



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Campus de Rio Claro

# Os Lemas de Sperner no Ensino Médio e uma modesta introdução à Topologia

**Thadeo Augusto Rocha de Azambuja**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-  
Graduação em Matemática em Rede Nacio-  
nal como requisito parcial para a obtenção  
do grau de Mestre

Orientadora  
**Profa. Dra. Thaís Fernanda Mendes Monis**

**2014**

111 Azambuja, Thadeo Augusto Rocha  
X111x Os Lemas de Sperner no Ensino Médio e uma modesta introdução à Topologia/ Thadeo Augusto Rocha de Azambuja- Rio Claro: [s.n.], 2014.  
36 f.: fig., tab.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.  
Orientadora: Thaís Fernanda Mendes Monis

1. Lemas de Sperner. 2. Topologia. 3. Homeomorfismo. 4. Ponto fixo de Brouwer. I. Título

# TERMO DE APROVAÇÃO

Thadeo Augusto Rocha de Azambuja  
OS LEMAS DE SPERNER NO ENSINO MÉDIO E UMA MODESTA  
INTRODUÇÃO À TOPOLOGIA

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Thaís Fernanda Mendes Monis  
Orientadora

Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi  
Departamento de Matemática - Universidade Estadual Paulista UNESP-Rio Claro

Prof. Dr. Rodrigo Martins  
Departamento de Matemática - Universidade Estadual de Maringá

**Rio Claro, 26 de setembro de 2014**

*Para as Professoras*  
*Silmara Navarro*  
*Luciane Zapater*  
*Gilza Borges*

# Agradecimentos

A minha família que esteve junto comigo.

Minha esposa, Mainara Lenz, especialmente por estar em todos os momentos dentro do Curso (desde a inscrição até o protocolo final deste trabalho). Por, nesses três anos, ter passado por tudo ao meu lado *literalmente*.

As minhas filhas: Cecília, Aline e Beatriz que, aos poucos, foram entendendo a importância do trabalho. Da maneira que uma criança pode acompanhar, fizeram de tudo ao alcance.

Meus pais, Silvia e Silvio, meus avós, vó Lucia e v'Ólívio e meus sogros, Elza e Pedro, por torcerem e rezarem o tempo todo por este trabalho.

Aos amigos que apoiaram e deram muitos empurrões. E aos que deram muita dura também. Amigos que seguraram a barra da família toda: especialmente Francesca, Adriana e Fontão, Lucélia e Helinho, Amanda e Thiago.

Aos amigos, colegas de classe, sempre estudando, apoiando, rindo, chorando. Carlos Augusto, uma pessoa para momentos inesquecíveis. Marcia e Ary, colegas especiais. Juliana, por uma força incalculável.

Aos professores e funcionários do Colégio Preve-Bauru e do Colégio Técnico Industrial (CTI UNESP-Bauru) que me fizeram chegar aqui. Aos professores e funcionários da UNESP-Bauru. Especialmente aos professores de Matemática de toda minha formação: Rosana, Ana, Tereza, Jô, Adeliane (*in memoriam*), Maurício, Ana Cláudia, Clélia, Silmara, Gilza, Luciane. A Marlei Menezes, que me deu os primeiros passos na profissão.

Aos colegas da Escola Estadual "Professor João Queiróz Marques- Botucatu e Colégio Santa Marcelina - Botucatu, que me ajudaram em muitos momentos nos últimos anos.

A toda equipe PROFMAT da UNESP-Rio Claro. Professora Thaís Monis, minha orientadora. Professor Thiago, que nem sabe quanta ajuda deu. Professora Suzinei, coordenadora do Curso, sempre presente e confiante.

A Deus, que colocou todas essas pessoas na minha vida.

*A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens.*

Descartes

# Resumo

Este trabalho tem como objetivo levar para o Ensino Médio alguns tópicos da Matemática que não constam em planos de ensino e que são de rápidas explicações e aplicações. Objetivamente discutiremos os Lemas de Sperner para o intervalo e para o triângulo. Abordaremos ainda a relação de tais lemas com a não possibilidade de empates para determinados jogos. Por fim, apresentaremos como uma belíssima aplicação dos Lemas de Sperner o famoso Teorema do ponto fixo de Brouwer.

**Palavras-chave:** Lemas de Sperner, Topologia, Homeomorfismo, Ponto fixo de Brouwer.

# Abstract

This study aims to take some mathematics topics that are not included at education plan to high school. These topics are fast to explain and to apply. Objectively, we discuss Sperner's Lemma for interval and for triangle. We broach the relation of this Lemma to the non-possibility of equality to certain games. Finally, we illustrate as a brilliant application of Sperner's Lemma the famous Brouwer's fixed-point theorem .

**Keywords:** Sperner's Lemma, Topology, Homeomorphism, Brouwer's fixed-point theorem.

# Lista de Figuras

1.1	Um intervalo razoável . . . . .	11
1.2	Mais de um intervalo razoável . . . . .	12
1.3	Cômodos de uma casa com 0, 1 ou 2 portas . . . . .	12
1.4	Passeios . . . . .	13
1.5	Exemplo de triangulação . . . . .	14
1.6	Exemplo de não triangulação . . . . .	14
1.7	Lema de Sperner para o triângulo . . . . .	15
1.8	Lema de Sperner para o triângulo - caminhos . . . . .	16
1.9	Quadrados da partição com pelo menos três marcas distintas . . . . .	17
2.1	Jogo com 5 impactos - jogador ímpar ganha . . . . .	18
2.2	Exemplo de tabuleiro para o Jogo impacto em duas dimensões . . . . .	19
2.3	Pontos extremos . . . . .	20
2.4	Resultado de um jogo sobe-desce . . . . .	20
2.5	Número $j$ colocado no tabuleiro na jogada $i$ . . . . .	21
2.6	Exemplo de triângulo com triangulação para o jogo de Sperner . . . . .	21
2.7	Algumas jogadas e o fim do jogo . . . . .	22
3.1	A função $f$ é involutiva . . . . .	24
3.2	A função $f$ é injetora . . . . .	24
3.3	A função $f$ é sobrejetora . . . . .	24
3.4	Sequência de quadrados $Q_k$ encaixados . . . . .	27
3.5	Teorema do Valor intermediário . . . . .	29
3.6	. . . . .	29
4.1	Ponto fixo $x_0$ de um intervalo . . . . .	31
4.2	. . . . .	33
4.3	Exemplo de partição $p_4$ com vértices marcados . . . . .	34
4.4	. . . . .	34

# Lista de Tabelas

4.1	Marcação nos vértices de um quadrado com uma triangulação . . . . .	34
-----	---	----

# Sumário

<b>1</b>	<b>Lemas combinatoriais</b>	<b>11</b>
1.1	Primeiro Lema Combinatorial . . . . .	11
1.2	Segundo Lema Combinatorial . . . . .	12
1.3	Lema de Sperner . . . . .	14
1.3.1	Lema de Sperner para o triângulo . . . . .	15
1.3.2	Lema de Sperner para o quadrado . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Jogos do tipo Sperner</b>	<b>18</b>
2.1	Jogo dos Impactos . . . . .	18
2.1.1	Resultado . . . . .	19
2.1.2	Impacto em duas dimensões . . . . .	19
2.2	Jogo do sobe-desce . . . . .	20
2.2.1	Resultado . . . . .	21
2.3	Jogo para o Lema do triângulo . . . . .	21
<b>3</b>	<b>A topologia da reta</b>	<b>23</b>
3.1	Funções contínuas . . . . .	23
3.2	Homeomorfismo . . . . .	24
3.3	Sequências . . . . .	25
3.4	Teorema do Ponto Fixo e o Teorema do Valor Intermediário . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer</b>	<b>31</b>
4.1	Em um intervalo . . . . .	31
4.2	Para o quadrado . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>35</b>

# Introdução

Neste trabalho trataremos os Lemas Combinatoriais de Sperner por meio de jogos de raciocínio/estratégia. Jogos simples e rápidos com aplicação prática dos resultados. Levá-los para a sala de aula de Ensino Básico é levar a criatividade, a competitividade saudável e, também, a Matemática do Ensino Superior com sua formalidade. Assim queremos como parte deste trabalho.

Não poderíamos deixar de colocar uma outra função para os lemas: neste trabalho, apontaremos o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e sua demonstração apoiada nos resultados dos Lemas de Sperner.

A demonstração apontada do Capítulo 4 neste trabalho não é a versão inicial dos trabalhos de Brouwer, pois esta foi apresentada à sociedade antes de Sperner apresentar seus lemas e resultados. Ainda assim, preferimos o caminho apontado por vermos que nele constam ideias simples e rápidas que podem ser usadas no Ensino Básico. Para tal demonstração não são necessários muitos pré-requisitos de Matemática do Ensino Médio ou Ensino Fundamental; os elementos necessários estão no Capítulo 3, baseado no estudos de funções e sequências.

O grande passo no Capítulo 3 é a procura de um ponto fixo em uma função contínua. O que apresentamos é a transformação desta propriedade em uma procura de raízes de uma função, tendo assim alguns termos que alunos de Ensino Médio entendem rapidamente. E todo o capítulo traz teoremas que podem ser levados intuitivamente ao Ensino Fundamental. O Teorema do Valor Intermediário é um deles; apresentá-lo rigorosamente a alunos que não seguirão necessariamente carreira da área de exatas pode ser cansativo, enquanto que ao mostrar ludicamente pode motivá-los, incluindo os professores, à procura da linguagem padrão.

No Capítulo 1 estão os lemas combinatoriais (Lemas de Sperner) na sua versão rigorosa da Matemática que no Capítulo 2 apresentamos como uma demonstração infanto-juvenil: jogos rápidos, simples e desafiadores, pois não há empate, e a derrota é poucas vezes por conta do azar.

# 1 Lemas combinatoriais

Neste capítulo, serão apresentados lemas matemáticos que envolvem intervalos reais, que são chamados de *Lemas Combinatoriais*. Os resultados destes lemas envolvem toda a parte dos jogos indicados neste trabalho.

## 1.1 Primeiro Lema Combinatorial

**Lema 1.1.** *Seja um intervalo  $I$  dividido por um conjunto finito de pontos em intervalos menores. Suponhamos que seu extremo inferior está marcado pelo número 0, o superior, pelo número 1 e cada um dos pontos divisórios tem uma marca 0 ou 1. Nestas condições, podemos afirmar que existe pelo menos um subintervalo cujos extremos estão marcados com números distintos. E mais, o número destes subintervalos é ímpar.*

*Demonstração.* *i.* Primeiramente, mostraremos que existe pelo menos um subintervalo com marcas distintas. Chamaremos de *razoável* um tal subintervalo. Os intervalos *razoáveis* podem ser de dois tipos: será chamado de *ímpar* o intervalo *razoável* com extremo inferior marcado por 0 e superior marcado por 1 e será chamado de *par* o intervalo *razoável* com marcas invertidas.

Dividindo o intervalo e marcando aleatoriamente os subintervalos com as marcas 0 ou 1: ou (a) todos são marcados por 0 ou (b) pelo menos um deles tem a marca 1.

No caso (a), temos um único intervalo *razoável*: o subintervalo *ímpar* no final do intervalo  $I$  (marcado com ★ na figura 1.1). No caso (b), escolheremos entre os elementos do conjunto de pontos divisores o ponto divisório marcado por 1 que está mais perto do extremo inferior do intervalo  $I$  e o denominaremos por  $M$ . O subintervalo que possui  $M$  tem extremo inferior marcado por 0 e por isso é um intervalo *razoável* do tipo ímpar.

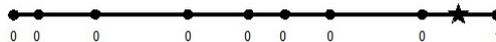


Figura 1.1: Um intervalo razoável

ii. Demonstraremos, agora, que o número de intervalos *razoáveis* é ímpar. Podemos percorrer pelo intervalo a partir do extremo inferior e nomeando sucessivamente os intervalos razoáveis: o primeiro subintervalo é do tipo *ímpar* e será chamado de *um*, o segundo que é par, de *dois*, e assim sucessivamente até o último intervalo razoável. Já que o ponto extremo superior de intervalo  $I$  está marcado com 1, é impossível o último intervalo *razoável* ser do tipo *par*, portanto o último intervalo *razoável* tem a marca 1 à direita e seu nome será o de um número ímpar; então o número total de intervalos razoáveis será ímpar.

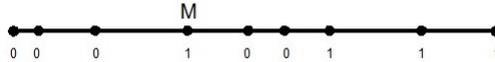


Figura 1.2: Mais de um intervalo razoável

□

## 1.2 Segundo Lema Combinatorial

Considere uma casa tal que cada um de seus cômodos possua zero, uma ou duas portas. Um quarto com duas portas chamaremos de *quarto de passagem*. Um cômodo com somente uma porta poderá ser de dois tipos: ou a porta é uma *porta exterior* (voltado para a rua) ou une a dois quartos (chamado *quarto sem saída*). Supomos também que um quarto só pode ter uma porta exterior, e dois quartos vizinhos não podem ter mais de uma porta comum.

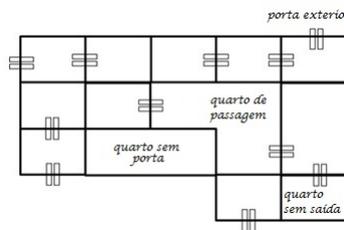


Figura 1.3: Cômodos de uma casa com 0, 1 ou 2 portas

**Lema 1.2.** *Se cada quarto de uma casa tem somente uma, duas ou nenhuma porta, o número de quartos sem saída e o número de portas exteriores tem a mesma paridade. Isto significa que ambos são pares ou ambos são ímpares.*

*Demonstração.* Para demonstrar este lema vamos descrever os passeios pelos quartos de uma casa. Estes se realizarão cumprindo as seguintes regras:

(a) por cada porta é possível passar somente uma vez;

(b) os passeios começam por uma *porta exterior* ou a partir de um *quarto sem saída* e continuando o passeio por *quartos de passagem* terminam de uma das seguintes formas: saindo por uma *porta exterior* ou chegando a um *quarto sem saída*;

(c) quando se terminar um passeio, começaremos outro até que tenhamos passado por todas as *portas exteriores* e todos os *quartos sem saída*.

Em virtude da suposição feita sobre o número de portas dos quartos, estas regras determinam um único trajeto a seguir em cada passeio, já que uma vez que se entra em um quarto de passagem há uma única porta para sair dele. Como resultado se obtém três tipos de passeios:

( $p_1$ ) de uma porta exterior até um quarto sem saída (ou a inversa, que é o mesmo caminho);

( $p_2$ ) de uma porta exterior até outra porta exterior e

( $p_3$ ) de um quarto sem saída até outro quarto sem saída.

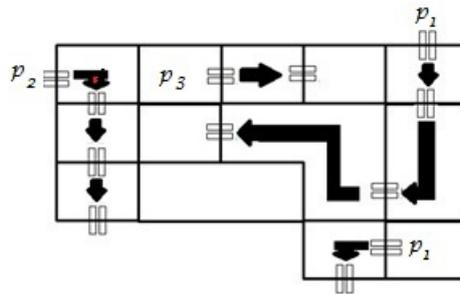


Figura 1.4: Passeios

Chamemos de  $m$ ,  $n$  e  $p$ , respectivamente, os números de passeios dos tipos ( $p_1$ ), ( $p_2$ ) e ( $p_3$ ). Como a cada passeio do tipo ( $p_1$ ) corresponde uma *porta exterior* e cada passeio do tipo ( $p_2$ ) corresponde a duas *portas exteriores* temos que o número de *portas exteriores* é  $m + 2n$ . Do mesmo jeito, o número total de *quartos sem saída* será  $m + 2p$ . Os números  $m + 2n$  e  $m + 2p$  tem a mesma paridade, dependendo somente do valor de  $m$ , como queríamos demonstrar.  $\square$

Neste lema, a forma dos quartos não tem relevância. Podem ser, por exemplo, triangulares, como usaremos com frequência daqui em diante.

### 1.3 Lema de Sperner

Os lemas de Sperner são resultados obtidos a partir dos lemas anteriores. Muitas vezes aqui será utilizado o termo *triangulação*, que definiremos a seguir.

**Definição 1.3.** Consideremos um triângulo dividido de forma arbitrária em triângulos menores. Esta partição deve satisfazer as seguintes condições: dois triângulo menores quaisquer

- não tem pontos em comum, ou
- têm somente um ponto em comum, ou
- tem um lado comum.

A esta partição daremos o nome de *triangulação*. Na figura 1.5 temos um exemplo de uma *triangulação* pois satisfaz as condições acima. Já na figura 1.6, temos um exemplo que não é de uma *triangulação* pois os triângulos  $T_1$  e  $T_2$  têm somente uma parte da aresta em comum.

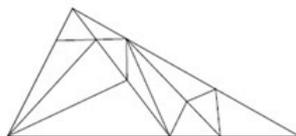


Figura 1.5: Exemplo de triangulação

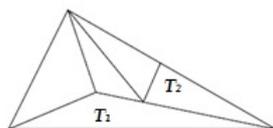


Figura 1.6: Exemplo de não triangulação

Em uma triangulação, denominaremos os triângulos pequenos por *faces da triangulação*, os lados destes triângulos por *arestas* e os vértices por *vértices da triangulação*.

### 1.3.1 Lema de Sperner para o triângulo

**Lema 1.4.** *LEMA DE SPERNER: Seja um triângulo  $T$  e marque cada um de seus vértices com somente um dos números 1, 2 e 3. Agora, considere uma triangulação qualquer de  $T$ . Os vértices da triangulação serão marcados pelos números 1, 2 ou 3 atendendo a seguinte condição: se o vértice da triangulação estiver em um lado do triângulo  $T$  então deve ser marcado por um dos dois números indicados nos vértices de tal lado. Nestas condições, pelo menos uma face da triangulação terá vértices com marcas diferentes 1, 2 e 3. E mais, o número de tais faces é um número ímpar.*

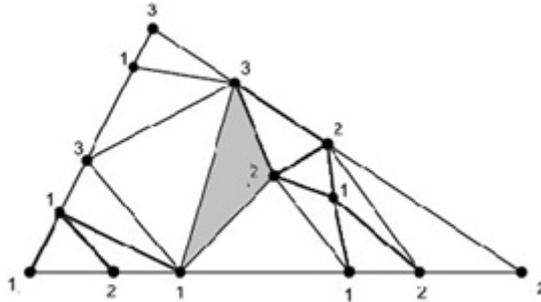


Figura 1.7: Lema de Sperner para o triângulo

*Demonstração.* Usando os elementos e os resultados dos primeiro e segundo lemas, associaremos:

- o triângulo  $T$  com a casa;
- as faces da triangulação aos quartos;
- as arestas do triângulo às portas.

Colocaremos como portas somente as arestas que tenham necessariamente as duas marcas 1 e 2, que indicaremos como *tipo(1,2)* como fizemos com os elementos do primeiro lema com a diferença que arestas *tipo(1,2)* não serão diferenciadas das arestas do *tipo(2,1)*.

Os dez casos possíveis de distribuição das marcas 1, 2 e 3 nos *vértices da faces* são: *tipo(1,1,1)*, *tipo(1,1,2)*, *tipo(1,1,3)*, *tipo(1,2,2)*, *tipo(1,3,3)*, *tipo(1,2,3)*, *tipo(2,2,2)*, *tipo(2,2,3)*, *tipo(2,3,3)* e *tipo(3,3,3)*.

As faces do *tipo(1,2,3)* têm somente uma aresta do *tipo(1,2)* e, como isso só acontece com este tipo de face, chamaremos estas faces de *quarto sem saída*; as faces *tipo(1,1,2)* e *tipo(1,2,2)* serão os *quartos de passagem* pois cada uma delas têm duas portas (arestas *tipo(1,2)*); temos ainda que o *tipo(1,1,1)*, o *tipo(1,1,3)*, o *tipo(1,3,3)*, o *tipo(2,2,2)*, o *tipo(2,2,3)*, o *tipo(2,3,3)* e o *tipo(3,3,3)* são *quartos sem portas*.

Em qualquer *face da triangulação* acontece uma e somente uma das opções: não possui arestas do *tipo(1,2)* ou possui uma aresta do *tipo(1,2)* ou possui duas arestas do *tipo(1,2)*. Com isso, podemos associar a triangulação de qualquer triângulo marcado sob as condições acima com o segundo lema combinatorial de modo que têm a mesma paridade o número de faces do *tipo(1,2,3)* e o número de portas exteriores do *tipo(1,2)*.

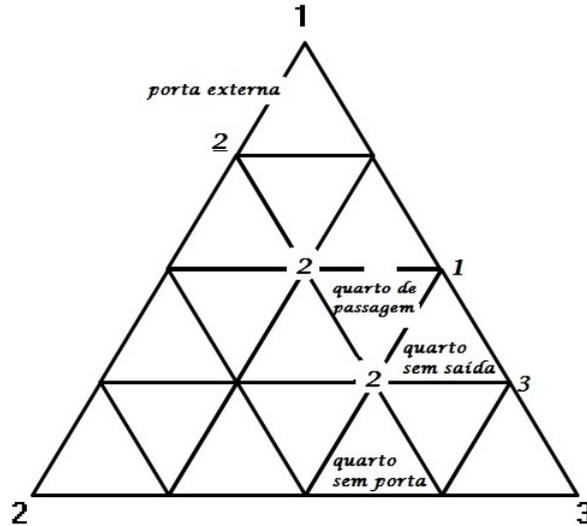


Figura 1.8: Lema de Sperner para o triângulo - caminhos

Podemos demonstrar que este último número é ímpar usando a seguinte relação: as portas exteriores do  $tipo(1,2)$  se encontram somente em dos lados do triângulo  $T$  e, de acordo com o primeiro lema combinatorial, o número é ímpar. Consequentemente, o número de faces do  $tipo(1,2,3)$  é ímpar.  $\square$

### 1.3.2 Lema de Sperner para o quadrado

Um quadrado  $Q$  foi repartido em pequenos quadrados por retas paralelas a seus lados. Para esta partição também usaremos as denominações *faces* (que são quadrados pequenos), *arestas* e *vértices da partição*. Usaremos a demonstração do lema anterior para elaborar o próximo lema. O lema de Sperner para o triângulo será chamado de *método dos passeios* e o termo *passeio* significa que temos uma triangulação atentando para as relações entre arestas e portas e entre faces e quartos sem saída

**Lema 1.5.** *Seja um quadrado  $Q$  com vértices marcados pelos números 1, 2, 3 e 4 de tal modo que não temos dois vértices com marcas idênticas. Dividindo o quadrado  $Q$  por retas paralelas aos seus lados, temos faces quadradas de tal forma que seus vértices serão marcados pelos números 1, 2, 3 ou 4 atendendo a seguinte condição: se o vértice da partição estiver em um lado do quadrado  $Q$  então deve ser marcado por um dos dois números relativos aos vértices de tal lado. Nestas condições, pelo menos uma face terá vértices com, pelo menos, três marcas diferentes. E mais, o número destas faces é um número ímpar.*

*Demonstração.* Começemos dividindo os quadrados da seguinte maneira: cada quadrado será dividido em duas partes formando, no final das divisões, uma *triangulação* em que as marcas serão os números 1, 2, 3 e 4.

Como no Lema de Sperner do triângulo, as portas serão as faces do  $tipo(1,2)$  e os

*quartos sem saída* indicados pelos triângulos com três marcas diferentes. Assim, são possíveis *quartos sem saída* de dois tipos:  $tipo(1,2,3)$  e  $tipo(1,2,4)$ .

De acordo com as condições indicadas no lema, temos que todas as portas exteriores estarão no lado do quadrado marcado com os números 1 e 2. Temos ainda, com a propriedade do segundo lema, que o número de portas exteriores é ímpar.

Usando o *método de passeio*, a partir de uma *porta exterior* teremos os possíveis resultados: (a) sair do quadrado por outra *porta exterior* ou (b) chegando em um *quarto sem saída*. Como o número total de portas exteriores é ímpar, pelo menos um dos *passeios* acaba em um *triângulo sem saída*.

Portanto, existe pelo menos uma face do  $tipo(1,2,3)$  ou do  $tipo(1,2,4)$  (pelo menos três marcas diferentes).

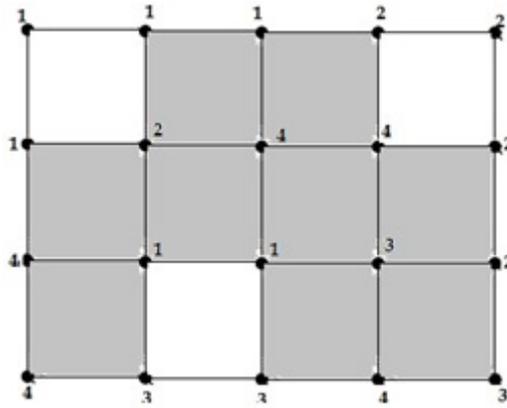


Figura 1.9: Quadrados da partição com pelo menos três marcas distintas

□

## 2 Jogos do tipo Sperner

Neste capítulo apresentaremos alguns jogos relacionados com os lemas apresentados no capítulo anterior.

### 2.1 Jogo dos Impactos

\*Peças:

Um tabuleiro retângulo formado por  $n$  quadrados.

Fichas de duas cores, por exemplo as peças do jogo de damas.

\*Instruções:

(1) Jogo com dois adversários, escolhendo quem será par ou ímpar.

(2) Alternadamente, os jogadores devem colocar uma ficha em um quadrado vazio.

\* Fim do jogo:

O jogo acaba quando todas as casas estiverem ocupadas.

Contam-se quantos impactos ocorreram. *Impacto* acontece quando duas casas seguidas têm fichas com cores diferentes.

Ganha o jogador que tiver escolhido a mesma paridade do número de impactos.

Uma outra opção é apresentar o jogo num pedaço de papel:

Faz-se uma tira com  $n$  quadrados e definem dois símbolos, por exemplo ■ e ●.

Cada um dos dois jogadores escolhe se será par ou ímpar.

Alternadamente, os jogadores devem colocar um símbolo em um quadrado vazio.

O jogo acaba quando todas as casas estiverem ocupadas. Contam-se quantos impactos ocorreram. *Impacto* acontece quando dois quadrados seguidos têm símbolos diferentes. Ganha o jogador que tiver escolhido a mesma paridade do número de impactos.



Figura 2.1: Jogo com 5 impactos - jogador ímpar ganha

### 2.1.1 Resultado

Se as extremidades forem marcadas com símbolos diferentes (ou cores diferentes no tabuleiro), no final teremos impactos indicados por um número ímpar. Os impactos são como os intervalos *razoáveis* descritos no Primeiro Lema Combinatorial.

Podemos também afirmar que teremos pares impactos se as extremidades foram marcados pelo mesmo símbolo.

Para ganhar, o jogador que for ímpar deve esperar o adversário fazer um símbolo em uma extremidade e na próxima jogada completar a outra extremidade com o símbolo diferente. Após esta rodada, quaisquer que sejam os símbolos, os impactos serão ímpares. Do mesmo modo para o jogador par, que deve marcar símbolos iguais nas extremidades.

### 2.1.2 Impacto em duas dimensões

Podemos inventar uma outra versão para o jogo dos impactos depois do mesmo ter sido associado ao resultado dos lemas. A motivação para a nova versão é o desafio aos alunos de associar os lemas com um tabuleiro em duas dimensões, como na figura 2.2.

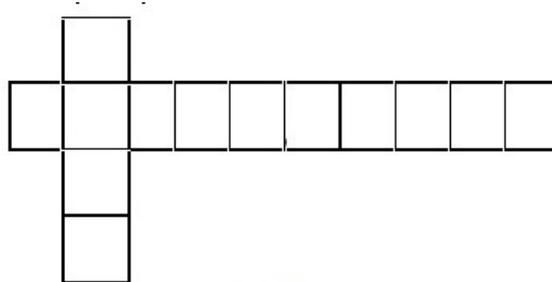


Figura 2.2: Exemplo de tabuleiro para o Jogo impacto em duas dimensões

A estratégia esperada após várias partidas é: o jogador ímpar deve deixar marcas diferentes nas extremidades de uma dimensão e marcas idênticas nas extremidades da outra, pois assim teremos ímpares impactos em uma dimensão e pares impactos na outra, somando ímpares impactos.

Podemos propor o jogo também em um tabuleiro como o tabuleiro de damas. A estratégia continua a mesma com a dificuldade para os jogadores estarem atentos aos extremos em todas as linha e todas as colunas.

## 2.2 Jogo do sobe-desce

Nste jogo precisamos da definição de *pontos extremos*, a seguir:

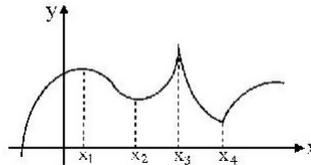


Figura 2.3: Pontos extremos

**Definição 2.1.** No gráfico da figura 2.3, os pontos  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  e  $x_4$  são chamados de **pontos extremos** que podem ser de dois tipos: os pontos  $x_1$  e  $x_3$  são pontos de máximo local enquanto os pontos  $x_2$  e  $x_4$  são chamados pontos de mínimo local, pois:

- O gráfico de uma linha contínua tem máximo local no ponto  $c$ , se existir um intervalo aberto  $I$ , contendo  $c$ , de tal forma que o valor associado a  $c$  é maior que quaisquer dos valores associados aos demais números do intervalo  $I$ .
- O gráfico de uma linha contínua tem mínimo local no ponto  $c$ , se existir um intervalo aberto  $I$ , contendo  $c$ , de tal forma que o valor associado a  $c$  é menor que quaisquer dos valores associados aos demais números do intervalo  $I$ .

Para o jogo, podemos usar aqui o tabuleiro do jogo do impacto e os jogadores devem decidir quem será par e quem será ímpar.

Ao invés de fichas ou símbolos, os jogadores devem marcar números. Alternadamente, os jogadores marcam os números nos quadrados vazios, podendo marcar qualquer número que não tenha sido usado. Os números devem ser positivos de 1 a  $n$  tal que  $n$  é a quantidade de quadrados no tabuleiro.

O jogo acaba quando todos os  $n$  quadrados estiverem preenchidos com os  $n$  números esperados como no exemplo da figura 2.4.



Figura 2.4: Resultado de um jogo sobe-desce

São contados os *pontos extremos* do jogo, usando a definição 2.1. Usando o exemplo, obtemos o gráfico na figura 2.5.

Ganha o jogo quem tiver a mesma paridade dos pontos extremos.

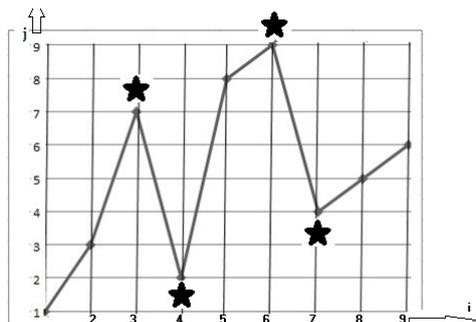


Figura 2.5: Número  $j$  colocado no tabuleiro na jogada  $i$

### 2.2.1 Resultado

O resultado esperado é: se uma linha contínua formada por segmentos de reta tem o primeiro segmento crescente e o último segmento decrescente, então esta linha tem um número ímpar de extremos. De fato, os segmentos crescentes são como os *intervalos razoáveis* do tipo  $(0,1)$  do Primeiro Lema Combinatorial, e as retas decrescentes são como os *intervalos razoáveis* do tipo  $(1,0)$ . Assim, teremos ímpares *intervalos razoáveis* se tivermos segmentos com direções opostas nas extremidades da linha, como definidos marcas diferentes nos extremos do intervalo do lema 1.1.

## 2.3 Jogo para o Lema do triângulo

São dois jogadores. Podem usar o tabuleiro ou fazê-lo no papel.

O tabuleiro é necessariamente um triângulo cujos vértices devem ter marcas distintas e deve conter uma triangulação qualquer com a propriedade: dois subtriângulos quaisquer (a) não tem pontos em comum ou (b) têm somente um ponto em comum ou (c) tem um lado comum.

Alternadamente, um jogador deve fazer uma marcação em qualquer vértice da triangulação seguindo a seguinte condição: se um vértice for marcado em um lado do triângulo deve ser marcado por uma das duas marcas da extremidade deste. Ganha o jogador que conseguir primeiro deixar um subtriângulo com três marcas distintas.

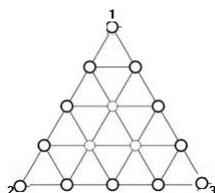


Figura 2.6: Exemplo de triângulo com triangulação para o jogo de Sperner

Como foi provado, existirá um subtriângulo com os três vértices com marcar diferentes; deve-se então tomar cuidado para não deixar a jogada do adversário com a possibilidade de fechar o triângulo.

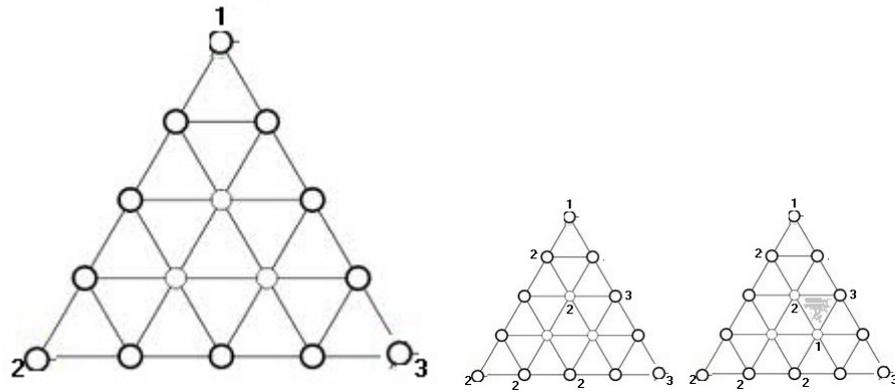


Figura 2.7: Algumas jogadas e o fim do jogo

## 3 A topologia da reta

Colocaremos, neste capítulo, os elementos necessários para a demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

### 3.1 Funções contínuas

Considere um intervalo  $I$  da reta numérica  $\mathbb{R}$  e uma relação  $f$  que associa valores de  $I$  em  $\mathbb{R}$ . Se para cada ponto  $x$  deste intervalo  $I$ , de acordo com certa regra, se corresponde um único número real  $f(x)$ , dizemos que esta relação é uma *função*. O intervalo  $I$  é chamado de *domínio da função* e o conjunto dos elementos de  $\mathbb{R}$  na forma  $f(x)$  é chamado de *conjunto imagem*.

Intuitivamente, a continuidade de uma função é clara: o gráfico desta função é uma linha que se pode traçar sem levantar o lápis do papel. Dizemos também que uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua se ela associa pontos próximos de  $x$  a pontos próximos de  $y = f(x)$ . A proximidade dos pontos é determinada pela distância cartesiana entre eles.

**Definição 3.1.** Todos os pontos próximos ao ponto  $x$  formam sua  $\delta$ -vizinhança. Se  $X$  é um conjunto que se encontra no plano e  $x$  é um de seus pontos, a  $\delta$ -vizinhança de  $x$  é o conjunto de pontos de  $X$  cuja distância a  $x$  é menor que  $\delta$ . Do ponto de vista geométrico, temos que a  $\delta$ -vizinhança de  $x$ , no plano, é um círculo (sem o contorno) cujo raio é  $\delta$  e o centro é o ponto  $x$ ; no espaço, esta *vizinhança* é uma esfera sem a linha limitadora.

Se uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em um ponto  $x$  se para qualquer  $\varepsilon > 0$  existe um número  $\delta > 0$  tal que a imagem de cada ponto da  $\delta$ -vizinhança do ponto  $x$  se encontra na  $\varepsilon$ -vizinhança do ponto  $y = f(x)$ . A continuidade de uma função no ponto  $x$  significa que se tomarmos uma vizinhança qualquer do ponto  $y$ , poderemos encontrar uma vizinhança correspondente a ele e dele dependente. Se uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em todos os pontos do domínio dizemos que  $f$  é contínua.

**Proposição 3.2.** A composição de funções contínuas também é contínua.

*Demonstração.* Sejam  $g : X \rightarrow Y$  e  $f : Y \rightarrow Z$  funções reais contínuas.

Como  $f$  é contínua em  $g(c)$ , para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta_1 > 0$  tal que a imagem da  $\delta_1$ -vizinhança de  $g(c)$  se encontra na  $\varepsilon$ -vizinhança de  $f(g(c))$ .

Da continuidade em  $c$ , a a função  $g$  temos que a imagem de alguma  $\delta_2$ -vizinhança de  $c$  está contida na  $\delta_1$ -vizinhança de  $g(c)$ . Assim, a imagem da  $\delta_2$ -vizinhança de  $c$  pela função  $f \circ g$  está contida na  $\varepsilon$ -vizinhança de  $f(g(c))$

□

## 3.2 Homeomorfismo

**Definição 3.3.** Uma função contínua  $f : X \rightarrow X$  é chamada uma *involução* se  $f^2(x) = f \circ f(x) = x$  para todo  $x \in X$ .

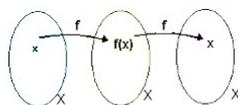


Figura 3.1: A função  $f$  é involutiva

**Definição 3.4.** Uma função  $f : X \rightarrow Y$  se diz *injetora* se associa pontos distintos do conjunto  $X$  a pontos distintos do conjunto  $Y$ .

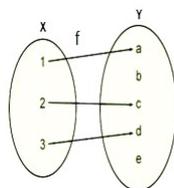


Figura 3.2: A função  $f$  é injetora

**Definição 3.5.** Uma função  $f : X \rightarrow Y$  se chama *sobrejetora* se cada ponto do conjunto  $Y$  é a imagem de um ponto (ou de vários pontos) do conjunto  $X$ .

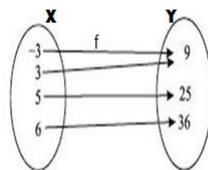


Figura 3.3: A função  $f$  é sobrejetora

Para uma função sobrejetora e injetora  $f : X \rightarrow Y$  podemos determinar a função  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  em que cada ponto  $y$  de  $Y$  tem correspondência ao ponto  $x$  de  $X$  que

se associa com  $y$  pela função  $f$ . A função sobrejetora e injetora  $f : X \rightarrow Y$  se chama *homeomorfismo* se ela é contínua e se a função  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  também é. Neste caso, dizemos que os conjuntos  $X$  e  $Y$  são homeomorfos.

### 3.3 Sequências

**Definição 3.6.** Uma *sequência de números reais* é uma função  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  que associa cada número natural  $n$  a um número real  $s_n$  tal que  $n$  indica a posição do elemento  $s_n$ . Para representar uma sequência podemos usar  $(s_1, s_2, \dots, s_n, \dots)$  ou, abreviadamente,  $(s_n)$ .

#### Convergência

Dizemos que uma sequência  $(x_n)$  é convergente para um número  $x_0$  se para qualquer número  $\varepsilon > 0$  existe um número  $m$  tal que para todos os números  $n > m$  a distância entre os pontos  $x_0$  e  $x_n$  é menor que  $\varepsilon$ .

De outra forma,  $x_n \rightarrow x_0$  significa que qualquer  $\varepsilon$ -vizinhança do ponto  $x_0$  possui todos os pontos da sequência a partir de certa posição.

Exemplo 1: a sequência real definida por  $x_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$  é convergente. Pois:

- Todos os elementos de posição ímpar são iguais a zero.
- Para os elementos da sequência de posição par ( $n = 2k$ ), temos  $x_n = \frac{1 + (-1)^{2k}}{2k} = \frac{1 + 1}{2k} = \frac{1}{k}$ . Como  $\frac{1}{k} < \varepsilon \implies k > \frac{1}{\varepsilon}$  e,  $n = 2k \implies k = \frac{n}{2}$ , então  $\frac{n}{2} > \frac{1}{\varepsilon}$ . Portanto,  $n > \frac{2}{\varepsilon}$ . Se pegarmos  $m$  inteiro tal que  $\frac{2}{\varepsilon} < m \leq \frac{2}{\varepsilon} + 1$ , o ponto  $x_n$  pertence a  $\varepsilon$ -vizinhança de 0, para todo  $n > m$ .

#### Princípio dos intervalos encaixantes

Seja uma sequência de intervalos fechados  $\{I_0, I_1, \dots, I_n\}$  tal que cada um deles está contido no anterior ( $I_n \supseteq I_{n-1}, \forall n$ ). Se os comprimentos dos intervalos tendem a zero quando  $n$  tende a infinito, *todos os intervalos tem um, e somente um, ponto comum*.

#### Compacidade

Se toda sequência  $(s_1, s_2, \dots, s_n, \dots)$  formada por elementos do conjunto  $S$  possuir uma subsequência  $(s_{n_1}, s_{n_2}, \dots, s_{n_k}, \dots)$  convergente a um elemento  $s_0$  de  $S$ , dizemos que  $S$  é **compacto**.

**Proposição 3.7.** Qualquer conjunto finito  $X$  de  $\mathbb{R}$  é compacto.

*Demonstração.* Seja  $(s_n)$  uma sequência com elementos de  $X$ . Podemos afirmar que existe uma subsequência com elementos iguais a  $s_0$  de  $X$ . Neste caso, a subsequência converge para  $s_0$  que é elemento de  $X$ .  $\square$

**Proposição 3.8.** O intervalo aberto  $I = (0, 1)$  não é compacto.

*Demonstração.* Existe uma subsequência de elementos de  $I$  tal que nenhuma subsequência dela é convergente a um ponto de  $I$ : a sequência  $s_n = \frac{1}{n}$  tem subsequência  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{n}, \dots)$  que é convergente a 0.  $\square$

**Proposição 3.9.** O intervalo fechado  $I = [a, b]$  é compacto.

*Demonstração.* *i.* Seja  $(s_n)$  uma sequência de pontos de  $I = [a, b]$ . Dividindo o intervalo  $[a, b]$  na metade, pelo menos uma das duas metades, de comprimento  $\frac{b-a}{2}$ , possui infinitos pontos de  $(s_n)$ . Chamemos a tal metade por  $I_1$  e tome um ponto da sequência  $s_{n_1} \in I_1$ . Agora, dividindo o intervalo  $I_1$  na metade, temos uma dessas metades contendo uma infinidade de pontos de  $(s_n)$ . Denotemos tal metade, de comprimento  $\frac{b-a}{2^2}$ , por  $I_2$  e tomemos  $s_{n_2}$  da sequência  $s_n$  que pertence a  $I_2$ , com  $n_2 > n_1$ . Por indução, obtemos uma sequência de intervalos  $I_0 = I = [a, b] \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_k \dots$ , onde o comprimento de  $I_k$  é  $\frac{b-a}{2^k}$ . Como o comprimento dos intervalos tende a zero ( $\frac{b-a}{2^k} \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ ), pelo Princípio dos intervalos encaixantes, existe um único ponto  $s_0$  pertencente a todos os intervalos  $I_k$ ,  $k = \{0, 1, 2, \dots\}$ .

*ii.* Para qualquer número real  $\varepsilon > 0$ , existe um número  $m$  tal que o comprimento do intervalo  $I_m, \frac{b-a}{2^m}$ , é menor que  $\varepsilon$ . Como  $s_0 \in I_m$ , todos os elementos de  $I_m$  são elementos da  $\varepsilon$ -vizinhança deste ponto e também temos  $s_0 \in I_k$ , para qualquer  $k \geq m$ . A  $\varepsilon$ -vizinhança de  $s_0$  possui todos os elementos da subsequência  $(s_{n_k})$  a partir do número  $n_m$ .

Como toda sequência de  $I = [a, b]$  possui uma subsequência convergente para um ponto  $s_0$  de  $I$ , temos que  $I$  é compacto.  $\square$

**Proposição 3.10.** O quadrado no plano  $\mathbb{R}^2$  é compacto.

*Demonstração.* Seja  $Q$  um quadrado cujos lados medem 1 e são paralelos aos eixos  $Ox$  e  $Oy$  do plano cartesiano. Seja, também,  $(p_n)$  uma sequência qualquer de pontos de  $Q$ . Dividindo  $Q$  por retas paralelas aos lados e pelos seus pontos médios, temos quatro quadrados (de lado medindo  $\frac{1}{2}$ ) sendo um deles com uma infinidade de pontos da sequência  $p_n$ . Chamemos de  $Q_1 = I_1 x J_1$  este quadrado e seja  $p_{n_1}$  um ponto da sequência contida em  $Q_1$ . Dividindo  $Q_1$  por meio de retas paralelas aos lados pelos seus pontos médios, teremos outros quadrados (com lados de comprimento  $\frac{1}{2^2}$ ). Sucessivamente, encontraremos quadrados encaixados  $Q_k = I_k x J_k$  com comprimentos dos lados tendendo a zero quando  $k$  tende ao infinito. Com o princípio dos intervalos encaixados, teremos um ponto  $x_0$  de  $Q$  pertencente a todos os quadrados  $Q_k$ , como na figura 3.4.

Ademais, a subsequência  $p_{n_k}$  converge para  $x_0$  de  $Q$ . Portanto,  $Q$  é compacto.

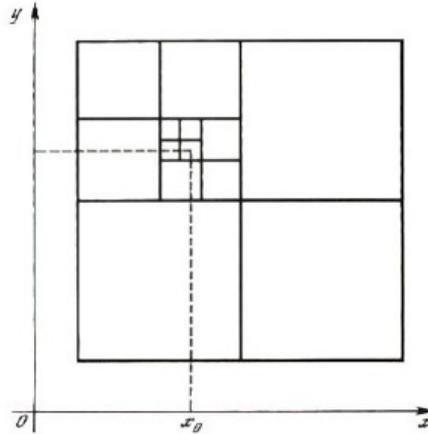


Figura 3.4: Sequência de quadrados  $Q_k$  encaixados

□

**Proposição 3.11.** Uma função  $f$  contínua em um intervalo  $[a, b]$  está limitada superior e inferiormente, ou seja, existem os valores reais  $m$  e  $M$  tal que  $m \leq f(x) \leq M$  para qualquer  $x \in [a, b]$ .

*Demonstração.* Por redução ao absurdo, vamos supor que não exista  $M$ , ou seja, que não exista no intervalo  $[a, b]$  um limite superior para a função  $f$ . Podemos supor, então, que existem os seguintes pontos de  $[a, b]$ :  $x_1$  tal que  $f(x_1) > 1$ ,  $x_2$  tal que  $f(x_2) > 2$ ,  $x_3$  tal que  $f(x_3) > 3$ , ...,  $x_n$  tal que  $f(x_n) > n$ . Como o intervalo é compacto, da sequência  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  é possível obter uma subsequência convergente para um ponto  $x_0$  de  $[a, b]$  (para simplificar consideraremos a própria sequência  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  convergente para  $x_0$ ). Como  $f$  é contínua em  $x_0$ , para qualquer  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que a imagem de cada ponto da  $\delta$ -vizinhança de  $x_0$  se encontra na  $\varepsilon$ -vizinhança do ponto  $f(x_0)$ , ou seja, para todo  $x$  desta vizinhança

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

Como a sequência  $x_n$  converge para  $x_0$ , todos os pontos a partir de um certo número  $n_0$  se encontram na  $\delta$ -vizinhança de  $x_0$  e portanto para todo  $n \geq n_0$ ,  $f(x_n) < f(x_0) + \varepsilon$  contrariando as desigualdades  $f(x_n) > n$ .

Portanto,  $f$  possui um limite superior.

Analogamente, podemos garantir que  $m$  (limite inferior de  $f$ ) existe.

□

### 3.4 Teorema do Ponto Fixo e o Teorema do Valor Intermediário

#### Teorema do ponto fixo

**Propriedade 3.1.** Dizemos que um conjunto  $X$  tem a propriedade do ponto fixo se para qualquer função contínua  $f : X \rightarrow X$  existir um ponto fixo, ou seja, para algum  $x_0$  de  $X$ , temos  $f(x_0) = x_0$

Esta propriedade é um invariante topológico, isto é, se  $X$  possuir a propriedade do ponto fixo então qualquer conjunto  $Y$  homeomorfo a  $X$  também tem a propriedade do ponto fixo. Segue a demonstração:

Seja  $g : X \rightarrow Y$  um homeomorfismo e  $f : Y \rightarrow Y$  uma função contínua.

Seja  $\varphi = g^{-1}fg$  uma função de  $X$  em  $X$ .  $\varphi$  é obtido da seguinte maneira: primeiro, no ponto  $x$  de  $X$  aplicamos  $g$  dando  $y = g(x)$  de  $Y$ ; em seguida, se aplica a função  $f$  que resulta no ponto  $f(y) = f(g(x))$  do conjunto  $Y$ ; finalmente, se aplica  $g^{-1}$ , obtendo o ponto  $g^{-1}(f(g(x)))$  de  $X$ .

Como a função  $\varphi : X \rightarrow X$  é contínua (Proposição 3.2), existe um ponto fixo  $x_0$  de  $\varphi$ :

Definindo  $y_0$  a imagem deste ponto no homeomorfismo  $g$ , temos  $y_0 = g(x_0)$ . Então:

$$\varphi(x_0) = g^{-1}fg(x_0) = x_0$$

Aplicando  $g$  nos dois membros da equação:

$$gg^{-1}fg(x_0) = g(x_0) \implies fg(x_0) = g(x_0)$$

Como  $g(x_0) = y_0$

$$f(y_0) = y_0$$

Concluindo,  $y_0$  é um ponto fixo.

#### Teorema do Valor Intermediário

Nesta seção, provaremos que o teorema do ponto fixo de Brouwer para o intervalo implica no Teorema do Valor Intermediário, como segue:

**Teorema 3.12.** (Teorema do valor intermediário)

Seja  $f$  uma função contínua de  $I = [a, b]$  em  $\mathbb{R}$  com  $f(a) < f(b)$ . Se  $c$  é um número real tal que  $f(a) < c < f(b)$  então existe um ponto  $x_0$  de  $I$  de modo que  $f(x_0) = c$ .

*Demonstração.* *i.* Se  $c = 0$  devemos mostrar que existe um ponto  $x_0$  tal que  $f(x_0) = 0$ . Primeiramente, definiremos uma função contínua  $F(x) : [a, b] \rightarrow [a, b]$  de modo que  $F(x) = \lambda f(x) + x$  ( $\lambda \neq 0$ ). Note que os pontos fixos de  $F(x)$  são exatamente as raízes de  $f(x)$ :

$$\lambda f(x_0) + x_0 = x_0 \implies f(x_0) = \frac{x_0 - x_0}{\lambda} = 0$$

O valor  $\lambda$  (na função  $F(x)$ ) faz com que a função  $f(x)$  tenha seu gráfico alterado pois foi trocado o conjunto imagem, deixando  $f$  totalmente no interior do quadrado ABCD de lados com comprimento  $b - a$ . (Figura 3.5)

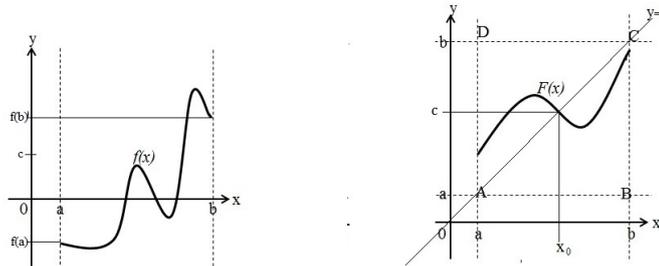


Figura 3.5: Teorema do Valor intermediário

Pela proposição 3.11, temos dois números  $m$  e  $M$  tal que  $m \leq f(x) \leq M$  para qualquer  $x \in [a, b]$ . Note que  $m < c = 0$  e  $M > c = 0$ .

Com a continuidade de  $f$ , temos:  $f(x) < 0$  para todo  $x$  próximo de  $a$  ( $f(a) < c = 0$ ) e  $f(x) > 0$  para todo  $x$  próximo de  $b$  ( $f(b) > c = 0$ ). Logo, temos um ponto  $x_1$  de tal modo que as imagens de todos os pontos de  $[a, x_1]$  sejam negativos e um ponto  $x_2$  de tal modo que as imagens de todos os pontos de  $[x_2, b]$  sejam positivos.

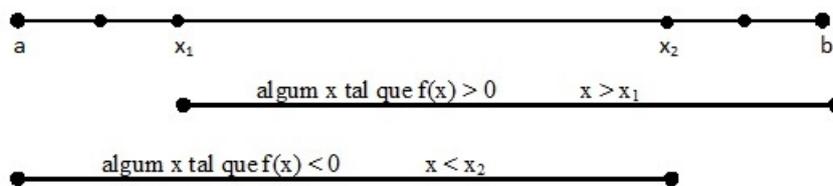


Figura 3.6:

Seja  $\lambda = \max \left\{ \frac{a-x_1}{M}, \frac{b-x_2}{m} \right\}$ . Demonstraremos que para todo  $x \in [a, b]$ , temos (a)  $F(x) \geq a$  e (b)  $F(x) \leq b$  :

(a)

(a<sub>1</sub>) Supondo  $f(x) \geq 0$ , ou seja, os pontos  $x$  que não são pontos do intervalo  $[a, x_1]$ .

Temos  $\lambda \geq \frac{a-x_1}{M}$ . Então  $\lambda f(x) \geq \frac{a-x_1}{M} f(x)$ .

Como  $f(x) \leq M$  que implica em  $-f(x) \geq -M$ , então:

$$\lambda f(x) \geq \frac{a-x_1}{M} f(x) = \frac{a-x_1}{-M} (-f(x)) \geq \frac{a-x_1}{-M} (-M) = a-x_1$$

Somando  $x$  ao primeiro e último termos da inequação:  $\lambda f(x) + x \geq a - x_1 + x$ , que por definição de  $F$ ,  $F(x) \geq a - x_1 + x$ .

Como  $f(x) \leq 0$  e  $f$  assume apenas valores negativos em  $[a, x_1]$ , temos  $x > x_1$  (figura 3.6), então  $F(x) \geq a$  para  $f(x) \geq 0$ .

(a<sub>2</sub>) Se  $f(x) < 0$  então  $\lambda f(x) > 0$  e portanto  $F(x) = \lambda f(x) + x > x \geq a$ .

$$\therefore F(x) \geq a \text{ para todo } x \in [a, b] \quad (3.1)$$

(b)

(b<sub>1</sub>) Se  $f(x) \geq 0$  então  $\lambda f(x) \leq 0$  e portanto  $F(x) = \lambda f(x) + x \leq x \leq b$ .

(b<sub>2</sub>) Supondo  $f(x) < 0$ , ou seja, os pontos  $x$  que não são pontos do intervalo  $[x_2, b]$ .

Temos  $\lambda \geq \frac{b - x_2}{m}$ . Então  $\lambda f(x) \leq \frac{b - x_2}{m} f(x)$ .

Como  $f(x) \geq -m$  que implica em  $-f(x) \leq m$ , então:

$$\lambda f(x) \leq \frac{b - x_2}{m} f(x) = \frac{b - x_2}{-m} (-f(x)) \leq \frac{b - x_2}{-m} (-m) = b - x_2$$

Somando  $x$  ao primeiro e último termos da inequação:  $\lambda f(x) + x \leq b - x_2 + x$ , que por definição de  $F$ ,  $F(x) \leq b - x_2 + x$ .

Como  $f(x) \geq 0$  e  $f$  assume apenas valores positivos em  $[x_2, b]$  (figura 3.6), então  $F(x) \leq b$  para  $f(x) \leq 0$ .

$$\therefore F(x) \leq b \text{ para todo } x \in [a, b] \quad (3.2)$$

Logo, por (3.1) e (3.2),  $F(x) \in [a, b]$  para todo  $x \in [a, b]$ .

ii. Para o caso  $c \neq 0$ , definiremos uma função  $F(x) : [a, b] \rightarrow [a, b]$  de modo que  $F(x) = \lambda[f(x) - c] + x$  ( $\lambda \neq 0$ ). Assim, temos:

$$F(x_0) = \lambda[f(x_0) - c] + x_0 = x_0 \implies f(x_0) = c \quad \square$$

**Corolário 3.13.** Se uma função real contínua  $f$  possui  $f(a) < 0$  e  $f(b) > 0$ , então esta função possui, pelo menos, uma raiz real no intervalo  $[a, b]$ . Pois, se  $f(a) < 0$  e  $f(b) > 0$ , então temos  $f(a) < 0 < f(b)$  e, de acordo com o teorema 3.12, existe  $x_0$  tal que  $f(x_0) = 0$ , ou seja,  $x_0$  é uma raiz da função.

# 4 Demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

## 4.1 Em um intervalo

Primeiramente, nesta seção, apresentaremos uma observação intuitiva sobre o Teorema do ponto fixo. Se  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  é uma função contínua, seu gráfico une um ponto do lado esquerdo do quadrado  $Q = [a, b] \times [a, b]$  a um lado direito de  $Q$ . Logo o gráfico de  $f$  terá um ponto  $x_0$  que intersecta a diagonal do quadrado, que possui pontos da reta  $y = x$ . Isto é, o ponto  $x_0$  de  $[a, b]$  tem imagem  $f(x_0) = x_0$  sendo, assim, um ponto fixo.

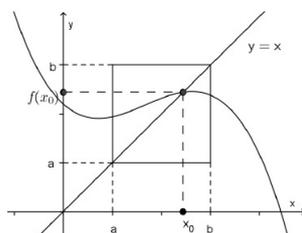


Figura 4.1: Ponto fixo  $x_0$  de um intervalo

Se qualquer extremo do intervalo for um ponto fixo, ou seja, se  $f(a) = a$  ou  $f(b) = b$ , o teorema está demonstrado.

Caso contrário, devemos considerar  $f(a) > a$  e  $f(b) < b$ . Divida o intervalo  $I = [a, b]$  em duas partes pelo ponto  $c_0 = \frac{a+b}{2}$ . Continuaremos considerando que  $f(c_0) \neq c_0$ , ou seja,  $c_0$  não é um ponto fixo ou o teorema estaria demonstrado. Indique por  $I_1$  o seguinte intervalo: se  $f(c_0) < c_0$  então  $I_1 = [a, c_0]$ ; se  $f(c_0) > c_0$ ,  $I_1 = [c_0, b]$ . Divida, agora  $I_1$  pelo seu ponto médio  $c_1$  ( $c_1 = \frac{a+c_0}{2}$  ou  $c_1 = \frac{c_0+b}{2}$ ). Se  $f(c_1) = c_1$  o teorema está demonstrado. Caso contrário teremos, por indução, uma sequência infinita de intervalos  $I_k = [p_k, q_k]$  com diâmetro tendendo a zero, onde  $f(p_k) - p_k$  e  $f(q_k) - q_k$  possuem sinais opostos. Logo, pelo Princípio dos Intervalos Encaixantes, existe um ponto  $x_0$  comum a todos os intervalos. Vamos, por redução ao absurdo, mostrar que  $x_0$  é um ponto fixo. Supondo que os pontos  $x_0$  e  $y_0 = f(x_0)$  sejam distintos e, sem perda de generalidade,

---

vamos supor que  $f(x_0) > x_0$ . Assim, a função  $f(x) - x$  assume valor positivo em  $x_0$ . Como essa função também é contínua, encontramos  $\delta > 0$  tal que  $f(x) - x > 0$  para qualquer  $x$  da  $\delta$ -vizinhança de  $x_0$ . Os intervalos  $I_k$  têm diâmetro  $\frac{b-a}{2^k}$  e contêm  $x_0$  para todo  $k$  suficientemente grande,  $I_k = [p_k, q_k] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . Logo,  $f(p_k) > p_k$  e  $f(q_k) > q_k$  que implica no absurdo  $f(p_k) - p_k > 0$  e  $f(q_k) - q_k > 0$ , pois estes deveriam ter sinais opostos. Portanto,  $f(x_0) = x_0$ .

□

## 4.2 Para o quadrado

Seja um quadrado  $Q_1$  com os vértices marcados pelos números 1, 2, 3 e 4, conforme a figura 4.2:

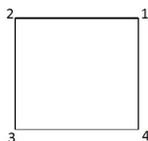


Figura 4.2:

Se qualquer um dos vértices for um ponto fixo ( $f(p) = p$ ), o teorema está demonstrado. Procederemos, então, o caso  $f(p) \neq p$ .

Para cada  $n$ , existe uma partição  $p_n$  feita por retas paralelas aos lados do quadrado. Seja, então, a partição  $p_2$ : entre os 4 subquadrados existentes, pelo menos um possui 3 marcas distintas (*Lema 1.6*). Escolhamos um deles e o denotemos por  $Q_2$ ; deste quadrado um ponto  $P_2 = (x_2, y_2)$  é escolhido. Na partição  $p_3$ , um entre os 9 subquadrados tem pelo menos 3 marcas distintas. Entre eles, escolheremos um e daremos o nome  $Q_3$ , onde escolhemos um ponto  $P_3 = (x_3, y_3)$ . Repetindo o processo, chegaremos a partição  $p_n$  e dentre os  $n^2$  subquadrados um deles será chamado  $Q_n$  com pelo menos três marcas distintas e, deste subquadrado, um ponto chamado  $P_n = (x_n, y_n)$ . Como  $(P_2, P_3, P_4, \dots, P_n, \dots)$  é uma sequência com elementos do quadrado  $I \times I$  e  $I \times I$  é compacto (*Proposição 3.10*), existe uma subsequência  $(P_{n_1}, P_{n_2}, \dots)$  convergente a  $P_0 = (x_0, y_0) \in I \times I$ .

Se algum vértice de alguma partição  $p_n$  for ponto fixo de  $f$ , o teorema está demonstrado. Suponha, então, que para toda partição  $p_n$  seus vértices não são fixados pela função  $f$ . Assim, para cada partição  $p_n$  iremos marcar todos os vértices com os números 1,2,3,4 do seguinte modo: primeiro, obtemos o ângulo  $\rho$ ,  $\rho \in [0, 2\pi]$ , determinado pelo vetor  $\overrightarrow{pf(p)}$  em relação ao eixo  $\overrightarrow{Ox}$ ; após, usamos os resultados da Tabela 4.1 sempre observando as condições do Lema 1.6 (as marcas nos vértices contidos nos lados do quadrado devem ser marcas iguais a uma das duas extremas do tal lado).

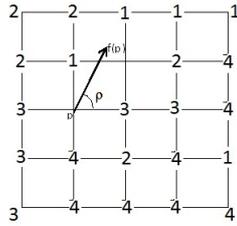


Figura 4.3: Exemplo de partição  $p_4$  com vértices marcados

Mostraremos que  $f(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$ . Suponha, por redução ao absurdo, que  $(x_0, y_0) \neq f(x_0, y_0)$ . Na figura 4.5, temos o quadrado  $Q_1$ , dividido em 4 partes, sendo uma delas contendo  $(x_0, y_0)$  e uma outra contendo  $f(x_0, y_0)$ . Como  $f$  é contínua, podemos encontrar uma  $\varepsilon$ -vizinhança de  $f(x_0, y_0)$  contendo todas as imagens de uma  $\delta$ -vizinhança de  $(x_0, y_0)$ . Então, para  $n$  suficientemente grande, o quadrado  $Q_n$  estará totalmente contido na  $\delta$ -vizinhança de  $(x_0, y_0)$  (se  $n \rightarrow \infty$ , então o comprimento dos lados dos quadrados tendem a zero) acarretando que os pontos de  $Q_n$  só podem ter no máximo duas marcas, contradizendo a escolha de  $Q_n$ . Portanto,  $f(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$ .

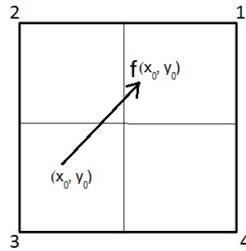


Figura 4.4:

Ângulo	Marcas
$\rho = 0$	2 ou 3
$0 < \rho < \frac{\pi}{2}$	3
$\rho = \frac{\pi}{2}$	3 ou 4
$\frac{\pi}{2} < \rho < \pi$	4
$\rho = \pi$	1 ou 4
$\pi < \rho < \frac{3\pi}{2}$	1
$\rho = \frac{3\pi}{2}$	1 ou 2
$\frac{3\pi}{2} < \rho < 2\pi$	2

Tabela 4.1: Marcação nos vértices de um quadrado com uma triangulação

## 5 Conclusão

Mostramos aqui como os matemáticos podem apresentar invenções para os curiosos e demonstrações sutis para os próprios matemáticos. Neste trabalho, deixamos claro que a Matemática não precisa ser somente uma ferramenta para poupar o trabalho dos matemáticos. Pensamos que a relação da Matemática clássica e a Matemática do dia-a-dia deve ser mais atraente, mais vivenciada. E que isso não fique apenas nas brincadeiras das primeiras séries do mundo escolar.

# Referências bibliográficas

1. SHASHKIN, Yu. A., Puntos fijos. Traduzido do russo por Antonio Molina García. Editorial Mir. URSS, 1991
2. STEWART, J. Cálculo, vol 1, 5ª edição, Pioneira Thomson Learning, São Paulo, 2005.
3. SILVA, Pollyane Vieira. Boletim de Iniciação Científica em Matemática. BIC-MAT/UNESP RIO CLARO. 2013
4. Poniachik, Jaime. Jogos de Sperner em *Explorando o ensino da Matemática - Atividades*, volume 2, p. 167-170. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica.