se que torne-se um hábito normal do professor de matemática do ensino médio, fazer esse elo entre a matemática lúdica, contextualizada e a matemática dedutiva, embora que de forma simples. Acreditamos que o ensino de Matemática no Brasil teria um salto qualitativo muito grande.

Referências Bibliográficas

[1] ARTIGUE, M. *Engenharia Didática. In: BRUNI, J. Didática das Matemáticas.* Tradução por Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

[2] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: Contexto e aplicações.* Vol.1 e 2, ed.1, São Paulo: Ática, 2010.

[3] IEZZI, Gelson et al. *Matemática: Ciência e Aplicações* . Vol.2, ed.1, São Paulo: Atual, 2010.

[4] LIMA, Elon Lages et al. *A Matemática do Ensino Médio.* Vol.2, ed.6, Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[5] NETO, Antônio Caminha Muniz. *Tópicos de Matemática Elementar.* Vol.2, ed.1, Rio de Janeiro: SBM,2012.

[6] PAIVA, Manoel. *Matemática.* Vol. único, ed.1, São Paulo: Moderna, 2005.

[7] SOUZA, Joamir. *Novo Olhar Matemática.* Vol. 3, ed.2, São Paulo: FTD, 2010.