PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

André Luiz Coelho de Barros

Números Complexos no Ensino Médio

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática (opção profissional).

Orientador: Prof. Nicolau Corção Saldanha

Rio de Janeiro

Abril de 2014

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

André Luiz Coelho de Barros

Números Complexos no Ensino Médio

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Nicolau Corção Saldanha
Orientador
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Carlos Frederico Borges Palmeira
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Humberto José Bortolossi
Instituto de Matemática - UFF

Prof. José Teixeira Cal Neto
Departamento de Matemática e Estatística - UNIRIO

Prof. Marcos Craizer
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. José Eugenio Leal
Coordenador Setorial do Centro
Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 11 de abril de 2014

André Luiz Coelho de Barros

Graduou-se em Engenharia Civil na Universidade Augusto Motta. Cursou Matemática Financeira na Fundação Getúlio Vargas, licenciou-se em Matemática na Universidade Cândido Mendes. Formando em Engenharia Naval na Universidade Federal do Rio de Janeiro. Foi aluno da Escola Preparatória de Cadetes do Ar. Professor da rede estadual de ensino do Estado do Rio de Janeiro, do Colégio Andrews, do Colégio Saint John, do Colégio Recanto e do Colégio Ipiranga.

Ficha Catalográfica

Barros, André Luiz Coelho de

Números complexos no ensino médio / André Luiz Coelho de Barros; orientador: Nicolau Corção Saldanha. – 2014.

57 f. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2014.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Tartaglia. 3. Girolano Cardano. 4. Euler. 5. Gauss. 6. Imaginário. 7. Algébrico. 8. Trigonométrico. 9. Raízes. 10. Exponencial. I. Saldanha, Nicolau Corção Saldanha. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Para o meu Pai, José (in memorian) pelo
amor incondicional.

Agradecimentos

A Deus, que me auxilia em todos os momentos da vida.

Ao meu Pai que continua me ajudando e se faz cada vez mais presente.

Ao meu orientador; Professor Nicolau Corção Saldanha sempre disposto e disponível para me ajudar.

A todos os meus professores do ProfMat PUC-Rio.

A Capes, ao Profmat e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

A minha esposa Kátia Lima da Cunha e a minha filha Luiza da Cunha Barros pelo companheirismo, apoio e compreensão durante e após a conclusão deste curso.

Aos colegas de mestrado: sempre aparecia alguém com uma solução brilhante.

Resumo

Barros, André Luiz Coelho; Saldanha, Nicolau Corção (Orientador). **Números Complexos no Ensino Médio**. Rio de Janeiro, 2014. 57p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Resposta a uma preocupação importante na resolução de equações, a impossibilidade de determinar, no conjunto dos números reais, as raízes quadradas de números negativos, o conjunto dos números complexos é estudado em detalhes. O rigor nas demonstrações dos teoremas e propriedades é prioritário para um bom entendimento do assunto. A história dos números complexos permite ao leitor visualizar como e porque surgiram estes números. Seu aparecimento não foi por acaso, e sim, pela necessidade de resolução de equações cúbicas.

Palavras-chave

Tartaglia; Girolano Cardano; Euler; Gauss; imaginário; algébrico; trigonométrico; raízes; exponencial.

Abstract

Barros, André Luiz Coelho; Saldanha, Nicolau Corção (Advisor). **Complex numbers in high school**. Rio de Janeiro, 2014. 57p. MSc Dissertation – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Response to a major concern in solving equations, the impossibility of determining, in the set of real numbers, the square roots of negative numbers, the set of complex numbers is studied in details. The rigour in statements of theorems and properties is a priority for a good understanding of the subject. The history of complex numbers allow the reader to see how and why these figures emerged. His appearance was no accident, and yes, by the necessity of solving cubic equations.

Keywords

Tartaglia; Girolano Cardano; Euler; Gauss; imaginary; algebraic; trigonometric; roots; exponential.

Sumário

Lista de Figuras

1
INTRODUÇÃO

A escolha do tema desta dissertação foi fruto de muitos debates entre nós e consulta aos nossos professores.

Esta dúvida ocorreu principalmente devido aos inúmeros e fascinantes tópicos que a matemática nos propõe. Após muitas sugestões, um tema foi considerado ideal: números complexos. A obscuridade e a magia destes números, aliado a discussão sobre a validade ou não do ensino dos complexos no ensino médio, nos motivaram a desenvolver um estudo sobre este tema.

O ensino dos números complexos, muitas vezes, não é simpático ao aluno, por consequência da falta de conhecimento de alguns professores. A primeira abordagem sobre este tópico deve ser pautada no surgimento dos números complexos, como se deu e por que se deu. Tudo isso pelo fato de que a partir deste momento, o paradigma de que algumas equações não possuíam solução será quebrado e todo esse processo pode ser "perigoso", caso não seja claro e explicativo.

2
HISTÓRIA

O surgimento dos números complexos não ocorreu, como citam a maioria dos livros, simplesmente para que certas equações passassem a ter raízes e consequentemente soluções. Principalmente, porque durante séculos, os matemáticos garantiam que as equações do segundo grau com discriminante negativo impactava frontalmente em uma questão histórica que se arrolava por muito tempo: Como encontrar uma fórmula para resolução de equações do terceiro grau?

Esta questão intrigava os matemáticos, tendo em vista que os babilônicos já sabiam resolver equações do segundo grau desde 1.700 a.C. e até o século XV d.C. nenhuma descoberta havia sido feita a respeito deste tipo de equação.

O século XV foi marcado pelo renascentismo europeu, um período em que houve uma valorização da arte e das ciências, a evolução do espírito e por uma efervescência criativa nas áreas da literatura e da arquitetura. A atividade matemática concentrou-se basicamente na Itália e em algumas cidades da Europa central, com o surgimento de ícones da história da matemática, que deram importantes contribuições para a evolução desta ciência. Foi também o marco inicial para quebra de alguns paradigmas matemáticos, considerados até então incontestáveis.

É nesta época, mais precisamente em 1494, que aparece a primeira edição impressa da "*Summa de Arithmetica, Geometrica, Proportioni et Proportionalita*", escrito por Luca Pacioli[1] (1445 - 1517). Este livro foi publicado apenas doze anos após o aparecimento da primeira edição impressa dos "*Elementos*" de Euclides, o que justifica a semelhança na abordagem e resolução de alguns problemas. O "Suma", como era popularmente conhecido, viria a ser referência, abordava tópicos de cálculo aritmético, problemas de geometria e contabilidade, tornou Pacioli rapidamente famoso, tanto que em 1497, foi

[1] Luca Paciolo, matemático italiano, nasceu em Sansepulcro em 1445, onde se tornou frei. Contemporâneo de Leonardo da Vinci, publicou tratados de grande importância na área de contabilidade. Morreu em 1517 no mosteiro de Sansepulcro.

convidado a mudar-se para Milão, para ensinar matemática para Ludovico Sforzo, duque de Milão.

No capítulo sobre equações algébricas, Pacioli ensina sob forma de versos, a fórmula para resolução de equações do segundo grau e afirma que não era possível encontrar uma regra geral para resolução de equações do tipo:

$$\mathbf{x^3 + px = q.}$$


Luca Pacioli

Esta afirmação era considerada incontestável por muitos à época, porém por volta de 1515, um brilhante matemático de Bolonha, chamado Scipione Del Ferro[2] (1465 – 1526) resolveu a equação descrita acima, ou seja, provou que $x^3 + px = q$ tem solução. Ele não publicou a solução, mas revelou o segredo da resolução a seu discípulo Antônio Fior. Por volta de 1535, Nicolo Fontano[3] (1499 – 1557), mais conhecido como *Tartaglia*, pois tinha dificuldade em sua fala, anunciou a descoberta de uma solução para a equação:

$$\mathbf{x^3 + px^2 = n.}$$

Ao saber deste feito, Fior acreditando que Tartaglia estaria ocultando a verdade, desafia-o a um duelo intelectual sobre equações cúbicas. Cabe ressaltar que disputas deste tipo eram comuns no século XVI, principalmente na Itália, que

[2] Scipione Del Ferro, matemático italiano nascido em Bolonha. Filho de um empregado de uma fábrica de papel, pouco se sabe sobre suas descobertas, pois não as revelava. Morreu em 1526, na Itália.

[3] Nicolo Fontano, o Tartaglia, nasceu em Brescia na Itália, no ano de 1499. Filho de família humilde, teve uma infância muito difícil, onde por conta da invasão de tropas francesas, foi gravemente ferido na cabeça e na face. Devido a este fato, ficou com graves sequelas na fala, por isso ficou conhecido como Tartaglia, que significa gago. Tornou-se engenheiro e matemático e passou a lecionar em diversas cidades italianas. Morreu em 1557, em Veneza.

era o berço da intelectualidade matemática. Estes duelos eram cercados de bastante expectativa, atraindo inclusive um número considerável de pessoas ao local. Fior propôs 30 (trinta) problemas envolvendo equações do terceiro grau. Tartaglia também preparou a sua. Fior tinha como “arma” o fato de saber resolver equações utilizando a fórmula de Del Ferro.

Tartaglia

Porém, oito dias antes da data marcada para o confronto, Tartaglia consegue resolver também a equação cúbica desprovida de termo quadrático, ou seja, a equação do tipo: $x^3 + px = q$. Logo, no dia da disputa, Tartaglia possuía dois tipos de fórmulas para resolução de equação cúbicas, ao passo que Fior apenas uma. Com isso, Tartaglia triunfou plenamente no duelo com Fior e ainda recusou o prêmio em disputa, que eram 30 banquetes.

Notícias sobre o duelo e a forma como os problemas foram resolvidos por Tartaglia chegaram em toda a Itália, causando grande agitação entre os que estudavam matemática, tendo em vista que Paciolo afirmava ser impossível achar fórmulas para resolver equações cúbicas. Em Milão, Girolamo Cardano[44] (1501 – 1576), um grande matemático, ficou muito curioso sobre as técnicas utilizadas por Tartaglia.

Cardano tentou de todas as formas atrair Tartaglia à sua residência. Depois de algumas tentativas, em 1539, após um juramento de segredo, conseguiu o que tanto desejava: A revelação da regra para resolver equações do tipo: $x^3 + px = q$.

[4] Girolamo Cardano, nasceu em 1501, na cidade de Pavia, na Itália. Oriundo de família conceituada, pois seu pai era um renomado advogado, bem cedo já demonstrava suas habilidades matemáticas. Porém, sua formação foi em medicina, em 1524. Jogador inveterado, usava de seus conhecimentos sobre probabilidade para levar vantagens sobre seus adversários. Conhecedor também de astronomia, previu o ano de sua própria morte. Suicidou-se em 1576, para fazer valer sua profecia.

De posse da regra, Cardano parecia ter subsídios suficientes para realizar o que desejava há anos, a publicação de um livro de álgebra, livro este que foi lançado em 1545 e viria a ser considerado um verdadeiro clássico da matemática, chamado *"Ars Magna"*, escrito em latim.

Girolamo Cardano

Ao saber da publicação do livro, consequentemente da inclusão da regra para resolver equação do terceiro grau desprovida do termo quadrático, Tartaglia se revolta e passa a criticar Cardano publicamente, culpando-o por roubar-lhe o feito. Cardano rebate alegando que recebeu informações de Ludovico Ferrari, brilhante discípulo de Scipione Del Ferro, e que a glória da descoberta cabia a Del Ferro e não a Tartaglia, acusando-o assim de plágio.

Foto Ars Magna

A resolução da equação do tipo $x^3 + px = q$, dada por Cardano, em Ars Magna, consistia basicamente no seguinte:

Tomemos o exemplo dado pelo professor José Paulo Carneiro, em Revista do Professor de Matemática, número 55:

A equação $x^3 + 4 = 6x$, tem claramente raiz igual a 2.

Del Ferro então fez a seguinte substituição:

Tome $x = k + \dfrac{2}{k}$

Logo, a equação se transforma em:

$$\left(k+\frac{2}{k}\right)^3+4=6\left(k+\frac{2}{k}\right)$$

Mas

$$k+\frac{2}{k}=\frac{k^2+2}{k}$$
$$\Rightarrow\left(\frac{k^2+2}{k}\right)^3+4=6\left(\frac{k^2+2}{k}\right)$$
$$\Rightarrow\frac{k^6+3k^4\cdot 2+3k^2\cdot 4+8}{k^3}+4=6k+\frac{12}{k}$$
$$\Rightarrow\frac{k^6+6k^4+12k^2+8}{k^3}+4=6k+\frac{12}{k}$$

Eliminando os denominadores, temos:

$$k^6+6k^4+12k^2+8+4k^3=6k^4+12k^2$$

Logo, a equação passa a ser bi quadrada, pois:

$$k^6+4k^3+8=0$$

Se encontrarmos solução para esta equação, com uma simples substituição encontraremos a solução da equação original.

Porém, para resolvermos a equação acima, faremos uma nova substituição. Chamemos de $k^3=u$. Logo $k^6=u^2$.

Portanto, a solução da equação acima e consequentemente da equação original depende da solução quadrática $u^2 + 4u + 8 = 0$.

Resolvendo temos:

$$\frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 32}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-16}}{2} =$$
$$\frac{-4 \pm \sqrt{16 \cdot -1}}{2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{-1}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{-1}$$

Percebemos que o discriminante é negativo e não temos como continuar.

Porém, Del Ferro decidiu seguir em frente, mesmo com o fato de $\sqrt{-1}$ "não existir". O mesmo supôs que este "novo número" satisfizesse as leis da álgebra.

Logo percebeu que $k = 1 + \sqrt{-1}$ seria solução da equação $k^6 + 4k^3 + 8 = 0$, pois:

$$k^3 = \left(1 + \sqrt{-1}\right)^3 = 1 + 3\sqrt{-1} + 3 \cdot 1 \cdot \left(\sqrt{-1}\right)^2 + \left(-\sqrt{-1}\right) = -2 + 2\sqrt{-1}$$

Substituindo novamente na equação original, temos:

$$x = k + \frac{2}{k}$$

E portanto x = 2, que é a raiz já conhecida.

Com isso, Del Ferro mostrou que sua forma de resolução funcionava, porém ninguém sabia dizer por quê.

Surgem então os números complexos.

Entretanto o ar enigmático e obscuro dos números complexos permaneceu por quase dois séculos, até que Leonhard Euler[5], introduziu a notação $i = \sqrt{-1}$.

Euler passou a reconhecer a raiz de –1 como número imaginário i.

[5] Leonhard Euler, matemática suíço, nasceu na Basileia em 1707. Um dos maiores matemáticos da história, teve relevantes contribuições para a física, engenharia e astronomia. Publicou mais de 500 livros e artigos, mesmo após ficar cego do olho direito, no ano de 1735. É o responsável pela criação de notações utilizadas até hoje, como f(x), e, i, π, dentre outras. Faleceu no ano de 1783, vítima de derrame cerebral.

Euler

Deve-se a Euler, a descoberta da seguinte fórmula $e^{ix} = \cos x + i \cdot \text{sen}\ x$ que trataremos com detalhes adiante, na página 42.

Porém, apesar desta considerável contribuição de Euler, o conceito de números complexos ainda causava estranheza, tendo em vista a falta de significado destes números.

Até que, ao fim do século XVIII, o norueguês Caspar Wessel[6] e o suíço Jean Argand[7] perceberam uma associação entre os números complexos e o plano cartesiano, ou seja, cada número complexo estaria associado a um ponto real.

Wessel enviou em 1797, um artigo à Real Academia Dinamarquesa de Ciências, no qual apresenta sua descoberta a respeito dos complexos. Porém, por razões desconhecidas, este artigo de Wessel ficou excluído do universo matemático por quase cem anos, sendo descoberto por um antiquário. Esse atraso no reconhecimento do trabalho de Wessel, resultou na ausência de seu nome no plano complexo que veio a se chamar Plano de Argand. Nos parece injusto, tendo em vista que a contribuição de Argand se resumiu em um pequeno artigo publicado em 1806, porém involuntariamente Argand herdou a glória.

Porém, coube a Carl Gauss[8] introduzir a notação que reconhecemos, ou seja, todo número complexo é expresso na forma a + bi, chamada "Forma Algébrica" onde $a, b \in R$ e $i = \sqrt{-1}$.

[6] Caspar Wessel, agrimensor norueguês, nasceu em Vestby, no ano de 1745. Sua contribuição à matemática se resume a publicação do artigo "Representação analítica de direção", que tratava da interpretação geométrica dos números complexos e foi publicado pela Real Academia Dinamarquesa em 1799. Morreu em 1818, na Dinamarca.

[7] Jean Argand, contabilista por formação e matemático amador, nasceu em 1768, na cidade de Geneva na Suíça. Seu trabalho mais importante foi o estudo de associação de números complexos a pontos do plano cartesiano. Porém, também apresentou trabalhos relativos ao Teorema Fundamental da Álgebra, mas recebeu pouco crédito por estes. Morreu em 1822, em Paris, na França.

[8] Carl Friendrich Gauss, matemático, físico e astrônomo alemão, nasceu em 1777, na cidade de Braunschweig. Um verdadeiro gênio, teve seu talento reconhecido para a matemática logo aos dez anos, quando percebeu, intuitivamente, a fórmula da soma de P.A. Dentre as inúmeras obras de Gauss, destacamos a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra e a utilização de uma geometria diferente da utilizada até então, a geometria não-euclidiana. Ao longo de sua vida,

Gauss

Gauss também aprofundou o estudo feito por Wessel a respeito da associação dos números complexos a pontos do plano real, o que causou uma grande revolução no mundo matemático, pois agora os números complexos poderiam ser efetivamente visualizados e com isso toda a teoria sobre a não existência dos números complexos foi abandonada, esta valiosa contribuição de Gauss, rendeu-lhe a homenagem de também ter o seu nome associado ao plano complexo. Por isso, chama-se tanto Plano de Argand como Plano de Gauss.

casou-se duas vezes e teve três filhos. Em 23 de fevereiro de 1855, faleceu em Göttingen, Carl Gauss, o príncipe da matemática, como ficou conhecido.

3
A FORMA ALGÉBRICA

Como vimos no capítulo anterior, a necessidade de se encontrar regras para resolução de equações cúbicas, acabou acarretando o surgimento de um "número" até então desconhecido, representado pela letra i e munido da seguinte propriedade:

$$i = \sqrt{-1} \Leftrightarrow i^2 = -1$$

Este número i, definido pela igualdade acima, é denominado unidade imaginária. Note que, com o auxílio da definição dada, conseguimos efetuar cálculos que não são possíveis no conjunto dos números reais. Por exemplo:

$$\sqrt{-16} = \sqrt{16 \cdot -1} = 4\sqrt{-1} = 4i$$

$$\sqrt{-36} = \sqrt{36 \cdot -1} = 6\sqrt{-1} = 6i$$

Com o auxílio desta unidade imaginária, podemos também obter raízes para equações polinomiais como, por exemplo:

$$x^2 - 4x + 13 = 0$$

Resolvendo pela fórmula de Bhaskara, temos:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$$

Logo, as raízes da equação proposta são:

$$x_1 = 2 + 3i \quad \text{e} \quad x_2 = 2 - 3i$$

Repare que estas raízes são do tipo a + bi, onde $a;b \in R$ e i é a unidade imaginária.

Logo, um número complexo é objeto da forma a + bi, onde a;b são reais e i é a unidade imaginária.

O conjunto dos números complexos é denotado pelo símbolo C e é assim definido:

$$C = \left\{ z \mid z = a + bi \,/\, a;b \in R \text{ e } i = \sqrt{-1} \right\}$$

A partir deste momento, quando nos referimos a um número complexo qualquer, usaremos a notação z.

Todo complexo possui uma parte real (a) e uma parte imaginária (bi). Note que todo número real é complexo, bastando tomar b = 0 e teremos um número do tipo:

$$z = a + 0i = a \in R$$

Por outro lado, se tomarmos a = 0, teremos:

$$z = 0 + bi = bi \,,\; b \neq 0$$

que chamaremos de **imaginário puro.**

Consequentemente, teremos z = 0 se, e somente se a = b = 0.

Dados dois números complexos, $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, dizemos que $z_1 = z_2$ se a = c e b = d. Ou seja, dois números complexos são iguais se suas partes reais e suas partes imaginárias são respectivamente iguais.

3.1
Operações na forma algébrica

Dados dois números complexos, z_1 = a + bi e z_2 = c + di, definiremos as seguintes operações no conjunto C.

3.1.1
Adição

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

PROPRIEDADES:

a) COMUTATIVIDADE

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

Demonstração

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Como $a, b, c, d \in R$, temos que:

$$(a + c) + (b + d)i = (c + a) + (d + b)i = (c + di) + (a + bi) = z_2 + z_1$$

b) ASSOCIATIVIDADE

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

Demonstração

$$(z_1 + z_2) + z_3 = ((a + bi) + (c + di)) + (x + yi)$$
$$(z_1 + z_2) + z_3 = ((a + c) + (b + di)) + (x + yi)$$
$$(z_1 + z_2) + z_3 = (a + c + x) + (b + d + y)i$$
$$(z_1 + z_2) + z_3 = (a + (c + x)) + (bi + (d + y)i)$$
$$(z_1 + z_2) + z_3 = (a + bi) + ((c + x) + (d + y)i)$$
$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

c) EXISTÊNCIA DO ELEMENTO NEUTRO

$z_1 + (0 + 0i) = z_1$

Demonstração

$$z_1 + (0 + 0i) = (a + bi) + (0 + 0i) = (a + 0) + (b + 0)i = a + bi = z_1$$

Ou seja, o complexo (0 + 0i) é o elemento neutro da adição.

d) EXISTÊNCIA DO ELEMENTO SIMÉTRICO

$$z_1 + (-z_1) = 0 + 0i = 0$$

Demonstração

$$a + bi + (-(a + bi)) = a + bi + (-a - bi) = a + bi - a - bi = 0 + 0i = 0$$

Ou seja, o complexo (–z) = (–a – bi) é o elemento simétrico da adição.

Note, que utilizamos a operação subtração, sem que fosse preciso definir a mesma, pois para efetuar uma subtração no conjunto dos números complexos, assim como nos reais, equivale a somarmos o elemento que chamaremos de simétrico.

3.1.2
Multiplicação

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

Como $i^2 = -1$, temos que:

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Repare que, caso um dos números fosse real, a saber z_2, teríamos:

$$(a+bi)\cdot c = ac + cbi$$

PROPRIEDADES:

a) COMUTATIVIDADE

$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

<u>Demonstração</u>

$z_1 \cdot z_2 = (a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$

Como $a, b, c, d \in R$, logo:

$(ac-bd)+(ad+bc)i = (ca-db)+(da+cb)i = (c+di)+(a+bi) = z_2 \cdot z_1$

b) ASSOCIATIVIDADE

$(z_1 \cdot z_2)\cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

<u>Demonstração</u>

$(z_1 \cdot z_2)\cdot z_3 = ((ac-bd)+(ad+bc)i)\cdot(x+yi)$
$(z_1 \cdot z_2)\cdot z_3 = ((ac-bd)\cdot x-(ad+bc)y)+\left[(ac-bd)y+(ad+bc)\cdot x\right]\cdot i$
$(z_1 \cdot z_2)\cdot z_3 = acx-bdx-ady-bcy+acyi-bdyi+adxi+bcxi$
$(z_1 \cdot z_2)\cdot z_3 = a(cx-dy)-b(dx+cy)+a(cy+dxi)-b(dy+cxi)$
$(z_1 \cdot z_2)\cdot z_3 = a\left[(cx-dy)+(cy+dxi)\right]+bi\left[(cx-dy)+(cy+dxi)\right]$
$(z_1 \cdot z_2)\cdot z_3 = a\cdot(z_2 \cdot z_3)+bi\cdot(z_2 \cdot z_3)$
$(z_1 \cdot z_2)\cdot z_3 = (a+bi)\cdot(z_2 \cdot z_3)$
$(z_1 \cdot z_2)\cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

c) EXISTÊNCIA DO ELEMENTO NEUTRO:

$$z_1 \cdot (1+0i) = z_1$$

<u>Demonstração</u>

$$z_1 \cdot (1+0i) = (a+bi)\cdot(1+0i) = (a\cdot 1 - b\cdot 0) + (a\cdot 0 + b\cdot 1)i = a+bi = z_1$$

Ou seja, o complexo (1 + 0i) é o elemento neutro da multiplicação.

d) EXISTÊNCIA DO ELEMENTO INVERSO OU INVERSO MULTIPLICATIVO:

$$z_1 \cdot \frac{1}{z_1} = (1+0i) = 1$$

Queremos achar um número z^{-1}, pertencente a C, tal que $z \cdot z^{-1} = 1$. Logo, fazendo $z = a+bi$ e $z^{-1} = x+yi$, vamos encontrar x e y de modo que $z \cdot z^{-1} = 1$. Com efeito:

$$(a+bi)\cdot(x+yi) = 1 \Rightarrow (ax-by)+(ay+bx)i = 1$$

Com isso, passamos a ter duas equações que nos remete a um sistema de variáveis x e y, que é o que pretendemos encontrar.

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

Multiplicando ambos os membros da 1ª equação por a e multiplicando ambos os membros da 2ª equação por b, temos,

$$\begin{cases} a^2x - aby = a \\ b^2x + aby = 0 \end{cases}$$

Logo,

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

Logo, $z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$, que percebemos que pertence a C.

Note que, assim como na subtração, a divisão não precisa ser definida, pois sabemos que dividir z_1 por z_2, equivale a multiplicar z_1 por z_2^{-1}.

3.1.3
Conjugado de Z

Dado um número complexo z = a + bi, chamaremos de conjugado de z, o número complexo $\overline{z} = a - bi$. Por exemplo:

a) $z = 5 + 2i \Rightarrow \overline{z} = 5 - 2i$
b) $z = 3 - 4i \Rightarrow \overline{z} = 3 + 4i$
c) $z = -6 + 7i \Rightarrow -6 - 7i$

Observe que o produto $z \cdot \overline{z}$ é um número real.

Com efeito:

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (aa + bb) + (-ab + ba) = a^2 + b^2$$

PROPRIEDADES:

a) $\left(\overline{z_1 \cdot z_2}\right) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

<u>Demonstração</u>

$$z_1 \cdot z_2 = (a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd)+(bc+ad)i$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = (ac-bd)-(bc+ad)i$$

Por outro lado, temos que:

$\overline{z_1} = a - bi$ e $\overline{z_2} = c - di$

Logo, $\overline{z_1}\cdot\overline{z_2} = (a-bi)\cdot(c-di) = (ac-bd)-(bc+ad)i = \overline{z_1 \cdot z_2}$

Em particular, esta propriedade nos mostra que:

$\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$, pois como $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, onde podemos tomar $z_1 = z_2$ e estender em n parcelas. Assim sendo:

$$\overline{z_1 \cdot z_1 \ldots z_1} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_1}\ldots\overline{z_1}$$

Logo, $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$

b) $\left(\overline{z_1 + z_2}\right) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

<u>Demonstração</u>

$$z_1 + z_2 = (a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$$
$$\overline{z_1 + z_2} = (a+c)+(b+d)i$$

Por outro lado, temos que:

$\overline{z_1} = a - bi$ e $\overline{z_2} = c - di$

$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i = \overline{z_1 + z_2}$

c) $\overline{\overline{z}} = z$

<u>Demonstração</u>

$$\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{(z)}} = \overline{\overline{(a + bi)}} = \overline{(a - bi)} = a + bi = z$$

d) Se z é real, então $z = \overline{z}$

<u>Demonstração</u>

Se z é real, então z = a +0i. Logo, $\overline{z} = a - 0i = z$

A definição de conjugado de um número complexo nos permite apresentar uma regra bem mais simples para efetuar a divisão em C. Este método consiste simplesmente em multiplicar, sem perda de generalidade, tanto o numerador quanto o denominador pelo conjugado do denominador. Ou seja, dados dois números complexos, $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, a divisão $\frac{z_1}{z_2}$ é dada por $\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$. Logo, teremos uma multiplicação no numerador e um número real no denominador. Portanto $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot z_2} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{c^2 + d^2} =$

$$= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Por exemplo:

$$\frac{3 + i}{1 + 2i} = \frac{3 + i}{1 + 2i} \cdot \frac{1 - 2i}{1 - 2i} = \frac{3 - 6i + i + 2}{1 + 4} = \frac{5 - 5i}{5} = 1 - i$$

3.1.4
Potências de i

Estudaremos agora, o comportamento das potências de i.

$$i^0 = 1$$
$$i^1 = i$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = i^2 \cdot i^1 = -1 \cdot i = -i$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot -1 = 1$$
$$i^5 = i^3 \cdot i^2 = -i \cdot -1 = i$$
$$i^6 = i^3 \cdot i^3 = -i \cdot -i = i^2 = -1$$
$$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot -i = -i$$

Observe que as potências de i apresentam um comportamento bastante interessante. Estas repetem periodicamente os valores: 1, i, –1, –i. Ou seja, tem um resultado periódico em grupos de 4. Com efeito, $i^{n+4} = i^n \cdot i^4 = i^n \cdot 1 = i^n$. Isto nos permite estabelecer uma regra para o cálculo de potências de i. Inicialmente, perceba que todo número natural pode ser escrito na forma n = 4q + r, onde q é o quociente e r é o resto da divisão de n por 4. Observe que pela divisão euclidiana $r \in [0,1,2,3]$ ou $0 \le r \le 3$, onde $r \in N$. Logo, temos que $i^n = i^{4q} \cdot i^r = \left(i^4\right)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = 1 \cdot i^r = i^r$. Com isso, concluímos que para calcular i^n, basta determinar o resto da divisão de n por 4. Por exemplo, vamos calcular o valor de i^{2014}.

Temos que: 2014 = 4 x 503 + 2

Logo, $i^{2014} = \left(i^4\right)^{503} \cdot i^2 = 1 \cdot i^2 = -1$

Portanto, $i^{2014} = -1$

3.2 Resolução de Equações

Após definirmos as operações no conjunto C e estudarmos o comportamento das potências de i, estamos aptos a resolver equações no campo dos números complexos. Lembramos que o processo para resolução é o mesmo que utilizamos no conjunto dos números reais, com exceção que no conjunto C, não há restrições a respeito de radicandos negativos.

Por exemplo, vamos calcular os valores de z que satisfazem as equações abaixo:

a) $z^2 - 4z + 20 = 0$

Temos que:

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 80}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{4 \pm 8i}{2} = 2 \pm 4i$$

Logo, $z_1 = 2 + 4i$ e $z_2 = 2 - 4i$

b) $z^2 - 2z + 2 = 0$

Temos que:

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

Logo, $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 1 - i$

Observe que nos dois exemplos acima, tanto o complexo z como o conjugado $\bar{z}$ satisfazem a equação dada. Mostraremos a seguir que não se trata de uma coincidência.

3.2.1
Teorema das Raízes Conjugadas

Se um número complexo z = a + bi é raiz de uma equação algébrica de grau n, $n \geq 2$, com coeficientes reais, então seu conjugado $\overline{z} = a - bi$ também é raiz da respectiva equação.

Demonstração

Em resumo, queremos demonstrar que se $P(z) = 0 \Rightarrow P(\overline{z}) = 0$. Com efeito, seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0$.

Temos que:

$P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + ... + a_1 z + a_0$

Mas, sabemos por hipótese que P(z) = 0.

Logo, $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + ... + a_1 z + a_0 = 0$

Por outro lado, $P(\overline{z}) = a_n (\overline{z})^n + a_{n-1}(\overline{z})^{n-1} + a_{n-2}(\overline{z})^{n-2} + ... + a_1 \overline{z} + a_0$

Mas $(\overline{z})^n = \overline{(z^n)}$, como já vimos.

Então: $\overline{P(z)} = a_n \overline{(z^n)} + a_{n-1}\overline{(z^{n-1})} + ... + a_0$

Como os coeficientes da equação são reais, temos também:

$a_n = \overline{a_n}$, $a_{n-1} = \overline{a_{n-1}}$, $a_{n-2} = \overline{a_{n-2}}$,..., $a_1 = \overline{a_1}$ e $a_0 = \overline{a_0}$..

Logo,

$P(z) = \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \overline{a_{n-2}z^{n-2}} + ... + \overline{a_0}$

$P(z) = \overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + ... + a_1 z + a_0}$

$P(z) = \overline{P(z)}$

Como P(z) = 0, por hipótese, esta última igualdade nos mostra que: $P\overline{(z)} = 0$.

É importante ressaltar que este teorema só é válido se todos os coeficientes da equação são reais, pois caso não sejam reais não teremos $a_n = \overline{a_n}, a_{n-1} = \overline{a_{n-1}}, ...,$ o que invalida a demonstração. Cabe destacar também que z e $\bar{z}$, nestas condições, tem a mesma multiplicidade, ou seja, z e $\bar{z}$ ocorrem o mesmo número de vezes. Para demonstrar esta afirmação basta eliminar as raízes (a + bi) e (a – bi), dividindo P(x) por $\left(x-\left(a+bi\right)\right)\cdot\left(x-\left(a-bi\right)\right)$. Com efeito:

$$\left(x-a-bi\right)\cdot\left(x-a+bi\right)=x^2-2ax+a^2+b^2$$

Como os coeficientes do divisor são números reais, os coeficientes do quociente também são reais. Logo, (a + bi) e (a – bi) estarão presentes como raízes do quociente. Portanto, conclui-se que tanto (a + bi) e (a – bi) ocorrem o mesmo número de vezes.

Uma consequência importante deste teorema é que equações algébricas com coeficientes reais e grau ímpar possuem pelo menos uma raiz real. Isto implica pelo fato de que como as raízes complexas (não reais) ocorrem em pares, uma equação de grau n possui exatamente n raízes e sendo n ímpar, pelo menos uma das raízes é real.

4
ARGUMENTO DE UM NÚMERO COMPLEXO E FORMA TRIGONOMÉTRICA

Um número complexo é chamado unitário quando seu módulo é igual a 1, e neste caso, sabemos que o número complexo está localizado na circunferência de raio 1, com centro de origem.

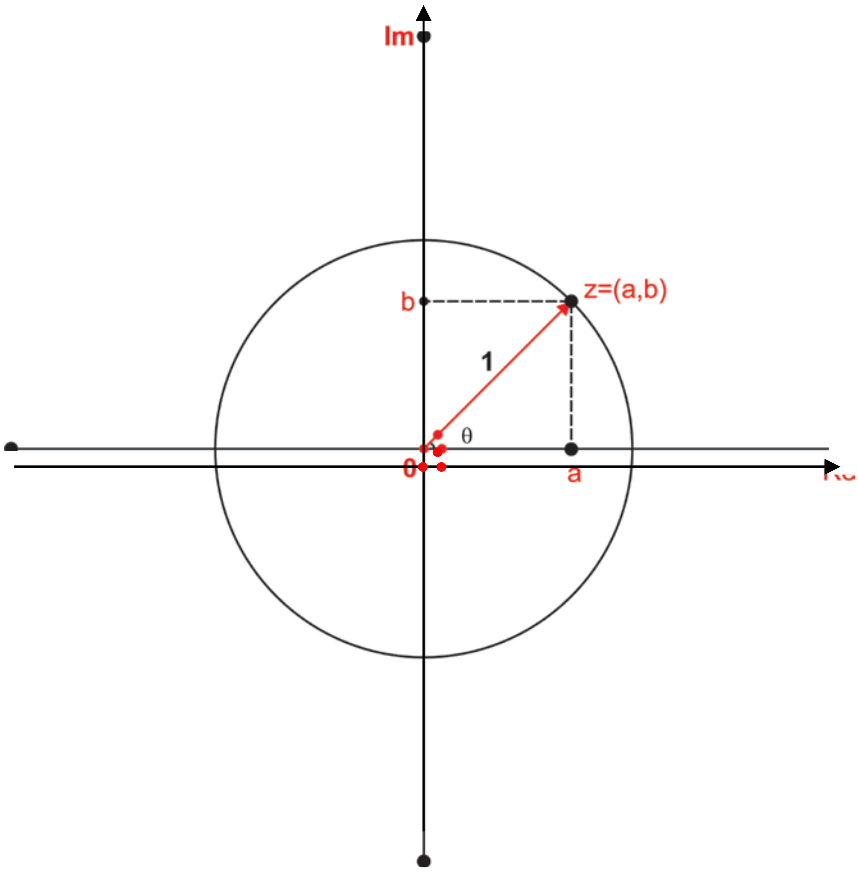

Figura 1

Observando a figura 1, temos:

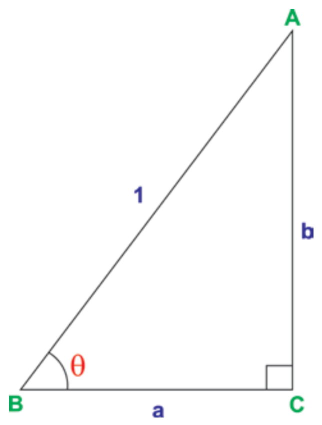

Figura 2

Utilizando as relações trigonométricas no triângulo retângulo:

$$\text{sen } \theta = \frac{b}{1} \Rightarrow b = \text{sen } \theta$$

$$\cos \theta = \frac{a}{1} \Rightarrow a = \cos \theta$$

Então $z = (a, b) = (\cos \theta, \text{sen } \theta)$

Neste caso, θ é o ângulo entre o número complexo e o sentido positivo do eixo real.

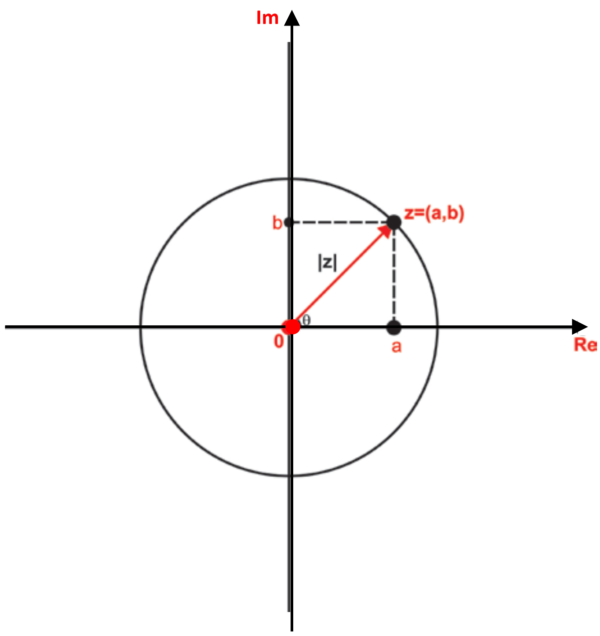

Figura 3

Da figura 3, temos:

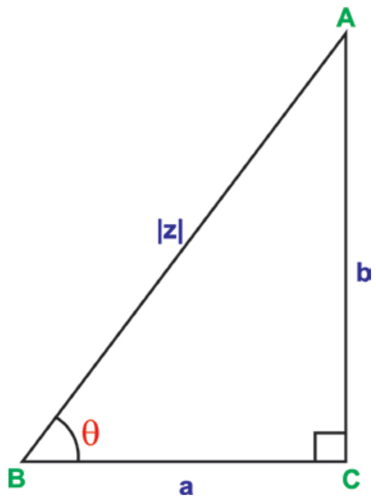

Figura 4

Mais uma vez utilizando as relações trigonométricas no triângulo retângulo teremos:

$$\text{sen } \theta = \frac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z| \text{sen } \theta$$

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z| \cos \theta$$

Então:

$$z = (a, b) = (|z| \text{sen}\theta,\ |z| \cos\theta) = |z|(\cos\theta, \text{sen}\theta)$$
$$z = |z|(\cos\theta, \text{sen}\theta)$$

A fórmula acima é chamada ***forma trigonométrica de um número complexo.***

OBS: Se θ é argumento de z (representado por Arg z), então todo ângulo do tipo $\theta + 2k\pi$ ou $\theta + 360^o$, também é argumento de z.

Exemplo: Seja $z = (2, 2) \in C$, então como: $|z| = 2\sqrt{2}$

$$z = 2\sqrt{2}(\cos 45^o, \text{sen} 45^o)$$

4.1 Multiplicação na Forma Trigonométrica

Vamos, inicialmente considerar dois complexos unitários z e w. Sabemos que eles pertencem à circunferência de raio unitário e centrada na origem.

Multiplicar dois complexos unitários equivale a compor as rotações que eles definem, ou seja, somar os seus ângulos.

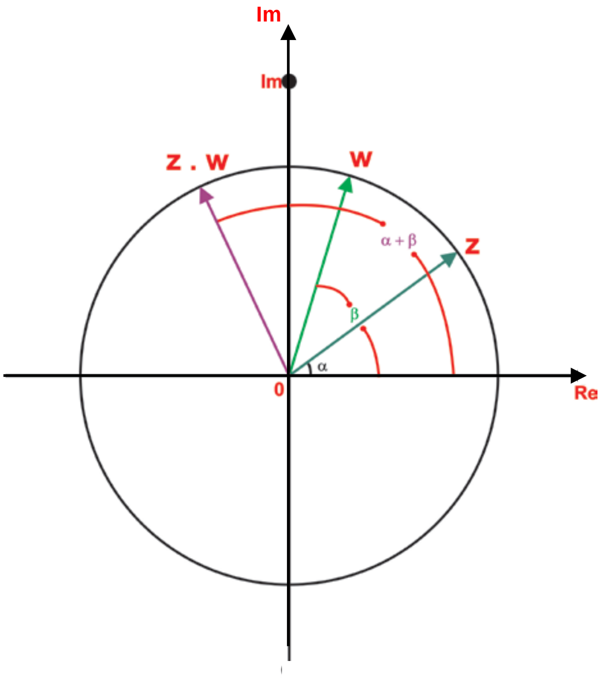

Figura 5

Na forma trigonométrica:

$$z = (\cos\alpha, \text{sen}\alpha) \text{ e } w = (\cos\beta, \text{sen}\beta)$$
$$zw = (\cos\alpha + i\text{sen}\alpha)\cdot(\cos\beta + i\text{sen}\beta)$$
$$zw = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \text{sen}\alpha\cdot\text{sen}\beta + (\text{sen}\alpha\cdot\cos\beta + \text{sen}\beta\cdot\cos\alpha)i$$
$$zw = \cos(\alpha+\beta) + i\text{sen}(\alpha+\beta)$$
$$z\cdot w = (\cos(\alpha+\beta), \text{sen}(\alpha+\beta))$$

Como pares ordenados:

$$z = (a, b) \text{ e } w = (c, d)$$
$$z\cdot w = (ac - bd, bc + ad)$$

Vamos agora considerar dois números complexos não unitários:

$$z = |z|(\cos\alpha, \text{sen}\alpha) \text{ e } w = |w|(\cos\beta, \text{sen}\beta)$$

O produto $z \cdot w$ está definido por:

$$z \cdot w = |z||w|(\cos(\alpha+\beta), \operatorname{sen}(\alpha+\beta))$$

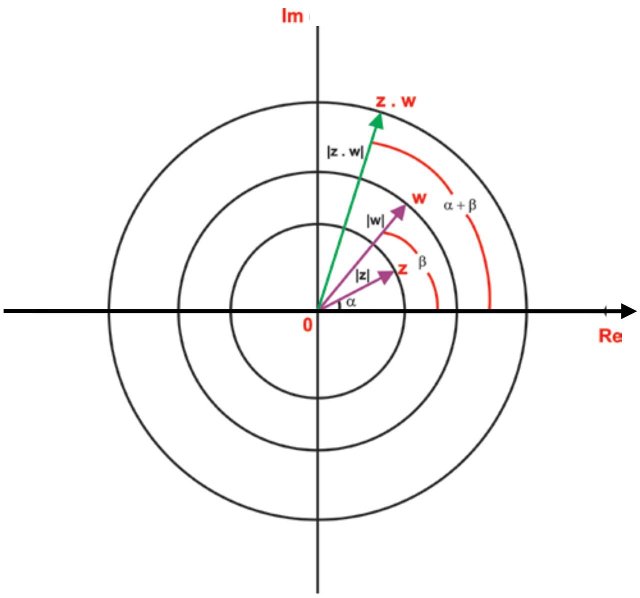

Figura 6

Neste caso estamos compondo uma rotação e fazendo uma dilatação.

Seja z = (a , b) e w = (c , d). Logo, temos:

$$z = |z|(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) \qquad w = |w|(\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$$

$$z = (|z|\cos\alpha, |z|\operatorname{sen}\alpha) \qquad w = (|w|\cos\beta, |w|\operatorname{sen}\beta)$$

$$a = |z|\cos\alpha \qquad c = |w|\cos\beta$$

$$b = |z|\operatorname{sen}\alpha \qquad d = |w|\operatorname{sen}\beta$$

Sabemos que: $z \cdot w = |z||w|(\cos(\alpha+\beta), \operatorname{sen}(\alpha+\beta))$

$$z \cdot w = (\cos(\alpha+\beta), \operatorname{sen}(\alpha+\beta))$$
$$= (\cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta,\ \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha)$$
$$z \cdot w = (ac - bd\ ,\ bc + ad)$$

Então, $z \cdot w = (ac - bd\ ,\ bc + ad)$, para todo z = (a , b) e w = (c , d)

Em resumo:

$$z \cdot w = (\cos(\alpha+\beta), \operatorname{sen}(\alpha+\beta)) \text{ (complexos unitários)}$$

$$z \cdot w = |z||w|(\cos(\alpha+\beta), \operatorname{sen}(\alpha+\beta)) \text{ (complexos não necessariamente unitários)}$$

$z \cdot w = (ac - bd\ ,\ bc + ad)$ (complexo qualquer)

Podemos verificar também que o produto entre dois números complexos é comutativo.

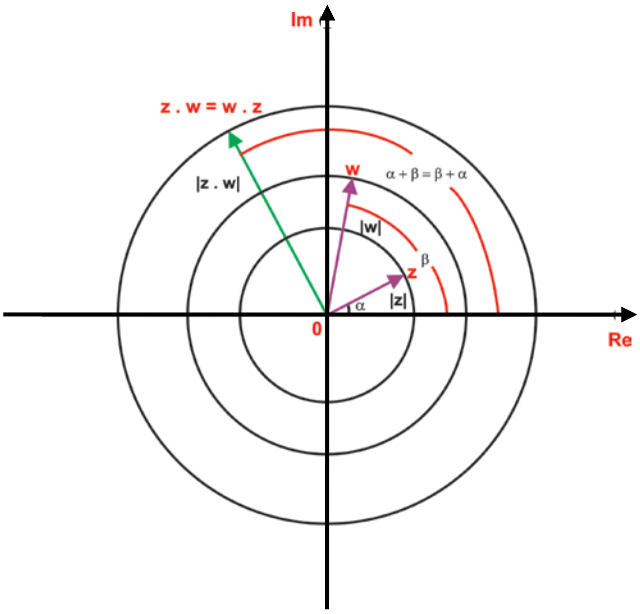

Figura 7

Na figura anterior vimos que dados z e $w \in C$, temos que $z \cdot w = w \cdot z$, portanto a multiplicação de números complexos é comutativa.

4.2
Conjugado de um Número Complexo

Considerando um complexo $z = |z|(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, o conjugado de z é $\overline{z} = |z|(\cos(-\alpha), \operatorname{sen}(-\alpha))$.

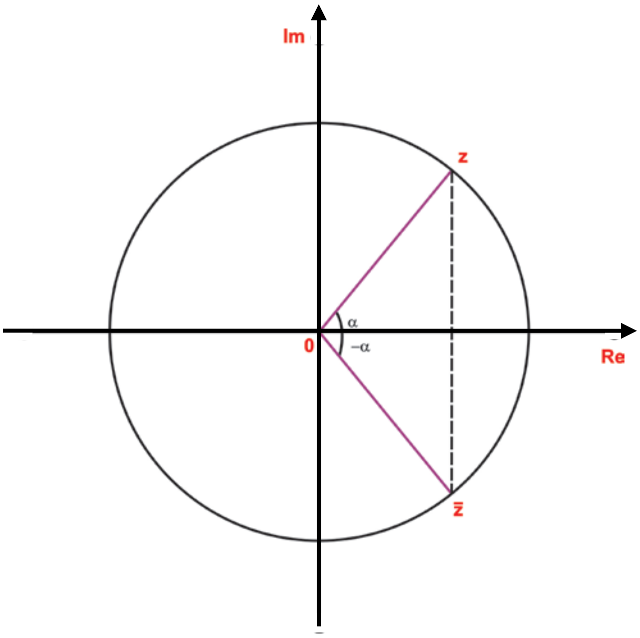

Figura 8

Podemos observar que $\overline{z}$ é obtido pela reflexão de z em relação ao eixo real.

Na forma cartesiana:

$$z = (a, b) \Rightarrow \overline{z} = (a, -b)$$

Pois,

$$\overline{z} = |z|(\cos(-\alpha), \operatorname{sen}(-\alpha)) = |z|(\cos\alpha, -\operatorname{sen}\alpha) = (|z|\cos\alpha, -|z|\operatorname{sen}\alpha).$$

Já vimos que:

$$a = |z|\cos\alpha$$
$$b = |z|\operatorname{sen}\alpha$$

Então: $\overline{z} = (a, -b)$

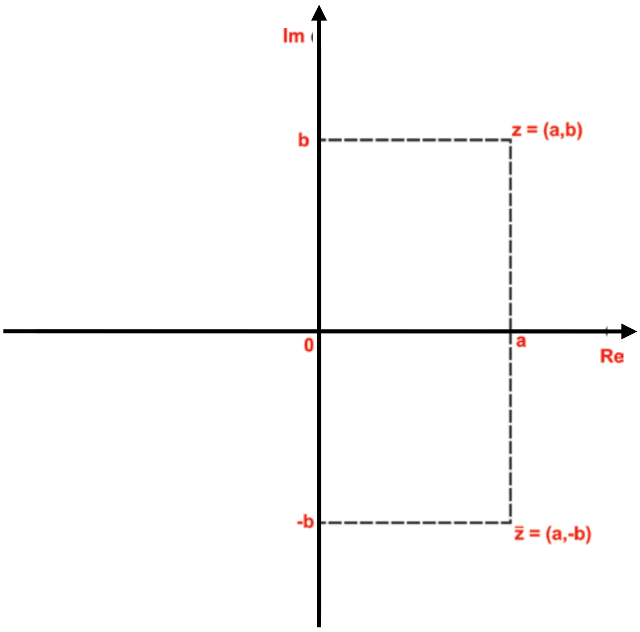

Figura 9

Obs:

z é simétrico a $\bar{z}$ em relação ao eixo real.

$$|z| = |\bar{z}|$$

O argumento de z é o oposto do argumento de $\bar{z}$.

4.3
Elemento Neutro e Inverso Multiplicativo

Quando procuramos um elemento neutro multiplicativo, estamos procurando por um número complexo w, tal que $z \cdot w = z, \ \forall \ z \in C$.

Para isso vamos considerar:

$$z = |z|(\cos\alpha, \text{sen}\alpha)$$
$$w = |w|(\cos\beta, \text{sen}\beta)$$

Como $z \cdot w = z$, então:

$$|z|(\cos\alpha, \text{sen}\alpha) \cdot |w|(\cos\beta, \text{sen}\beta) = |z|(\cos\alpha, \text{sen}\alpha)$$
$$|z||w|(\cos(\alpha+\beta), \text{sen}(\alpha+\beta)) = |z|(\cos\alpha, \text{sen}\alpha)$$

Temos:

$$|z||w| = |z| \Rightarrow |w| = 1$$

e

$$\left.\begin{array}{l}\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \\ \text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\alpha\end{array}\right\} \beta = 0 + 2k\pi$$

Portanto, $w = (1,0) = 1 \cdot (\cos 0^o, \text{sen} 0^o)$

Quando procuramos pelo inverso multiplicativo de um complexo z≠0, estamos procurando por um número complexo, que chamaremos de z^{-1}, tal que o produto de z por z^{-1} resulta o elemento neutro multiplicativo.

Consideremos:

$$z = |z| \cdot (\cos\alpha, \text{sen}\alpha)$$

$$z^{-1} = |z^{-1}| \cdot (\cos\beta, \text{sen}\beta)$$

$$z \cdot z^{-1} = |z||z^{-1}| \cdot (\cos(\alpha+\beta), \text{sen}(\alpha+\beta)) = 1 \cdot (\cos 0^o, \text{sen} 0^o)$$

$$z \cdot z^{-1} = 1 \cdot (\cos 0^o, \text{sen} 0^o)$$

Temos:

$$|z| \cdot |z^{-1}| = 1 \Rightarrow |z^{-1}| = \frac{1}{|z|}, \text{ pois } |z| \neq 0$$

e

$$\left.\begin{array}{l}\cos(\alpha+\beta) = \cos 0^o \\ \text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen} 0^o\end{array}\right\} \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha$$

Portanto,

$$|z^{-1}| = \frac{1}{|z|} \cdot (\cos(-\alpha), \text{sen}(-\alpha))$$

$$z^{-1} = \left(\frac{\cos(-\alpha)}{|z|}, \frac{\text{sen}(-\alpha)}{|z|} \right)$$

(forma trigonométrica)

Lembrando que:

$$a = |z|\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{a}{|z|}$$

$$b = |z|\operatorname{sen}\alpha \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{|z|}$$

Concluímos que:

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{|z|^2}, \frac{-b}{|z|^2}\right); |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$$

(forma cartesiana)

Abaixo ilustramos geometricamente o complexo z^{-1}, em três casos diferentes:

$|z| > 1, |z| = 1, |z| < 1$

<u>1º caso:</u>

$$*|z| > 1 \Rightarrow \frac{1}{|z|} < 1$$

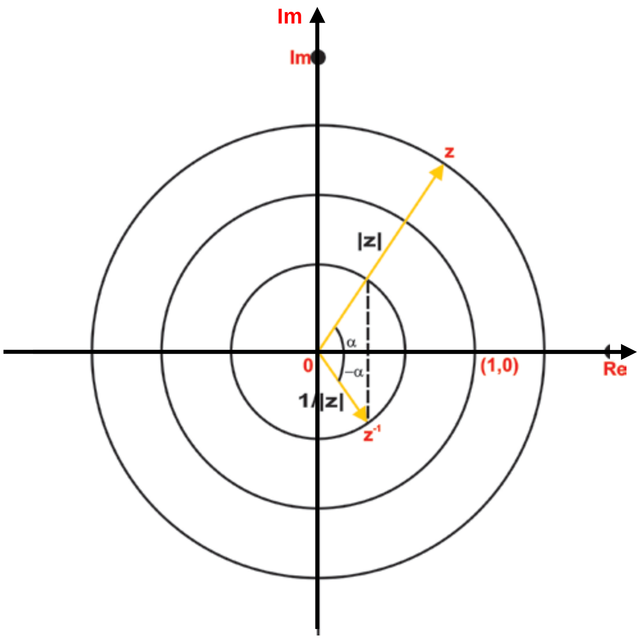

Figura 10

<u>2º caso:</u>

$$*|z|=1 \Rightarrow \frac{1}{|z|}=1$$

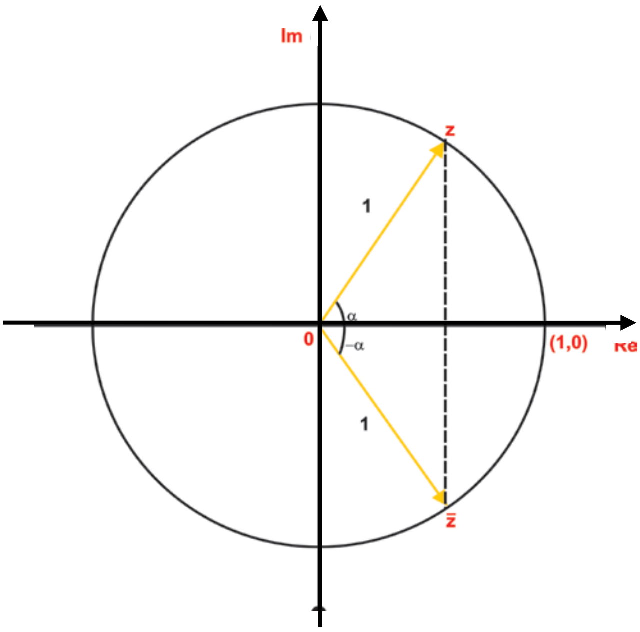

Figura 11

<u>2º caso:</u>

$$*|z|<1 \Rightarrow \frac{1}{|z|}>1$$

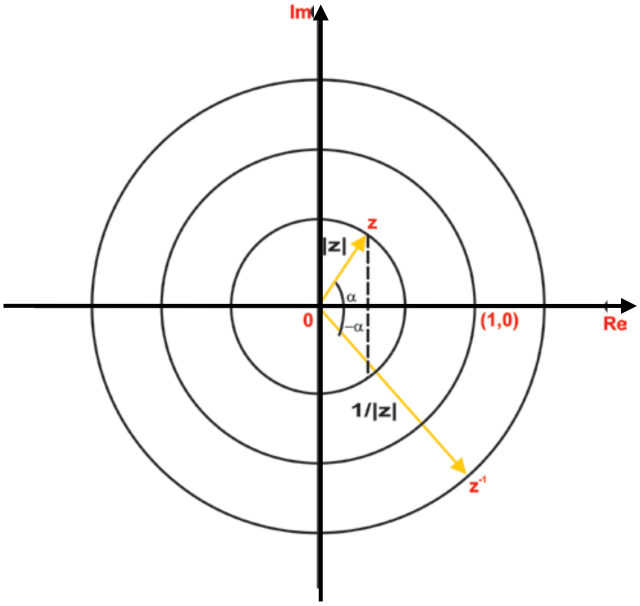

Figura 12

Observação:

Vimos que:

$$\left|\overline{z}\right| = |z| \cdot (\cos(-\alpha), \operatorname{sen}(-\alpha))$$

$$\left|z^{-1}\right| = \frac{1}{|z|} \cdot (\cos(-\alpha), \operatorname{sen}(-\alpha))$$

Portanto, podemos perceber que z^{-1} e $\overline{z}$ possuem o mesmo argumento, logo, $z^{-1} = k \cdot \overline{z},\ k \in \mathbb{R}_+^*$.

Se $z^{-1} = k \cdot \overline{z},\ k > 0,$ temos:

$$\left|z^{-1}\right| = \left|k \cdot \overline{z}\right| = \left|z^{-1}\right| = \frac{1}{|z|}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|z|} = k|z| \Rightarrow k = \frac{1}{|z|^2}$$

Como,

$$z^{-1} = k \cdot z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \overline{z} \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \overline{z}$$

4.4
Divisão de Números Complexos

Vamos considerar dois números complexos z = (a , b) e w = (c , d). A divisão de z por w é $\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w} = z \cdot w^{-1}$, ou seja, a multiplicação de z pelo inverso de w.

Se $z = |z| \cdot (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, $w = |w| \cdot (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$,

$$w^{-1} = \frac{1}{|w|} \cdot (\cos(-\beta), \operatorname{sen}(-\beta))$$

Temos:

$$z \cdot w^{-1} = |z_1| \cdot \frac{1}{|w|} \cdot (\cos(\alpha - \beta), \operatorname{sen}(\alpha - \beta)) \text{ (forma trigonométrica)}$$

Na forma cartesiana: $z = (a.b), w = (c, d)$ e $w^{-1} = \left(\frac{c}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right)$

Temos:

$$z \cdot w^{-1} = (a, b) \cdot \left(\frac{c}{c^2 + d^2}, \frac{d}{c^2 + d^2} \right) = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right)$$

4.5
Potências de Números Complexos

Dado um z complexo, uma potência de z é dada por z^n, onde n é um número natural. Ou seja, $z^n = z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z ... z$, com z ocorrendo n vezes.

Sabemos que a multiplicação de complexos é com composição de rotações e dilatações.

Se $z = |z| \cdot (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, então:

$$z^n = z \cdot z \cdot z ... z = |z| \cdot (\cos\alpha, \text{sen}\alpha) |z| \cdot (\cos\alpha, \text{sen}\alpha) ... |z| \cdot (\cos\alpha, \text{sen}\alpha)$$
$$= |z| \cdot |z| \cdot |z| ... |z| \cdot (\cos(\alpha + \alpha + ... + \alpha), \text{sen}(\alpha + \alpha + ... + \alpha)) \Rightarrow$$
$$z^n = |z|^n \cdot (\cos\ n\alpha, \text{sen}\ n\alpha)$$

A fórmula acima é conhecida como ***Fórmula de de Moivre***.

4.6
Complexos Pertencentes ao Eixo Real – Números Reais

Um complexo z que pertence ao eixo real é do tipo (a , 0). Se z = (a , 0) e w = (c , 0), então:

z + w = (a , 0) + (c , 0) = (a + c , 0)
$z \cdot w = (a\ ,\ 0) \cdot (c\ ,\ 0) = (ac\ ,\ 0)$

Observamos que se (z + w) e $(z \cdot w)$ pertencem ao eixo real, os elementos neutros da adição (0 , 0) e da multiplicação (1 , 0) e $\left(\frac{1}{a}\ ,\ 0\right)$ os elementos inverso aditivo (–a , 0) e multiplicativo $(a \neq 0)$, também pertencem ao eixo real.

Com isso, observamos que o eixo real se comporta como o conjunto dos números reais. Cada número real x pode ser representado como (x , 0) um número complexo. Por exemplo, (2 , 0) + (7 , 0) = (9 , 0) é equivalente a 2 + 7 = 9.

4.7
Complexos Pertencentes ao Eixo Imaginário-Imaginários Puros

Um número complexo que pertence ao eixo imaginário tem a seguinte forma (0 , b). Todo número (0 , b) pode ser escrito como $b \cdot (0\ ,\ 1)$, onde (0 , 1) é complexo unitário que define uma a rotação de 90º.

O complexo (0 , 1) será de grande importância e será chamado de i.

Portanto, i = (0 , 1)
Temos:

$i = (0 , 1)$

$i^2 = (0 , 1) \cdot (0 , 1) = (0 - 1 , 0 + 0) = (-1 , 0) = -1$

Assim, $i^2 = -1$.

Todo número complexo z = (a , b) pode ser escrito como a soma de dois complexos, um n eixo real e outro no eixo imaginário.

Dado z = (a , b):

$z = (a , b) = (a , 0) + (0 , b) = (a , 0) + b(0 , 1) = a + bi$

Então, z = a + bi, forma algébrica de um número complexo.

Já sabemos que um número complexo pode ser representado de três maneiras.

$z = (a , b) \rightarrow$ forma cartesiana

$z = |z| \cdot (\cos\alpha, \cos\alpha) \rightarrow$ forma trigonométrica

$z = a + bi \rightarrow$ forma algébrica

Podemos introduzir o “i” na forma trigonométrica:

Logo:

$$z = |z| \cdot (\cos\alpha, \mathrm{sen}\alpha) = (|z|\cos\alpha, |z|\mathrm{sen}\alpha) =$$
$$= |z|\cos\alpha + i|z|\mathrm{sen}\alpha = |z|(\cos\alpha + i\mathrm{sen}\alpha)$$
$$\Rightarrow z = |z|(\cos\alpha + i\mathrm{sen}\alpha)$$

4.8 Potências de i

Como $i = (0\ ,\ 1) = \left(\cos\frac{\pi}{2}\ ,\ \text{sen}\frac{\pi}{2}\right)$, temos:

$i = \left(\cos\frac{\pi}{2}\ ,\ \text{sen}\frac{\pi}{2}\right) = (0\ ,\ 1) = i$ $\qquad i^5 = \left(\cos\frac{5\pi}{2}\ ,\ \text{sen}\frac{5\pi}{2}\right) = (0\ ,\ 1) = i$

$i^2 = (\cos\pi\ ,\ \text{sen}\pi) = (-1\ ,\ 0) = -1$ $\qquad i^6 = (\cos 3\pi\ ,\ \text{sen}3\pi) = (-1\ ,\ 0) = -1$

$i^3 = \left(\cos\frac{3\pi}{2}\ ,\ \text{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = (0\ ,\ 1) = -i$ $\qquad i^7 = \left(\cos\frac{7\pi}{2}\ ,\ \text{sen}\frac{7\pi}{2}\right) = (0\ ,\ 1) = -i$

$i^4 = (\cos 2\pi\ ,\ \text{sen}2\pi) = (1\ ,\ 0) = 1$ $\qquad i^8 = (\cos 4\pi\ ,\ \text{sen}4\pi) = (1\ ,\ 0) = 1$

Podemos observar que os resultados da coluna da direita repetem os resultados da coluna da esquerda, e se continuássemos os resultados continuariam se repetindo.

Como sabemos $i = (0\ ,\ 1) = \left(\cos\frac{\pi}{2}\ ,\ \text{sen}\frac{\pi}{2}\right)$, é um complexo unitário cujo argumento vale 90º. Já vimos que a multiplicação de complexos unitários é uma composição de rotações, então quando elevamos i a alguma potência natural estamos somando 90º ao argumento do complexo. Por exemplo: quando fazemos i^3 estamos somando 90º + 90º + 90º = 270º, logo $i^3 = (\cos 270^o\ ,\ \text{sen}270^o) = \left(\cos\frac{3\pi}{2}\ ,\ \text{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = (0\ ,\ -1)$.

Sendo n um número natural $i^n = i^r$, onde r é o resto da divisão de n por 4.

$$i^n = \begin{cases} 1,\ \text{se } n = 4k, \\ i,\ \text{se } n = 4k+1 \\ -1,\ \text{se } n = 4k+2 \\ -i,\ \text{se } n = 4k+3 \end{cases}$$

Onde $k \in N$

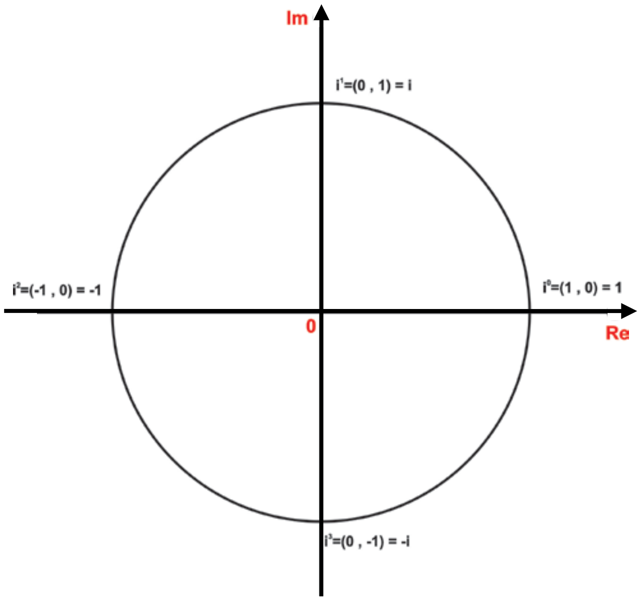

Figura 13

4.9
Raízes de um Número Complexo

Vamos tentar resolver a equação $z^n = w$, z e w complexos, onde z é a incógnita e w é um complexo dado. Uma equação deste tipo é chamada de equação binômia.

Se w = 0, então z = 0 é a única solução da equação.

Sendo, então, w ≠ 0, podemos colocar: $w = |w|(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta)$, e $z = |z|(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$, onde |w| e β são conhecidos, enquanto |w| e α são incógnitas. Com isto:

$z^n = w \Rightarrow |z|^n (\cos(n\alpha) + i\operatorname{sen}(n\alpha)) = |w|(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta)$, temos:

$$\begin{cases} |z|^n = |w| \\ \cos(n\alpha) + i\operatorname{sen}(n\alpha) = \cos\beta + i\operatorname{sen}\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|w|} \\ n\alpha = \beta + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \dfrac{\beta + 2k\pi}{n} \end{cases}$$

Onde k é um número inteiro.

Vamos supor que k = 0, então:

$$\alpha_1 = \frac{\beta}{n}$$

Vamos supor agora k = n. Logo:

$$\alpha_2 = \frac{\beta}{n} + 2\pi$$

Observamos que α_1 e α_2 são arcos côngruos, portanto representam a mesma solução, logo concluímos que para $k \geq n$ vão surgir soluções repetidas, portanto, verificamos que o número de soluções da equação é n, logo k = 0, 1, 2, 3,...n – 1. Com isso, podemos concluir que as soluções da equação $z^n = w(w \neq 0)$ são:

$$z_1 = \sqrt[n]{|w|} \cdot \left(\cos\frac{\beta + 2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\frac{\beta + 2k\pi}{n} \right)$$
$$(k = 0, 1, 2, ..., n-1)$$

As n soluções da equação $z^n = w$ chamam-se raízes n-ésimas do complexo w. No plano, elas constituem os vértices de um polígono regular de n lados, inscrito no círculo centrado na origem e raio $\sqrt[n]{|w|}$.

Como podemos observar na figura abaixo.

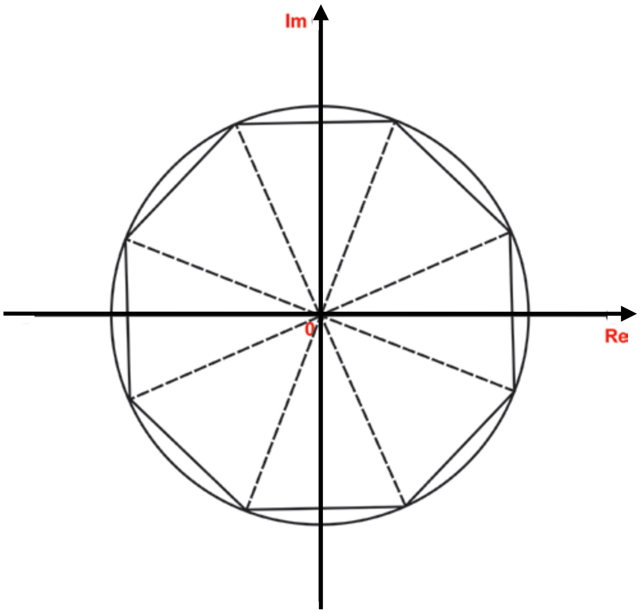

Figura 14

5
DEMONSTRAÇÕES DA FÓRMULA DE EULER

1ª Demonstração: Utilizando Série de Taylor de algumas funções comuns

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ .cos x = $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}. x^{2n}$. sen x = $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} .x^{2n+1}$

Assim temos:

$$e^{i\Theta} = 1 + i\Theta + \frac{i^2\Theta^2}{2!} + \frac{i^3\Theta^3}{3!} + \frac{i^4\Theta^4}{4!} + \ldots = 1 + i\Theta - \frac{\Theta^2}{2!} - i\,\frac{\Theta^3}{3!} + \frac{\Theta^4}{4!} + \ldots =$$

$$= \left(1 - \frac{\Theta^2}{2!} + \frac{\Theta^4}{4!} - \frac{\Theta^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(\Theta - \frac{\Theta^3}{3!} + \frac{\Theta^5}{5!} - \frac{\Theta^7}{7!} + \ldots\right) = \cos\Theta + i \operatorname{sen}\Theta$$

2ª Demonstração:

Seja g(t) = cos t + i sen t

Temos: g(0) = 1 ; g\`(t) = -sen t + i cos t = ig(t)

Então: $\frac{g`(t)}{g(t)} = i$

Sabemos que: $\frac{d}{d(t)}(\ln(g(t))) = \frac{g`(t)}{g(t)} = i$

ln(g(t)) = it + c , como g(0) = 1 temos c = 0

logo ln(g(t)) = it e g(t) = e^{it}

6
OS NÚMEROS COMPLEXOS SÃO ORDENADOS?

Quando analisamos outros conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), vemos que eles possuem uma ordem natural bem definida, porém poderíamos ordenar o conjunto dos números complexos de uma infinidade de maneiras distintas.

O problema é que a ordem do conjunto deveria ser compatível com as operações no conjunto e para isso deveria satisfazer à regra dos sinais. O produto ab deveria ser positivo, se, e somente se a e b fossem positivos ou se ambos fossem negativos. Mas, analisemos o complexo i. A equação $i^2 = -1$ mostra que não podemos considerar i nem positivo e nem negativo, pois em ambos os casos o seu quadrado não poderia ser negativo (–1). Logo, não pode existir nos complexos uma ordem que respeite as operações de adição e multiplicação.

7
APLICAÇÕES

Um questionamento comum, principalmente por parte dos alunos, ao apresentar um novo tópico da matemática é o seguinte: Para que serve isto?

Com relação aos números complexos, esta pergunta torna-se mais provável de acontecer, tendo em vista a abstração de tal tópico. Porém, são inúmeras as aplicações dos números complexos, sejam elas diretas ou indiretamente ligadas a matemática

Estes números complexos também são muito úteis em resolução de problemas matemáticos, mesmo que muitas vezes não se perceba tal importância. Podemos citar como exemplo, o famoso problema do tesouro, que deixaremos como desafio para o leitor: "Dois piratas decidem enterrar um tesouro em uma ilha. Escolhem como pontos de referência, uma árvore e duas pedras". Começando na árvore, medem o número de passos até a primeira pedra. Em seguida, dobram segundo um ângulo de 90º, à direita e caminham os mesmos números de passos até alcançar um ponto, onde fazem uma marca. Voltam à árvore e medem o número de passos desde a árvore até a segunda pedra, dobram à esquerda, segundo um ângulo de 90º, e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem outra marca. Finalmente, enterram o tesouro exatamente no ponto médio entre as duas marcas.

Anos mais tarde, os dois piratas voltaram à ilha e decidem desenterrar o tesouro, mas para sua decepção, constatam que a árvore não existe mais (o vento, a chuva e os depredadores a haviam arrancado). Então, um dos piratas decide arriscar. Escolhe ao acaso um ponto da ilha e diz: "Vamos imaginar que a árvore estivesse aqui". Repete então os mesmos procedimentos de quando havia enterrado o tesouro: conta os passos até a primeira pedra, dobra à direita, etc, e encontra o tesouro.

Pergunta-se: Este pirata era sortudo ou era matemático? Qual a relação entre o problema e os números complexos?

(http://bibvirt.futuro.usp.br/textos/hemeroteca/rpm/rpm47rpm47_01.pdf)

O ensino dos números complexos pode se tornar muito motivador a partir do momento em que o aluno conseguir percebê-los. Explicamos: Como já foi dito anteriormente, podemos associar cada número complexo a um ponto do plano cartesiano. Logo, podemos perceber aplicações dos números complexos na própria sala de aula, utilizando a geometria dinâmica, como, por exemplo, fazendo construções, resolvendo problemas e inclusive propondo conjecturas.

8
CONCLUSÃO

Durante todo o processo de ensino, o aluno aprende que não existe raiz quadrada de números negativos e assim as equações em que a solução é uma raiz de número negativo são equações sem solução.

No 3º ano do Ensino Médio, o aluno aprende que a raiz de um número negativo é um número complexo ($i^2 = -1$). Porém, muitas vezes a apresentação deste conceito é motivada pelo objetivo de descobrir as raízes de uma equação de 2º grau, mas fazendo um estudo sobre a origem dos números complexos, percebemos que eles surgiram da necessidade de descobrir as raízes de uma equação de 3º grau.

Acreditamos que os professores do Ensino Médio deveriam introduzir os números complexos às suas turmas, contando um pouco de sua história e apresentando a necessidade de seu surgimento, pois assim ficaria algo compreensível para o aluno. Julgamos pertinente também, a apresentação dos números complexos na resolução de uma equação de 3º grau.

Observamos que existe entre os professores do Ensino Médio, um questionamento sobre a melhor maneira de abordar os números complexos, seja algebricamente ou geometricamente. Nosso objetivo não é solucionar esta questão, mas tentar apresentar as duas formas de maneira clara, com o intuito de auxiliar o professor em sala de aula.

Acreditamos que é importante para o aluno estudar todos os conceitos, definições algébricas e depois a forma geométrica, pois por ser um assunto abstrato torna-se necessário a visualização do conteúdo para que se possa realmente entender o estudo. Como exemplo, consideramos que fica mais claro para o aluno entender que o número complexo $z = a + bi$, pode ser representado por um par ordenado (a , b) no sistema de eixos ortogonais (plano de Argand – Gauss) e também que o módulo de um número complexo é a distância do ponto (a , b) até a origem dos eixos, sendo determinado usando o Teorema de Pitágoras.

Como os exemplos dados anteriormente, temos vários outros casos onde podemos perceber que quando estudamos a forma geométrica, enriquecemos o nosso conhecimento sobre os números complexos. Por isso esperamos que independente do professor iniciar da forma algébrica ou da forma geométrica, é importante que mostre para o aluno que os números complexos são necessários e podem facilmente ser visualizados utilizando a geometria.

O ensino dos números complexos no Ensino Médio é de grande importância pois, como vimos, eles podem ser aplicados de diferentes formas e esta abordagem nos permite a possibilidade de um estudo minucioso sobre os polinômios, visto que, pelo Teorema Fundamental da Álgebra: "*toda equação polinominal possui pelo menos uma raiz complexa*".

Assim, os números complexos, que surgiram com objetivo de resolvermos uma equação do 3º grau, são necessários para extrairmos as raízes das equações de 2º, 3º 4º, 5º e demais graus.

Apenas isso já é um fato da relevância matemática dos complexos, que são indispensáveis em Álgebra Linear e Equações Diferenciais e em várias situações em que é indispensável o uso dos números complexos, mesmo que sejam questões relativas a números reais. Porém não se deve pensar que a importância dos complexos está ligada apenas ao Teorema Fundamental da Álgebra. Eles se fazem presente em vários ramos da Matemática com Álgebra, Teoria dos Números, Topologia, Geometria (Analítica, Diferencial ou Algébrica), Análise, Equações Diferenciais, e em aplicações como Física Matemática, Dinâmica dos Fluidos, Eletromagnetismo, entre outros.

Esperamos que o nosso trabalho, tenha mostrado de maneira precisa todos os tópicos importantes deste grande e notável ramo da Matemática, que é o Conjunto dos Números Complexos. Procuramos primar pela exposição clara e coerente de forma a auxiliar ao professor do Ensino Médio, ao estudante do Ensino Médio e ao graduando em Matemática ou em disciplinas afim.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL ESCOLA. **Forma Algébrica**. Disponível em http://www.brasilescola.com/matematica/numeros-complexos.htm Acesso em 16 fev. 2014

CATALDO, João Carlos e JULIANELLI, José Roberto: **Vetores, Geometria Analítica e Álgebra.** Rio de Janeiro. Editora Oficina do Autor, 1999.

EVES, Howard: **Introdução à História da Matemática**. São Paulo. Editora Unicamp, 2004.

LIMA, Elon Lages: **Meu Professor de Matemática**. Rio de Janeiro. SBM, 1991.

LIMA, Elon Lages e outros: **A Matemática do Ensino Médio**, volume 3. Rio de Janeiro. SBM, 1998.

Revista do Professor de Matemática número 54. Rio de Janeiro. SBM, 2004.

GARCIA, Arnaldo e LEQUAIN, Yves: **Álgebra, um curso de introdução**. Rio de Janeiro. IMPA – CNPq, 1998.