Universidade Estadual de Londrina

CÉLIA MIYUKI YAMASAKI

CONSIDERAÇÕES SOBRE ALGUNS ASPECTOS DA LINGUAGEM MATEMÁTICA

Londrina
2014

CÉLIA MIYUKI YAMASAKI

CONSIDERAÇÕES SOBRE ALGUNS ASPECTOS DA LINGUAGEM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Nível de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de mestre.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho

Londrina
2014

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Y19c Yamasaki, Célia Miyuki.
Considerações sobre alguns aspectos da linguagem matemática / Célia Miyuki Yamasaki. – Londrina, 2014.
86 f. : il.

Orientador: Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2014.
Inclui bibliografia.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Lógica simbólica e matemática – Teses. 3. Linguística matemática – Teses. 4. Análise de interação em educação – Teses. 5. Educação matemática – Teses. I. Carvalho, Ana Márcia Fernandes Tucci de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Sociedade Brasileira de Matemática. IV. Título.

CDU 51:37.02

CÉLIA MIYUKI YAMASAKI

CONSIDERAÇÕES SOBRE ALGUNS ASPECTOS DA LINGUAGEM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Nível de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de mestre.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho

BANCA EXAMINADORA

____

Prof.ª Dr.ª Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho
Universidade Estadual de Londrina

____

Prof.ª Dr.ª Michele de Oliveira Alves
Universidade Estadual de Londrina

____

Prof.ª Dr.ª Karina Alessandra Pessôa da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Londrina

Londrina, 08 de agosto de 2014

Dedico este trabalho ao amor da minha vida, meu filho Lucas, razão pela qual inspiro-me todos os dias.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus que oportunizou, entre risos e lágrimas, minha participação nesta fantástica aquisição de conhecimentos.

À minha orientadora, professora doutora Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho, cujos apontamentos valorosos impulsionaram-me a buscar constantemente meu enriquecimento intelectual.

Às professoras doutoras Karina Alessandra Pessôa da Silva e Michele de Oliveira Alves pela preciosa participação na banca.

Ao professor doutor Túlio Oliveira de Carvalho, suplente desta banca, pelo envio de algumas considerações muito pertinentes.

Aos professores do curso, do IMPA e da UEL, por compartilharem seus conhecimentos por meio de suas aulas. Em particular, àqueles que conseguiram proporcionar-me preciosa vivência de estudar com vontade e qualidade.

Aos colegas de curso, pela oportunidade de dividirmos, durante o período das aulas presenciais, nossas alegrias e angústias.

Aos meus pais, Satiko e Tsuneki, por suportarem com muita paciência e carinho, todos meus momentos de desespero e arrogância.

À minha irmã Rose, que embora distante, motiva-me sempre a continuar.

À minha querida irmã Cecília (*in memoriam*), cuja lembrança terna, traz-me muitas saudades.

Aos amigos, Cláudia e Fernando, pelo agradável acolhimento de moradia em Londrina, no período das aulas presenciais em janeiro de 2013.

À amiga Roberta, por sua importante contribuição nos ajustes finais deste trabalho.

Aos amigos, Monique, Fábio, Rosana e André, que estiveram presentes em todo percurso desta trajetória e souberam compreender minhas lamúrias e vitórias.

Enfim, à todos os amigos e parentes, em especial, àqueles que souberam entender minha ausência em nossos ricos e estimados encontros.

“A Matemática, quando bem compreendida, revela não só a verdade, como também nos conduz à suprema beleza.”

Bertrand Russel

YAMASAKI, Célia Miyuki. **Considerações sobre alguns aspectos da Linguagem Matemática**. 2014. 86 p.. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

RESUMO

O presente estudo tem como foco os temas: Linguagem Matemática, Lógica e formalização dos resultados matemáticos. Por meio de pesquisa bibliográfica, foi realizada uma revisão literária fundamentada em referenciais tanto da Educação Matemática, quanto da Matemática. Buscou-se investigar as dificuldades inerentes à apresentação, expressão e comunicação dos conhecimentos matemáticos, seja no ensino, seja na aprendizagem; em qualquer nível escolar. Considerando a perspectiva de superar tais dificuldades, foram constituídos estudos que destacaram, no percurso das aulas de Matemática, os aspectos concernentes à Linguagem Matemática vivenciadas em diferentes experiências do cotidiano escolar. Estas, por sua vez, proporcionaram a reflexão sobre práticas educacionais que valorizem relações discursivas dos sujeitos educacionais, tanto professores quanto alunos, em posição de igualdade social. Neste contexto, as leituras das ações que permeiam a linguagem – como a fala, a escrita e os gestos, entre outras – foram analisadas e discutidas mediante confrontos obtidos pelos sujeitos educacionais, numa atitude, de fato, democrática. Priorizou-se a Lógica e sua importância, sob a ótica das argumentações, abordada substancialmente para sustentar o uso da linguagem matemática haja vista que uma demonstração matemática, requer o rigor lógico no estabelecimento da validade das afirmações. Na trajetória percorrida, no sentido de contribuir com a aquisição e ampliação de conhecimentos da Linguagem Matemática, alguns termos significativos – definição, noção primitiva, axioma, teorema, regras de inferência, modelo axiomático e demonstração – foram apresentados e discutidos, além de algumas técnicas de demonstração que foram exemplificadas. A preocupação centrou-se na formalização dos resultados matemáticos e, desse modo, na escrita de textos matemáticos. Diante das diversas concepções para o fortalecimento dos aspectos intelectuais e pessoais, o estudo apresenta uma proposta de intervenção, que se caracteriza como uma tentativa de comunicação das ideias matemáticas.

Palavras-chave: Linguagem Matemática. Lógica. Demonstração Matemática.

YAMASAKI, Célia Miyuki. **Considerations about some aspects of Mathematics Language,** 2014. 86 pages. Dissertation (Professional Masters in Mathematics in National Network) – State University of Londrina, Londrina, 2014.

ABSTRACT

This work has as focus Mathematics Language, Logics and formalization of mathematical results. By a bibliographic research, it was made a revision supported in references from Mathematics Education such as Mathematics itself. The main goal was to search into the difficulties inherent in presentation, expression and communication of mathematical knowledge, whether in education, or learning; at any grade level. Considering the prospect of overcoming these difficulties, we point out studies, in the course of mathematics classes, that concerning to the language and to the mathematics experienced in different aspects of everyday school activities. These, in turn, provided with a reflection on educational practices that value discursive relations of educational subjects, both teachers and students, in social equality position. In this context, the interpretation of actions that permeate the language - such as speech, writing and gestures, among others - were analyzed and discussed by clashes obtained by educational subject, an attitude, in fact, democratic. Privilege was made to Logics and its importance, from the perspective of the arguments, addressed substantially to support the use of mathematical language given that mathematical proof requires logical rigor in establishing the validity of claims. In this trajectory, in order to contribute to the acquisition and expansion of knowledge of Mathematical Language, some important terms - definition, primitive notion, axiom, theorem, rules of inference, axiomatic system and proof - were presented and discussed, as well as some technical demonstration were exemplified. Concern focused on the formalization of mathematical results and therefore in writing mathematical texts. Up the various concepts for strengthening the intellectual and personal aspects, the study presents one proposal for intervention, which is characterized as an attempt to communicate mathematical ideas.

Key words: Mathematics Language. Logic. Proof.

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A ideia inicial deste trabalho, cujo tema central é **Linguagem Matemática,** aqui entendida sob uma concepção mais ampla que abarca diferentes perspectivas, inclusive com diferentes níveis de rigor, decorreu durante o percurso das disciplinas ofertadas pelo Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), dadas as grandes dificuldades encontradas na apresentação escrita das soluções de exercícios e/ou problemas, desde as demonstrações de teoremas até as outras explicações que descreviam os conhecimentos matemáticos abordados.

As dúvidas e questionamentos estiveram presentes e foram constantes nos estudos desenvolvidos, principalmente quando nos referíamos aos resultados matemáticos. Algumas das perguntas que nos rodeavam o tempo todo eram: ‘Quais seriam as palavras pertinentes para escrever em cada situação?’, ‘Seria possível escrever de forma clara, concisa e ainda, elegante, sustentada pela ideia de conseguir expressar um resultado corretamente?’, ‘A escrita em matemática formal é uma questão pessoal ou não?’, ‘Quando colocar ‘suponhamos que’, ‘dado que’, ‘seja qual’, ‘reciprocamente’, ‘logo’, ‘portanto’, ‘então’, etc.?’.

Vale dizer que por muitas vezes, em conversas durante o horário de almoço com os colegas de curso, disparávamos a contar histórias utilizando tais palavras/expressões/frases na tentativa de nos familiarizarmos. Buscávamos, em dado momento, adequar-nos a um maior rigor na apresentação e expressão das ideias matemáticas, tanto na oralidade quanto na escrita. Fato este, que representaria estar em consonância com as aulas presenciais, as videoaulas e o material proposto pelo PROFMAT.

Desse modo, é certo que os estudos desenvolvidos durante o curso contribuíram significativamente para um aprimoramento, não somente de cunho pessoal e intelectual, em virtude da riqueza dos conteúdos matemáticos obtidos, mas também para o exercício da escrita em linguagem natural[1] e em linguagem matemática.

Tal contexto oportunizou reconhecer as falhas existentes no processo geral de comunicação dos resultados matemáticos quer sob apresentação oral, quer sob

[1] em nosso caso, o português.

apresentação escrita dos sujeitos educacionais envolvidos, tanto alunos quanto professores.

Com isso, percebíamos a necessidade imediata de refletir e mudar atitudes frente às concepções pedagógicas que norteavam as práticas educativas no ensino da Matemática.

De fato, lecionando, desde 1996, como professora na disciplina de Matemática do Curso de Formação de Docentes, Colégio Estadual Cristo Rei – Ensino Normal, na cidade de Cornélio Procópio – PR, percebemos que as dificuldades apresentadas pelos estudantes vêm aumentando ano a ano, a falta de compreensão nas significações das palavras ditas e escritas durante as aulas é constatada permanentemente.

Ainda, em conformidade com as Diretrizes Curriculares da Educação Básica (DCE) – PR, as quais reconhecem a Educação Matemática como campo de estudos, acreditamos que

> É necessário que o processo pedagógico em Matemática contribua para que o estudante tenha condições de constatar regularidades, generalizações e apropriação de linguagem adequada para descrever e interpretar fenômenos matemáticos e de outras áreas do conhecimento (PARANÁ, 2008, p. 49).

Porém, por meio de nossa prática docente, evidenciamos que os avanços na interpretação da leitura dos textos matemáticos apresentados em livros didáticos ou em outros materiais complementares, não são alcançados com êxito por esses estudantes. Símbolos, palavras, expressões, definições, teoremas, demonstrações e outras explicações contidas no desenvolvimento de exercícios e/ou soluções de problemas matemáticos, enfim de textos matemáticos, não são por muitas vezes, compreendidos.

Lembramos, em adição, que os estudantes terminam o curso profissionalizante e prosseguem seus estudos nas universidades, na condição imediata de atuarem simultaneamente como professores nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Assim, não podemos desconsiderar o importante papel dos conhecimentos matemáticos para um bom desempenho desses futuros profissionais da educação. O Curso de Formação de Docentes, em nível médio, é um curso profissionalizante, composto de uma matriz[2] curricular organizada em quatro séries, na qual constam disciplinas da base nacional comum e disciplinas específicas, num total de 4.800 horas/aula.

Na matriz implantada em 2004, a disciplina de Matemática totalizava 480 (quatrocentos e oitenta) horas/aula, assim distribuídas: 4 (quatro) aulas semanais nas 1ªs séries, 2 (duas) aulas semanais nas 2ªs séries, 4 (quatro) aulas semanais nas 3ªs séries e 2 (duas) aulas semanais nas 4ªs séries.

Todavia, em 2007, sob implantação simultânea, a matriz curricular que passou a vigorar – conforme Resolução n. 04/06/07 do Conselho Nacional de Educação (CNE)/Câmara de Educação Básica (CEB) e Deliberação n. 06/06 do Conselho Estadual de Educação (CEE) – reduziu a carga horária, que passou a ter 440 (quatrocentos e quarenta) horas/aula dispostas da seguinte forma: 3 (três) aulas semanais nas 1ªs séries, 2 (duas) aulas semanais nas 2ªs e 4ªs séries, 4 (quatro) aulas semanais nas 3ªs séries.

Já em 2010, houve a implantação de nova matriz, determinada pela Secretaria de Educação do Estado do Paraná (SEED–PR). Nesta, a disciplina de Matemática passou para um total de 400 (quatrocentos) horas/aula, em conformidade com a Lei nº 11.684 de 2008 que estabelece, *“a filosofia e a sociologia serão disciplinas obrigatórias em todas as séries do ensino médio*”, alterando o artigo 36 da Lei de Diretrizes de Bases da Educação Nacional (LDBEN) n. 9394 de 1996. A carga horária ficou assim distribuída: 2 (duas) aulas semanais nas 1ªs, 2ªs e 4ªs séries e 4 (quatro) aulas semanais nas 3ªs séries.

Finalmente, em 2014, em regime de implantação gradativa, foi estabelecida pela SEED-PR, outra matriz curricular aprovada pelo Parecer 259/2013 – CEE em 10/07/13, em que a disciplina passou para um total de 320 (trezentos e vinte) horas/aula, distribuídas da seguinte forma: 2 (aulas) semanais nas 1ªs, 2ªs, 3ªs e 4ªs séries, ainda em cumprimento a Lei 11.684/2008, LDBEN 9394/96.

Evidenciamos que nos últimos anos ocorreu uma diminuição expressiva em número de aulas da disciplina de Matemática, o que representou, em números, uma perda de 160 (cento e sessenta) horas/aula no Curso de Formação de Docentes da Educação Infantil e dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental em Nível Médio, na

[2] PARANÁ/SEED. **Proposta Pedagógica Curricular do Curso de Formação de Docentes da Educação Infantil e Anos Iniciais do Ensino Fundamental, em Nível Médio, na Modalidade Normal**. Disponível em: www.educadores.portaldiaadia.pr.gov.br. Acesso em: 28 jun. 2014.

Modalidade Normal – Integrado. Posto isto, logicamente, a escassez do número de aulas representou, consequentemente, a escassez de conteúdos. Expressamente, a diminuição no número de aulas, nos restringiu aquém, o cumprimento dos conteúdos programáticos previstos nas DCE – PR (2008).

Assim, sob a ótica deste professor normalista, primeiro contato do aluno com o conhecimento matemático, como ensinar e formalizar conceitos matemáticos nas primeiras séries do Ensino Fundamental se os conhecimentos científicos desenvolvidos durante o Curso de Formação de Docentes foram limitados?

A LDBEN n. 9394/96 prevê, em seu artigo 22

> A educação básica tem por finalidades desenvolver o educando, assegurar-lhe a **formação comum** indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores (BRASIL, 1996, grifo nosso).

O que compreendemos diante do *caput* do artigo? A formação comum significa: ler, escrever e contar; inclusive em Matemática. Todavia, a construção desta é de responsabilidade de todos envolvidos com a Educação, desde o Sistema Educacional até os próprios alunos. Em verdade, todos com sua parcela de responsabilidade no que tange ao fracasso escolar de muitos estudantes na disciplina de Matemática, requerendo, necessariamente, maior comprometimento de cada um.

Mesmo diante desta problemática de redução de carga horária apresentada, é inegável a importância de se consolidar os conhecimentos matemáticos na Educação Básica.

A ação docente deve envolver o estudo de processos que investigam como o estudante compreende e se apropria do conhecimento matemático, entendido como um saber construído historicamente, como produção humana, já que

> A Matemática, sob uma visão histórico-crítica, não pode ser concebida como um saber pronto e acabado mas, ao contrário, como um saber vivo, dinâmico e que, historicamente, vem sendo construído, atendendo a estímulos externos (necessidades sociais) e internos (necessidades teóricas de ampliação de conceitos). Esse processo de construção foi longo e tortuoso. É obra de várias culturas e de milhares de homens que, movidos pelas necessidades concretas, construíram coletivamente a Matemática que conhecemos hoje (FIORENTINI, 1995, p.31).

De acordo com essa tendência dialética, em consonância com a filosofia educacional vigente, a condução do trabalho no processo de ensino e aprendizagem em Matemática do Curso de Formação de Docentes deve dar conta não somente da construção do conhecimento científico em sua totalidade, mas também de estabelecer a integração e relação deste com as outras disciplinas, servindo-se de ferramenta instrumental colaborativa para a futura atuação profissional dos alunos do curso.

Portanto, ao corroborar com as DCE - PR (2008), apontamos para a necessidade de formação de um professor interessado em desenvolver-se intelectualmente no intuito de possibilitar meios para superar os desafios pedagógicos. Desta forma, a melhoria do quadro apresentado acontecerá pelo efetivo empenho e dedicação desses futuros profissionais da Educação. No entanto, há que se considerar, nem sempre isso acontece. Na posição de professor da escola pública, deparamo-nos, ao contrário, com o descaso de muitos e, consequentemente, com lacunas na aprendizagem da Matemática.

Propomos, diante das justificativas apresentadas, a realização de estudos sobre **Linguagem Matemática**, ressaltando a importância na compreensão, na interpretação e na expressão oral e/ou escrita das ideias matemáticas, numa perspectiva de contribuir com uma possível aquisição e construção de conhecimentos.

Para tanto, consideramos algumas análises e discussões abarcados por aspectos da linguagem e sua significação em aulas de Matemática. Neste contexto, ressaltamos o papel da comunicação oral e/ou escrita na constituição dos conhecimentos matemáticos, a linguagem utilizada para expressar os resultados matemáticos e, com isso, a tentativa de alcançar a compreensão dos conteúdos que permeiam a Matemática escolar, em qualquer nível de ensino.

No Capítulo I, discutimos aspectos concernentes à Linguagem, aos símbolos, desenvolvendo um certo percurso histórico, destacando a evolução concebida na ciência matemática desde então até os tempos atuais. Em seguida, apontamos a definição e a concepção do uso de símbolos sob a ótica de alguns estudiosos em Matemática e Educação Matemática, como: Ávila (2010), Berlinghoff e Gouvêa (2010), Carvalho (2010), Mendes (2006), Morais Filho (2007), entre outros. Colocamos ainda, algumas curiosidades referentes aos símbolos e expressões que se confundem, tais como: a igualdade e a implicação, a expressão indeterminada e a expressão impossível, além dos quantificadores lógicos.

Apresentamos, sob diversos pontos de vistas, como Garnica e Pinto (2010), Menezes (1999), Morais Filho (2010), Powell e Bairral (2006), entre outros, algumas análises e discussões sobre a linguagem e o ensino da Matemática na Educação Básica. Os resultados provenientes das pesquisas mostram e discutem leituras da Linguagem Matemática nas ações de professores e alunos durante as aulas de Matemática. As experiências são comentadas e compartilhadas no sentido de verificar como estão sendo comunicados os conhecimentos matemáticos. Desse modo, esses autores destacam a importância da oralidade e da escrita no processo de ensino e da aprendizagem da Matemática. E acrescentam, a persistência no uso constante de práticas orais e/ou escritas das ideias matemáticas, certamente oportunizam a melhoria de produção, compreensão e expressão dos conhecimentos dessa disciplina.

Finalmente por meio da questão: Por que a escolha sobre o estudo de Lógica?, contemplamos por meio de um percurso histórico fundamentado por alguns teóricos como Aaboe (1984), Machado (2001), Machado e Cunha (2008), Martins (1995), Sant'Anna (2003), entre outros; o importante papel da Lógica e do desenvolvimento do raciocínio dedutivo. Além disso, a Linguagem Matemática, sua formalização e o uso do método axiomático na construção dos resultados matemáticos.

No Capítulo II, enfatizamos o estudo dos conceitos de Lógica, sua significação e importância sob diferentes concepções de alguns autores, dentre os quais, Machado (2001), Machado e Cunha (2008) e Sant'anna (2003). Em seguida uma abordagem do Cálculo Proposicional – os conectivos e o uso de tabelas-verdades e, no uso da Linguagem Matemática com todo seu rigor lógico, apresentamos a demonstração matemática, o ato de demonstrar e suas conveniências sustentados por autores como Carvalho (2004), Carvalho e Savioli (2013), Fossa (2009), Morais Filho (2010), entre outros. Abordamos também alguns outros termos em Linguagem Matemática, os quais consideramos significativos em função de seus usos em uma demonstração matemática. São eles: definição, noções primitivas, axiomas, teoremas, regras de inferência e modelo axiomático. Em adição, sob alguns exemplos, aprofundamos um pouco nossos estudos referentes à demonstração de uma sentença condicional, a demonstração e o uso da tabela-verdade, além da apresentação de algumas técnicas de demonstração comumente utilizadas. E finalmente neste Capítulo, sob as visões de Machado (2001), Morais Filho (2007) e Sant'Anna (2003), comentamos sobre a formalização das ideias matemáticas e a Teoria Formal de modo a complementar os estudos.

No Capítulo III, tratamos da importância do ato de escrever em Matemática, trazendo algumas considerações, sugestões e recomendações de Morais Filho (2010) para redigir textos matemáticos. Destarte, entendemos o relevante papel do exercício da escrita, na condição de oportunizar aos sujeitos educacionais, tanto professores quanto alunos, o desenvolvimento de suas faculdades intelectuais numa tentativa de praticar uma possível comunicação dos resultados matemáticos.

Apresentamos, ainda, uma proposta de intervenção, por meio de uma atividade voltada tanto aos alunos da Educação Básica, em nosso caso, do Curso de Formação Docente em nível médio; quanto aos alunos de Cursos de Graduação em Matemática. Atividade esta, na qual selecionamos questões de 1ª Fase da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), apresentando-as em diferentes soluções; uma sob solução da OBMEP e outra sob nossa solução, seguidas de alguns comentários.

A partir daí, o objetivo é permitir o envolvimento dos sujeitos educacionais, tanto professor quanto alunos, em um confronto das ideias pensadas e expressadas mediante a solução das questões escolhidas.

Em dado momento, a prioridade deve ser concedida à fala dos alunos e à escuta do professor, colocando sob foco, o uso da Linguagem Matemática e a tentativa de comunicar os resultados obtidos.

CAPÍTULO I - ASPECTOS SOBRE LINGUAGEM NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

> *Quanto mais reflito sobre a linguagem, tanto mais me admiro que as pessoas consigam se entender umas com as outras.*
>
> *Kurt Gödel*

O objetivo deste Capítulo é investigar e discutir, por meio de pesquisa bibliográfica, diversas situações referentes ao ensino e a aprendizagem, cujos focos centram-se nos aspectos da linguagem, em especial, a Linguagem Matemática, uma comunicação pretendida e, esta por sua vez, ora estabelecida, ora não.

Na ciência, a linguagem desempenha um papel de fundamental importância para o avanço científico desde a antiguidade até os tempos atuais.

A palavra **linguagem**, no dicionário, significa

> [...] 1 qualquer meio sistemático de comunicar idéias ou sentimentos através de signos convencionais, sonoros, gráficos, gestuais, etc. 2 qualquer sistema de símbolos ou objetos instituídos como signos de um código.3 sistema secundário de sinais ou símbolos criado a partir de uma dada língua. 4 meio de comunicação natural próprio de uma espécie animal. 4.1 o meio de comunicação por meio de signos orais articulados, próprio da espécie humana. 4.2 a capacidade inata da espécie humana de aprender e comunicar-se por meio de uma língua (‘sistema’) [...] (HOUAISS, 2004, p. 1763).

Portanto, entendemos que ao pensarmos na transmissão das ideias matemáticas, certamente deveremos considerar a necessidade de aprendermos uma linguagem específica, esta a Linguagem Matemática. Isto ocorre porque quando intencionamos comunicar os conhecimentos matemáticos, utilizando somente a linguagem natural, verificamos que esta não atende às exigências do rigor lógico presentes no desenvolvimento da ciência matemática. Ilustremos por meio de um exemplo colocado por Ávila (2010), no qual mostra a impossibilidade de nos referirmos a algumas expressões matemáticas, escrevendo-as em linguagem natural.

> Lidando com o conjunto dos números naturais N , quando escrevemos, $n \in N \Rightarrow \exists a,b,c,d \in N, n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$,estamos expressando, em linguagem formal, o seguinte teorema de Euler: “Todo número natural é a soma de quatro quadrados.” A mesma proposição pode ainda ser escrita assim: $\forall n \in N \Rightarrow \exists a,b,c,d \in N, n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. A propriedade que utilizamos acima para definir um conjunto, qual seja,

> “conjunto de todos os números naturais que podem ser descritos com menos de 20 palavras na língua portuguesa” não é possível de ser expressa em linguagem formal [...] (ÁVILA, 2010, p. 79).

Então, em busca da compreensão dessas ideias matemáticas estaremos articulando a Linguagem Matemática em sua essência, no que se refere ao formalismo, sustentadas pela linguagem natural e suas possibilidades.

Vale dizer que no prosseguimento deste trabalho, em muitas discussões sobre a linguagem e simbolismo, sob as concepções dos autores tais como Garnica e Pinto (2010), Mendes (2006), Menezes (1999), Morais Filho (2007, 2010), Powell e Bairral (2006), entre outros; pressupõem-se a existência de entendimento de quem lê, fala ou escreve.

Todavia, segundo Carvalho (2010) que aborda, os efeitos linguísticos provindos da fala e escrita entre professores e alunos no contexto escolar, fundamentada por estudos da psicanálise e sob um olhar nos desencontros existentes na comunicação em aulas de Matemática, afirma que a linguagem como suporte da comunicação está sempre sujeita a falhas. Essa autora cita Cegalla (1977) que postula:

> Linguagem é a faculdade que o homem tem de se exprimir e comunicar por meio da fala. Cada povo exerce essa capacidade através de um determinado código linguístico, ou seja, utilizando um sistema de signos vocais distintos e significativos, a que se dá o nome de língua ou idioma. Criação social da mais alta importância, a língua é por excelência o veículo do conhecimento humano e a base do patrimônio cultural de um povo. A utilização da língua pelo indivíduo denomina-se fala. A fala nasce da inelutável necessidade humana de comunicação. A língua não é um sistema intangível, imutável; como toda criação humana está sujeita à ação do tempo e do espaço geográfico, sofre constantes alterações e reflete forçosamente as diferenças individuais dos falantes (CEGALLA, 1977 *apud* CARVALHO, 2010, p. 92-93).

Diante do exposto, consideramos, no âmbito de comunicarmos e compartilharmos os pensamentos matemáticos é preciso que façamos uso de uma ou várias linguagens simultaneamente, porém, cientes de que “[...] a linguagem, por mais correta que seja, contém imprecisões e ambiguidades” (ÁVILA, 2010, p. 78).

O ensino e a aprendizagem são na sua essência atos de uma tentativa de comunicação dos conhecimentos. A linguagem utilizada por professores e alunos durante as aulas de Matemática, Linguagem Matemática e a linguagem natural são os meios de tentar articular a aquisição de conhecimentos. Na realidade, a linguagem específica do domínio da Matemática, é vista como um comunicador universal com seus próprios códigos e regras gramaticais utilizados para traduzir ideias que remontam anos de estudos e os grandes avanços, não somente na Matemática, mas em outras áreas do conhecimento. Segundo Menezes (1999), supostamente ela é comum a uma certa comunidade que a utiliza para comunicar-se.

No entanto, no sentido de evitar excessos vale lembrar a opinião de Ávila que coloca: “A importância da linguagem formal é a de ser um instrumento para estudar a consistência das teorias matemáticas, não para ser usada no dia a dia do matemático” (ÁVILA, 2010, p. 80).

Esse autor ainda reforça, embora a Matemática dependa muito de sua linguagem e simbolismo específicos, as dificuldades de compreensão são inerentes e tornam esta disciplina por vezes, inacessível. Desse modo, é necessário ter o cuidado com o uso desses instrumentos, para que sejam colocados de forma útil e indispensável na contribuição do processo de transmissão e desenvolvimento dos conhecimentos.

É claro que a Linguagem Matemática Formal não se aprende a falar em casa e sim na escola, onde os estudos científicos devem ser comunicados formalmente. Contudo, vale dizer que a linguagem natural é a estrutura permanente para identificarmos e usarmos os códigos e regras da Linguagem Matemática bem como os de outras linguagens.

Na aritmética elementar, mediante a Matemática Formal, parece-nos consideravelmente fácil escrever a sentença “Quando 7 é subtraído da soma de 5 e 6 o resultado é 4”, que pode ser escrito como a expressão “$(5 + 6) – 7 = 4$”. Contudo, nem sempre esta forma de representação da sentença foi usada como fazemos hoje, com tanta frequência e naturalidade.

De acordo com historiadores, “Os gregos antigos e seus sucessores árabes não usavam quaisquer símbolos para operações ou relações aritméticas; eles escreviam seus problemas e soluções em palavras” (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2010, p.73).

Esses autores apresentam e comentam algumas maneiras de representação da sentença $(5 + 6) - 7 = 4$ escrita durante séculos passados.

> Anos **1470:** Regiomontanus na Alemanha teria escrito $5\ et\ 6\ \widehat{\imath\varrho}\ 7 — 4$ (A palavra *et* significa “e” em latim.) **1494:** na *Summa de Aritmetica* de Luca Pacioli, amplamente usada na Itália e outras partes da Europa, isso apareceria como $5\ \tilde{p}\ 6\ \tilde{m}\ 7 — 4$. O agrupamento da primeira soma provavelmente seria ignorado, supondo que é evidente que deve ser feito em primeiro lugar. Essa notação para mais e para menos ficou muito comum em boa parte da Europa. **1489:** pelo mesmo tempo na Alemanha, nossos agora familiares “mais” e “menos” apareceriam impressos pela primeira vez no livro de aritmética comercial de Johann Widman. Widman não tinha símbolo para a igualdade, de modo que sua versão para a afirmação provavelmente seria algo como: 5 + 6 – 7 das it 4. (A frase em alemão “*das it*” significa “isto é”.) Também usava + como abreviação para “e” em sentido não numérico e – como marca geral de separação. A ideia de que esses símbolos tinham significados matemáticos primários não era ainda clara. **1557:** o primeiro uso de + e – em um livro inglês ocorreu no texto de álgebra de Robert Recorde, *The Whetstone of Witte.* Nesse livro, Recorde também introduz $==$ como um símbolo para a igualdade. Ele o justifica dizendo “duas coisas não podem ser mais iguais” [...] Seus outros sinais são alongados também. Ele poderia escrever $5 \;+\; 6 \;—\; 7 \;==\; 4$. [...] **1629:** Albert Girard, da França, teria apresentado o lado esquerdo de nossa equação (5 + 6) – 7 ou (5 + 6) ÷ 7; para ele, essas notações significavam a mesma coisa! De fato, ÷ era amplamente usado para subtração durante os séculos XVII, XVIII e até mesmo no século XIX, particularmente na Alemanha. **1631:** na Inglaterra, William Oughtred publicou um livro muito influente, chamado *Clavis Mathematicae*, enfatizando a importância de usar símbolos matemáticos. Seu uso de +, - e = para adição, subtração e igualdade contribuiu para adoção desses símbolos como notação padrão. Porém, se Oughtred quisesse enfatizar o agrupamento dos dois primeiros termos de nossa expressão, ele usaria dois pontos. Assim, ele poderia ter escrito :5 + 6: - 7 = 4. [...] **1637:** *La Géométrie* de René Descartes, o livro que simplificou e regularizou muito da notação algébrica que usamos hoje [...] Nesse livro, Descartes usava um traço partido (um hífen duplo) para subtração, de modo que sua versão para nossa equação seria: $5 + 6 \text{ - - } 7 \propto 4$. A notação algébrica de Descartes se espalhou rapidamente pela comunidade matemática europeia, frequentemente levando consigo o estranho símbolo novo para igualdade. [...] Seu uso persistiu em alguns lugares, particularmente na França e Holanda, até o início do século XVIII. Começo dos **1700:** parênteses gradualmente substituíram outras notações para agrupamentos, em grande parte graças aos influentes escritos de Leibniz, dos Bernoullis e de Euler. [...] o modo mais comum de escrever nossa simples equação era o que usamos hoje: (5 + 6) – 7 = 4. (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2010, p. 73-75).

É possível notar quantos séculos se passaram até que os diferentes símbolos das operações de adição, subtração e igualdade perpetuassem. Da Matemática na Antiga Babilônia até os séculos XVI e XVII passaram-se quase 3.000 anos para que o uso dos símbolos começasse a ser sistematizado e se tornado uma prática (MORAIS FILHO, 2007).

Dada esta questão observemos a importância da criação dos símbolos matemáticos e a necessidade de sua universalização.

A Matemática é uma ciência que exige, por sua natureza, unicidade desses símbolos para que em qualquer tempo ou contexto cultural, ela possa desenvolver-se e socializar-se.

Portanto, à esse reconhecimento diante da manipulação dos conhecimentos matemáticos e, com vistas a uma comunicação destes, talvez estabelecida, é que se deve a evolução científica construída por milhares de anos.

1.1 NOTAÇÃO MATEMÁTICA

A notação matemática, construída historicamente, deve ser adotada servindo-se como uma ferramenta colaboradora e facilitadora no desenvolvimento e aquisição dos conhecimentos matemáticos. Por Morais Filho (2007), temos que

> Uma notação matemática é um conjunto de símbolos – podendo ser apenas um único símbolo – que representa um objeto ou uma ideia matemática. Esses símbolos podem ser construídos com letras de nosso alfabeto, com letras do alfabeto grego, com números de algum sistema de numeração, com figuras conhecidas, etc (MORAIS FILHO, 2007, p. 13).

Desse modo, nos estudos da Matemática, fundamentalmente, parece-nos conveniente dizer que em algumas ocasiões, a Linguagem Matemática se reduz à manipulação desses símbolos e notações em lugar das palavras em linguagem natural. O que nos remete, a necessidade imediata na obtenção de tais requisitos para lidarmos com os conhecimentos dessa disciplina, em pormenores, sem a devida compreensão dessas notações, não nos é possível ler, desenvolver, comentar ou discutir as ideias a serem construídas.

Mendes (2006), sob a visão de uma matemática humanista, destaca:

> A Matemática e a Escrita têm uma relação muito íntima e simbiótica no que se refere ao processo humano de comunicação do pensamento acerca dos fenômenos naturais e sociais. [...] Pode-se admitir, portanto, que houve a necessidade de se estabelecer códigos específicos de escrita (os números) para representar as várias operações matemáticas (aritméticas). Isso porque, com as limitações da memória humana, seria difícil superarmos as dificuldades surgidas na manipulação de quantidades e operações, o que implicou na solução de problemas com determinado grau de complexidade numérica (MENDES, 2006, p. 1).

Esse autor fala sobre os aspectos sócio-cognitivos e culturais relacionados ao conceito de número, seu surgimento e sua simbologia, nas tradições de diferentes sociedades. As construções do pensamento numérico, no qual a mente humana elabora uma linguagem para comunicar, seja por palavras/frases ou símbolos/expressões. “O importante é a concretização da representação mental através de códigos elaborados para comunicar” (MENDES, 2006, p.9).

Afinal, é sabido que os fundamentos numéricos, constituem-se como instrumentos de apoio em todas atividades humanas, sejam elas, sociais, econômicas, políticas, entre outras.

Um exemplo interessante é citado por Mendes (2006), com a crônica de Clarice Lispector publicada em 1984, e esta desde então nos alerta para o aspecto da vida numérica mostrando a preocupação com o caráter atribuído ao número e a perpetuação da máxima pitagórica que dizia “*os números governam o mundo*”.

A crônica intitulada “Você é um Número” alerta

> *Se você não tomar cuidado vira número até para si mesmo. Porque a partir do instante em que você nasce classificam-no com um número. Sua identidade no Félix Pacheco é um número. O registro civil é um número. Seu título de eleitor é um número. Profissionalmente falando você também é. Para ser motorista tem carteira com número, e chapa de carro. No Imposto de Renda, o contribuinte é identificado com um número. Seu prédio, seu telefone, seu número de apartamento – tudo é número. Se é dos que abrem crediário, para eles você é um número. Se tem propriedade, também. Se é sócio de um clube tem um número. Se é imortal da Academia Brasileira de Letras tem o número da cadeira. É por isso que vou tomar aulas particulares de Matemática. Preciso saber coisas. Ou aulas de Física. Não estou brincando: vou mesmo tomar aulas de Matemática, preciso saber alguma coisa sobre cálculo integral*.[...] (MENDES, 2006, p. 75-77).

Por isso, a notação deve ser vista como a linguagem inerente ao processo formal da Matemática com a intencionalidade de transmitir e desenvolver os conhecimentos, seja no ensino, seja na aprendizagem, seja na própria condição de existência humana.

Tão logo, o cuidado ao tratar-se da memorização e familiarização dessas notações, quando apresentadas no percurso dos conteúdos matemáticos em qualquer nível escolar, é necessário e pertinente.

Na linguagem corrente podemos usar palavras distintas que expressam a mesma ideia. E na Matemática também encontramos notações diferentes que expressam a mesma ideia.

Por exemplo, o produto de dois números *a* e *b* pode ser representado por

$$ab,\ a.b,\ a \times b$$

Entretanto, nesse caso, todas as formas apresentadas surgiram em decorrência de motivos históricos ou de conveniências de uso científico.

Assim, respeitar as regras e condições das notações historicamente construídas e sua evolução, parece-nos ser um passo relevante a favor da assimilação dos conhecimentos da ciência matemática.

Convém observarmos ainda, conforme aponta Morais Filho (2007), em tempos atuais algumas notações foram criadas principalmente por necessidade de adaptação aos símbolos dos teclados de um computador. E no Brasil, tal como a Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), o órgão que estabelece e regulamenta as normas para escrita científica (artigo, dissertação, livro, etc.), a notação usada para números é regulamentada pela Lei do Conselho Nacional de Metrologia, Normatização e Qualidade Industrial: Resolução n.º 12, de 12 de Outubro de 1988.

1.2 SÍMBOLOS QUE SE CONFUNDEM

1.2.1 A igualdade "=" e a implicação "$\Rightarrow$"

Como já apontado na Seção 1.0, segundo Berlinghoff e Gouvêa (2010), em 1557, o matemático inglês Robert Recorde publicou um livro de Álgebra no qual introduziu o símbolo **"=",** da igualdade, referindo-se a um par de retas paralelas mediante a seguinte justificativa: "duas coisas não podem ser mais iguais." Assim, ao admitirmos a igualdade, estamos admitindo coisas iguais. E, portanto, vale lembrar as propriedades que seguem: "Para quaisquer objetos a, b e c valem: Propriedade reflexiva: a = a; Propriedade simétrica: Se a = b, então b = a; Propriedade transitiva: Se a = b e b = c, então a = c" (MORAIS FILHO, 2007, p. 53).

No entanto, se tivermos a implicação lógica, '$P \Rightarrow Q$', supondo P e Q duas proposições quaisquer, podemos dizer sob diferentes maneiras: *"P implica Q", "se P então Q", "P é condição suficiente para Q", "Q é condição necessária para P" ou "P somente se Q"*.

Vejamos então, alguns exemplos no uso correto dos citados símbolos.

Primeiramente, da igualdade, podemos escrever as expressões tais como

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{7}=\frac{7-3}{21}=\frac{4}{21} \qquad \text{ou} \qquad \frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2\ ,$$

que representam coisas iguais.

E, da implicação, podemos escrever

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 - 2x + 1 = 0 \,,$$

que significa, neste caso, que toda raiz da equação $x^2 + x - 1 = 0$ é também raiz de

$$x^3 - 2x + 1 = 0.$$

“A propósito, a resolução de uma equação é um caso típico que se tem uma sequência de implicações lógicas.” (LIMA, 2006, p. 8)

1.2.2 A expressão indeterminada e a expressão impossível

Na operação de divisão é sabido que não é possível dividir por zero. Portanto, quando isto ocorre num contexto matemático qualquer, chamamos de expressão indeterminada aquela escrita na forma $\frac{0}{0}$ e expressão impossível aquela escrita na forma $\frac{a}{0}$ tal que $a \in R - \{0\}$.

Com mais detalhes, exemplifiquemos:

Vejamos que $\frac{8}{2} = 4$ pois $8 = 2.4$; do mesmo modo, $\frac{56}{16} = \frac{7}{2}$ pois $56 = 16.\frac{7}{2}$ e, em geral, se a e b são números reais, sabemos que a igualdade $\frac{a}{b} = c$ vale para algum $c \in R$, se tivermos $a = b.c$, e reciprocamente.

Assim, na expressão $\frac{0}{0} = c$ temos que $0 = 0.c$, isto é, a igualdade vale para qualquer $c \in R$ não sendo possível determinar um valor preciso para $\frac{0}{0}$. Desse modo, dizemos que a expressão $\frac{0}{0}$ é indeterminada.

Seguindo o mesmo raciocínio, a expressão $\frac{2}{0}$ é chamada impossível, pois se $\frac{2}{0} = c$ para algum número $c \in R$, então $2 = 0.c$, que não satisfaz a igualdade. Neste caso, as expressões do tipo $\frac{a}{0}$, $a \in R - \{0\}$, são chamadas expressões impossíveis.

1.2.3 Os quantificadores universal “$\forall$”e existencial “$\exists$”

Sabemos que os símbolos “Para todo ou $\forall$” e “Existe ou $\exists$” quantificam, como também transformam uma sentença aberta em outra encontrando um conjunto adequado para a quantidade de elementos que satisfazem as condições definidas por uma variável livre.

Assim, por exemplo, a sentença aberta,

$$x + 3 = 5$$

pode ser transformada, usando o quantificador existencial em:

$$\exists x \text{ real tal que } x + 3 = 5,$$

e, usando o quantificador universal em:

$$\forall x \text{ real temos que } x + 3 = 5.$$

Notamos que é possível classificar por meio do valor lógico as sentenças quantificadas, isto é, verdadeira ou falsa e sem ambiguidades.

Assim, concluímos, a sentença que possui o quantificador existencial é verdadeira e, por conseguinte, a que possui o quantificador universal é falsa.

Da mesma forma, por exemplo, a sentença aberta:

“Políticos são desonestos”

pode ser transformada, usando o quantificador existencial em:

“Alguns políticos são desonestos”,

e, usando o quantificador universal em:

“Todos os políticos são desonestos”.

Novamente, é possível classificar, a primeira sentença transformada, como verdadeira e a segunda, como falsa.

O uso dos quantificadores é relevante haja visto que, do último exemplo apresentado, as novas sentenças poderiam ser:

“Em geral, os políticos são desonestos”

ou

“A maior parte dos políticos é desonesta”,

as quais acreditamos serem imprecisas para classificarmos em verdadeira ou falsa.

1.3 A EXPRESSÃO ORAL E ESCRITA DAS IDEIAS MATEMÁTICAS

Em busca de referências bibliográficas cujos estudos apontassem para a Linguagem Matemática, bem como sua compreensão, encontramos autores que argumentam sobre o insucesso ocorrido no processo de ensino e aprendizagem na disciplina de Matemática. Esses evidenciam atitudes que por vezes, reforçam a incompreensão na leitura e interpretação dos textos matemáticos, nas explicações e nas articulações do diálogo de professores e alunos nas aulas de Matemática.

Autores como Garnica e Pinto (2010), Powell e Bairral (2006), Morais Filho (2010), Menezes (1995, 1999), entre outros, analisam e discutem por meio de dados empíricos obtidos no cotidiano escolar questões relacionadas à Linguagem Matemática, acreditando que essa incompreensão, devida a diversos fatores, pode ser superada.

Apontamos os estudos de Garnica e Pinto (2010), que nos explicitam e analisam por meio de filmagens de aulas de Matemática, o modo como a linguagem (ou linguagens) ocorre(m) em salas de aula por eles observadas. Na intenção de buscar aproximações sobre a questão: como o modo de enunciação de algo se relaciona à atribuição de significado à esse algo?, recorrem a trabalhos produzidos por estudiosos em Educação Matemática que sugerem algumas concepções voltadas ao tema: linguagem e o ensino de Matemática. Com isso, deparam-se com diferentes significações sustentadas sob referenciais teóricos que definem o termo linguagem e, concluem, estas significações são abordagens provenientes de visões epistemológicas particulares.

Esses autores comentam sobre os conflitos de significados gerados nas falas de professores e alunos tanto no uso de palavras da matemática formal em diferentes situações tais como *reta e limite* quanto no uso de palavras que não fazem parte do contexto matemático, colocadas, segundo eles, de forma inadequada tais como: *tortinho, bem pertinho*. Falam das repetições sistemáticas na utilização de regras conduzidas no sentido de uma reprodução sistemática de enunciados sem necessidade. Por exemplo, *“Área é igual a base vezes altura.”* Denominam como coisificação de objetos matemáticos, algumas falas de professores em que colocam estes como concretos, visualizáveis ou que se movem. Por exemplo *“A base vai desse ponto até...”* . Modos esses, de caracterizar os objetos matemáticos, que se distanciam do formalismo exigido pela ciência e, consequentemente, da abstração dos conhecimentos que deve ser desenvolvida.

Por outro lado, os autores apresentam e consideram, em seguida, uma outra leitura, com um olhar positivo diante das situações obtidas em sala de aula. Esta, sustentada pelos aportes teóricos: Modelo Teórico dos Campos Semânticos (MTCS)[3] e o segundo Wittgenstein[4], em que discutem os possíveis pontos de aproximações e distanciamentos.

Os conflitos de significados, por exemplo, por meio desses aportes conduzem o professor que poderá chamar de *reta* um *segmento de reta* quando não se tratar de uma incorreção conceitual. E as repetições sistemáticas podem ser vistas agora, como o passar de um *saber-fazer* para um *saber-fazer e falar*, exercitando procedimentos.

No segundo Wittgenstein (1999), um dos aportes teóricos, os autores identificam a compreensão da linguagem em situações do universo da sala de aula, tais como: as palavras, as expressões ou os gestos; que ocorrem corriqueiramente, como sendo os *modos de uso* que estes acontecem, os “jogos de linguagem”. Esses também tomados com uma leitura positiva. E ainda acrescentam, o uso dessa linguagem, das explicações de fenômenos cotidianos, são vistas como não ideais no segundo Wittgenstein (1999); considerando a existência do Wittgenstein (1968), que prega por “uma concepção que parece buscar a essência do funcionamento de uma linguagem ideal” (GARNICA; PINTO, 2010, p. 218).

Para eles, no segundo Wittgenstein (1999),

> É o uso da linguagem que faz com que uma **forma de vida**[5] constitua-se como tal, pois cada *forma de vida* estabelece o modo como as palavras, as

---

[3] O MTCS é considerado como um processo de comunicação que busca a percepção de que a “cada vez que dizemos algo “de modo diferente”, falamos “de algo diferente”, ou seja, o significado de “algo” está dinamicamente vinculado à enunciação sobre ele.” (GARNICA; PINTO, 2010, p. 222). E este, por sua vez, colocado numa forma de ler ações/ falas, com uma leitura positiva de significados. Ainda, “[...] o interesse em entender o que as pessoas dizem e por que dizem, em oposição a olhá-las pelo erro, pela falta.” (SILVA, 2003, p. 22 *apud* GARNICA; PINTO, 2010, p. 215).

[4] Comumente divide-se a filosofia de Wittgenstein em duas fases, uma primeira marcada pelo *Tractatus logico-philosophicus* e uma segunda marcada pelo *Investigações filosóficas* (GARNICA; PINTO, 2010, p. 218). Neste contexto, o segundo Wittgenstein trata-se da linguagem tomada no *Investigações filosóficas.*

[5] “Wittgenstein utiliza-se dessa expressão para designar nossos hábitos, costumes, ações e instituições que fundamentam nossas atividades em geral, envolvidas com a linguagem.” (Gottschalk, 2008 *apud* GARNICA; PINTO, 2010, p. 219)

> expressões e os gestos são utilizados e como são, consequentemente, negociados significados para essas palavras, essas expressões e esses gestos (GARNICA; PINTO, 2010, p. 219, grifo nosso).

Assim, os jogos de linguagem acontecem o tempo todo na sala de aula com palavras, expressões e gestos conduzidos sob ações intencionais dos sujeitos que os produzem. Por exemplo, ao pensarmos no uso da palavra *reta* podemos referenciá-la de diferentes formas, isto é, como um objeto matemático ou simplesmente em outros contextos tais como: uma pessoa *reta*, em linha *reta*, etc.

Garnica e Pinto (2010) colocam que nas aulas de Matemática as manifestações linguísticas são identificadas como dois jogos de linguagem: a linguagem natural (o da língua materna), que pressupõem, os participantes sabem jogar, e a Linguagem Matemática usada pelos que têm formação matemática (o modo de usar a linguagem com símbolos, regras e gramática próprios); e a partir desses, a intenção é uma comunicação supostamente estabelecida.

Dentre os fatores que possam, talvez, contribuir com a melhoria da compreensão da Linguagem Matemática, vamos citar Powell e Bairral (2006), que nos falam sobre a importância no uso da escrita desde a convencional (papel e lápis) até aquelas que aparecem nos meios tecnológicos de comunicação (a internet). Escrita esta, posta na condição de influenciar a aprendizagem matemática e colaborar na análise da cognição.

Uma concepção que busca a aquisição de conhecimentos em aulas de Matemática e, coloca sob foco a escrita numa perspectiva de transformar continuamente a cognição e o aprendizado de quem a produz.

Esses autores priorizam o estudo do desenvolvimento do processo de matematização mediante o registro escrito porque consideram que

> [...] Matematizar é um processo natural, inerente a todo ser humano, que deve ser desenvolvido à medida que este tome consciência de um evento ou acontecimento matemático e construa para ele diferentes formas de convencimento (POWELL; BAIRRAL, 2006, p. 15).

Em seguida lembram que as atitudes tais como falar, gesticular, desenhar, escrever, entre outras, representam a tentativa de expressar um pensamento qualquer, seja este matemático, ou não.

Revelam uma primeira experiência do processo de matematização, vivenciada no âmbito escolar, com a colaboração de um aluno para a atividade escrita, a qual denominam como dinâmica iterativa e mostram, após vários textos produzidos, surpreendente avanço não somente na apresentação da escrita mas também na compreensão das ideias matemáticas envolvidas. Assim, afirmam que a prática da escrita força os interlocutores a refletirem, e desse modo, contribui tanto para o enriquecimento de vocabulário dos alunos bem como para o uso dessas novas palavras em contextos de sua compreensão matemática. Diante dos resultados obtidos comentam, "Diferentemente da fala, a escrita foi um meio estável que permitiu aos alunos e docentes examinarem colaborativamente o desenvolvimento do pensamento matemático" (POWELL; BAIRRAL, 2006, p. 27).

Uma segunda experiência que os autores revelam também está voltada para a formação no desenvolvimento da escrita, porém, a atividade nela proposta evidencia os resultados mediante a utilização dos meios virtuais de comunicação – *e-mails, chat* e fóruns de discussão, com vistas às produções discursivas e suas iterações. Essas, por eles denominada como escritura eletrônica, que por sua vez, priorizou e também comprovou a riqueza na iteratividade no desenvolvimento da escrita e do pensamento matemático.

Desse modo, ressaltam a importância de alunos e professores usarem a escrita no sentido de entender e ampliar suas ideias matemáticas, tanto nas iterações presenciais como naquelas que se efetivam a distância. E reforçam, a escrita pode contribuir na construção de práticas comprometidas com mudanças significativas no processo de ensino e aprendizagem.

Finalmente, esses autores concluem, "A escrita é uma ferramenta importante para desenvolver a cognição e fomentar o aprendizado matemático" (POWELL; BAIRRAL, 2006, p. 101), contudo, para obtenção de resultados satisfatórios no ensino e na aprendizagem, "[...] a produção deverá ir além da expressividade e da individualidade" (POWELL; BAIRRAL, 2006, p. 101), para que possa instituir processos colaborativos individuais e coletivos em busca de uma reflexão crítica.

Morais Filho (2010), também comenta sobre a importância de professores e alunos perceberem a necessidade de escrever no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, e aponta, a escrita além de ser um excelente exercício de Lógica é uma das ferramentas didáticas básicas requeridas de um docente.

Para ele, saber escrever significa saber comunicar as ideias com eficiência, dado que boas ideias quando expressas de forma incompreensível, perdem seu valor. Coloca que “Quando se escreve, melhora-se a convicção nos próprios argumentos, apura-se o raciocínio” (MORAIS FILHO, 2010, p. 5) e, consequentemente, comunica-se com maior facilidade. Com isso, remete-nos um alerta importante referente aos nossos estudantes, dizendo, estes estão percebendo que a Matemática não se reduz a simplificar expressões, usar fórmulas ou dar respostas corretas.

Esse autor argumenta que durante a escrita organizamos nossas ideias em um texto de tal forma que estas sejam entendidas por quem lê. Então, reforça, devemos escrever um texto matemático expressando realmente o que se deseja comunicar e com o cuidado de não torná-lo ainda mais inacessível para os que acreditam que a Matemática é complicada e difícil. Atenta-nos para as diferenças dos elementos num texto científico: o que pensamos, o que desejamos expressar, o que escrevemos e o que os leitores vão entender; concluindo que a arte de bem escrever está em fazer esses elementos serem uma única coisa.

Lembra-nos que a motivação de quem lê acontecerá se tivermos o domínio do tema, e claro, uma possível habilidade de transmitirmos por meio da escrita. Ainda nos alerta, “escreva corretamente o Português, respeitando as regras gramaticais da nossa Língua. Só poderá obter sucesso ao escrever quem conhece o mínimo necessário da língua usada para se comunicar” (MORAIS FILHO, 2010, p.17).

E, finalmente, esse autor destaca

> [...] diferentemente das ideias matemáticas, uma língua é um ente mutável, se modifica ao longo do tempo, dependendo de diversos fatores, tais como sociais, etários, regionais, etc. [...] temos que aceitar o fato de que as línguas se modificam, os resultados matemáticos não (MORAIS FILHO, 2010, p. 36).

Menezes (1999), numa abordagem que apresenta estudos da Linguagem Matemática, em especial na sala de aula, traz a ideia que a função desta é comunicar e, por isso, a ligação entre as palavras comunicação e linguagem é tão óbvia. Sustentado por esta ideia, toma como foco principal a qualidade da comunicação oral, a qual o professor promove nas aulas de Matemática. O autor diferencia a Linguagem Matemática utilizada pelos matemáticos profissionais como “mais exigente” do que a linguagem utilizada para traduzir ideias em sala de aula e acrescenta, igualmente a linguagem natural, esta também assume diferentes níveis de complexidade dependendo da competência dos falantes.

Assim, afirma, os atos de fala do professor durante as aulas podem ocorrer primando pela variedade, ou seja, ele poderá expor, poderá explicar, poderá pedir, perguntar, sugerir, poderá... recorrer a outros atos de fala. Cita Love e Mason, que sistematizam os atos comunicativos orais da responsabilidade ou com a participação do professor: “o professor diz coisas aos alunos (expor, explicar ou conjecturar), o professor faz perguntas aos alunos, os alunos discutem entre si e com o professor“ (LOVE; MASON, 1995 *apud* MENEZES, 1999, p. 7). E neste caso, conclui, as intervenções dos alunos dependerão do espaço discursivo que o professor reservará, isto é, o apoio para as tentativas desses de participarem e coordenarem diferentes pontos de vistas que possam surgir.

Cita, ainda, outros estudiosos, dentre eles, Ellerton e Clarkson (1996) que ressaltam “A formulação de perguntas ocupa um lugar de destaque no discurso da aula de Matemática.” Destaca, também, Sadker e Sadker (1982) que colocam “[...] o questionamento permite ao professor detectar dificuldades de aprendizagem, ter *feedback* sobre aprendizagens anteriores, motivar o aluno e ajudá-lo a pensar.” Ao fundamentar-se em Pereira (1991), coloca o papel do questionamento, que são perguntas elaboradas pelo professor com o objetivo de provocar os alunos fazendo-os falar e fazendo-os pensar (promoção da atitude intelectual). E finalmente, com Long enfatiza

> [...] questionar é um versátil e poderoso recurso para promover a compreensão e encorajar a investigação ativa de novas ideias. Além disso, as respostas dos alunos fornecem ao professor a informação que permite monitorar e avaliar o trabalho individual e em grupo (1992 *apud* MENEZES, 1999).

Por outro lado Menezes ainda traz, por Baroody (1993), a certeza de que existem benefícios na aprendizagem quando o professor tenta promover a comunicação entre alunos, no desenvolvimento do conhecimento matemático; e por Lappan e Schram (1989 *apud* MENEZES, 1999), a necessidade de incorporar espaços nas aulas de Matemática para que os alunos possam explicitar e confrontar suas ideias pensadas.

Para Carvalho (2004), a necessidade de oportunizar ao aluno, a posição de falante, não é somente um aspecto de motivação para a aprendizagem, mas sim, uma condição que nos permite saber o que esses alunos realmente entenderam, ou não. Para que exista a possibilidade do entendimento acontecer, numa perspectiva de obtermos aprendizagem em sala de aula, os alunos deverão falar mais, enquanto os professores, por sua vez, deverão ouvir mais, pois “[...] é falando que se aprende e é ouvindo que se ensina” (CABRAL, 1998 *apud* CARVALHO, 2004, p. 149).

Para sermos mais precisos, segundo Carvalho (2004), quando os alunos repetem o que dizemos, é que podemos ter alguma ideia do que eles entenderam, ou não. E mesmo assim, nem sempre a repetição significa, de fato, que o que dissemos foi compreendido. Desta perspectiva, segue-se que a comunicação dos conhecimentos matemáticos, ora pode, ora não pode, ser realmente estabelecida.

Mediante as precedentes análises apresentadas e respeitando os apontamentos contidos nas DCE - PR (2008), concluímos, embora cientes das grandes dificuldades e dos desencontros existentes na comunicação, durante as aulas de Matemática; vale a pena certo esforço, dedicação e reflexão para uma possível mudança de prática pedagógica acentuando a riqueza da oralidade e da escrita, tanto de professores quanto de alunos numa atitude que parece ser uma grande aliada no ato de ensinar e no ato de aprender.

Do ensino tradicional, mecanicista às tendências em Educação Matemática mais recentes – Modelagem Matemática, História da Matemática, Etnomatemática, Resolução de Problemas, Investigações Matemáticas e o uso das tecnologias – o desinteresse por essa ciência é evidente em muitos estudantes. Por isso acreditamos ser pertinente elaborar tentativas em busca da superação do citado problema. Talvez, o uso de procedimentos, em particular, que apontem para a obtenção de habilidades comunicativas em sala de aula, possa ser considerado com vistas ao sucesso no ensino e na aprendizagem da Matemática.

Tal como propõem alguns manuais e diretrizes pedagógicas, em Matemática, cabe-nos tanto como professor, quanto como estudante, o compromisso no enfrentamento dos resultados insatisfatórios de qualquer nível escolar e o desafio na mudança do quadro existente.

Assim, a ideia é destacarmos a Linguagem Matemática historicamente construída, entendendo um pouco mais de sua criação e proveniência, e com isso, considerarmos os aspectos de sua importância e a necessidade de sua utilização no desenvolvimento do raciocínio e na formalização do pensamento matemático.

Isto posto, vale dizer, em adição, precisamos nos mobilizar rumo à elaboração de práticas que valorizem o rigor exigido pela ciência matemática. A qualidade da aprendizagem desta somente dar-se-á na possibilidade de sua transmissão visto como algo que realmente possa ser percebido e entendido por quem escuta ou lê.

1.4 Por que a escolha sobre o estudo de Lógica?

A Matemática, sob uma possível compreensão de seus conhecimentos, requer necessariamente, o entendimento e a articulação de uma linguagem própria; esta, a Linguagem Matemática. Assim, ao pensarmos em Lógica, certamente, estaremos pensando na ideia de comunicação em Matemática.

> Na Grécia Antiga, a formação do homem grego incluía três disciplinas básicas: a Lógica, a Gramática e a Retórica. O estudo da Gramática (**gramma** quer dizer **letra**, em grego) era uma condição necessária para o domínio da língua, tanto na forma oral como na escrita. A lógica (ou Dialética) dizia respeito ao exercício da capacidade de argumentação, no discernimento entre os bons e maus argumentos. Na Retórica, o ponto fundamental era o convencimento dos outros, a persuasão. O currículo mínimo para a vida na cidade, para a formação política (***pólis*** quer dizer ***cidade***, em grego), era constituído por essas três disciplinas, sendo chamado ***Trivium***. Era destinado a todos os cidadãos, e nesse fato reside a origem moderna da palavra "trivial". Expressar-se adequadamente, argumentar de modo correto, cuidar da forma da argumentação para parecer convincente e persuadir os outros à ação, que eram as metas do ***Trivium***, permanecem sendo objetivos fundamentais na formação do cidadão, ainda hoje, em qualquer lugar do mundo (MACHADO; CUNHA, 2008, p.13, grifo do autor).

Dada a importância da Lógica e seus aspectos cognitivos, a citada diferenciação entre bons e maus argumentos nos fazem optar por seu estudo, para mediar e fortalecer o desenvolvimento e a organização das ideias pensadas no uso da Linguagem Matemática.

Desde sempre, o estudo das questões relacionadas à Lógica, coube à Filosofia.

> [...] Filosofia é uma forma de conhecimento que surgiu na Grécia Antiga e, [...] que na língua grega significava **amor ao conhecimento**. [...] Filosofia não é o estudo de alguma coisa em específico, e sim uma forma de pensar e de estudar toda e qualquer coisa que se queira. (ABBUD, 2010, p. 6, grifo nosso).

Segundo Abbud (2010), Aristóteles (384-322 a.C), considerado pelos historiadores como o último grande filósofo grego, curiosamente, não era propriamente grego, nasceu na Macedônia, ao norte da Grécia. Estudou na Academia de Platão em Atenas, foi o fundador da Lógica Formal e deu início ao estudo sistemático das formas de argumentação, utilizando-se para este da estrutura da língua grega. Percebeu que sem a linguagem não há conhecimento e grande parte de seus pensamentos estão reunidos em sua obra *Organon*. Aristóteles trouxe grandes contribuições e influências para diversas áreas, além da Matemática.

Conforme Martins (1995 p. 52), Aristóteles

> [...] desenvolveu um sistema filosófico abrangendo muitas áreas do conhecimento humano: Lógica, Ética, Metafísica, Física, Astronomia, Meteorologia, Química, História Natural, Fisiologia etc. Ele legou a posteridade urn impressionante corpo de conhecimentos sistematizados, justificados e mutuamente interligados, que serviu de modelo para o desenvolvimento científico durante dois milênios.

Por meio da Matemática, numa concepção para a formulação dos resultados matemáticos, Aristóteles nos traz a constituição de um novo ideal de pensamento

> [...] uma lógica na qual os critérios de verdade estarão mais ligados à pura coerência, ao rigor da demonstração. Ou seja, em uma cadeia de conclusões, tudo deve decorrer daquilo que antes foi dito, sem que haja contradição no interior do raciocínio. (CARVALHO; ROQUE, 2012, p.51).

Desse modo pressupomos que o estudo de Lógica parece-nos ser um grande aliado e, sobretudo necessário no uso da Linguagem Matemática, sob uma estrutura que supostamente pretende dar conta de transmitir os conhecimentos científicos, os quais requerem o rigor da Matemática.

Ainda, no que se trata das distintas visões a respeito da Matemática, como estudo das abstrações matemáticas, elaboradas a partir dos objetos do mundo da percepção sensível, Machado (2001) coloca-nos, na concepção de Platão, os enunciados matemáticos eram verdadeiros porque descreviam formas matemáticas de existência objetiva, enquanto para Aristóteles, os objetos e os enunciados matemáticos seriam verdadeiros ou falsos porque seriam mais ou menos adequados à representação do mundo empírico em busca de um fim que se objetiva.

A famosa obra *"Os elementos"* de Euclides, na matemática grega, coloca o despertar do senso crítico e da curiosidade dos matemáticos dado que sua sistematização "[...] tem uma estrutura lógico-dedutiva que permitiu a obtenção de centenas de resultados a partir de poucos “princípios” usualmente chamados de axiomas ou postulados” (SANT’ANNA, 2003, p.1).

Segundo Sant’anna (2003), essa obra imperou como a mais bem-sucedida de todos os tempos em função de sua estrutura lógica e seu apelo pedagógico que sobreviveram intactos, por mais de dois mil anos. Essa técnica de exposição acabou se consagrando como uma poderosa ferramenta de sistematização para significativa parte do conhecimento matemático.

Além disso, foi por meio das imensas discordâncias obtidas nos estudos, análises e discussões sobre o problema axiomático dos cinco postulados apresentados no Livro I da referida obra de Euclides, especificamente, o da independência do quinto postulado; que surgiu historicamente o avanço da geometria, em particular, a geometria não-euclidiana.

Conforme Aaboe (1984), foram muitas as tentativas feitas para demonstrar a dependência do citado quinto postulado, com os quatro primeiros. Contudo, embora ninguém tenha conseguido, foi a partir dessas tentativas, que a matemática revelou a evolução da geometria com a base de uma teoria consistente a qual denominamos hoje de geometria não-euclidiana.

Os cinco postulados são apresentados na obra *“Os Elementos”* de Euclides da seguinte forma:

> 1.Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto. 2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta. 3. E, como todo centro e distância, descrever um círculo. 4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos. 5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores do que dois retos (EUCLIDES, 2009, p. 98).

Para conhecermos um pouco mais das polêmicas geradas por esses postulados de Euclides, vamos recorrer, em síntese, aos apontamentos feitos por Sant’anna (2003) que registra os fatos como segue.

Os fundadores da geometria não-euclidiana são destacados, com o alemão Carl Friedrich Gauss, que percebeu o quinto postulado como independente dos demais postulados; com o húngaro Janos Bolyai, que comungou com o mesmo pensamento de Gauss, e finalmente, com o russo Nicolai Lobatchevsky que introduziu uma geometria chamada imaginária contribuindo de modo significativo para demonstrar que o método axiomático não era apenas uma ferramenta didática.

Ainda segundo Sant'anna (2003), Hilbert, em 1899, fez referências a Lobatchevsky em seu clássico *Grundlagen der Geometrie.* "Esse livro estabeleceu definitivamente a geometria euclidiana como um sistema puramente formal-dedutivo e representou uma grande vitória do poder de formalização e síntese do método axiomático" (SANT'ANNA, 2003, p. 8).

Ainda por esse autor, um outro grande marco na história do método axiomático foi instaurado pelo italiano Giuseppe Peano (1858–1922), que publicou uma formulação puramente simbólica para a aritmética, resultando, naquilo que hoje conhecemos como os axiomas de Peano.

Na verdade, os axiomas de Peano são aqueles que nos permitem hoje descrever com precisão o conjunto dos números naturais. Para tanto, Oliveira (2010, p. 204) nos apresenta o último dos seus axiomas: "*Seja A um subconjunto de* $\mathbb{N}$ *(A* $\subset \mathbb{N}$*). Se 1* $\in$ *A e se, além disso, A contém todos os sucessores dos seus elementos, então A =* $\mathbb{N}$*.*"

Desse modo, devemos lembrar que os axiomas de Peano representaram significativo avanço para a álgebra e análise matemática.

Façamos agora, algumas argumentações, procurando justificar um pouco mais o porquê do estudo de Lógica. A palavra **razão** no dicionário Houaiss e Villar (2004, p. 2389) significa,

> 1 faculdade de raciocinar, de aprender, de compreender, de ponderar, de julgar; a inteligência. 2 raciocínio que conduz à indução ou dedução de algo. 3 capacidade de avaliar com correção, com discernimento; bom senso, juízo. 4 aquilo que provoca, ocasiona ou determina um acontecimento, a existência de algo; causa, origem. 5 justificação de um ato; explicação de um fato; argumento, motivo.

Já a palavra **raciocinar** ainda neste dicionário nos traz os seguintes significados: "fazer uso da razão para estabelecer relações entre (coisas e fatos), para entender, calcular, deduzir, julgar (algo); refletir" (HOUAISS; VILLAR, 2004, p. 2373). E finalmente a palavra **raciocínio** significa,

> 1 ato ou efeito de raciocinar. 2 exercício da razão através do qual se procura alcançar o entendimento de atos e fatos, se formulam idéias, se elaboram juízos, se deduz algo a partir de uma ou mais premissas, se tiram conclusões. 3 capacidade de raciocinar. 4 atividade mental que, por meio de instrumentos indutivos ou dedutivos, fundamenta o encadeamento lógico e necessário de um processo argumentativo, especialmente no interior de

> demonstrações científicas, filosóficas ou matemáticas (HOUAISS; VILLAR, 2004, p. 2373).

Uma teoria matemática é apresentada, digamos, de maneira ordenada, lógica, a partir de axiomas explicitamente enunciados. Portanto, para uma possível compreensão desta teoria, é necessária a aquisição de conhecimentos que fundamentem os raciocínios obtidos.

Assim, consideramos que a intenção de comunicarmos as ideias matemáticas, sob as condições determinadas pela Lógica, no uso da linguagem matemática, é um caminho em busca de tentarmos alcançar certa precisão na construção e na expressão dos resultados matemáticos.

Todavia, cabe-nos lembrar que o raciocínio lógico, nos conduz muitas vezes, a erros e contradições até que consigamos desenvolver e mostrar propriamente as ideias matemáticas pensadas.

CAPÍTULO II – A LÓGICA COMO A LINGUAGEM MATEMÁTICA FORMAL

> *Não é apenas uma ou duas vezes, mas um sem-número de vezes que uma mesma ideia aparece no mundo.*
>
> *Aristóteles*

Neste Capítulo discutimos algumas concepções de Lógica, seu uso estabelecido como a Linguagem Matemática e a formalização das ideias pensadas e argumentadas, talvez, sob o alcance de uma possível aquisição dos conhecimentos matemáticos.

2.1 LÓGICA

Na linguagem do dia a dia, comumente num diálogo, falamos e ouvimos frases do tipo: ‘É lógico que ...’ no sentido de expressarmos: ‘É claro que ... ’, ‘É óbvio que ... ’ ou ‘É evidente que ... ’.

Por exemplo: “É lógico que Lucas será aprovado no concurso”. Ao escutarmos esta frase entendemos imediatamente que Lucas deve ter grandes chances de ser aprovado no concurso. Porém, qual a justificativa que nos faz acreditar em tal afirmação?, isto é, Lucas tem um bom rendimento na Universidade? Lucas é comprometido com os estudos? Qual o motivo que teríamos para aceitar a afirmação como verdadeira?

A grosso modo, notamos que a referida frase requer uma explicação, e esta por sua vez, deverá justificar a ocorrência do fato já afirmado.

No dicionário Houaiss e Villar (2004, p. 1778) a palavra **Lógica** significa,

> 1 parte da filosofia que trata das formas do pensamento em geral (dedução, indução, hipótese, inferência, etc.) e das operações intelectuais que visam à determinação do que é verdadeiro ou não. [...] 6 maneira por que necessariamente se encadeiam os acontecimentos, as coisas ou os elementos de natureza efetiva. 7 coerência, fundamento. 7.1 encadeamento coerente de alguma coisa que obedece a certas convenções ou regras.[...]

Sob essas condições, na Matemática, entendemos por Lógica, o estudo de argumentações que expressam o pensamento matemático e sua transmissão em Linguagem Matemática. Entendemos ainda, certo alcance para comunicarmos as ideias, os raciocínios e os procedimentos de forma justificável, coerente e talvez, consistente. No entanto, sabemos que não é tão simples assim, delimitar tal definição.

Para Sant'Anna (2003), alguns autores tentam definir Lógica como o estudo das inferências válidas ou, equivalentemente, dos argumentos válidos. Outros dizem tratar-se do estudo das leis do pensamento claro. E, embora aqueles possam almejar um certo conforto em resumir em poucas palavras a riqueza da Lógica, ainda deixam muito a desejar. Esse autor afirma que a Lógica Matemática, ou simplesmente a Lógica, refere-se hoje a uma imensa quantidade de assuntos que somente em sua totalidade descrevem o que de fato é Lógica. E ainda acrescenta, "Não há uma definição sensata para descrever o que é lógica. Qualquer tentativa nesse sentido resulta em poesia ou erro" (SANT'ANNA, 2003, p. 27).

Por outro lado, por meio de uma introdução filosófica, na qual destacam Jürgen Habermas[6], em um discurso que confere toda a autoridade à palavra, à ação comunicativa e à força dos argumentos; Machado e Cunha (2008), nos trazem a ideia

> A busca da competência na argumentação, da compreensão, das razões próprias e dos outros nas tomadas de posição diante dos acontecimentos, nas escolhas de pressupostos e nas tomadas de decisão é o objetivo fundamental de um curso de Lógica (p. 14). [...] o que pode explicar esta associação tão forte entre a lógica e a matemática, em detrimento da língua, é o fato de que um estudo inicial de lógica costuma ser realizado admitindo-se a possibilidade de uma separação nítida entre a forma e o conteúdo de uma argumentação. Esta separação faz com que a lógica se pareça mais com a matemática do que com a língua. Na língua, em seu uso corrente, é muito mais difícil tal separação (MACHADO; CUNHA, 2008, p. 26).

Na Lógica Formal não são considerados os conteúdos das sentenças componentes de um argumento mas sim a forma de argumentação como umas são deduzidas das outras. Analisemos, por exemplo, o seguinte caso clássico: *Todo homem é inteligente*. E, *Lucas é um homem.* Logo, posso concluir que *Lucas é inteligente*. Desse modo temos que "Todo <u>a</u> é <u>b</u> e que <u>x</u> é <u>a</u> - disso podemos concluir

[6] "Habermas é talvez o mais famoso filósofo do século XX – e inclusive do XXI, pois está vivo no ano de 2008" (ABBUD, 2010, p. 136). Segundo este autor, o filósofo alemão Jürgen Habermas defende a *racionalidade comunicativa* em lugar da *racionalidade instrumental*, isto é, nesta última o que importa para os indivíduos nas atividades humanas são os números, a quantidade, as estatísticas, enfim o *lucro*; enquanto na primeira, os indivíduos não utilizam sua força de trabalho e intelectual com fins lucrativos mas sim em busca de um melhor entendimento entre as pessoas, uma melhor convivência e interação, enfim a *ética*.

que *x* é *b*, independentemente do significado de *a, b* e *x*.” (MACHADO; CUNHA, 2008, p. 15).

Esses autores colocam, sobremaneira, que assim Aristóteles buscou explicitar leis ou regras que garantiam uma argumentação considerada competente.

Nesse contexto, parece existir certa ligação entre Linguagem Matemática e Lógica. Esta última no cumprimento do uso do raciocínio e a primeira no uso da expressão das ideias pensadas.

Ainda, conforme esses autores, é pertinente observarmos, o ato de argumentar é uma característica natural do ser humano

> [...] e não se pode pretender que apenas os conhecedores das regras aristotélicas possam fazê-lo, assim como também é um absurdo pretender que apenas os conhecedores das leis ou regras básicas para uma boa respiração tenham o direito de respirar (MACHADO; CUNHA, 2008, p. 15).

Porém, é sabido, os obstáculos no ensino e na aprendizagem da Matemática são existentes, principalmente, ao tratarmos da formalização e comunicação dos conteúdos. Diante disso, entendemos ser necessário o estudo dos conceitos básicos de Lógica, no sentido de contribuir com os aspectos referentes à condução do diálogo, das explicações, das discussões e das argumentações inseridas no ato de ensinar e aprender Matemática.

Assim, concordamos com Sant’Anna (2003), que nos diz, a Lógica é vista por meio dos seus princípios básicos trazendo sua influência para o mundo moderno em busca de uma sintonia com as atuais tendências acadêmicas, numa perspectiva de constituir a melhoria de compreensão na disciplina de Matemática em qualquer nível escolar. Esse autor reforça, a intenção é suprir as necessidades dos interessados em Lógica no sentido de justificar o uso do método axiomático nas explicações do conhecimento matemático, com vistas a alcançar certo avanço desejado no desenvolvimento e na socialização do saber científico da Matemática. Tanto por meio da expressão oral quanto por meio da expressão escrita.

2.2 CÁLCULO PROPOSICIONAL – CONECTIVOS E TABELAS-VERDADES

Sugerimos certo aprofundamento sobre alguns conceitos básicos da lógica formal referentes ao Cálculo Proposicional - conectivos e o uso das tabelas-verdades. A prioridade é uso da Lógica como fundamentação em explicações diversas do pensamento matemático e da atividade matemática, constituindo como crucial, as correlações existentes entre Lógica e Matemática.

Assim, sustentadas por Castrucci (1984) podemos dizer que na Lógica Formal, especificamente, no Cálculo Proposicional, restringimo-nos a uma classe de proposições, que são *declarativas* e que admitem somente um dos valores: o valor *verdade (V)* ou o valor *falso (F)* não podendo ser ambos ao mesmo tempo. Para resolvermos problemas clássicos, necessitamos das noções básicas de Lógica que se ocupam com as conexões entre proposições (também chamadas de sentenças), independentemente do conteúdo em si de tais proposições. São elas denominadas de conetivos lógicos e atuam como operadores sobre as proposições, dando origem a outras proposições.

Os conectivos lógicos mais usuais são: a negação $\neg$ (não), a conjunção $\wedge$ (e), a disjunção $\vee$ (ou), a condicional $\rightarrow$ (se... então...) e a bicondicional $\leftrightarrow$ (se, e somente se,).

A validade dos conectivos, isto é, o valor lógico pode ser obtido pelo dispositivo chamado tabela-verdade do seguinte modo:

A conjunção entre p e q, denotada por $p \wedge q$ é verdadeira se as duas proposições p e q são ambas verdadeiras e é falsa nas outras situações, conforme tabela-verdade do Quadro 1.

Quadro 1 - Validade da conjunção

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Fonte: Castrucci (1984, p. 24)

A disjunção entre p e q, denotada por $p \vee q$ é verdadeira se pelo menos uma das proposições p ou q é verdadeira, e é falsa nos outros casos, conforme tabela-verdade do Quadro 2.

Quadro 2 - Validade da disjunção

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Fonte: Castrucci (1984, p.24)

<u>Observação:</u> Em lógica, a palavra ”ou” pode ser entendida como uma coisa, ou outra coisa ou **ambas** as coisas.

A negação de p, denotada por $\neg p$ é verdadeira se a proposição p é falsa e é falsa se a proposição p é verdadeira, conforme tabela-verdade do Quadro 3

Quadro 3 - Validade da negação

p	$\neg p$
V	F
F	V

Fonte: Castrucci (1984, p. 24)

A condicional entre p e q, denotada por $p \to q$ é verdadeira se a proposição p é falsa ou se a proposição q é verdadeira ou ambas, e é falsa nas outras situações, conforme tabela-verdade do Quadro 4.

Quadro 4 - Validade da condicional

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Fonte: Castrucci (1984, p. 25)

A bicondicional entre p e q, denotada por $p \leftrightarrow q$ é verdadeira se as proposições p e q são ambas verdadeiras ou ambas são falsas e, é falsa nos outros casos, conforme tabela-verdade do Quadro 5.

Quadro 5 - Validade da bicondicional

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Fonte: Castrucci (1984, p. 25)

2.2.1 Sentença Condicional – com mais detalhes

Uma sentença condicional $P \rightarrow Q$ é uma sentença composta

"*Se* P, *então* Q"

formada por duas proposições P e Q, ligadas pelo conectivo "*Se...então...*", de maneira que a proposição Q pode ser deduzida da proposição P, todas as vezes em que admitirmos a ocorrência de P.

A proposição P que expressa as condições, é chamada **antecedente** do condicional e a proposição Q que expressa o resultado da condição, é chamada de **consequente** da condicional.

Entender o Cálculo Proposicional – conectivos e o uso das tabelas-verdades aqui apresentados, significa constituir certa possibilidade de articular o conhecimento não somente matemático, mas de todas as áreas que utilizam-se das proposições, das argumentações, enfim dos raciocínios lógicos.

2.3 DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA

Diante das considerações sobre Linguagem Matemática feitas no Capítulo I, abordamos nesta Seção, sob referenciais teóricos como Carvalho (2004), Carvalho e Savioli (2013), Fossa (2009), Machado (2001), Machado e Cunha (2008), Morais Filho (2007, 2010), Sant'Anna (2003), entre outros; alguns termos significativos requeridos por esta linguagem, tais como "demonstrações", "definição", "noção primitiva", "axioma", "teorema", "regras de inferência" e "modelo axiomático"; para a identificação, interpretação dos conhecimentos matemáticos e expressão da Linguagem Matemática.

Tecnicamente, digamos a **demonstração** ou **prova** de um teorema consiste em mostrar que este é uma consequência lógica dos teoremas precedentes.

> Não seria demais dizer que não há Matemática sem demonstrações; elas compõem parte da estrutura lógica essencial do que é constituída a Matemática e da maneira como ela funciona. As demonstrações são como rituais indispensáveis, usados para provar resultados, garantindo que eles são válidos (MORAIS FILHO, 2010, p.79).

Para diversos autores, dentre eles Morais Filho (2007, p. 98), demonstrar "é um ato de persuasão". Todavia, discordamos deste pensamento, pois estamos certos de que persuasão é sinônimo de convicção, e ao demonstrarmos um resultado matemático, não temos que convencer, mas sim mostrar uma sistematização respeitada e consagrada pelas condições de uma teoria matemática existente e que prevê o uso dos conceitos de lógica e da linguagem matemática. Estes por sua vez, parecem ser suficientes para comprovar a validade dos resultados obtidos. Portanto, temos que uma demonstração poderá justificar algo, mas não convencer alguém.

Para CARVALHO (2004, p.183, grifos da autora)

> A função da demonstração está associada à possibilidade de 'treino', efetuada pelo aluno, da maneira de 'pensar' em matemática. Não se considera outra possibilidade que não a de 'prova formal', ou rigorosa, para isto.

Essa autora, ao constituir uma revisão literária sobre a demonstração na Matemática, recorre a Balacheff (1987) que traz a demonstração como processo de validação de afirmações e nos alerta para a necessidade de uma linguagem própria, ferramenta esta de cálculo intelectual que exige daquele que fala, o encaminhamento para deduções lógicas. Barnard e Tall (1997), concebendo à demonstração o caráter de construção e manipulação de diversas unidades cognitivas e suas conexões. Simpson (1995) que atenta-nos para a 'prova através do raciocínio', prova esta denominada por este autor, em que a ação do estudante é explorar o problema, descobrir caminhos para a solução, explicar e justificar as afirmações e os passos lógicos até atingir o formalismo, numa situação que busca explicar a validade do teorema. E Hanna (1989b), que vem considerar a demonstração como um meio de comunicação de ideias matemáticas, evidenciando a distinção das provas que '*provam'* e as provas que '*explicam'*. Dentre os estudiosos citados, destacamos as ideias de Hanna (1989b), as quais apontam a demonstração do resultado matemático dentro dos padrões de rigor necessários, porém, acompanhados de explicações de como este foi validado. Além disso, Hanna cita outras funções da prova:

> 1)verificar (relacionado com a verdade de uma afirmação); 2) explicar (fornecendo ‘pistas’ do por quê é verdade);3) sistematizar (a organização de vários resultados em um sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas); 4) descobrir (a descoberta ou invenção de novos resultados); 5) comunicar (a transmissão do conhecimento matemático); 6) construir (uma teoria empírica); 7) explorar (o significado de uma definição ou as consequências de uma afirmação); 8) incorporar (um fato bem conhecido em um contexto diferente e portanto vê-lo de outro ponto de vista) (HANNA, 2000 *apud* CARVALHO, 2004, p. 61).

Carvalho (2004) ainda coloca, a demonstração vista como um movimento dialético, a prova rigorosa de forma subjetiva entendida conforme o sujeito que a realiza. Para esta autora, a matemática é pensada como prática social (o discurso do professor no ensino tradicional é quem lhe confere a forma e o conteúdo).

Já segundo Fossa (2009, p. 46), “Conhecer, então, é saber o por quê. E o porquê de um teorema matemático é a sua demonstração.” E, no que tange ao conhecimento, apresentamos um exemplo interessante citado por este autor:

> Suponha que às quatro horas Matilda olhou para um relógio quebrado que marcava três horas. Não sabendo que o relógio estava quebrado, ela acreditava que eram realmente três horas, quando de fato eram quatro. Claramente, Matilda não tem conhecimento sobre as horas nesse caso. Mas suponha agora que, por coincidência, ela olhou para o relógio quebrado às três horas. Ela acreditava que eram realmente três horas e eram, de fato, três horas. Podemos dizer que Matilda tem conhecimento das horas nesse caso? Mesmo nesse caso, ela não tem conhecimento porque ela acertou a hora por acaso, por sorte, sem qualquer fundamento. É provável que a falta do fundamento não tenha sido culpa dela mas mesmo assim não podemos afirmar que ela tinha o conhecimento (FOSSA, 2009, p. 46).

Assim, significarmos, explicarmos e justificarmos a validade das afirmações matemáticas, parece ser o porquê do ato de demonstrar.

Garnica (1995) associa o conceito de prova em Matemática ao que garante a verdade matemática. Por isso, merecida importância deve-se à demonstração ou prova, que vem caracterizar onde a Matemática mostra toda a sua exatidão e excelência.

> No léxico, tanto quanto no jargão matemático, prova e demonstração são tidos como sinônimos: é o que atesta a veracidade ou autenticidade, a garantia, o testemunho, o processo de verificação da exatidão de cálculos ou raciocínios, a dedução que mantém a verdade de sua conclusão

> apoiando-se em premissas admitidas como verdadeiras (GARNICA, 1995, p. 10 *apud* CARVALHO; SAVIOLI, 2013, p. 6-7).

Em adição, Hanna (2000) afirma, deve haver, no processo de demonstrar, tanto em sala de aula como do matemático, uma sistematização, ou seja, uma sequência de deduções com argumentos válidos, envolvendo uma certa Lógica, mais especificamente, um raciocínio lógico.

Carvalho e Savioli (2013) atentam para a existência de processos de aprendizagem de Matemática, para além do desenvolvimento desta. Tratam-se de aspectos subjetivos que podem ajudar ou impedir a aquisição do conhecimento matemático. Apoiadas nas noções de verdade e poder de Foucault (1999 *apud* CARVALHO; SAVIOLI, 2013), as autoras defendem, os movimentos de aprendizagem que acontecem na sala de aula de matemática e o estabelecimento da noção de verdade estão intimamente relacionados com a figura do professor, pois é ele quem sabe demonstrar os resultados matemáticos formalmente. O que pressupõe, ele detém o poder, isto é, quando fala algo, sua posição de professor lhe outorga a prerrogativa do discurso verdadeiro.

Além disso, sob o ponto de vista dessas autoras, ainda segundo Foucault (1999), a tríade *poder – verdade – saber*, em que a verdade deriva do poder, o poder produz o saber e o saber faz a verdade; é indissociável.

As relações de poder, existentes na figura do professor que realiza a demonstração matemática, em sala de aula, conferem à demonstração um estatuto subjetivo (CARVALHO, 2004).

Desta forma, cabe-nos a responsabilidade de tentarmos a articulação de práticas educativas, na construção de um professor de Matemática que seja capaz de propor espaços consideráveis, em que o discurso dos alunos possa de fato, ser mostrado, socializado e discutido; seja por meio da oralidade ou da escrita. Afinal, a compreensão de uma demonstração matemática requer não somente um professor detentor dos conhecimentos matemáticos, mas também, um professor preocupado em estabelecer uma possibilidade de comunicação do que foi pensado, utilizando-se da Linguagem Matemática e da linguagem natural como mediadoras, em busca de certo consenso entre o entendimento desejado e o entendimento obtido, que ora possa ser constituído, ou não.

2.4 Definição e Noção Primitiva (ou Intuitiva)

Ao pensarmos em demonstração devemos saber identificar alguns outros termos importantes e necessários que serão certamente utilizados. Dentre eles, abordamos inicialmente, o que representa o termo **definição** e o que representa o termo **noção primitiva (**ou **intuitiva),** termos estes que por muitas vezes, se confundem nas aulas de Matemática.

Assim, segundo Morais Filho,

> [...] **definir** é dar nomes a objetos matemáticos, mediante determinadas propriedades que eles possuam e que os caracterizem. Esses nomes devem se constituir de uma única palavra, como "triângulo", ou de uma frase curta, como "números primos entre si". [...] As definições são importantes porque evitam repetições longas e desnecessárias e, juntamente com as notações, são mais um aliado na ajuda da economia da linguagem (MORAIS FILHO, 2007, p. 56, grifo do autor).

Desse modo, consideramos ser pertinente colocar que uma definição deve caracterizar, classificar e distinguir plenamente o objeto definido. Por exemplo, apresentemos uma definição de ângulo segundo Muniz Neto (2012, p. 12): *"Dadas, no plano, duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, um **ângulo** (ou **região angular**) de vértice O e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ é uma das regiões do plano limitadas pelas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$".*

Vale lembrar que uma definição matemática não pode ser uma figura. Esta serve apenas para facilitar e visualizar a compreensão da definição.

Por outro lado, a noção primitiva (ou intuitiva), conforme Morais Filho (2007), é aquela cujos conceitos são aceitos sem definição. Entretanto, elas "[...] não surgem de opiniões pessoais isoladas, elas são frutos da experiência, da observação e de um certo "consenso coletivo" " (MORAIS FILHO, 2007, p. 61, grifo do autor).

Por exemplo, observemos os estudos de Conjuntos em álgebra. Na tentativa de definir Conjunto associamos a ideia de vários objetos, várias pessoas, enfim vários elementos. E a cada elemento do Conjunto associamos a relação de pertinência, isto é, o elemento *x* pertence ou não pertence ao Conjunto dado. Notamos então, que a associação de ideias não é uma definição, e desse modo, *conjunto, elemento e relação de pertinência* são considerados noções primitivas ou noções intuitivas.

Um outro exemplo pode ser evidenciado, nitidamente, nos estudos de Geometria Plana, na qual *ponto, reta e plano* são consideradas noções primitivas e dessa forma, não precisam ser definidos.

Sant'anna (2003) coloca "[...] para alguns historiadores "as definições" de Euclides tinham a simples pretensão de oferecer uma visão intuitiva dos conceitos matemáticos" (SANT'ANNA, 2003, p.2, grifo do autor).

2.5 AXIOMA (OU POSTULADO) E TEOREMA

Outros dois termos que se confundem são: **axioma (**ou **postulado) e teorema**, os quais devemos a tentativa de esclarecer.

Na Matemática grega antiga, segundo Sant'anna (2003), os filósofos Euclides e Aristóteles consideravam os termos axioma e postulado como conceitos distintos. Porém, na matemática moderna, esses são considerados por estudiosos como sinônimos.

Tão logo, podemos dizer que axioma (ou postulado) é uma proposição aceita como verdade indemonstrável, isto é, uma proposição aceita sem demonstração, e esta por sua vez, serve como ponto inicial para as deduções e inferências de outras verdades. Digamos que axioma é uma proposição considerada como óbvia ou como um consenso inicial necessário para a construção ou aceitação de uma teoria.

Por outro lado, um teorema é uma sentença condicional (ou implicativa) cuja validade deve ser garantida por uma demonstração. Nesse caso, chama-se *hipótese* a sentença P e *tese* a sentença Q.

Resumindo, um teorema é uma sentença condicional, isto é,

Se "hipótese", então "tese" ou "hipótese $\rightarrow$ tese"

ou uma sentença implicativa que podemos escrever

Da hipótese implica-se a tese ou "hipótese" $\Rightarrow$ "tese",

da qual se possui uma demonstração, que a torna válida.

Segundo Hanna (1989a), as condições necessárias para a aceitação de um novo teorema pela comunidade matemática são:

> (1) o teorema precisa ser entendido, os conceitos envolvidos, suas implicações e não deve haver dúvidas quanto à veracidade; (2) o teorema deve ser suficientemente importante para ter implicações em diversas áreas e segmentos; (3) o teorema deve ser consistente com o corpo dos resultados matemáticos já estabelecidos; (4) o autor do teorema deve ter

> reputação impecável como um ‘expert’ no objeto matemático tratado pelo teorema e (5) deve existir um argumento matemático convincente para o teorema, de tipo conhecido (HANNA, 1989a *apud* CARVALHO, 2004, p. 58).

Vale lembrar que os teoremas ainda podem ser classificados como: lema (um teorema auxiliar que antecede o teorema a ser demonstrado) e corolário (um teorema obtido como consequência de outro recém demonstrado).

2.6 Regras de Inferência e Modelo Axiomático

Resta-nos apresentar o significado de **regras de inferência** e **modelo axiomático.**

Assim, segundo Morais Filho (2007, p. 62) temos que

> Para desenvolver uma certa teoria matemática, constituída de definições e afirmações dedutivas (teoremas), é preciso estabelecer os axiomas, as noções primitivas e as regras que podemos usar para manipular e deduzir (demonstrar) essas afirmações. Essas regras, que, na verdade, são certos argumentos, são chamadas regras de inferência. E [...] um modelo axiomático é um conjunto finito de axiomas, de noções primitivas e de regras de inferência usadas para deduzir (demonstrar) certas afirmações (teoremas) e definir objetos.

Finalmente, partindo do pressuposto que os requisitos necessários para a formulação de uma demonstração, tenham sido mencionados e abordados, nas próximas Seções deste Capítulo, complementamos com alguns aspectos pontuais da Linguagem Matemática, Lógica e formalização dos resultados matemáticos.

A intenção é enriquecer os conhecimentos, trazendo por meio de exemplos apontados por autores como Morais Filho (2007), Fossa (2009) e Oliveira e Fernández (2010), a demonstração da sentença condicional e a estreita relação entre demonstração e tabela-verdade, além de algumas técnicas de demonstração comumente utilizadas.

A saber, sob o ponto de vista de Sant’Anna (2003), definição, axioma, conjunto, teorema e modelo axiomático, são termos que ainda apresentam significados muito obscuros tanto para os profissionais que trabalham com o ensino da Matemática quanto para os estudantes que participam desde a Educação Básica até as suas graduações, em particular, em Matemática.

2.7 DEMONSTRAÇÃO DA SENTENÇA CONDICIONAL

O método dedutivo considerado por Morais Filho (2007) é a demonstração com a qual se pode deduzir a sentença Q, assumindo-se a sentença P na condicional “*Se* P, *então* Q”. Esse autor coloca,

> Em termos gerais, uma demonstração matemática de uma sentença condicional é um processo de raciocínio lógico-dedutivo no qual, admitindo-se a sentença P, deduz-se a sentença Q por meio de uma sequência de argumentações válidas (MORAIS FILHO, 2007, p. 48).

Um exemplo interessante é apresentado por Fossa (2009) no qual utiliza uma Técnica de Condicionalização (TC), assim denominada por ele, quando se assume o antecedente e tenta-se deduzir o consequente em uma proposição a ser demonstrada com a sentença condicional.

Vejamos o citado exemplo,

> Suponha que já temos à nossa disposição as seguintes proposições: **Teorema 1:** Se x é par, x é divisível por 2. **Teorema 2:** Se x é maior do que 2, então se x é primo, x não é divisível por 2. E tentamos, usando estas duas premissas, deduzir o consequente proposição (3): x não é primo. Note que o esquema do Teorema 2 é $A \rightarrow (B \rightarrow C)$. Demonstremos a proposição (3), organizando a demonstração por uma tabela.

Linha	**Afirmação**	**Justificativa**
1.	x é par.	premissa, condição do antecedente da proposição (3)
2.	x é maior do que 2.	premissa, condição do antecedente da proposição (3)
3.	Se x é par, x é divisível por 2.	Teorema 1
4.	x é divisível por 2.	Linhas 1 e 3, argumento do tipo afirmação do antecedente (AA)
5.	Se x é maior do que 2, então se x é primo, x não é divisível por 2.	Teorema 2
6.	Se x é primo, então x não é divisível por 2.	linhas 2 e 5, (AA)
7.	x não é primo.	Linhas 4 e 6, negação do consequente (NC)
8.	Se x é par e maior que 2, x não é primo.	Linhas 1-7, (TC)

Fonte: Fossa (2009, p. 58)

2.8 TABELA-VERDADE E DEMONSTRAÇÃO

Segundo Morais Filho (2007) convém agora compararmos a tabela-verdade de uma sentença condicional com o que pode ocorrer com uma demonstração.

Conforme tabela-verdade da condicional, não se pode deduzir sentenças falsas de sentenças verdadeiras. Daí temos: V $\rightarrow$ V = V, isto é, de uma sentença P verdadeira só é possível deduzir uma sentença Q, também verdadeira.

Por exemplo: Considere as seguintes proposições:

P: '1 = 1" (verdadeira)

Q: '2= 2' (verdadeira)

Demonstração: De P podemos deduzir que 1 = 1, então 1 + 1 = 1 + 1, ou seja, 2 = 2. Logo, 'Se P então Q' é válida.

Mas se ocorresse, V$\rightarrow$F = F conforme tabela-verdade teríamos por exemplo, as seguintes proposições:

P: ' 1 = 1' (verdadeira)

Q: ' 1 = 0' (falsa)

não sendo possível deduzir Q da antecedente P mesmo sendo verdadeira. Portanto, 'Se P então Q' é inválida.

Já no caso em que a proposição P é falsa é possível deduzir uma proposição Q que pode ser verdadeira. Na tabela-verdade F$\rightarrow$ V = V.

Por exemplo: Considere as proposições:

P: '1 = 0' (falsa)

Q: '1 =1' (verdadeira)

Demonstração: Da proposição P, decorrem as igualdades 1 = 0 e 0 = 1. Daí, somando os respectivos termos do lado esquerdo e os do lado direito dessas igualdades, temos 1 + 0 = 0 + 1, donde '1 = 1'. Logo, 'Se P então Q' é válida, nesse caso em que P é falsa e Q é verdadeira.

E finalmente, quando as proposições P e Q são falsas, em particular na tabela-verdade: F$\rightarrow$F = V.

Por exemplo: Considere as proposições:

P: '1 = 0' (falsa)

Q: '3 = 2' (falsa)

Demonstração: De P podemos deduzir que, se 1 = 0, então 1 + 2 = 0 + 2, ou seja, 3 = 2. Logo, 'Se P então Q' é válida com P falsa e Q falsa.

Conclui-se desse modo que sentenças condicionais podem ser válidas, independentemente dos valores lógicos das premissas. O que importa é aquilo que se admite como verdadeiro.

2.9 ALGUMAS TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO

Vejamos as demonstrações de uma sentença condicional segundo Morais Filho (2007) e Oliveira e Fernández (2010).

2.9.1 Demonstrações Diretas

São aquelas em que assumimos a hipótese como verdadeira e, por meio de uma série de argumentos verdadeiros e deduções lógicas, concluímos a veracidade da tese.

Por exemplo, vamos demonstrar o teorema a seguir sob diferentes formas:

Teorema: "*Existem dois, e apenas dois múltiplos simultâneos de 2 e de 3 entre os números de 8 a 18, incluindo estes últimos*."

Demonstração 01:

Sabemos que um múltiplo simultâneo de 2 e de 3 deve ser um múltiplo do mínimo múltiplo comum (mmc) entre 2 e 3. Assim, como o mmc (2,3) = 6, devemos ter os múltiplos de 6, neste caso, entre 8 e 18, incluindo estes últimos. Portanto os números são: 12 e 18. *C.Q.D.*

Demonstração 02:

Seja o conjunto A = {8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18} dos números inteiros entre 8 e 18, incluindo estes últimos. Os múltiplos de 2 pertencentes ao conjunto A são os números: 8, 10, 12, 14, 16 e 18; e os múltiplos de 3 pertencentes ao conjunto A são os números: 9, 12, 15 e 18. Portanto, os múltiplos de 2 e de 3 simultaneamente são os números 12 e 18. *C.Q.D.*

Demonstração 03:

Seja A = {8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18}, o conjunto dos números inteiros entre 8 e 18, incluindo estes últimos. Retirando-se do conjunto A os números ímpares: 9, 11, 13, 15 e 17, pois estes não são múltiplos de 2. Logo, restam-nos os números: 8, 10, 12, 14, 16 e 18, pares, dos quais são múltiplos de 3 os números: 12 e 18. *C.Q.D.*

2.9.2 Demonstrações Indiretas

- Contrapositiva: esta é baseada no fato de que a veracidade de forma positiva de uma proposição é equivalente à veracidade de sua forma contrapositiva, podendo ser esta última, eventualmente, mais fácil de se provar.
- Redução ao Absurdo (do latim *reductio ad absurdum*): esta é a técnica em que assumimos a validade da hipótese, supondo que nossa tese é falsa e, usando as duas informações anteriores, concluímos por meio de argumentos verdadeiros, uma afirmação falsa. E, como tal fato não poderá ocorrer, então nossa tese deverá ser verdadeira.

Por exemplo: Seja n um número natural tal que,

"Se n^2 é par, então n é par."

Demonstremos a proposição antecedente utilizando as duas técnicas de demonstrações indiretas citadas.

Percebamos inicialmente que para provarmos a proposição partindo da hipótese "*n^2 é par*" concluindo a tese *"n é par"*, encontraríamos dificuldades no processo de deduções pois a tentativa de verificação dos valores tal como mostra o Quadro 6, seria interminável.

Quadro 6 – Dedução

n^2	4	16	36	64	100	144	...
n	2	4	6	8	10	12	...

Fonte: (OLIVEIRA; FERNÁNDEZ, 2010, p. 13)

Por isso, partimos da hipótese *“n não é par”* e concluímos a tese “*n² não é par”* cuja veracidade é equivalente.

Apresentemos a demonstração por **contraposição**:

Suponhamos que n não é par, logo, n tem que ser ímpar. Desse modo, existe um número inteiro k tal que n = 2k + 1. E,

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k + 1)(2k +1) \\ &= 4k^2 +2k + 2k + 1 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \\ &= 2p + 1, \end{aligned}$$

onde $p = 2k^2 + 2k$. Portanto, $n^2 = 2p + 1$, isto é, ímpar. *C.Q.D.*

Por outro lado, podemos supor temporariamente a existência de um elemento que satisfaça a hipótese e não cumpra a tese chegando a uma contradição. Neste caso, apresentemos a demonstração por **redução ao absurdo**:

Seja n um número natural tal que n^2 é par. Suponhamos agora que n não é par, logo, n tem que ser ímpar. Desse modo, existe um k inteiro tal que n = 2k + 1. E,

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k + 1)(2k +1) \\ &= 4k^2 +2k + 2k + 1 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + k) + 1 \\ &= 2p + 1, \end{aligned}$$

onde $p = 2k^2 + 2k$. Portanto, $n^2 = 2p + 1$, isto é, ímpar. Mas isto é um absurdo pois contradiz a hipótese aceita inicialmente como verdadeira. *C.Q.D.*

2.10 Princípio da Indução

É uma técnica de demonstração geralmente utilizada para provar que certos resultados que envolvem números naturais são válidos para todos eles. Além disso, embora sua denominação seja indução matemática, é pertinente dizer que se trata de um argumento dedutivo, isto é, a conclusão segue-se do processo dedutivo com todo seu rigor lógico.

A ideia do princípio (ou método) de indução finita pode ser exemplificada do seguinte modo:

> Imagine uma fila com infinitos dominós, um atrás do outro. Suponha que eles estejam de tal modo distribuídos que, uma vez que um dominó caia, o seu sucessor na fila também cai. O que acontece quando derrubamos o primeiro dominó? (OLIVEIRA; FERNÁNDEZ, 2010, p. 203).

Reza o Princípio de Indução,

Considere uma propriedade P(n), que depende de um número natural n. P(n) será válida para todos os números naturais se,

- P(1) é válida;
- Se P(n) for válida para algum número natural n > 1,

então P(n + 1) é válida.

As aplicações são muito úteis em demonstrações de identidades, de desigualdades e de problemas de divisibilidade.

Vamos mostrar por meio de alguns exemplos propostos por Oliveira e Fernández (2010):

<u>Exemplo 01</u>: Demonstre que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ é válida a igualdade

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

<u>Uma solução:</u>

Seja a proposição P(n): $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$,

Para n = 1 temos que P(1): $2.1 - 1 = 1$ e, portanto, afirmação verdadeira.

Suponhamos que P(n) seja verdadeira para um valor $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Então, devemos mostrar que P(n + 1) também é verdadeira.

Com efeito, como

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2,$$

Somando $2n + 1$, que é o próximo número ímpar após $2n - 1$, a ambos os lados desta igualdade, obtemos:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2;$$

o que garante a validade de P(n + 1).

Logo, pelo princípio de indução finita temos que P(n) é verdadeira para todo n $\in \mathrm{N}$.

<u>Exemplo 02</u>: Prove que $3^{n-1} < 2^{n^2}$ para todo n $\in \mathrm{N}$.

<u>Uma solução:</u>

Seja a propriedade P(n): $3^{n-1} < 2^{n^2}$.

Para n = 1 temos que P(1): 1 < 2 e, portanto, afirmação verdadeira.

Suponhamos agora que P(n) seja verdadeira e, usando a desigualdade

3 < 2^{2n+1}

para qualquer n $\in \mathrm{N}$, segue-se que

$$3^n = 3^{n-1}.3 < 2^{n^2}.2^{2n+1} = 2^{(n+1)^2};$$

o que garante a validade de P(n + 1).

Logo, pelo Princípio de Indução Finita P(n) é verdadeira para qualquer n $\in \mathrm{N}$.

Vale notar que os exemplos precedentes foram resolvidos e redigidos, buscando a tentativa de comunicar o raciocínio pensado, sob as condições postas da Linguagem Matemática e, respeitando as normas cultas determinadas no uso da linguagem natural, sem deixar de lado, as exigências e rigor que requerem uma demonstração matemática.

2.11 ASPECTOS DA FORMALIZAÇÃO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO

Estudar Matemática em qualquer nível escolar requer a tentativa de expressar em Linguagem Matemática o pensamento imaginativo, abstrato. Por isso, fundamental importância devemos à formalização dessas ideias, utilizando-se de uma teoria sistematizada, que nos permita não só assimilar aos poucos esses conhecimentos, mas também explicá-los.

Sant'Anna, afirma que

> [...] os conceitos abstratos são de difícil assimilação mesmo para a mais inteligente das pessoas. Por exemplo, a noção de "vermelho" na linguagem natural, é um conceito abstrato. É mais fácil pensar em objetos vermelhos do que propriamente no conceito "vermelho", dissociado de qualquer objeto ou forma. Algo parecido ocorre em matemática (SANT'ANNA, 2003, p. 14).

Uma Teoria Formal estabelece o uso da Lógica, que por sua vez, requer uma linguagem própria, e esta, a Linguagem Matemática consagrada pelas autoridades matemáticas, com a intencionalidade de desenvolver e socializar, no contexto da Matemática, a construção dos conhecimentos.

> Assim como não se pode fazer uma exegese séria da obra de Aristóteles sem o conhecimento de grego antigo, também não é possível discursar sobre ideias matemáticas sem conhecer as linguagens da matemática (SANT'ANNA, 2003, p. 14).

No entanto, conforme Morais Filho (2007), não podemos querer reduzir a Matemática à Lógica pois há certa limitação no uso do método axiomático que o impede de formalizar de modo consistente toda a Matemática.

Por exemplo, lembremo-nos da conjectura[7] enunciada pelo matemático alemão Christian Golbach (1690-1764) que nos diz, *"Todo número par maior que dois é a soma de dois números primos"*. Foram diversas as tentativas de uma demonstração para estabelecer efetivamente sua validade, porém, esta é inexistente até os dias de hoje. Conforme exposto por Morais Filho (2007), os resultados obtidos até o ano 2006 comprovaram a validade da proposição para os maiores números pares que o computador conseguiu trabalhar e para todos os números pares menores do que $4x10^{17}$.

Desse modo, talvez considerar e pretender reduzir a Lógica, caracterizando-a como um método de obter inferências legítimas em quaisquer conteúdos, parece-nos conveniente neste momento.

De acordo com Machado (2001), o Formalismo teve em Kant[8] talvez sua mais funda raiz, em que buscou na percepção a fonte da evidência das proposições matemáticas. Hilbert, por sua vez, adotando as ideias de Kant, caracterizou o Formalismo como

> [...] a Matemática compreende descrições de objetos e construções concretas, extralógicas; estas construções e estes objetos devem ser enlaçados em Teorias Formais em que a Lógica é o instrumento fundamental; o trabalho do matemático deve consistir no estabelecimento

---

[7] *conjectura matemática* (ou conjetura matemática) é uma afirmação para a qual ainda não se dispõe de uma demonstração que comprove sua validade, ou de um contraexemplo para garantir que ela não é válida" (MORAIS FILHO, 2007, p. 111).

[8] Immanuel Kant, pensador da segunda metade do século XVIII, do interior da Prússia. "Kant é considerado um dos filósofos de mais difícil leitura, dada a linguagem que ele utiliza e a forma como busca construir argumentos densos e precisos" (ABBUD, 2010, p. 124).

> de Teorias Formais consistentes, cada vez mais abrangentes até que se alcance a formalização completa da Matemática (MACHADO, 2001, p. 29).

Esse autor considera que a Teoria Formal consta de termos primitivos, regras para formação de fórmulas a partir deles, os axiomas como verdades básicas, as regras de inferências e os teoremas como verdades demonstráveis a partir dos axiomas.

CAPÍTULO III - UMA PROPOSTA DE INTERVENÇÃO

Tudo deve ser feito tão simples quanto possível, mas não mais simples.
Albert Einstein

Neste Capítulo abordarmos, especificamente, o papel da escrita dos textos matemáticos sob certas condições postas por Morais Filho (2007, 2010), num contexto, no qual a redação tenta ocupar uma função mediadora para comunicar os resultados matemáticos. Na realidade, nossa intenção é exercitar a formalização e expressão destes resultados, com o uso das regras gramaticais que atendam os padrões cultos da língua portuguesa, além do rigor lógico que requer a Matemática. Por isso, em seguida, apresentamos uma proposta de intervenção que, supostamente, busca contemplar uma prática educacional extracurricular, com ênfase na leitura, oralidade e escrita em Linguagem Matemática.

3.1 A ESCRITA DOS RESULTADOS MATEMÁTICOS

Adquirir o hábito de escrever os resultados matemáticos remete-nos pensar em Lógica, Linguagem Matemática e linguagem natural, formalização de ideias, buscando certa proximidade de expressar os raciocínios com a exatidão e rigores necessários, exigidos na ciência matemática. Além disso, lembramos que a tentativa é comunicarmos por meio da escrita, o desenvolvimento do que foi pensado e articulado.

Para Morais Filho (2007) ao demonstrarmos qualquer resultado matemático, temos certa liberdade de raciocínio e de procedimentos que poderemos utilizar, porém, uma demonstração é proveniente do seu modo de apresentação dos argumentos, que por sua vez, podem ou não nos mostrar com eficácia a teoria empregada.

Em adição, esse autor diz que não existem receitas e sim tentativas que dependem, não somente dos conhecimentos adquiridos, mas também de tentar comunicar-se com certa clareza e concisão. E nos aconselha, um bom começo é conhecer detalhadamente as demonstrações de diversos resultados e as técnicas utilizadas, e a partir daí, criar a sua forma pessoal de expressar-se.

À respeito da produção de um texto matemático qualquer, conforme Morais Filho (2010), devemos distinguir o que pensamos, o que desejamos expressar, o que escrevemos e o que os leitores vão entender do que está escrito. Assim, cita as palavras de Kepler[9]

> [...] a prolixidade tem sua dose de obscuridade, não menor do que a concisão. Esta escapa aos olhos da mente, aquela os confunde; esta carece de luz, aquela sofre de excesso de luminosidade; aqui a visão não se move, lá é ofuscada (KEPLER *apud* MORAIS FILHO, 2010, p. 5).

Esse autor comenta sobre a preocupação já existente, na época, com a expressão e a redação de um resultado matemático. E acrescenta, "[...] é tão importante e demanda tanto esforço quanto saber ou desenvolver a Matemática que está nele." (MORAIS FILHO, 2010, p. 5).

Ainda coloca que na construção de um texto deve-se buscar as qualidades específicas que a Matemática demanda: clareza, concisão, rigor e formalismo, porém, sem exageros. Ressalta que a intenção em atingir algum equilíbrio na escrita, quando possível, só se dá com a prática, o tempo, a observação e o bom senso. Coloca um fator importante, o de não esquecermos que a linguagem a ser utilizada depende do público para o qual estamos nos dirigindo, isto é, "uma coisa é escrever um texto de divulgação científica para não especialistas ou para alunos do Ensino Médio, outra é escrever uma dissertação de mestrado, uma tese de doutorado ou um artigo científico" (MORAIS FILHO, 2010, p. 14).

Por meio de considerações, sugestões e recomendações, o autor comenta sobre o uso conveniente da língua portuguesa. O pronome pessoal mais adequado em uma demonstração; o modo de expressar uma conjunção condicional *"se ... então";* o verbo *"ter"* e seus diferentes significados nos textos matemáticos tais como: *então, decorre*, *vale*; um alerta para as expressões matemáticas que exigem as mesmas regras de pontuação que uma frase qualquer, com sujeito e predicado; a preposição após verbos tal como, o verbo *acarretar*, que devemos dizer P *acarreta* Q; o uso incorreto de palavras em frases, por exemplo, "Um objeto *cumpre* uma propriedade." (errado) poderíamos ter "Um objeto *possui* a propriedade."(correto); o cuidado no uso indevido da expressão *"Ao invés de*" em lugar de "*Em vez de"* em frases.

Muitas outras recomendações são feitas por esse autor, dentre estas, mediante frases que definem. Indica-nos o uso das palavras: *define-se, chamamos,*

---

[9] Johann Kepler (1571-1630): matemático e astrônomo alemão, mais conhecido pelas Leis de Kepler do movimento planetário, expostas em sua obra *Astronomia Nova*.

denomina-se, etc., entretanto, pode-se optar por escolher as palavras: *seja, sejam, considere, consideremos, denote, denotemos, dentre outras*; conforme a situação. Lembra-nos que quando as definições são representadas por notações não podemos esquecer de explicar os símbolos utilizados. E reforça, uma definição deve ser acompanhada de exemplos para ilustrar com eficiência e diversidade os objetos definidos, além de ser extremamente cuidadoso com as definições que formula, ou seja, a definição corresponde de fato ao objeto que deseja definir?

Do que nos interessa compreender, a abordagem sobre como enunciar teoremas e escrever uma demonstração matemática, feita por esse autor, parece-nos ser muito pertinente.

Ele coloca, por exemplo, diferentes maneiras de escrever uma sentença condicional, tais como:

> (a) A soma dos algarismos do número n é divisível por 3 $\Rightarrow$ n é divisível por 3. (b) Se a soma dos algarismos do número n for divisível por 3, então n é divisível por 3. (c) Ter a soma dos seus algarismos divisível por 3 é condição suficiente para que o número seja divisível por 3. (d) Ser divisível por 3 é condição necessária para que o número tenha a soma dos seus algarismos divisível por 3 (MORAIS FILHO, 2010, p. 76).

Além disso, dentre várias sugestões, afirma que, “Algumas vezes, logo no início, deve-se devotar algumas palavras, explicando a ideia geral da demonstração, o que vai ser feito e aonde se quer chegar” (MORAIS FILHO, 2010, p. 81).

Desse modo, concordamos com esse autor que aponta, o escritor deve guiar seus leitores informando-os cada passo e ensinando-os a deduzir um resultado a partir das hipóteses disponíveis. Sugere algumas frases tais como: *‘Nosso objetivo será mostrar que ...’ ou ‘Suponha por absurdo (ou contradição) que ...’*, para o início de uma demonstração; outras como: *‘Desse ponto em diante, nosso objetivo será mostrar que ...’, ’Resta-nos provar ...’*, para conectar passos da demonstração. Solicita cautela para as frases do tipo: *‘isso é trivial’, ‘é óbvio que’, é fácil ver que’, etc.,* que se usadas inadequadamente, podem representar certa petulância por parte do escritor. E o uso de frases do tipo: *‘no que’, ‘veja que’, ‘observe que*’, que devem ser apresentadas, sempre, com comentários explicativos. Encerra, mostrando abreviações e símbolos que representam o final de uma demonstração, por exemplo, *C.Q.D.* que significa ‘como queríamos demonstrar’.

Por outro lado, esse autor nos traz novamente, o ato de demonstrar é um ato de persuasão; e como já posto no Capítulo II, discordamos do ato de convencer ou persuadir.

Finalmente, Morais Filho (2010) nos alerta para o uso conveniente das notações matemáticas lembrando que certas ideias matemáticas são vistas com mais clareza, ora expressando-se por palavras, ora usando-se símbolos. Assim, atenta-nos para a busca do equilíbrio quando se trata da escrita que envolvem palavras e símbolos, no sentido de que não gerem confusões ou complicações no entendimento, ou seja, devemos ter o bom senso na escolha da forma escrita de uma expressão ou fórmula. Para esse autor, “[...] certas ideias na Matemática são melhores expressas usando-se palavras; já outras, usando-se símbolos” (MORAIS FILHO, 2010, p. 88) e, exemplifica dizendo, em vez de escrever em símbolos

$$"\forall y \in R, y > 0, \exists x \in R; x^2 = y"$$

podemos escrever em palavras *“Todo número real positivo possui uma raiz real”*. E, em vez de escrever em palavras “Não existem quatro números inteiros não nulos, tais que a soma da quarta potência de cada um de três deles seja igual à quarta potência do outro restante”, podemos escrever em símbolos

“A equação $x^4 + y^4 + z^4 = w^4$ *não possui raízes inteiras não nulas”.*

Como já discutimos no Capítulo I deste trabalho, talvez, uma efetiva compreensão de textos ou resultados matemáticos, para todos os sujeitos educacionais, tanto professores como alunos, não seja assim consideravelmente acessível. Contudo, entendemos que a tentativa incessante, na busca de estratégias para melhorar os aspectos da linguagem e comunicação na Matemática, em particular, sob a condição de praticar o ato de escrever, podem constituir meios para alcançar certa melhoria no desenvolvimento e na socialização do saber científico da Matemática.

3.2 INTERVENÇÃO PROPOSTA

Nesta seção, propomos uma atividade voltada tanto para os alunos do Curso de Formação de Docentes, em nível médio, quanto para alunos do Curso de Graduação em Matemática. Para tal atividade, utilizaríamos, num primeiro momento, a metodologia tradicional, por ser a que estamos mais acostumadas, e nos parecer adequada para o tipo de atividade a ser desenvolvida.

Na oportunidade, uma maneira de abordar conteúdos e explicações por meio da escolha de algumas questões das provas de 1ª Fase da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) – Nível 3. E, para os sujeitos educacionais, professores e alunos, a participação na construção da expressão oral e escrita de resultados matemáticos. O confronto das ideias pensadas, a exposição de diversas interpretações das questões que possam surgir e as diferentes produções das soluções apresentadas.

É sabido que a OBMEP ocorre há 10 (dez) anos e representa um excelente incentivo aos estudos da Matemática para os alunos das escolas públicas de nosso país. A referida prova da 1ª fase, consta de 20 (vinte) questões, das quais 1 (uma) sempre refere-se ao conteúdo clássico de Lógica contemplando a análise da validade de sentenças. Assim, podemos trazer, por meio dessas questões, os conceitos básicos de Lógica, fundamentados com o intuito de sustentarmos intelectualmente a construção do pensamento, numa tentativa de contribuir com a interpretação, organização e expressão das ideias pensadas.

Por exemplo, escolhendo a Questão 11 da OBMEP 2010 (BRASIL, 2014):

Adriano, Bruno, Carlos e Daniel participam de uma brincadeira na qual cada um é um tamanduá ou uma preguiça. Tamanduás sempre dizem a verdade e preguiças sempre mentem.

- Adriano diz: ”Bruno é uma preguiça.”
- Bruno diz: ”Carlos é um tamanduá.”
- Carlos diz: “Daniel e Adriano são diferentes tipos de animais.”
- Daniel diz: “Adriano é uma preguiça.”

Quantos dos quatro amigos são tamanduás?

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

Uma solução da OBMEP:

Temos duas possibilidades para Adriano: ele é um tamanduá ou uma preguiça. Vamos primeiro supor que ele é um tamanduá e fazer o Quadro 7, linha por linha, de acordo com as falas dos amigos:

Quadro 7 – Organizando de dados

		é	diz que	logo
1	Adriano	Um tamanduá (diz a verdade)	Bruno é uma preguiça	Bruno é uma preguiça
2	Bruno	Uma preguiça (mente)	Carlos é um tamanduá	Carlos é uma preguiça
3	Carlos	Uma preguiça (mente)	Daniel e Adriano são tipos diferentes de animal	Daniel e Adriano são o mesmo tipo de animal
4	Daniel	Um tamanduá (diz a verdade)	Adriano é uma preguiça	Adriano é uma preguiça

Fonte: OBMEP

As casas sombreadas mostram que nesse caso Adriano, além de ser um tamanduá, é também uma preguiça, o que não pode acontecer pelas regras da brincadeira. Logo Adriano não é um tamanduá, ou seja, ele é uma preguiça. Fazemos agora outro quadro do mesmo modo que o anterior (Quadro 8):

Quadro 8 – Organizando os dados

		É	diz que	logo
1	Adriano	Uma preguiça (mente)	Bruno é uma preguiça	Bruno é um tamanduá
2	Bruno	Um tamanduá (diz a verdade)	Carlos é um tamanduá	Carlos é um tamanduá
3	Carlos	Um tamanduá (diz a verdade)	Daniel e Adriano são tipos diferentes de animal	Daniel e Adriano são tipos diferentes de animal
4	Daniel	Um tamanduá (diz a verdade)	Adriano é uma preguiça	Adriano é uma preguiça

Fonte: OBMEP

e vemos que Bruno, Carlos e Daniel são tamanduás. Alternativa D.

C.Q.D.

Uma solução do professor:

Analisando as sentenças:

- Adriano diz: ”Bruno é uma preguiça.”
- Bruno diz: ”Carlos é um tamanduá.”
- Carlos diz: “Daniel e Adriano são diferentes tipos de animais.”
- Daniel diz: “Adriano é uma preguiça.”

1º caso: Suponhamos que Adriano diz a verdade e, portanto, é um tamanduá. O que implica,

Quadro 9 – Organizando os dados:

Bruno	Carlos	Daniel
Preguiça e mente	Preguiça e mente	Tamanduá e fala a verdade

Fonte: autora

Donde resulta que Adriano é uma preguiça. Portanto, uma **contradição**.

Desse modo, podemos afirmar, **Adriano**, de fato, **é uma preguiça**. E nos resta confirmar por meio dos seguintes casos:

2º caso: Suponhamos que Bruno diz a verdade e, portanto, é um tamanduá. Então,

Quadro 10 – Organizando os dados:

Carlos	Daniel	Adriano
Tamanduá e fala a verdade	Tamanduá e fala a verdade	Preguiça e mente

Fonte: autora

3º caso: Suponhamos que Carlos diz a verdade e, portanto, é um tamanduá. Logo,

Quadro 11 – Organizando os dados:

Daniel	Adriano	Bruno
Tamanduá e fala a verdade	Preguiça e mente	Tamanduá e fala a verdade

Fonte: autora

4º caso: Suponhamos que Daniel diz a verdade e, portanto, é um tamanduá. Logo,

Quadro 12 – Organizando os dados

Adriano	Bruno	Carlos
Preguiça e mente	Tamanduá e fala a verdade	Tamanduá e fala a verdade

Fonte: autora

Assim, concluímos, Adriano é uma preguiça e, teremos exatamente três tamanduás. Alternativa D.

C.Q.D.

Indagamos, ‘a linguagem utilizada na apresentação da solução do IMPA foi compreendida? ‘a linguagem utilizada na solução do professor foi compreendida?’

Talvez, as respostas para essas perguntas, não sejam afirmativas, como esperamos. Porém, mostramos nossa tentativa de expressar os textos matemáticos buscando o entendimento de quem lê.

Vale lembrar que não se trata de verificar o melhor resultado, mas sim, oferecer diferentes possibilidades e caminhos, na tentativa de comunicar o raciocínio pensado.

Assim, ler, interpretar, desenvolver o raciocínio e chegar à resposta correta é o primeiro passo. Na continuidade, formalizar o desenvolvimento do que foi pensado, por meio da escrita, um segundo passo. E finalmente, sob confronto por meio da oralidade, num plano em que todos os envolvidos tenham voz e vez; permeados pelo diálogo e numa situação democrática e orientadora dos conhecimentos, a percepção e análise das diferentes formas de apresentação escrita, que podem ou não ocorrer.

Trata-se de expressar os resultados matemáticos mediante a tentativa de conseguir certo equilíbrio na redação, para que esta represente o alcance na comunicação das diversas soluções matemáticas e, consequentemente, na aprendizagem da Matemática.

Desse modo, os resultados obtidos em cada etapa, devem ser registrados, para possível análise e avaliação.

No prosseguimento desta Seção, apresentamos e exploramos outras questões que vão além de um clássico de Lógica, seguidas de comentários. A intenção é trazer a abrangência na articulação de diversos conteúdos matemáticos, tais como Álgebra, Aritmética, Geometria Plana, entre outros, sob a condição de promover a compreensão da Linguagem Matemática, tanto nos enunciados, quanto nas soluções. Neste contexto, a tentativa de promover esta compreensão busca consolidar o ensino e a aprendizagem da Matemática, em qualquer nível escolar.

3.2.1 Outras questões da 1ª Fase - OBMEP sob uma solução do IMPA e uma solução do professor

Questão 01: (OBMEP 2005) Regina, Paulo e Iracema tentam advinhar quantas bolas estão dentro de uma caixa fechada. Eles já sabem que este número é maior que 100 e menor que 140. Eles fazem as seguintes afirmações:

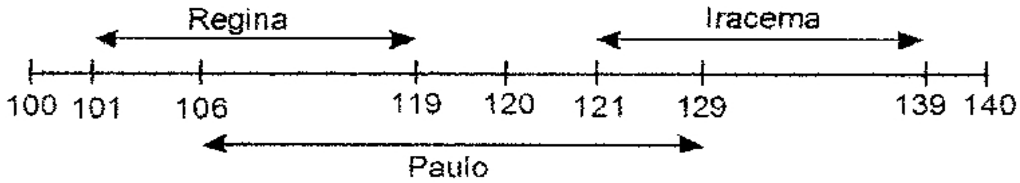
- Regina: Na caixa há mais de 100 bolas e menos de 120 bolas.
- Paulo: Na caixa há mais de 105 bolas e menos de 130 bolas.
- Iracema: Na caixa há mais de 120 bolas e menos de 140 bolas.

Sabe-se que apenas uma dessas afirmações é correta. Quantos são os possíveis valores para o número de bolas dentro da caixa?

(A) 1
(B) 5
(C) 11
(D) 13
(E) 16

Uma solução da OBMEP:

Acompanhe a solução com a ajuda da figura a seguir, que ilustra as afirmativas de Regina, Paulo e Iracema.



i) Se Regina está certa, então Paulo e Iracema estão errados. Os números que satisfazem a afirmação de Regina mas não satisfazem a afirmação de Paulo são 101, 102, 103, 104 e 105; note que estes números também não satisfazem a afirmação de Iracema. Neste caso temos 5 possibilidades para o número de bolas na caixa.

ii) Se Paulo está certo, então Regina e Iracema estão erradas. O único número que satisfaz as opções de Paulo e não satisfaz as de Regina e Iracema é 120. Aqui, temos apenas uma possibilidade para o número de bolas na caixa.

iii) Se Iracema está certa, então Paulo e Regina estão errados. Os números que satisfazem a afirmação de Iracema mas não satisfazem a afirmação de Paulo são 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138 e 139; note que estes números também não satisfazem a afirmação de Regina. Neste caso, temos 10 possibilidades para o número de bolas na caixa. Finalmente, o número total de possibilidades é a soma do número de possibilidades nos casos i), ii) e iii), que é 5 + 1 + 10 = 16. Alternativa E.

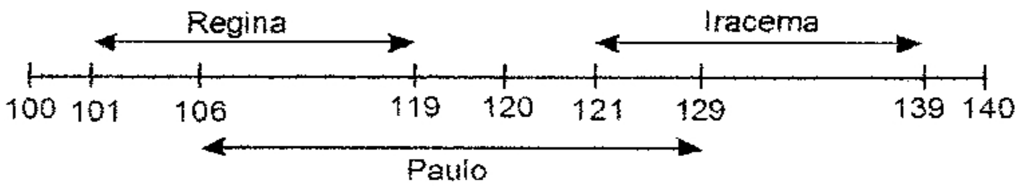
C.Q.D.

<u>Uma solução do professor</u>:

Vamos organizar os dados:

Seja n o número de bolas que estão na caixa. Regina diz que 100< n <120, Paulo diz que 105 < n < 130 e Iracema diz que 120 < n < 140.

Ilustremos conforme solução do IMPA (2005, p. 2):



Suponhamos primeiramente que apenas Paulo esteja correto, então o número de bolas é 120.

Agora vamos supor que apenas Regina esteja correta, então o número de bolas possíveis é 101, 102, 103, 104 ou 105.

E finalmente, suponhamos que apenas Iracema esteja correta, então o número de bolas possíveis é 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138 ou 139. Logo, o número total de valores possíveis é 1 + 5 +10 = 16. Alternativa E.

C.Q.D.

Comentário:

Ao solucionarmos e formalizarmos esta questão, verificamos que as quantidades enunciadas, quando colocadas por meio da escrita de intervalos, poderiam ser abordadas, trazendo o enriquecimento do assunto. Porém, percebemos, que a ilustração apresentada pela solução da OBMEP, por meio de figura, foi imprescindível para contribuir com a leitura e interpretação da questão. Isto remete-nos dizer que a linguagem utilizada por meio do esquema, esclareceu, sobremaneira o que foi posto no enunciado e, consequentemente, facilitou nosso entendimento.

Questão 02: (OBMEP-2006) No dia de seu aniversário em 2006, o avô de Júlia disse a ela: “Eu nasci no ano x² e completei x anos em 1980. Quantos anos eu completo hoje?

(A) 61
(B) 64
(C) 67
(D) 70
(E) 72

Uma solução da OBMEP:

O que o avô de Júlia disse pode ser escrito como

$$\underbrace{\text{idade em } 1980}_{x} = 1980 - \underbrace{\text{ano de nascimento}}_{x^2}$$

ou seja, $x = 1980 - x^2$. Logo; $x^2 + x - 1980 = 0$; esta equação tem as raízes

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4x1980}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7921}}{2} = \frac{-1 \pm 89}{2}$$

Segue que, em 1980 o avô de Júlia tinha 44 anos e assim, em 2006, ele completa 44 + (2006 – 1980) = 44 + 26 = 70 anos. Alternativa D.

C.Q.D.

Uma solução do professor:

Quadro 13 - Organizando os dados

Ano	Idade do avô
x^2	0
1980	x
2006	?

Fonte: autora

Analisando os dados no Quadro 13, observamos que ao adicionarmos o ano x^2 com a idade x do avô obtemos o ano 1980. Desse modo, para determinarmos x podemos achar as raízes da equação do 2º grau: $x^2 + x = 1980$, utilizando a fórmula de Bháskara.

Assim, $\Delta = b^2 - 4ac$ e $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. Substituindo os valores temos que $\Delta = 1^2 - 4.1.(-1980) = 7921$ e $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{7921}}{2.1} = \dfrac{-1 \pm 89}{2}$ do que resulta x = 44.

Finalmente, como temos 26 anos de diferença do ano 1980 até o ano 2006, então, adicionamos 44 + 26 que é igual a 70. Logo, em 2006, o avô de Júlia tem 70 anos. Alternativa D.

C.Q.D.

Comentário:

A escolha desta questão deu-se em função da linguagem matemática proposta no enunciado, que por sua vez, requer imediatamente o entendimento de quem lê. No entanto, para interpretar e articular os dados, resolvemos organizar o quadro apresentado no início da solução. Pensamos, nesta situação, que talvez pudéssemos facilitar a compreensão de quem lê.

Por outro lado, constatamos que, ao tratarmos da formalização na apresentação e resolução da equação do 2º grau, as expressões matemáticas escritas na solução da OBMEP, pareceram-nos expressivamente mais claras para leitura e compreensão.

Desse modo, solucionamos a questão e formalizamos a solução.

Questão 03: (OBMEP 2006) O número *abcde* tem cinco algarismos distintos e diferentes de zero, cada um deles representado por uma das letras *a, b, c, d, e*. Multiplicando-se este número por 4 obtém-se o número de cinco algarismos *edcba*. Qual o valor de $a + b + c + d + e$?

(A) 22
(B) 23
(C) 24
(D) 25
(E) 27

Uma solução da OBMEP:

A solução é baseada nas seguintes observações:

a só pode ser 1 ou 2 porque se $a \geq 3$ então 4a é um número de 2 algarismos e portanto o número *edcba* teria 6 algarismos. Mas *a* não pode ser 1 pois *edcba,* sendo múltiplo de 4, é par, donde seu último algarismo é par. Logo $a = 2$ e segue-se:

$$\begin{array}{r} 2\,b\,c\,d\,e \\ \underline{\times \quad\quad 4} \\ e\,d\,c\,b\,2 \end{array}$$

e só pode ser 8 ou 9 porque 2 x 4 = 8 e *edcba* tem apenas 5 algarismos. No entanto, *e* não pode ser 9 porque 9 x 4 termina em 6 e não em 2. Logo $e = 8$ e segue-se:

$$\begin{array}{r} 2\,b\,c\,d\,8 \\ \underline{\times \quad\quad 4} \\ 8\,d\,c\,b\,2 \end{array}$$

b só pode ser 1 ou 2 porque 4 x *b* tem que ser um número de apenas 1 algarismo. Como $a = 2$ e os cinco algarismos de *abcde* são distintos, só podemos ter $b = 1$ e segue-se:

$$\begin{array}{r} 2\,1\,c\,d\,8 \\ \underline{\times \quad\quad 4} \\ 8\,d\,c\,1\,2 \end{array}$$

d só pode ser 2 ou 7 porque $4 \times d + 3$ é um número terminado em 1. Como $a = 2$ e os cinco algarismos de *abcde* são distintos só podemos ter $d = 7$ e segue-se:

$$\begin{array}{r} 2\,1\,c\,7\,8 \\ \underline{\times \quad\quad 4} \\ 8\,7\,c\,1\,2 \end{array}$$

c só pode ser 9 porque $4c + 3$ é um número terminado em *c* e segue-se:

$$\begin{array}{r} 2\,1\,9\,7\,8 \\ \underline{\times \qquad 4} \\ 8\,7\,9\,1\,2 \end{array}$$

Logo, a resposta é 8 + 7 + 9 + 1 + 2 = 27. Alternativa E.

C.Q.D.

<u>Uma solução do professor</u>:

Seja *abcde* o número de cinco algarismos distintos, diferentes de zero que multiplicado por 4 resulta em *edcba*. Temos que *a* só pode ser 1 ou 2 pois *edcba* possui 5 algarismos. E substituindo *a* = 1 teríamos *edcb*1 que não representa um múltiplo de 4. Logo, ***a* = 2**. Assim, temos que

$$\begin{array}{r} 2\,b\,c\,d\,e \\ \underline{\times \qquad 4} \\ e\,d\,c\,b\,2 \end{array}$$

Agora vamos verificar os possíveis valores de *e*, que representa o primeiro algarismo do resultado, e portanto, não pode ter dois algarismos. Isto é, *e* = 8 ou *e* = 9. Mas, substituindo *e* = 9 obtemos que 4x9 = 36, o que não convém pois 36 não termina em 2. Logo, ***e* = 8**, pois 4x8 = 32. Ficamos então com

$$\begin{array}{r} 2\,b\,c\,d\,8 \\ \underline{\times \qquad 4} \\ 8\,d\,c\,b\,2 \end{array}$$

donde 4*d* + 3 termina em *b* e por outro lado, 4*b* termina em *d*, com um algarismo. O que nos resta dizer que *b* = 1 ou *b* = 2. Mas, *a* = 2 então, ***b* = 1**. Logo temos que

$$\begin{array}{r} 2\,1\,c\,d\,8 \\ \underline{\times \qquad 4} \\ 8\,d\,c\,1\,2 \end{array}$$

donde 4*d* + 3 termina em 1 e *d* possui apenas um algarismo. Daí, se *d* = 3 então 4*d* + 3 = 15 (não convém pois termina em 5); se *d* = 4 então 4*d* + 3 = 19 (não convém pois termina em 9); se *d* = 5 então 4*d* + 3 = 23 (não convém pois termina em 3); se *d* = 6 então 4*d* + 3 = 27 (não convém pois termina em 7); se *d* = 7 então 4*d* + 3 = 31. E portanto, resulta que ***d* = 7**. Finalmente temos

$$\begin{array}{r} 2\,1\,c\,7\,8 \\ \underline{\times \qquad 4} \\ 8\,7\,c\,1\,2 \end{array}$$

em que $4c + 3$ termina em c. Daí, se $c = 3$ então $4c + 3 = 15$ (não convém); se $c = 4$ então $4c + 3 = 19$ (não convém); $c = 5$ então $4c + 3 = 23$ (não convém); $c = 6$ então $4c + 3 = 27$ (não convém); $c = 9$ então $4c + 3 = 39$. Logo, $\boldsymbol{c = 9}$ e resulta que

$$\begin{array}{r} 2\,1\,9\,7\,8 \\ \underline{\times \qquad 4} \\ 8\,7\,9\,1\,2 \end{array}$$

e a soma $a + b + c + d + e = 2 + 1 + 9 + 7 + 8 = 27$. Alternativa E.

C.Q.D.

Comentário:

Ao formalizarmos a solução desta questão, observamos que, embora as operações requeridas fossem elementares - adição e multiplicação - de números naturais diferentes de zero, ao considerarmos a aritmética das possibilidades, a redação tornou-se notadamente exigente, haja visto que, deveríamos escrever cada passo, buscando informar as ideias pensadas.

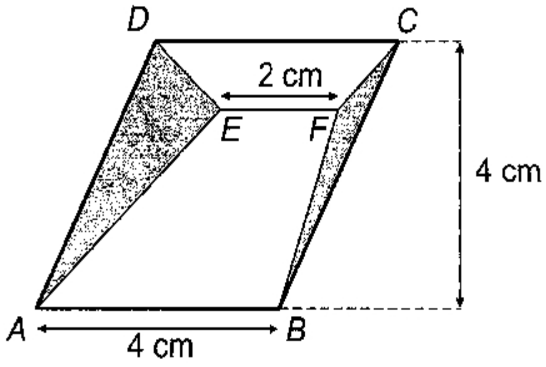
Por outro lado, no intuito de enriquecer os conhecimentos referentes às operações abordadas, verificamos também, em dado momento, a possibilidade de explorar as definições das operações de adição e multiplicação de números reais, por meio de axiomas, bem como, as respectivas propriedades que podem caracterizá-las.

Para exemplificar, recorremos a Morais Filho (2007, p. 64, grifo do autor), que apresenta os axiomas de adição de números reais:

> Para cada par de números reais x e y, associamos um número real $x + y$, chamado ***soma de*** x ***com*** y. A operação que leva cada par *(x, y)* no número $x + y$ chama-se ***adição*** e satisfaz às seguintes propriedades (axiomas): A1) Associatividade da adição: Para todos x, y e z $\in R$, tem-se $(x + y) + z = x + (y + z)$. A2) Existência do elemento neutro da adição: Existe um número real $\xi \in R$ tal que, para todo x $\in R$, valem as igualdade $x + \xi = \xi + x = x$. (Posteriormente usaremos o símbolo 0 para denotar ξ. Não refute essa notação do elemento neutro, ela serve como treinamento para algumas idéias abstratas que um estudante ou professor de Matemática deve ter). A3) Existência do elemento inverso ou elemento simétrico da adição: Para todo x $\in R$, existe y $\in R$, tal que $x + y = y + x = \xi$. (Posteriormente, o símbolo –x denotará o elemento y. Aqui vale o mesmo comentário do item anterior). A4) Comutatividade da adição: Para todos x, y $\in R$, tem-se $x + y = y + x$.

E, identicamente solicita, por meio de exercício, a formulação da axiomatização da multiplicação de números reais.

Questão 04: (OBMEP–2009) Na figura, ABCD é um paralelogramo e o segmento EF é paralelo a AB. Qual é a soma das áreas dos triângulos cinzentos?



(A) 2 cm²
(B) 4 cm²
(C) 6 cm²
(D) 8 cm²
(E) 10 cm²

Uma solução da OBMEP:

Para achar a soma das áreas dos triângulos, basta calcular a área do paralelogramo ABCD e subtrair as áreas dos trapézios ABFE e CDFE. Seja *h* a altura do trapézio ABFE; sua área é então $\frac{AB+EF}{2}h = 3h$ cm². Como a altura do paralelogramo ABCD é 4 cm, a altura do trapézio CDFE é *4 – h* e sua área é

$$\frac{CD+EF}{2}(4-h) = 12-3h \text{ cm}^2.$$

A área do paralelogramo ABCD é 16 cm²; a soma das áreas dos triângulos é então, *16 – (3h+12-3h) = 4* cm². Alternativa B.

C.Q.D.

Uma solução do professor:

Na figura, observamos que a soma das áreas dos triângulos cinzentos corresponde a diferença entre a área do paralelogramo ABCD e a soma das áreas dos trapézios EFBA e EFCD. Desse modo, a área do paralelogramo ABCD é igual a 4.4 = 16 cm².

Suponhamos agora, a altura do trapézio EFBA igual a x, logo a altura do trapézio EFCD é igual a (4 – x).

Então, a área do trapézio EFBA é igual a $\frac{(4+2).x}{2} = 3x$ e a área do trapézio EFCD é igual a $\frac{(4+2).(4-x)}{2} = 12 - 3x$.

Somando a área dos trapézios obtemos 12 cm². Donde resulta que a área dos triângulos cinzentos é 16 cm² – 12 cm² = 4 cm². Alternativa B.

C.Q.D.

Comentário:

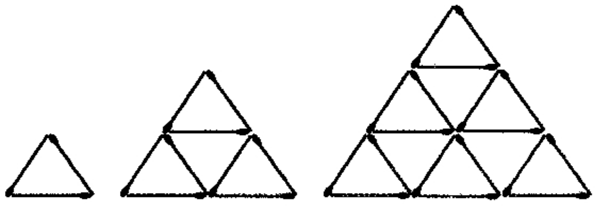
Inicialmente, na escolha desta questão, pudemos observar, por meio da figura apresentada, a possibilidade de abordar, as definições das figuras planas: triângulo, paralelogramo e trapézio; seus respectivos elementos e as fórmulas deduzidas de suas áreas.

Então, na opção de uma situação que nos permita a elaboração das definições desses objetos, recorremos a Morais Filho (2007, p. 57), que coloca:

> I) *Primeiro Passo*: parte-se das noções que se tem do objeto a ser definido, para uma concepção mais elaborada dele. Deve-se encontrar as principais propriedades que o caracterizam. Essa fase é a fase de conceituação, quando se pode usar exemplos para descobrir essas propriedades. II) *Segundo Passo*: a formalização da definição, usando as propriedades encontradas na conceituação do objeto. Nesse estágio, é necessário usar o formalismo e a terminologia adequada (tudo na porção certa). Essa é a fase da redação do que foi conceituado, é o momento de redigir a definição do objeto.

Em seguida, sustentados por estes estudos da geometria euclidiana, solucionamos a questão. E, novamente, estabelecemos nossa forma pessoal de escrever e formalizamos a solução.

Questão 05: (OBMEP-2012) Renata montou uma sequência de triângulos com palitos de fósforo, seguindo o padrão indicado na figura. Um desses triângulos foi construído com 135 palitos de fósforo. Quantos palitos tem um lado desse triângulo?



(A) 6

(B) 7

(C) 8

(D) 9

(E) 10

.

Uma solução da OBMEP:

O primeiro triângulo da sequência é formado por três palitos. Para $n \geq 2$, o triângulo que ocupa a posição n na sequência é formado acrescentando n triângulos iguais ao primeiro ao triângulo precedente. Logo, o total de palitos utilizados para construir o triângulo que ocupa a posição *n* na sequência é $3.1+3.2+...+3n = 3.(1+2+...+n) = \frac{3n(n+1)}{2} = 135$, ou seja, $n(n+1) = 90$. Por inspeção, vemos que a raiz positiva dessa equação é $n = 9$; logo o triângulo que estamos procurando é o nono triângulo da sequência, cujo lado tem 9 palitos. Alternativa D.

C.Q.D.

Uma solução do professor:

Considere o seguinte quadro que relaciona o número de palitos de um lado do triângulo formado e o número total de palitos utilizados na formação desses triângulos:

Quadro 14 – Organizando os dados

nº de palitos de um lado	nº total de palitos
1	3
2	9
3	18
...	...
x	135

Fonte: autora

Observemos que o número total de palitos do segundo triângulo, é a soma $3+6$; e o número total de palitos do terceiro triângulo, é a soma $3+6+9$. Logo, podemos escrever a sequência $3+6+9+...+3.x$, que corresponde a $3.1+3.2+3.3+$ ... $+3.x$, para obtermos o número total de palitos utilizados em cada triângulo formado, a partir do primeiro.

Desse modo, se somarmos $3.1+3.2+3.3+...+3.x$ obtemos 135 palitos. Ou seja,

$$3.1+3.2+3.3+...+3.x=135$$

$$\Rightarrow 3.(1+2+3+...+x)=135$$

$$\Rightarrow 1+2+3+...+x=45$$

na qual o lado esquerdo da igualdade representa a soma dos termos de uma progressão aritmética. E, portanto, temos:

$$\frac{(1+x)x}{2}=45$$

$$\Rightarrow x^2+x-90=0$$

$$\Rightarrow x=-10 \text{ ou } x=9.$$

Donde concluímos, o número de palitos de um lado do triângulo formado por 135 palitos deve ser igual a 9. Alternativa D.

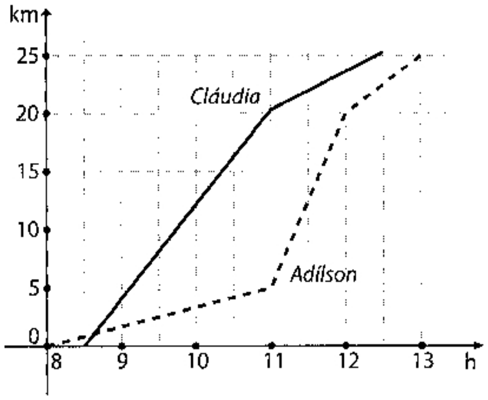
C.Q.D.

Comentário:

Ao interpretarmos esta questão, verificamos certa dificuldade na formalização da solução, por tratar-se de uma progressão aritmética de segunda ordem. Desse modo, optamos pela organização dos dados por meio do quadro apresentado, numa tentativa de ilustrar, os passos provenientes para a obtenção da sequência formada pelo número total de palitos.

Em seguida, estabelecemos nossa forma pessoal de escrever e notamos que as expressões matemáticas, exigidas nos cálculos algébricos, foram idênticas nas duas soluções apresentadas, da OBMEP e do professor, por permearem as regras respeitadas e consagradas em linguagem matemática.

Questão 06: (OBMEP- 2013) Em um mesmo dia, Cláudia partiu de Quixajuba para Pirajuba, enquanto Adilson partiu de Pirajuba para Quixajuba. O gráfico mostra a distância de cada um deles ao respectivo ponto de partida durante todo o trajeto, em função do tempo. A que horas eles se encontraram na estrada?



(A) 8h45min
(B) 10h15min
(C) 10h30min
(D) 11h00min
(E) 11h45min

<u>Uma solução da OBMEP:</u>

Observamos no gráfico que a distância total percorrida por Cláudia, e também por Adilson, é de 25 km (Cláudia em 4 horas e Adilson em 5 horas). Logo, para determinar o horário do encontro entre eles, devemos determinar em que momento a soma das distâncias percorridas é igual a 25 km. Os pontos assinalados no gráfico mostram que às 11 horas Cláudia e Adilson haviam percorrido, respectivamente, 20 km e 5 km; logo, foi nesse horário que eles se encontraram. Alternativa D.

C.Q.D.

<u>Uma solução do professor:</u>

Observando o gráfico que se refere às distâncias de Cláudia e Adilson aos respectivos pontos de partida, em função do tempo; notamos que o trajeto completo de ambos, a distância entre Pirajuba e Quixajuba, é equivalente a 25 km. Desse modo, é sabido que no momento em que ambos se encontram, as posições devem corresponder às distâncias, cuja soma é 25. Logo, numa leitura do gráfico e mediante as alternativas propostas, verificamos a informação, às 11 horas, Cláudia está a uma distância de 20 km de Quixajuba e Adilson, 5 km de Pirajuba; donde resulta 20 km + 5 km = 25 km. Portanto, concluímos que Cláudia e Adilson encontraram-se às 11h00min. Alternativa D.

C.Q.D.

Comentário:

É possível saber, a questão trata-se do conteúdo de álgebra, especificamente, o conteúdo de funções. A lei de correspondência é a distância percorrida em função do tempo. Esta permite-nos dizer, apenas por meio da leitura e interpretação do gráfico proposto, solucionamos a questão.

Vale dizer que, na posição de coordenador a qual ocupamos, há 10 (dez) anos, no Colégio Estadual Cristo Rei, mediante a organização da OBMEP, as questões e as soluções da OBMEP apresentadas, foram retiradas diretamente das provas e soluções impressas enviadas para aquela instituição.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

É possível citar outros teoremas, comentar outras técnicas de demonstração, ou ainda, resolver outras questões da OBMEP. Todavia, isso não se faz necessário considerando que nosso objetivo é mostrar que estamos dispostos a buscar estratégias com vistas às práticas educacionais, que possam interferir no processo de construção e enriquecimento dos conhecimentos matemáticos.

A meta traçada, em particular, deve estar em consonância com os estudos aqui desenvolvidos, permeados pela Linguagem Matemática, sua importância e seu rigor lógico na formalização e apresentação de resultados matemáticos.

Como cursista do PROFMAT, reconhecemos o inestimável desenvolvimento pessoal e intelectual durante o percurso de estudos das disciplinas ofertadas que, acentuavam sobremaneira, a apresentação de demonstrações matemáticas. Fundamentalmente, tudo se resumia em, 'prove que ... ' e demonstre que ... '; o que nos permitiu exercitar a oralidade e a escrita na formalização e apresentação dos resultados matemáticos com todo rigor lógico, atendendo às expectativas do material proposto.

Desse modo, trazemos novamente as inquietações que nos levaram à constituição deste estudo: Quais seriam as palavras pertinentes para escrever em cada situação?', 'Seria possível escrever de forma clara, concisa e ainda, elegante, sustentada pela ideia de conseguir expressar um resultado corretamente?' 'A escrita em matemática formal é uma questão pessoal, ou não?'.

As respostas em dado momento seriam: 'As palavras pertinentes devem ser escolhidas de forma pessoal, desde que, sejam respeitadas as normas cultas da linguagem natural e a Lógica como a Linguagem Matemática Formal, mediante os conceitos consagrados em uma demonstração matemática'. 'Talvez, escrever de forma clara, concisa e ainda, elegante; seja uma questão que não consigamos responder neste momento, haja vista que esta resposta depende de quem lê e, na possibilidade, compreende o que foi escrito. Contudo, não podemos desconsiderar as tentativas feitas, principalmente, aquelas apresentadas nas provas e no exame de qualificação do Curso PROFMAT. E, diante deste árduo percurso, constatamos, 'a escrita em matemática formal não é uma questão pessoal'.

Em adição, como professora no Curso de Formação de Docentes, nossa preocupação com a comunicação dos conteúdos matemáticos, se faz ainda mais necessária, mediante a problemática do número reduzido de aulas. Para tanto, a persistência no ato de comunicação dos símbolos, expressões, proposições, operações, enfim dos textos matemáticos; ora por meio da oralidade, ora por meio da escrita e, sobretudo, no uso das linguagens pertinentes; devem ser conduzidos na tentativa de alcançar certa compreensão dos alunos.

Por isso acreditamos que o desenvolvimento de práticas educacionais – tais como a Proposta de Intervenção apresentada no Capítulo III – deve ser assumido, tendo como objetivo a melhoria considerável na aprendizagem de Matemática.

Desse modo, o campo de estudo é a Linguagem Matemática, fundamentado pelos conceitos básicos de Lógica, além do exercício da escrita em Matemática, na condição de gerar benefícios substanciais para superação das dificuldades no ensino e na aprendizagem dessa disciplina.

Tal tarefa representa um processo árduo. Afinal, estamos nos referindo às noções e às verdades de natureza abstrata, e explicá-las promovendo certa comunicação das ideias pensadas, requer não somente o domínio dos conhecimentos matemáticos envolvidos, mas também o domínio das linguagens que expressarão esses resultados.

Destarte, na promoção dos atos de comunicação, sob quaisquer linguagens, certamente obtemos avanços nos aspectos de ensino e aprendizagem de diversas disciplinas. Portanto, não seria diferente para a Matemática.

Embora cientes dos desencontros na comunicação das ideias matemáticas, mesmo que sob pequenos passos, é preciso oportunizar aos sujeitos educacionais, tanto professores quanto alunos, a vivência de relações discursivas, nas quais a igualdade de posições sociais é existente em aulas de Matemática. Assim, diante de um olhar cuidadoso, seja para o ensino, seja para a aprendizagem da Matemática, a obtenção de caminhos rumo à esta conquista é necessária.

Parece-nos que sem os princípios da Lógica, certamente, não conseguiríamos formalizar os resultados matemáticos no sentido de mostrar as ideias ou raciocínios pensados. Logo, falar de Matemática requer falar de Lógica e, o que nos interessa, é a demonstração ou a apresentação de resultados matemáticos, feita de modo que considere os conceitos de Lógica, por sua consistência, no desenvolvimento e na socialização do saber científico, quer na construção da Matemática escolar, quer no aprofundamento de estudos desta ciência.

Supostamente, as diferentes demonstrações e soluções, apresentadas nos Capítulos II e III, referem-se a algumas de nossas tentativas no que tange ao entendimento de quem possa ler ou ouvir.

Tão logo, nesta trajetória é imprescindível refletir em relação ao nosso compromisso, tanto como professor quanto como aluno, com a ampliação e a consolidação dos conhecimentos matemáticos. E, portanto, é evidente, que tal conhecimento só será consolidado, a partir da compreensão da Linguagem Matemática.

REFERÊNCIAS

AABOE, Asger. **Episódios da história antiga da matemática**. Tradução de João Pitombeira de Carvalho. Rio de Janeiro: SBM, 1984.170 p.

ABBUD, Luiz Nelson Macedo. **Filosofar é Perguntar:** Introdução à Filosofia. 3. ed. Londrina, 2010. 229 p.

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Várias Faces da Matemática:** tópicos para licenciatura em geral. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010. 203 p.

BARNARD, T.; TALL, D. Cognitive Units, Connections and Mathematical Proof. **Proceedings of the 21st. Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education** (PME 21). Lahti, Finlandia, 1997. 14-19 Julho, (1): 41 – 48.

BAROODY, Arthur J. **Problem solving, reasoning, and communicating, k-8**: Helping children think mathematically. New York: Macmillan Publishing Co, 1993.

BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. **A matemática através dos tempos:** um guia fácil e prático para professores entusiastas. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010. 279 p.

BRASIL, **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional:** LDBEN n. 9394/96. Brasília: MEC, 1996.

BRASIL, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas:** OBMEP. Provas e Soluções. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 17 abr. 2014.

CARVALHO, Ana Márcia Fernandes Tucci de. **A extimidade da demonstração**. 2004. 219 fls. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 2004.

CARVALHO, Ana Márcia Fernandes Tucci de. ‘Da Vesp’ assada: perspectivas psicanalíticas dos efeitos linguísticos na sala da aula de Matemática. **Zetetiké**, Campinas, v. 18, número temático, p. 91-127, 2010. Disponível em <http://www.fae.unicamp.br/zetetike>. Acesso em: 17 jun. 2014.

CARVALHO, Ana Márcia Fernandes Tucci de; SAVIOLI, Angela Maria Pereira das Dores. Demonstrações em Matemática na Educação Matemática no Ensino Superior. In: FROTA, Maria Clara Rezende; CARVALHO, Ana Márcia Fernandes Tucci de; BIANCHINI, Bárbara Lutaif. (Org.). **Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior**. Campinas, SP: Papirus, 2013. 367 p.

CARVALHO, João Bosco Pitombeira; ROQUE, Tatiana. **Tópicos de História da Matemática – MA31**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. 285 p.

CASTRUCCI, Benedito. **Introdução à lógica matemática**. 6. ed. São Paulo: GEEM: Distribuição Livraria Nobel S. A., 1984. 158 p.

EUCLIDES. **Os Elementos**. tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009. 600 p.

FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké**, Campinas: Unicamp, v. 3, n. 4 , p.1-38, 1995. Disponível em <http://www.fae.unicamp.br/zetetike>. Acesso em: 17 jun. 2014.

FOSSA, John A. **Introdução às técnicas de demonstração na matemática**. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009. 150 p.

GARNICA, Antonio Vicente M.; PINTO, Thiago Pedro. Considerações sobre a linguagem e seus usos na sala de aula de Matemática. **Zetetiké**, Unicamp, v. 18, número temático, p. 201-244, 2010. Disponível em <http://www.fae.unicamp.br/zetetike>. Acesso em: 17 jun. 2014.

HANNA, Gila. Proofs that proove and proofs that explain. **Proceedings of the 13rd. Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. (PME 13). Paris, França, 1989b. (2): 45 – 51.

HANNA, G. Proof, explanation and exploration: an overview. **Educational Studies in Mathematics**. 44, 2000. p. 5–23.

HOUAISS, Antônio e VILLAR, Mauro de Sales**. Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. 1ª impressão com alterações. Rio de Janeiro: Objetiva, 2004.

HEFEZ, Abramo. **Elementos de Aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011. 176 p.

LIMA, Elon Lages et. al. **A Matemática do Ensino Médio**. v. 1. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 237 p.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e Realidade:** análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino da matemática. 5. ed. São Paulo: Cortez, 2001. 103 p.

MACHADO, Nilson José; CUNHA, Maria Ortegoza da. **Lógica e linguagem cotidiana:** verdade, coerência, comunicação, argumentação. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. 125 p.

MARTINS, Roberto de Andrade. A influência de Aristóteles na obra astrológica de Ptolomeu (Os Tetrabillos). **Trans/Form/Ação**. n.18. São Paulo, 1995. p. 51-78.

MENDES, Iran Abreu. **Números:** O simbólico e o racional na história. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006. 102 p.

MENEZES, Luís. **Concepções e práticas de professores de matemática:** Contributos para o estudo da pergunta. 1995. 218 fls. Dissertação (Mestrado em

Educação) - Universidade de Lisboa, Lisboa,1995. Disponível em: <http://repositorio.ipv.pt/bitstream/10400.19/1145/1/Menezes_tese_mestrado_1995.pdf>. Acesso em: 23 ago. 2014.
MENEZES, Luís. **Matemática, linguagem e comunicação**. In Comissão Organizadora do ProfMat99 (Org.), Actas do ProfMat99 (pp. 71-81). Disponível em: <http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/2008%202009/Comunicacao/Proff.pdf>. Acesso em: 23 jun. 2014.

MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro de. **Manual de redação matemática:** com um dicionário etimológico explicativo de palavras usadas na matemática e um capítulo especial sobre como se escreve uma dissertação. Campina Grande, PB, 2010. 149 p.

MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro de. **Um convite à matemática:** fundamentos lógicos, com técnicas de demonstração, notas históricas e curiosidades. 2. ed. Campina Grande: EDUFCG, 2007. 198 p.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar:** geometria euclidiana plana. v. 2. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 432 p.

OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins; FERNÁNDEZ, Adán José Corcho. **Iniciação à Matemática:** um curso com problemas e soluções. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010. 295 p.
PARANÁ/SEED. **Diretrizes Curriculares de Matemática da Educação Básica**. Departamento de Educação Básica. Curitiba, 2008. 81 p. Disponível em: <www.educadores.diaadiaeducacao.pr.gov.br> . Acesso em: 20 jun. 2014.

PARANÁ/SEED. **Proposta Pedagógica Curricular do Curso de Formação de Docentes da Educação Infantil e Anos Iniciais do Ensino Fundamental, em Nível Médio, na Modalidade Normal**. Departamento de Educação Profissional. Curitiba, 2006. 145 p. Disponível em: <www.educadores.diaadia.pr.gov.br> . Acesso em: 20 jun. 2014.

PEREIRA, A. **Comunicação e ensino de ciências:** Contributo para o estudo da pergunta no discurso da aula de ciências do ensino básico. 1991. Tese (Mestrado) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 1991.

POWELL, Arthur; BAIRRAL, Marcelo. **A escrita e o pensamento matemático**. Campinas, SP: Papirus, 2006. 111p.

SANT'ANNA, Adonai S. **O que é um axioma?**. Barueri, SP: Manole, 2003. 157 p.

SIMPSON, Adrian. Developing A Proving Attitude. **Proceedings of Justifying and Proving in School Mathematics**. Institute of Education, Londres, Inglaterra, 1995. p. 39-46.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Tractatus logico-philosophicus**. São Paulo: Cia Editora Nacional/ Edusp, 1968.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Investigações Filosóficas**. São Paulo: Nova Cultural, 1999.