UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

VICTOR FERNANDO DE MATOS

O ENSINO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES: UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA

UBERABA - MG

2013

VICTOR FERNANDO DE MATOS

O ENSINO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES: UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, como parte das atividades para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Ms. Daniel Oliveira Veronese

Coorientadora: Profª. Drª. Lívia Lopes Azevedo

UBERABA - MG

2013

VICTOR FERNANDO DE MATOS

O ENSINO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES: UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, como parte das atividades para obtenção do título de Mestre em Matemática.

15 de abril de 2013

Banca Examinadora

Prof. Ms. Daniel Oliveira Veronese
Orientador
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Profª. Drª. Lívia Lopes Azavedo
Coorientadora
Universidade Federal de Mato Grosso

José Gustavo Coelho

Prof. Dr. José Gustavo Coelho
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Dedico este trabalho às pessoas mais importantes da minha vida, aquelas que se privaram da minha presença em momentos importantes, aquelas cuja lembrança do sorriso aumentava ainda mais a minha vontade de voltar para casa e que motivam meu esforço e dedicação. Sem dúvida nenhuma, elas são o maior presente de Deus em minha vida, por isso dedico esta vitória à minha esposa e aos meus filhos.

AGRADECIMENTOS

Agradecer às pessoas que contribuíram para o êxito deste trabalho foi uma das tarefas mais difíceis, pois escrevi esta parte várias vezes e sempre me parecia incompleta. Por isso, peço desculpas se me esqueci de algo ou de alguém. Mas ter este *problema* para resolver deixou-me feliz, pois além de gostar de resolver problemas, percebi que a solução dele é um sistema indeterminado e suas infinitas soluções são as contribuições que recebi ao longo destes dois anos.

Há um agradecimento que em nenhum momento tive dúvidas de que seria o primeiro, minha gratidão a Deus, pois tudo que tenho e sou, devo a Ele, que foi a todo momento meu refúgio, minha força e meu guia.

Tenho como meta ser um grande Homem, por isso tenho uma grande Mulher ao meu lado, a quem me dedico com muito amor e tenho certeza que ela faz o mesmo por mim. À minha esposa Dalvinha, sou grato simplesmente por ela ser quem ela é, pois se não fosse seu companheirismo e estímulo, eu não teria superado as dificuldades que surgiram ao longo do caminho.

Gosto muito de uma frase que aprendi com o Padre Julio Cezar Siqueira "A palavra conduz, mas o exemplo arrasta". E não há nada que me motive mais do que ser exemplo para os meus filhos, Pedro Paulo e João Lucas. E aos dois, agradeço por terem iluminado meus dias com a alegria e a pureza próprias das crianças, eles foram anjos que me ajudaram a superar os maiores desafios dessa jornada.

Segundo a Bíblia, não há árvore boa que produza frutos ruins e nem árvore ruim que dê frutos bons. Devo minha formação aos meus pais, Pedro e Leda, a quem agradeço pelas orações e pelas palavras de estímulo. Mesmo à distância, pude receber o amor de pais que torcem e rezam pelo sucesso do filho.

Tive o privilégio de me sentir em casa mesmo estando longe da minha, sou eternamente grato por isso aos meus sogros, Valdina e Osvando, que em sua simplicidade e orações me acolheram como um filho.

O recurso financeiro é essencial quando embarcamos em um desafio como este, ainda mais no meu caso quando as viagens foram longas e caras. Por isso, agradeço à CAPES, pelo apoio financeiro que foi fundamental para o bom andamento desta formação.

Muito ainda a de se pensar e fazer para melhorar a educação brasileira, boas ideias devem ser colocadas em prática, assim como fizeram os idealizadores do PROFMAT. A estes, agradeço por propiciarem esta oportunidade singular aos professores de Matemática deste país.

Quando recebemos uma nova missão, devemos encará-la com força e entusiasmo. Isso aprendi com os professores e a secretária Terezinha da UFTM, aos quais sou grato por realizarem seu trabalho de forma exemplar.

Existem algumas pessoas que desconstroem ideias e interrompem pensamentos, mas tive o privilégio de ser orientado por pessoas que promovem o contrário, elas mediam a construção de ideias e enriquecem pensamentos. Por isso, é mais do que justo incluir aqui os devidos agradecimentos ao meu orientador Professor Daniel Oliveira Veronese (UFTM), por acreditar em minha ideia e me ajudar a concretizar esse sonho, e à minha coorientadora Professora Lívia Lopes Azevedo (UFMT), por ter colaborado de forma essencial para a realização deste trabalho.

Finalizo meus agradecimentos, lembrando que “Amigo é coisa para se guardar do lado esquerdo do peito” e, aqui, não vou citar nomes, pois não quero cometer nenhuma injustiça. Então agradeço aos muitos amigos que tiveram participação das mais variadas formas nesta empreitada, seja por meio de caronas, cobrindo as aulas no IFMT durante minhas viagens e, de modo geral, estendendo a mão quando precisei.

“ Não há transição que não implique um ponto de partida, um processo e um ponto de chegada. Todo amanhã se cria num ontem, através de um hoje. De modo que o nosso futuro baseia-se no passado e se corporifica no presente. Temos de saber o que fomos e o que somos, para sabermos o que seremos.”

Paulo Freire

RESUMO

O atual sistema educacional brasileiro apresenta problemas de naturezas diferenciadas e, nesse sentido, muitas ações são necessárias para modificar esse panorama. Assim sendo, esta dissertação tem o objetivo geral de contribuir para a melhoria do ensino escolar no país, em especial, o de Matemática no nível médio. A partir dessa meta, delimitou-se o *corpus* deste trabalho, o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares, e a metodologia a ser seguida. O estudo teve como ponto de partida uma pesquisa sobre como esse conteúdo é abordado nos livros didáticos, por meio de um estudo comparativo entre as análises críticas apresentadas no livro *Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio* (2001) e resenhas contidas no *Guia do Livro Didático 2012.* Na sequência, foram relatadas diferentes interpretações sobre esse conteúdo e seus métodos de solução, segundo a visão do professor-pesquisador Elon Lages Lima em sua obra *Matemática e Ensino* (2007). Por fim, apresentou-se uma proposta inovadora para o ensino de Sistemas de Equações Lineares no Ensino Médio, fundamentada em uma visão geométrica que busca tornar as aulas desse conteúdo mais atrativas. Para isso, buscou-se estabelecer um elo entre Sistemas de Equações Lineares e Geometria Analítica, por meio da representação das equações lineares em eixos cartesianos, e enriquecer as aulas com o uso de materiais concretos e de *softwares* de geometria dinâmica.

Palavras-chave: Geometria-Estudo e ensino. Sistemas Lineares. Ensino médio. Livros didáticos.

ABSTRACT

The current Brazilian educational system has many issues from different natures. In doing so, this scene needs lots of actions to be changed. Hence, this dissertation has the general objective of contributing to the improvement of the Brazilian teaching, especially High School Mathematics teaching. From this goal, the *corpus* of this study was delimited as the content about Systems of Linear Equations and the methodology to be followed. The starting point of the study was a research about how this content is discussed in textbooks, through a comparative study between critical analyses presented in the book *Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio* (2001) and reviews found in *Guia do Livro Didático 2012*. Subsequently, different interpretations about the content and its methods of solution were reported by the research professor Elon Lages Lima in his book *Matemática e Ensino* (2007). Finally, an innovative proposal for the teaching of Systems of Linear Equations in High School was presented, based on a geometric viewpoint that attemps to make the lessons from this content more attractive. For this, it was sought to establish a link between Systems of Linear Equations and Analytic Geometry, through the representation of linear equations in Cartesian axes, and to enrich the mathematics lessons with the use of concrete materials and dynamic geometry softwares.

Keywords: Geometry-Study and teaching. Linear Systems. High School. Textbooks.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Segundo Schwartzman [2], até o fim da década de 90, não havia muito mistério sobre o que fazer para melhorar a educação no Brasil: construir mais escolas, contratar mais professores e aumentar os recursos financeiros. Mas hoje quando o acesso à educação fundamental é praticamente universal, o problema prioritário passa a ser a qualidade. Mais escolas, professores e recursos financeiros continuam sendo necessários, sobretudo no Ensino Médio, mas os resultados escolares dependem menos disso e mais de outros fatores que são mais difíceis de modificar. Dentre estes fatores, destacam-se a qualificação dos professores, os métodos de ensino, a qualidade dos livros didáticos, a liderança dos diretores e a autonomia das escolas.

Para Lima [3], as mudanças na nomenclatura dos níveis da Educação Básica do Brasil pouco afetaram o conteúdo programático e a forma de ensinar. A fusão entre o Curso Primário e o Curso Ginasial que resultou no atual Ensino Fundamental foi a mudança menos significativa, pois continua a ocorrer a diferenciação deste em Ensino Fundamental I e Ensino Fundamental II. Geralmente no atual modelo, nos quatro anos iniciais, é adotado um professor regente para todas as disciplinas e, nos quatro anos finais, o aluno passa a ter um professor para cada matéria. Tratando em especial o ensino da Matemática no nível médio, esse autor relata alguns problemas como: cursos de graduação que não preparam os professores para trabalhar na Educação Básica, livros didáticos que não contemplam de forma eficiente o processo de aprendizagem, falta de cursos de aperfeiçoamento para os profissionais que atuam em sala de aula, professores tendo que trabalhar em inúmeras escolas ou até mesmo em outras atividades devido aos vergonhosos salários, entre outros.

Esses são problemas que os professores já conhecem e que já foram discutidos por muitos autores ligados à educação, mas as autoridades governamentais do país parecem, infelizmente, ignorá-los. Tais problemas não são o ponto principal desta pesquisa, mas justificam estudos como este que buscam a melhoria da qualidade da educação no Brasil.

Lima [3] escreve que para se modificar esta atual situação do Ensino Médio brasileiro algumas ações se fazem necessárias. Dentre elas, há uma que pode ser atendida em menor prazo:

> Escrever novos livros didáticos que deem a cada tópico o destaque que ele merece; que contenham aplicações simples, relevantes e reveladoras dos assuntos estudados; que sejam breves e objetivos; que sejam inteligentes,

> contribuindo para desenvolver a capacidade do aluno de forma gradual e segura.([3], p.173-174)

Fazendo um recorte em minha experiência como professor de Matemática do Ensino Médio, pude vivenciar sucessos e fracassos ao ministrar o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares. Culpo boa parte dos meus insucessos ao fato de talvez não conseguir responder com eficiência à pergunta que todos os professores, em especial os de Matemática, escutam diariamente de seus alunos: "*Para que serve isso, professor?*" ou "*Onde uso isso na minha vida?*", seja porque não tive a formação apropriada na graduação ou porque os livros utilizados para preparar minhas aulas não atendem a tais anseios.

Fatos como esses me motivaram a buscar meios para que minhas aulas se tornassem melhores. Em uma dessas buscas, há alguns anos, um funcionário de uma das escolas na qual eu trabalhava auxiliou-me a confeccionar, com placas de madeira, um material concreto para representar as imagens de planos no espaço, como as disponíveis no livro *A Matemática do Ensino Médio - Volume 3* [4], este material poderá ser visualizado no Apêndice deste trabalho. Com isso, pude tornar as aulas desse conteúdo mais atrativas. Esse material tornou-se um valioso instrumento em muitas aulas e é, com certeza, o ponto de partida deste projeto, pois foi esse fato que me despertou a seguinte pergunta: "Se com uma ideia simples consegui melhorar minhas aulas, será que é possível avançar ainda mais?". Na busca de respostas para essa e outras perguntas, ingressei-me no curso de Mestrado Profissional em Matemática.

No PROFMAT, percebi muitas repetições de conteúdos em disciplinas diferentes, sendo as abordagens o grande diferencial. A partir desse fato, observei que tal situação se repetia em diversos conteúdos relacionados à Matemática do Ensino Médio e que, se estabelecidas algumas conexões entre esses conteúdos, seria possível responder aos anseios dos alunos com mais facilidade.

É afirmado no *Guia do Livro Didático* 2012 [5] que, em geral, os livros didáticos tratam os conteúdos de forma fragmentada, com muitos tópicos isolados, o que não é bom do ponto de vista didático e ainda aumenta muito o número de páginas.

Diante da necessidade de estudos sobre o ensino da Matemática de nível médio, justificada pela problemática apresentada, amparamos este trabalho no estudo das seguintes obras: *Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio* [6]; *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio* [7], *Guia do Livro Didático: PNLD 2012: Matemática* [5]; *Orientações Curriculares para o Ensino Médio - Volume 2* [8] e

Matemática e Ensino [3].

Fazendo um recorte sobre o assunto, esta dissertação trilhará um caminho em busca da melhoria do ensino, em particular, do conteúdo de Sistemas de Equações Lineares. E, para isso, apresentará uma análise conjuntural e uma proposta didática sobre o tema. Com esse propósito, após esta parte introdutória, o texto será desenvolvido em três capítulos assim intitulados: 2. Os Livros Didáticos de Matemática no Brasil; 3. Sistemas de Equações Lineares no Ensino Médio; 4. O Foco na Interpretação Geométrica. O segundo capítulo tratará, de uma forma geral, dos livros didáticos no país e, na sequência, de forma mais específica, comparará a evolução desses livros em relação ao conteúdo de Sistemas de Equações Lineares. O terceiro capítulo abordará o ensino de Sistemas de Equações Lineares, segundo a visão de Elon Lages de Lima, apresentada no livro *Matemática e Ensino* [3]. Em seguida, no quarto capítulo, serão apresentados dois planos de aula para o ensino de Sistemas de Equações Lineares, elaborados segundo uma abordagem geométrica, um com o uso de *softwares* e o outro com o uso de materiais concretos. O trabalho será encerrado por meio de algumas considerações finais e sugestões de trabalhos futuros para esse tema.

2 OS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA NO BRASIL

Neste capítulo, primeiramente, serão relatados fatos históricos que mostram a atual realidade da distribuição de livros didáticos no país. Na sequência, será feita uma comparação entre as análises do livro *Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio* [6] e as resenhas do *Guia do Livro Didático 2012* [5], com foco no conteúdo de Sistemas de Equações Lineares. Para delimitar esse estudo comparativo, foram escolhidos três autores cujas coleções estão presentes nessas duas obras citadas.

2.1 A História da Distribuição dos Livros Didáticos no Brasil

Segundo dados do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), o mais antigo programa de distribuição de livros didáticos no país, passou por inúmeras modificações nos seus 80 anos de existência até chegar ao modelo atual que contempla toda a Educação Básica. Com base em informações do FNDE [9], segue a descrição da evolução histórica da distribuição de livros didáticos, com financiamento do Governo no país.

1929: É criado o Instituto Nacional do Livro (INL), com o objetivo de legislar sobre a produção de livros didáticos.

1938: É instituída a Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD), sendo a primeira política de controle do livro didático no país.

1945: Pelo Decreto-Lei nº 8.460, de 26/12/45, é consolidada a legislação sobre as condições de produção, importação e utilização do livro didático, não cabendo ao professor a escolha do livro a ser utilizado pelos alunos.

1966: Um acordo entre o Ministério da Educação e Cultura (MEC) e a Agência Norte-Americana para o Desenvolvimento Internacional (Usaid) permite a criação da Comissão do Livro Técnico e Livro Didático (Colted), com o objetivo de coordenar as ações referentes à produção, edição e distribuição do livro didático. O acordo assegurou ao MEC recursos suficientes para a distribuição gratuita de 51 milhões de livros no período de três anos. E ao garantir o financiamento do governo a partir de verbas públicas, o programa adquiriu continuidade.

1970: A Portaria nº 35, de 11/3/1970, do Ministério da Educação, implementa o sistema de coedição de livros com as editoras nacionais, com recursos do Instituto Nacional do Livro (INL).

1971: O Instituto Nacional do Livro (INL) passa a desenvolver o Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental (Plidef). A contrapartida das Unidades da Federação torna-se necessária com o término do convênio MEC/Usaid, efetivando-se com a implantação do sistema de contribuição financeira das unidades federadas para o Fundo do Livro Didático.

1976: Pelo Decreto nº 77.107, de 4/2/76, o governo assume a compra de uma parcela dos livros para distribuir a parte das escolas, geralmente, das unidades federadas que fizessem sua contrapartida. Como os recursos eram poucos, a maior parte das escolas municipais foi excluída do programa. Com a extinção do INL, a Fundação Nacional do Material Escolar (Fename) torna-se responsável pela execução do programa do livro didático. Os recursos provêm do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) e das contrapartidas mínimas estabelecidas para participação das Unidades da Federação.

1983: Em substituição à Fename, é criada a Fundação de Assistência ao Estudante (FAE), que incorpora o Plidef. Na ocasião, o grupo de trabalho encarregado de examinar os problemas relativos aos livros didáticos propõe a participação dos professores na escolha dos livros e a ampliação do programa.

1985: Com a edição do Decreto nº 91.542, de 19/8/85, o Plidef dá lugar ao Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) que traz diversas mudanças, como a indicação de livros pelos professores, reutilização dos livros e fim da contrapartida pelas Unidades da Federação.

1992: A distribuição dos livros é comprometida pelas limitações orçamentárias e há um recuo na abrangência da distribuição, restringindo-se o atendimento até a antiga 4ª série do Ensino Fundamental.

1993-1994: A Resolução CD FNDE nº 6 vincula, em julho de 1993, recursos para a aquisição de obras didáticas destinadas aos alunos das redes públicas de ensino, estabelecendo, assim, um fluxo regular de verbas para a aquisição e distribuição dos livros didáticos. Na mesma época, são definidos critérios para avaliação desses livros com a publicação da *Definição de Critérios para Avaliação dos Livros Didáticos* MEC-FAE-UNESCO.

1995: De forma gradativa, volta a universalização da distribuição do livro didático no

Ensino Fundamental.

1996: É iniciado o processo de avaliação pedagógica dos livros inscritos para o PNLD, sendo publicado o primeiro *Guia de Livros Didáticos* de 1ª a 4ª série.

1997: Em fevereiro, com a extinção da Fundação de Assistência ao Estudante (FAE), a responsabilidade pela política de execução do PNLD é transferida integralmente para o Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE). Nesse período, o programa é ampliado e o Ministério da Educação passa a adquirir, de forma continuada, livros didáticos de Alfabetização, Língua Portuguesa, Matemática, Ciências, Estudos Sociais, História e Geografia para todos os alunos de 1ª a 8ª série do Ensino Fundamental público.

2000: É inserida, no PNLD, a distribuição de dicionários de Língua Portuguesa para uso dos alunos de 1ª a 4ª série em 2001 e, pela primeira vez na história do programa, os livros didáticos passam a ser entregues no ano anterior ao ano letivo de sua utilização.

2004: É criado o Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM) e, já em seu primeiro ano de execução, foram adquiridos livros de Matemática e Português para os alunos do 1º ano das regiões Norte e Nordeste do país.

2010: É criado o Programa Nacional do Livro Didático para a Educação de Jovens e Adultos (PNLD EJA) e o Programa Nacional Biblioteca da Escola (PNBE).

2011: São distribuídos os primeiros livros didáticos aos alunos do Ensino Fundamental da EJA.

2012: É atendida, de forma integral, toda a Educação Básica, incluindo os livros de Língua Estrangeira, Filosofia e Sociologia para o Ensino Médio.

Dentre esses fatos históricos, vale destacar a criação do *Guia de Livros Didáticos*, em 1996, de suma importância para a evolução contínua da qualidade desses materiais, assunto do qual trataremos na seção a seguir.

2.2 Exame de Textos e Guia do Livro Didático

Em 2001, o Guia de Livros Didáticos avaliava apenas coleções do Ensino Fundamental e, devido a sua ampla divulgação, tornou-se um importante referencial de qualidade sobre os livros didáticos desse nível de ensino, o que, com certeza, muito contribuiu para melhoria desse recurso didático.

Nesse mesmo ano, um grupo de professores de Matemática organizou-se para escrever o livro: *Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio*[6]. Apesar de este livro ter sido estruturado com concepções diferentes das utilizadas pelo *Guia do Livro Didático 2012* [5] , ele foi, naquela época, uma importante referência teórica sobre os livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, pois o MEC passou a analisar os livros de nível médio apenas a partir de 2004, quando o governo começou a financiar os livros para esse nível de ensino.

O livro *Exame de textos* apresenta as análises de doze coleções de livros didáticos e foi publicado, segundo Lima, com o "*propósito de contribuir para a melhoria da qualidade dos nossos livros-textos, completando a ação do MEC, que tem avaliado os livros de 1ª a 8ª série*"([6], p.ii). Este livro teve como editor Elon Lages Lima[1] que junto a um grupo de sete profissionais da Matemática organizaram-se em duplas para analisar cada uma das doze obras. Para esta análise, fundamentaram-se em três aspectos: Conceituação, Manipulação e Aplicação, caracterizados como:

> A **Conceituação** compreende a formulação de definições, o enunciado de proposições, o estabelecimento de conexões entre os diversos conceitos, bem como a interpretação e a reformulação dos mesmos sob diferentes aspectos. É importante destacar que a conceituação precisa é indispensável para o êxito das aplicações.
> A **Manipulação**, de caráter essencialmente (mas não exclusivamente) algébrico, está para o ensino e o aprendizado de Matemática assim como a prática dos exercícios e escalas musicais está para a Música. A habilidade no manuseio de equações, fórmulas, operações e construções geométricas elementares, o desenvolvimento de atitudes mentais automáticas, verdadeiros reflexos condicionados, permitem ao usuário da Matemática concentrar sua atenção consciente nos pontos realmente cruciais, sem perder tempo e energia com detalhes.
> A **Aplicação** é o emprego de noções e teorias da Matemática em situações que vão de problemas triviais do dia-a-dia a questões mais sutis provenientes de outras áreas, quer científicas quer tecnológicas. Ela é a principal razão pela qual o ensino da Matemática é tão necessário.([6], p.1)

O PNLD distribui livros didáticos para todos segmentos e áreas que compõem a Educação Básica. Para selecionar as obras que estarão disponíveis às escolas, são elaborados editais que especificam todas as exigências que serão feitas aos livros apresentados pelas editoras. O MEC avalia os livros inscritos pelas editoras e elabora o Guia do Livro Didático, composto por resenhas de cada obra aprovada. O Guia é disponibilizado às escolas participantes pelo FNDE, que escolhem democraticamente os livros que desejam utilizar.

[1]Bacharel em Matemática, Doutor em Matemática e Pesquisador titular do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA).

Na avaliação e escolha dos livros que compõem o *Guia do Livro Didático : PNLD 2012 : Matemática* [5], é cobrado que as coleções deverão obrigatoriamente cumprir os requisitos a seguir:

> 1. Incluir todos os campos da Matemática escolar, a saber, números e operações, funções, equações algébricas, geometria analítica, geometria, estatística e probabilidades.
> 2. Privilegiar a exploração dos conceitos matemáticos e de sua utilidade para resolver problemas.
> 3. Apresentar os conceitos com encadeamento lógico, evitando: recorrer a conceitos ainda não definidos para introduzir outro conceito, utilizar-se de definições circulares, confundir tese com hipótese em demonstrações matemáticas, entre outros.
> 4. Propiciar o desenvolvimento, pelo aluno, de competências cognitivas básicas, como: observação, compreensão, argumentação, organização, análise, síntese, comunicação de ideias matemáticas, memorização.([5], p.15)

Nesta dissertação, utilizou-se o que foi produzido no livro *Exame de Textos* [6], em 2001, e no *Guia do Livro Didático 2012* [5] para um estudo histórico comparativo em alguns livros didáticos de Matemática na última década. Com esse propósito, foram selecionados para este estudo as obras dos seguintes autores: Gelson Iezzi [10], Luiz Roberto Dante [11] e Manoel Paiva [12]. Focalizou-se a comparação do que é escrito específicamente sobre o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares, que em todas as coleções está inserido no volume 2.

2.2.1 Gelson Iezzi e Osvaldo Dolce - Matemática

Esta coleção diferencia-se das demais por contar com a participação de vários autores, dos quais apenas Gelson Iezzi e Osvaldo Dolce figuram nas duas obras analisadas. A primeira obra recebeu o nome *Matemática* e a segunda, *Matemática: ciência e aplicações.*

No livro *Exame de textos* [6], a coleção foi analisada por Eduardo Wagner[2] e Augusto César Morgado[3]. Segundo eles, o capítulo sobre Sistemas de Equações Lineares apresenta os seguintes pontos negativos:

- Ao deduzir a Regra de Cramer para sistemas 2×2, são cometidas pequenas falhas, como a de permitir que o leitor pense que os sistemas abaixo são equivalentes, quando não são:

[2]Engenheiro Civil, Mestre em Matemática, Professor da Fundação Getúlio Vargas-FGV.

[3]Licenciado em Matemática, Mestre em Matemática, foi professor em diversas instituições de ensino e faleceu em 2006.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} (a_1b_2 - b_1a_2)x = c_1b_2 - b_1c_2 \\ (a_1b_2 - b_1a_2)y = a_1c_2 - c_1a_2 \end{cases}$$

- Afirma que, com base no que foi visto para um sistema 2×2, a Regra de Cramer vale para um sistema $n \times n$.
- Em nenhum momento, é citada a grande desvantagem de usar a Regra de Cramer para sistemas maiores do que um 3×3.

Ainda segundo os analistas do livros *Exame de textos*, há também aspectos positivos, como:

- Apresenta o conceito de Sistemas Escalonados e discussões de Sistemas. Na sequência, prova que operações elementares transformam um sistema em outro sistema equivalente.
- Mostra como escalonar e resolver Sistemas, inclusive os indeterminados.
- Define as matrizes associadas a um sistema.

Na análise, apresentada no Guia do Livro Didático 2012 , consta sobre Sistemas de Equações Lineares que:

- O método de escalonamento para resolução de sistemas lineares recebe merecida atenção.
- São apresentadas transformações geométricas no plano, associadas às suas representações matriciais.
- A maior parte dos exercícios exige apenas cálculos conforme foram apresentados no texto.
- Os conteúdos da obra estão bem contextualizados. Predominam as conexões dentro da própria Matemática, principalmente na História da Matemática.

Convém observar que nem o livro *Exame de Textos* e nem o *Guia 2012* se referiram à interpretação geométrica de sistemas. Mas no livro aprovado pelo *Guia 2012*, aparece a interpretação geométrica de Sistemas de Equações Lineares para sistemas 2×2.

Comparando a avaliação do livro *Exame de Textos* com a obra que consta no *Guia 2012*, foi verificado que as falhas citadas na primeira avaliação foram amenizadas na versão atual. Por exemplo, o erro na demonstração da Regra de Cramer para um sistemas 2×2, citado no livro *Exame de Textos*, já está corrigido no livro aprovado pelo MEC.

2.2.2 Luiz Roberto Dante - Matemática: Contexto e Aplicações

O autor Luiz Roberto Dante manteve o mesmo nome para as duas coleções que foram analisadas: *Matemática - Contexto e aplicações*.

No livro *Exame de Textos* [6], a coleção de Dante foi analisada por Elon Lages Lima e Eduardo Wagner, que apontaram uma série de problemas:

- O preâmbulo apresenta exemplos desnecessários, que mais complicam do que contribuem.

- O livro interpreta geometricamente a solução de um sistema 2×2 como a intersecção de duas retas, mas não faz a interpretação geométrica de um sistema 3×3.

- A Regra de Cramer é usada com frequência, inclusive para resolver sistemas 2×2 e para discutir sistemas, onde o método utilizado só é valido para sistemas 2×2 e, neste caso, seria muito mais simples checar a proporcionalidade dos coeficientes.

- É cometido um erro ao afirmar que $D = D_x = D_y = D_z = 0$ implica um sistema possível e indeterminado. No qual, D denota o determinante da matriz dos coeficientes do sistema e D_x, D_y e D_z são os determinantes da matriz dos coeficientes, substituindo, respectivamente, a coluna das variáveis x, y ou z pela coluna dos termos independentes.

  O motivo desse erro decorre da dedução da Regra de Cramer, segundo a qual se (x_0, y_0, z_0) é uma solução do sistema, então:

  $$x_0.D = D_x \ , \ y_0.D = D_y \text{ e } z_0.D = D_z$$

  Se tomarmos $D = D_x = D_y = D_z = 0$, *então* temos que:

  $$x_0.0 = 0, \ y_0.0 = 0 \text{ e } z_0.0 = 0$$

  Como isso é válido para todo terno (x, y, z), pode-se pensar de forma equivocada, que todo terno (x, y, z) é solução do sistema. Porém, é preciso observar que o *se* e o *então* no enunciado caracterizam uma implicação cuja recíproca pode ser falsa. Pois um sistema indeterminado apresenta infinitas soluções, o que não significa que todo terno (x, y, z) é sua solução.

- Os exercícios enfatizam o uso de processos automáticos, de repetição, não estimulam o aluno a pensar. Isso é observado, porque não há problemas contextualizados sobre sistemas lineares.

Os analistas elogiaram a seção final na qual são apresentados problemas sobre Programação Linear, sendo um bom exemplo de contextualização para que o aluno possa ver a Matemática sendo aplicada para resolver problemas relevantes.

A análise dessa obra pelo Guia do Livro Didático, referente ao conteúdo de sistemas lineares, ressalta que:

- A interpretação geométrica de sistemas 2×2 está bem trabalhada.
- A abordagem de sistemas lineares 3×3 é feita a partir da análise de possibilidades para as posições relativas de três planos no espaço.
- Os conteúdos são abordados em textos e questões que buscam contextualizar os conhecimentos e motivar os alunos.
- Há o desenvolvimento de conceitos e procedimentos, feito por meio de situações-problema que introduzem os temas tratados. Essa apresentação segue o modelo tradicional de explanação dos conceitos, acompanhada de exercícios de aplicação.
- Várias questões exigiriam a aplicação de pensamento crítico, raciocínio e argumentação. No entanto, as sugestões apresentadas facilitam muito as soluções.
- A seção “A Matemática e as Práticas Sociais” busca conscientizar o aluno sobre a importância da compreensão e da resolução de problemas e pode contribuir para a sua formação ética.

Foi possível perceber que, na edição aprovada pelo MEC e publicada no *Guia do Livro Didático 2012* [5], os problemas relatados, em 2001 no livro *Exame de Textos* [6], foram corrigidos. O autor faz a interpretação geométrica para sistemas 3×3, a resolução de Sistemas de Equações Lineares é feita apenas pelo Método do Escalonamento e a Regra de Cramer foi eliminada da obra.

2.2.3 Manoel Rodrigues Paiva - Coleção Matemática

De 2001 para 2012, o autor Manuel Rodrigues Paiva modificou o título de sua coleção que passou de *Coleção Matemática* para *Matemática - Paiva*.

No livro *Exame de Textos* [6], sua obra foi analisada por Paulo Cezar Pinto Carvalho[4]

[4]Engenheiro Civil, Doutor em Ciências e Pesquisador associado do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA).

e João Bosco Pitombeira de Carvalho[5]. Segundo eles, o tratamento dado aos Sistemas de Equações Lineares tem como pontos negativos:

- Não é feita nenhuma interpretação geométrica, nem sequer para um sistema 2×2.
- Ressalta as vantagens do Escalonamento antes de expor o Teorema de Cramer, sem mostrar as desvantagens computacionais do Método de Cramer.
- Demonstra o Método de Cramer apenas para sistemas 3×3.

Porém, os analistas listam vários pontos positivos da obra de Paiva, como:

- Resolve Sistemas pelo Método do Escalonamento, definindo sistemas equivalentes e aplicando operações elementares, para chegar ao sistema equivalente escalonado.
- Descreve soluções de um Sistema Indeterminado.
- Indica que o determinante da matriz dos coeficientes de um sistema é nulo, se e somente se o sistema é indeterminado ou impossível.

Na análise feita no *Guia do Livro Didático 2012*, consta sobre Sistemas de Equações Lineares que:

- Os sistemas lineares 2×2 são interpretados geometricamente, o que favorece a atribuição de significados às noções trabalhadas. Mas o mesmo não ocorre para Sistemas 3×3.
- Há imprecisão quando se descreve o método de escalonamento. Não há, no *Guia 2012* [5], uma justificativa específica para esse comentário. Mas em observação ao livro de Paiva, percebe-se que as operações elementares são apresentadas de forma imprecisa, mas que não ocasionam erros posteriores.
- O cálculo de determinantes é feito, corretamente e de forma inovadora, a partir da resolução de um sistema escalonado, tanto para matrizes de ordem 2 quanto para as de ordem 3.
- A maioria das atividades propostas é de aplicação do que é exposto no livro, o que limita a autonomia do aluno na construção do seu conhecimento.

[5]Engenheiro Civil, Doutor em Matemática e Professor da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ).

- No início de cada capítulo, são indicados problemas de outras áreas a serem resolvidos com os conteúdos abordados. Além disso, situações contextualizadas também aparecem no final. Merece destaque a seção "Matemática sem fronteiras", na qual são exploradas as conexões com outras áreas do conhecimento.

Comparando as duas avaliações feitas, percebe-se que os problemas citados no livro *Exame de Textos* [6] foram resolvidos de forma parcial, pois a interpretação geométrica, que foi cobrada na primeira análise, foi incluída apenas para sistemas 2×2 e o Método de Cramer foi excluído do material.

2.3 Algumas Considerações

O livro *Exame de Textos* [6] foi uma experiência única, na qual apesar de os autores apoiarem-se na mesma fundamentação (Conceituação, Manipulação e Aplicação), eles não seguiram um único modelo de apresentação das análises. Estas foram bem objetivas e deram enfase à correção de conteúdo.

O *Guia do Livro Didático* [5] é praticamente um periódico que vem se aperfeiçoando a cada nova publicação e seguindo bases legais. Por isso, analisa outros aspectos além dos conteúdos, como a presença de fatores éticos e sociais. Desde o início do PNLEM em 2004 e com seu crescimento nos anos seguintes, o Governo Federal tornou-se um grande cliente das editoras no Brasil. Nesse cenário, o *Guia do Livro Didático* é, sem dúvida nenhuma, o grande percursor da melhoria da qualidade desses materiais.

Por meio das comparações feitas das análises do livro *Exame de Textos* [6] e do *Guia 2012* [5], observa-se que os livros didáticos de Matemática têm melhorado de forma significativa, pois apresentam um número menor de erros, os conteúdos aproximam-se muito do que é sugerido pelas *Orientações Curriculares Nacionais* [8] e as atividades de contextualização estão mais presentes, dentre outros aspectos. É claro que ainda não são perfeitos, se é que isso seja possível, mas com certeza, as análises têm cumprido seu papel formador na busca pela melhoria da qualidade desse importante recurso didático.

3 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES NO ENSINO MÉDIO

O ensino de Sistemas de Equações Lineares está presente no currículo da Matemática no Ensino Médio, o que pode ser verificado na matriz de referência do *Exame Nacional do Ensino Médio* (ENEM) [13], nos *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio* (PCNEM e PCN+) [7] [14] e nas *Orientações Curriculares para o Ensino Médio* [8]. Lima justifica a inclusão desse conteúdo no nível médio de ensino ao afirmar que:

> Os sistemas de equações lineares constituem um tópico de grande interesse prático. Seu estudo é acessível aos estudantes, pois não requer o emprego de conceitos sutis ou complicados. Além disso, pode servir de ponto de partida para diversas teorias matemáticas relevantes e atuais. Por estes três motivos, é mais do que justa sua inclusão nos currículos escolares.([3], p.91)

Nas seções a seguir deste capítulo, serão mostradas as diferentes interpretações, métodos de solução e custos operacionais para um Sistema de Equações Lineares, segundo o proposto por Elon Lages de Lima nos Livros *Matemática e Ensino* [3] e *A Matemática do Ensino Médio - Volume 3* [4]. Para isso, será usado como referência o sistema (S) a seguir:

$$(S): \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Uma solução de (S) é um terno (x, y, z) de números reais que, substituídos no primeiro membro das equações de (S), torna todas igualdades verdadeiras. O sistema (S) pode ter uma única solução (sistema possível e determinado), infinitas soluções (sistema possível e indeterminado) e pode não ter nenhuma solução (sistema impossível).

3.1 Interpretações

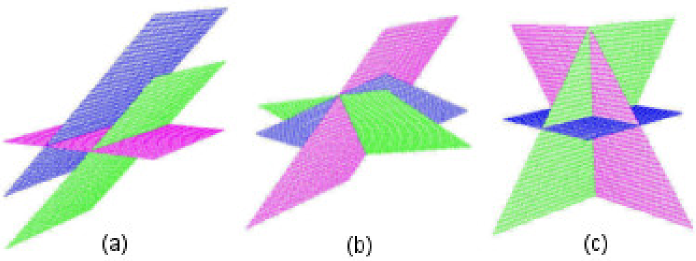
O sistema (S) pode ser interpretado sob vários pontos de vista que enriquecem suas aplicações e métodos de resolução. As três interpretações a seguir têm, segundo Lima [3], nível elementar e estão ao alcance do aluno do Ensino Médio.

3.1.1 Interpretação Geométrica

Cada solução (x, y, z) do sistema (S) pode ser vista como um ponto P do espaço, dado por suas coordenadas cartesianas: P $= (x, y, z)$. Sob esse olhar, cada uma das equações de (S) é a equação de um plano nesse espaço e as soluções do sistema são os pontos comuns a esses planos. Mais precisamente, se Π_1, Π_2 e Π_3 são os planos definidos pelas três equações de (S), então as soluções desse sistema são os pontos P $= (x, y, z)$ que pertencem à intersecção $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$ desses planos.

Exemplificando, se pelo menos dois desses planos são paralelos, figura 1(a), a intersecção $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$ é vazia e o sistema é impossível. Noutro exemplo, os três planos se intersectam formando uma reta r, contida simultaneamente nos três planos, figura 1(b). Então $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = r$ e o sistema é indeterminado: suas soluções são os pontos de r. O sistema é determinado quando os três planos se encontram num só ponto, figura 1(c).

Figura 1: Exemplos de planos no espaço.



Fonte: O autor

Há ao todo oito posições relativas possíveis para os planos Π_1, Π_2 e Π_3. Quatro dessas posições correspondem aos sistemas impossíveis, três a sistemas indeterminados e, em apenas uma, o sistema é determinado. É importante observar que se pode concluir em qual das oito posições se encontram os planos de (S) examinando os coeficientes a_i, b_i, c_i e d_i que nele comparecem. Essas posições serão melhor discutidas no quarto capítulo.

3.1.2 Interpretação Matricial

Do sistema (S), destacam-se as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, o sistema (S) pode ser escrito como:

$$A.X = D$$

O produto da linha $[a_1, b_1, c_1]$ de A pela matriz X é por definição, igual a $a_1x + b_1y + c_1z$. O produto de uma matriz A, de m linhas e n colunas, por uma matriz B, de n linhas e p colunas, é a matriz AB, de m linhas e p colunas.

3.1.3 Interpretação Vetorial

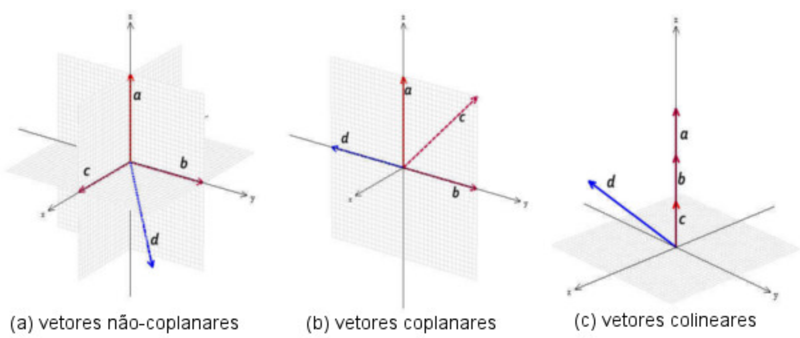
É conhecido, que no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, a soma de dois vetores $u = (\alpha, \beta, \lambda)$ e $v = (\alpha', \beta', \lambda')$ é definida por $u + v = (\alpha + \alpha', \beta + \beta', \lambda + \lambda')$ e o produto escalar do vetor u pelo número real x é definido por $x.u = (\alpha x, \beta x, \lambda x)$. Sugere-se a leitura de Hefez [20], para mais detalhes sobre esse assunto.

Assim, tomando-se as colunas de (S) que são os vetores $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$, $c = (c_1, c_2, c_3)$ e $d = (d_1, d_2, d_3)$, do espaço numérico $\mathbb{R}^3$, afirmar que (x, y, z) é uma solução de (S) significa dizer que vale a igualdade vetorial:

$$x.a + y.b + z.c = d \qquad (*)$$

Resolver o sistema (S) significa exprimir d como combinação linear dos vetores a, b e c, na forma $(*)$. Se os vetores a, b e c não forem coplanares, figura 2(a), todo vetor d em $\mathbb{R}^3$ se exprime, de modo único, como combinação linear de a, b e c. Nesse caso, o sistema (S) é determinado. Contudo, se os vetores a, b e c estiverem no mesmo plano, o sistema (S) não terá solução, a não ser que d pertença ao mesmo plano, figura 2(b). E se a, b e c forem colineares, figura 2(c), o sistema (S) possuirá solução somente se d também for colinear a eles.

Figura 2: Exemplos de representação vetorial.



Fonte: O autor

3.2 Soluções

Na seção anterior, tratou-se de interpretações de sistemas que levam a concluir se um sistema tem ou não solução. Agora, serão estudados os métodos que levam de forma explícita à solução de um sistema. Inicialmente, serão mostrados os diferentes métodos de resolução de Sistemas de Equações Lineares, para depois compará-los em relação ao custo operacional.

3.2.1 Escalonamento (Eliminação Gaussiana)

O método do escalonamento consiste em substituir o sistema (S) por um sistema equivalente (S'), no qual a matriz A' dos coeficientes de (S') esteja na forma escalonada. Uma matriz está escalonada quando o primeiro elemento não nulo de cada linha localiza-se à direita do primeiro elemento não nulo da linha anterior.

Para se passar do sistema (S) para o sistema escalonado equivalente (S'), substitui-se a segunda equação por a_2 vezes a primeira equação menos a_1 vezes a segunda. Isso elimina o termo em x da segunda equação. Da mesma forma, elimina-se o termo em x da terceira equação. Operando de forma análoga com as duas últimas equações, nas quais o termo em x já foi eliminado, elimina-se o termo em y da última equação e obtém-se o sistema (S') na forma escalonada.

$$(S') : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ \qquad\;\; b'_2y + c'_2z = d'_2 \\ \qquad\qquad\quad c''_3z = d''_3 \end{cases}$$

Um sistema na forma escalonada é resolvido facilmente de baixo para cima: a última equação fornece o valor de z. Substituindo esse valor na segunda equação, encontra-se o valor de y. Finaliza-se substituindo os valores de y e z na primeira equação e obtendo o valor de x.

3.2.2 Resolução Matricial

A interpretação matricial coloca o sistema (S) na forma $A.X = D$, que resulta diretamente na solução:

$$X = A^{-1}.D$$

Esta solução exige que A seja invertível. Por definição, tem-se que $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$, onde I é a matriz identidade. Para que A^{-1} exista, é necessário e suficiente que o determinante $detA$ da martiz A seja diferente de zero. Assim:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

onde cada A_{ij} é o determinante menor, que é obtido da matriz A excluindo-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna. Determinado A^{-1}, efetua-se a multiplicação $A^{-1}.D$, obtendo expressões diretas para as incógnitas x, y e z. Essas expressões coincidem com a Regra de Cramer que será tratada na seção a seguir.

3.2.3 Regra de Cramer

Usou-se a notação $det[u, v, w]$ para indicar o determinante da matriz cujas colunas são os vetores $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$. Se (x, y, z) é solução do sistema (S), isto é, se $x.a + y.b + z.c = d$, conforme interpretação vetorial, então pelas propriedades dos determinantes, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} det[d, b, c] &= det[x.a + y.b + z.c, b, c] = \\ &= xdet[a, b, c] + ydet[b, b, c] + zdet[c, b, c] = \\ &= xdet[a, b, c] + y.0 + z.0 = \\ &= xdet[a, b, c] \end{aligned}$$

Supondo $det[a, b, c] \neq 0$, obtém-se a Regra de Cramer:

$$x = \frac{det[d, b, c]}{det[a, b, c]}$$

e de forma análoga:

$$y = \frac{det[a, d, c]}{det[a, b, c]}, z = \frac{det[a, b, d]}{det[a, b, c]}$$

3.3 Comparando o Custo Operacional

Os métodos de resolução de sistemas, apresentados nas seções anteriores, serão analisados em relação ao número de divisões e multiplicações necessárias para aplicar cada um deles em um sistema 3×3, o que será chamado de "custo operacional".

3.3.1 Custo do Escalonamento

Para eliminar o termo em x das 2ª e 3ª equações são necessárias $(4+4)+(4+4) = 16$ multiplicações, para eliminar o termo em y da terceira equação precisa-se de mais $(3+3) = 6$ multiplicações, uma divisão para encontrar o valor de z, uma multiplicação e uma divisão para se obter o valor de y, e duas multiplicações e uma divisão para se achar o valor de x. Totalizando 28 operações de multiplicação ou divisão, para resolver um sistema 3×3 pelo método do escalonamento.

3.3.2 Custo Matricial

Para calcular a inversa de A, precisa-se de calcular o $detA$, fazendo isso pelo desenvolvimento de uma linha ou coluna, são necessárias nove multiplicações. Depois vem o cálculo dos nove determinantes menores A_{ij}, como três destes já foram calculados no $detA$, tem-se que calcular os seis restantes, onde são necessárias duas multiplicações para cada um, o que corresponde a doze multiplicações. Agora é necessário fazer as divisões de cada A_{ij} pelo $detA$, são nove divisões. Terminando-se o cálculo de A^{-1} com o total de $(9+12+9) = 30$ operações. Finaliza-se a resolução do sistema efetuando a multiplicação $(A^{-1}.D)$, na qual são necessárias mais nove operações, assim chega-se ao custo total de $(30+9) = 39$ operações.

3.3.3 Custo da Regra de Cramer

Na resolução do sistema em questão pela Regra de Cramer, é necessário calcular quatro determinantes, se isso for feito pelo desenvolvimento de uma linha ou coluna, serão necessárias nove multiplicações para cada determinante, o que corresponde a $(4 \times 9) = 36$ multiplicações. Para finalizar, deve-se fazer três divisões, chegando ao custo total de $(36+3) = 39$ operações.

O custo da Regra de Cramer coincide com o custo matricial, devido ao fato de esta regra coincidir com a expressão $X = A^{-1}.D$, como foi observado na seção sobre essa interpretação.

3.3.4 Comparando os Custos

Quando se compara esses métodos para a resolução de um sistema 3×3, verifica-se que o escalonamento tem custo de 28 operações, enquanto os outros dois têm ambos custo de 39 operações. Para o caso 3×3, a diferença não é tão grande assim, o problema é que quanto maior for o sistema, maior vai ser essa diferença, atingindo cifras gigantescas. O custo da Regra de Cramer para um sistema $n \times n$ é de aproximadamente $(n+1)!(e-1)+n$ operações, enquanto que o custo para esse mesmo sistema pelo método do escalonamento é de $\frac{2n^3}{3} + \frac{3n^2}{2} - \frac{7n}{6}$ operações, considerando o dobro de multiplicações necessárias, para que, desta forma, não sejam utilizadas frações.

Para comparar melhor esses métodos, pode-se utilizar como referência um computador capaz de efetuar um milhão de multiplicações ou divisões por segundo. Se considerar um sistema 20×20, esse computador gastaria seis milésimos de segundo para resolvê-lo pelo escalonamento, enquanto que, pela Regra de Cramer, o mesmo computador levaria 2.754.140 anos para resolvê-lo. Isso mostra que a Regra de Cramer não é apropriada para resolver sistemas de grande porte.

3.4 Algumas Considerações

Lima [3] ao abordar Sistemas de Equações Lineares tratou especificamente de sistemas 3×3, no entanto, é conveniente ressaltar que tais interpretações e soluções também são válidas para sistemas 2×2. O maior diferencial entre esses dois tipos de sistemas está na interpretação geométrica que, no 2×2, consiste em analisar as posições de duas retas no plano. Para maiores esclarecimentos sobre esse tema, sugere-se como referência o livro *A Matemática do Ensino Médio - Volume 3* [4].

Outra consideração importante é que a superioridade do escalonamento não se limita ao custo operacional. Convém destacar que a Regra de Cramer e o Método Matricial só são válidos para sistemas que possuem $detA \neq 0$, enquanto que o Método do Escalonamento não depende de nenhuma hipótese sobre o $detA$. Se o sistema for impossível, a terceira equação fica da forma $0.z = m$ com $m \neq 0$ e, se o sistema for indeterminado, obtem-se a equação $0.z = 0$.

4 O FOCO NA INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio [8] estabelecem que o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares deve ir além das técnicas de resoluções e recomendam que sejam trabalhadas as interpretações geométricas para sistemas 2×2, 2×3 e 3×3. Além disso, sugerem que o método de resolução deve ser o Escalonamento e que a Regra de Cramer não deve ser trabalhada. Nesse mesmo documento, é recomendado o uso de *softwares* matemáticos. Destaca-se que este recurso permite que o aluno veja, em um mesmo ambiente, diferentes interpretações de uma mesma situação matemática, como: algébrica, geométrica e numérica.

Lima [15] afirma que o Escalonamento ou Eliminação Gaussiana é um processo simples e extremamente eficiente para resolver Sistemas de Equações Lineares. Essa afirmação se justifica pelo fato de o processo ter um baixo custo operacional e não depender de nenhuma condição para ser executado.

O *Guia do livro Didático-2012* [5], por sua vez, dá mais importância em verificar se as obras fazem ou não articulações entre conteúdos, por exemplo, sobre a abordagem geométrica para Sistemas de Equações Lineares:

> No entanto, dada a importância dessas articulações, elas deveriam ser mais frequentes. Um exemplo, encontrado em todas as coleções resenhadas, é a conexão feita entre as funções afins e as equações da reta no plano cartesiano. Porém, ela recebe uma atenção muito pequena em algumas dessas obras. Outra conexão, também presente em todas as coleções, é feita entre sistemas lineares com duas incógnitas e um conjunto de retas no plano cartesiano. Igualmente sugestiva, mas nem sempre justificada de maneira adequada, a articulação entre sistemas com três incógnitas e um conjunto de planos no espaço tridimensional é trabalhada em quatro das sete coleções.([5], p.22)

Com base nas recomendações das Orientações Curriculares para o Ensino Médio, serão apresentados, na sequência, dois planos de aula que procuram atender aos seguintes pressupostos: abordagem geométrica de Sistemas de Equações Lineares, resolução de sistemas pelo método do Escalonamento e uso de ferramentas educacionais. Os planos se diferenciam apenas pelas ferramentas adotadas. Um utiliza *softwares* de Geometria Dinâmica, enquanto o outro faz uso de materiais concretos.

É importante destacar que nos planos a seguir serão abordados apenas sistemas do tipo $2{\times}2$ e $3{\times}3$, mas que o método de resolução e o processo para analisar as interpretações geométricas podem ser executados de forma análoga em sistemas do tipo $n \times 2$ e $n \times 3$.

Os planos em questão, tem como meta que os alunos alcancem os seguintes objetivos:

- reconhecer uma equação linear;
- verificar se uma sequência ordenada é solução de uma equação linear;
- reconhecer um sistema linear;
- verificar se uma sequência ordenada é solução de um sistema linear;
- resolver um sistema linear, em particular utilizando o método da eliminação de Gauss (Escalonamento);
- classificar um sistema linear em relaçao ao seu número de soluções, identificando sua representação geométrica;
- resolver problemas que envolvam Sistemas de Equações Lineares.

4.1 Plano 1: *Softwares*

Nas *Orientações Curriculares para o Ensino Médio* [8], a relação entre tecnologia e Matemática é abordada de duas formas: a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia e a tecnologia como ferramenta para atender a Matemática. Com base na segunda forma, serão utilizados aqui, *softwares* de Geometria Dinâmica como ferramenta educacional no ensino da Matemática. Pois, para Valente [16], o computador pode ser usado como uma ferramenta educacional, não como um instrumento que ensina o aluno, mas como uma ferramenta com a qual o educando desenvolve algo. Dessa forma, o aprendizado ocorre pelo fato de estar executando uma tarefa por intermédio do computador.

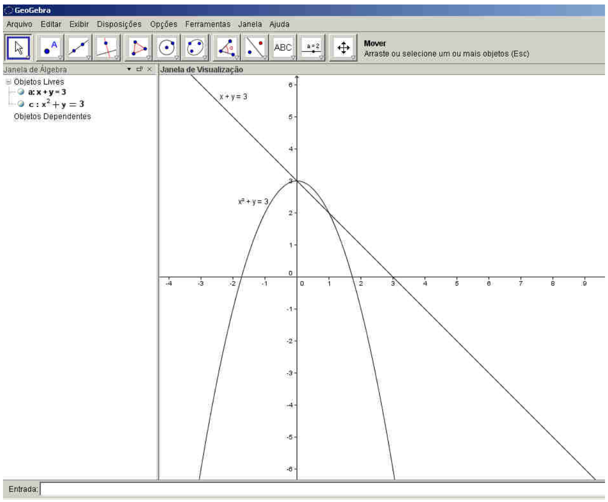
4.1.1 Sequência Didática

Este plano inicia-se pelo conteúdo de Equações Lineares, tendo como objetivo que o aluno reconheça uma solução para uma equação com duas variáveis, compreenda a diferença entre uma equação linear e uma não linear, e estabeleça a conexão entre a equação linear e a reta.

1. **Equação Linear**

Atividade proposta: Encontre cinco soluções para cada uma das equações $x + y = 3$ e $x^2 + y = 3$. Em seguida, represente essas equações em um plano cartesiano com o auxílio do *software* Geogebra. Esta atividade é representada na figura 3.

Figura 3: Equação linear e não linear.



Fonte: O autor

Responda as seguintes perguntas:

i) Como você descreve o formato representado por cada uma das equações?

ii) Alguma das equações representadas é uma equação linear? Justifique sua resposta.

iii) Vamos representar outras equações? (Neste momento representaremos equações sugeridas pelos alunos).

Comentário:

Este item é fechado com a formalização do conceito de equação linear e suas soluções.

É uma equação linear, nas incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, toda equação do tipo:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b$$

Onde os números reais $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}$, são chamados coeficientes e b, também real, é o termo independente da equação.

A sequência $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ é solução de uma equação linear quando ao substituirem os valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tornam verdadeira a igualdade:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b$$

2. **Sistemas Lineares 2 × 2**

No exemplo 1, espera-se que o aluno comece a reconhecer um sistema linear. Para isso, deve-se, inicialmente, provocar os alunos a encontrarem a resposta do problema de uma forma não algébrica, para depois construir a representação algébrica e, na sequência, a representação geométrica com o uso do Geogebra.

Exemplo 1: Uma conta com o valor de R$95,00 foi paga com notas de R$5,00 e de R$10,00, no total de 10 notas. Quantas notas de R$10,00 foram usadas?

Perguntas dirigidas aos alunos:

i) Como podemos representar este problema algebricamente?

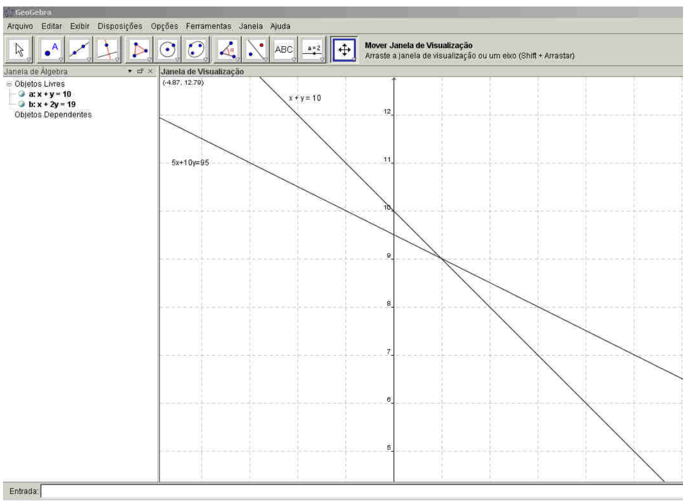
ii) O *software* pode nos ajudar a resolver este problema?

Sistema que representa o problema em questão:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 5x + 10y = 95 \end{cases}$$

A solução geométrica do problema no Geogebra é apresentada na figura 4:

Figura 4: Representação geométrica do exemplo 1.



Fonte: O autor

3. **Sistema de Equações Lineares, suas Soluções e Classificações**

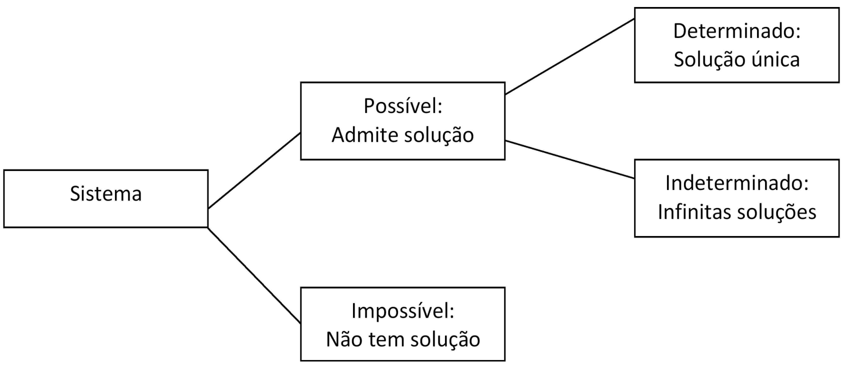
Denomina-se sistema linear $m \times n$ o conjunto S de m equações lineares de n incógnitas que pode ser representado assim:

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Afirma-se que a sequência $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ é solução de um sistema linear quando é solução de cada uma das equações do sistema.

Classificação de um sistema: Um sistema é classificado de acordo com a quantidade de soluções que apresenta, conforme apresentado na figura 5:

Figura 5: Classificação de um Sistema de Equações Lineares.



Fonte: O autor

4. **Representação Geométrica de um Sistema 2×2**

Este item tem o objetivo de fazer com que o aluno comece a relacionar as soluções de um sistema linear 2×2 às posições relativas de duas retas e associe esse fato à proporção entre os coeficientes, pois para o sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

temos que:

se, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, o sistema é possível e indeterminado;

se, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, o sistema é impossível;

se, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, o sistema é possível e determinado.

Atividade proposta: Represente, no Geogebra, o sistema S que é formado pelas equações $ax + by = c$ e $dx + ey = f$, criando o controle deslizante para os coeficientes a, b, c, d, e, f.

Responda as perguntas:

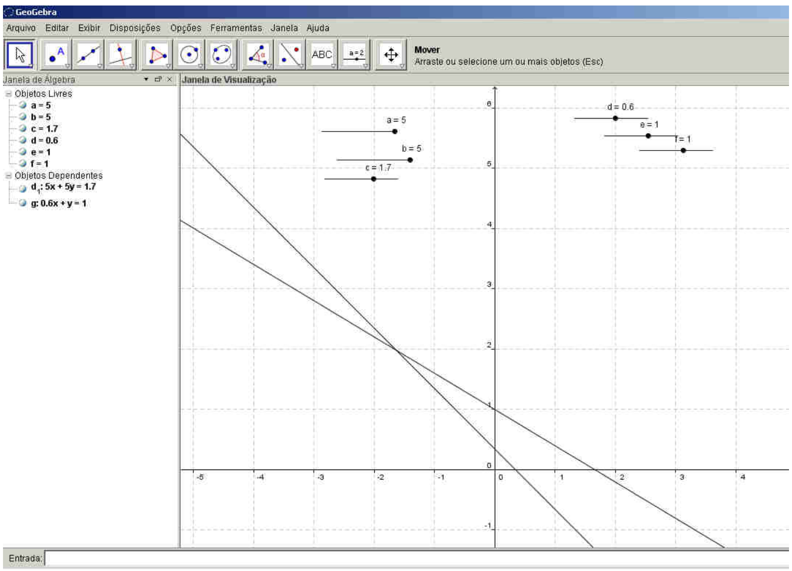
1. Quando as retas são paralelas, S tem solução? Qual a relação entre os coeficientes?

2. Quando as retas são concorrentes, S tem solução? Quantas possibilidades há? Qual a relação entre os coeficientes?

3. Para que valores dos coeficientes as retas coincidem? Neste caso, S tem solução?

Com a realização desta atividade, espera-se que os alunos descrevam, no Geogebra, gráficos similares ao apresentado na figura 6.

Figura 6: Gráfico feito com o auxílio do controle deslizante.



Fonte: O autor

5. **Método da Eliminação de Gauss (Escalonamento)**

Um sistema está escalonado quando o primeiro elemento não-nulo de cada uma de suas linhas situa-se à esquerda do primeiro elemento não-nulo da linha seguinte. Linhas nulas devem estar abaixo das demais.

Exemplos de Sistemas lineares escalonados:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 5y = 45 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + z = 8 \\ y + 2z = 3 \\ z = 0 \end{cases}$$

Para se transformar um sistema em um outro sistema equivalente, na forma escalonada, podem-se aplicar a este sistema as seguintes operações elementares:

- trocar a posição relativa de duas equações do sistema;
- trocar uma equação pela sua soma termo a termo com um múltiplo de outra equação do mesmo sistema;
- multiplicar todos os termos de uma equação por um número real não nulo.

Resolva pelo método da eliminação de Gauss (escalonamento) os sistemas:

$$a)\begin{cases} x + y = 4 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x - y + 2z = 9 \\ 2x + y + z = 6 \\ -2x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

Resoluções:

Item a) Executando operações elementares sobre a matriz completa do sistema obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 + L_1.(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

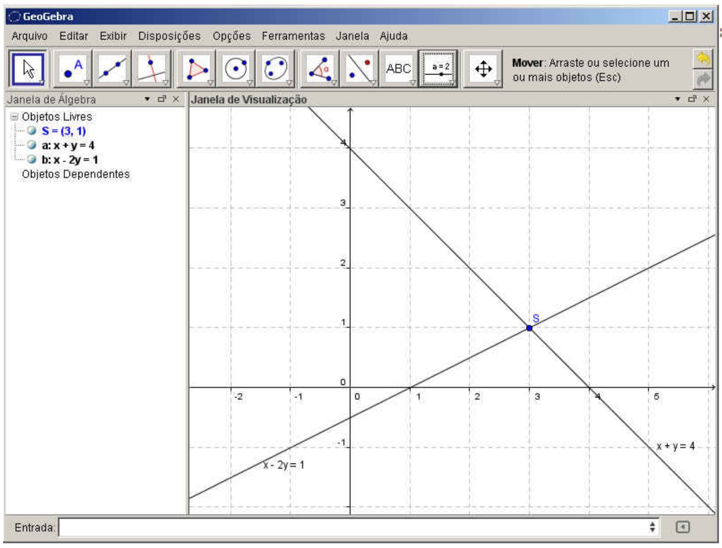
A matriz obtida acima é a matriz completa do sistema escalonado a seguir.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ -3y = -3 \end{cases}$$

Por meio da segunda equação do sistema escalonado, obtém-se $y = 1$ e, substituindo este resultado na primeira equação, obtém-se $x = 3$. Portanto, o sistema apresenta solução única que é o par ordenado $(3, 1)$.

Pode-se verificar a representação geométrica deste sistema com a ajuda do *software* Geogebra, conforme figura 7.

Figura 7: Representação gráfica do sistema 2×2.



Fonte: O autor

Item b) Efetuando operações elementares sobre a matriz completa do sistema, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_3+L_1.2}{\overset{L_2+L_1.(-2)}{\longrightarrow}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & -3 & -12 \\ 0 & -4 & 5 & 19 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3.3+L_2.4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Que é a matriz completa do sistema escalonado:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 9 \\ 3y - 3z = -12 \\ 3z = 9 \end{cases}$$

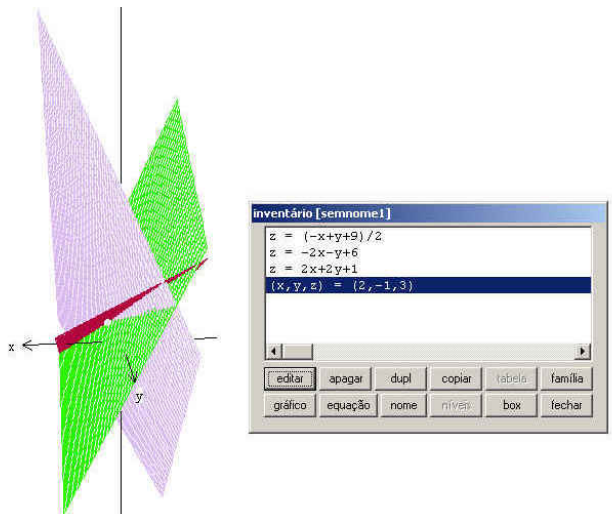
Da terceira equação, obtém-se $z = 3$, aplicando este valor na segunda equação obtém-se $y = -1$ e, substituindo os valores encontrados para y e z na primeira equação, tem-se $x = 2$. Portanto, o sistema tem solução única que é a terna $(2, -1, 3)$.

Pode-se entender geometricamente esse sistema com o auxílio do *software Winplot*. Para isso, é necessário isolar a variável z em cada uma das equações do sistema, pois esse é o modo de entrada desse *software*.

$$b) \begin{cases} z = (-x + y + 9)/2 \\ z = -2x - y + 6 \\ z = 2x + 2y + 1 \end{cases}$$

A representação geométrica desse sistema é apresentada na figura 8.

Figura 8: Representação geométrica do sistema 3×3.



Fonte: O autor

6. **Representação geométrica de sistemas 3×3**

As três equações lineares do sistema

$$S : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_3 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

representam, na ordem em que aparecem, os planos Π_1, Π_2 e Π_3 do $\mathbb{R}^3$. Um ponto $P = (x, y, z)$ é solução de S se $P \in \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$. Ao se comparar os coeficientes de dois planos no espaço, é possível concluir se eles são coincidentes, paralelos ou concorrentes, ou seja, tem-se que:

$\frac{a_i}{a_j} = \frac{b_i}{b_j} = \frac{c_i}{c_j} = \frac{d_i}{d_j}$, para planos coincidentes.

$\frac{a_i}{a_j} = \frac{b_i}{b_j} = \frac{c_i}{c_j} \neq \frac{d_i}{d_j}$, para planos paralelos.

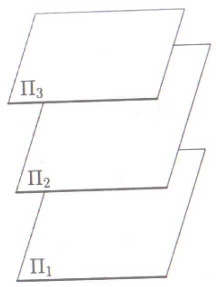
$\frac{a_i}{a_j} \neq \frac{b_i}{b_j}$ ou $\frac{a_i}{a_j} \neq \frac{c_i}{c_j}$ ou $\frac{b_i}{b_j} \neq \frac{c_i}{c_j}$, para planos concorrentes.

E quando se trata das posições dos três planos de S no espaço, para se representar geometricamente esse sistema, faz-se necessário associar sua solução com a comparação das três equações envolvidas, feita duas a duas. A partir disso, encontram-se as oito posições possíveis para esses planos que serão apresentadas e classificadas, a seguir, quanto ao número de soluções.

i) Sistemas impossíveis: não têm solução

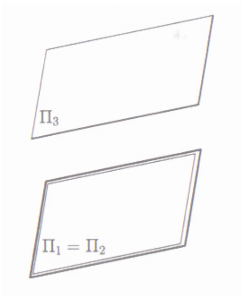
Podem ser representadas as possíveis posições de planos no espaço para um Sistema impossível pelas figuras 9, 10, 11 e 12.

Figura 9: Os planos são paralelos dois a dois.



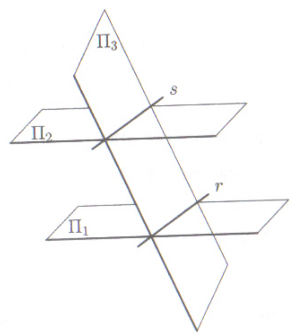
Fonte: [4], p.125

Figura 10: Dois planos coincidentes e um paralelo a eles.



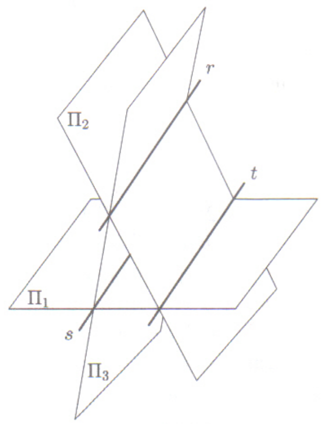
Fonte: [4], p.122

Figura 11: Dois planos são paralelos e o terceiro intersecta esses dois.



Fonte: [4], p.125

Figura 12: Os planos se intersectam dois a dois.

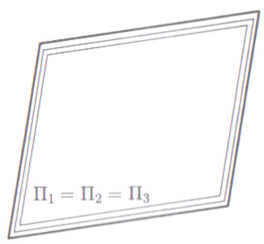


Fonte: [4], p.129

ii) Sistemas possíveis e indeterminados: admitem infinitas soluções

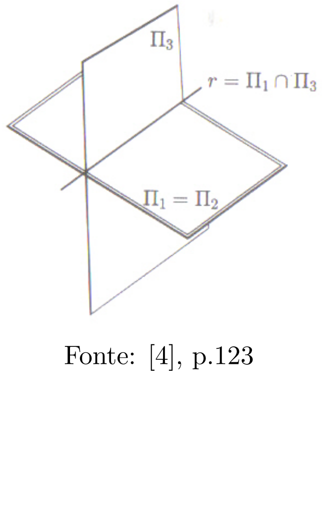
Representam-se as possíveis posições de planos no espaço para um Sistema possível e indeterminado pelas figuras 13, 14 e 15.

Figura 13: Os três planos são coincidentes.



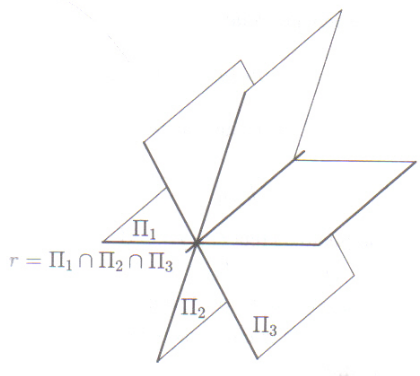
Fonte: [4], p.122

Figura 14: Dois planos são coincidentes e o terceiro intersecta esses dois.



Fonte: [4], p.123

Figura 15: Os três planos se intersectam segundo uma reta.

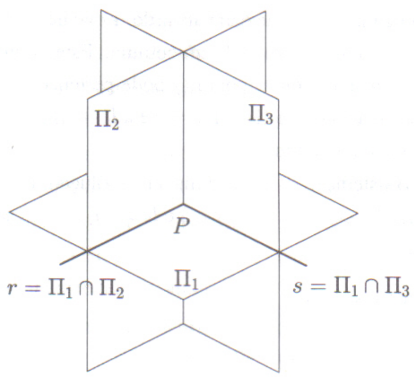


Fonte: [4], p.127

iii) Sistemas possíveis e determinados: admitem solução única

A figura 16 representa uma possível posição de planos no espaço para um sistema possível e determinado.

Figura 16: Os três planos se intersectam em um ponto.



Fonte: [4], p.131

Encerra-se este plano através do exemplo 2, para que os alunos explorem mais possibilidades sobre o que foi tratado aqui.

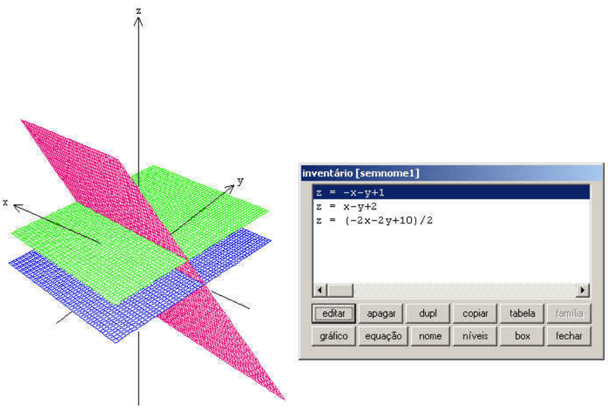
Exemplo 2: Resolva os sistemas a seguir e represente-os geometricamente.

$$a)\begin{cases} x+y+z=1 \\ -x+y+z=2 \\ 2x+2y+2z=10 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=3 \\ 5x+2y+4z=6 \end{cases}$$

Resolução:

Em $a)$ tem-se pela representação geométrica que o sistema será impossível e, portanto, sua solução é o conjunto vazio. Conforme a figura 17.

Figura 17: Representação geométrica do item a).



Fonte: O autor

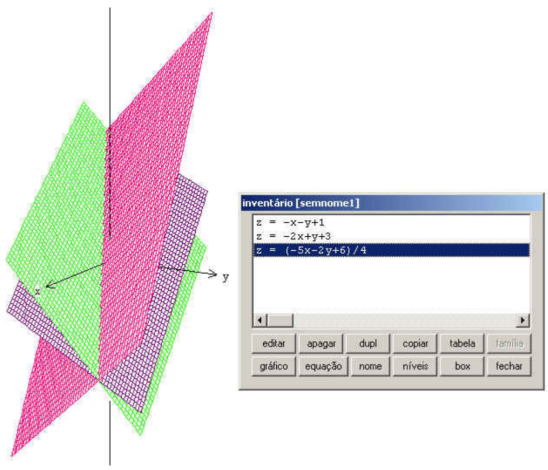
Chega-se a mesma conclusão de modo algébrico, pois realizadas operações elementares sobre a matriz completa do sistema, chega-se ao seguinte sistema escalonado:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \quad 2y + 2z = 3 \\ \qquad\quad 0z = 8 \end{cases}$$

Como não existe $z \in \mathbb{R}$ que satisfaça a equação é $0z = 8$, conclui-se que o sistema é impossível.

Em b) tem-se pela representação geométrica, que o sistema será possível e indeterminado. Conforme a figura 18.

Figura 18: Representação geométrica do item b).



Fonte: O autor

Chega-se a mesma conclusão de modo algébrico, pois realizadas operações elementares sobre a matriz completa do sistema, obtém-se o seguinte sistema escalonado:

$$b)\begin{cases} x+y+z=1 \\ -3y-z=1 \\ 0z=0 \end{cases}$$

Como $0z = 0$ é valida para todo $z \in \mathbb{R}$, o Sistema será indeterminado e pode-se escrever sua solução em função da variável z, da qual, tem-se como solução deste sistema a terna $(\frac{4-2z}{3}, \frac{-z-1}{3}, z)$.

4.2 Plano 2: Material Concreto

Este plano difere do anterior apenas pela troca da ferramenta educacional. Aqui, substitui-se a informática pelo uso de materiais concretos, permanecendo os mesmos objetivos, as fundamentações teóricas sobre o assunto e, até mesmo, as atividades que não dependem do uso do *software*.

4.2.1 Sequência Didática

O conteúdo de Equações Lineares é o ponto de partida deste plano, cujos objetivos são que o aluno reconheça uma solução para uma equação com duas variáveis e compreenda a diferença entre uma equação linear e uma não linear. Espera-se também que ele estabeleça uma conexão entre a equação linear e a reta.

1. **Equação Linear**

Atividade proposta: Encontre cinco soluções para cada uma das equações $x + y = 3$ e $x^2 + y = 3$. Em seguida, represente essas equações em um plano cartesiano feito em um papel quadriculado.

Responda as seguintes perguntas:

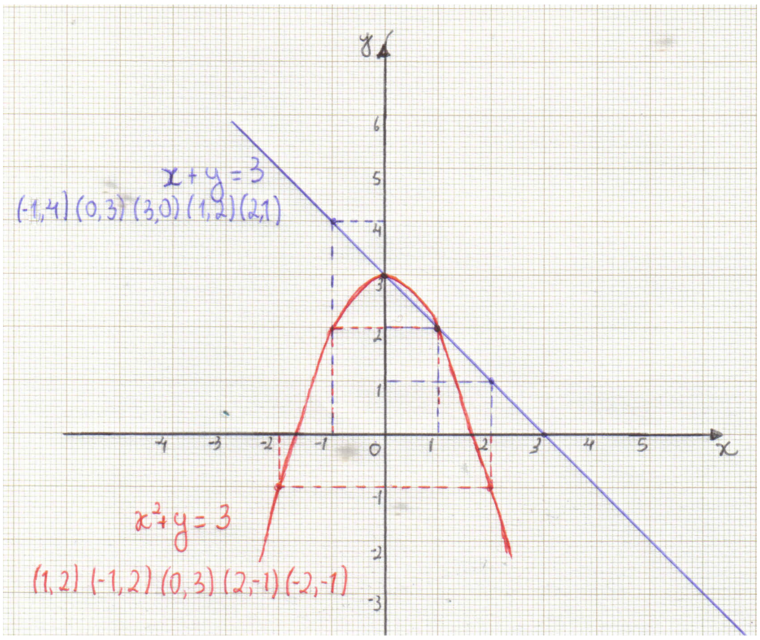
i) Como você descreve o formato representado por cada uma das equações?

ii) Alguma das equações representadas é uma equação linear? Justifique sua resposta.

iii) Vamos escrever outras equações?

Na figura 19, há a representação geométrica desta atividade:

Figura 19: Equação linear e não linear no papel quadriculado.



Fonte: O autor

Comentário:

Fecha-se este item com a formalização do conceito de equação linear e suas soluções.

É uma equação linear, nas incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, toda equação do tipo:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b$$

Onde os números reais $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}$, são chamados coeficientes e b, também real, é o termo independente da equação.

A sequência $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ é solução de uma equação linear quando ao substituirem os valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tornam verdadeira a igualdade:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b$$

2. **Sistemas lineares 2 × 2**

No exemplo 1, espera-se que o aluno comece a reconhecer um sistema linear. Deve-se, inicialmente, provocar os alunos a encontrarem a resposta do problema de uma forma não algébrica, para depois construir a representação algébrica e, na sequência, a representação geométrica no papel quadriculado.

Exemplo 1: Uma conta com o valor de R$95,00 foi paga com notas de R$5,00 e de R$10,00, no total de 10 notas. Quantas notas de R$10,00 foram usadas?

Perguntas dirigidas aos alunos:

i) Como podemos representar este problema algebricamente?

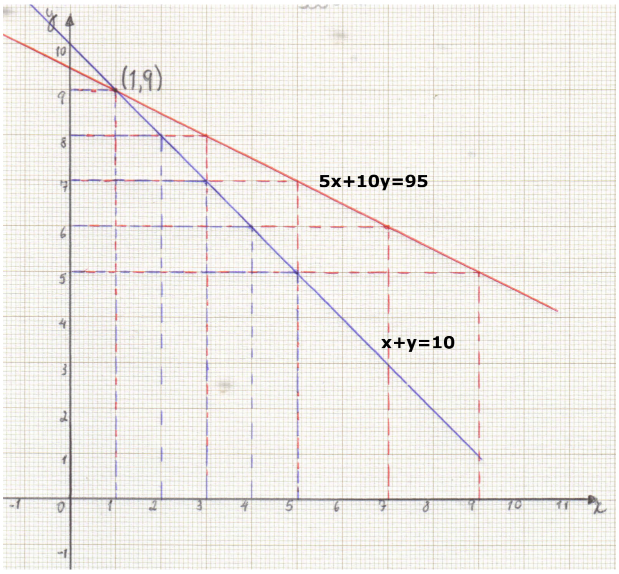
ii) Como podemos representá-lo geometricamente?

Sistema que representa o problema em questão:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 5x + 10y = 95 \end{cases}$$

Pela observação da figura 20, que representa geométricamente o exemplo 1, tem-se que o ponto $(1, 9)$ é sua única solução:

Figura 20: Representação geométrica do exemplo 1, feita no papel milimetrado.



Fonte: O autor

3. **Sistema de Equações Lineares, suas Soluções e Classificações**

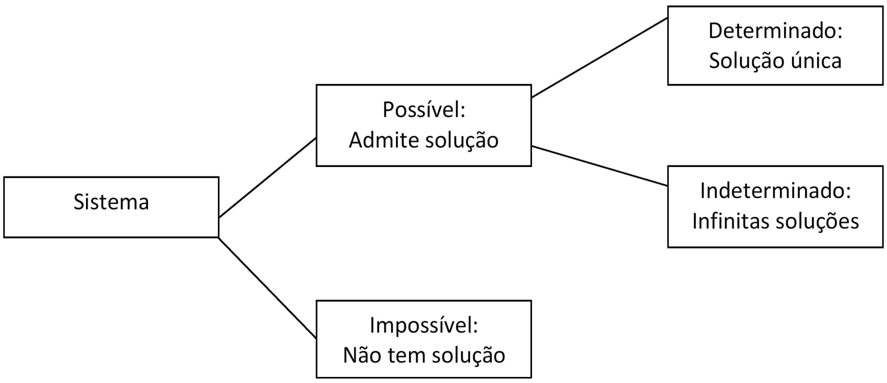
Denomina-se sistema linear $m \times n$ o conjunto S de m equações lineares de n incógnitas que pode ser representado assim:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Afirma-se que a sequência $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ é solução de um sistema linear quando é solução de cada uma das equações do sistema.

Classificação de um sistema: Um sistema é classificado de acordo com a quantidade de soluções que apresenta, conforme representação na figura 21:

Figura 21: Classificação de um Sistema de Equações Lineares.



Fonte: O autor

4. **Representação geométrica de um sistema 2 × 2**

Este item tem o objetivo de fazer com que o aluno comece a relacionar as soluções de um sistema linear 2×2 às posições relativas de duas retas e associe esse fato à proporção entre os coeficientes, pois para o sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

temos que:

se, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, o sistema é possível e indeterminado;

se, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, o sistema é impossível;

se, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, o sistema é possível e determinado.

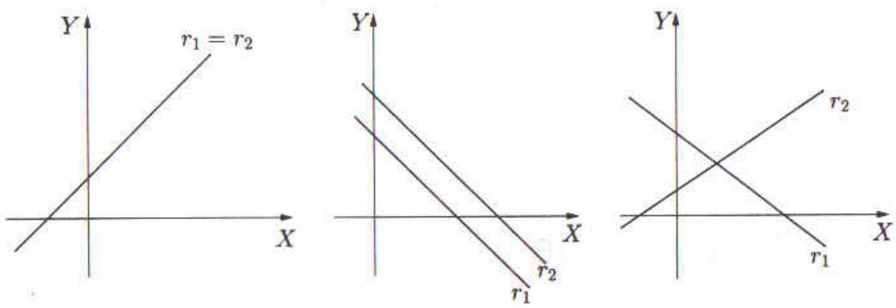
Atividade proposta: Organize os alunos em grupos e entregue dois palitos de churrasco, representando equações de retas, para cada grupo. Peça para que eles discutam sobre as perguntas a seguir e, na sequência, peça para que os grupos apresentem suas soluções. O professor assume, nesta atividade, o papel de mediador entre as conclusões dos alunos e as respostas corretas.

Perguntas:

1. Quando as retas são paralelas, S tem solução? Qual a relação entre os coeficientes?
2. Quando as retas são concorrentes, S tem solução? Quantas possibilidades há? Qual a relação entre os coeficientes?
3. Para que valores dos coeficientes as retas coincidem? Neste caso, S tem solução?

A figura 22 representa possíveis posições de retas no plano:

Figura 22: Posições de duas retas no plano.



Fonte: [4], p. 110

5. **Método da Eliminação de Gauss (Escalonamento)**

Um sistema está escalonado quando o primeiro elemento não-nulo de cada uma de suas linhas situa-se à esquerda do primeiro elemento não-nulo da linha seguinte. Linhas nulas devem estar abaixo das demais.

Exemplos de sistemas lineares escalonados:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ \quad 5y = 45 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ \quad y - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + z = 8 \\ \quad y + 2z = 3 \\ \quad z = 0 \end{cases}$$

Para se transformar um sistema em um outro sistema equivalente, na forma escalonada, podem-se aplicar a este sistema as seguintes operações elementares:

- trocar a posição relativa de duas equações do sistema;

- trocar uma equação pela sua soma termo a termo com um múltiplo de outra equação do mesmo sistema;
- multiplicar todos os termos de uma equação por um número real não nulo.

Resolva pelo método da eliminação de Gauss (escalonamento) os sistemas:

$a)\begin{cases} x+y=4 \\ x-2y=1 \end{cases}$ $\qquad$ $b)\begin{cases} x-y+2z=9 \\ 2x+y+z=6 \\ -2x-2y+z=1 \end{cases}$

Resoluções:

Item $a)$ executando operações elementares sobre a matriz completa do sistema, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2+L_1.(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Que é a matriz completa do sistema escalonado a seguir.

$$\begin{cases} x+y=4 \\ -3y=-3 \end{cases}$$

Daí, obtém-se $y=1$ e, substituindo este resultado na primeira equação, obtém-se $x=3$. Portanto, o sistema apresenta solução única que é o par ordenado $(3,1)$.

Item $b)$ efetuando operações elementares sobre a matriz completa do sistema obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{L_2+L_1.(-2)} \\ L_3+L_1.2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & -3 & -12 \\ 0 & -4 & 5 & 19 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3.3+L_2.4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Que é a matriz completa do sistema escalonado a seguir.

$$\begin{cases} x-y+2z=9 \\ 3y-3z=-12 \\ 3z=9 \end{cases}$$

Da terceira equação, obtém-se $z=3$, aplicando este valor na segunda equação obtém-se $y=-1$ e, substituindo os valores encontrados para y e z na primeira equação, tem-se $x=2$. Portanto, o sistema tem solução única que é a terna $(2,-1,3)$.

Quando tratamos de um sistema 3×3 estamos estudando algo que pertence ao $\mathbb{R}^3$, mais precisamente planos no espaço. Vamos, no próximo item, entender geometricamente o que ocorre com um sistema desse tipo.

6. **Representação geométrica de sistemas 3 × 3**

As três equações lineares do sistema

$$S \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_3 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

representam, na ordem em que aparecem, os planos Π_1, Π_2 e Π_3 do $\mathbb{R}^3$. Um ponto $P = (x, y, z)$ é solução de S se $P \in \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$. Ao se comparar os coeficientes de dois planos no espaço, é possível concluir se eles são coincidentes, paralelos ou concorrentes, ou seja, tem-se que:

$\frac{a_i}{a_j} = \frac{b_i}{b_j} = \frac{c_i}{c_j} = \frac{d_i}{d_j}$, para planos coincidentes.

$\frac{a_i}{a_j} = \frac{b_i}{b_j} = \frac{c_i}{c_j} \neq \frac{d_i}{d_j}$, para planos paralelos.

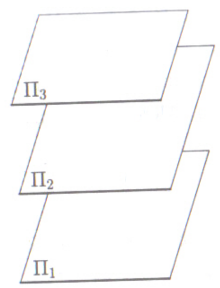
$\frac{a_i}{a_j} \neq \frac{b_i}{b_j}$ ou $\frac{a_i}{a_j} \neq \frac{c_i}{c_j}$ ou $\frac{b_i}{b_j} \neq \frac{c_i}{c_j}$, para planos concorrentes.

E quando se trata das posições dos três planos de S no espaço, para se representar geometricamente esse sistema, faz-se necessário associar sua solução com a comparação das três equações envolvidas, feita duas a duas. A partir disso, encontram-se as oito posições possíveis para esses planos que serão apresentadas e classificadas, a seguir, quanto ao número de soluções.

i) Sistemas impossíveis: não têm solução

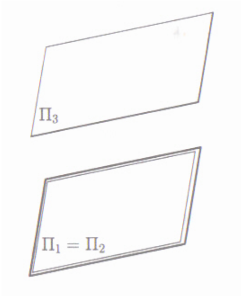
Podem ser representadas as possíveis posições de planos no espaço para um sistema impossível pelas figuras 23, 24, 25 e 26.

Figura 23: Os planos são paralelos dois a dois



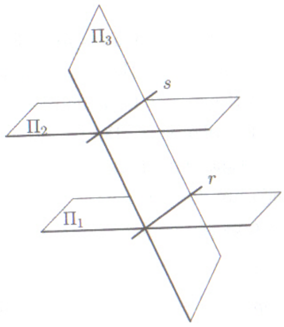
Fonte: [4], p.125

Figura 24: Dois planos coincidentes e um paralelo a eles.



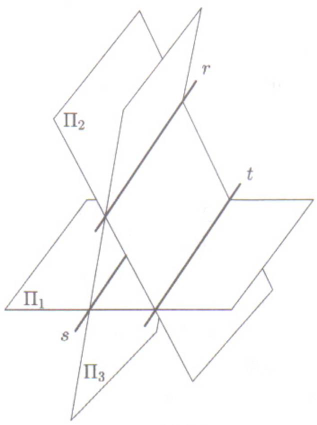
Fonte: [4], p.122

Figura 25: Dois planos são paralelos e o terceiro intersecta esses dois.



Fonte: [4], p.125

Figura 26: Os planos se intersectam dois a dois.

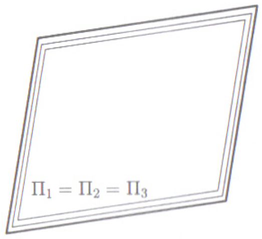


Fonte: [4], p.129

ii) Sistemas possíveis e indeterminados: admitem infinitas soluções

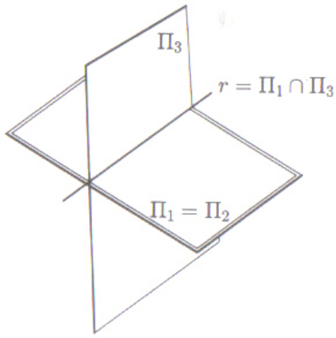
Podem ser representadas as possíveis posições de planos no espaço para um sistema possível e indeterminado pelas figuras 27, 28 e 29.

Figura 27: Os três planos são coincidentes.



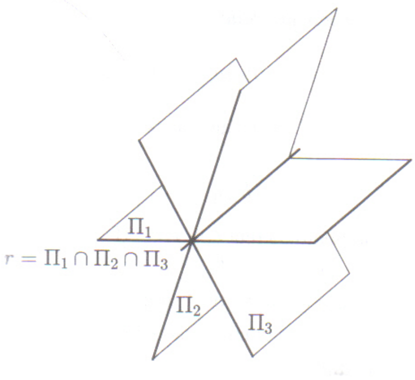
Fonte: [4], p.122

Figura 28: Dois planos são coincidentes e o terceiro intersecta esses dois.



Fonte: [4], p.123

Figura 29: Os três planos se intersectam segundo uma reta.

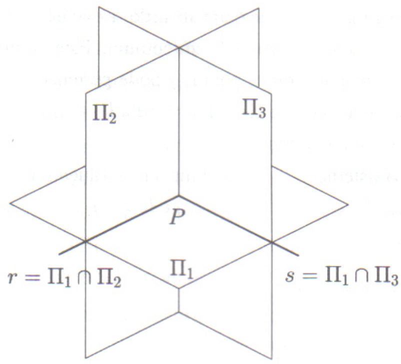


Fonte: [4], p.127

iii) Sistemas possíveis e determinados: admitem solução única

A figura 30 representa uma possível posição de planos no espaço para um sistema possível e determinado:

Figura 30: Os três planos se intersectam em um ponto.



Fonte: [4], p.131

Encerra-se esse plano através do exemplo 2, para que os alunos explorem mais possibilidades sobre o que foi tratado aqui.

Exemplo 2: Resolva os sistemas a seguir e represente-os geometricamente.

$$a)\begin{cases} x+y+z=1 \\ -x+y+z=2 \\ 2x+2y+2z=10 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=3 \\ 5x+2y+4z=6 \end{cases}$$

Resolução: Aplicando as operações elementares sobre as matrizes completas dos sistemas, chega-se aos seguintes sistemas escalonados:

$$a)\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2y+2z=3 \\ 0z=8 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x+y+z=1 \\ -3y-z=1 \end{cases}$$

Em $a)$ o sistema será impossível e, portanto, sua solução é o conjunto vazio. Com as placas de madeira encaixáveis, peça a ajuda dos alunos para representar geometricamente esse sistema, conforme o roteiro a seguir:

1. como o sistema é impossível, há quatro possibilidades para as posições dos planos, como já foi visto anteriormente;

2. analise se existe proporção entre os coeficientes das equações tomadas duas a duas. Com isso, é possível concluir se são paralelos ou não;

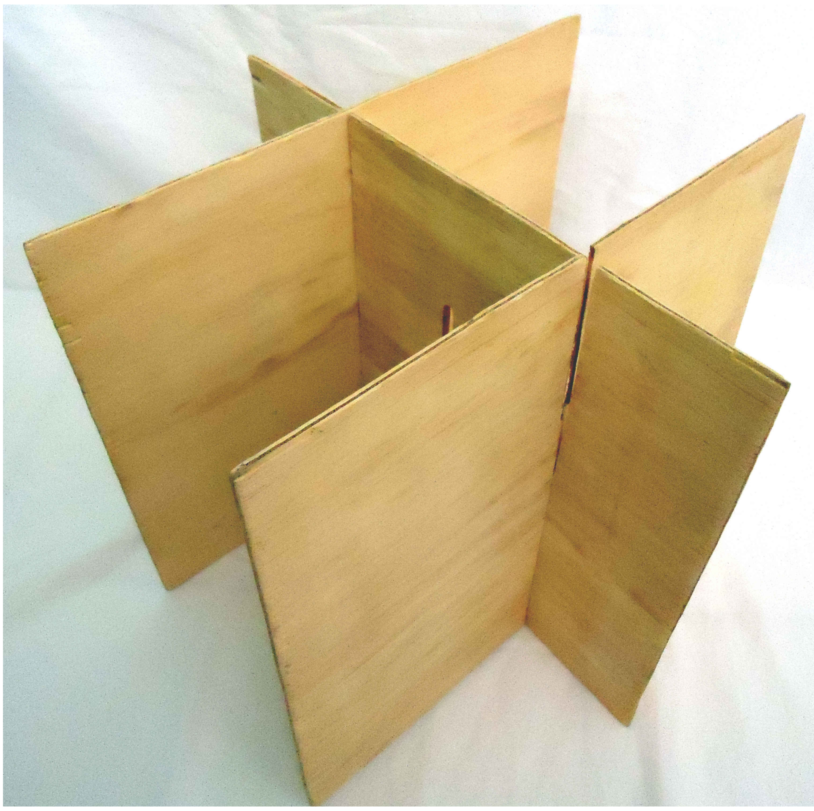
3. de acordo com as informações do item anterior, é possível montar uma boa repre-

sentação geométrica do sistema com as placas.

Dessa forma, a primeira e a terceira equações têm coeficientes proporcionais, mas o termo independente não segue essa proporção, portanto, representam planos paralelos. Como a segunda equação não é proporcional às outras duas, ela intersecta as demais segundo duas retas.

A representação geométrica do item a) é mostrada na figura 31.

Figura 31: Representação geométrica com o material concreto do item a).



Fonte: O autor

Em b) o sistema será possível e indeterminado, e sua solução deve ser expressa em função de uma das variáveis, por exemplo em função de z. Tem-se como solução deste sistema a terna $(\frac{4-2z}{3}, \frac{-z-1}{3}, z)$. Com as placas de madeira encaixáveis, peça a ajuda dos alunos para representar geometricamente esse sistema, conforme o roteiro a seguir:

1. como o sistema é indeterminado, há três possibilidades para as posições dos planos, como já foi visto anteriormente;

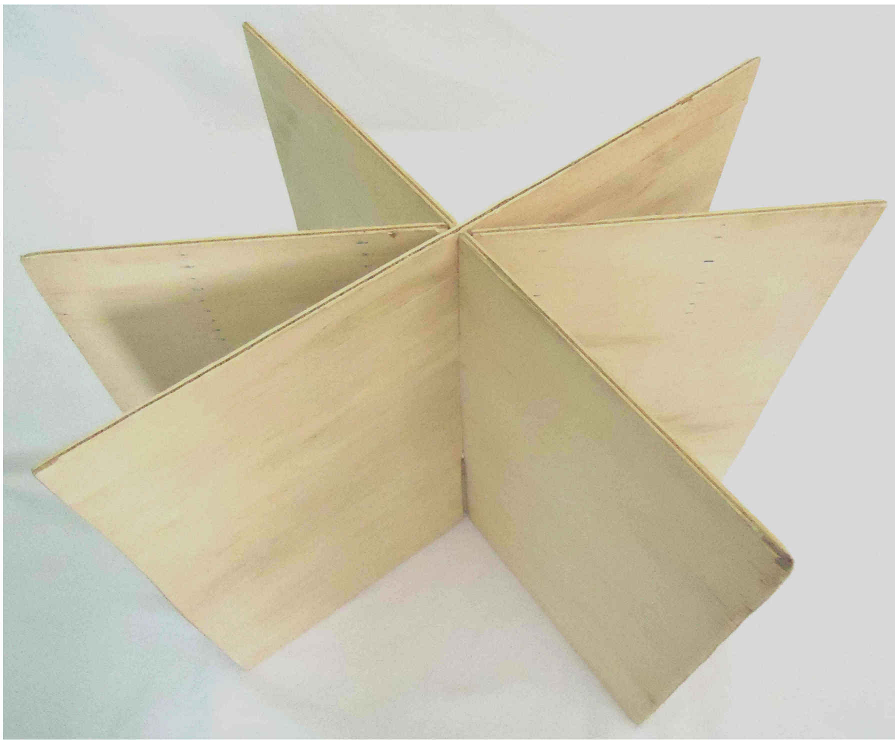
2. analise se existe proporção entre os coeficientes das equações tomadas duas a duas. Com isso, é possível concluir se são paralelos ou não;

3. de acordo com as informações do item anterior, é possível montar uma boa representação geométrica do sistema com as placas.

Dessa forma, a primeira e a segunda equações não têm coeficientes proporcionais, assim como a primeira e terceira também não têm coeficientes proporcionais, o mesmo ocorre com a segunda e terceira, portanto representam planos que se intersectam. Como o sistema é indeterminado esses três planos só podem se intersectar segundo uma reta.

A representação geométrica do item b) é mostrada na figura 32.

Figura 32: Representação geométrica com o material concreto do item b).



Fonte: O autor

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pelos dados apresentados no segundo capítulo deste trabalho, observa-se um significativo avanço na qualidade dos livros didáticos de Matemática adotados nas escolas brasileiras na última década. No entanto, avaliando os dados oficiais do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP), com relação à qualidade do ensino no país, esse avanço parece não ser suficiente para o sucesso do ensino da Matemática nesse mesmo período. Fica evidente a necessidade de mais investimentos na educação de nível médio, principalmente na formação dos professores.

Sobre a avanço na qualidade dos livros didáticos, ao se observar a tendência em eliminar a Regra de Cramer nesses materiais, faz-se necessária uma ressalva, pois sua compreensão é adequada ao Ensino Médio e ainda tem a vantagem de fornecer explicitamente a solução de um sistema possível e determinado. Além disso, essa exclusão diminui as opções do professor ao planejar suas aulas. Apesar de ser notória a superioridade do escalonamento, é possível tratar desses dois métodos de forma integrada na sala de aula, fazendo com que um complemente o outro.

Em relação à formação docente, é preciso que as Instituições de Ensino Superior avaliem os cursos de licenciatura oferecidos e pensem numa reestruturação das grades curriculares, uma vez que elas, geralmente, são pouco direcionadas para a Educação Básica. Por outro lado, é importante que as escolas estejam equipadas tecnologicamente, mas os professores precisam estar preparados para utilizar as novas tecnologias. Até porque a qualidade do ensino está muito mais relacionada com a metodologia e com o domínio do professor sobre o conteúdo que leciona do que com o uso de inovações tecnológicas. Boas aulas são preparadas por professores capacitados que sabem aonde querem chegar e independem de recursos sofisticados. Por isso, as Secretarias de Educação deveriam incentivar mais os profissionais da área em realizar cursos de formação continuada. Vale ressaltar que para garantir uma formação consistente, deve-se prover recursos financeiros necessários para assegurar condições adequadas de trabalho, isso implica melhorar os salários, reduzir a jornada de trabalho em sala de aula e implementar planos de carreira que estimulem a contínua formação docente.

Ao analisar o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares, foi possível perceber que houve uma significativa evolução na sua abordagem e que esse tópico ganhou destaque pelos analistas por permanecer na matriz curricular e na formação dos estudantes. Paralelamente, observa-se que há a necessidade e o interesse em tornar esse conteúdo mais atrativo e relacioná-lo com outros conteúdos abordados nessa fase de ensino. Nesse contexto, espera-se ter cumprido o objetivo deste trabalho: contribuir para a melhoria do aprendizado deste tópico por meio de uma proposta de ensino que estimulasse o raciocínio e estabelecesse relações entre diferentes eixos da Matemática. Os planos apresentados foram elaborados de forma que pudessem ser utilizados por professores de Matemática do Ensino Médio, independentemente do livro didático que estejam utilizando, pois esses planos enquadram-se perfeitamente na estrutura curricular atualmente praticada. Para a primeira proposta, os recursos geométricos são de fácil interpretação, os *softwares* adotados são de domínio público e bastante amigáveis, além de existir muitos tutoriais gratuitos explicando sua utilização. Para a segunda proposta, caso os recursos computacionais não estejam disponíveis no ambiente escolar, o material concreto que subsidia os recursos geométricos apresentados pode ser confeccionado de forma bem simples, reforça-se que no apêndice desta dissertação, são disponibilizadas as imagens desse material, peça por peça.

Salienta-se que o conteúdo de vetores, apesar de ser uma ferramenta que poderia facilitar muito o ensino de Sistemas de Equações Lineares, não foi abordado nas propostas pelo fato de não estar presente na maioria dos livros didáticos que, geralmente, são seguidos à risca pelos professores do Ensino Médio. Por outro lado, entende-se que o conteúdo de vetores deve ser de domínio dos professores para que estes possam perceber relações e fazer analogias no momento da exposição do conteúdo.

5.1 Novos Estudos

Espera-se que esta dissertação seja o ponto de partida para novos trabalhos com o mesmo propósito: contribuir para a melhoria do ensino de Matemática no nível médio. Para isso propõe-se a análise de outros conteúdos e a elaboração de novos planos nos mesmos moldes apresentados aqui, tendo como referências o livro *Exame de Textos* [6] e o *Guia do Livro Didático 2012* [5].

Dentro da abordagem de Sistemas de Equações Lineares, sugere-se, como continuidade a este trabalho, a comprovação experimental dos planos de aula aqui apresentados. É válido ressaltar que isso somente não pode ser realizado em virtude da delimitação do tempo para a finalização deste estudo, o que impossibilitou a espera da aprovação desse experimento pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP-UFTM).

Mediante levantamento dos livros didáticos disponíveis para o Ensino Médio, propõe-se a elaboração de um material didático que reestruture o ensino da Álgebra no Ensino Médio, fazendo associação direta de Sistemas de Equações Lineares com a Geometria Analítica e que, além disso, privilegie a abordagem geométrica e o estudo de vetores, grande elo entre essas duas áreas. Num estudo mais aprofundado, o material elaborado deverá ser escrito de forma completa, com orientações para os professores e com linguagem de fácil compreensão para os alunos. Destaca-se ainda que, antes de sua ampla divulgação, o material proposto seja experimentado por diferentes docentes da área, critério já utilizado nas universidades por professores/autores.

REFERÊNCIAS

[1] FREIRE, Paulo. **Educação e mudança**. 12. ed. São Paulo: Paz e Terra, 1985.

[2] SCHWARTZMAN, Simon. **Equidade e qualidade da educação brasileira**. São Paulo: Moderna, 2008.

[3] LIMA, Elon Lages. **Matemática e ensino**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

[4] LIMA, Elon Lages. et al. **A Matemática do ensino médio**.6 ed. Rio de Janeiro: SBM,2004. v. 3.

[5] BRASIL. Ministério da Educação. **Guia de livros didáticos:** PNLD 2012: Matemática. Brasília: Secretaria de Educação Básica, 2011.

[6] LIMA, Elon Lages. et al. **Exame de textos:** análise de livros de Matemática para o ensino médio. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

[7] BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais(PCN):** ensino médio: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias, parte III. Brasília: Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2000.

[8] BRASIL. Ministério da Educação. **Orientações curriculares para o ensino médio:** Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: Secretaria de Educação Básica, 2006. v. 2.

[9] BRASIL. Ministério da Educação. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação(FNDE). Histórico sobre os programas de livros didáticos no Brasil. Disponível em: ¡http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/livro-didatico-historico¿. Acesso em: 30 de janeiro de 2013.

[10] IEZZI, Gelson et al. **Matemática:** ciência e aplicações. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010. v. 2

[11] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2010. v. 2.

[12] PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2009. v. 2.

[13] BRASIL. Ministério da Educação. **Matriz de referência para o ENEM 2009**. Brasília: INEP, 2009.

[14] BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais + (PCN+):** ensino médio: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias, parte III. Brasília: Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002.

[15] LIMA, Elon Lages. **Coordenadas no espaço**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

[16] VALENTE, José Armando. **Liberando a mente:** computadores na educação especial. Campinas: Unicamp, 1991.

[17] GeoGebra, versão 3.0. Disponível em http://www.geogebra.org/. Acesso em 01 de novembro de 2012.

[18] WintPlot, versão 32z. Disponível em: http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html. Acesso em 01 de novembro de 2012.

[19] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** contexto e aplicações. 2. ed. São Paulo: Ática, 2004.

[20] HEFEZ, Abramo ; FERNANDEZ, Cecília de Souza. **Introdução à Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[21] IEZZI, Gelson et al. **Matemática:** volume único . 2. ed. São Paulo: Atual, 2002.

[22] LIMA, Elon Lages. **Álgebra linear**. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

[23] SANCHES, Paulo Sérgio Bedaque et al. **Mathematikós**. São Paulo: Saraiva, 2010.

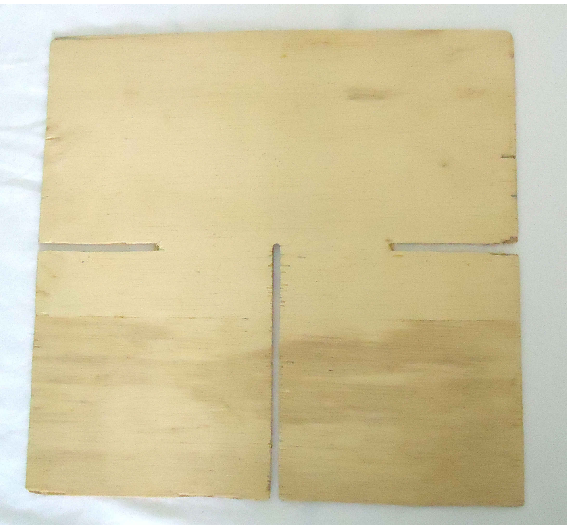
APÊNDICE A – IMAGENS DO MATERIAL CONCRETO

O material concreto utilizado no Plano 2 foi feito a partir de placas de madeira, mas poderia também ter sido feito de placas de papelão. Seguem imagens do material desmontado e um exemplo de montagem.

Figura 33: Peças 1 e 2.

Fonte: O autor

Figura 34: Peça 3.

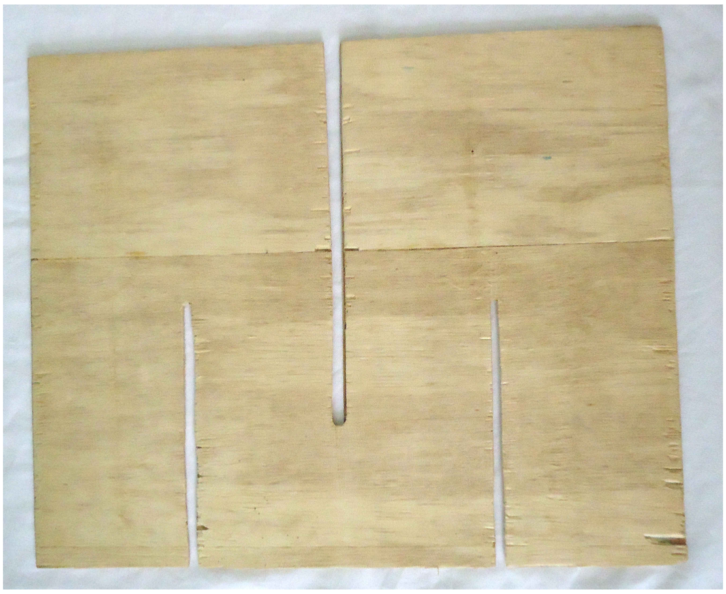


Fonte: O autor

Figura 35: Peça 4.

Fonte: O autor

Figura 36: Peça 5.

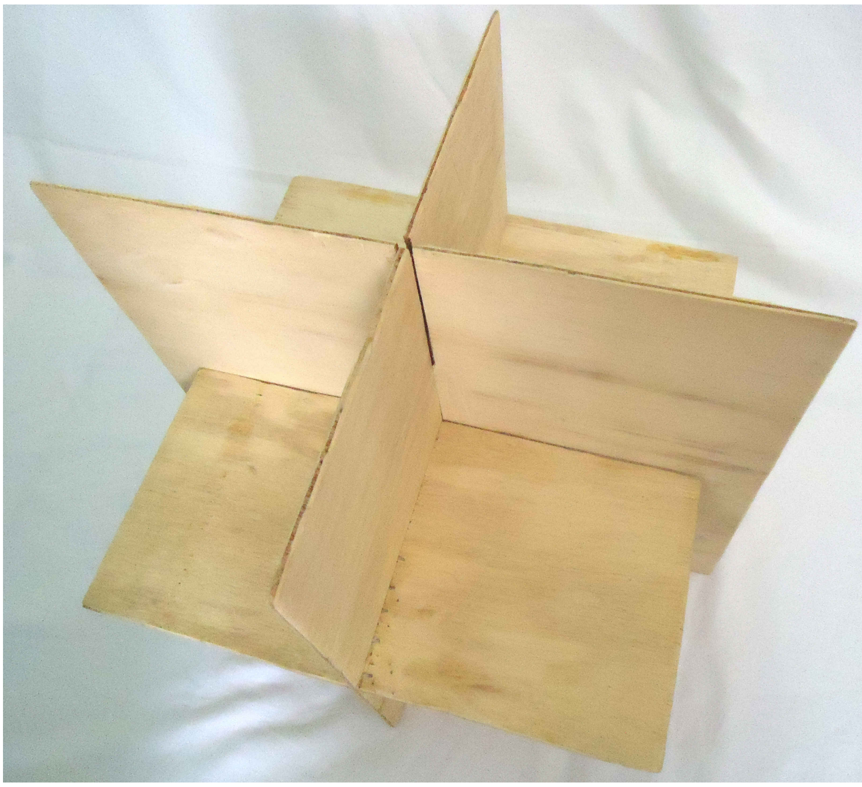


Fonte: O autor

Figura 37: Peça 6.

Fonte: O autor

Figura 38: Representação de um Sistema Possível e Determinado.



Fonte: O autor