UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Fernando Cleber Villas Boas

Área de poliedros no cotidiano

São José do Rio Preto
2014

Fernando Cleber Villas Boas

Área de poliedros no cotidiano

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Profª. Drª. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado

São José do Rio Preto
2014

Villas Boas, Fernando Cleber
Área de poliedros no cotidiano / Fernando Cleber Villas Boas - São José do Rio Preto, 2014
53 f. : il.

Orientador: Michelle Ferreira Zanchetta Morgado
Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Geometria sólida - Estudo e ensino. 3. Poliedros. 4. Matemática - Metodologia. I. Morgado, Michelle Ferreira Zanchetta. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.
CDU – 513.3

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Fernando Cleber Villas Boas

Área de poliedros no cotidiano

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Profª. Drª. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado
UNESP – São José do Rio Preto
Orientadora

Prof. Dr. Juliano Gonçalves Oler
UFU – Uberlândia

Profª. Drª. Rita de Cassia Pavani Lamas
UNESP – São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
26 de setembro de 2014

Dedico este trabalho

A minha esposa Flavia, aos meus pais, José Geraldo e Edna, e aos meus filhos Miguel e Maria Júlia que em breve chegarão.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me carregado em seus braços nos momentos de desânimo.

A minha orientadora Profª. Drª. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado pelo apoio, incentivo e dedicação ao meu trabalho, e, principalmente, pela paciência e amizade.

A minha esposa, Flavia Regina Seron Villas Boas, que se manteve sempre companheira, incentivadora entre outras virtudes, durante todo o processo.

Aos meus queridos pais, José Geraldo Villas Boas e Edna Zequini Villas Boas, que me ensinaram que os estudos são a maior conquista que se pode ter, e ninguém consegue roubar.

A minha irmã, Flavia Villas Boas que desde as avaliações para ingresso esteve ao meu lado me apoiando e incentivando.

Aos meus tios, Uderlei e Sandra, que desde o ensino fundamental me apoiaram em meus estudos.

A minha avó paterna, Luzia de Oliveira Villas Boas, que sempre me incentivou, e me cobrou muito durante meus estudos.

Ao meu querido primo Ian, que me ajudou com algumas traduções de livros em inglês.

Ao meu querido aluno/professor, amigo, Thiago Tarraf Varella, que não poupou esforços, para me ajudar com o inglês e com a matemática, na reta final.

A todos aqueles que sempre me incentivaram.

Ao Profmat, pela oportunidade.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

“Olha devagar para cada coisa... Aceita o desafio de ver o que a multidão não viu. Em cascalhos disformes e estranhos diamantes sobrevivem solitários”

Pe. Fábio de Melo

RESUMO

O estudo deste trabalho está concentrado no conceito de área de poliedros utilizando planificações. Inicialmente damos o embasamento teórico, depois apresentamos uma sequência de atividades que familiariza os alunos com poliedros, apresentando exemplos do seu cotidiano, induzindo-os a identificar suas características, ensinando-os a classificá-los, a relacionar as superfícies poliedricas às suas representações no plano e trabalhar o conceito de área de poliedros através desta relação. Para finalizar apresentamos situações problemas do cotidiano, como aplicação deste conceito.

Palavras-chave: Poliedro. Planificação. Função Área.

ABSTRACT

The study of this work is concentrated on the concept of area of polyhedra using planning. Initially we give the theoretical basis, then we present a sequence of activities that familiarize students with polyhedra, presenting examples of their daily lives, inducing them to identify theirs characteristics, teaching them to classify them, to relate the polyhedral surfaces to representations in the plan and to work the area concept of polyhedra through this relationship. To conclude we present problems situations in the daily lives, as application of this concept.

Keywords: Polyhedron. Planning. Area Function.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

É provável que grande parte das pessoas tenha em mente que a Matemática consiste em aplicar regras, fórmulas e fazer cálculos. É muito provável também que esse tipo de ideia, tenha nascido de suas experiências com ela na escola. Para grande maioria dos estudantes as aulas de Matemática se resumem ao seguinte esquema: os professores “detentores do conhecimento” passam uma gama de informações em certo dia de aula, os alunos observam e, em seguida, fazem exercícios daquele assunto para treinarem o método, as fórmulas etc. Alguns educadores chamam essa aula de “paradigma do exercício”, que é uma aula considerada tradicional.

Ao contrário disso, alguns educadores têm contestado essa prática procurando destacar que a Matemática é muito mais do que fórmulas, procedimentos e algoritmos. Nesta direção, propõe-se uma metodologia que fuja do apenas decorar e aplicar fórmulas, mas sim que o aluno construa o conceito e saiba aplicar em algo contextualizado. Recomenda-se para isso o uso de materiais concretos, softwares matemáticos e jogos educativos.

Um assunto que normalmente é desenvolvido por muitos professores baseado somente com aplicação de fórmulas é a Geometria Espacial. Muitos professores começam esse assunto definido as figuras geométricas espaciais, dando suas características, subdividindo essas figuras em grupos, mostrando fórmulas relacionadas a eles e resolvendo exercícios de aplicação dessas fórmulas.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs):

> O pensamento geométrico desenvolve-se inicialmente pela visualização: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas. As figuras geométricas são reconhecidas por suas formas, por sua aparência física, em sua totalidade, e não por suas partes ou propriedades.
> (PCN: Matemática 1997, p. 127).

De encontro com a afirmação acima e na contramão, do que é feito tradicionalmente, esse trabalho propõe que as fórmulas de Geometria Espacial sejam deduzidas pelos alunos, de maneira totalmente intuitivamente, o que acreditamos que melhore muito o processo de ensino-aprendizagem.

A proposta deste trabalho foi propor um assunto do ensino básico, poliedros, estudando-o de maneira aprofundada, com uma sequência de atividades sobre este assunto na direção de fugir da aula tradicional e para que outros professores possam desenvolvê-la com seus alunos.

O trabalho está organizado em três capítulos. No primeiro capítulo é apresentada a fundamentação teórica, na qual definimos o que são poliedros, o que é planificação da superfície destes objetos e a existência e unicidade da função área, assuntos que fundamentam o que o foi desenvolvido nas unidades seguintes.

No capítulo 2 é descrita a sequência didática proposta em 3 atividades a respeito de poliedros e o conceito de área destes objetos.

No último capítulo é proposta uma situação problema do cotidiano, que visa não somente ter aprendido como calcular área de um poliedro, mas sim também aplicar em situações corriqueiras os conceitos estudados.

1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo vamos descrever os conceitos matemáticos abordados na proposta de atividades desenvolvida neste trabalho. Consideremos conhecidos os conceitos de Geometria Euclidiana Plana, (a menos de alguns casos específicos) que damos como referência [10], para abordarmos os conceitos que precisamos da Geometria Euclidiana Espacial.

A Geometria Euclidiana Espacial corresponde à teoria matemática que se encarrega de estudar as propriedades de objetos no espaço (Euclidiano) que não estão contidas em um plano (Euclidiano), chamados de "*figuras geométricas espaciais*". Estes estudos possuem origem na Grécia Antiga e na Mesopotâmia (cerca de 1000 anos a.C.). Pitágoras e Platão associavam o estudo da Geometria Espacial ao estudo da Metafísica e da religião. Contudo, foi Euclides que com sua obra "Os *Elementos*" (coleção de 13 livros) sintetizou os conhecimentos acerca do tema até os seus dias.

É muito comum encontrarmos figuras geométricas espaciais nas suas diferentes formas ao nosso redor como uma caixa de sapatos, uma caixa d'água, uma lata de óleo, um balão de festa junina, uma casquinha de sorvete, uma bola de futebol, entre outros. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais é necessária a sua exploração desde os primeiros ciclos do Ensino Fundamental. Na resolução de algumas situações-problema é imprescindível imaginar imagens e pensar em figuras, não sendo suficiente somente a realização dos cálculos ou a utilização do raciocínio lógico. Essa habilidade de visualizar figuras espaciais é tão importante quanto o raciocínio algébrico. Ao visualizar uma figura espacial a pessoa deve ser capaz de identificar suas diferentes vistas e reconhecer seus elementos.

Vamos trabalhar com um tipo específico de figuras geométricas espaciais, chamado de "*poliedro*", que terá um nome específico dependo dos elementos que contém. Na segunda seção utilizaremos um conceito matemático capaz de representar estes objetos do espaço em um plano. Na última seção descreveremos o conceito de área, com suas propriedades.

1.1. POLIEDROS

Para fixar algumas nomenclaturas, comecemos definindo um objeto no plano importante para a definição das figuras geométricas espaciais específicas que serão estudadas neste trabalho.

Consideremos a seguinte notação: dados os pontos A e B em um plano, denotemos por $\overline{AB}$ o segmento de reta com extremidades A e B e $\overrightarrow{AB}$ a semirreta com origem em A contendo B. Sendo O um outro ponto, denotemos por $A\hat{O}B$ o ângulo formado pelas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

Definição 1.1.1. Dados os pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, um *polígono* $A_1A_2\ldots A_n$ é a união dos segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ... , $\overline{A_{n-1}A_n}$ e $\overline{A_nA_1}$, satisfazendo as seguintes propriedades:

i. quaisquer dois destes segmentos interseccionam-se somente em suas extremidades;

ii. dois segmentos com mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.

Os pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são chamados de *vértices* do polígono, os segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_{n-1}A_n}$ e $\overline{A_nA_1}$ são chamados de *lados* do polígono e $A_n\hat{A}_1A_2, A_1\hat{A}_2A_3, \ldots, A_{n-2}\hat{A}_{n-1}A_n, A_{n-1}\hat{A}_nA_1$ são chamados de *ângulos* do polígono.

Definição 1.1.2. Uma *região poligonal plana* é o conjunto dos pontos em um plano que estão contidos no interior de todos os ângulos de um dado polígono neste plano. Um exemplo é apresentado na figura 1.

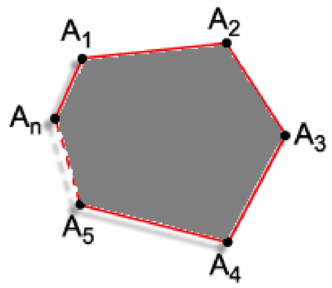


Figura 1: Região poligonal plana.

A partir disso podemos trazer mais duas definições, que seguem.

Definição 1.1.3. Um polígono é chamado *convexo* se ele está sempre contido em um dos semiplanos determinados pelas retas que contêm seus lados. (Figura 2)

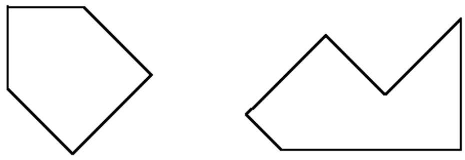


Figura 2: Exemplo de polígono convexo e não convexo.

Definição 1.1.4. Um polígono é dito *regular* se ele é convexo e tem todos os lados congruentes e todos os ângulos congruentes entre si. (Figura 3)

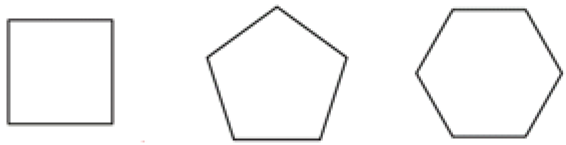


Figura 3: Exemplos de polígonos regulares.

Agora podemos definir os objetos no espaço importantes neste trabalho.

Definição 1.1.5. Um *poliedro* é uma figura geométrica espacial definida como uma região do espaço delimitado por um número finito de regiões poligonais planas, que não estão contidas em um mesmo plano chamadas *faces do poliedro*, tais que:

(a) a interseção de duas faces ou é vazia, ou é um vértice comum às duas, ou é um lado comum às duas;

(b) cada lado de uma face é lado de exatamente mais outra face.

O lado comum a duas faces de um poliedro é chamado de *aresta do poliedro* e cada vértice dos polígonos que compõe suas regiões poligonais planas é chamado de *vértice do poliedro*. (Figura 4)

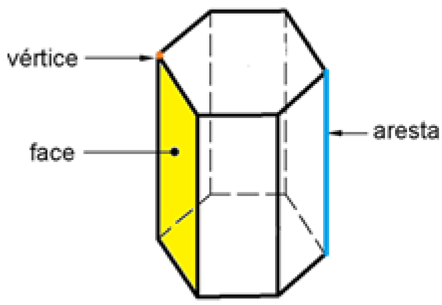


Figura 4: Exemplo de poliedro.

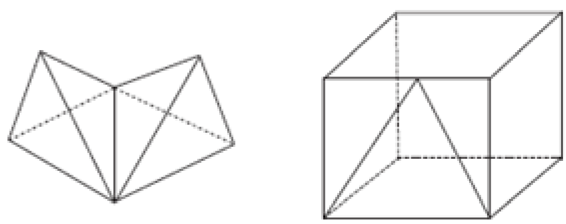


Figura 5: Figuras geométricas espaciais que não são poliedros.

Definição 1.1.6. *Superfície poliédrica* é um poliedro menos o seu interior.

Definição 1.1.7. Um poliedro é dito *convexo* quando o plano que contém cada face deixa as demais faces num mesmo semiespaço. (Figura 6)

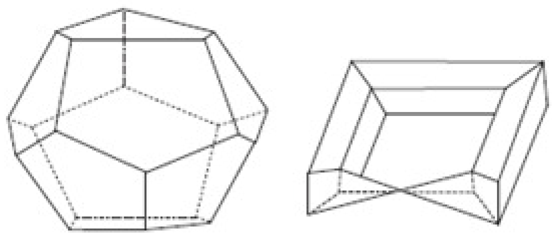


Figura 6: Poliedro convexo e não convexo.

Dependendo do posicionamento das suas regiões poligonais, alguns poliedros possuem nomenclaturas especiais, como veremos a seguir.

Definição 1.1.8. Um *prisma* é um poliedro que possui suas regiões poligonais planas caracterizadas da seguinte maneira: duas delas são definidas pelos polígonos $A_1A_2 \dots A_n$ pertencente a um plano α e $B_1B_2 \dots B_n$ pertencente a um plano β com α e β planos paralelos entre si e as retas determinadas por A_iB_i (com $i = 1 \dots n$) paralelas entre si. As demais regiões poligonais planas são determinadas pelos paralelogramos $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$,..., $A_nA_1B_1B_n$.

Essas regiões poligonais determinadas por paralelogramos, são chamadas de *faces laterais* do prisma e as regiões poligonais determinadas por $A_1A_2 \dots A_n$ e $B_1B_2 \dots B_n$ são chamadas de *bases* do prisma. (Figura 7)

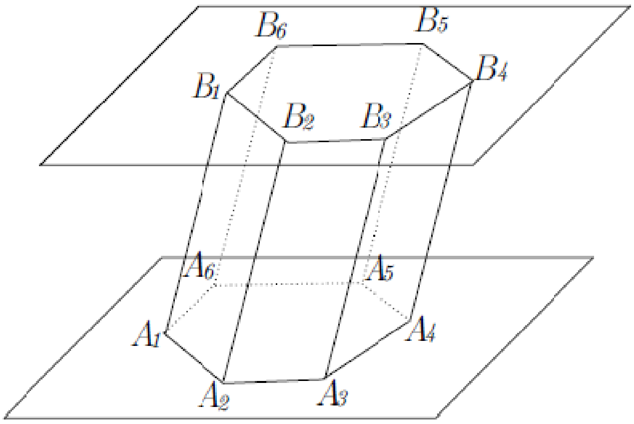


Figura 7: Exemplo de prisma.

A partir do fato das arestas laterais serem, ou não, perpendiculares às bases, temos que o prisma pode ser denominado *reto* ou *oblíquo*, respectivamente.

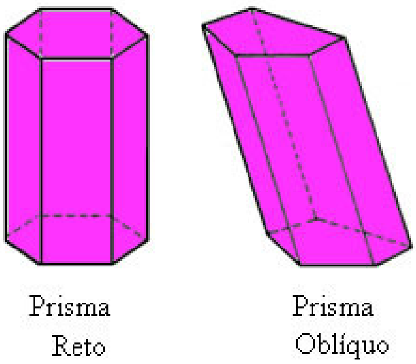


Figura 8: Exemplo de prisma reto e prisma oblíquo.

Um prisma também é nomeado a partir do polígono que forma sua base: o prisma diz-se *triangular*, se sua base for um triângulo, *quadrangular*, se sua base for um quadrado, *pentagonal*, se sua base for um pentágono e assim sucessivamente.

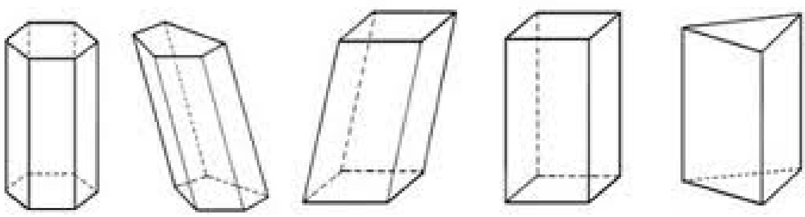


Figura 9: Prismas Hexagonal, Pentagonal, Quadrangular, Quadrangular e Triangular, respectivamente.

Definição 1.1.9. Um prisma é chamado de *paralelepípedo* se possui todas as faces laterais formadas por paralelogramos. Um paralelepípedo cujas faces são quadradas é chamado de *cubo*.

Observação. Pelo fato de as faces laterais de um prisma serem paralelogramos, temos que as bases de um prisma são polígonos congruentes e as medidas de suas arestas laterais são iguais.

Definição 1.1.10. Uma *pirâmide* é um poliedro que possui suas regiões poligonais planas caracterizadas da seguinte maneira: uma delas é um polígono $A_1A_2 \dots A_n$, pertencente a um plano α e, considerando V um ponto exterior ao plano α, as demais regiões poligonais planas são triângulos $VA_1A_2, VA_2A_3, \dots, VA_{n-1}A_n \; e \; VA_nA_1$. As regiões determinadas por $VA_1A_2, VA_2A_3, \dots, VA_{n-1}A_n, VA_nA_1$ são chamadas de *faces laterais* e a região determinado por $A_1A_2 \dots A_n$ é chamada de *base* da pirâmide. (Figura 10)

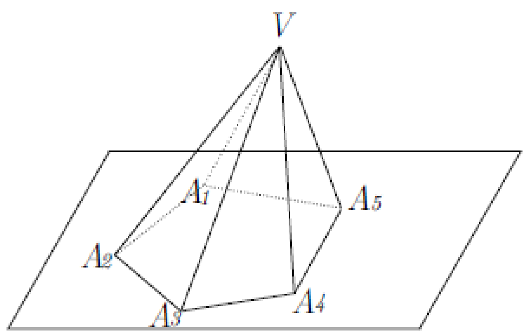


Figura 10: Exemplo de pirâmide.

As pirâmides são nomeadas a partir do polígono que forma sua base: a pirâmide diz-se *triangular*, se sua base for um triângulo, *quadrangula*r, se sua base for um quadrado, *pentagonal*, se sua base for um pentágono e assim sucessivamente. (Figura 11)

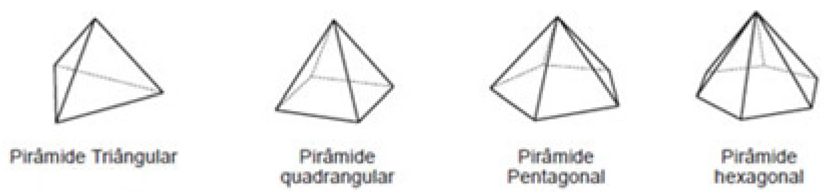


Figura 11: Nomenclatura de pirâmides.

Uma outra forma de denominar um poliedro convexo P é considerar a quantidade de faces F que ele possuem, por exemplo:

Se $F = 4$, P é chamado *Tetraedro*.
Se $F = 6$, P é chamado *Hexaedro.*
Se $F = 8$, P é chamado *Octaedro*.
Se $F = 12$, P é chamado *Dodecaedro*.
Se $F = 20$, P é chamado *Icosaedro*.

Observação. Neste caso, F representa o total de faces laterais e bases.

Definição 1.1.11. Seja P um poliedro, com V vértices, A arestas e F faces, o número $\chi(P) = V - A + F$ é chamado de *característica de Euler-Poincaré* do poliedro *P*.

Teorema 1.1.12. Em qualquer poliedro convexo, sua característica de Euler-Poincaré é 2.

Demonstração. Considere P um poliedro convexo com V vértices, F faces e A arestas e $P´$ como sendo P menos uma de suas faces. Então $P´$ é uma reunião finita de polígonos planos convexos tais que:
i) cada lado de polígono é comum no máximo a dois polígonos;
ii) havendo lados de polígonos que estão em um só polígono, eles devem formar uma única poligonal fechada, plana ou não, chamada contorno;
iii) a intersecção de dois polígonos ou é vazia ou é um vértice comum ou uma aresta comum aos dois polígonos;
iv) o plano de cada polígono deixa os demais num mesmo semiespaço.

Por indução finita referente ao número de faces, vamos provar primeiramente que vale a relação:

$$V´ - A´ + F´ = 1,$$

onde $V´$ é o número de vértices de $P´$, $A´$ é o número de arestas de $P´$, $F´$ é o número de faces do poliedro $P´$.

Seja $F´ = 1$. Neste caso $P´$ se reduz a um polígono plano convexo, então $V´ = A´$. Logo $V´ - A´ + F´ = 1$, como desejávamos.

Agora considere como verdade $V' - A' + F' = 1$, para o poliedro convexo P' de F' faces, V' vértices e A' arestas com $F' > 1$. Devemos provar que é válida para $F' + 1$ faces.

Acrescentando a P′ uma face de *p* arestas (logo *p* vértices) e considerando que *q* dessas arestas coincidem com arestas já existentes, obtemos um novo objeto com F_a faces, A_a arestas e V_a vértices tais que:

$F_a = F' + 1;$

$A_a = A' + p - q$ (q arestas coincidiram);

$V_a = V' + p - (q + 1)$ (q arestas coincidindo, q +1 vértices coincidem).

Ao montarmos a expressão $V_a - A_a + F_a$ e substituindo os valores acima temos:

$$V_a - A_a + F_a = V' + p - (q + 1) - (A' + p - q) + F' + 1 =$$
$$= V' + p - q - 1 - A' - p + q + F' + 1 = V' - A' + F'.$$

Como $V_a - A_a + F_a = V' - A' + F'$, temos que $V - A + F$, não é alterada quando adicionamos ou retiramos alguma face desse objeto.

Por hipótese de indução temos $V' - A' + F' = 1$, logo $V_a - A_a + F_a = 1$, como desejávamos.

Comparando P e P' temos que $V' = V$, $A' =$ A e $F' = F - 1$. Logo

$$V - A + F = V' - A' + (F' + 1) = V' - A' + F' + 1 = 2. \qquad \square$$

Definição 1.1.13. Chamamos de *figuras geométricas espaciais não poliédricas* aquelas que não são poliedros.

Observamos que muitas delas tem características especiais e também aparecem frequentemente no nosso cotidiano.

Algumas dessas figuras geométricas espaciais importantes são: *Cilindro, Cone e Esfera,* que não são objetos desse trabalho. (Figura 12)

Figura 12: Figuras geométricas espaciais não poliédricas.

1.2. PLANIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES POLIÉDRICAS.

Primeiramente vamos definir importantes transformações no plano, ou seja, funções bijetoras entre planos.

Para fixar notação, usamos AB significando a distância entre os pontos A e B, que é a medida do segmento $\overline{AB}$ e dizemos que um ponto O está entre A e B, $A - O - B$, se $AB = OA + OB$.

Definição 1.2.1. Sejam α e β planos no espaço e T uma aplicação bijetora entre estes planos. Dizemos que T é uma *isometria* se para qualquer par de pontos A e B de α vale a relação $T(A)T(B) = AB$.

Teorema 1.2.2. Uma isometria $T: \alpha \to \beta$ possui as seguintes propriedades:

(a) T leva pontos colineares em pontos colineares. Além disso, se A, B e C são pontos tais que B está entre A e C, então $T(B)$ está entre $T(A)$ e $T(C)$. Como consequências, temos que T leva retas em retas e leva ângulos em ângulos.

(b) T preserva medidas de ângulos, ou seja, para qualquer ângulo θ, $m\big(T(\theta)\big) = m(\theta)$.
Em particular, T leva retas perpendiculares em retas perpendiculares.

(c) T preserva paralelismo entre retas, isto é, se r e s são retas paralelas, então $T(r)$ e $T(s)$ também são retas paralelas.

Demonstração. a) Consideremos os pontos colineares A, B e C tais que $A - B - C$ e sejam A', B' e C' suas imagens pela isometria T. (Figura 13)

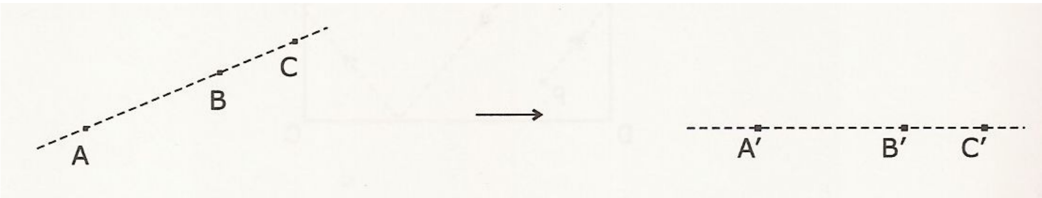


Figura 13: Isometria preserva a colinearidade dos pontos.

Se A', B' e C' não fossem colineares, então determinariam um triângulo, o triângulo $A'B'C'$. Pelo Teorema da Desigualdade Triangular, obteríamos a relação

$A'C' < A'B' + B'C'$. Como T é isometria teríamos $AC < AB + BC$, o que contradiria a hipótese $A - B - C$, que é equivalente a $AC = AB + BC$.

Logo temos $A'B' + B'C' = A'C'$. (1)

Portanto A' , B' e C' são colineares.

Vamos provar que A', B' e C' são tais que $A' - B' - C'$.

Suponhamos que B' não estivesse entre A' e C'. Então teríamos $B' - A' - C'$ ou $A' - C' - B'$.

Se valesse $B' - A' - C'$, então teríamos $B'A' + A'C' = B'C'$.

Mas, por (1), temos $A'B' + B'C' = A'C'$.

Disso resulta $A'B' + (A'B' + A'C') = B'C'$, ou seja, $2A'B' = 0$, e portanto A' e B' coincidiriam, contrariando a hipótese.

Para o caso $A' - C' - B'$ a demonstração é análoga.

Portanto B' está entre A' e C'.

b) Consideremos o ângulo θ com vértice O e sua imagem θ' um ângulo com vértice O'. (Figura 14)

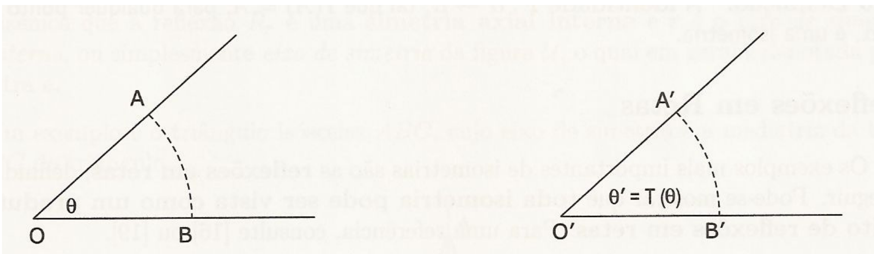


Figura 14: Isometria preserva medida de ângulos.

Escolhamos pontos A e B, um em cada lado de θ, tal que $OA = OB$. É claro que, se A' e B' são as imagens de A e B pela isometria T, temos $O'A' = O'B'$.

Ainda pela definição, temos $A'B' = AB$.

Logo, pelo caso L.L.L. de congruência de triângulos, os triângulos AOB e $A'O'B'$ são congruentes, sendo congruentes portanto os ângulos θ e θ'.

c) Consideremos as retas paralelas r e $s \subset \alpha$ e suas imagens $r' = T(r) \subset \beta$ e $s' = T(s) \subset \beta$.

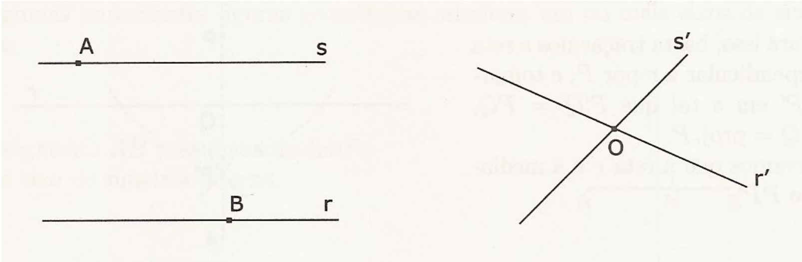


Figura 15: Isometria preserva paralelismo de retas.

Suponhamos, por absurdo, que as retas r' e s' sejam concorrentes no ponto O, com $O = T(A) = T(B)$, sendo A ponto de s e B ponto de r. Isso contraria a definição de isometria visto que A e B são pontos distintos do plano.

Logo r' e s' são retas paralelas. □

Definição 1.2.3. Dizemos que duas figuras planas F e G são *isométricas* se existe uma isometria *T* entre os planos que as contém tais que $T(F) = G$.
Notação: $F \equiv G$

Observação. Podemos concluir que figuras isométricas possuem mesmo formato e tamanhos idênticos. No caso de regiões poligonais planas significa que os polígonos correspondentes são congruentes.

Definição 1.2.4. Seja $\mathscr{F}$ uma superfície poliédrica com n faces $\mathscr{F}_1,\dots,\mathscr{F}_n$. Uma planificação de $\mathscr{F}$ é uma região poligonal plana obtida da união de n regiões poligonais $F_1, \dots, F_n$ isométricas as faces $\mathscr{F}_1,\dots,\mathscr{F}_n$ respectivamente, tais que:
i) $F_i \cap F_j,\ i \neq j$ é vazia, um ponto ou um segmento;
ii) $F_i \cap F_j$ é vazia se $\mathscr{F}_i \cap \mathscr{F}_j$ é vazia, $i \neq j$.

Por simplicidade vamos escrever planificação de poliedro significando a planificação da sua superfície poliédrica correspondente.

Observação. A grosso modo, uma planificação de uma superfície poliédrica é um processo de “recortes” sobre suas arestas de modo a obter um único objeto que está contido em um plano.

Devido a estas escolhas, existem várias planificações de uma mesma superfície poliédrica, que podemos visualizar nos exemplos a seguir.

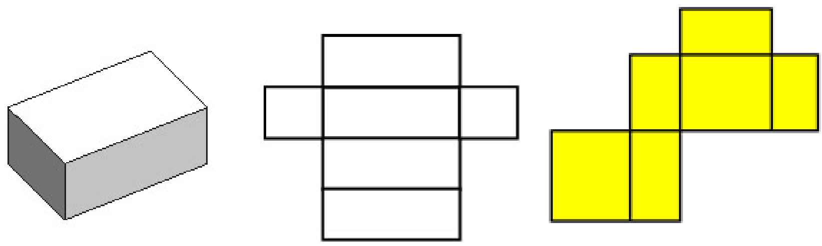


Figura 16: Superfície do paralelepípedo e algumas planificações.

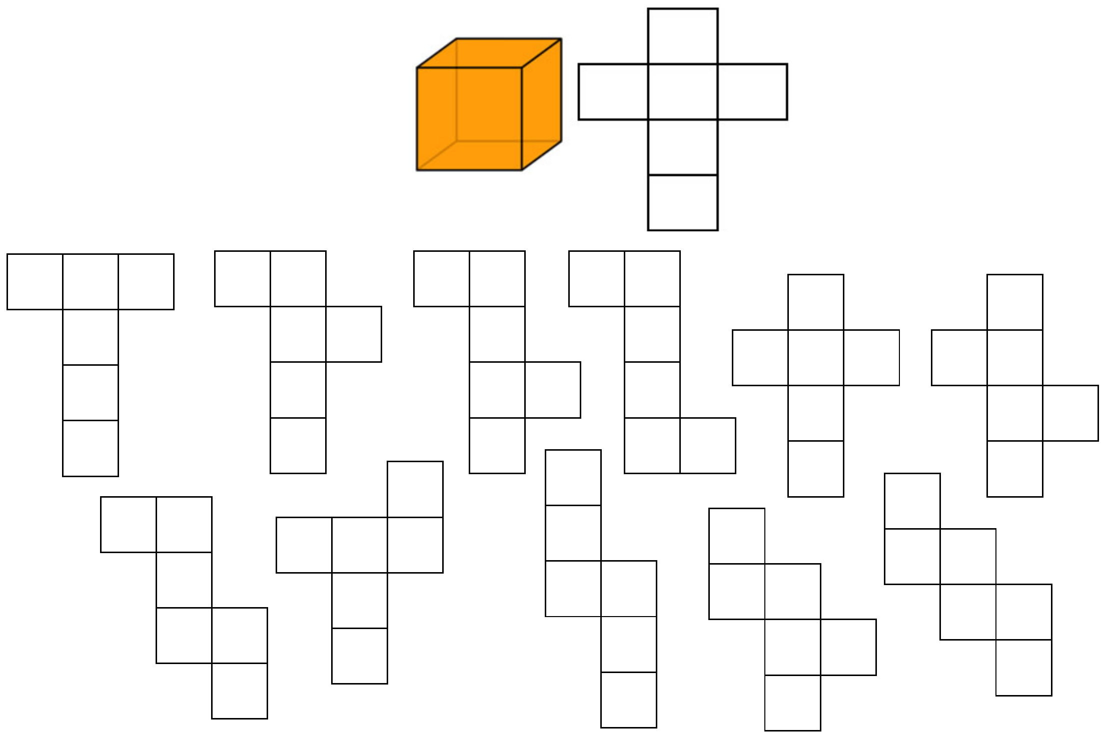


Figura 17: Superfície do cubo e algumas planificações.

Mais alguns exemplos de planificações:

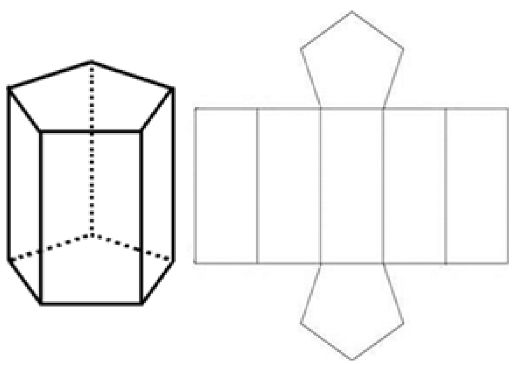


Figura 18: Superfície do prisma Pentagoanal.

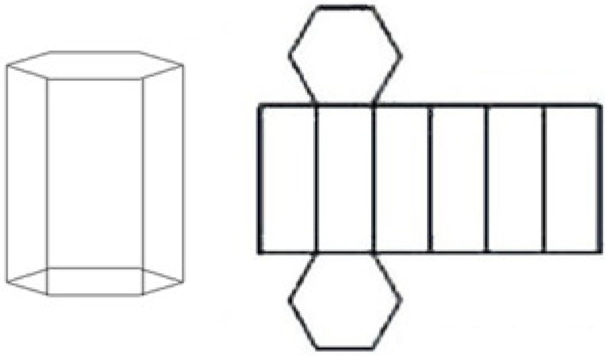


Figura 19: Superfície do prisma Hexagonal.

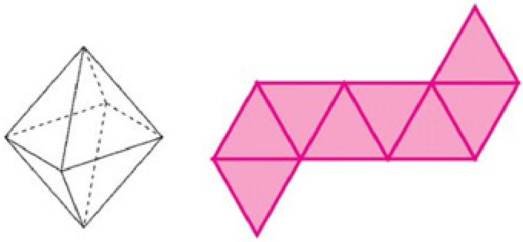


Figura 20: Superfície do octaedro.

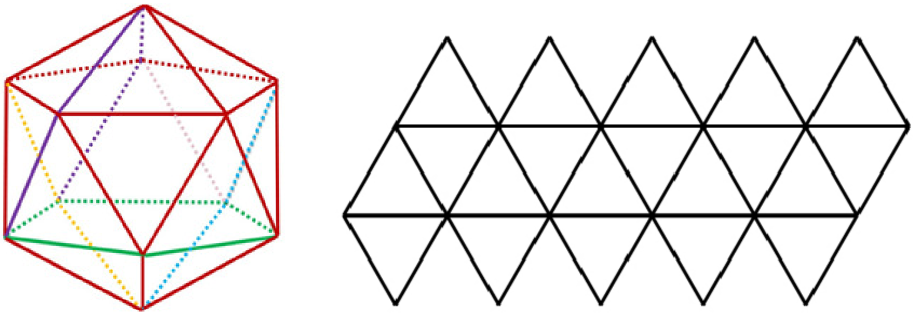


Figura 21: Superfície do icosaedro.

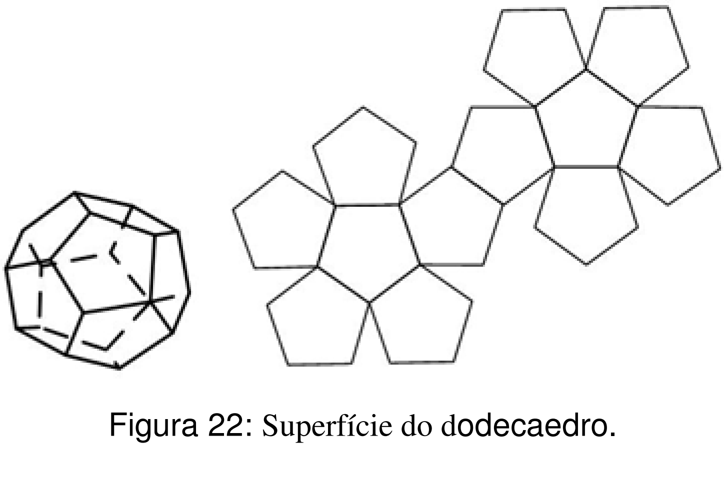


Figura 22: Superfície do dodecaedro.

1.3. FUNÇÃO ÁREA

No Egito Antigo, a agricultura da civilização floresceu com base no rio Nilo. De acordo com o famoso livro “History”, escrito pelo historiador grego Herodotus (484 a.C.-425 a.C.), e traduzido do grego por Pierre Henri Larcher [7], pelas regras do Egito as terras deveriam ser distribuídas igualmente entre os fazendeiros do reino. Acreditava-se que a inundação anual do Nilo exigia o desenvolvimento de habilidades técnicas para o levantamento das terras e, como resultado, a Geometria nasceu. De fato, nos tempos antigos o termo “geometria” significava “a medida da terra”.

Vamos imaginar dois fazendeiros, no Egito antigo, que possuíam cada um uma parte de terra. Imagine que eles quisessem determinar se as partes tinham o mesmo tamanho. Naquela época as pessoas pagavam taxas baseado no tamanho de suas partes de terra. Era um assunto muito importante, pois ninguém gostaria de pagar mais impostos do que o necessário. Se duas partes de terra têm tamanhos diferentes e pagam o mesmo valor, alguém estaria sendo injustiçado e provavelmente iria reclamar sobre isso. Assim surge a pergunta: como comparar as partes de terra de dois fazendeiros?

Se as partes de terra tivessem exatamente o mesmo formato, seria mais fácil fazer as comparações. A solução encontrada para partes de terra de mesmo formato foi um método chamado de “*levantamento triangular*”, na qual a terra era decomposta em vários triângulos, e era verificada a congruência destes por métodos já conhecidos, para determinar enfim se eles tinham o mesmo tamanho.

Já para partes de terra em formatos distintos, a solução era tentar decompor as duas terras em um mesmo número de peças de tal forma que as peças de uma parte de terra seriam as “mesmas” das peças da outra parte, como se exemplifica na figura 23.

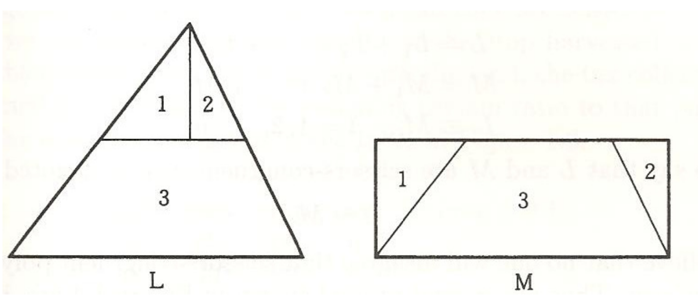


Figura 23: Decomposição em peças de mesmo formato.

A seguir, vamos formalizar este procedimento.

Definição 1.3.1. Dizemos que uma região poligonal plana K pode ser *decomposta* em n regiões poligonais planas $K_1, K_2, \dots, K_n$, e denotamos por $K = K_1 + K_2 + \cdots + K_n$, se

i) $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$

ii) $K_i \cap K_j$ é vazio, um número finito de pontos ou segmentos.

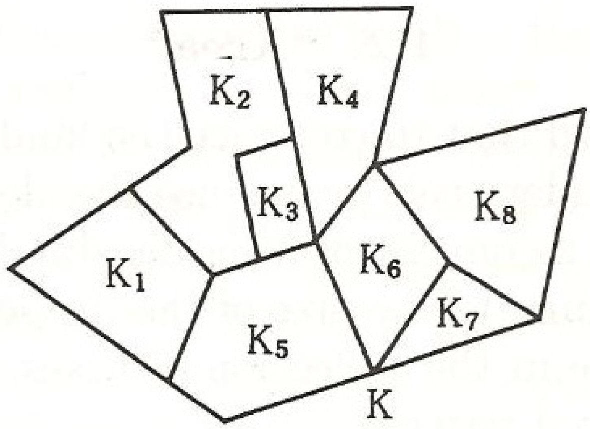


Figura 24: Decomposição em regiões poligonais.

Definição 1.3.2. Duas regiões poligonais planas L e M são chamadas *congruentes por recortes,* se elas podem ser decompostas da forma $L = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$, e $M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n$ com L_i isométrica a M_i $(L_i \equiv M_i)$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Notação: L ~ M.

Para facilitar a escrita, vamos usar simplesmente o nome do polígono que determina uma região poligonal plana para os próximos conceitos e resultados.

Partindo dos conceitos anteriores, é possível demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 1.3.3. Todo triângulo é congruente por recortes a algum retângulo.

Demonstração. Dado um triângulo qualquer, cortando a altura relativa ao seu maior lado em dois segmentos de mesma medida, denotada por m, através de uma perpendicular à esta altura, decompomos ele em dois triângulos e dois quadriláteros.

Seja n a medida do seu maior lado e considere o retângulo de lados medindo m e n, como na figura 25.

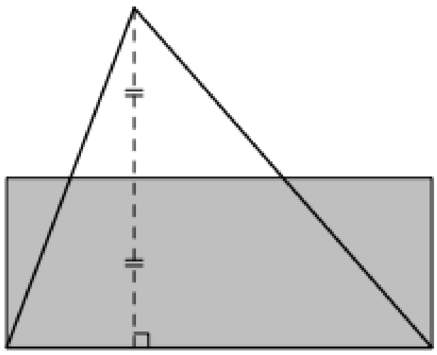


Figura 25: Triângulo congruente por recortes a um retângulo.

Pelo caso de congruência LAA temos a congruência dos dois pares de triângulos que foram divididos o triângulo inicial e o retângulo. Logo, o triângulo inicial é congruente por recortes a este retângulo. $\square$

Seja $\mathscr{P}$ o conjunto de todas as regiões poligonais no plano euclidiano.

Definição 1.3.4. Para toda região poligonal K em $\mathscr{P}$, definimos a *área* de K, denotando por $m(K)$, como sendo um número real que satisfaz as seguintes condições:

1) $m(K) > 0$;

2) se K_1 e K_2 são congruentes, então $m(K_1) = m(K_2)$;

3) se K é decomposto em $K_1, K_2, \ldots., K_n$, então $m(K) = m(K_1) + m(K_2) + \cdots. + m(K_n)$;

4) $m(K) = 1$ se K é determinado por um quadrado cujo lado tem uma unidade de medida.

Proposição 1.3.5. Se L e M são congruentes por recortes então $m(L) = m(K)$.

Demonstração. Se L e M são congruentes por recortes, então $L = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$ e $M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n$ com $L_i \equiv M_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Pela condição 2, $m(L_i) = m(M_i)$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Assim, pela condição 3, temos

$$m(L) = m(L_1) + m(L_2) + \cdots + m(L_n) = m(M_1) + m(M_2) + \cdots + m(M_n) = m(M). \qquad \square$$

A princípio não sabemos se tal número existe e é único. Se isso ocorre, podemos definir a função $m: \mathcal{P} \to \mathbb{R}_+$, chamada de *função área***.**

Comecemos supondo a existência e mostrando a unicidade da função área para alguns polígonos específicos (lembremos que isso é um abuso de notação, pois na verdade o correto é usar regiões poligonais)

Proposição 1.3.6. Se K é um retângulo de comprimento a e largura b, então $m(K) = a.b$.

Demonstração. Uma vez que os valores de a e b são escolhidos, o valor de $m(K)$ depende apenas de a e b, pela condição 2, uma vez que todos os retângulos de comprimento a e largura b são congruentes. Assim, vamos denotar $m(K) = f(a, b)$, que é uma função em duas variáveis. Novamente pela condição 2, $f(a, b) = f(b, a)$. Se K pode ser decomposto em K_1 (retângulo de comprimento a_1 e largura b) e K_2 (retângulo de comprimento a_2 e largura b), onde $a_1 + a_2 = a$, aplicando a condição 3 obtemos $f(a, b) = m(K) = m(K_1) + m(K_2) = f(a_1, b) + f(a_2, b)$. (Figura 26)

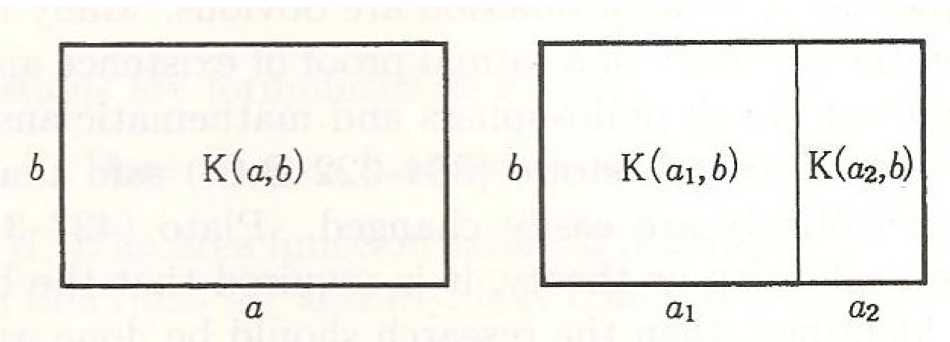


Figura 26: Retângulo e sua decomposição.

Isso mostra que a função $f(a, b)$ satisfaz as seguintes condições:

$1'$ (Positividade) $f(a, b) > 0$ para todo $a, b > 0$;

$2'$ (Simetria) $f(a, b) = f(b, a)$ para todo $a, b > 0$;

$3'$ (Aditividade) $f(a_1 + a_2, b) = f(a_1, b) + f(a_2, b)$ para todo $a_1, a_2, b > 0$;

$4'$ $f(1,1) = 1$.

Mostremos que se a função f, satisfaz as condições $1'$, $2'$, $3'$ e $4'$, então $f(a, b) = a.b$ para todo a, $b > 0$. Isso será feito em quatro etapas.

Etapa 1. Vamos mostrar que $f(m,n) = m.n$, para todo número natural m e n.

Se m e n são números naturais, então pelas propriedades aditiva e simetria temos

$$f(m,n) = f(\underbrace{1+\cdots+1}_{m \text{ vezes}}, n) = mf(1,n) = mf(n,1) = mf\left(\underbrace{1+\cdots+1}_{n \text{ vezes}}, 1\right) = mnf(1,1)$$

Como $f(1,1) = 1$, temos que $f(m,n) = mn$.

Etapa 2. Vamos mostrar agora que se a e b são números racionais, então $f(a,b) = a.b$.

Tomemos $a = \frac{p}{q}$ e $b = \frac{r}{s}$, com $p, q, r\ e\ s$ números naturais, $q \neq 0$ e $s \neq 0$. Então,

$$f(a,b) = f\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right) = pr\, f\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{s}\right).$$

Por outro lado,

$$f(1,1) = f\left(q\left(\frac{1}{q}\right), s\left(\frac{1}{s}\right)\right) = qs\, f\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{s}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{s}\right) = \frac{1}{qs} f(1,1).$$

Assim,

$$f(a,b) = \frac{pr}{qs} f(1,1) = \frac{pr}{qs} = \frac{p}{q} . \frac{r}{s} = ab.$$

Etapa 3. Vamos mostrar que se $a \leq a'$ e $b \leq b'$, então $f(a,b) \leq f(a',b')$.

Se $a = a'$ e $b = b'$, então é obvio que $f(a,b) = f(a',b')$.

Se $a < a'$ e $b = b'$, então

$$f(a',b) = f(a + (a' - a), b) = f(a,b) + f(a' - a, b) > f(a,b).$$

Se $a = a'$ e $b < b'$, então

$$f(a,b') = f(b',a) > f(b,a) = f(a,b).$$

Se $a < a'$ e $b < b'$, então

$$f(a',b') > f(a,b') > f(a,b).$$

Etapa 4. Sejam a e b números reais positivos. Então, pela densidade dos números racionais, para cada número positivo ε, existem números racionais positivos a_1, a_2, b_1, b_2, tais que

$$a - \varepsilon < a_1 \leq a \leq a_2 < a + \varepsilon \text{ e } b - \varepsilon < b_1 \leq b \leq b_2 < b + \varepsilon.$$

Uma vez que $f(a_1 b_1) \leq f(a,b) \leq f(a_2 b_2)$, temos

$$(a-\varepsilon).(b-\varepsilon) < a_1 b_1 \leq f(a,b) \leq a_2 b_2 < (a+\varepsilon).(b+\varepsilon).$$

Portanto,

$$ab - \varepsilon(a+b-\varepsilon) < f(a,b) < ab + \varepsilon(a+b+\varepsilon).$$

Desde que ε seja qualquer número positivo pequeno, com esse ε tendendo a 0, obtemos $f(a,b) = a.b$. □

Proposição 1.3.7. Se K é um triângulo com lado maior medindo a e altura relativa a esse lado medindo b, então $m(K) = \frac{a.b}{2}$.

Demonstração. Usando o Teorema 1.3.3., K é congruente por recortes a um retângulo R de lados medindo a e $\frac{b}{2}$. Pela Proposição1.3.5. temos que $m(K) = m(R)$. Como pela proposição anterior $m(R) = a.\frac{b}{2} = \frac{a.b}{2}$, então $m(K) = \frac{a.b}{2}$. □

Proposição 1.3.8. Se K é um triângulo, então $m(K) = \frac{b.h}{2}$, onde b é a medida de um lado qualquer de K e h é a altura relativa a este lado.

Demonstração. Pela proposição anterior basta mostrar que num triângulo, o produto de cada um de seus lados pela altura relativa a este lado é constante.

Denotemos $K = ABC$, onde A, B e C são os vértices do triângulo K, com AH_a, BH_b e CH_c as alturas relativas aos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente.

Note que os triângulos AH_aC e BH_bC retângulos em H_a e H_b, respectivamente, são semelhantes pelo caso de semelhança AA. Logo, vale a relação $\frac{AH_a}{BH_b} = \frac{AC}{BC}$, ou seja, $BC.AH_a = AC.BH_b = k$.

Analogamente, demonstramos que $AB.CH_c = k$, como queríamos. □

Assim, se toda região poligonal pode ser decomposta em regiões triangulares e se uma função área existe, pela condição 3 e a proposição anterior ela deve ser única.

Para provar a existência vamos definir uma função em $\mathscr{P}$ tal que para cada região poligonal K associa a soma das áreas das regiões triangulares de uma decomposição de K, definida como na Proposição 1.3.7.

Para mostrar que esta função está bem definida precisamos mostrar que ela não depende da decomposição de K em triângulos e para que esta seja a função área, ela precisa satisfazer as quatro condições da definição de função área, provando assim a sua existência.

Definição 1.3.9. Uma *triangulação* de K é uma decomposição triangular $K = \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n$, onde interior dos lados de cada Δ_i não contém vértices de nenhum outro triângulo.

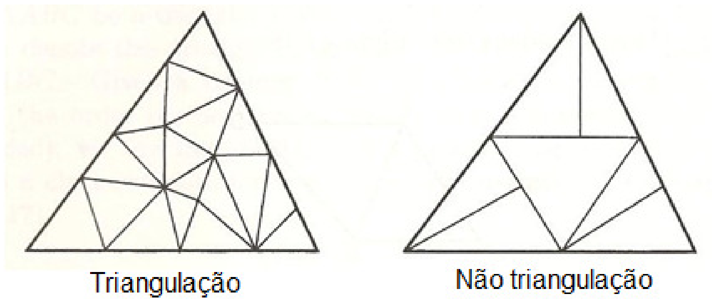


Figura 27: Decomposição triangular.

Teorema 1.3.10. Todo polígono tem uma triangulação.

Demonstração. Provamos isso por indução sobre o número de vértices n do polígono K.

Se n = 3, então K é um triângulo, fato que é trivial.

Para n > 3 vamos assumir que o teorema é verdadeiro para todos os polígonos com menos de n vértices. Como todo polígono com mais de 3 vértices tem pelo menos uma diagonal que divide-o em dois polígonos K_1 e K_2 tais que $K = K_1 + K_2$ (ver referência [5] – p. 84). Como ambos K_1 e K_2 têm menos que n vértices, eles podem ser triangulados pela hipótese de indução e isso dá uma triangulação a K. □

Denotemos por $\Delta[ABC]$ um triângulo com vértices A, B e C, onde a ordem dos vértices está fixada desta maneira.

Definição 1.3.11. Dado um triângulo $\Delta[ABC]$, considerar um caminho no triângulo seguindo a ordem dada pelos vértices (movimento no sentido anti-horário) é dizer que o triângulo possui *orientação positiva.* Se é no sentido horário, dizemos que ele possui *orientação negativa*. (Figura 28)

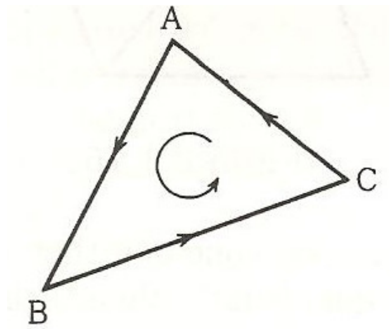


Figura 28: Triângulo orientado positivamente.

Notação: Se $\Delta[ABC]$ tem uma orientação, denotemos por

$$[ABC] = \begin{cases} \text{área do } \Delta ABC & (\Delta[ABC] \text{ tem orientação positiva}), \\ (-1)\ x \text{ área do } \Delta ABC & (\Delta[ABC] \text{ tem orientação negativa}). \end{cases}$$

Observação. Se dois triângulos ΔABC e $\Delta DCB,$ com orientações, têm apenas o lado $\overline{BC}$ em comum, então as orientação de ΔABC e ΔDCB são as mesmas. (Figura 29)

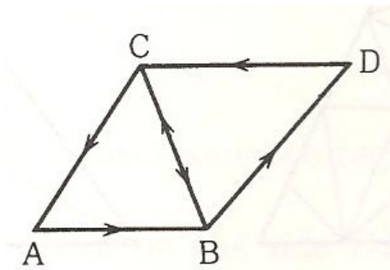


Figura 29: Triângulos orientados.

Lema 1.3.12. Dado o ΔABC e um ponto D no lado $\overline{BC}$, temos,

$$[ABC] = [ABD] + [ADC].$$

De maneira geral, se uma sequência de pontos $B, D_1, D_2, \ldots, D_n, C$ é dada no lado $\overline{BC},$ então $[ABC] = [ABD_1] + [AD_1D_2] + \cdots + [AD_n\mathrm{C}]$.

Demonstração. Em primeiro lugar se $\Delta[ABC]$ tem orientação positiva, então ambos os triângulos $\Delta[ABD]$ e $\Delta[ADC]$ também tem orientação positiva, então $[ABD]$ e $[ADC]$ são positivos.

Como $\Delta[ABC] = \Delta[ABD] + \Delta[ADC]$, então $[ABC] = [ABD] + [ADC]$.

Se o $\Delta[ABC]$ tem orientação negativa, então ambos os triângulos $\Delta[ABD]$ e $\Delta[ADC]$ também têm orientação negativa e, com isso, $[ABD]$ e $[ADC]$ são negativos. Assim,

$[ABC] = -\acute{a}rea\ de\ \Delta[ABC] = -(\acute{a}rea\ \ de\ \Delta[ABD] + \acute{a}rea\ de\ \Delta[ADC]) = [ABD] + [ADC]$

Para a sequência de pontos $D_1, D_2, \dots, D_n$ no lado $\overline{BC}$, basta aplicar a ideia acima indutivamente. $\square$

Lema 1.3.13. Dado o ΔABC, se O é um ponto no exterior do triângulo ΔABC e que não encontra-se nos lados e nem nos prolongamentos dos lados do triângulo ΔABC, então

$$[ABC] = [OAB] + [OBC] + [OCA].$$

Demonstração. Nestas condições, existe um vértice do triângulo cuja reta definida por este vértice e pelo ponto O intersecciona o lado definido pelos outros dois vértices. Sem perda de generalidade, seja A este vértice. Assim a reta definida por A e O intersecciona o lado $\overline{BC}$ em um ponto D. (Figura 30)

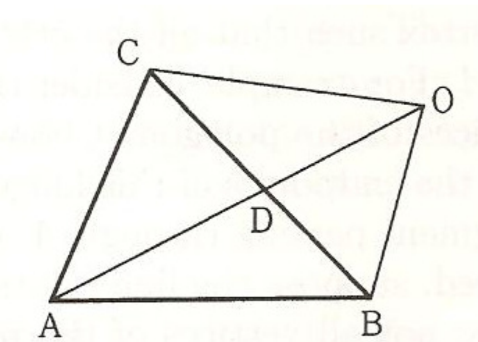


Figura 30: Formação do paralelogramo.

Pelo lema anterior temos $[OAB] = [OBD] + [DAB]$, $[OBC] = -[OCB] = -[OCD] - [ODB]$ e $[OCA] = [OCD] + [CAD]$

Somando as equações temos

$[OAB] + [OBC] + [OCA] = [OBD] + [DAB] - [OCD] - [ODB] + [OCD] + [CAD] = [DAB] + [CAD] = [ABC]$. $\square$

Lema 1.3.14. Para qualquer triangulação $\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n$ do triângulo ΔABC, a área do ΔABC é igual à soma das áreas dos triângulos Δ_k $(k = 1, 2, \ldots n)$.

Demonstração. Denotemos $\Delta_k = \Delta D_k E_k F_k$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que todos os triângulos têm orientação positiva, pois se necessário podemos alterar a ordem de seus vértices.

Seja O um ponto fora do ΔABC, que não pertence aos lados dos triângulos ΔABC e $\Delta D_k E_k F_k$, $(k = 1, 2, \ldots n)$, nem aos prolongamentos destes lados.

Pelo Lema 1.3.13. a área do $\Delta D_k E_k F_k$ é dado pela fórmula

$$\acute{a}rea\ do\ \Delta D_k E_k F_k = [D_k E_k F_k] = [OD_k E_k] + [OE_k F_k] + [OF_k D_k].$$

Portanto a soma das áreas dos triângulos $\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n$ é dada por

$$soma\ das\ \acute{a}reas\ dos\ \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n = \sum_{k=1}^{n} ([OD_k E_k] + [OE_k F_k] + [OF_k D_k])$$

Cada termo da segunda soma é da forma $[ODE]$, onde $\overline{DE}$ é um dos lados dos triângulos $\Delta D_k E_k F_k$ $(k = 1, 2, \ldots n)$, que está no interior ou no perímetro do triângulo ΔABC .

Se $\overline{DE}$ está no interior ele aparece duas vezes na segunda soma, nos termos correspondentes às áreas do $\Delta[ODE]$ e do $\Delta[OED]$.

Se o lado de forma $\overline{DE}$ pertence ao perímetro do triângulo ΔABC , então $\overline{DE}$ aparece apenas uma vez em $[OED]$.

Uma vez que $[ODE] + [OED] = 0$, na soma de todas as áreas acima na forma $[ODE]$ se anulam se $\overline{DE}$ está dentro do triângulo ΔABC e apenas as áreas de triângulos $\Delta[ODE]$ onde os lados da forma $\overline{DE}$ estão no perímetro do ΔABC permanecem.

Agora ordenemos os vértices da triangulação que estão no perímetro do ΔABC: $A, A_1, A_2, \ldots, A_l, B, B_1, \ldots, B_m, C, C_1, C_2, \ldots, C_n$. (Figura 31)

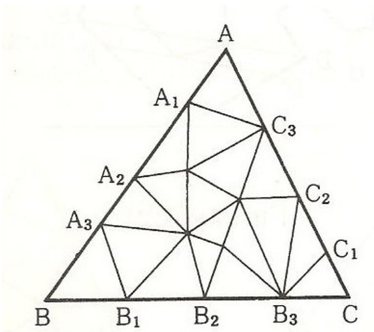


Figura 31: Triangulação do triângulo.

Então a soma das áreas dos triângulos $\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n$ é dada pela seguinte fórmula:

$soma\ das\ \acute{a}reas\ dos\ \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n = [OAA_1] + [OA_1A_2] + \cdots + [OA_lB] + [OBB_1] + [OB_1B_2] + \cdots + [OB_mC] + [OCC_1] + [OC_1C_2] + \cdots + [OC_nA] = [OAB] + [OBC] + [OCA] = [ABC] = \acute{a}rea\ do\ \Delta ABC.$ □

Seja $m: \mathscr{P} \rightarrow \mathbb{R}$ definida da seguinte forma: para cada polígono K, $m(K)$ é a soma das áreas dos triângulos obtidos por uma triangulação de K.

Pelo exposto anteriormente, $m(K)$ existe para todo K.

Lema 1.3.15. A definição de $m(K)$ não depende da escolha da triangulação de K.

Demonstração. Considere duas triangulações de K:

$$K = \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n,$$
$$K = \Delta_1^{'} + \Delta_2^{'} + \cdots + \Delta_m^{'}$$

Seja $\Delta_1^{''} + \Delta_2^{''} + \cdots + \Delta_l^{''}$ um refinamento comum destas triangulações. Então

$$\acute{a}rea\ do\ \Delta_h = soma\ das\ \acute{a}reas\ dos\ \Delta_j^{''}\ dentro\ de\ \Delta_h,$$
$$\acute{a}rea\ do\ \Delta_k^{'} = soma\ das\ \acute{a}reas\ dos\ \Delta_j^{''}\ dentro\ de\ \Delta_k^{'}.$$

Assim,

$$soma\ das\ \acute{a}reas\ dos\ \{\Delta_h\} = soma\ das\ \acute{a}reas\ dos\ \{\Delta_l^{''}\} = soma\ das\ \acute{a}reas\ dos\ \{\Delta_k^{'}\}.$$

Por isso $m(K)$, não depende da escolha da triangulação. □

Teorema 1.3.16. A função m definida anteriormente é a função área.

Demonstração. Basta mostrar que m satisfaz as quatro condições de função área.

As condições 1, 2, e 4 são imediatas. Portanto, a única propriedade a ser provada é a aditividade.

Suponha um polígono K decomposto em $K_1, \ldots, K_n$, ou seja, $K = K_1 + \cdots + K_n$.

Se cada K_i é decomposto em triângulos e pode ser expressa por $K_i = K_{i1} + K_{i2} + \cdots + K_{im_i}$, então o conjunto $\{K_{ij}: i = 1, 2, \dots n; j = 1,2, \dots m_i\}$ dá uma triangulação de K. Portanto,

$$m(K) = m(K_{11}) + \cdots + m(K_{1m_1}) + m(K_{21}) + m(K_{22}) + \cdots + m(K_{2m_2}) + \cdots + \cdots + m(K_{n1}) + m(K_{n2}) + \cdots + m(K_{nm_n}) = m(K_1) + m(K_2) + \cdots + m(K_n).$$

Com isso verifica-se que a propriedade aditiva está provada. □

Agora podemos definir área de poliedros.

Definição 1.3.17. Chamamos de *área de um poliedro* a área de uma planificação da superfície poliédrica correspondente.

Pelo exposto anteriormente este número existe e não depende da planificação.

2. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A ideia é apresentar uma sequência de atividades para que o professor possa aplicar em sala de aula, que familiarize os alunos com respeito a poliedros, apresentando exemplos do seu cotidiano, induzindo-os a identificar suas características e assim, ensinando-os a classificá-los. Em seguida, relacionar as superfícies dos poliedros às representações delas no plano e trabalhar o conceito de área de poliedros através desta relação. Para finalizar apresentamos uma situação problema do cotidiano, como aplicação deste conceito.

Em escolas particulares, a geometria espacial é inserida na segunda série do Ensino Médio, já nas escolas públicas, o assunto é abordado na terceira série do Ensino Médio, porém nas atividades sugeridas o que realmente importa é que os alunos já tenham visto os conceitos de Geometria Plana a respeito de polígonos.

Independentemente do contato do aluno com o conceito de poliedros, acreditamos ser uma atividade interessante. No caso do aluno já ter visto, as atividades servirão para fixação do conceito e sanar possíveis dúvidas que eles possam ter a respeito. No outro caso construirá no aluno este conceito de maneira mais concreta, evitando o método decorativo.

2.1. ATIVIDADE 1

Tempo estimado: Duas a três horas/aulas para o desenvolvimento dessa atividade e aplicação da avaliação.

Material: Objetos do dia a dia.

Objetivo: Fazer com que os alunos percebam que tais objetos possuem características específicas. Com isso, classificar estes objetos.

Descrição da atividade

O professor deve levar para a sala de aula, objetos do dia a dia como os da figura a seguir. (Figura 32)

Figura 32: Exemplos de superfícies poliédricas.

Dividir a turma em grupos com 4 ou 5 alunos.

Cada grupo deve receber a Ficha **I** (Anexo 1) que contém itens (questões ou exercícios de verificação) que deve ser respondida a cada passo da atividade.

Questão 1 (item 1) Qual característica que podemos considerar que divide os objetos apresentados em exatamente dois grupos: os que possuem essa característica e os que não a possuem?

Resposta: A característica desejada é que os objetos sejam "limitados" somente por polígonos

A cada questionamento o professor dará um tempo de 10 minutos para cada grupo discutir (entre os membros) e escrever sua resposta.

Depois disso o professor ouvirá a resposta de cada grupo, argumentando caso esteja errada, sem dar a resposta correta de imediato e sim ir induzindo os alunos a ela.

Uma vez encontrada essa característica, o professor deve dividir, com a ajuda dos alunos, os objetos nos dois grupos referidos e dizer que os objetos do grupo que possuem tal característica são chamados de superfícies poliédricas, definindo também o que são poliedros, e abordando a nomenclatura vértices, arestas e faces.

Dizer aos alunos que fará um abuso de linguagem por simplicidade ao se referir às superfícies poliédricas como poliedros simplesmente.

Neste momento peça para os alunos fazerem o item 2 da Ficha I, para ver se de fato eles entenderam o conceito de poliedros discutido no item 1.

Para os itens contendo exercícios de verificação será dado um tempo de 5 minutos para preenchimento.

O próximo passo é fazer com que os alunos percebam que as quantidades de vértices V, arestas A e faces F destes objetos estão relacionadas de uma maneira especial, resultam em um número constante. Peça para eles fazerem o item 3.

Neste momento, deverá ser apresentado um objeto extra (nenhum dos apresentados no início) como na figura abaixo e pedir para calcular o número $V - A + F$ deste objeto. (Figura 33)

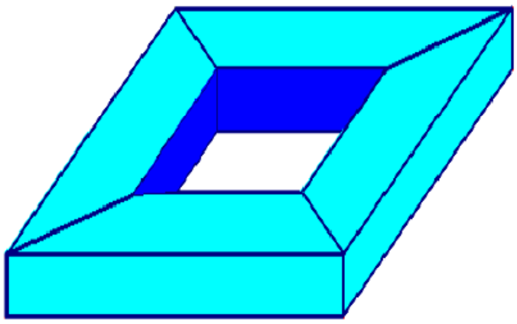


Figura 33: $V - A + F = 16 - 32 + 16 = 0$

Depois disso, o professor observará que nos objetos do item 3, $V - A + F = 2$ para todos mas que existe poliedro que isso não ocorre. Neste momento o professor falará de poliedro convexo.

Questão 2 (**item 4**) Quais dos poliedros possuem pelo menos duas faces paralelas?

Resposta: Cubo mágico, torrone e caixa de sabão em pó.

Neste momento, o professor observa que esta é uma característica que divide o grupo dos poliedros e apresenta a nomenclatura prisma e pirâmide para os alunos, definindo o que é base e faces laterais. Para a verificação dos conceitos eles deverão fazer os itens 5, 6 e 7 da Ficha I.

Para finalizar o professor perguntará aos alunos que tipo de base tem o cubo mágico, o torrone, a antena de TV e a caixa de sabão em pó.

Ele mencionará que tipo de base determina uma nomenclatura para os prismas e pirâmides. (Figura 34)

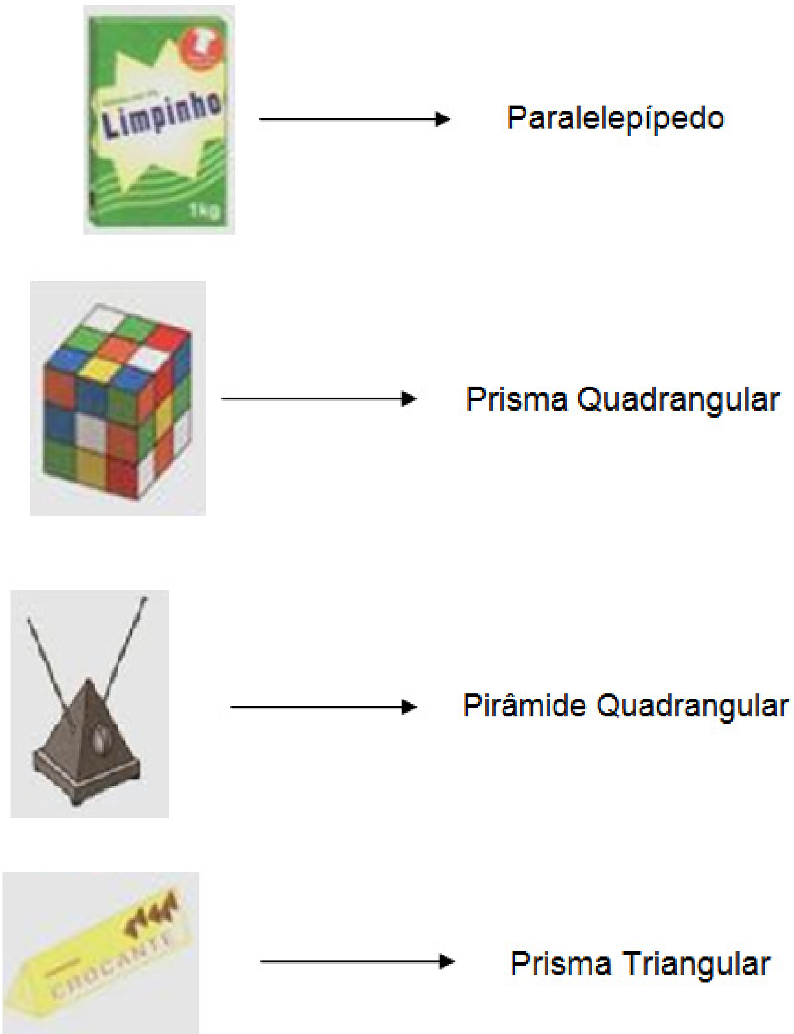


Figura 34: Nomenclatura devido à base.

Para a verificação os alunos deverão fazer o item 8 da Ficha I.

2.2. ATIVIDADE 2

Tempo estimado: Duas horas/aulas.

Material: Superfícies poliédricas em papel no formato de paralelepípedo, e no formato de uma pirâmide quadrangular, tesoura, cola e cartolina.

Objetivo: Fazer com que os alunos percebam que tais objetos podem ser planificados.

Descrição da atividade

O professor deve separar a turma como na atividade 1 e distribuir para eles a Ficha II (Anexo 2), um paralelepípedo, uma pirâmide quadrangular, uma tesoura, uma cola e uma cartolina.

A atividade começará com a seguinte pergunta:

Questão 1 (item 1) O que é planificar um poliedro?

Resposta (intuitiva): Obter a representação no plano desse poliedro.

Lembrar os alunos que está se referindo à superfície poliédrica.

O professor pedirá que entre os membros do grupo seja discutida tal questão, e dará 10 minutos para formularem e escreverem uma resposta a respeito disso.

Em seguida todos os grupos irão expor sua resposta, abrindo espaço para que os outros grupos discutam e reflitam sobre elas. O professor conduzirá tal discussão até chegarem a ideia intuitiva de planificação.

Depois disso, surgem dois importantes questionamentos em Matemática: existência e unicidade. O primeiro surge da seguinte questão:

Questão 2 (item 2) É possível planificar os objetos que você tem em mãos? Como?

Os alunos serão recomendados a tentarem descobrir isso recortando os objetos, que é o que se refere o item 3.

Pode ser que alguns alunos tentem fazer cortes sem ser pelas arestas.

Na hora da exposição das respostas e dos recortes o professor formalizará o conceito de planificação e justificará que os cortes devem manter a mesma estrutura, independente de onde se começa, senão a planificação não estaria bem definida.

Da observação das respostas dos alunos, o professor ressalta a questão de unicidade:

Questão 3 (item 4) Existe uma única planificação?

Resposta: Não, pois é possível recortar por arestas diferentes e obter planificações diferentes.

Para fixar essa ideia, os alunos devem fazer o item 5 da Ficha II

Ao final desse processo o professor deve estimular a visão espacial dos alunos pedindo para que os mesmos façam o item 6, que consiste em planificar as superfícies poliédricas a partir de sua visão de um desenho.

2.3. ATIVIDADE 3

Tempo estimado: Duas a três horas/aulas.

Material: Recortes de papel que são planificações de superfícies poliedricas.

Objetivo: Fazer com que os alunos percebam que a área das planificações das superfícies poliedricas resulta na área do poliedro.

Descrição da atividade

Como nas atividades anteriores os alunos devem ser divididos em grupos e estes podem até serem os mesmos das outras atividades.

Esta será uma continuação imediata da atividade 2, podendo o professor (caso tenha tempo) fazer no mesmo dia.

Será entregue a cada grupo uma certa quantidade de planificações de papel já prontas (distintas entre si) e a Ficha III (Anexo 3).

Todos os grupos possuirão as mesmas planificações.

No intuito de recordar planificações e suas respectivas superfícies poliedricas, os alunos devem responder o item 1 da Ficha III.

O professor deve sugerir que os alunos façam dobraduras pelas arestas destas planificações.

Dentre as superfícies poliédricas obtidas deverão aparecer, entre outros, dois paralelepípedos idênticos e duas pirâmides com bases quadradas idênticas.

Depois disso, o professor fará a seguinte pergunta.

Questão 1 (item 2). É possível calcular a área dessas planificações? Como?

Resposta: Sim. A área da planificação é a soma das áreas de cada polígono que formam a planificação.

Novamente, os alunos terão um tempo de 10 minutos para discutir e formular suas respostas, para em seguida apresentá-las. Conduzidos pelo professor eles chegarão à resposta desejada, caso ninguém a tenha encontrado antes.

O professor lembrará que a área de um retângulo de comprimento a e largura b é $a.b$ e que a área de um triângulo com um lado de medida b e altura relativa a este lado medindo h é igual a $\frac{b.h}{2}$.

Com estas informações e pela resposta do item 2, o professor pedirá para os alunos fazerem o item 3, que é efetuar o cálculo da área das planificações do paralelepípedo obtido.

Espere uns 20 minutos e pergunte quanto deu cada uma das contas.

Neste momento eles observarão que o resultado foi $2.a.b + 2.a.c + 2.b.c$ e que independe da planificação, onde a é o comprimento, b é a largura e c é a altura do paralelepípedo. Portanto, o professor definirá que a área do paralelepípedo é obtida essa fórmula.

Faça o mesmo para o item 4 da Ficha III.

Assim, o professor concluirá com os alunos que a área de uma pirâmide com base sendo um quadrado de lado a é obtida pela fórmula

$$a^2 + 4.\frac{a.h}{2},$$

onde h é a altura de um dos triângulos com relação ao lado de medida a.

Isso gerará vários comentários e questionamentos como que as faces são congruentes e, portanto têm a mesma área e se pode melhorar a fórmula relacionando a altura da pirâmide através do teorema de Pitágoras.

Para finalizar o professor pedirá que os alunos façam o mesmo para as planificações que sobraram como exercício, que é o item 5 da Ficha III.

3. SITUAÇÃO PROBLEMA

Levar para os alunos uma caixa de sabão em pó, com o formato atual. (Figura 35)

Figura 35: Modelo Atual.

Pedir para que os alunos construam com a cartolina a superfície poliédrica de um paralelepípedo no formato da caixa de sabão em pó no modelo antigo: 4,8 cm x 16,8 cm para a base e 24 cm para a altura. (Figura 36)

Figura 36: Modelo Antigo.

Após a construção, os alunos devem responder:

1) Qual é a área da caixa atual?
2) Qual é a área da caixa antiga?
3) Houve melhora no gasto de papel da caixa antiga para a caixa atual?
4) Você consegue visualizar alguma outra melhoria? Qual?

Respostas:

1) 927,498 cm²
2) 1198,08 cm²
3) Sim, esse valor foi 270,582 cm²
4) Sim, melhoria para transporte da industria, para armazenamento, custo financeiro, poluição ambiental, entre outros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BARBOSA J. L.,J. **Geometria Euclidiana Plana**, Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

[2] DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar: geometria plana**. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993.

[3] DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar: geometria espacial**. 5. ed. São Paulo: Atual, 1998.

[4] KAKUTA, N. K. ; MARTINS, L. F. **Geometria Euclidiana Espacial e introdução a Geometria Descritiva.** 2008. Disponível em: http://www.mat.ibilce.unesp.br/personal/luciana/Ap-G_E.pdf

[5] KOJI, S. **A Mathematical Gift, III**. The interplay bettween topology, functions, geometry, and algebra.

[6] LARCHER, H. P. **História**. W. M. Jackson Inc., Rio, 1950

[7] LIMA, E. L. **A matemática do ensino médio**. v 2. Coleção do Professor de Matemática – 6. ed. Sociedade brasileira de Matemática: Rio de Janeiro, SBM 2006.

[8] MACHADO, P. F. **Fundamentos de Geometria Plana**, COLEÇÃO EAD – MATEMÁTICA, EDITORA CAED-UFMG, 2012. Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/Fundamentos_de_geometria_espacial sergio-02.pdf

[9] MAFIO, F. **Fundamentos da Geometria,** ICMC – USP. Disponível em: http://www.icmc.usp.br/pessoas/manfio/Fundamentos.pdf

[10] REZENDE, E. **Geometria Euclidiana plana e construções geométricas**, Campinas: Ed da UNICAMP, 2008.

[11] WEISSTEIN, E. W. **Math World–A Wolfram Web Resource**. 2009. Disponível em: http://mathworld.wolfram.com, Acesso em: 30 maio 2013.

ANEXO I

FICHA I: CARACTERIZAÇÃO DE POLIEDROS

NOME:____**Nº**_______

___ **SÉRIE** ___ **– ENSINO MÉDIO** ___**BIMESTRE** **DATA:** ____/____/_____

1) Qual característica que podemos considerar que divide os objetos apresentados em exatamente dois grupos: os que possuem essa característica e os que não a possuem?

2) A partir da definição dada pelo professor, classifique as figuras em poliedros ou não poliedros.

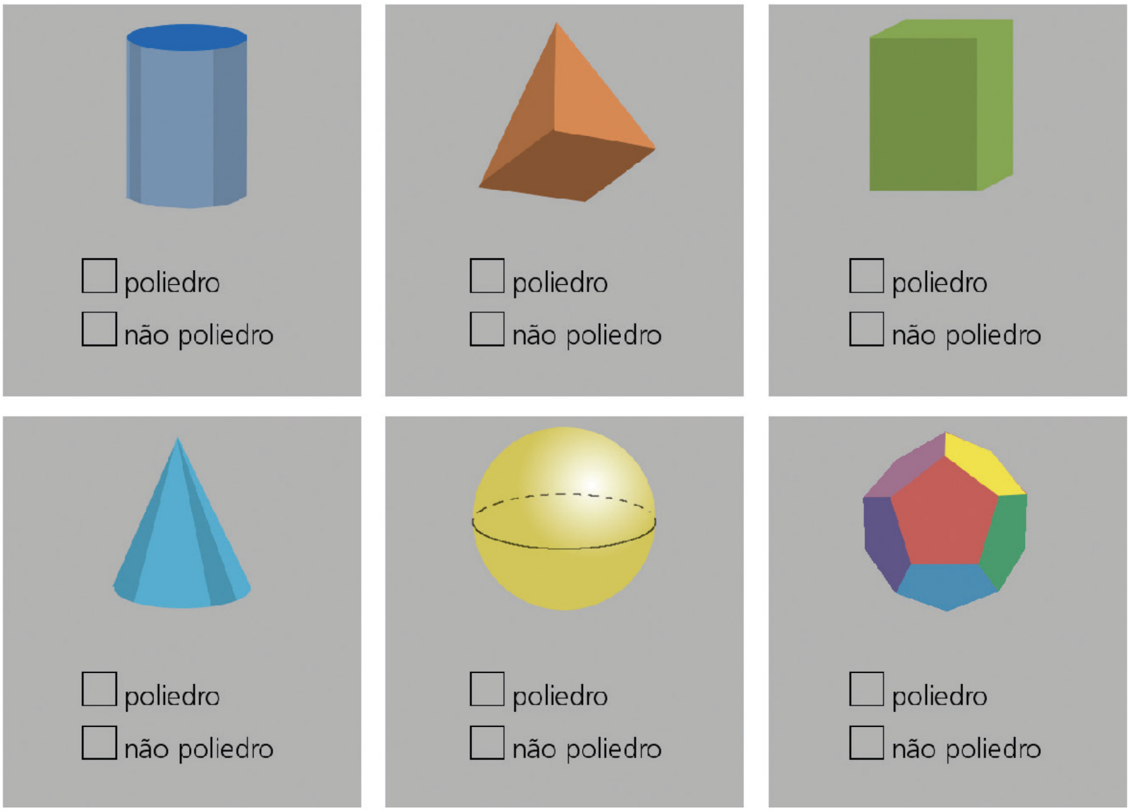


Figura 37: Poliedros ou não poliedros.

3) Preencha a tabela abaixo.

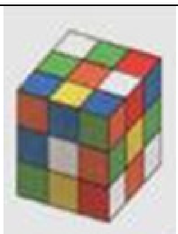
Poliedro	V	A	F	V – F + A
				
				
				
				

Figura 38: Tabela sobre, vértices, arestas e faces de alguns poliedros.

4) Existem pelo menos duas faces paralelas em cada poliedro?

____

____

5) Quantas bases têm o prisma abaixo? E a pirâmide abaixo?

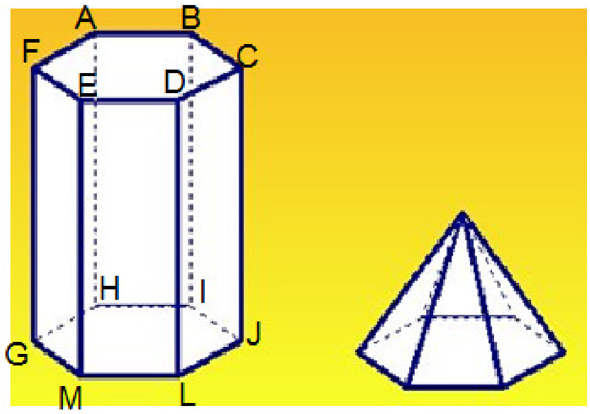


Figura 39: Prisma e pirâmide.

Prisma:____

Pirâmide____

6) No prisma do item anterior $CDLJ$, é paralela $AFGH$. Estes polígonos são bases do prisma? Por quê?

____

____

____

7) Nas figuras abaixo identifique quais são faces laterais e quais são bases?

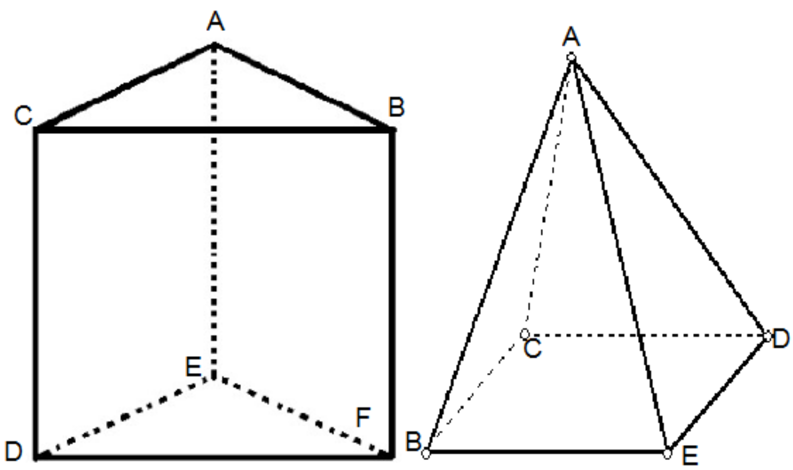


Figura 40: Prisma triangular e pirâmide de base quadrada.

____

____

____

8) Nomeie cada um dos prismas e cada uma das pirâmides a seguir.

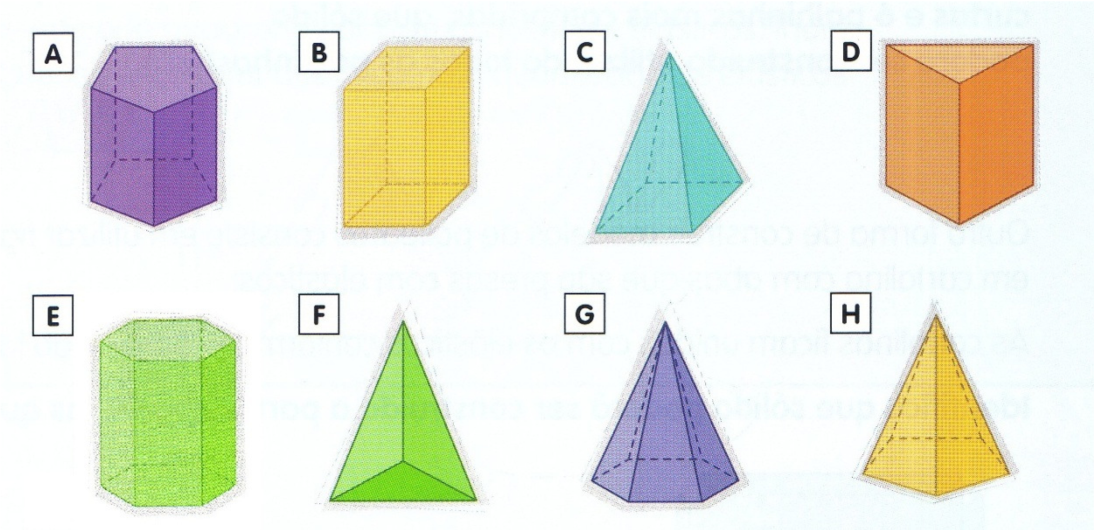


Figura 41: Nomenclatura de prismas e pirâmides.

ANEXO II

FICHA II: PLANIFICAÇÃO DE POLOEDROS

NOME:____Nº_______

___ SÉRIE ___ – ENSINO MÉDIO ___BIMESTRE DATA: ____/____/_____

1) O que é planificar um poliedro?

____

____

____

____

2) É possível planificar os objetos que você tem em mãos? Como?

____

____

3) Faça a planificação do paralelepípedo e da pirâmide que estão nos grupos e cole-as sobre a cartolina.

____

____

4) Existe uma única planificação de um poliedro?

____

____

5) Desenhe as planificações obtidas pelo grupo.

6) Faça uma planificação de cada figura a seguir.

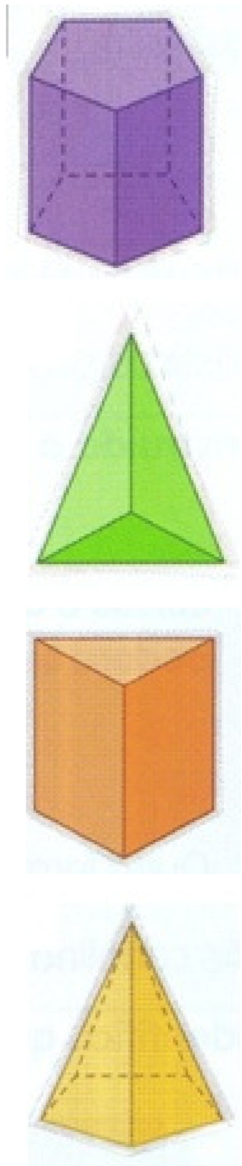


Figura 42: Poliedros para planificação.

ANEXO III

FICHA III: ÁREA DE PLAINFICAÇÕES

NOME:____Nº_______

___ SÉRIE ___ – ENSINO MÉDIO ___BIMESTRE DATA: ____/____/_____

1) Quais polígonos foram obtidos com a planificação dos paralelepípedos?

____

____

____

____

____

2) É possível calcular a área dessas planificações? Como?

____

____

____

____

____

3) Calcule a área das planificações que deram os dois paralelepípedos idênticos.

4) Calcule a área das planificações que deram as duas pirâmides com base quadrada idênticas.

5) Calcule a área das demais planificações.