Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

O Estudo das Cônicas a partir da Construção Geométrica

Mainara Lenz

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador
Prof. Dr. Thiago de Melo

2014

516 Lenz, Mainara
L575e O Estudo das Cônicas a partir da Construção Geométrica/ Mainara Lenz- Rio Claro: [s.n.], 2014.
49 f.: fig., tab.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientador: Thiago de Melo

1. Geometria Analítica. 2. Cônicas. 3. Construção Geométrica. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Câmpus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Mainara Lenz

O Estudo das Cônicas a partir da Construção Geométrica

Dissertação aprovada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Thiago de Melo
Orientador

Profa.Dra.Suzinei Ap Siqueira Marconato
IGCE – UNESP/Rio Claro (SP)

Profa. Dra. Simone Daniela Sartorio
CCA – UFSCar/Araras (SP)

Rio Claro, 17 de Setembro de 2014

Dedico esse trabalho às minhas filhas Cecília, Aline e Beatriz.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me dar saúde, inteligência e disposição para realização desse trabalho.

Agradeço à minhas filhas Cecília, Aline e Beatriz pelos finais de semana sem mim, pelas férias em que ficamos distantes, pela grande ajuda com o estudo de Cálculo e por todo apoio que me deram para que esse trabalho saísse, sem elas eu não teria conseguido.

Agradeço ao meu amado marido e companheiro de jornada Thadeo Augusto por todas as viagens, provas e noites de estudo.

Agradeço meu orientador, Thiago de Melo por acreditar em mim, pela paciência e por toda ajuda que me deu.

Agradeço aos amados Silvia Azambuja, Olivio e Lúcia por toda ajuda com as crianças, pela torcida e pelas orações. Vocês foram fundamentais para a conclusão desse projeto

Agradeço a meu pai Pedro Inácio que sempre foi meu norte, meu porto seguro. Me estimulou e mesmo longe sei que torceu por mim.

Agradeço aos amigos Thiago e Amanda, Hélio e Lucélia, Fontes e Adriana pela ajuda que me deram com as crianças.

Agradeço de maneira muito especial a todos os meus alunos, que sempre foram minha fonte de inspiração e força.

E finalmente agradeço à minha muito querida amiga Francesca por toda ajuda e carinho nos momentos de maior dificuldade e cansaço.

As leis da natureza nada mais são que pensamentos matemáticos de Deus. Kepler

Resumo

Em cursos regulares de Ensino Médio as Cônicas são estudadas a partir de uma definição que leva à uma equação e finalmente chega-se à figura da curva.

Com esse trabalho pretendemos apresentá-las de outra forma. Começamos com a construção da curva com compasso e régua não graduada a partir de uma de suas propriedades, em seguida a definimos formalmente e finalmente encontramos sua equação e características algébricas.

Definiremos alguns conceitos prévios para o estudo das cônicas. Em seguida estudaremos cada uma das cônicas – elipse, hipérbole e parábola – respectivamente, a partir de sua construção.

Finalmente apresentaremos uma proposta de aulas que esperamos possam ser utilizadas por professores de Ensino Médio.

Palavras-chave: Geometria Analítica, Cônicas, Construção Geométrica.

Abstract

On high school courses the study of Conics starts with the definition which leads to an equation and finally the picture of the conic is presented.

In this work we shall introduce the Conics in a different approach. We will start with the construction using only ruler and compass based on some of its properties and then we will define Conics. Finally we will obtain its equation and its algebraic characteristics.

We will start with some basic concepts which will guide us to the study of Conics: ellipse, hyperbole and parabola.

Finally we will present a proposal of classes that we hope can be used by high school teachers.

Keywords: Analytic Geometry, Conics, Geometric Construction.

Sumário

1 Definições Prévias **11**

1.1 Sistema Ortogonal de Coordenadas 11

1.2 Translação de Sistema Ortogonal de Coordenadas 12

1.3 Distância Entre Dois Pontos 12

1.4 Distância entre Ponto e Reta 13

2 Elipse **15**

2.1 Equação Reduzida 17

2.2 Forma e Excentricidade 20

2.3 Região do Plano Determinada por uma Elipse 21

2.4 Outras Formas de Construção 22

3 Hipérbole **24**

3.1 Equação Reduzida 26

3.2 Forma e Excentricidade 29

3.3 Região do Plano Determinada por uma Hipérbole 30

3.4 Outras Formas de Construção 30

4 Parábola **33**

4.1 Equação Reduzida 37

4.2 Forma e Excentricidade 40

4.3 Região do Plano Determinada por uma parábola 40

4.4 Outras Formas de Construção 41

5 Proposta Didática **44**

5.1 Justificativa Didática: o desenho como ferramenta didática 44

5.2 Plano de Aula: Elipse 45

5.3 Plano de Aula: Hipérbole 46

5.4 Plano de Aula: Parábola 47

5.5 Sugestões de problemas de aplicação 47

5.6 Relato de experiência 48

Referências **49**

Notações

$r \parallel s$	reta r paralela à reta s
$\overline{AB}$	segmento de reta determinado por A e B
$\overrightarrow{AB}$	semirreta determinada por A e B
$\overleftrightarrow{AB}$	reta determinada por A e B
$\widehat{\mathrm{AB}}$	arco de circunferencia determinado por A e B

Introdução

“Cônicas” - do grego *konikós* (que tem a forma de um cone). As cônicas são obtidas pela intersecção de um plano com um cone circular reto de duas folhas. Dessa intersecção podemos obter: um ponto, uma reta, um par de retas paralelas, uma circunferência e as cônicas - elipse, parábola e hipérbole.

A palavra “Elipse” vem do grego *elleipsis* que significa “ato de não chegar”. De fato o plano que corta o cone para gerar a elipse não contém a geratriz.

“Hipérbole”, também do grego *Hiperbolé* significa “exagero”, “excesso”; a hipérbole é gerada a partir de um corte do cone por um plano que vai além da geratriz e atinge a outra parte dele.

“Parábola” vem de *parabolé* que significa “comparação”, de PARA “ao lado”’, mais BALLEIN “lançar”, “atirar” já que o plano gerador da parábola é paralelo à geratriz.

O interesse pelo estudo das Cônicas remonta à épocas muito antigas e não é de se estranhar que seja assim e que essas curvas sejam as mais sistemáticas e exaustivamente estudadas pelos Matemáticos. Os Gregos já conheciam suas propriedades, muito usadas em Física, Ótica, Acústica, Engenharia e Astronomia, sendo que atualmente exercem um papel importante no desenvolvimento da tecnologia moderna.

Vejamos algumas situações onde as cônicas aparecem.

Ao direcionarmos uma lanterna para a parede o feixe de luz emitido desenhará uma cônica, isso acontece porque o feixe de luz emitido pela lanterna forma um cone e a parede funciona como o plano que o corta. Dependendo da inclinação que damos à lanterna em relação à parede obtemos uma cônica diferente.

O som emitido por um avião a jato supersônico tem a forma de um cone e esse ao chocar-se com a terra forma uma cônica que depende da inclinação do avião em relação à terra. A audiometria usa isso para saber a que distância da terra o avião pode ultrapassar a velocidade do som.

A superfície formada pela água dentro de um copo circular é elíptica, sendo circular somente se o copo está alinhado com a horizontal.

Na astronomia Kepler mostrou que os planetas do sistema solar descrevem órbitas elípticas, as quais tem o Sol num dos focos. Também os satélites artificiais percorrem órbitas elípticas.

Alguns cometas percorrem o espaço em órbitas hiperbólicas e ao passarem próximo de algum planeta com grande densidade mudam sua trajetória para outra hipérbole com foco nesse planeta.

Fazendo uso da parábola Arquimedes construiu espelhos parabólicos que por refletirem a luz solar para um só ponto, foram usados para incendiar os barcos romanos das invasões de Siracusa.

Mesmo assim, percebemos que o estudo das cônicas no ensino médio tem sido deixado em segundo plano, ou simplesmente abandonado por professores e alunos.

A motivação para escrever esse trabalho veio por imaginar que esse estudo é deixado de lado basicamente pela falta de conhecimento sobre o assunto por parte dos professores aliada à falta de interesse por parte dos alunos que não conseguem entender o motivo pelo qual decoram indevidamente algumas fórmulas que permitam resolver problemas envolvendo cônicas.

Em todos os livros de ensino médio que analisei sobre elipse, hipérbole e parábola ([1],[2]) percebi que a metodologia se repete: é fornecida uma definição matemática, pouco compreendida pelos alunos, a seguir faz-se a dedução da equação reduzida, alguns exercícios são resolvidos e propõe-se uma lista de exercícios.

Acreditamos, realmente, que isso seja enfadonho e pouco interessante para os alunos.

Imagino que, invertendo a ordem das apresentações, seja possível instigar a curiosidade dos estudantes, além de fazê-los perceber a beleza dessas formas. Minha proposta começa construindo a curva com compasso e régua não graduada, utilizando-se a principal propriedade desta curva, que nesse momento fica viva no raciocínio do aluno, pois a percebe pela experiência e não pelo texto. Então apresento a definição formal e finalmente a dedução da equação reduzida da cônica.

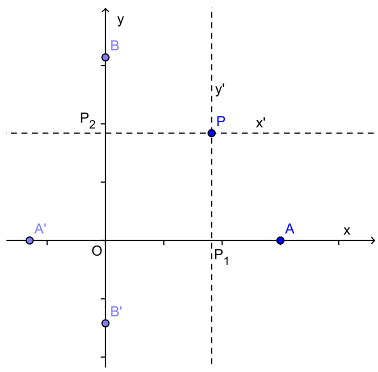
Quero observar que não se pretende deixar a formalidade e rigor matemático em segundo plano, afinal temos metodologia científica a cumprir. Assim, apenas inverteremos a ordem de exposição dos fatos.

Espero que esse trabalho possa constituir-se de material interessante para ser explorado por professores de ensino médio e a justificativa para esse desejo é: se de um lado é importante o rigor matemático, de outro também o é a motivação do estudante para que o aprender se torne mais prazeroso e divertido. E ambas, realmente, não se contradizem.

1 Definições Prévias

1.1 Sistema Ortogonal de Coordenadas

Consideremos duas retas $\overleftrightarrow{OA}$ e $\overleftrightarrow{OB}$ perpendiculares em O, as quais determinam um plano π. Dado um ponto P qualquer, $P \in \pi$, conduzamos por ele duas retas: $x' /\!/ \overleftrightarrow{OA}$ e $y' /\!/ \overleftrightarrow{OB}$. Denominemos P_1 a intersecção de $\overleftrightarrow{OA}$ com y' e P_2 a intersecção de $\overleftrightarrow{OB}$ com x'.



Nessas condições definimos *um sistema ortogonal de coordenadas* e o denotamos por xOy, como sendo uma bijeção entre pontos do plano π e pares de números reais, de modo que:

a) se P_1 pertence à semirreta $\overrightarrow{OA}$, a *abscissa* de P é o número real $x_p = \overline{OP_1}$; se P_1 pertence a semirreta $\overrightarrow{OA'}$, oposta à semirreta $\overrightarrow{OA}$, a abscissa de P é o número real $x_p = -\overline{OP_1}$;

b) se P_2 pertence à semirreta $\overrightarrow{OB}$, a *ordenada* de P é o número real $y_p = \overline{OP_2}$; se P_2 pertence à semirreta $\overrightarrow{OB'}$, oposta à semirreta $\overrightarrow{OB}$, a ordenada de P é o número real $y_p = -\overline{OP_2}$;

c) as *coordenadas* de P são os números reais x_p e y_p, geralmente indicados na forma de um par ordenado, (x_p, y_p);

d) a reta $\overleftrightarrow{OA}$ é chamada de *eixo das abscissas* ou eixo x;

e) a reta $\overleftrightarrow{OB}$ é chamada de *eixo das ordenadas* ou eixo y;

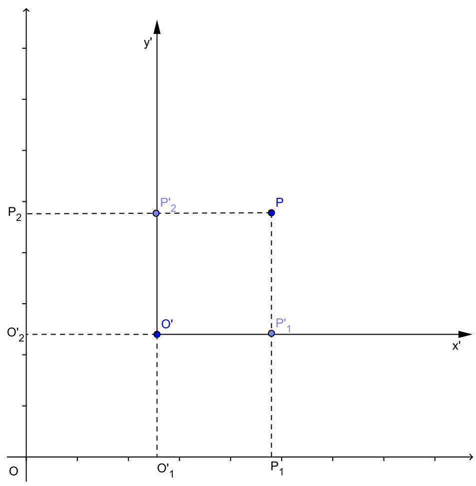
f) a *origem* do sistema é o ponto O;

g) o *plano cartesiano* é o plano π.

1.2 Translação de Sistema Ortogonal de Coordenadas

Fixemos um sistema ortogonal de coordenadas xOy, determinado pelas semirretas perpendiculares $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ de mesma origem O.

Seja $O' = (O'_1, O'_2)$. Se $x'O'y'$ é um sistema obtido por semirretas perpendiculares $\overrightarrow{O'A'}$ e $\overrightarrow{O'B'}$, paralelas à, e de mesmo sentido que, $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, respectivamente, dizemos que $x'O'y'$ foi obtido por uma *translação* de xOy.



Seja P um ponto do plano. Se P possui coordenadas (P_1, P_2) e O' possui coordenadas (O'_1, O'_2), com relação ao sistema xOy, então as coordenadas (P'_1, P'_2) de P com relação ao sistema transladado $x'O'y'$ são dadas por

$$P'_1 = P_1 - O'_1, \qquad P'_2 = P_2 - O'_2.$$

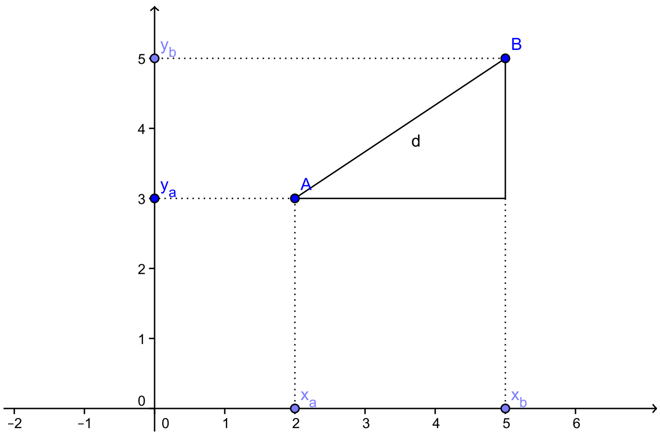
1.3 Distância Entre Dois Pontos

Dados dois pontos $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ num sistema ortogonal de coordenadas, a *distância euclidiana* entre eles é definida utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de hipotenusa AB:

$$d^2 = (x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2.$$

Como $d^2 \geq 0$, definimos a distância entre os pontos A e B como sendo

$$d(A, B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}.$$

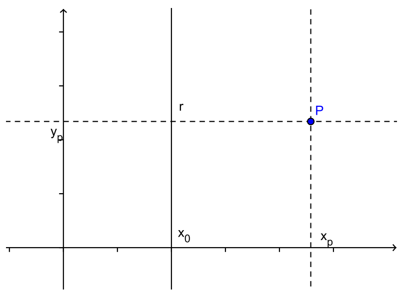


1.4 Distância entre Ponto e Reta

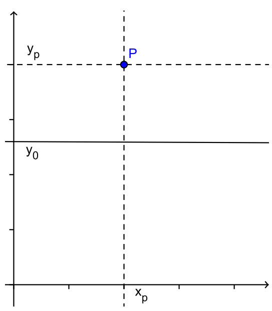
Para definirmos a distância entre um ponto P e uma reta r, é viável analisarmos alguns casos, separadamente. A distância $d(P, r)$ será a menor das distâncias entre P e pontos de r. Para isso, fixemos um sistema ortogonal de coordenadas xOy.

Caso 1. Dados uma reta vertical de equação $r : x = x_0$ e um ponto $P = (x_p, y_p)$, podemos perceber que a distância entre o ponto P e a reta r pode ser encontrada por

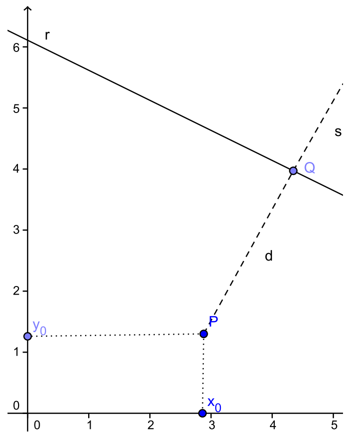
$$d(P, r) = |x_0 - x_p|.$$



Caso 2. Dados uma reta horizontal de equação $r : y = y_0$ e um ponto $P(x_p, y_p)$, analogamente ao Caso 1, a distância entre P e r é dada por $d(P, r) = |y_0 - y_p|$.



Caso 3. Dados um ponto $P = (x_0, y_0)$ e uma reta de equação $r : ax+by+c = 0$, com $a \neq 0 \neq b$, conforme a figura, para calcularmos a distância entre P e r, primeiramente determinamos a equação da reta s perpendicular à r passando por P.



Determinamos o coeficiente angular de $r : y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, ou seja, $m_r = -\frac{a}{b}$. Sendo s perpendicular à r temos que $m_s = \frac{b}{a}$.

Uma equação de s é $y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0)$ e, desenvolvendo os produtos, chegamos em $bx - ay + (ay_0 - bx_0) = 0$.

Resolvemos então o sistema formado pelas equações das duas retas, encontrando assim o ponto de intersecção Q, de coordenadas

$$x_q = \frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2}, \quad y_q = \frac{-abx_0 + a^2y_0 - bc}{a^2 + b^2}.$$

Agora, calculamos a distância d entre P e Q:

$$d = \sqrt{(x_q - x_0)^2 + (y_q - y_0)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2} - x_0\right)^2 + \left(\frac{a^2y_0 - abx_0 - bc}{a^2 + b^2} - y_0\right)^2}.$$

Calculamos o MMC e somamos termos semelhantes:

$$d = \sqrt{\frac{(-aby_0 - ac - a^2x_0)^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{(-abx_0 - bc - b^2y_0)^2}{(a^2 + b^2)^2}}.$$

Fatorando $(-a)^2$ no primeiro termo da soma e $(-b)^2$ no segundo, obtemos

$$d = \sqrt{\frac{a^2(ax_0 + by_0 + c)^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{b^2(ax_0 + by_0 + c)^2}{(a^2 + b^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)(ax_0 + by_0 + c)^2}{(a^2 + b^2)^2}}.$$

Simplificando $(a^2 + b^2)$ concluímos que

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

2 Elipse

Dados os pontos A, B, fixos, distintos e colineares e F_1 e F_2 entre A e B sendo $\overline{AF_1} = \overline{BF_2}$, conforme a figura, vamos construir o conjunto formado por todos os pontos $X = (x, y)$, tais que

$$\overline{X, F_1} + \overline{X, F_2} = \overline{A, B}.$$

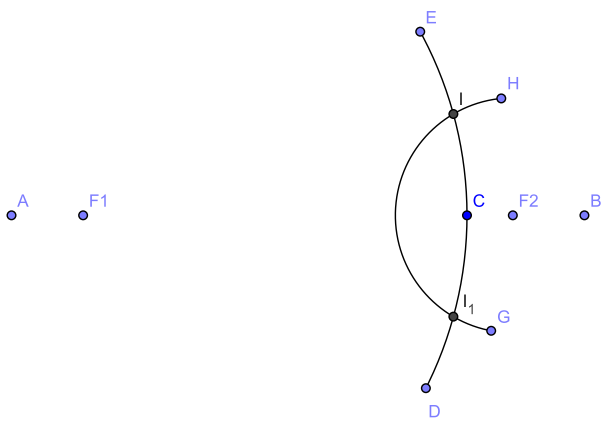
Para isso, efetuamos os passos a seguir:

1 - escolhemos C tal que $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BC}$,

2 - com raio $\overline{AC}$ e centro em F_1 traçamos o arco $\widehat{\mathrm{DE}}$,

3 - com raio $\overline{BC}$ e centro em F_2 traçamos o arco $\widehat{\mathrm{GH}}$,

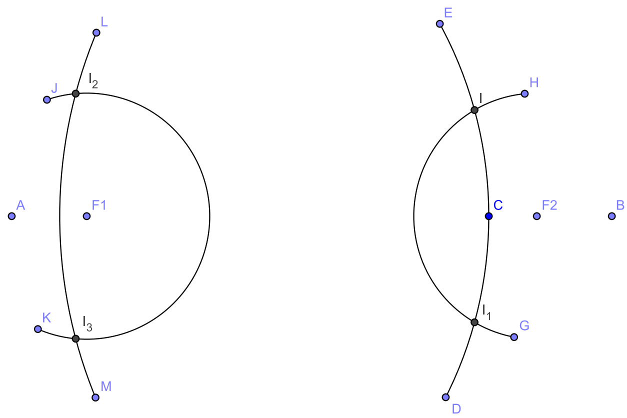
4 - na intersecção dos arcos $\widehat{\mathrm{DE}}$ com $\widehat{\mathrm{GH}}$ definimos os pontos I e I_1 que satisfazem a condição,



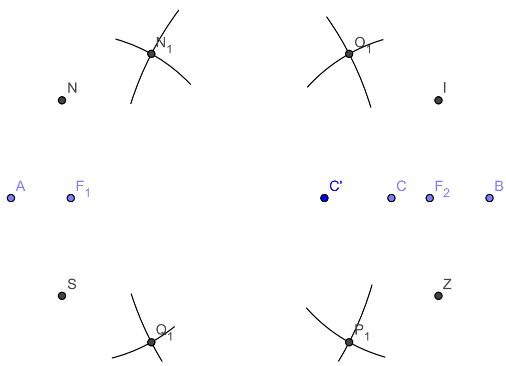
5 - com raio $\overline{AC}$ e centro em F_2 traçamos o arco $\widehat{\mathrm{LM}}$,

6 - com raio $\overline{BC}$ e centro em F_1 traçamos o arco $\widehat{\mathrm{KJ}}$,

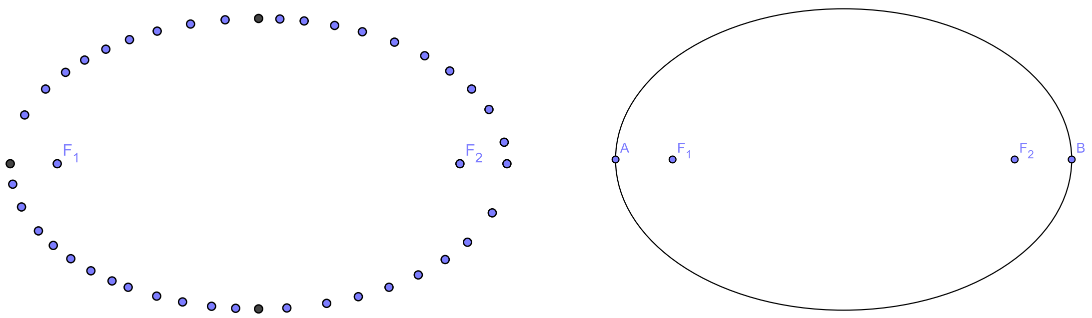
7 - na intersecção dos arcos $\widehat{\mathrm{LM}}$ e $\widehat{\mathrm{KJ}}$ definimos os pontos I_2 e I_3 que também satisfazem a condição.



Estão definidos assim 4 pontos (I, I_1, I_2 e I_3) da figura que queremos encontrar. A seguir, escolhemos outro ponto C' entre A e B.



Repetindo todo o processo, tantas vezes quanto necessário para obtermos suficiente quantidade de pontos, conseguimos traçar um bom esboço da figura.



À figura formada pelos infinitos pontos provenientes da construção acima damos o nome de Elipse, definida mais precisamente por:

Definição 2.1. *Sejam F_1 e F_2 pontos distintos, $2c$ a distância entre eles e a um número real tal que $a > c$. O lugar geométrico* $\mathbf{E}$ *dos pontos X tais que $d(X, F_1)+d(X, F_2) = 2a$ chama-se* ***elipse****.*

Ainda:

a) os pontos F_1 e F_2 são os **focos**,

b) o segmento $\overline{F_1F_2}$ é o **segmento focal**,

c) o ponto O é o **centro**, que é ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$,

d) a medida $2c$ é a **distância focal**,

e) a reta $\overleftrightarrow{F_1F_2}$ chama-se **reta focal** e qualquer segmento cujas extremidades pertencem a **E** chama-se **corda**.

2.1 Equação Reduzida

Para deduzir uma equação da elipse **E**, vamos escolher um sistema ortogonal de coordenadas tal que $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. É importante que a origem do sistema de coordenadas seja o ponto médio entre os pontos F_1 e F_2 (chamado de centro da elipse) e que os focos pertençam ao eixo das abscissas, para efeito de simplificação de cálculos.

Um ponto $X = (x, y)$ pertence à elipse se, e somente se, $d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a$. Logo, X pertence a **E** se, e somente se, $d(X, F_1) = 2a - d(X, F_2)$, ou seja,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando os dois membros ao quadrado e simplificando, temos

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Elevando novamente ao quadrado,

$$a^2((x-c)^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$

que equivale a

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

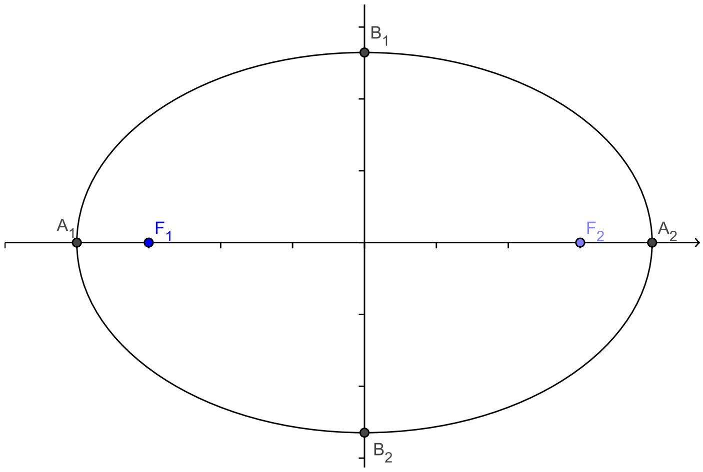
Para simplificar essa igualdade, escrevemos $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, um número real positivo pois $a > c$, e reescrevemos a equação na forma

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

e finalmente dividimos ambos os membros por a^2b^2, concluindo que:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2.1}$$

É importante ressaltar que a escolha que fizemos do sistema de coordenadas para deduzir a equação reduzida (2.1) permitiu que os focos tivessem ordenadas nulas e abscissas opostas, a fim de que obtivéssemos uma equação simples e de aspecto peculiar.



Os números a, b e c são chamados **parâmetros geométricos** da elipse.

Qualquer que seja a solução (x, y) da equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, as frações do primeiro membro serão sempre menores ou iguais a 1 e então $x^2 \leq a^2$ e $y^2 \leq b^2$, ou seja, a elipse é um conjunto limitado que está contido no retângulo caracterizado pelas desigualdades $-a \leq x \leq a$ e $-b \leq y \leq b$. Chamaremos esse retângulo de **retângulo fundamental** da elipse.

De $a > b$ decorrem

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{x^2 + y^2}{b^2}.$$

Todo ponto (x, y) da elipse satisfaz

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} \leq 1 \leq \frac{x^2 + y^2}{b^2}$$

e, portanto

$$b^2 \leq x^2 + y^2 \leq a^2,$$

que nos leva a concluir que **E** está contida na coroa circular de raios a e b, a qual chamaremos de **coroa fundamental** da elipse **E**. Outra evidência de que a elipse é limitada! A consequência é que a elipse encontra-se na intersecção do retângulo fundamental com a coroa fundamental.

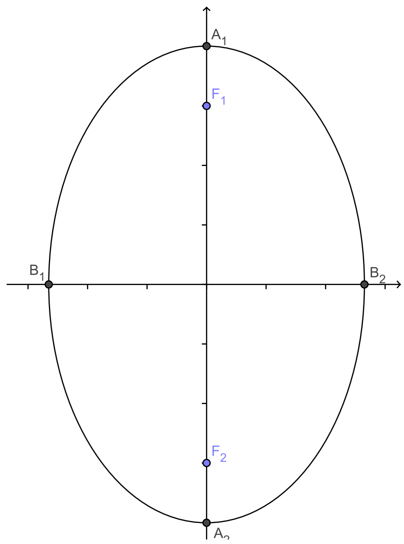
Definição 2.2. *Os pontos A_1 e A_2 em que a reta focal intercepta a elipse e os pontos B_1 e B_2 em que a mediatriz do segmento focal intercepta a elipse são chamados de **vértices**. As cordas $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$ são respectivamente, o **eixo maior** (de medida $2a$) e o **eixo menor** (de medida $2b$) da elipse.*

A escolha que fizemos para a dedução da equação reduzida não é a única boa escolha, existem outras tão boas quanto. Se adotarmos um sistema de coordenadas com origem no centro da elipse e de modo que os focos estejam no eixo das ordenadas, estes terão abscissas nulas e ordenadas opostas, $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$. Ao reproduzirmos os passos da dedução da equação (2.1) teremos uma inversão entre os papéis de x e y de modo que

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \tag{2.2}$$

que também é chamada **equação reduzida** de uma elipse.

A diferença entre ambas as elipses é a posição delas em relação ao sistema de eixos.

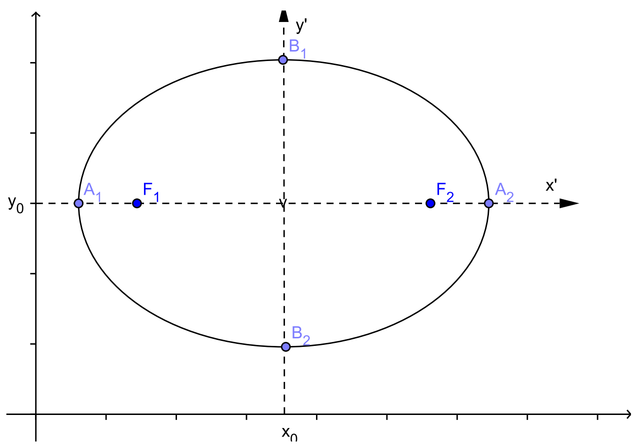


Se uma elipse tem centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$ e $\overline{A_1A_2} /\!/$eixo-x, sua equação em relação ao sistema auxiliar $x'O'y'$ é

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1,$$

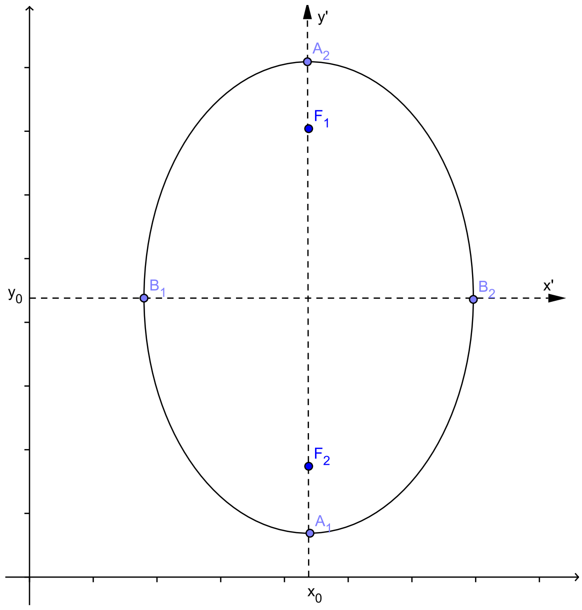
que, de acordo com a translação do sistema de coordenadas vista na seção 1.2, torna-se

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$



Analogamente, se uma elipse tem centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$ e $\overline{A_1A_2} /\!/ \text{eixo-}y$, sua equação em relação ao sistema xOy é:

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1.$$



2.2 Forma e Excentricidade

Sob o ponto de vista das dimensões, as elipses comportam-se como retângulos: há elipses mais alongadas e outras mais arrendondadas assemelhando-se às circunferências, pois cada elipse está tão vinculada ao seu retângulo fundamental que fica determinada por ele. Se seu retângulo assemelha-se a um quadrado, a elipse assemelha-se à uma circunferência.

Se os valores dos parâmetros geométricos a e b forem próximos entre si, o retângulo fundamental se assemelha a um quadrado e a elipse assemelha-se a uma circunferência; se forem muito diferentes, e sempre com $a > b$, o retângulo ficará mais alongado e a elipse também.

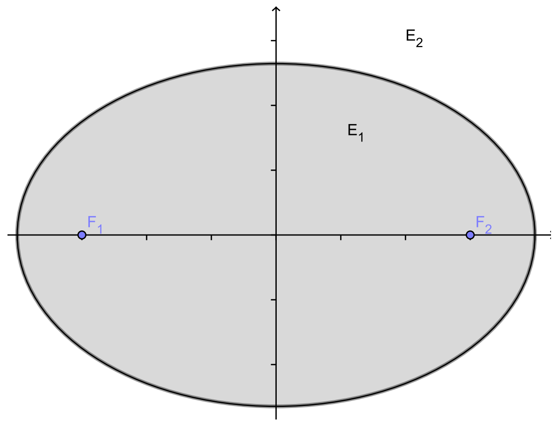
Podemos medir o quanto a é maior que b pelo quociente $\frac{b}{a}$, que pertence ao intervalo aberto $]0, 1[$. Quanto mais próximo $\frac{b}{a}$ estiver de 1, mais arredondada será a elipse e quanto mais ele se aproximar de 0 mais alongada ela será. Também podemos usar como indicador da forma da elipse o número $\frac{c}{a}$, que é mais comum na literatura que o primeiro; é conhecido como **excentricidade** da elipse e representado por e; e é complementar à $\frac{b}{a}$ no sentido de que $(\frac{b}{a})^2 + (\frac{c}{a})^2 = 1$. Quando um deles está próximo de 1 o outro está próximo de 0.

As considerações feitas a respeito da forma da elipse levam-nos a definir semelhança baseando-nos na excentricidade: as elipses $\mathbf{E}$ e $\mathbf{E}'$ são semelhantes se, e somente se, suas excentricidades são iguais, ou seja, se os parâmetros a,b e c são proporcionais aos parâmetros a', b' e c' da outra elipse.

Observação 2.1. Excentricidade é um parâmetro associado a algumas cônicas que mede seu desvio em relação à uma circunferência. Esse número determina a forma da cônica.

2.3 Região do Plano Determinada por uma Elipse

O objetivo aqui é descrever algebricamente as regiões E_1 e E_2 delimitadas por uma elipse. Para tal, usaremos o critério da **convexidade**. Do ponto de vista intuitivo, temos que E_1 é convexo e E_2 é côncavo, na figura abaixo.



Definição 2.3. *Sejam* $\mathbf{E_1}$ *e* $\mathbf{E_2}$ *regiões determinadas pela elipse* $\mathbf{E}$ *da figura acima. O conjunto* $\mathbf{E_1}$ *chama-se **região focal** da elipse. Um ponto que não pertence a* $\mathbf{E}$ *é **interior** à elipse se pertence à região focal; caso contrário é **exterior**. Também se usam os termos região convexa determinada por E e região côncava determinada por E, para designar respectivamente* $\mathbf{E_1}$ *e* $\mathbf{E_2}$.

Algebricamente: tomamos um ponto $X = (x, y)$ qualquer de $\mathbf{E_2}$, tal que $|x| \leq a$ e $|y| \geq y_0$ e o ponto $P = (x, y_0)$ da elipse, tal que $y_0 \geq 0$.

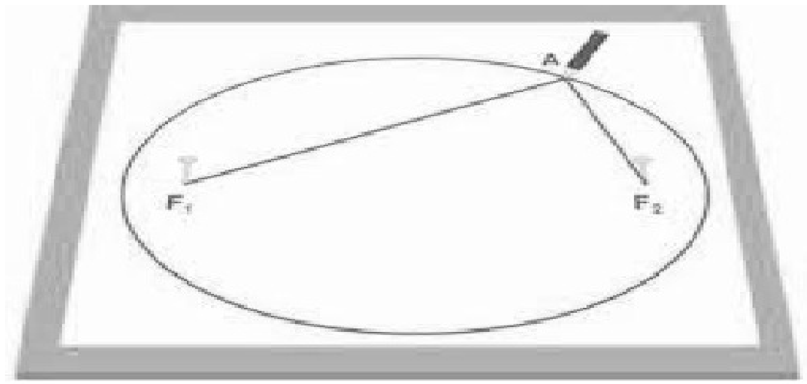
Como, pela equação (2.1) da elipse, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$ e $y^2 > y_0^2$, temos $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} > 1$. Em virtude da simetria da elipse em relação ao eixo-x, não há necessidade de considerar o caso em que $y < 0$. Para os pontos em que $|x| > a$ temos $\dfrac{x^2}{a^2} > 1$, que também vale a desigualdade. De maneira análoga, verificamos que os pontos de $\mathbf{E_1}$ satisfazem à relação $\dfrac{x^2}{a^2} < 1$. Resumindo:

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad E_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1, \qquad E_2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1.$$

Observação 2.2 (Convexidade)**.** Um conjunto é **convexo** se qualquer segmento de extremidades pertencentes ao conjunto está nele contido, e **côncavo**, caso contrário.

2.4 Outras Formas de Construção

Aqui descreveremos o *elipsógrafo*,



um instrumento caseiro para desenhar elipses, muito útil para desenhos em lousas. Conhecendo os parâmetros geométricos a e c, utilize uma folha de papel ou uma lousa, escolha os pontos F_1 e F_2, focos da elipse, fixe-os com pinos e pegue um fio inextensível, com as pontas ligadas, de comprimento $2a+2c$ e coloque-o em volta dos pinos. Fazendo a ponta do lápis ou giz deslizar pelo papel mantendo o fio sempre esticado, obtemos assim um bom esboço de uma elipse. A justificativa desse instrumento baseia-se na definição de elipse: Se P é a ponta do lápis temos

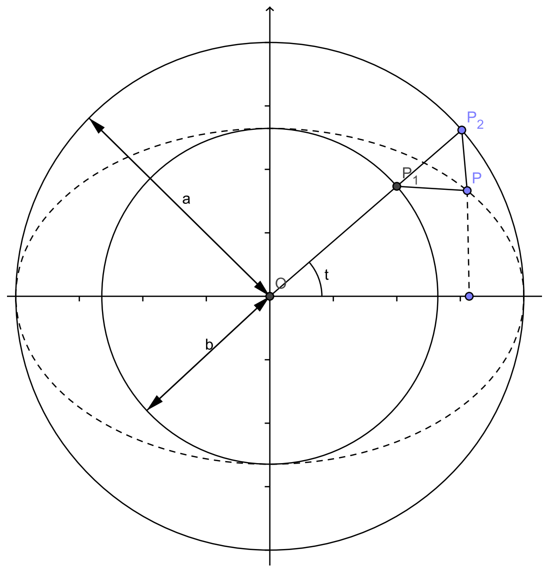
$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = (2a + 2c) - 2c = 2a.$$

Um outro método para construir a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ baseia-se na trigonometria: vale a igualdade $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$ se, e somente se, existe um único $t \in [0, 2\pi[$ tal que $\cos t = \dfrac{x}{a}$ e $\operatorname{sen} t = \dfrac{y}{b}$. Logo, $P = (x, y)$ pertence à elipse, se e somente se, existe t em $[0, 2\pi[$ tal que

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b \operatorname{sen} t. \end{cases}$$

A figura sugere um significado geométrico para t e o método de construção: para cada t em $[0, 2\pi[$, sejam $P_1 = (b\cos t, b \operatorname{sen} t)$ e $P_2 = (a\cos t, a \operatorname{sen} t)$.

Como $d(P_1, O) = b$ e $d(P_2, O) = a$, o primeiro pertence à circunferência de centro O e raio b, e o segundo, à circunferência de centro O e raio a, que são as circunferências fundamentais da elipse. A reta que contém P_2 e é paralela ao eixo-y intercepta a reta que contém P_1 e é paralela ao eixo-x no ponto $P = (a\cos t, b \operatorname{sen} t)$, que pertence à elipse.



Em resumo, para obter com régua e compasso um ponto da elipse,

1. trace as duas circunferências de centro O e raios a e b;

2. trace uma semirreta de origem O e marque P_1 e P_2;

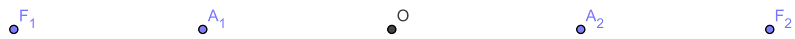
3. por P_2 trace a paralela ao eixo-y, e por P_1, a paralela ao eixo-x. O ponto de intersecção dessas paralelas é um ponto da elipse.

E explorando a simetria da elipse em relação ao eixo-x, ao eixo-y e à origem, pode-se obter mais 3 pontos.

3 Hipérbole

Dados F_1, F_2, pontos distintos e colineares fixados,e A_1 e A_2 entre F_1 e F_2, tais que $\overline{F_1A_1} = \overline{F_2A_2}$, conforme figura, vamos agora construir o conjunto formado por todos os pontos $X = (x, y)$ tais que

$$|\overline{XF_1} - \overline{XF_2}| = \overline{A_1A_2}. \tag{3.1}$$



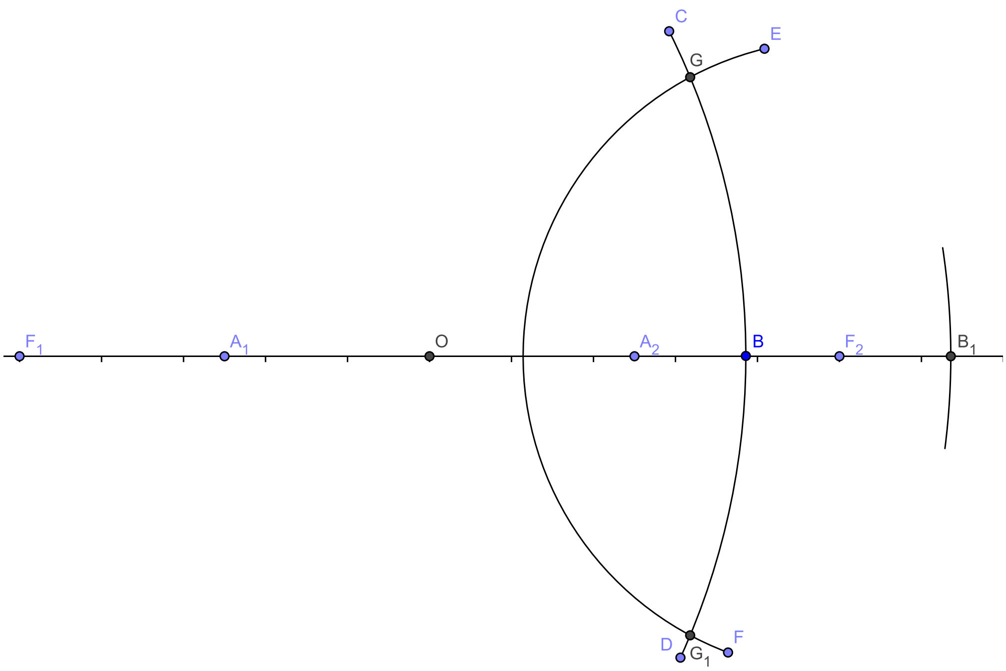
1 - Escolhemos um ponto B entre A_2 e F_2,

2 - com raio $\overline{F_1B}$ e centro em F_1 traçamos o arco $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$,

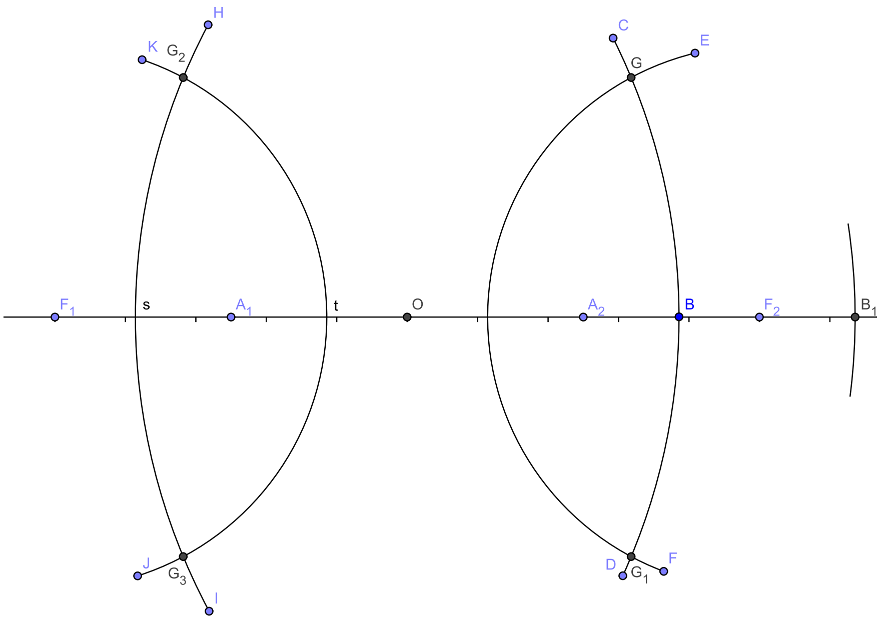
3 - ainda com o raio $\overline{F_1B}$ e com centro em A_1, determinamos B_1, colinear com F_1, F_2, tal que $|\overline{F_1B} - \overline{F_2B_1}| = \overline{A_1A_2}$,

4 - com raio $\overline{A_2B_1}$ e centro em F_2 traçamos o arco $\overset{\frown}{\mathrm{EF}}$,

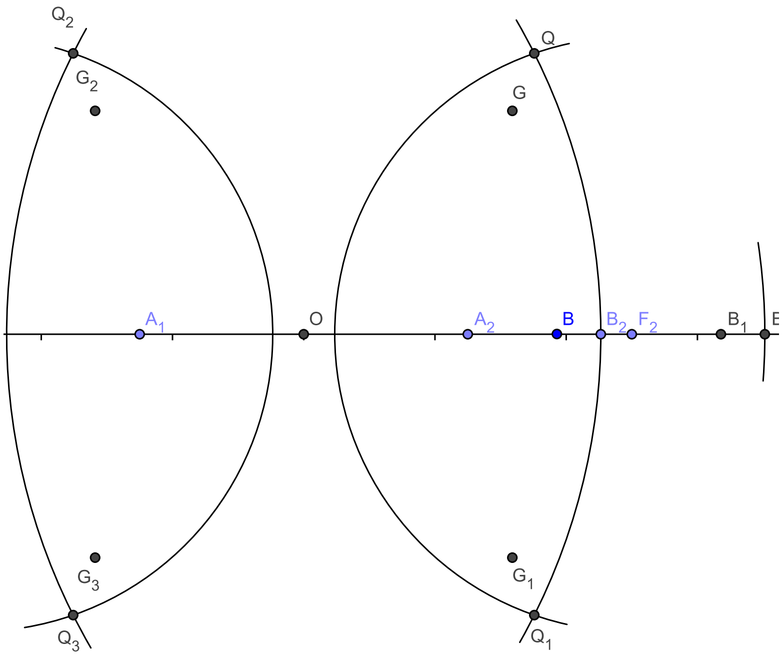
5 - nas intersecções dos arcos $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ e $\overset{\frown}{\mathrm{EF}}$ definimos os pontos G e G_1 que satisfazem a equação,



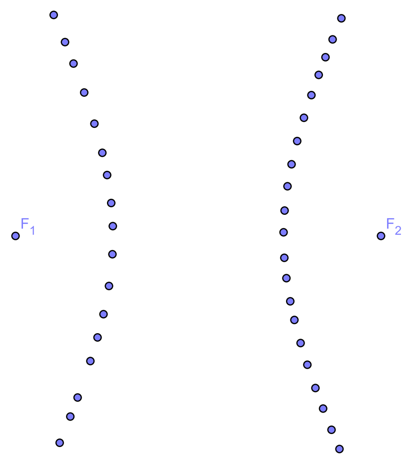
e analogamente marcamos os pontos G_2, e G_3.

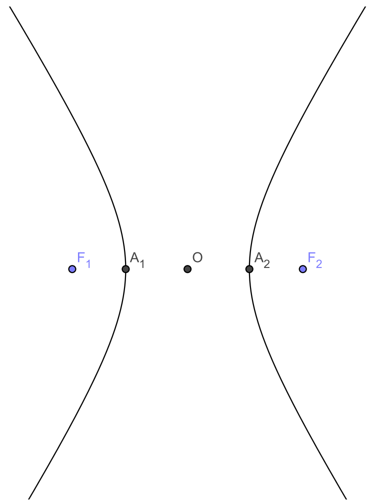


Da mesma forma, marcamos um outro ponto B_2 e definimos mais 4 pontos Q, Q_1, Q_2 e Q_3 que satisfazem a equação.



E assim tantas vezes quanto forem necessárias para construirmos uma boa aproximação da figura, a qual denominamos de **Hipérbole**.





Há grande similaridade entre a elipse e a hipérbole. Trataremos brevemente dos tópicos onde essas semelhanças aparecerem mais nitidamente.

Definição 3.1. *Sejam F_1 e F_2 pontos distintos, $2c$ a distância entre eles, e a um número real tal que $0 < a < c$. O lugar geométrico* **H** *dos pontos X tais que $|d(X, F_1) - d(X, F_2)| = 2a$ chama-se* ***hipérbole****.*

Ainda:

a) os pontos F_1 e F_2 são os **focos**,

b) o segmento $\overline{F_1F_2}$ é chamado **segmento focal**,

c) o ponto O é o **centro**, que é ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$,

d) a medida $2a$ é a medida do **eixo real**,

e) a medida $2b$ é a medida do **eixo imaginário**, em que $b = \sqrt{c^2 - a^2}$,

f) a medida $2c$ é a **distância focal**,

g) a reta $\overleftrightarrow{F_1F_2}$ chama-se **reta focal**,

h) e qualquer segmento cujas extremidades pertençam a **H** chama-se **corda** da hipérbole.

Tal como ocorre com a elipse, a cada hipérbole estão associados um único "a" e um único segmento focal.

3.1 Equação Reduzida

Faremos a dedução de uma equação da hipérbole da mesma forma que fizemos para a elipse. Fixamos um sistema ortogonal de coordenadas tal que $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$.

Um ponto $X = (x, y)$ pertence à hipérbole se, e somente se, $|d(X, F_1) - d(X, F_2)| = 2a$. Logo, X pertence a **H** se, e somente se,

$$\begin{aligned} d(X, F_1) - d(X, F_2) &= 2a, && \text{se } X \text{ está mais próximo de } F_2, \text{ ou} \\ d(X, F_1) - d(X, F_2) &= -2a, && \text{se } X \text{ está mais próximo de } F_1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Para eliminar os radicais, elevamos ambos os membros ao quadrado e reagrupamos

$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevamos ao quadrado e agrupamos pela segunda vez para obter

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

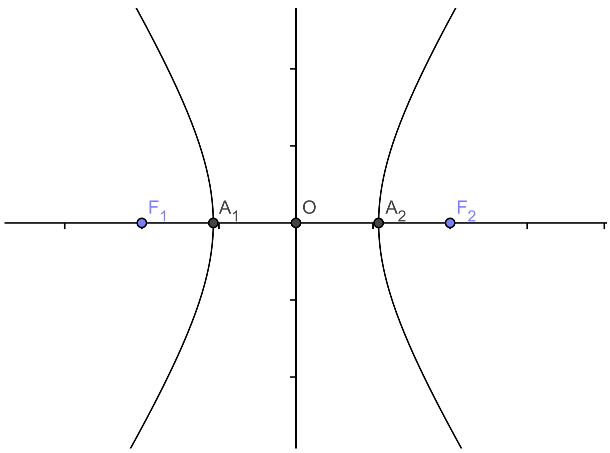
Tomando $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ temos então

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividindo ambos os membros da igualdade acima por a^2b^2, concluímos que

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.2}$$

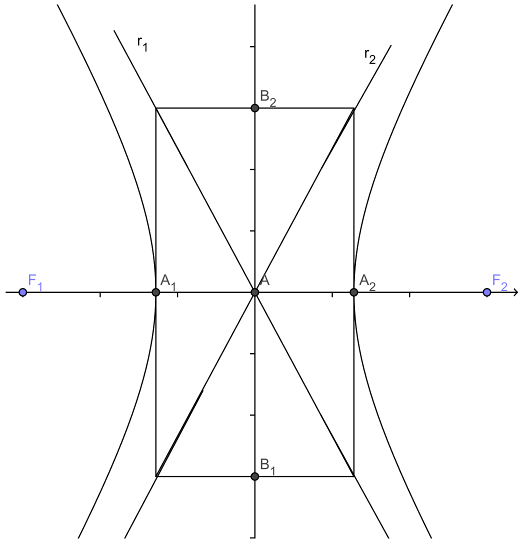
que é conhecida como *equação reduzida da hipérbole*.



O retângulo caracterizado pelas desigualdades $-a \leq x \leq a$ e $-b \leq y \leq b$ será chamado de **retângulo fundamental** da hipérbole, tem suas diagonais nas retas

$$r_1 : y = -\frac{b}{a}x \qquad \text{e} \qquad r_2 : y = \frac{b}{a}x$$

que recebem o nome de **assíntotas** da hipérbole e são de grande utilidade para o esboço da cônica.

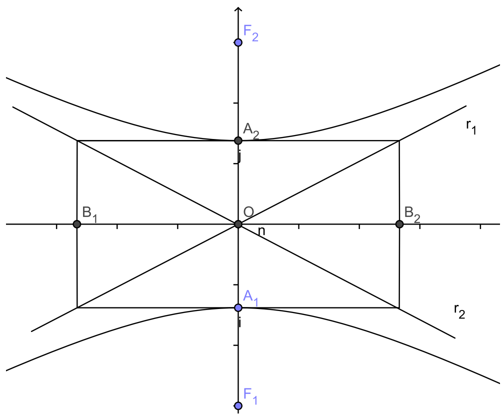


Definição 3.2. *Os pontos A_1 e A_2 em que a reta focal intercepta a hipérbole são chamados* ***vértices****. A corda $\overline{A_1A_2}$ é o* ***eixo transverso*** *e o segmento $\overline{B_1B_2}$ é o* ***eixo conjugado****. Chama-se* ***amplitude focal*** *o comprimento de uma corda que contém o foco e é perpendicular ao segmento focal.*

Para deduzir uma equação da hipérbole poderíamos escolher o sistema de coordenadas com origem no centro da hipérbole e o eixo-y contendo os focos, de tal forma que $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$ e se reproduzirmos a dedução, como na elipse, teremos uma inversão de papéis entre x e y, obtendo, assim outra **equação reduzida** de uma hipérbole:

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

sendo $r_1 : y = -\frac{a}{b}x$ e $r_2 : y = \frac{a}{b}x$ suas assíntotas.



Se uma hipérbole tem centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$ e $\overleftrightarrow{A_1A_2} /\!/$ eixo-x, sua equação em relação ao sistema auxiliar é:

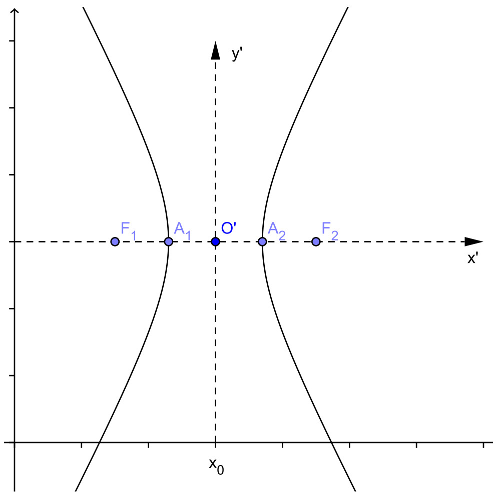
$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1.$$

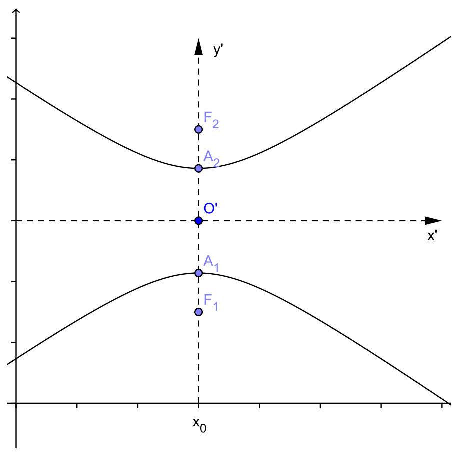
Portanto sua equação relativamente ao sistema xOy é:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Analogamente, se uma hipérbole tem centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$ e $\overleftrightarrow{A_1A_2} /\!\!/$ eixo-y, sua equação relativamente ao sistema xOy é:

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1.$$





3.2 Forma e Excentricidade

As inclinações da assíntotas tem estreita ligação com a forma da hipérbole. Essas inclinações são determinadas pelo número $\frac{b}{a}$, que se muito próximo de 1 indica que o retângulo fundamental se assemelha a um quadrado; já o valor muito maior que 1 ou muito próximo de 0 indicam que ele é mais alongado.

Ao dividirmos a relação $c^2 = a^2 + b^2$ por a^2, encontramos $(\frac{c}{a})^2 = 1 + (\frac{b}{a})^2$ e podemos utilizar o número $e = \frac{c}{a}$, chamado de **excentricidade** da hipérbole, como indicador da sua forma, sendo que $e > 1$. Quando e é muito próximo de 1 o retângulo fundamental tem altura muito menor que a base, indicando que a hipérbole tem seus ramos fechados nas proximidades do vértice e abrem-se lentamente. Quando e é muito maior que 1 o retângulo fundamental tem sua altura muito maior que a base, indicando que nas proximidades do vértice os ramos da hipérbole quase se confundem com as retas de equações $x = a$ e $x = -a$ e vão se afastando.

Tal como fizemos para a elipse, duas hipérboles são semelhantes se, e somente se, suas excentricidades são iguais.

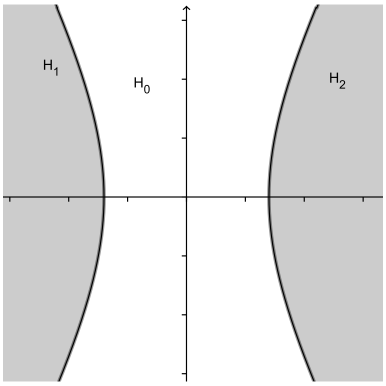
3.3 Região do Plano Determinada por uma Hipérbole

Definição 3.3. *Sejam* **H** *uma hipérbole e* H_0, H_1 *e* H_2 *as regiões determinadas por* **H**.

a) O conjunto $H_1 \cup H_2$ *chama-se* ***região focal*** *da hipérbole.*

b) O conjunto H_0 *chama-se* ***região côncava*** *determinada por* H.

Observação 3.1. A região focal da hipérbole não é convexa apesar de ser a união de dois conjuntos convexos.



Sendo a hipérbole uma curva não limitada, determinar intuitivamente se um ponto é interno ou externo a ela é bem mais complicado. Algebricamente usaremos argumento semelhante ao usado na elipse: sejam **H**: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $X = (x, y)$ um ponto qualquer de **H** e $P = (x_0, y_0)$ um ponto de H_0 de ordenada igual a de X.

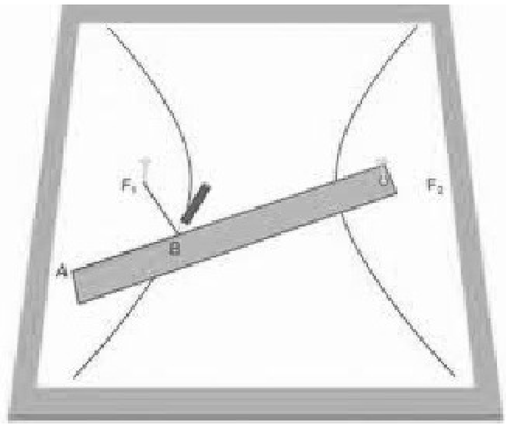
Assim, $\dfrac{x_0^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ e $|x| < |x_0|$, ou seja, $x^2 < x_0^2$, e portanto $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} < 1$. Com argumento semelhante mostramos que os pontos de $H_1 \cup H_2$ satisfazem $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} > 1$; sendo que os de H_1 também satisfazem a condição $x < 0$, e os de H_2, $x > 0$.

Resumindo:

$$H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad H_0 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1, \qquad H_1 \cup H_2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1.$$

3.4 Outras Formas de Construção

Com algumas alterações transformaremos o elipsógrafo em *hiperbológrafo* para desenharmos hipérboles conhecendo seus parâmetros geométricos.



Além do fio, de comprimento f, utilizaremos uma base rígida de comprimento $h = f + 2a$, articulada por uma das extremidades s de um dos pinos a fim de que ela gire em torno dele. As pontas do fio são fixas a outro pino e à extremidade livre da haste A.

Fazendo a ponta do lápis correr pelo papel mantendo o fio sempre esticado poderemos obter um trecho de um dos ramos da hipérbole. Para obter um trecho do outro ramo, articule a haste ao pino F_2 e prenda o fio a F_1, ou, se preferir, utilize a simetria da hipérbole.

Justificamos esse método verificando que, sendo P um ponto da hipérbole,

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = (h - d(A, P)) - (f - d(A, P)) = h - f = 2a.$$

Usando trigonometria podemos escrever as equações paramétricas da hipérbole e a partir dessas justificar os passos para construção da figura.

Se α e β são números reais tais que $\alpha^2 - \beta^2 = 1$ ($|\alpha| \geq 1$) sabemos que, se $\alpha \geq 1$ existe um único t no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $\sec t = \alpha$ e $\operatorname{tg} t = \beta$, e que, se $\alpha \leq -1$, existe um único t no intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ satisfazendo as mesmas igualdades.

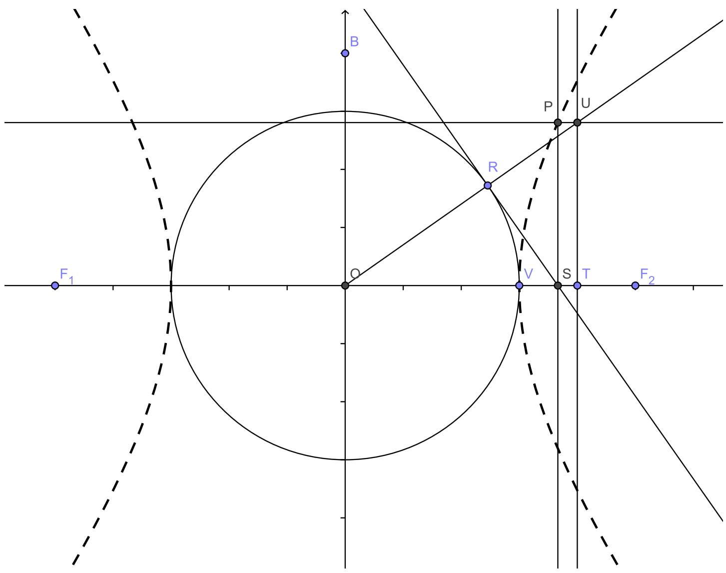
Utilizando esses fatos e fazendo $\alpha = \frac{x}{a}$ e $\beta = \frac{y}{b}$, podemos escrever a equação reduzida da hipérbole pelo sistema de equações

$$\begin{cases} x = a \sec t, \\ y = b \operatorname{tg} t, \end{cases}$$

em que t pertence a $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\,\cup\, \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$. Note que se t pertence ao primeiro intervalo, então $x \geq a$ e obtemos o ramo H_2 da hipérbole, e se t pertence ao outro intervalo obtemos o ramo H_1, pois nesse caso, temos $x \leq a$. E assim justificamos esse roteiro para construção da hipérbole. Veja a figura, meramente ilustrativa, pois b pode ser maior, menor ou igual a a.

1. Trace a circunferência de centro O e raio a.

2. Trace, no primeiro quadrante, uma semirreta de origem O não perpendicular ao eixo-x, que encontra a circunferência em R.



3. Trace por R a reta perpendicular a $\overleftrightarrow{OR}$, obtendo S no eixo-x.

4. Por $T = (b, 0)$, trace a paralela ao eixo-y, obtendo U na reta $\overleftrightarrow{OR}$.

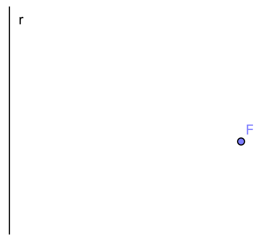
5. Trace por S a paralela ao eixo-y e por U a paralela ao eixo-x; elas tem em comum um ponto P da hipérbole, e, por simetria podemos obter outros três.

4 Parábola

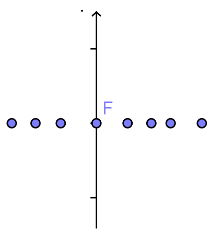
Dados uma reta r e um ponto F fixo, conforme a figura, vamos construir o conjunto formado por todos os pontos $X = (x, y)$ tais que

$$d(X, F) = d(X, r). \tag{4.1}$$

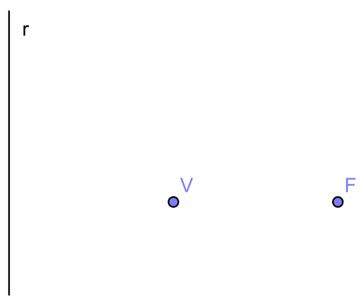
Assim temos dois casos:



Caso 1. Se F pertence à r, o conjunto de pontos $X = (x, y)$ que satisfazem (4.1) formam uma reta perpendicular à r passando por F.



Caso 2. Se F não pertence à r, o primeiro ponto que encontramos é o ponto V médio do segmento que une F à r, perpendicular à reta.



Para obtermos mais pontos, analisemos a construção a seguir.

1. Por um ponto $A \in r$, traçamos s perpendicular à r,

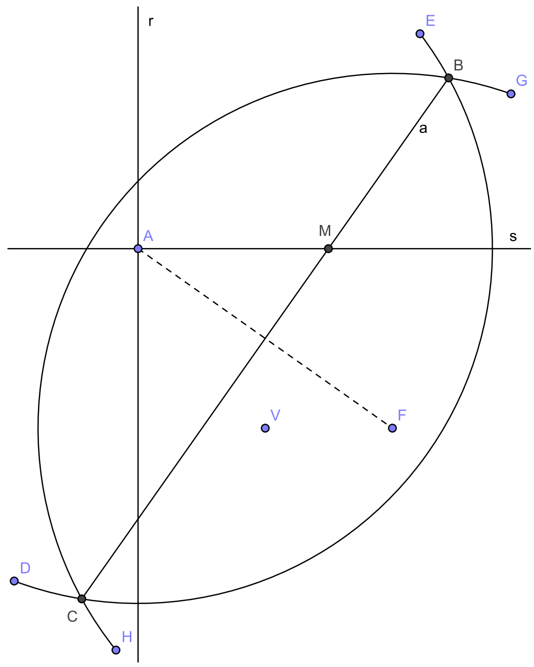
2 traçamos a mediatriz do segmento $\overline{AF}$

2.1 com $raio > AF$ e centro em A traçamos os arcos $\widehat{\mathrm{DE}}$ e $\widehat{\mathrm{GH}}$,

2.2 nas intersecções dos arcos definimos os pontos B e C,

2.3 unimos os pontos B e C para encontrar a mediatriz a do segmento $\overline{AF}$,

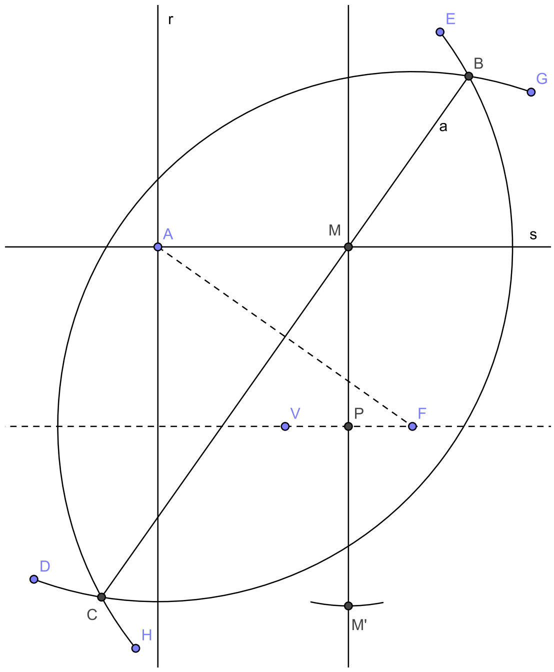
3. a intersecção de a com s é o ponto M que satisfaz equação.



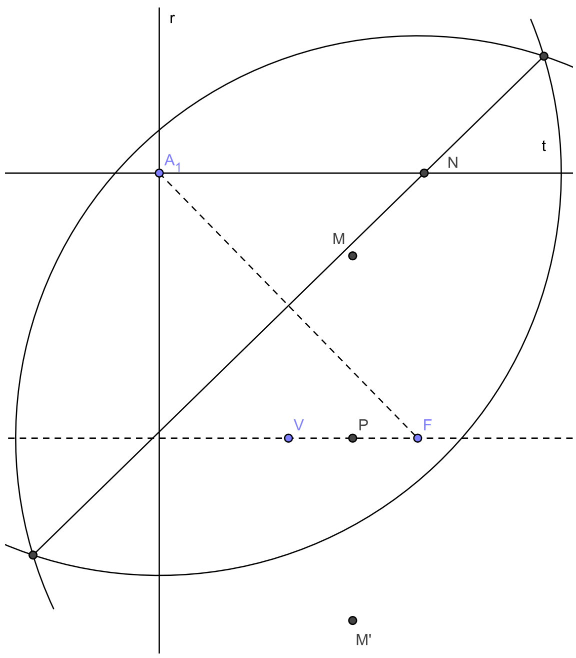
Sendo a parábola simétrica em relação à reta que contém V e F, podemos facilmente encontrar um ponto M' também pertencente à curva. De fato,

1. por M traçamos uma reta perpendicular à reta que contém V e F determinando, na intersecção das retas, o ponto P,

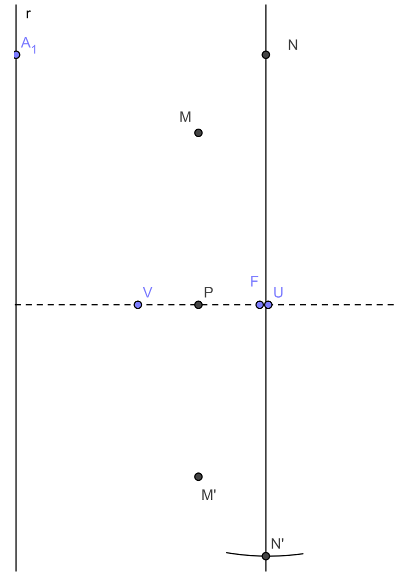
2. com $raio = \overline{MP}$ e centro em P traçamos o arco que intercepta a perpendicular no ponto M', simétrico a M, em relação à reta que contém V e F.



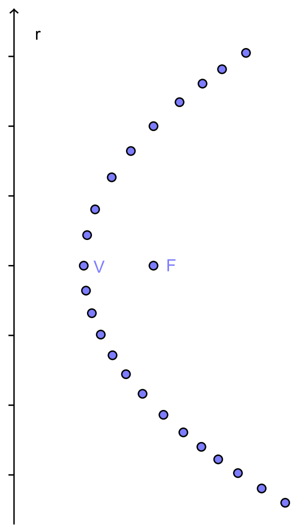
De maneira análoga escolhemos outra reta t perpendicular à r e repetimos o processo, encontrando um ponto N pertencente à curva desejada.

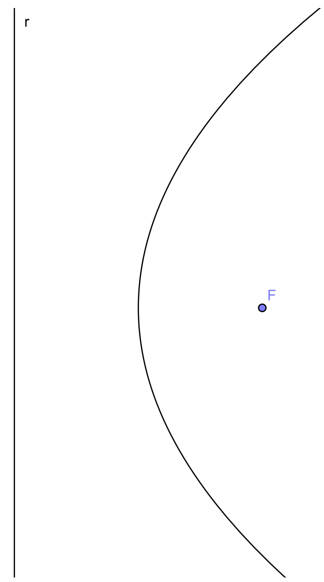


Encontrando o simétrico de N em relação à reta que contém V e F, temos o ponto N'.



E assim, sucessivamente, até que tenhamos pontos suficientes para definir um bom esboço da figura, a qual denominamos **Parábola**, definida analiticamente a seguir.





Definição 4.1. *Sejam r uma reta e F um ponto não pertencente a ela. O lugar geométrico* **P** *dos pontos equidistantes de F e r chama-se* ***parábola****.*

Ainda:

a) o ponto F é o **foco**,

b) a reta r é a **diretriz**,

c) o número positivo p tal que $d(F, r) = 2p$ é o **parâmetro** da parábola,

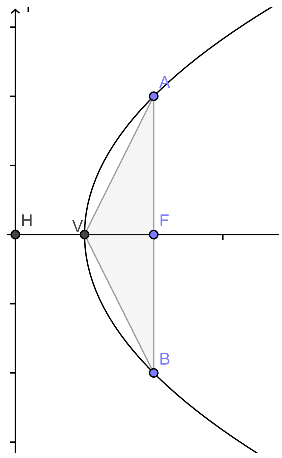
d) a reta que contém o foco e é perpendicular à diretriz chama-se **eixo**,

e) se H é o ponto de intersecção da diretriz com o eixo, o ponto V, ponto médio de $\overline{HF}$, é chamado **vértice** da parábola,

f) uma **corda** é qualquer segmento cujas extremidades pertencem à parábola P,

g) a **amplitude focal** de **P** é o comprimento da corda que contém o foco e é perpendicular ao eixo, e é sempre igual a $4p$.

Sejam A e B as extremidades da corda que contém o foco da parábola e é perpendicular ao seu eixo. O triângulo VAB é chamado de *triângulo fundamental* da parábola. É um triângulo isósceles de base igual a amplitude focal e altura igual ao parâmetro p.



Das três curvas estudadas nesse trabalho, a mais diferenciada e mais simples é a parábola.

4.1 Equação Reduzida

Para obtermos uma equação da parábola **P**, escolheremos o sistema ortogonal de coordenadas cuja origem é o vértice de **P**, e tal que o foco pertença ao semi-eixo positivo das abscissas. Em relação a esse sistema, o foco é $F = (p, 0)$ e a diretriz é a reta $r : x = -p$.

Se $X = (x, p)$, então $d(X, r) = |x - p|$ e $d(X, F) = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$. Logo X pertence à parábola se, e somente se, $|x - p| = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$.

Elevando-se ambos os membros ao quadrado, encontramos

$$|x - p|^2 = (x - p)^2 + y^2,$$

que equivale à

$$x^2 + 2px + p^2 = x^2 - 2px + y^2,$$

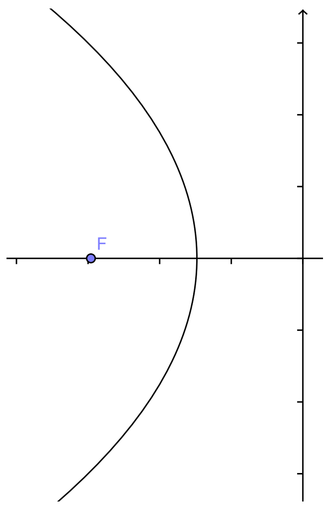
que finalmente é equivalente à

$$y^2 = 4px. \tag{4.2}$$

Essa equação é chamada **equação reduzida** da parábola **P**.

A parábola é simétrica em relação ao seu eixo mas não em relação à reta que contém o vértice e é paralela ao eixo-y, nem em relação ao vértice V.

Outra equação reduzida de uma parábola, tão simples quanto a anterior, pode ser obtida tomando-se o vértice V como origem e escolhendo os eixos de modo que o foco pertença ao semi-eixo negativo das abscissas. Temos então, $F = (-p, 0)$ e a diretriz tem equação $x - p = 0$.



Um ponto $X = (x, y)$ pertence à parábola se, e somente se,

$$(d(X, F))^2 = (d(X, r))^2,$$

que é equivalente à

$$(x + p)^2 + y^2 = |x - p|^2.$$

Desenvolvendo e simplificando, como anteriormente, temos:

$$y^2 = -4px.$$

Se $V = (0, 0)$ e se o foco pertencer ao semi-eixo positivo das ordenadas, a equação será

$$x^2 = 4py,$$

e se $V = (0, 0)$ e se o foco pertencer ao semi-eixo negativo das ordenadas, a equação será

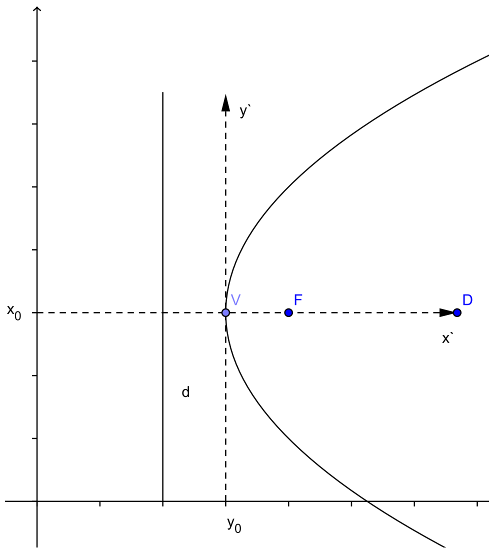
$$x^2 = -4py.$$

Podemos ter o vértice de uma parábola em um ponto diferente da origem do sistema ortogonal. Então, se uma parábola tem vértice no ponto $V = (x_0, y_0)$ e $\overline{VF}$ é paralelo ao eixo-x, sua equação em relação ao sistema $x'Vy'$ é

$$(y')^2 = 4px'$$

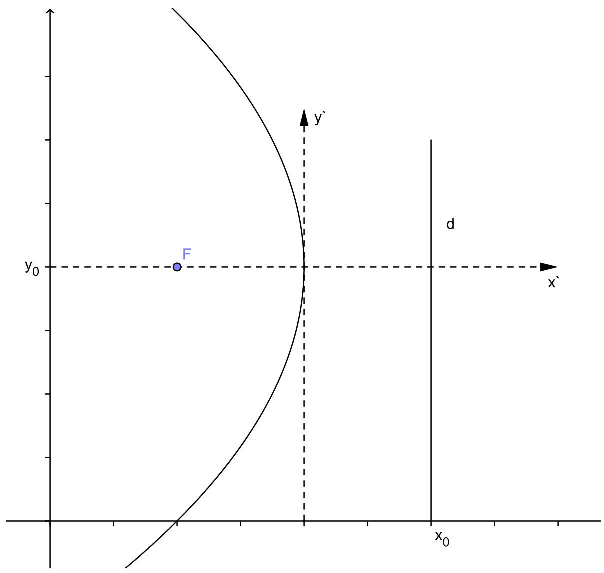
e, conforme vimos anteriormente, sua equação em relação ao sistema xOy é

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0).$$



Analogamente, se uma parábola tem vértice no ponto $V = (x_0, y_0)$ e $\overline{VF}$ é paralelo ao eixo-y, sua equação em relação ao sistema xOy é

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0).$$



4.2 Forma e Excentricidade

Não podemos definir excentricidade de uma parábola, como fizemos com elipse e hipérbole, por não termos os parâmetros geométricos a, b e c para relacionarmos.

Poderíamos tentar definir a excentricidade de uma parábola associando sua forma à forma do seu triângulo fundamental. Se esse fosse mais alongado, isto é, se p fosse bem maior que o comprimento de $\overline{AB}$, a parábola seria mais fechada. E se $\overline{AB}$ tivesse um comprimento bem maior que p, ela seria mais aberta. Porém o comprimento AB em *todas* as parábolas é igual a $4p$ e portanto *os triângulos fundamentais de quaisquer parábolas são sempre semelhantes.*

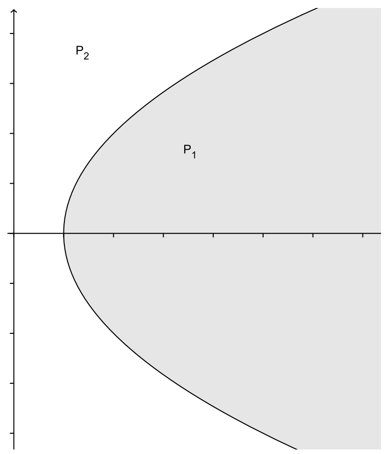
Razoável, então, é dizer que todas as parábolas são semelhantes.

4.3 Região do Plano Determinada por uma parábola

Definição 4.2. *Sejam* $\mathbf{P}$ *uma parábola e* P_1 *e* P_2 *as regiões determinadas por* $\mathbf{P}$*.*

a) O conjunto P_1 *chama-se* ***região focal*** *da parábola, ou região convexa determinada por* $\mathbf{P}$*.*

b) O conjunto P_2 *chama-se* ***região côncava*** *determinada por* $\mathbf{P}$*.*



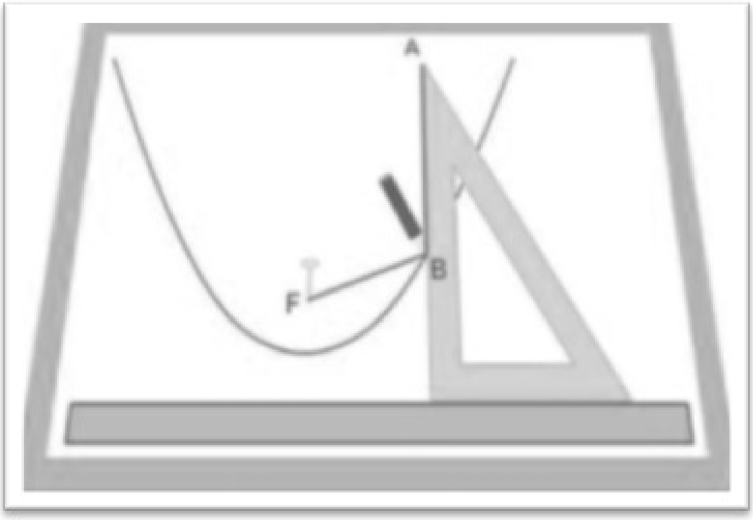
Caracterizamos algebricamente a região côncava P_2 determinada pela parábola $\mathbf{P}$ de equação $y^2 = 4px$, $p > 0$, tomando um ponto $X = (x, y)$ pertencente a P_2. Se $x < 0$, obviamente $y^2 > 4px$. Se, por outro lado, $x > 0$, tomemos $T = (x, y_0)$ um ponto da parábola com abscissa igual à de X. Temos $y_0^2 < y^2$ e, de $y_0^2 = 4px$, concluímos que $y^2 > 4px$. Assim todo ponto de P_2 satisfaz à inequação $y^2 > 4px$. De modo análogo, verificamos que os pontos de P_1 satisfazem à equação $y^2 < 4px$.

Resumindo:

$$\mathbf{P} : y^2 = 4px, \qquad P_1 : y^2 < 4px, \qquad P_2 : y^2 > 4px.$$

4.4 Outras Formas de Construção

Para construir um *parabológrafo*, necessitaremos de régua, esquadro, uma prancheta, um pino e de um fio de comprimento f, comprimento igual ao de um dos catetos do esquadro. Nesse cateto, escolha o vértice do ângulo agudo e prenda uma das pontas do fio. Fixe o pino da posição em que deseja o foco F e prenda a ele a outra ponta do fio.



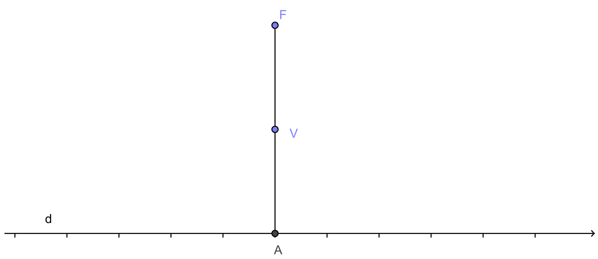
Desenhe a diretriz, à distância $2p$ de F. Apoiando o outro cateto na régua fixada sobre a diretriz, use a ponta do lápis para manter o fio esticado. Deslizando o esquadro sobre a régua, a ponta do lápis descreverá uma parábola.

Se P é a posição da ponta do lápis, então:

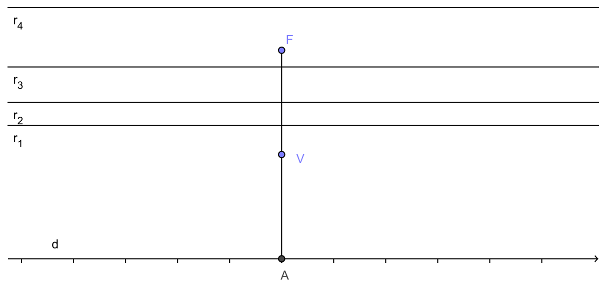
$$d(P,F) = f - d(P,N) = d(M,N) - d(P,N) = d(P,M) = d(P,r).$$

Descreveremos agora uma forma muito simples de construir a parábola usando régua e compasso.

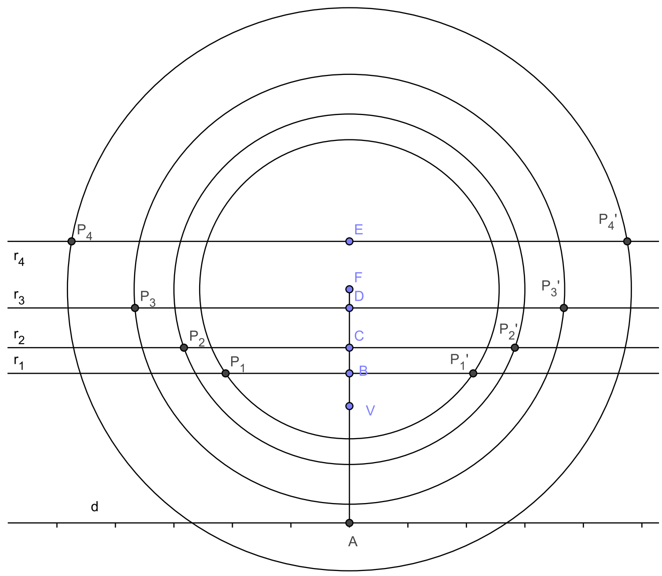
Seguindo a definição, iniciamos a construção com a reta diretriz d e um foco F qualquer. O vértice da parábola é o ponto médio do segmento $\overline{FA}$.



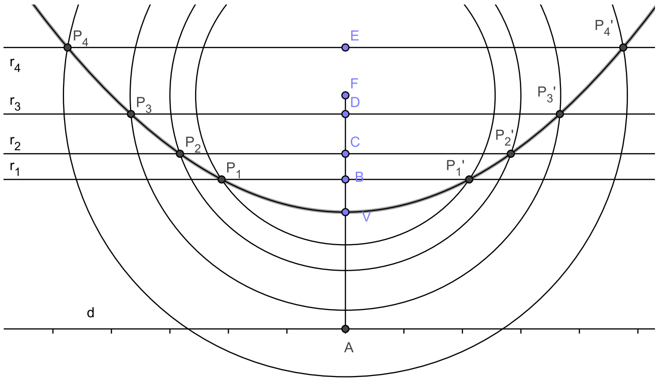
Tracemos uma reta r_1 paralela à d, a uma distância $l_1 > \overline{AV}$, e a seguir tantas retas r_1, r_2, r_3, $\ldots$, r_n, paralelas à d, quanto desejarmos, de distâncias à d iguais a l_1, l_2, l_3, $\ldots$, $l_n > \overline{AV}$.



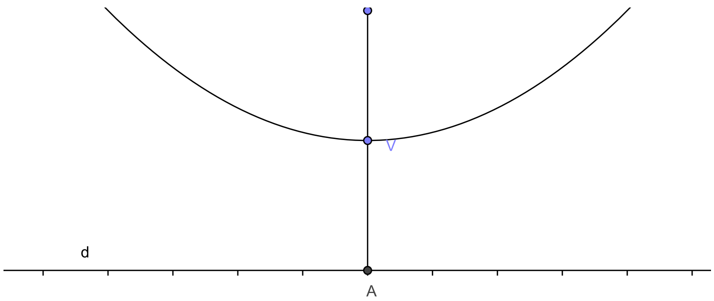
Com centro em F e raio de comprimento igual à $d(r_1, d)$, tracemos um arco que intercepta a reta r_1 nos pontos P_1 e P_1'. Em seguida, repetimos o processo para os raios r_2, r_3, $\ldots$, r_n, encontrando os pontos P_2 e P_2', P_3 e P_3', até encontrarmos os pontos P_n e P_n'.



A parábola é a curva que passa pelos pontos V, P_n e P'_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$.



Limpando um pouco nossa figura temos um bom esboço da parábola.



5 Proposta Didática

5.1 Justificativa Didática: o desenho como ferramenta didática

Acreditamos que a maneira mais didática de se aprender Geometria é junto com o Desenho Geométrico. Todos os ramos do conhecimento estão relacionados entre si e separá-los torna-os compartimentos estanques.

O trabalho com o desenho geométrico é de fundamental importância para aprimorar no aluno a visão espacial e a criatividade, além de ser essencial para a compreensão e fixação, pois ao desenhar uma figura o estudante procura caminhos, imagina soluções e força o raciocínio enquanto exercita a mente, conseguindo aprender assuntos importantes com maior facilidade e rapidez.

Também acreditamos que construir uma figura através do desenho geométrico aumenta a capacidade de planejar, projetar ou abstrair, estabelecendo relações entre a percepção visual e o raciocínio espacial.

Especificamente no contexto geométrico, a habilidade da visualização assume importância fundamental. Ao visualizar objetos geométricos, o indivíduo passa a ter controle sobre o conjunto das operações mentais básicas exigidas no trato da geometria. É como se estivéssemos desemaranhando um fio. Numa ponta do fio: o que se sabe. Na outra ponta: o que se quer.

Apresentaremos agora uma proposta diferente para o ensino das cônicas, cabendo a cada professor analisar se ela é adequada à sua proposta de trabalho e adaptando-a conforme a necessidade de cada turma.

Para que possamos aplicá-la, é necessário que os alunos dominem as bases do desenho com instrumentos (compasso e régua não graduada) e alguns conceitos da geometria analítica - ponto e distância entre dois pontos.

O professor partirá da propriedade geométrica de elipse, hipérbole e parábola e as construirá juntamente com os alunos para que eles vejam a figura que irá surgir.

Em seguida, fazemos a definição analítica e apresentamos a dedução das equações, pois em momento algum é nossa intenção deixar a formalidade matemática de lado.

Finalmente, mostramos aos alunos aplicações práticas dos assuntos estudados, justificando assim sua aprendizagem.

A avaliação será feita diariamente através de uma análise da participação do aluno durante as aulas, observando-se as atitudes do estudante durante cada parte do processo.

5.2 Plano de Aula: Elipse

Público Alvo:	Alunos do último ano do Ensino Médio
Recursos Didáticos:	Lousa e Materiais de desenho - régua não graduada e compasso
Objetivos:	Definir e entender a elipse a partir de sua construção geométrica
Duração:	O tempo necessário para a realização dessa atividade é de 3 aulas

1. Peça que os alunos tracem uma reta e nela marquem dois pontos A_1 e A_2 e em seguida os pontos F_1 e F_2 internos à $\overline{A_1A_2}$, tais que $d(A_1, F_1) = d(A_2, F_2)$, e o ponto médio do segmento $\overline{A_1A_2}$ que denominaremos por O.

2. Agora, peça aos alunos que procurem e tracem muitos pontos P tais que $d(P, F_1)+ d(P, F_2) = d(A_1, A_2)$. Se perceber que os alunos não estão encontrando a saída, dê-lhe algumas dicas conforme a construção apresentada no capítulo 2 desse trabalho, mas sempre deixando que a solução parta do raciocínio deles. Isso pode demorar algum tempo, dependendo da facilidade de cada aluno com as técnicas do desenho.

3. Após o término da construção defina elipse formalmente:

   Sejam F_1 e F_2 pontos distintos, $2c$ a distância entre eles e a um número real tal que $a > c$. O lugar geométrico $\mathbf{E}$ dos pontos X tais que $d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a$ chama-se **elipse**.

4. Aplique a definição de elipse utilizando a distância entre dois pontos e chegue à equação reduzida da curva, conforme seção 2.1 deste trabalho.

5. Apresente aos alunos o elipsógrafo, possivelmente permita que eles tracem várias curvas.

6. Apresente aos alunos problemas de aplicação extraídos do livro didático de sua preferência.

7. Proponha aos alunos atividades extra-classe para resolução de problemas e fixação de conteúdos.

5.3 Plano de Aula: Hipérbole

Público Alvo: Alunos do último ano do Ensino Médio

Recursos Didáticos: Lousa e Materiais de desenho - régua não graduada e compasso

Objetivos: Definir e entender a hipérbole a partir de sua construção geométrica

Duração: O tempo necessário para a realização dessa atividade é de 3 aulas

1. Peça que os alunos tracem uma reta e nela marquem dois pontos F_1 e F_2 e em seguida os pontos A_1 e A_2 internos à $\overline{F_1F_2}$, tais que $d(A_1, F_1) = d(A_2, F_2)$, e o ponto médio do segmento $\overline{A_1A_2}$ que denominaremos por O.

2. Agora, peça aos alunos que encontrem e marquem muitos pontos X, tais que $d(X, F_1) - d(X, F_2) = d(A_1, A_2)$. Conforme as dificuldades encontradas pelos alunos, dê-lhes algumas dicas, mas sempre permitindo que raciocinem, errem e retomem a atividade. Pode ser que alguns demorem para encontrar a solução, mas dê-lhes tempo. É nesse ponto da atividade que se fixam os conceitos e visualizam a forma.

3. Terminada a construção da figura, defina hipérbole formalmente.

   Sejam F_1 e F_2 pontos distintos, $2c$, a distância entre os pontos, e a um número real tal que $0 < a < c$. O lugar geométrico $\mathbf{H}$ dos pontos X tais que $|d(X, F_1) - d(X, F_2)| = 2a$ chama-se **hipérbole**.

4. Aplique a definição de hipérbole e utilizando os conceitos sobre distância entre dois pontos chegue à equação reduzida da curva, conforme seção 3.1 deste trabalho.

5. Apresente aos alunos problemas de aplicação extraídos do livro didático de sua preferência.

6. Proponha aos alunos atividades extra-classe para resolução de problemas e fixação de conteúdos.

5.4 Plano de Aula: Parábola

Público Alvo: Alunos do último ano do Ensino Médio
Recursos Didáticos: Lousa e Materiais de desenho - régua não graduada e compasso
Objetivos: Definir e entender a parábola a partir de sua construção geométrica
Duração: O tempo necessário para a realização dessa atividade é de 3 aulas

1. Peça aos alunos que marquem em uma folha uma reta r e um ponto F fora de r.

2. Agora, peça que eles encontrem e marquem muitos pontos X, tais que $d(X, F) = d(X, r)$. Dê tempo para que os alunos pensem, tracem e encontrem esses pontos, sempre lembrando ser essa a parte mais importante da atividade.

3. Terminada a construção da figura defina parábola formalmente:

   Sejam r uma reta e F um ponto não pertencente a ela. O lugar geométrico $\mathbf{P}$ dos pontos equidistantes de F e r chama-se **parábola**.

4. Aplique a definição de parábola e utilize os conceitos sobre distância entre dois pontos e chegue à equação reduzida da curva, conforme seção 4.1 desse trabalho.

5. Apresente aos alunos problemas de aplicação extraídos do livro didático de sua preferência.

6. Proponha aos alunos atividades extra-classe para resolução de problemas e fixação de conteúdos.

5.5 Sugestões de problemas de aplicação

1 - Uma elipse tem centro na origem do sistema cartesiano e $B(0, -3)$ e $A(-5, 0)$, coordenadas dos pontos que são extremidades de seus eixos. Determine sua equação.

2 - Determine as coordenadas, os focos e a excentricidade da elipse de equação: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{100} = 1$.

3 - Determinar a equação reduzida da hipérbole com centro na origem do sistema cartesiano, focos sobre o eixo das ordenadas $F_1 = (0, -7)$ e $F_2 = (0, 7)$, e eixo real medindo 10.

4 - Determinar a excentricidade de uma hipérbole centrada na origem, sabendo que seus focos são $(-4, 0)$ e $(4, 0)$ e que ela passa pelo ponto $(3, \sqrt{15}$.

5 - Determine o foco e a excentricidade da hipérbole: $\dfrac{x^2}{12} - \dfrac{y^2}{4} = 1$.

6 - Determinar a equação da curva cujos pontos são equidistantes à reta $x = -2$ e ao foco $F(2, 0)$.

7 - Dada a parábola $y^2 = 16x$ determine a equação da reta diretriz e as coordenadas dos focos.

8 - Uma agência espacial avaliou o movimento de um planeta e observou que ele se movimenta a partir de dois focos diferentes e que a soma das distâncias a esses focos era sempre constante e maior que a distâncias entre eles. Que tpo de trajetória faz esse planeta? Esboce uma figura que ilustre esse movimento.

9 - O mapa de uma cidade é localizado sobre um sistema cartesiano, em que o centro da cidade está na origem. Se um avião voa sobre essa cidade observando a equação $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{81} = 1$, qual a distância mínima, em relação ao centro da cidade que esse avião chega? (as unidades adotadas estão em quilômetro).

5.6 Relato de experiência

Em uma turma de último ano de ensino médio, estudamos os conceitos básicos de Geometria Analítica. Vimos distância entre dois pontos, ponto médio, equações de reta e de circunferência e no momento em que deveria iniciar elipse, aplicamos a proposta de aula 5.2.

Importante colocar que é uma turma de uma escola que tem aulas de desenho geométrico desde o 7º ano do ensino fundamental e, portanto, possui grande facilidade com o assunto.

Primeiramente, eles ficaram um pouco inseguros e sem saber exatamente por onde começar a construir. Discutiram um pouco e fizeram as primeiras considerações.

O primeiro ponto encontrado foi a partir do ponto médio dos pontos A_1 e A_2. Traçaram a mediatriz e encontraram o eixo menor.

Rapidamente, encontraram o caminho e começaram a marcar os pontos, sem perceber a simetria que possibilitava marcar 4 pontos a cada ponto entre os focos escolhidos.

Ao perceberem a simetria, o trabalho tornou-se muito mais rápido e começaram a perceber a forma que surgia; um aluno me perguntou com um certo brilho no olhar: “Agora vamos começar a estudar o oval?”.

Alguns alunos demoraram um pouco mais com os desenhos e outros precisaram de alguma ajuda para conseguir encontrar o caminho. Terminamos as construções e passamos à teoria.

Percebi que, com muita facilidade, eles conseguiram perceber o desenvolvimento algébrico da equação reduzida e “ajudaram” na demonstração.

No momento de resolver problemas, também notei grande facilidade da turma em interpretar os dados e usá-los na resolução das equações.

É como se houvesse uma grande compreensão de tudo o que envolve a elipse e suas propriedades.

Referências

[1] GUELLI, O. *Matemática - série Brasil*. 1. ed. São Paulo: Editora Ática, 2003.

[2] IEZZI, G. *Fundamentos de Matemática Elementar - volume 7*. 2. ed. São Paulo: Atual Editora, 1978.

[3] BOULOS, P. *Geometria Analítica - um tratamento vetorial*. 3. ed. São Paulo: Pearson Education, 2005.

[4] SILVA, C. *Matemática - aula por aula*. 2. ed. São Paulo: Editora FTD, 2005.

[5] FUGITA, F. *Matemática - ser protagonista*. 1. ed. São Paulo: Editora SM, 2009.

[6] GUELLI, O. *Matemática - contexto e aplicações*. 2. ed. São Paulo: Editora Ática, 2014.

[7] GUELLI, O. *Matemática - construção e significado*. 1. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2005.

[8] BIANCHINI, E. *Matemática*. 1. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2004.

[9] J.RIBEIRO. *Matemática - Ciencia, linguagem e tecnologia*. 1. ed. São Paulo: Editora Scipione, 2010.

[10] FEITOSA, M. O. *Matrizes, vetores e geometria analítica*. 17. ed. São Paulo: Nobel, 1984.

[11] BRASIL. *PCN + Ensino Médio. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. 1. ed. Brasília: BRASIL, MEC. Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1998.