



Universidade Federal do Piauí - UFPI
Centro de Ciências da Natureza - CCN
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
PROFMAT

Uma Aplicação dos Números Complexos no
Ensino Médio da Educação Profissional Técnica

Edson da Silva Lira

Teresina - 2014

Edson da Silva Lira

**Uma Aplicação dos Números Complexos no
Ensino Médio da Educação Profissional Técnica**

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gilvan Lima de Oliveira

Teresina - 2014

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castello Branco
Serviço de Processamento Técnico

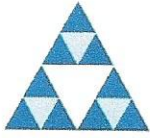
L768a Lira, Edson da Silva.
Um aplicação dos números complexos no ensino
médio da educação profissional técnica / Edson da Silva
Lira. – 2014.
64 f.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade
Federal do Piauí, Teresina, 2014.

Orientação: Prof. Dr. Gilvan Lima de Oliveira.

1. Matemática. 2. Números Complexos. 3. Corrente.
4. Tensão. I. Título.

CDD 510



PROFMAT



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **mestre em matemática** intitulada: "**Uma Aplicação dos Números Complexos no Ensino Médio Técnico da Educação Profissional**", defendida por **Edson da Silva Lira** em **25 / 09 / 2014** e aprovada pela banca constituída pelos professores:

Presidente da Banca Examinadora

Examinador

Examinador Externo

Examinador Externo

A minha esposa Rosângela Maria (Minha Rosa).

*Aos meus filhos Jackson, Rhusily Reges, Rosângela
Reges, Edson Jr, Magno Vital e Redson.*

*Aos amigos, Edem, Diego, Marcelo, Gildenes,
Tibursio, Amsterdã e Paulo pelo apoio e com-
panheirismo.*

Agradecimentos

Primeiramente a Deus que deu-me força, ânimo e coragem para não desistir desse longo caminho.

A SBM pela oferta da grandiosa oportunidade desse projeto para os professores de Matemática desse País.

A CAPES pelo credito e fomento desse grandioso projeto.

A UFPI por ter abraçado o PROFMAT dando mais uma oportunidade aos professores desse estado a uma qualificação de qualidade.

Aos professores dos Departamentos de Matemática e de Estatística que participaram do PROFMAT que contribuíram ainda mais na construção dos meus conhecimentos bem como para o nosso enriquecimento pessoal e profissional.

Ao meu Orientador Prof^o Dr. Gilvan Lima de Oliveira que pacientemente atendia-me sempre que necessitava.

Aos meus pais, que ensinaram-me que o estudo é o caminho mais correto para vencermos na vida.

A minha esposa e filhos pela paciência que tiveram comigo durante essa jornada. Desculpe a ausência nos finais de semana. Foram necessários.

A todos vocês o meu muito obrigado. Essa conquista é minha e de vocês.

“Viver é um rasgar-se e remendar-se”.

Guimarães Rosa

Resumo

Este trabalho tem por objetivo apresentar uma aplicação dos números complexos na Educação Profissional Técnica de Nível Médio, em particular aos cursos Técnicos em Eletroeletrônica, Eletrônica e Eletrotécnica, basicamente dando ênfase ao estudo da análise de circuitos elétricos com corrente alternada com enfoque na utilização de fasores para resolução de circuitos lineares de corrente alternada. O referido trabalho é de caráter bibliográfico e foi produzido a partir de uma pesquisa literária sobre o tema baseado em uma literatura já consolidada. Durante o desenvolvimento deste trabalho, foi feito um resgate dos principais pontos sobre o corpo ordenado dos números reais, servindo de base para o estudo do corpo dos números complexos. Foi utilizada a estrutura do corpo dos números complexos como ferramenta para análise de circuitos de corrente alternada mostrando as grandezas, propriedades e características dos sinais alternados, bem como a aplicação de um método que utiliza um vetor girante denominado de fasor, na resolução dos referidos circuitos lineares. O fasor gira em sentido anti-horário em torno da origem do plano complexo e plota sua amplitude no sistema de coordenadas com o objetivo de representar sinais senoidais de forma simples e compacta, facilitando assim, a análise de tais sinais. No contexto das aplicações, abordaremos algumas situações práticas existentes na literatura para ilustrar a aplicação dos fasores na determinação dos sinais senoidais e suas propriedades. Por fim, é feita uma descrição das vantagens da aplicação desta sistemática com a utilização dos fasores na análise de circuitos elétricos de corrente alternada.

Palavras-chaves: Números Complexos; Corrente; Tensão; Fasor.

Abstract

This work aims to present an application of complex numbers in Technical Education Middle Level, in particular the Technical courses in Electrical and Electronics, Electronics and Electrical, basically emphasizing the study of the analysis of electrical circuits with alternating current with a focus on using phasors for solving linear alternating current circuits. Such work is of bibliographical and was produced from a literature search on the topic based on a consolidated literature. During the development of this work, we made a rescue of the key points on the body of real numbers ordered, providing the basis for the study of the field of complex numbers. We used the body structure of the complex numbers as a tool for analyzing AC circuits showing the magnitudes properties and characteristics of the AC signals, as well as the application of a method that uses a rotating phasor vector termed the resolution of said circuits linear. The phasor rotates counterclockwise around the origin of the complex plane and plots your amplitude on the coordinate system in order to represent sinusoidal signals in a simple and compact form, thus facilitating the analysis of such signals. In the context of applications, we discuss some practical situations existing in the literature to illustrate the application of phasors in the determination of sinusoidal signals and their properties. Finally, a description is given of the advantages of the application of this systematic using phasor analysis of AC electrical circuits.

Keywords: Complex Numbers; current; tension; phasor.

Sumário

Lista de Figuras	9
1 Introdução	11
2 Os Números Reais \mathbb{R}	14
2.1 Axiomas da Adição de números reais	14
2.2 Axiomas da Multiplicação de números reais	14
2.3 Relação de ordem em \mathbb{R}	15
2.4 Módulo de um número Real	16
3 Corpo dos Números Complexos	18
3.1 Representação Geométrica	19
3.2 Módulo de um número complexo	19
3.3 Números Complexos na forma algébrica	20
3.4 A Trigonometria dos Números Complexos	23
3.4.1 Argumento do número complexo	23
3.4.2 Forma Trigonométrica dos Números Complexos	24
3.5 Operações com Números Complexos na Forma Trigonométrica	25
3.6 Fórmula de Euler	28
4 Função Trigonométrica	29
4.1 Função Seno	29
5 Vetores	31
5.1 Adição entre Vetores	31

5.1.1	Regra do Paralelogramo	32
5.2	Propriedades da Adição entre Vetores	32
6	Elementos Básicos que compõem um Circuito Elétrico de Corrente Alternada	34
6.1	Corrente Elétrica e Tensão Elétrica	34
6.2	Gerador Elétrico	34
6.3	Resistor	35
6.4	Dispositivos de Controle	36
6.4.1	Amperímetro	36
6.4.2	Voltímetro	37
6.5	Circuito Elétrico	37
6.6	Nó, Ramo e Malha	38
6.6.1	Nó	38
6.6.2	Ramo	38
6.6.3	Malha	38
6.7	Leis Elétricas	39
6.8	Geração do Sinal Alternado	39
6.9	Corrente Alternada	41
6.10	Forma Matemática da Corrente Alternada e da Tensão	41
7	Fasor	45
7.1	Números Complexos e Fasores	46
7.2	Representação dos Números Complexos	46
7.2.1	Representação na forma retangular	46
7.2.2	Forma Polar de Steinmetz	46
7.2.3	Forma Polar de Euler	47
7.3	Relação entre a forma retangular e a forma polar	47

7.4	Relação entre a forma de Steinmetz e a fórmula de Euler	48
7.5	Operações com os números complexos	48
7.5.1	Adição	48
7.5.2	Subtração	48
7.5.3	Multiplicação	48
7.5.4	Divisão	49
7.6	Diagrama Fasorial	49
8	Análise Fasorial em Circuitos com Corrente Alternada	51
8.1	Valor Eficaz da Tensão Elétrica e Valor Eficaz da Corrente Elétrica Alternada	51
8.1.1	Valor eficaz de uma tensão senoidal	51
8.1.2	Valor eficaz de uma corrente elétrica senoidal	52
8.2	Aplicações dos Fasores	52
8.2.1	Resolução de Problemas	54
9	Considerações Finais	62
	Referências Bibliográficas	63

Lista de Figuras

3.1	Plano de Argand - Gauss	19
3.2	Módulo de z	19
3.3	Argumento do complexo z	23
3.4	Representação Geométrica	24
4.1	Representação gráfica da função seno	29
4.2	Para $c < 0$	30
4.3	Para $c > 0$	30
5.1	Vetor	31
5.2	Adição de Vetores	31
5.3	Adição pela regra do paralelogramo	32
5.4	Associativa	32
5.5	Comutativa	32
5.6	Elemento Neutro	33
6.1	Gerador químico	34
6.2	Gerador mecânico	34
6.3	Representação de gerador	35
6.4	Chuveiro elétrico	35
6.5	Ferro elétrico	35
6.6	Representação de resistência	35
6.7	Resistência usual	36
6.8	Amperímetro	36

LISTA DE FIGURAS	10
6.9 Representação do amperímetro	37
6.10 Voltímetro	37
6.11 Representação do voltímetro	37
6.12 Exemplo de circuito elétrico RLC	38
6.13 Nó, Ramo e Malha	38
6.14 Enrolamento no campo magnético	39
6.15 Corrente Alternada	41
6.16 Circuito elétrico	42
7.1 Fasor em movimento	45
7.2 Representação do fasor	45
7.3 Representação retangular	46
7.4 Representação de Steinmetz	47
7.5 Representação da forma retangular e polar de $C = A + jB$	47
7.6 Diagrama fasorial	49
7.7 Representação de três fasores	50
8.1 Circuito elétrico	53
8.2 Circuito da aplicação 2	54
8.3 Circuito Elétrico	55
8.4 Circuito Elétrico	57
8.5 Esquema de circuito	58
8.6 Voltímetro	59
8.7 Amperímetro	60

1 Introdução

Neste trabalho, iremos apresentar um método de análise de circuitos que faz correspondência direta entre as Funções Temporais Senoidais (corrente e tensão alternadas ambas aplicadas em um mesmo circuito elétrico linear) e o Corpo dos Números Complexos combinados com as Leis Elétricas mais utilizadas no estudo de circuito de corrente alternada, esse método recebe o nome de Análise Fasorial.

Partindo desse pressuposto transcreveremos o artigo 36 da Lei de Diretrizes Bases da Educação Nacional que apresenta a forma de funcionamento da Educação Profissional Técnica para melhor compreensão do tema a ser analisado.

De acordo com [7], a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional pela Seção IV-A Da Educação Profissional Técnica de Nível Médio:

Art.36 - B. A educação profissional técnica de nível médio será desenvolvida nas seguintes formas:

- I - articulada com o ensino médio;
- II - subsequente, em cursos destinados a quem já tenha concluído o ensino médio.

Parágrafo único. A educação profissional técnica de nível médio deverá observar:

- I - os objetivos e definições contidos nas diretrizes curriculares nacionais estabelecidas pelo Conselho Nacional de Educação;
- II - as normas complementares dos respectivos sistemas de ensino;
- III - as exigências de cada instituição de ensino, nos termos de seu projeto pedagógico.

Art.36 - C. A educação profissional técnica de nível médio articulada, prevista no inciso I do *caput* do art. 36 - B desta lei, será desenvolvida de forma:

- I - integrada, oferecida somente a quem já tenha concluído o ensino fundamental, sendo o curso planejado de modo a conduzir o aluno à habilitação profissional técnica

de nível médio, na mesma instituição de ensino, efetuando - se matrícula única para cada aluno.

[...]

Segundo [8], Define Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Profissional Técnica de Nível Médio, pelo Art. 8º, §1º Os cursos assim desenvolvidos, com projetos pedagógicos unificados, devem visar simultaneamente aos objetivos da Educação Básica e, especificamente, do Ensino Médio e também da Educação Profissional e Tecnológica, atendendo tanto a estas Diretrizes, quanto às Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, assim como às Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica e às diretrizes complementares definidas pelos respectivos sistemas de ensino.

Como exemplo, temos, o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão - IFMA, Campus Timon, onde são oferecidos os Cursos Técnicos em: Administração, Edificações, Eletroeletrônica e Eletromecânica todos integrados ao Ensino Médio com duração igual a 3 anos.

Os Cursos Técnicos oferecidos pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão - IFMA, Campus Timon são divididos por módulos, onde, cada ano é cursado dois módulos, um em cada semestre dentro do ano, as disciplinas do núcleo comum (Ensino Médio) são distribuídas dentro do curso técnico conforme as necessidades de pré-requisitos dentro das disciplinas da área Técnica. De acordo com [8], no inciso III *caput* do art.13. Os conhecimentos e as habilidades nas áreas de linguagens e códigos, Ciências Humanas, Matemática e Ciências da Natureza, vinculados à Educação Básica deverão permear o currículo dos cursos técnicos de nível médio, de acordo com as especificidades dos mesmos, como elementos essenciais para a formação e o desenvolvimento profissional do cidadão.

Como exemplo dessa prática, temos, a disciplina de Matemática II de carga horária igual a 80 horas - aulas que são oferecidas no segundo módulo (1ª série do Ensino Médio) do Curso Técnico em Eletroeletrônica que possui como base tecnológica os seguintes conteúdos: Função Modular, Função Exponencial, Função Logarítmica, Trigonometria no Triângulo e no Ciclo e Números Complexos. Observamos que a Matemática sofreu uma antecipação de conteúdos, no caso os Números Complexos, que geralmente está disposto nos livros de Matemática do Programa Nacional do Livro Didático - PNLD

somente nos volumes do terceiro ano do Ensino Médio.

Isso se deve pelo fato que no terceiro módulo (2ª série do Ensino Médio) do Curso Técnico em Eletroeletrônica há uma disciplina: Análise de Circuito de Corrente Contínua e Corrente Alternada que deve ter como pré-requisito os Números Complexos para entendimento do aluno dentro dos estudos dessa área que é a Elétrica. Pois, de acordo com o pensamento de Bruner (1960), Psicólogo estadunidense, estudioso da área do processo de ensino - aprendizagem, que afirma: "é possível ensinar tudo aos alunos deste que se utilizem procedimentos adaptados aos estilos cognitivos e às necessidades dos alunos." Nas entrelinhas Bruner defende que podemos adequar métodos de ensino de acordo com a necessidade de cada aluno.

Assim, o objetivo desse trabalho é sugerir uma abordagem diferenciada do estudo dos Números Complexos de modo que possamos trabalhar esse conteúdo em turmas de primeira e segunda séries da Educação Profissional Técnica de Nível Médio usando como base conceitual os Números Reais e Pares Ordenados, bem como mostrar os Números Complexos combinando com a Teoria de Fasores como um Método de resolução de Circuitos RLC (Resistência-Indutor-Capacitor) com alimentação com Corrente Alternada.

No capítulo 2, apresentamos o conjunto dos números reais como um Corpo Ordenado. No capítulo 3, apresentamos o Corpo dos Números Complexos, enfatizando a Trigonometria dos Números Complexos que servirá de suporte para o desenvolvimento da parte principal deste trabalho. No capítulo 4 fazemos um breve desenvolvimento sobre função Seno. No capítulo 5, apresentamos as operações básicas que utilizaremos com vetores. No capítulo 6 é esplanado os elementos básicos que compõem um circuito elétrico de corrente alternada. No capítulo 7, introduzimos a noção de Fasor. No capítulo 8 é trabalhado a análise fasorial em circuitos com corrente alternada, e no capítulo 9 apresentamos as considerações finais.

2 Os Números Reais \mathbb{R}

Definição 2.0.1. O corpo dos números reais é o conjunto \mathbb{R} , munido das operações adição e multiplicação, representadas simbolicamente como segue:

$$\begin{array}{ll} + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) \longrightarrow a + b & (a, b) \longrightarrow a \cdot b \end{array}$$

satisfazendo aos seguintes axiomas:

2.1 Axiomas da Adição de números reais

Axioma 2.1.1. *Comutatividade:*

$$a + b = b + a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Axioma 2.1.2. *Associatividade:*

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

Axioma 2.1.3. *Elemento Neutro:*

$$a + 0 = 0 + a = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Axioma 2.1.4. *Elemento Simétrico:* Para cada número real a existe, elemento simétrico de a , denotado por $(-a)$, para os quais vale:

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

2.2 Axiomas da Multiplicação de números reais

Axioma 2.2.1. *Comutatividade:*

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Axioma 2.2.2. *Associatividade:*

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

Axioma 2.2.3. *Elemento Neutro:*

$$1 \cdot a = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Axioma 2.2.4. *Elemento Inverso Multiplicativo:* Para cada número real $a \neq 0$ existe o inverso multiplicativo de a , denotado por a^{-1} , para os quais vale:

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

Axioma 2.2.5. *Distributividade:*

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

A título de motivação tem-se algumas aplicações dos axiomas citados acima.

Q.1 . Mostre que $a \cdot 0 = 0$.

Demonstração.

Vejamos o desenvolvimento da expressão $a + a \cdot 0$:

$$a + a \cdot 0 \stackrel{2.2.3}{=} a \cdot 1 + a \cdot 0 \stackrel{(2.2.5)}{=} a \cdot (1 + 0) \stackrel{2.1.3}{=} a \cdot 1 \stackrel{2.2.3}{=} a \Rightarrow a + a \cdot 0 = a \therefore a \cdot 0 = 0. \quad \square$$

Q.2 . Mostre que $(-1) \cdot (-1) = 1$

Demonstração.

Vejamos o desenvolvimento da expressão $(-1) \cdot (-1) + (-1)$:

$$\begin{aligned} (-1) \cdot (-1) + (-1) &\stackrel{2.2.3}{=} (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \stackrel{(2.2.5)}{=} (-1) \cdot [(-1) + 1] \stackrel{2.1.4}{=} (-1) \cdot 0 \stackrel{Q.1}{=} 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (-1) \cdot (-1) + (-1) = 0. \end{aligned}$$

Somando $(+1)$ a ambos os membros, teremos:

$$\begin{aligned} [(-1) \cdot (-1) + (-1)] + (+1) &= 0 + (+1) \stackrel{2.1.2, 2.1.3}{\Rightarrow} (-1) \cdot (-1) + [(-1) + (+1)] = 1 \stackrel{2.1.4}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow (-1) \cdot (-1) + 0 = 1 \stackrel{2.1.3}{\Rightarrow} (-1) \cdot (-1) = 1. \quad \square \end{aligned}$$

2.3 Relação de ordem em \mathbb{R}

Definição 2.3.1. O número real x é menor que o número real y , quando $y - x$ for positivo, simbolicamente, $x < y \Leftrightarrow y - x > 0$.

Valem as seguintes propriedades para a relação de ordem $x < y$ em \mathbb{R} :

Propriedade 2.3.1. *Tricotomia:* Dados dois números reais x e y , temos:

$$\text{ou } x < y \quad \text{ou } x = y \quad \text{ou } y < x$$

Propriedade 2.3.2. *Transitividade:* Se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$.

Propriedade 2.3.3. *Monotonicidade da adição:* Se $x < y$, então $x + z < y + z, \forall z \in \mathbb{R}$.

Propriedade 2.3.4. *Monotonicidade da multiplicação:* Se $x < y$, então $x \cdot z < y \cdot z, \forall z > 0$. E, $x \cdot z > y \cdot z, \forall z < 0$.

2.4 Módulo de um número Real

Definição 2.4.1. Dado um número real x , o valor absoluto de x , indicado por $|x|$, é definido como segue:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Propriedade 2.4.1.

1. $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. A igualdade ocorre somente se $x = 0$.
2. $|x| = \max\{-x, x\}, \forall x \in \mathbb{R}$
3. $-|x| \leq x \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$
4. $|x| = |-x|, \forall x \in \mathbb{R}$
5. $\sqrt{x^2} = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$
6. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.
7. $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad e \quad y \neq 0$.
8. $|x| \leq \alpha \iff -\alpha \leq x \leq \alpha, \forall \alpha \geq 0$.
9. $|x| \geq \alpha \iff x \leq -\alpha \quad \text{ou} \quad x \geq \alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
10. (*Desigualdade Triangular*) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, tem-se que: $|x + y| \leq |x| + |y|$

Demonstração.

1. • Se $x \geq 0$, então $|x| = x \geq 0$

- Se $x < 0$, então $|x| = -x > 0$.

Desse modo, $|x| \geq 0$.

2. • Se $x \geq 0$, então $\max\{-x, x\} = x$. E, por definição de módulo, $|x| = x$. Logo, $|x| = \max\{-x, x\}$.

- Se $x < 0$, então $\max\{-x, x\} = -x$. E, por definição de módulo, $|x| = -x$.

Logo, $|x| = \max\{-x, x\}$.

3. $|x| = \max\{-x, x\} \Rightarrow -x \leq |x|$ e $x \leq |x| \Rightarrow -|x| \leq x \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$.

4. $|-x| = \max\{-(-x), -x\} = \max\{x, -x\} = |x| \Rightarrow |x| = |-x|$

5. • Se $x \geq 0$, então $\sqrt{x^2} = x$. E, por definição de módulo, $x = |x|$.

- Se $x < 0$, então $\sqrt{x^2} = -x$. E, por definição de módulo, $-x = |x|$.

Logo, $\sqrt{x^2} = |x|$

6. Pela propriedade 2.4.1.5, tem-se:

$$|x \cdot y| = \sqrt{(x \cdot y)^2} = \sqrt{x^2 \cdot y^2} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2} = |x| \cdot |y|$$

7. Pela propriedade 2.4.1.5, tem-se:

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \sqrt{\left(\frac{x}{y} \right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} = \frac{|x|}{|y|}$$

8.

$$|x| \leq a \Rightarrow \sqrt{x^2} \leq a \Rightarrow x^2 \leq a^2 \Rightarrow x^2 - a^2 \leq 0 \Rightarrow (x-a) \cdot (x+a) \leq 0 \Rightarrow -a \leq x \leq a$$

9.

$$|x| \geq a \Rightarrow \sqrt{x^2} \geq a \Rightarrow x^2 \geq a^2 \Rightarrow x^2 - a^2 \geq 0 \Rightarrow (x-a) \cdot (x+a) \geq 0 \Rightarrow x \leq -a \text{ ou } x \geq a$$

10. Pela propriedade 3, temos:

$$-|x| \leq x \leq |x| \quad \text{e} \quad -|y| \leq y \leq |y|$$

Somando membro a membro, teremos:

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq (|x| + |y|) \Rightarrow |x + y| \leq |x| + |y|$$

□

3 Corpo dos Números Complexos

Definição 3.0.2. O conjunto dos números complexos, representado por \mathbb{C} , é o conjunto dos pares ordenados (a, b) , com a e b números reais, no qual são consideradas as seguintes operações internas:

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc)\end{aligned}$$

No número complexo $z = (a, b)$, as coordenadas cartesianas a e b são chamadas de **parte real** e **parte imaginária** do número complexo z , respectivamente.

Proposição 3.0.1. *As operações de adição e multiplicação de números complexos, definidas acima, gozam das seguintes propriedades:*

Comutativa:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad e \quad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

Associativa:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad e \quad (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$$

Distributiva:

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

Elemento Neutro:

$$\exists! z_0 = (0; 0) \in \mathbb{C}; z + z_0 = z_0 + z = z, \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\exists! z_m = (1; 0) \in \mathbb{C}; z \cdot z_m = z_m \cdot z = z, \forall z \in \mathbb{C}$$

Elemento Oposto:

Para cada $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, existe o elemento oposto de z , a saber, o número complexo $-z = (-a, -b)$, no qual $z + (-z) = -z + z = z_0$.

Elemento Inverso:

Para cada número complexo não nulo $z = (a, b)$ existe o elemento inverso de z , representado por $z^{-1} \in \mathbb{C}$ tal que $z \cdot z^{-1} = z_m$, a saber,

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right),$$

O conjunto dos números complexos \mathbb{C} , com as duas operações consideradas acima, satisfazendo todas as propriedades da proposição 3.0.1, é chamado de **Corpo dos Números Complexos**. Em símbolos, o corpo dos números complexos é representado pela terna: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

3.1 Representação Geométrica

No conjunto dos números complexos \mathbb{C} , o plano Cartesiano \mathbb{R}^2 recebe o nome de **plano de Argand-Gauss** onde o eixo das abscissas é o eixo real (*Re*) e o eixo das ordenadas é eixo imaginário (*Im*). Cada ponto do plano $(a; b)$ é **imagem** ou **afixo** do número complexo $z = (a, b)$.

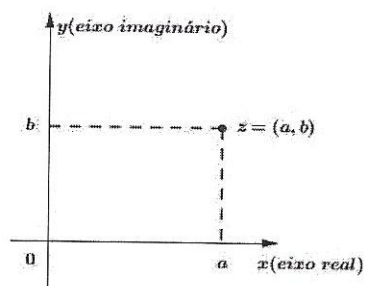


Figura 3.1: Plano de Argand - Gauss

3.2 Módulo de um número complexo

Definição 3.2.1. O módulo de um número complexo $z = (a, b)$, é a distância do afixo $(0; 0)$ ao afixo $(a; b)$ do plano de Argand-Gauss.

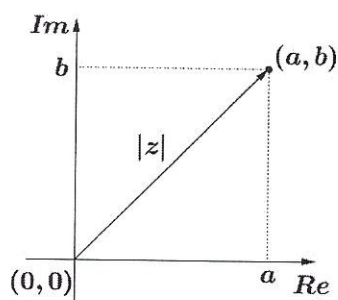


Figura 3.2: Módulo de z

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Proposição 3.2.1. Para todo $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{Z}$, temos que:

1. $|z| \geq 0$
2. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
3. $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, com $z_2 \neq 0$
4. $|z^n| = |z|^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$
5. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (*Desigualdade Triangular*)

3.3 Números Complexos na forma algébrica

Considere a função f definida por:

$$f : \mathbb{R} \times \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x; 0) \longmapsto f(x; 0) = x$$

A função f é bijetora, assim, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$(i) f((x; 0) + (y; 0)) = f(x + y; 0 + 0) = f(x + y; 0) = x + y;$$

$$(ii) f((x; 0) \cdot (y; 0)) = f(x \cdot y - 0 \cdot 0; x \cdot 0 + 0 \cdot y) = f(xy - 0; 0 + 0) = f(xy; 0) = xy.$$

Pode-se observar que as operações com os números reais são similares às operações com os pares ordenados de $\mathbb{R} \times \{0\}$, portanto, pela bijeção de f , pode-se identificar o par ordenado com o número real.

$$(\alpha; 0) = \alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Considerando-se o número complexo $z = (a; b)$, onde pode-se escrever:

$$z = (a; b) = (a; 0) + (0; b)$$

Nesse caso pode-se observar que o par ordenado $(0; b)$ não está definido pela função f , então escrever-se o par ordenado $(0; b)$ em função de $(b; 0)$, assim, deve-se determinar os valores de α e β segundo a igualdade:

$$(0; b) = (b; 0) \cdot (\alpha; \beta) = (b \cdot \alpha - 0 \cdot \beta; \beta \cdot b + 0 \cdot \alpha) = (\alpha \cdot b; \beta \cdot b) \Rightarrow (0; b) = (\alpha \cdot b; \beta \cdot b)$$

$$\Leftrightarrow \alpha \cdot b = 0 \quad \text{e} \quad \beta \cdot b = b \quad \therefore$$

$$\bullet \alpha \cdot b = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \quad \text{ou} \quad b = 0$$

$$\bullet \beta \cdot b = b \Rightarrow \beta \cdot b - b = 0 \Rightarrow b \cdot (\beta - 1) = 0 \Rightarrow b = 0 \quad \text{ou} \quad \beta - 1 = 0 \Rightarrow \beta = 1$$

Logo, $(\alpha; \beta) = (0; 1)$.

$$\text{Com isso, } z = (a; b) = (a; 0) + (0; b) = (a; 0) + (b; 0) \cdot (0; 1).$$

Definição 3.3.1. Define-se como unidade imaginária o número complexo $(0; 1)$. Indica-se por $i = (0; 1)$.

Desse modo, tem-se:

$$z = (a; b) = (a; 0) + (b; 0) \cdot (0; 1) = a + bi \quad \therefore z = a + bi$$

Em relação a unidade imaginária $i = (0; 1)$, pela multiplicação de pares ordenados pode-se determinar a potência i^2 , temos:

$$i^2 = i \cdot i = (0; 1) \cdot (0; 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1; 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (0 - 1; 0 + 0) = (-1; 0) = -1$$

$$\therefore i^2 = -1$$

Sendo assim, todo e qualquer número complexo $z = (a; b)$, possui forma algébrica única, $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$.

Em notação de conjunto:

$$\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

Sejam $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, onde números complexos na forma algébrica:

1. Igualdade de números complexos:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \quad \text{e} \quad b = d$$

2. Adição:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

3. Multiplicação:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Definição 3.3.2 (Conjugado do número complexo). Dado o número complexo $z = x + yi$, o conjugado do número complexo z , denotado por \bar{z} , é definido como segue:

$$\bar{z} = x - yi$$

Proposição 3.3.1. *Seja o número complexo $z = x + yi$ e seu conjugado $\bar{z} = x - yi$. Então tem-se:*

1. $\overline{\bar{z}} = z$
2. $z + \bar{z} = 2 \cdot \operatorname{Re}(z) = 2x$
3. $z - \bar{z} = 2 \cdot \operatorname{Im}(z)i = 2yi$
4. $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$
5. $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$
6. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
7. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
8. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, z_2 \neq 0$
9. $(\bar{z})^n = \overline{z^n}, n \in \mathbb{N}$

Proposição 3.3.2 (Divisão entre números complexos). *Sejam os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$. Então temos: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$, com $c^2 + d^2 \neq 0$.*

Demonstração.

De fato,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

□

3.4 A Trigonometria dos Números Complexos

Na representação geométrica de um número complexo sempre pode-se construir um triângulo retângulo, considere o número complexo $z = x + yi$, com a seguinte representação.

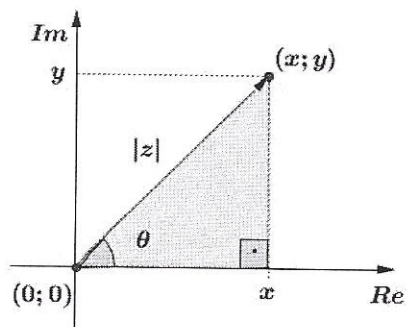


Figura 3.3: Argumento do complexo z

3.4.1 Argumento do número complexo

O ângulo θ é formado pelo eixo real e o vetor do afixo $(x; y)$ no sentido anti-horário é chamado de *argumento* do número complexo z , indica-se por $\theta = \arg(z)$, a sua medida está definida segundo o intervalo: $0 \leq \arg(z) < 2\pi$.

Pela trigonometria no triângulo retângulo (figura 3.3), pode-se afirmar que:

$$\operatorname{tg}\theta = \left| \frac{y}{x} \right|$$

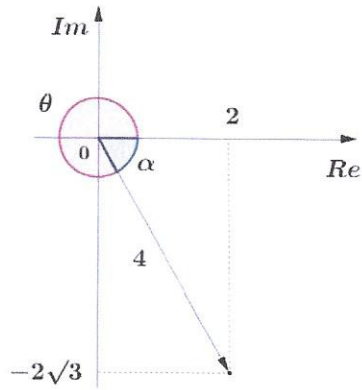
Exemplo 3.4.1. Determine o módulo, a representação geométrica e o argumento do número complexo $z = 2 - 2\sqrt{3}i$.

Solução:

1. Módulo

$$|z| = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4 \therefore |z| = 4$$

2. Representação Geométrica



3. Argumento θ

$$\operatorname{tg}\alpha = \left| \frac{-2\sqrt{3}}{2} \right| = |-\sqrt{3}| = \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3} \therefore \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$\text{Logo, } \theta = 2\pi - \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \therefore \operatorname{arg}(z) = \frac{5\pi}{3} \text{ rad}$$

3.4.2 Forma Trigonométrica dos Números Complexos

Considera-se um número complexo $z = x + yi \neq 0$, com a seguinte representação geométrica:

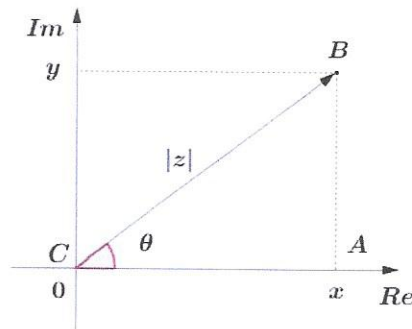


Figura 3.4: Representação Geométrica

Pelas relações trigonométricas no triângulo retângulo, tem-se:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{|z|} \quad \text{e} \quad \operatorname{cos}\theta = \frac{x}{|z|}$$

Com isso, teremos:

$$y = |z| \cdot \operatorname{sen}\theta \quad \text{e} \quad x = |z| \cdot \operatorname{cos}\theta$$

Pode-se, então escrever:

$$z = x + yi = |z| \cdot \cos\theta + (|z| \cdot \operatorname{sen}\theta)i = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) \therefore z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

Definição 3.4.1. Dado um número complexo $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, a sua forma trigonométrica será $z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, onde $|z|$ e θ são respectivamente o módulo e o argumento do número complexo z .

Exemplo 3.4.2. Escreva na forma trigonométrica o número complexo $z = 2 - 2\sqrt{3}i$.

Solução:

Conforme calculado nos itens 1 e 3 do exemplo 3.4.1., temos: $|z| = 4$ e $\operatorname{arg}(z) = \frac{5\pi}{3}$.

Logo, a forma trigonométrica será:

$$z = 4 \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3} \right)$$

3.5 Operações com Números Complexos na Forma Trigonométrica

Com os números complexos na forma trigonométrica tem-se a vantagem de simplificar o trabalho com os cálculos de potenciação e de radiciação de números complexos. Para isso tem-se os seguintes Teoremas:

Teorema 3.5.1.

1. Se $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)$ e $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$, então o produto será igual a $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$.
2. Se $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)$ e $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$, então a divisão será igual a $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$.

Demonstração.

1.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1| \cdot |z_2|(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2) = \\ &= |z_1 z_2|[\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + i(\cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2)] = \\ &= |z_1 z_2|[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = |z_1 z_2|[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{|z_1|(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1) \cdot |z_2|(\cos\theta_2 - i\operatorname{sen}\theta_2)}{|z_2|^2} = \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot [(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_1)] = \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \end{aligned}$$

□

Teorema 3.5.2 (Potenciação - Primeira fórmula de Moivre).Se $z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ e $\forall n \in \mathbb{Z}$, então $z^n = |z|^n[\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta)]$.*Demonstração.* Vamos dividir a demonstração em duas partes:I) $n \geq 0$

Por Indução:

Para $n = 0$, tem-se: $z^0 = 1 = |z|^0[\cos(0 \cdot \theta) + i\operatorname{sen}(0 \cdot \theta)]$ Para $n = 1$, tem-se: $z^1 = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = |z|^1[\cos(1 \cdot \theta) + i\operatorname{sen}(1 \cdot \theta)]$ Para $n = 2$, tem-se:

$$\begin{aligned} z^2 &= [|z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)]^2 = [|z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)] \cdot [|z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)] \stackrel{\text{Teo.3.5.1.1}}{=} \\ &\stackrel{\text{Teo.3.5.1.1}}{=} |z| \cdot |z|[\cos(\theta + \theta) + i\operatorname{sen}(\theta + \theta)] = |z|^2(\cos 2\theta + i\operatorname{sen} 2\theta) \end{aligned}$$

Para $n = 3$, tem-se:

$$\begin{aligned} z^3 &= [|z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)]^3 = [|z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)]^2 \cdot [|z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)] = \\ &= [|z|^2(\cos 2\theta + i\operatorname{sen} 2\theta)] \cdot [|z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)] \stackrel{\text{Teo.3.5.1.1}}{=} |z|^2 \cdot |z|[\cos(2\theta + \theta) + i\operatorname{sen}(2\theta + \theta)] = \\ &= |z|^3 \cdot (\cos 3\theta + i\operatorname{sen} 3\theta) \end{aligned}$$

Com isso, para $n = k$, tem-se:

$$z^k = |z|^k(\cos k\theta + i\operatorname{sen} k\theta) \text{ (Hipótese de Indução)}$$

Então, para $n = k + 1$, teremos:

$$z^{k+1} = |z|^{k+1}[\cos(k+1)\theta + i\operatorname{sen}(k+1)\theta] \text{ (Tese de Indução)}$$

De fato,

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z^k \cdot z \stackrel{\text{H.I}}{=} [|z|^k(\cos k\theta + i\operatorname{sen} k\theta)] \cdot [|z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)] \stackrel{\text{Teo.3.5.1.1}}{=} \\ &\stackrel{\text{Teo.3.5.1.1}}{=} |z|^{k+1}[\cos(k+1)\theta + i\operatorname{sen}(k+1)\theta] \end{aligned}$$

3.6 Fórmula de Euler

Sabe-se do cálculo diferencial que a expressão em série infinita das funções reais seno, cosseno e exponencial são:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\operatorname{cos} x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Considerando, em particular, que este desenvolvimento em série permanece válido quando $x = i\theta$, temos, particularmente para a função exponencial, que:

$$e^{i\theta} = 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \dots$$

fazendo a expansão, tem-se:

$$e^{i\theta} = 1 + (i\theta) - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - i\frac{\theta^7}{7!} + \dots$$

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots\right)$$

Com isso, temos:

$$e^{i\theta} = \operatorname{cos}\theta + i\operatorname{sen}\theta$$

As passagens para a obtenção da *fórmula de Euler*, podem ser, num contexto de Análise Matemática, justificadas nas referências [3], [5], [11] e [18].

De uma forma geral considerando o número complexo $z = x + iy$, definimos

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\operatorname{cos}y + i\operatorname{sen}y)$$

Propriedade 3.6.1.

1. $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
2. $e^z \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$
3. $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$, para todo $z \in \mathbb{C}$
4. $(e^z)^n = e^{nz}$, para todo $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}$
5. $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$, para todo $z \in \mathbb{C}$
6. $e^z = 1 \iff z = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

4 Função Trigonométrica

4.1 Função Seno

Função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \text{sen}x$ que possui como representação o seguinte gráfico.

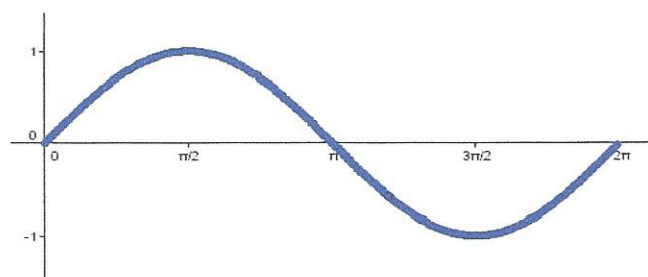


Figura 4.1: Representação gráfica da função seno

Essa representação gráfica recebe o nome de *senoide*.

Onde pode-se ter as seguintes informações:

- i) Período: $P = 2\pi$
- ii) Imagem: $[-1, 1]$
- iii) Amplitude do gráfico: $amp = 1$

Vejam os seguintes casos.

Dada a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a \cdot \text{sen}(bx+c)$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$. Determine:

(a) O período da função; (b) O ponto inicial do gráfico; (c) O conjunto imagem; (d) A amplitude; (e) O gráfico da função.

Resolução:

O arco $bx + c$ pertence ao intervalo $[0, 2\pi]$, ou seja:

$$0 \leq bx + c \leq 2\pi \Rightarrow -c \leq bx \leq -c + 2\pi \Rightarrow \frac{-c}{|b|} \leq x \leq \frac{-c}{|b|} + \frac{2\pi}{|b|}.$$

O ponto inicial do gráfico em relação ao eixo das abscissas é: $x_0 = \frac{-c}{|b|}$. Logo,

$$x_0 \leq x \leq x_0 + \frac{2\pi}{|b|}.$$

O período é o tamanho percorrido pelo gráfico da função no sentido da horizontal: $P = (x_0 + \frac{2\pi}{|b|}) - x_0 \Rightarrow P = \frac{2\pi}{|b|}$.

A função seno tem como imagem o conjunto $[-1, 1]$, logo:

$$-1 \leq \text{sen}(bx + c) \leq 1 \Rightarrow -a \leq a \cdot \text{sen}(bx + c) \leq a \Rightarrow -a \leq f(x) \leq a$$

Define-se amplitude de uma senoide como sendo:

$$\text{amp} = \frac{|a - (-a)|}{2} \Rightarrow \text{amp} = a$$

Com isso, tem-se:

(a) $P = \frac{2\pi}{|b|}$; (b) $x_0 = \frac{-c}{|b|}$; (c) $Im = [-a, a]$; (d) $\text{amp} = a$;

(e) Os gráficos da função podem ser:

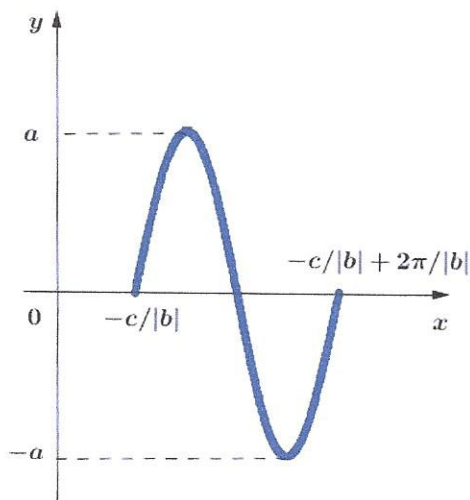


Figura 4.2: Para $c < 0$

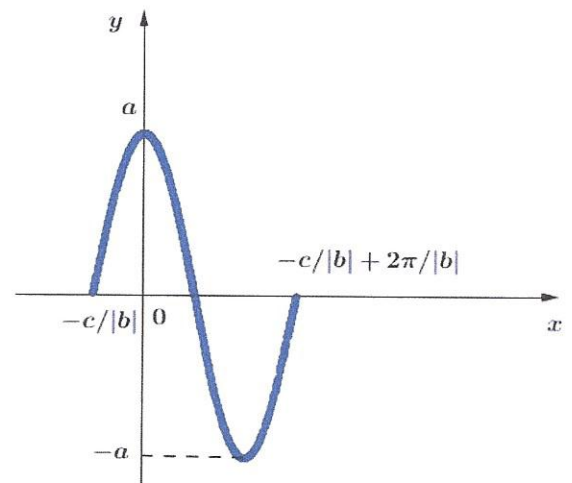


Figura 4.3: Para $c > 0$

5 Vetores

Definição 5.0.1. Vetor é o ente matemático que caracteriza direção, sentido e módulo de uma grandeza.

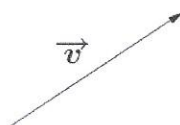


Figura 5.1: Vetor

5.1 Adição entre Vetores

A adição entre vetores é realizada ligando-se origem com extremidade. O vetor soma é o que tem origem na origem do 1º vetor e sua extremidade na extremidade do último vetor.

Vejam os a seguinte situação.

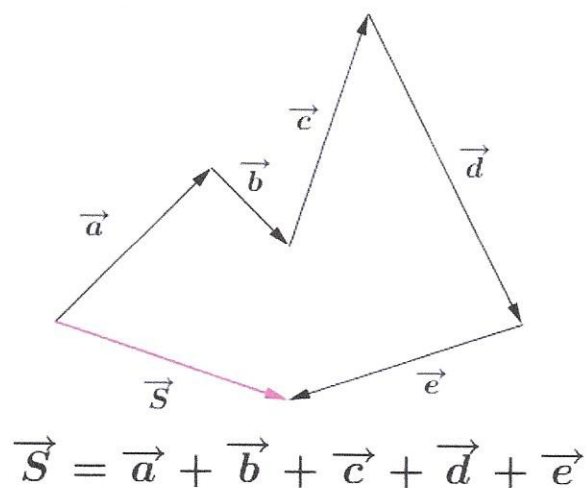


Figura 5.2: Adição de Vetores

5.1.1 Regra do Paralelogramo

Pode-se adotar a regra do paralelogramo, que consiste em tomar os vetores \vec{a} e \vec{b} com a mesma origem conforme a figura abaixo, onde a diagonal do paralelogramo representa a adição dos vetores \vec{a} e \vec{b} .

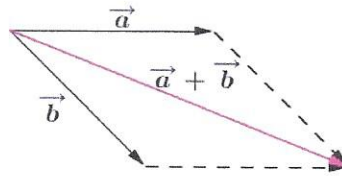


Figura 5.3: Adição pela regra do paralelogramo

5.2 Propriedades da Adição entre Vetores

Temos as seguintes propriedades da adição entre vetores:

Propriedade 5.2.1. Associativa: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^2$

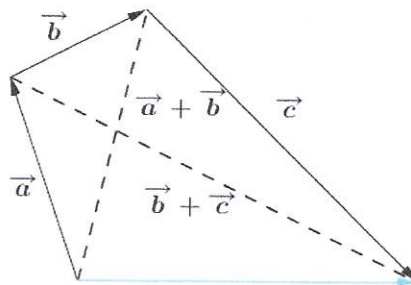


Figura 5.4: Associativa

Propriedade 5.2.2. Comutativa: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$

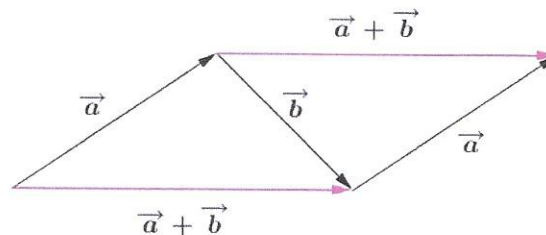


Figura 5.5: Comutativa

Propriedade 5.2.3. *Elemento Neutro:* $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$, $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^2$

Propriedade 5.2.4. *Elemento Oposto:* Dado o vetor $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$, existe um único vetor $(-\vec{a}) \in \mathbb{R}^2$, de modo que: $\vec{a} + (-\vec{a}) = -\vec{a} + \vec{a} = \vec{0}$

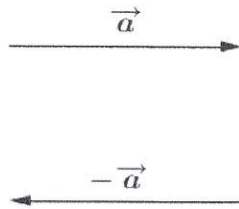


Figura 5.6: Elemento Neutro

6 Elementos Básicos que compõem um Circuito Elétrico de Corrente Alternada

6.1 Corrente Elétrica e Tensão Elétrica

Definição 6.1.1. Corrente Elétrica é o movimento ordenado de carga elétrica.

Definição 6.1.2. Tensão Elétrica é a diferença de potencial elétrico entre dois pontos de um circuito elétrico.

6.2 Gerador Elétrico

É um dispositivo capaz de transformar em energia elétrica outra modalidade de energia. Os geradores mais comuns são os químicos e os mecânicos.



Figura 6.1: Gerador químico



Figura 6.2: Gerador mecânico

Os geradores são representados no circuitos por dois traços paralelos entre si de tamanhos diferentes.

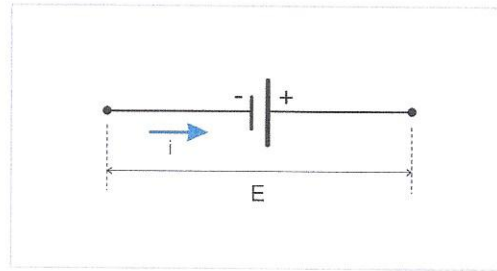


Figura 6.3: Representação de gerador

6.3 Resistor

Definição 6.3.1. São dispositivos destinados, em geral, a limitar a intensidade de corrente elétrica.

Há resistores que transformam grande parte da energia elétrica que recebem em calor. Como exemplo, tem-se:

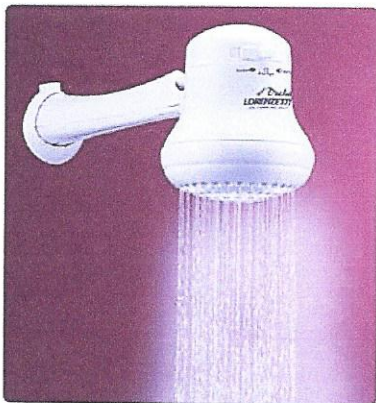


Figura 6.4: Chuveiro elétrico



Figura 6.5: Ferro elétrico

Os símbolos convencionais para representar um resistor são:



Figura 6.6: Representação de resistência

No presente trabalho vamos usar como representação de uma resistência o seguinte símbolo:

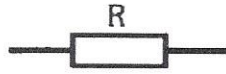


Figura 6.7: Resistência usual

6.4 Dispositivos de Controle

São utilizados nos circuitos para medir a intensidade da corrente elétrica e a tensão entre dois pontos, ou, simplesmente, para encontrá-las. Os mais comuns são o amperímetro e o voltímetro.

6.4.1 Amperímetro

Definição 6.4.1. Amperímetro é um aparelho que serve para medir a intensidade da corrente elétrica.



Figura 6.8: Amperímetro

Representação do amperímetro em um circuito elétrico.



Figura 6.9: Representação do amperímetro

6.4.2 Voltímetro

Definição 6.4.2. Voltímetro é um aparelho utilizado para medir a tensão entre dois pontos de um circuito elétrico.



Figura 6.10: Voltímetro

Representação do voltímetro em um circuito elétrico.



Figura 6.11: Representação do voltímetro

6.5 Circuito Elétrico

Definição 6.5.1. Um circuito elétrico é a ligação de elementos elétricos, tais como resistores, indutores, capacitores e fonte de tensão, de modo ativo e passivo que formem pelo menos um caminho fechado para corrente elétrica.

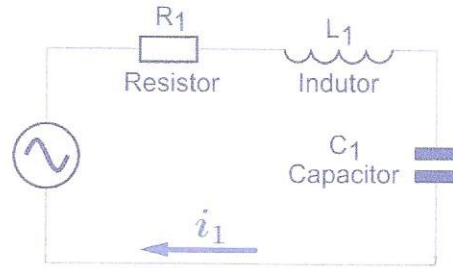


Figura 6.12: Exemplo de circuito elétrico RLC

6.6 Nó, Ramo e Malha

6.6.1 Nó

Definição 6.6.1. Nó é qualquer ponto do circuito em que dois ou mais terminais de elementos de circuito se conectam.

6.6.2 Ramo

Definição 6.6.2. Ramo é o único caminho entre dois nós consecutivos.

6.6.3 Malha

Definição 6.6.3. Malha é qualquer caminho fechado seguido sobre ramo de um circuito.

Exemplo de Malha

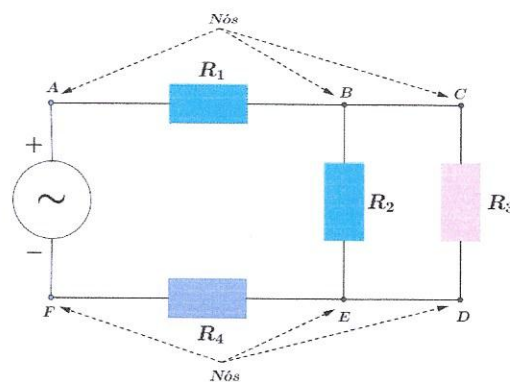


Figura 6.13: Nó, Ramo e Malha

No circuito temos os nós A, B, C, D, E e F.

Os ramos AB, CD, BE e AF.

As malhas ABEFA, BCDEB e ABCDEFA

6.7 Leis Elétricas

A seguir enunciaremos as duas leis elétricas mais comumente utilizadas em análise e resolução de problemas envolvendo circuitos lineares de corrente elétrica:

1. Leis de Kirchhoff

- (a) 1ª Lei de Kirchhoff: Em um nó, a soma das intensidades das correntes elétricas que chegam é igual à soma das intensidades das correntes que saem.
- (b) 2ª Lei de Kirchhoff: Percorrendo-se uma malha em um certo sentido, partindo-se e chegando-se ao mesmo ponto, a soma algébrica das tensões é nula.

- 2. **Lei de Ohm:** O quociente da ddp nos terminais de um resistor pela intensidade de corrente elétrica que atravessa é constante e igual à resistência elétrica do resistor.

6.8 Geração do Sinal Alternado

Considere um enrolamento de área S , em m^2 , formado por N espiras e imerso em um campo magnético \vec{B} , em Wb/m^2 , perpendicular ao eixo de rotação do enrolamento.

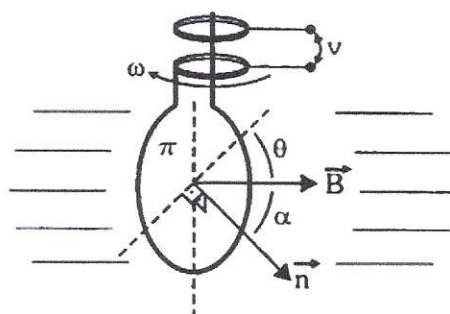


Figura 6.14: Enrolamento no campo magnético

O plano π forma um ângulo θ , em radianos, com o vetor de referência \vec{B} .

O fluxo magnético ϕ , em Wb, é o produto do campo B pela área efetiva do enrolamento, isto é, ele varia segundo o cosseno de α , que é o ângulo entre o vetor \vec{n} , normal ao plano π , e o vetor \vec{B} .

Portanto, a expressão do fluxo em função de α é: $\phi(\alpha) = B \cdot S \cdot \cos\alpha$.

Mas, $\alpha = 90^\circ + \theta$, pois \vec{n} é perpendicular ao plano π , de forma que:

$$\phi(\theta) = B \cdot S \cdot \cos(90^\circ + \theta)$$

Mas, $\cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta$, portanto a expressão final do fluxo é:

$$\phi(\theta) = -B \cdot S \cdot \sin\theta$$

Se o enrolamento estiver girando com velocidade angular ω , em rad/s, o ângulo θ varia com o tempo t, em segundos, conforme expressão $\theta = \omega t$. Assim, a expressão do fluxo instantâneo também é:

$$\phi(t) = -B \cdot S \cdot \sin(\omega t)$$

O sinal negativo em $\phi(t)$ indica a inversão do plano π em relação ao sentido do fluxo.

Pela Lei de Lenz, o movimento da espira imersa no campo magnético induz tensão v , em Volt, que tende a se opor à causa que a gerou, sendo proporcional à variação do fluxo magnético no tempo e ao número N de espiras, ou seja:

$$v(t) = -N \cdot \frac{d\phi(t)}{dt}$$

Substituindo $\phi(t)$ na fórmula de $v(t)$, obtemos a expressão da tensão instantânea:

$$v(t) = -N \cdot \frac{d\phi(t)}{dt} \Rightarrow v(t) = -N \cdot \frac{d(-B \cdot S \cdot \sin\omega t)}{dt} \Rightarrow v(t) = N \cdot B \cdot S \cdot \omega \cdot \cos\omega t$$

Na expressão de $v(t)$, o termo $N \cdot B \cdot S \cdot \omega$ é uma constante que corresponde ao valor máximo da tensão gerada, que denominaremos amplitude da tensão V_m . Portanto, concluímos que:

$$V_m = N \cdot B \cdot S \cdot \omega \quad \text{e} \quad v(t) = V_m \cdot \cos\omega t \quad \text{ou} \quad v(\theta) = V_m \cdot \cos\theta$$

Considerando a identidade trigonométrica $\cos\theta = \text{sen}(\theta + \frac{\pi}{2})$, pode-se escrever ainda:

$$v(t) = V_m \cdot \text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ou} \quad v(\theta) = V_m \cdot \text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

6.9 Corrente Alternada

Definição 6.9.1. Define-se corrente alternada como uma corrente elétrica que possui fase e muda periodicamente de intensidade e sentido.

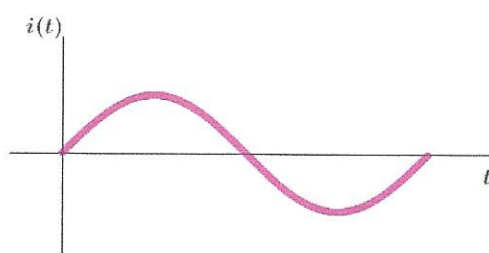


Figura 6.15: Corrente Alternada

No sistema internacional, a unidade de resistência elétrica é o **ohm**, cujo símbolo é Ω , a unidade de capacitância é **farad**, cujo símbolo é F, a unidade de tensão é **volt**, cujo símbolo é V e a unidade de intensidade de corrente é o **ampère**, cujo símbolo é A e a unidade de indutância é o **henry**, cujo símbolo é H e a unidade de intensidade do fluxo magnético é o **weber**, cujo símbolo é Wb.

6.10 Forma Matemática da Corrente Alternada e da Tensão

Como a corrente alternada é da forma senoidal, sua forma Matemática é descrita pela seguinte fórmula:

$$i(t) = I_m \text{sen}(\omega t + \theta_i).$$

onde:

- $i(t)$ é a intensidade de corrente instantânea em relação a t ;

- I_m é a amplitude da intensidade de corrente alternada;
- t tempo em segundos;
- ω é a velocidade angular da onda;
- θ_i é a fase inicial da onda quando $t = 0$.

Nestes termos, a intensidade da corrente instantânea, $i(t)$, será máxima quando $\text{sen}(\omega t + \theta_i) = 1$, e será mínima quando $\text{sen}(\omega t + \theta_i) = -1$.

A tensão em um circuito de corrente alternada possui como equação matemática:

$$v(t) = V_m \text{sen}(\omega t + \theta_v)$$

onde:

- $v(t)$ é a tensão instantânea em relação a t ;
- V_m é a amplitude da tensão;
- t tempo em segundos;
- ω é a velocidade angular da onda;
- θ_v é a fase inicial da onda quando $t = 0$.

De forma inteiramente análoga a intensidade da corrente instantânea $i(t)$, temos que a tensão instantânea, $v(t)$, será máxima quando $\text{sen}(\omega t + \theta_v) = 1$, e será mínima quando $\text{sen}(\omega t + \theta_v) = -1$.

Exemplo 6.10.1. Dado o circuito abaixo, composto por resistências, cujas tensões são $v_a(t) = 2\text{sen}(\omega t + 30^\circ)$ e $v_b(t) = 2\text{sen}(\omega t + 90^\circ)$. Determine a tensão de entrada no circuito.

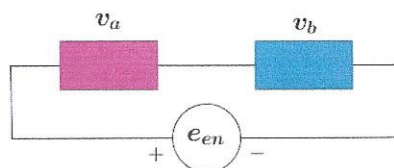


Figura 6.16: Circuito elétrico

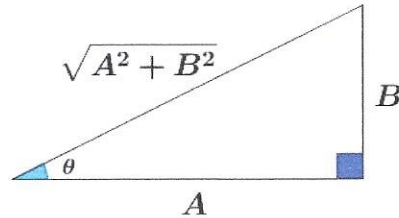
Solução:

A solução dessa situação dá-se por meio da aplicação da Lei de Kirchhoff para tensões, temos: $e_{en}(t) = v_a(t) + v_b(t)$.

$$\begin{aligned} \text{Desse modo, } e_{en}(t) &= v_a(t) + v_b(t) = 2\text{sen}(\omega t + 30^\circ) + 2\text{sen}(\omega t + 90^\circ) = \\ &= 2 \cdot [(\text{sen}\omega t \cdot \cos 30^\circ + \cos\omega t \cdot \text{sen} 30^\circ) + (\text{sen}\omega t \cdot \cos 90^\circ + \cos\omega t \cdot \text{sen} 90^\circ)] = \\ &= 2 \cdot \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \text{sen}\omega t + \frac{1}{2} \cdot \cos\omega t + \cos\omega t \right] = \sqrt{3} \cdot \text{sen}\omega t + 3 \cdot \cos\omega t \\ e_{en}(t) &= A \cdot \text{sen}\omega t + B \cdot \cos\omega t, \text{ onde considera-se, } A = \sqrt{3} \text{ e } B = 3. \text{ Logo, tem-se:} \end{aligned}$$

$$e_{en}(t) = A \cdot \text{sen}\omega t + B \cdot \cos\omega t$$

Consideremos o triângulo retângulo com os catetos iguais a A e B abaixo:



Temos as seguintes razões trigonométricas:

$$\text{sen}\theta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \cos\theta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{e} \quad \text{tg}\theta = \frac{A}{B}$$

Dada a expressão $A \cdot \text{sen}\omega t + B \cdot \cos\omega t$, tem-se:

$$\begin{aligned} A \cdot \text{sen}\omega t + B \cdot \cos\omega t &= \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \text{sen}\omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \cos\omega t \right) = \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} \cdot (\cos\theta \cdot \text{sen}\omega t + \text{sen}\theta \cdot \cos\omega t) = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \text{sen}(\omega t + \theta) \quad \therefore \\ A \cdot \text{sen}\omega t + B \cdot \cos\omega t &= \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \text{sen}(\omega t + \theta) \quad \text{e} \quad \theta = \text{tg}^{-1} \left(\frac{A}{B} \right). \end{aligned}$$

A tensão de entrada tem como expressão resultante:

$$e_{en}(t) = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \text{sen} \left[\omega t + \text{tg}^{-1} \left(\frac{A}{B} \right) \right]$$

Onde,

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\theta = \text{tg}^{-1} \left(\frac{A}{B} \right) = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) = 60^\circ$$

$$e_{en}(t) = 2\sqrt{3} \cdot \text{sen}(\omega t + 60^\circ)$$

Podemos observar que com o uso do desenvolvimento das relações trigonométricas a resolução se tornou um processo complicado e muito demorado .

Um método de resolução que possibilitaria uma solução para a soma algébrica seria realizar a soma das imagens das funções a cada instante. No entanto, esse método mostra-se bastante desvantajoso do ponto de vista operacional, e a precisão totalmente depende da escala utilizada nos cálculos da soma.

Um outro método de resolução válido, porém operacionalmente exaustivo, consiste em traçar as duas funções senoidais em um mesmo sistema de eixos e somar algebricamente as ordenadas em cada ponto. No entanto, observa-se experimentalmente, que a precisão deste método não é muito boa.

Com isso é natural a seguinte pergunta: Como se calcula a soma algébrica de duas ou mais funções temporais senoidais (tensões ou correntes) de maneira rápida?

A seguir discutiremos um método mais vantajoso, do ponto de vista operacional, que facilitará a soma algébrica das funções senoidais aplicadas nos circuitos lineares de corrente elétrica, através do qual utiliza-se um vetor girante combinado com as operações do Corpo dos Números Complexos, que doravante chamaremos de **Fasor**.

7 Fasor

Definição 7.0.1. Define-se fasor como sendo um vetor que gira no sentido anti-horário com velocidade angular constante em um ciclo trigonométrico, dando origem a uma função senoidal.

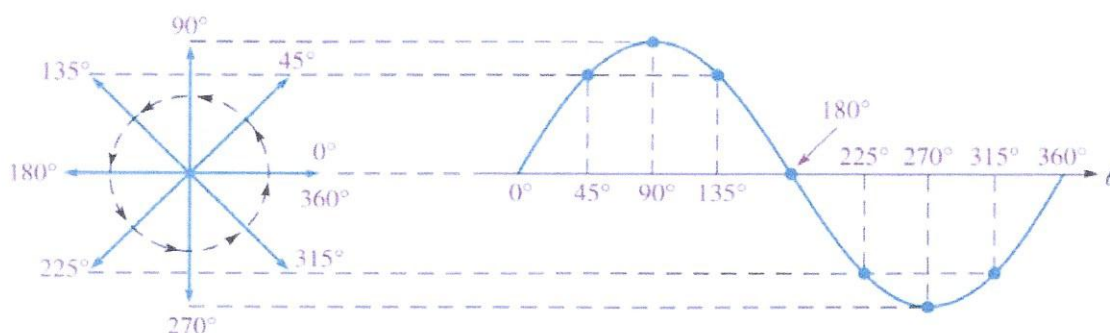


Figura 7.1: Fasor em movimento

Pode-se relacionar matematicamente fasores com funções trigonométricas do tempo através da expressão:

$$v(t) = V_m \text{sen}(\omega t + \theta)$$

Considerando, t como a variável temporal instantânea, ω como velocidade angular, θ um ângulo de fase inicial e V_m a amplitude do fasor.

A sua representação fasorial é da seguinte forma:

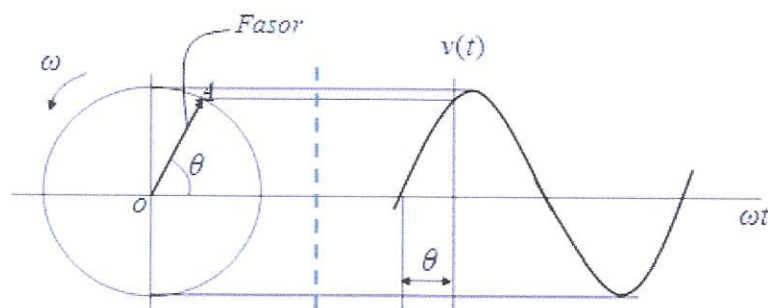


Figura 7.2: Representação do fasor

A cada período ou ciclo completado o Fasor está sempre na mesma posição angular inicial θ .

7.1 Números Complexos e Fasores

Iremos mostrar os números complexos como uma técnica que facilitará os cálculos de somas algébricas de forma rápida, direta e precisa de tensões e corrente senoidais na forma de fasores aplicados em circuitos lineares de corrente elétrica.

7.2 Representação dos Números Complexos

Considere o número complexo $C = A + jB$, onde usaremos j como unidade imaginária.

7.2.1 Representação na forma retangular

A representação retangular do número complexo $C = A + jB$ pode ser feita da seguinte forma:

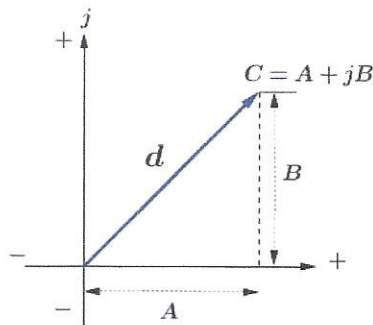


Figura 7.3: Representação retangular

Onde o módulo do número complexo é igual a $d = \sqrt{A^2 + B^2}$.

7.2.2 Forma Polar de Steinmetz

A forma de Steinmetz ou forma polar do Fasor é expresso por $C = d\angle\theta$, onde d e θ representam o módulo e o argumento, respectivamente, do número complexo.

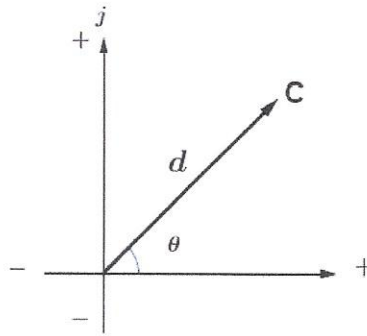


Figura 7.4: Representação de Steinmetz

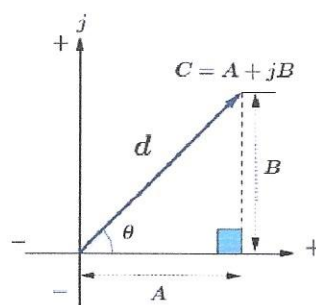
7.2.3 Forma Polar de Euler

A forma de Euler ou forma polar do fasor é expresso por $C = de^{j\theta}$, onde d é o módulo, θ é o argumento e j é a unidade imaginária dos complexos.

7.3 Relação entre a forma retangular e a forma polar

Dado um número complexo, onde sua forma retangular é $C = A + jB$ e sua forma polar é $C = d\angle\theta$, pode-se relacionar da seguinte forma:

A representação geométrica do complexo na forma retangular e polar é de forma única, de acordo com as figuras 7.3 e 7.4 e com isso temos o gráfico abaixo:

Figura 7.5: Representação da forma retangular e polar de $C = A + jB$

Pode-se ter a seguinte relação: $C = A + jB = d\angle\theta$

7.4 Relação entre a forma de Steinmetz e a fórmula de Euler

Da figura 6.5, temos: $d = \sqrt{A^2 + B^2}$; $\theta = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{B}{A} \right)$; $\operatorname{sen}\theta = \frac{B}{d}$ e $\operatorname{cos}\theta = \frac{A}{d}$.

O número complexo $C = A + jB$ pode ser expresso pela forma trigonométrica $C = d(\operatorname{cos}\theta + j\operatorname{sen}\theta)$. Logo, $C = d\angle\theta = d(\operatorname{cos}\theta + j\operatorname{sen}\theta)$.

Por outro lado, pela fórmula de Euler, tem-se:

$$e^{j\theta} = \operatorname{cos}\theta + j\operatorname{sen}\theta,$$

logo, pode-se escrever:

$$C = d\angle\theta = de^{j\theta},$$

que é a relação entre a forma de Steinmetz e a fórmula de Euler.

7.5 Operações com os números complexos

Dados os números complexos $C_1 = A_1 + jB_1$ e $C_2 = A_2 + jB_2$, pode-se realizar as seguintes operações:

7.5.1 Adição

$$C_1 + C_2 = (A_1 + A_2) + j(B_1 + B_2)$$

7.5.2 Subtração

$$C_1 - C_2 = (A_1 - A_2) + j(B_1 - B_2)$$

7.5.3 Multiplicação

Considere os números complexos $C_1 = A_1 + jB_1$ e $C_2 = A_2 + jB_2$, onde a multiplicação é realizada da seguinte forma:

$$C_1 \cdot C_2 = (A_1A_2 - B_1B_2) + j(B_1A_2 + A_1B_2)$$

Quando os números complexos $C_1 = d_1\angle\theta_1$ e $C_2 = d_2\angle\theta_2$, na forma *polar*, a multiplicação é realizada da seguinte forma:

$$C_1 \cdot C_2 = d_1 \cdot d_2 \angle(\theta_1 + \theta_2)$$

7.5.4 Divisão

Considere os números complexos $C_1 = A_1 + jB_1$ e $C_2 = A_2 + jB_2$, onde a divisão é realizada da seguinte forma:

$$C_1 \div C_2 = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{A_2^2 + B_2^2} + j \frac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_2^2 + B_2^2}$$

Quando os números complexos $C_1 = d_1\angle\theta_1$ e $C_2 = d_2\angle\theta_2$, na forma *polar*, a divisão é realizada da seguinte forma:

$$C_1 \div C_2 = \frac{d_1}{d_2} \angle(\theta_1 - \theta_2)$$

7.6 Diagrama Fasorial

Para representar um fasor usa-se um diagrama fasorial que pode ser uma senoide definida matematicamente por $v(t) = V_m \text{sen}(\omega t + \theta)$ ou no plano complexo através de um número complexo no formato, retangular, ou no formato polar ou ainda no formato exponencial de Euler. Desse modo, tem-se abaixo uma representação fasorial com uma senoide e um plano complexo:

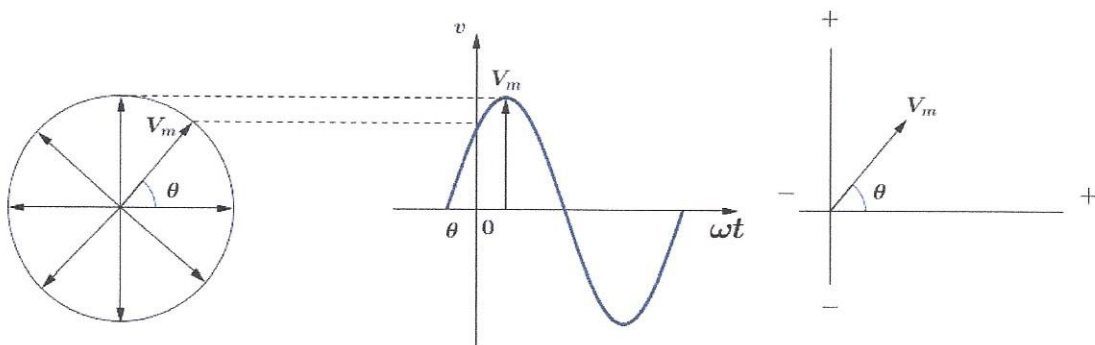


Figura 7.6: Diagrama fasorial

Em termos matemáticos, tem-se:

$$v(t) = V_m \text{sen}(\omega t \pm \theta) = V_m \angle \pm \theta = V_m e^{\pm j\theta}$$

Uma das vantagens de usar o diagrama fasorial é que pode-se representar mais de um fasor, conforme a figura abaixo:

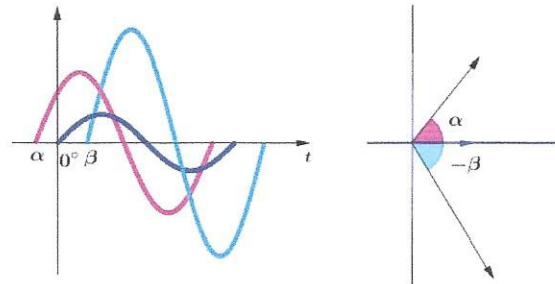


Figura 7.7: Representação de três fasores

8 Análise Fasorial em Circuitos com Corrente Alternada

Utilizaremos os fasores, a álgebra do Corpo dos Números Complexos combinando com as Leis Elétricas para resolver situações de circuitos elétricos com corrente alternada.

8.1 Valor Eficaz da Tensão Elétrica e Valor Eficaz da Corrente Elétrica Alternada

O valor eficaz de uma tensão elétrica corresponde ao valor que deveria ter uma tensão contínua pra produzir numa determinada resistência a mesma de dissipação de energia (potência) que produz a tensão alternada. Matematicamente, corresponde a média quadrática da tensão, dada por

$$v_{ef} = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [v(t)]^2 dt}$$

8.1.1 Valor eficaz de uma tensão senoidal

Seja a tensão elétrica em função do tempo $v(t) = V_m \text{sen}(\omega t + \theta)$.

$$v_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [V_m \text{sen}(\omega t + \theta)]^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} V_m^2 \int_0^T \text{sen}^2(\omega t + \theta) dt}$$

Calculando a integral indefinida $\int \text{sen}^2(\omega t + \theta) dt$ pelo método da substituição, tem-se:

Considere $u = \omega t + \theta$, onde devemos calcular $\frac{1}{\omega} \int \text{sen}^2 u du$.

Da identidade trigonométrica, temos: $\text{sen}^2 u = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2u)$, obtemos então

$$\frac{1}{\omega} \int \text{sen}^2 u du = \frac{1}{\omega} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2u) \right) du = \frac{1}{2\omega} u - \frac{1}{4\omega} \text{sen}(2u) + k$$

$$\frac{1}{\omega} \int \text{sen}^2 u du = \frac{2(\omega t + \theta) - \text{sen}[2(\omega t + \theta)]}{4\omega} + k, k \in \mathbb{R}$$

Calculando a integral definida entre os extremos T e 0 , teremos:

$$\begin{aligned} \int_0^T \text{sen}^2(\omega t + \theta) dt &= \left\{ \frac{2(\omega t + \theta) - \text{sen}[2(\omega t + \theta)]}{4\omega} \right\}_0^T = \\ &= \frac{2(\omega T + \theta) - \text{sen}[2(\omega T + \theta)] - 2(\omega \cdot 0 + \theta) + \text{sen}[2(\omega \cdot 0 + \theta)]}{4\omega} = \frac{1}{2}T \end{aligned}$$

Então,

$$v_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} V_m^2 \cdot \frac{T}{2}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \therefore v_{ef} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

8.1.2 Valor eficaz de uma corrente elétrica senoidal

Seja a corrente elétrica em função do tempo $i(t) = I_m \text{sen}(\omega t + \theta)$, onde de maneira análoga ao da tensão senoidal encontra-se o valor eficaz da corrente elétrica como sendo

$$i_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

8.2 Aplicações dos Fasores

Em resposta ao seguinte questionamento feito em seção anterior: Como se calcula a soma algébrica de duas ou mais funções temporais senoidais (tensões ou correntes) de maneira rápida?.

Temos como resposta que um método para realizar a soma entre duas funções temporais senoidais de maneira rápida é seguindo os seguintes passos: o primeiro passo consiste na conversão das funções senoidais no formato fasorial polar de Steinmetz ou no formato fasorial polar de Euler; o segundo passo consiste em escrever a forma fasorial para a forma trigonométrica dos Números Complexos e em seguida escrever na forma algébrica dos Números Complexos; o terceiro passo consiste na realização da soma dos Números Complexos; o quarto passo consiste em converter a soma obtida no passo anterior para a forma fasorial de Steinmetz, ou de Euler; e, finalmente no quinto passo é feita a conversão do resultado do quarto passo para a forma de função temporal senoidal resultante. Esse método só é aplicado em funções temporais senoidais de mesma frequência.

Por questão de praticidade e uniformidade, representaremos o módulo de um fasor como sendo o *valor eficaz* da amplitude da função senoidal em estudo. Desse modo, temos:

$$v(t) = V_m \text{sen}(\omega t + \theta_v) \implies V = v_{ef} \angle \theta_v$$

$$i(t) = I_m \text{sen}(\omega t + \theta_i) \implies I = i_{ef} \angle \theta_i,$$

onde:

$$v_{ef} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad i_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

- Retornando ao exemplo 5.2.1. Dado o circuito abaixo, composto por resistências, cujas tensões são $v_a(t) = 2\text{sen}(\omega t + 30^\circ)$ e $v_b(t) = 2\text{sen}(\omega t + 90^\circ)$. Determine a tensão de entrada no circuito.

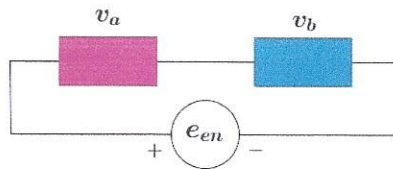


Figura 8.1: Circuito elétrico

Solução:

Aplicando a Lei de Kirchhoff para tensões, temos que a tensão de entrada do circuito é dada por $e_{en}(t) = v_a(t) + v_b(t)$ e que o valor eficaz da tensão é dada por $v_{ef} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$.

Iniciamos a conversão das funções temporais para a forma fasorial usando os seguintes passos:

1. Passando da forma temporal para a forma fasorial de Steinmetz:

$$v_a(t) = 2\text{sen}(\omega t + 30^\circ) \implies V_a = \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \right) \angle 30^\circ \implies V_a = \sqrt{2} \angle 30^\circ$$

$$v_b(t) = 2\text{sen}(\omega t + 90^\circ) \implies V_b = \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \right) \angle 90^\circ \implies V_b = \sqrt{2} \angle 90^\circ$$

2. Passando da forma fasorial de Steinmetz para forma trigonométrica, e, em seguida para forma algébrica ou retangular:

$$V_a = \sqrt{2} \angle 30^\circ \implies V_a = \sqrt{2}(\cos 30^\circ + j \text{sen} 30^\circ) \implies V_a = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j$$

$$V_b = \sqrt{2} \angle 90^\circ \implies V_b = \sqrt{2}(\cos 90^\circ + j \text{sen} 90^\circ) \implies V_b = 0 + \sqrt{2}j$$

- Aplicação da Lei de Kirchhoff para tensões resulta na soma dos complexos V_a e V_b , temos: $V_a + V_b = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}j$
- Convertendo da forma algébrica para a forma fasorial de Steinmetz, e, em seguida para forma temporal:

$$e_{ef} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{6} \therefore e_{ef} = \sqrt{6}$$

$$\operatorname{tg}\theta_{en} = \frac{3\sqrt{2}}{\frac{2}{\sqrt{6}}} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta_{en} = 60^\circ$$

logo,

$$E_{en} = \sqrt{6} \angle 60^\circ \Rightarrow e_{en}(t) = \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} \operatorname{sen}(\omega t + 60^\circ)$$

$$\therefore e_{en}(t) = \sqrt{12} \operatorname{sen}(\omega t + 60^\circ)$$

Desse modo a tensão de entrada do circuito é $e_{en}(t) = 2\sqrt{3} \operatorname{sen}(\omega t + 60^\circ)$.

8.2.1 Resolução de Problemas

Vejamos as situações problemas abaixo.

- Considere o circuito abaixo, onde as seguintes tensões aplicadas no circuito são $v_2(t) = 31,6 \cos(\omega t + 73,4^\circ)$ e $v_T(t) = \cos(\omega t - 35^\circ)$, determine a tensão $v_1(t)$ com o uso dos fasores.

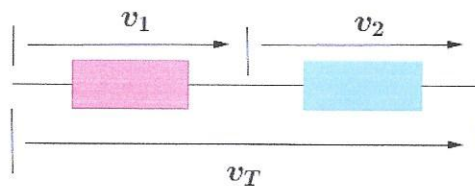


Figura 8.2: Circuito da aplicação 2

Solução:

As funções temporais estão na forma de cosseno. O que não tem problema para aplicação dos fasores, pois, pela seguinte identidade trigonométrica, tem-se:

$$\cos \alpha = \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

Aplicando a Lei de Kirchhoff para tensões, temos que $v_1(t) = v_T(t) - v_2(t)$ e o valor eficaz da tensão é dado por $v_{ef} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$.

Vamos converter as funções temporais na forma fasorial usando os seguintes passos:

- 1 Passando da forma temporal para a forma fasorial de Euler:

$$v_T(t) = 20\cos(\omega t - 35^\circ) \Rightarrow V_T = \left(\frac{20}{\sqrt{2}}\right) e^{j(-35^\circ)} \Rightarrow V_T = 14,14e^{j(-35^\circ)}$$

$$v_2(t) = 31,6\cos(\omega t + 73,4^\circ) \Rightarrow V_2 = \left(\frac{31,6}{\sqrt{2}}\right) e^{j73,4^\circ} \Rightarrow V_2 = 22,34e^{j73,4^\circ}$$

- 2 Passando da forma fasorial de Euler para forma trigonométrica, e, em seguida para forma algébrica ou retangular:

$$V_T = 14,14e^{j(-35^\circ)} \Rightarrow V_T = 14,14[\cos(-35^\circ) + j\sen(-35^\circ)] \Rightarrow V_T = 11,58 - 8,11j$$

$$V_2 = 22,34e^{j73,4^\circ} \Rightarrow V_2 = 22,34(\cos 73,4^\circ + j\sen 73,4^\circ) \Rightarrow V_2 = 6,38 + 21,41j$$

- 3 Aplicação da Lei de Kirchhoff para tensões resulta na diferença entre os complexos V_T e V_2 , teremos: $V_T - V_2 = 5,2 - 29,52j$

- 4 Convertendo da forma algébrica para a forma fasorial de Euler e em seguida para a forma temporal:

$$v_{ef} = \sqrt{5,2^2 + (-29,52)^2} \Rightarrow v_{ef} = 29,974496 \text{ e } \operatorname{tg}\theta_1 = \frac{-29,52}{5,2} = -5,676923$$

$$\therefore \theta_1 = -80^\circ, \text{ logo, a forma fasorial de Euler será: } V_1 = 29,974496e^{j(-80^\circ)}$$

Para forma temporal teremos:

$$v_1(t) = \sqrt{2} \cdot 29,974496\cos(\omega t - 80^\circ) \therefore v_1(t) = 42,4\cos(\omega t - 80^\circ)$$

2. Dados as tensões nos terminais de cada resistência do circuito indicado abaixo:

$$v_1(t) = 70,7\sen(\omega t + 30^\circ), v_2(t) = 28,3\sen(\omega t + 120^\circ) \text{ e } v_3(t) = 14,14\cos(\omega t + 30^\circ)$$

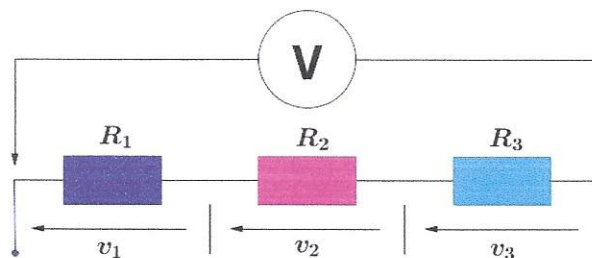


Figura 8.3: Circuito Elétrico

Determine a leitura do voltímetro indicado no circuito.

Solução:

Aplicando a Lei de Kirchhoff para tensões, temos que a tensão total do circuito é dada por $v_T(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t)$ e que o valor eficaz da tensão é dada por

$$v_{ef} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}.$$

1 Passando da forma temporal para a forma fasorial de Steinmetz:

$$v_1(t) = 70,7 \text{sen}(\omega t + 30^\circ) \Rightarrow V_1 = \left(\frac{70,7}{\sqrt{2}} \right) \angle 30^\circ \Rightarrow V_1 = 50 \angle 30^\circ.$$

$$v_2(t) = 28,3 \text{sen}(\omega t + 120^\circ) \Rightarrow V_2 = \left(\frac{28,3}{\sqrt{2}} \right) \angle 120^\circ \Rightarrow V_2 = 20 \angle 120^\circ.$$

Transformamos a função temporal de cosseno para seno em primeiro lugar para que possamos continua com aplicação dos fasores.

$$v_3(t) = 14,14 \text{cos}(\omega t + 30^\circ) \Rightarrow v_3(t) = 14,14 \text{sen}(\omega t + 120^\circ) \Rightarrow V_3 = \left(\frac{14,14}{\sqrt{2}} \right) \angle 120^\circ \Rightarrow V_3 = 10 \angle 120^\circ.$$

2 Passando da forma fasorial de Steinmetz para forma trigonométrica, e, em seguida para forma algébrica ou retangular:

$$V_1 = 50 \angle 30^\circ \Rightarrow V_1 = 50(\text{cos}30^\circ + j \text{sen}30^\circ) \Rightarrow V_1 = 43,3 + 25j$$

$$V_2 = 20 \angle 120^\circ \Rightarrow V_2 = 20(\text{cos}120^\circ + j \text{sen}120^\circ) \Rightarrow V_2 = -10 + 17,32j$$

$$V_3 = 10 \angle 120^\circ \Rightarrow V_3 = 10(\text{cos}120^\circ + j \text{sen}120^\circ) \Rightarrow V_3 = -5 + 8,66j$$

3 Aplicação da Lei de Kirchhoff para tensões resulta na soma dos complexos V_1 , V_2 e V_3 , temos: $V_T = 28,3 + 51j$

4 O módulo do número complexo V_T fornece o valor da tensão eficaz do circuito, ou seja, que também é o valor da leitura do voltímetro ligado ao circuito. Com isso, tem-se:

$$e_{ef} = \sqrt{(28,3)^2 + 51^2} = \sqrt{3401,89} = 58,3 \therefore e_{ef} = 58,3.$$

logo, a leitura do voltímetro será igual a 58,3 volts.

3. Para o sistema de circuitos representados pela figura abaixo, onde a tensão de entrada é $v_{en}(t) = 60 \text{sen}(\omega t + 20^\circ)$ e a tensão do componente verde é $v_b(t) = 20 \text{sen}(\omega t)$, usando o método fasorial determine a tensão do componente azul $v_a(t)$.

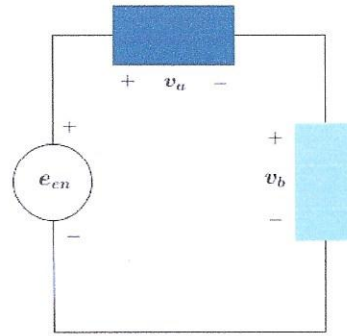


Figura 8.4: Circuito Elétrico

Solução:

Aplicando a Lei de Kirchhoff para tensões, temos que a tensão de entrada do circuito é dada por $v_{en}(t) = v_a(t) + v_b(t) \Rightarrow v_a(t) = v_{en}(t) - v_b(t)$ e que o valor eficaz da tensão é dada por $v_{ef} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$.

- 1 Passando da forma temporal para a forma fasorial de Steinmetz:

$$v_{en}(t) = 60 \text{sen}(\omega t + 20^\circ) \Rightarrow V_{en} = \left(\frac{60}{\sqrt{2}} \right) \angle 20^\circ \Rightarrow V_{en} = 42,43 \angle 20^\circ.$$

$$v_b(t) = 20 \text{sen}(\omega t) \Rightarrow V_b = \left(\frac{20}{\sqrt{2}} \right) \angle 0^\circ \Rightarrow V_b = 14,14 \angle 0^\circ.$$

- 2 Passando da forma fasorial de Steinmetz para forma trigonométrica, e, em seguida para forma algébrica ou retangular:

$$V_{en} = 42,43 \angle 20^\circ \Rightarrow V_{en} = 42,43(\cos 20^\circ + j \text{sen} 20^\circ) \Rightarrow V_{en} = 39,87 + 14,15j$$

$$V_b = 14,14 \angle 0^\circ \Rightarrow V_b = 14,14(\cos 0^\circ + j \text{sen} 0^\circ) \Rightarrow V_b = 14,14 + 0j$$

- 3 Aplicação da Lei de Kirchhoff para tensões resulta na diferença dos complexos V_{en} e V_b , temos: $V_a = 25,73 + 14,15j$
- 4 O módulo do número complexo V_a fornece o valor da tensão eficaz na componente azul, logo, tem-se:

$$e_{efa} = \sqrt{25,73^2 + 14,15^2} = \sqrt{862,2554} = 29,36 \therefore e_{efa} = 29,36$$

$$\text{tg} \theta_a = \frac{14,15}{25,73} \Rightarrow \theta_a = 28,80^\circ.$$

O valor da amplitude de $v_a(t)$ será: $V_{ma} = e_{efa} \cdot \sqrt{2} = 41,52$, com isso, temos:

$$v_a(t) = 41,52 \text{sen}(\omega t + 28,80^\circ)$$

4. Dado o esquema de circuito abaixo, onde são indicados as correntes elétricas alternadas cujas intensidades indicadas são:

$$i_s(t) = 20\text{sen}(\omega t + 90^\circ) \quad \text{e} \quad i_2(t) = 6\text{sen}(\omega t - 60^\circ)$$

Determine a expressão temporal da corrente elétrica alternada $i_1(t)$.

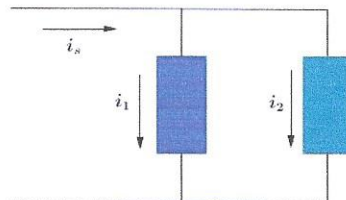


Figura 8.5: Esquema de circuito

Solução:

Pela a lei de Kirchhoff, para a intensidade de corrente, temos: $i_s(t) = i_1(t) + i_2(t) \Rightarrow i_1(t) = i_s(t) - i_2(t)$ e que o valor eficaz da corrente elétrica é dada por $i_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$.

- 1 Passando da forma temporal para a forma fasorial de Euler:

$$i_s(t) = 20\text{sen}(\omega t + 90^\circ) \Rightarrow I_s = \left(\frac{20}{\sqrt{2}}\right) e^{j90^\circ} \Rightarrow I_s = 14,14e^{j90^\circ}$$

$$i_2(t) = 6\text{sen}(\omega t - 60^\circ) \Rightarrow I_2 = \left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right) e^{j(-60^\circ)} \Rightarrow I_2 = 4,24e^{j(-60^\circ)}$$

- 2 Passando da forma fasorial de Euler para forma trigonométrica, e, em seguida para forma algébrica ou retangular:

$$I_s = 14,14e^{j90^\circ} \Rightarrow I_s = 14,14(\cos 90^\circ + j\text{sen} 90^\circ) \Rightarrow I_s = 0 + 14,14j$$

$$I_2 = 4,24e^{j(-60^\circ)} \Rightarrow I_2 = 4,24[\cos(-60^\circ) + j\text{sen}(-60^\circ)] \Rightarrow I_2 = 2,12 - 3,67j$$

- 3 Aplicação da Lei de Kirchhoff para intensidade de corrente resulta na diferença entre os complexos I_s e I_2 , teremos: $I_1 = I_s - I_2 = -2,12 + 17,81j$

- 4 Convertendo da forma algébrica para a forma fasorial de Euler e em seguida para a forma temporal:

$$i_{ef1} = \sqrt{(-2,12)^2 + (17,81)^2} \Rightarrow i_{ef1} = 17,94 \quad \text{e} \quad \text{tg}\theta = \frac{17,81}{-2,12} = -8,40$$

$\therefore \theta = -83,21^\circ$. Observe que a $\text{tg}\theta < 0$, ou seja, o extremo do argumento estar no 2º ou no 4º quadrante, como o complexo I_1 estar localizado no segundo

quadrante, então o valor do argumento θ_1 será corrigido, pela seguinte propriedade da tangente $tg(\theta) = tg(\theta + \pi) \Rightarrow \theta_1 = -83,21^\circ + 180^\circ = 96,79^\circ$, logo, a forma fasorial de Euler será: $I_1 = 17,94e^{j(96,79^\circ)}$

Desse modo passando para forma temporal teremos:

$$i_1(t) = \sqrt{2} \cdot 17,94 \text{sen}(\omega t + 96,79^\circ) \therefore i_1(t) = 25,37 \text{sen}(\omega t + 96,79^\circ)$$

5. Determinar a soma das tensões $v_1(t) = 50 \text{sen}(\omega t + 90^\circ)$ e $v_2(t) = 50 \text{sen}(\omega t + 30^\circ)$, mostradas na figura abaixo. Que tensão seria lida em um voltímetro colocado nos dois terminais externos?

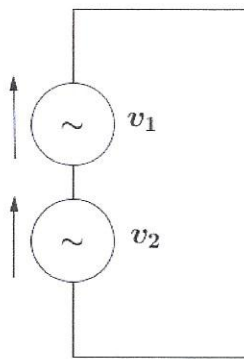


Figura 8.6: Voltímetro

Solução:

A tensão lida no voltímetro é o valor eficaz da soma de v_1 e v_2 . E, pela aplicação da Lei de Kirchhoff para tensões, temos que a tensão total do circuito é dada por $v_T(t) = v_1(t) + v_2(t)$ e que o valor eficaz da tensão é dada por $v_{ef} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$.

- 1 Passando da forma temporal para a forma fasorial de Steinmetz:

$$v_1(t) = 50 \text{sen}(\omega t + 90^\circ) \Rightarrow V_1 = \left(\frac{50}{\sqrt{2}} \right) \angle 90^\circ \Rightarrow V_1 = 35,35 \angle 90^\circ.$$

$$v_2(t) = 50 \text{sen}(\omega t + 30^\circ) \Rightarrow V_2 = \left(\frac{50}{\sqrt{2}} \right) \angle 30^\circ \Rightarrow V_2 = 35,35 \angle 30^\circ.$$

- 2 Passando da forma fasorial de Steinmetz para forma trigonométrica, e, em seguida para forma algébrica ou retangular:

$$V_1 = 35,35 \angle 90^\circ \Rightarrow V_1 = 35,35(\cos 90^\circ + j \text{sen} 90^\circ) \Rightarrow V_1 = 0 + 35,35j$$

$$V_2 = 35,35 \angle 30^\circ \Rightarrow V_2 = 35,35(\cos 30^\circ + j \text{sen} 30^\circ) \Rightarrow V_2 = 30,61 + 17,67j$$

3 Aplicação da Lei de Kirchhoff para tensões para a soma dos complexos V_1 e V_2 , temos: $V_T = 30,61 + 53,02j$

4 O módulo do número complexo V_T fornece o valor da tensão eficaz, logo, tem-se:

$$e_{efT} = \sqrt{30,61^2 + 53,02^2} = \sqrt{2811,1204} = 61,22 \therefore e_{efT} = 61,22$$

$$tg\theta_T = \frac{53,02}{30,61} \Rightarrow \theta_T = 60^\circ.$$

O valor da amplitude de $v_T(t)$ será: $V_{mT} = e_{efT} \cdot \sqrt{2} = 86,6$, com isso, temos:

$v_T(t) = 86,6 \text{sen}(\omega t + 60^\circ)$ e a leitura do voltímetro que é igual a 61,22 volts.

6. Determinar a indicação do amperímetro na figura abaixo, sendo as duas correntes $i_1(t) = 14,14 \text{sen}(\omega t - 20^\circ)$ e $i_2(t) = 7,07 \text{sen}(\omega t + 60^\circ)$.

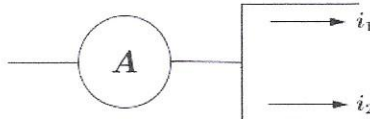


Figura 8.7: Amperímetro

Solução:

A indicação no amperímetro será igual ao valor eficaz e_{ef} da soma das intensidades das correntes i_1 e i_2 . Pela Lei de Kirchhoff para a corrente elétrica, temos:

$$i_T(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

e que o valor eficaz da intensidade da corrente elétrica é dada por $i_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$.

1 Passando da forma temporal para a forma fasorial de Euler:

$$i_1(t) = 14,14 \text{sen}(\omega t - 20^\circ) \Rightarrow I_1 = \left(\frac{14,14}{\sqrt{2}} \right) e^{j(-20^\circ)} \Rightarrow I_1 = 10e^{j(-20^\circ)}$$

$$i_2(t) = 7,07 \text{sen}(\omega t + 60^\circ) \Rightarrow I_2 = \left(\frac{7,07}{\sqrt{2}} \right) e^{j60^\circ} \Rightarrow I_2 = 5e^{j60^\circ}$$

2 Passando da forma fasorial de Euler para forma trigonométrica, e, em seguida para forma algébrica ou retangular:

$$I_1 = 10e^{j(-20^\circ)} \Rightarrow I_1 = 10[\cos(-20^\circ) + j\text{sen}(-20^\circ)] \Rightarrow I_1 = 9,4 - 3,4j$$

$$I_2 = 5e^{j60^\circ} \Rightarrow I_2 = 5(\cos 60^\circ + j\text{sen} 60^\circ) \Rightarrow I_2 = 2,5 + 4,3j$$

3 Aplicação da Lei de Kirchhoff para intensidade de corrente resulta na soma entre os complexos I_1 e I_2 , teremos: $I_T = I_1 + I_2 = 11,9 + 0,9j$

4 O valor da leitura do amperímetro será igual ao módulo do Número Complexo I_T que é igual ao valor eficaz da intensidade da corrente elétrica:

$$i_{efT} = \sqrt{11,9^2 + 0,9^2} \Rightarrow i_{efT} = 11,9$$

Desse modo a leitura será igual a 11,9 A.

9 Considerações Finais

O ensino de Matemática no nível médio, especificamente nos cursos técnicos da Educação Profissional exigem metodologias que induzam o educando a adquirir autonomia e maturidade no que diz respeito à assimilação de conteúdos ministrados por professores da área.

Assim, criar metodologias diferenciadas para que haja rendimento no processo ensino-aprendizagem é um desafio para os educadores da área de exatas, em especial, a Matemática.

O presente trabalho sugere abordagens diferenciadas relacionadas ao estudo dos Números Complexos na primeira e segunda série do Ensino Médio, pois, no curso Técnico em Eletroeletrônica no Instituto Federal do Maranhão temos a disciplina Matemática II, oferecida no segundo módulo (1ª série do Ensino Médio) que dentre os conteúdos a serem ministrados requer o prévio conhecimento dos Números Complexos. O mesmo fato ocorre no terceiro módulo (2ª série do Ensino Médio) também do curso Eletroeletrônica, onde existe uma disciplina denominada Análise de circuito de corrente contínua e corrente alternada que tem como pré-requisito Números Complexos que é essencial para os conhecimentos da área Elétrica.

Segundo Bruner (1960), "é possível ensinar tudo aos alunos deste que se utilizem procedimentos adaptados aos estilos cognitivos e às necessidades dos alunos."

Na abordagem apresentada trabalhou-se Pares Ordenados para definir o Corpo dos Números Complexos bem como realizar soma, produto e divisão entre Números Complexos na forma de pares ordenados.

Desenvolveu-se ainda um método de obtenção da soma entre duas ou mais Correntes Elétrica Alternadas ou Tensões, na forma de Funções Temporais Senoidais aplicadas em circuito elétricos lineares usando Fasores e o Corpo dos Números Complexos combinados com as Leis Elétricas.

Portanto, neste trabalho vimos um modo diferenciável de ensinar o Corpo dos Números Complexos nas primeiras séries do Ensino Médio da Educação Profissional Técnica de modo a dar embasamento ao aluno a resolver problemas dentro do curso.

Referências Bibliográficas

- [1] ALBUQUERQUE, R. O. **Análise de Circuitos em Corrente Alternada**. São Paulo: Érica, 1989.
- [2] ANDREESCU, T.; ANDRICA, D. **Números Complexos de A a Z**. 1. ed. Fortaleza: Vestseller, 2013.
- [3] APOSTOL, T. M. **Cálculo 1**. 1. ed. Barcelona: Reverté, 1988.
- [4] ÁVILA, G. S. de S. **Introdução à Análise Matemática**. 2. ed. rev. São Paulo: Edgard Blücher, 1999.
- [5] ÁVILA, G. S. de S. **Variáveis Complexas e Aplicações**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2008.
- [6] BOYLESTAD, R. L. **Introdução à Análise de Circuito**. 8. ed. Rio de Janeiro: Editora Prentice-Hall do Brasil LTDA, 1998.
- [7] BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**, Lei 9.394 de 20 de dezembro de 1996. Disponível em: < <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1996/lei-9394-20-dezembro-1996-362578-normaatualizada-pl.pdf> > Acesso em: 21 jun. 2014.
- [8] BRASIL. **Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Profissional Técnica de Nível Médio**, Resolução CNE/CEB nº 6, de 20 de setembro de 2012. Disponível em: < <http://www.portal.mec.gov.br> > Acesso em 21 jun. 2014.
- [9] BRUNER, J. **The Process of Education**. Cambridge. Harvard University Press, 1960.
- [10] CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Trigonometria Números Complexos**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- [11] CHURCHIL, R. V. **Variáveis Complexas e suas Aplicações**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil e Editora da Universidade de São Paulo, 1975.

- [12] Colóquio de Matemática Região Norte, 1, 2010, Centro de Convenções da UFPA. **Introdução à Análise Matemática na Reta**. Belém: Gráfica UFPA, 2010. 158 f.
- [13] EDMINISTER, J. A. **Circuitos Elétricos-Coleção Schaum**. 2. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 1991.
- [14] GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo vol.2**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2004.
- [15] JOHNSON, D. E.; HILBURN, J. L.; JOHNSON, J. R. **Fundamentos de Análise de Circuitos Elétricos**. 4. ed. Rio de Janeiro: Editora Prentice-Hall do Brasil LTDA, 1994.
- [16] LIMA, E.L. **Análise Real volume 1**. 6. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2002.
- [17] LIMA, E.L. **Curso de Análise volume 1**. 10. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2002.
- [18] SPIEGEL, M. R. **Variáveis Complexas-Coleção Schaum**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1973.
- [19] MARKUS, O. **Circuitos Elétricos: Corrente Contínua e Corrente Alternada**. 9. ed. São Paulo: Érica, 2004.
- [20] RAMALHO, F.; FERRARO, N. G.; SOARES, P. A. de T. **Os Fundamentos da Física 3: Eletricidade, Introdução à Física Moderna e Análise Dimensional**. 9. ed. rev. e ampl. São Paulo: Moderna, 2007.