PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Ronald Coutinho Pinto

Introdução à Análise Combinatória

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática Departamento de Matemática da PUC-Rio como parte dos requisitos parciais para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Carlos Frederico Borges Palmeira

Rio de Janeiro

Julho de 2014

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Ronald Coutinho Pinto

Introdução à Análise Combinatória

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Carlos Frederico Borges Palmeira
Orientador
Departamento de Matemática - PUC-Rio

Prof. Victor Augusto Giraldo
Instituto de Matemática – UFRJ

Prof. Marcos Craizer
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. José Eugenio Leal
Coordenador Setorial do Centro
Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 17 de julho de 2014

Ronald Coutinho Pinto

Mestrado em matemática pela Pontifícia Universidade Católica (PUC) no curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT – em julho de 2014. Pós-Graduado pela Universidade Cândido Mendes (UCAM) em Dezembro de 2005 no Curso de Docência do Ensino Superior. Graduado pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) em Dezembro de 2002 no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Ficha Catalográfica

Pinto, Ronald Coutinho

Introdução à análise combinatória / Ronald Coutinho Pinto; orientador: Carlos Frederico Borges Palmeira. – 2014.

59 f. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2014.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Combinatória. 3. Contagem. 4. Probabilidade. 5. Permutação. 6. Problemas resolvidos. I. Palmeira, Carlos Frederico Borges. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

‘‘Dedico este trabalho a duas pessoas que são de enorme importância em toda essa minha caminhada: minha mulher Vanessa e minha filha Manuela, as quais souberam de minha aprovação na maternidade e abriram mão, durante dois anos, da convivência com o marido e pai, aos sábados. Com isso, escreveram comigo, essa notável página da minha vida.’’

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, sem o qual não seria possível chegar até aqui nessa minha caminhada. Agradeço por ter me dado a oportunidade de realizar este sonho, pela força e pela coragem que me deu durante esta caminhada. Agradeço também à minha mulher e à minha filha por me apoiarem e me incentivarem em todos os momentos difíceis.

Agradeço a todos os professores que tive ao longo de minha trajetória neste curso de mestrado, por contribuírem fortemente para minha formação e qualificação profissional. Agradeço também a todos os meus colegas de curso.

Agradeço por último, mas não menos importante, ao meu orientador, Prof. CARLOS FREDERICO BORGES PALMEIRA, por ter aceitado me orientar neste trabalho e pelo incentivo durante a elaboração do mesmo.

Resumo

Pinto, Ronald Coutinho; Palmeira, Carlos Frederico Borges (Orientador). **Introdução à análise combinatória.** Rio de Janeiro, 2014. 59p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho possui o intuito de desmistificar a dificuldade encontrada por professores e alunos no ensino e aprendizagem do tópico análise combinatória. A razão que motivou este trabalho foi o fato de que boa parte dos professores de matemática do ensino médio e últimas séries do ensino fundamental consideram a Análise Combinatória como algo complicado de ser ensinado; além da questão das dificuldades de entendimento por parte dos alunos que são induzidos à memorização de fórmulas e a aplicação das mesmas à resolução dos exercícios para compreenderem tal conteúdo. Inicialmente apresentaremos alguns conceitos que servirão como auxílio para que o professor possa trabalhar nas atividades propostas a serem desenvolvidas juntamente com os alunos. E ao longo do trabalho iremos falar de alguns tópicos abordados pela análise combinatória sem, inicialmente, mencionarmos fórmulas que servem apenas para serem memorizadas. O mais importante é fazer o aluno trabalhar um problema sugerido através do roteiro e dos conceitos que serão propostos e ao final de alguns exercícios, quando tal aluno tiver entendido tal conceito, ser anunciado a ele que acabou de aprender e entender o conceito em questão, ao invés de memorizar um determinado exercício ou outro, pois sabemos que desta forma, quando o aluno deparar-se com um novo problema, não será capaz de solucioná-lo. Dessa maneira, elaborou-se um roteiro na solução dos exercícios, ou seja, uma forma do professor trabalhar qualquer atividade proposta que envolva problemas de contagem em sala de aula. Enfim, buscou-se com esse trabalho, apresentar aos docentes, estratégias eficientes que podem ser utilizadas para o ensino de combinatória e ajudar os alunos a compreenderem melhor os problemas de contagem utilizando o raciocínio lógico e de contagem.

Palavras-chave

Combinatória; Probabilidade; Combinação; Arranjo; Permutação; Problemas resolvidos.

Abstract

Pinto, Ronald Coutinho; Palmeira, Carlos Frederico Borges (Orientador). **Introduction to Combinatorics.** Rio de Janeiro, 2014. 59p. MSc Dissertation – Departamento de Matemática Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This work has the intent to explain the difficulties found by teachers and student on teaching and learning combinatorics. The motivation of this work was the fact that most of the Mathematics Teachers of High School consider combinatorics as something complicated to be taught; contributing as well the fact that students are led to memorize the formulas and apply it on exercises so they can understand the subject. Initially we will show some concepts that will help the Teachers to work together with the students on the proposed activities. During the work, we will talk about Combinatorics topics without mentioning formulas that needs memorization only. The most important thing is to make the student work on a suggested problem following a guide and concepts shown and after finishing a few exercises, when the student will show the understanding of the concepts, the Teacher will tell him that he learned that concept, instead of memorizing a specific exercise. Because we know that not doing this, when this student faces a new problem, he will not be able to solve it. Thus it was elaborated a guide to solve exercises and that means a way that the Teacher can work with any proposed activity that has counting in it. Finally, it was sought with this work to show the scholars some efficient strategies that can be used on teaching Combinatorics and help the students to understand better the problems about counting, using logical reasoning and logical counting.

Keywords

Combinatorics; Probability; Combination; Arrangement; Permutation; Solved Problems.

Sumário

Introdução

A Análise Combinatória é uma ferramenta importante que o aluno necessita para resolver problemas reais. Porém, observa-se que o ensino desta matéria nas escolas, na maioria das vezes, limita-se ao uso de fórmulas para calcular o que está sendo pedido em um determinado problema, sem proporcionar ao aluno a interpretação e entendimento necessários para que sejam aplicados em problemas variados.

Percebendo a dificuldade dos professores em apresentar os tópicos de Análise Combinatória e a consequente dificuldade dos alunos em aprender tal disciplina, buscou-se desenvolver esse trabalho como orientação aos professores e alunos como forma de ensinar – aprender tal disciplina.

Inicialmente serão apresentados alguns conceitos que servirão como auxílio para que o professor possa trabalhar nas atividades propostas a serem desenvolvidas juntamente com os alunos. E ao longo do trabalho iremos falar de alguns tópicos abordados pela análise combinatória. O mais importante é fazer o aluno trabalhar um problema sugerido através do roteiro e dos conceitos que serão propostos e ao final de alguns exercícios, quando tal aluno tiver entendido tal conceito, ser anunciado a ele que acabou de aprender e entender o conceito em questão, ao invés de memorizar um determinado exercício ou outro, pois sabemos que desta forma, quando o aluno deparar-se com um novo problema, não será capaz de solucioná-lo. Dessa maneira, elaborou-se um roteiro na solução dos exercícios, ou seja, uma forma do professor trabalhar qualquer atividade proposta que envolva problemas de contagem em sala de aula.

Este trabalho será dividido em cinco capítulos da seguinte maneira:

O primeiro capítulo tratará dos dois princípios fundamentais da contagem, princípio aditivo e multiplicativo, seguidos de alguns exercícios que terão como objetivo fixar tais princípios além de desenvolver o raciocínio lógico e combinatório nos alunos.

No segundo capítulo, serão apresentados alguns conceitos que são abordados nos livros didáticos, são cobrados em vestibulares e concursos, seguidos de alguns exercícios que serão solucionados de duas maneiras: usando-se apenas os princípios fundamentais da contagem e usando-se o novo conceito aprendido. O objetivo desse capítulo é fazer o aluno perceber que não é preciso saber tais conceitos para a solução das questões propostas, mas que o entendimento deles facilita em muito a solução. A questão é que não se deve condenar a apresentação do conceito ao aluno, mas sim a forma como lhe é apresentado, a forma como os livros didáticos abordam o assunto. Entendo que o aluno pode usar as fórmulas, desde que saiba o que está fazendo, ou seja, desde que saiba o que significa tal conceito, pois com isso o aluno terá ferramentas e opções na hora de solucionar um problema.

No terceiro capítulo, serão apresentados mais alguns conceitos considerados interessantes, que também tem lugar garantido em concursos e vestibulares, com alguns exercícios que abordam tais conceitos.

O quarto capítulo tratará de aplicações da análise combinatória à probabilidade, com solução de exercícios.

E finalmente o quinto capítulo relata as considerações finais.

Entende-se por combinatória, a parte da matemática finita que estuda as configurações. Entende-se por configurações as disposições dos elementos de um conjunto segundo uma regra (propriedade).

Ex: Placas de automóveis

Sejam $\Re = \{A, B, C, \dots, Z\}$ e $\pi = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

Propriedade: Ordem linear de 7 elementos sendo que os três primeiros pertencem a $\Re$ e os quatro últimos pertencem a π.

A maior parte dos alunos do ensino médio acha que a combinatória estuda apenas as combinações, arranjos e permutações. Na verdade, a análise combinatória trata além desses conceitos citados anteriormente, de outros como o princípio da inclusão-exclusão, o princípio das casas dos pombos ou princípio das gavetas de Dirichlet, as funções geradoras, as permutações caóticas, o principio da reflexão, os lemas de Kaplansky, números binomiais, etc. que são poderosas ferramentas na solução de problemas de combinatória.

Neste trabalho não serão abordados todos esses conceitos, mas existem várias obras que abordam tais temas, dentre eles o livro Análise Combinatória e Probabilidade da SBM.

A Análise Combinatória se constitui numa ferramenta para diversas áreas do conhecimento científico, graças ao seu vasto campo de aplicação, além disso, permite a elaboração de situações problemas que podem ser discutidas através da construção de conjecturas e discussão de ideias, promovendo o desenvolvimento da capacidade de argumentação em diferentes níveis de ensino.

Em nosso país, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) destacam, dentre outros aspectos, a importância do raciocínio combinatório na formação dos alunos do Ensino Médio e o cuidado que nós, professores, devemos ter ao procurar desenvolvê-lo. Segundo esse documento:

As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidades no Ensino Médio... (BRASIL, 1998, p.257).

Sabemos que a análise combinatória possui técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, mas a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e compreensão plena da situação descrita pelo problema. Este é um dos encantos desta parte da matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução. Talvez essa seja a principal característica que torna esta parte da matemática tão difícil de se estudar, mas ao mesmo tempo tão encantadora, desafiante, empolgante, a ponto de ter lugar garantido em provas de olimpíadas de matemática, vestibulares e concursos em geral.

Capítulo I
Princípios Fundamentais da Contagem

1.1
Princípio Aditivo

Se um evento A pode ocorrer de m maneiras diferentes e, se para cada uma dessas m maneiras possíveis de A ocorrer, um outro evento B pode ocorrer de n maneiras diferentes, e A e B são mutuamente exclusivos (não podem ocorrer ao mesmo tempo, ou a realização de um evento exclui a realização do outro), então o número de maneiras de ocorrer o evento A ou o evento B é m + n. Pensando em termos de conjuntos, outra maneira de se pensar é: se A e B são dois conjuntos com m e n elementos respectivamente, disjuntos ($A \cap B = \emptyset$), então o número de elementos de $A \cup B$ é m + n.

Ex: Rodrigo tem 10 dvds de Ação, 5 de Comédia e 2 de Terror. De quantas maneiras ele pode escolher um dvd para assistir?

Solução: como os dvds de ação, de comédia e de terror são conjuntos disjuntos, ou seja, não possuem nenhum elemento em comum, e como Rodrigo quer assistir a apenas um filme sem nenhuma restrição, ele poderá assistir a um filme de 10 + 5 + 2 = 17 maneiras diferentes.

1.2
Princípio Multiplicativo

Se um evento A pode ocorrer de m maneiras diferentes e, se para cada uma dessas m maneiras possíveis de A ocorrer, um outro evento B pode ocorrer de n maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o evento A seguido do evento B é $m \times n$. Pensando em termos de conjuntos, outra maneira de se pensar é: se A e B são dois conjuntos com m e n elementos respectivamente, então o número de elementos de A x B (produto cartesiano) é $m \times n$.

Ex: Rodrigo tem 10 dvds de Ação, 5 de Comédia e 2 de Terror. Agora, suponha que ele queira assistir a um filme de Ação, a um filme de Comédia e a um filme de Terror. De quantas maneiras diferentes ele poderá escolher os três filmes para assistir?

Solução: Rodrigo deverá assistir a três filmes. O primeiro deverá ser de Ação, logo ele tem 10 possibilidades; para cada filme de Ação, ele poderá assistir a 5 Comédias e, para cada Comédia, 2 filmes de Terror. Logo, Rodrigo poderá assistir a um filme de cada gênero de $10 \times 5 \times 2 = 100$ formas diferentes.

1.3
Regras para uma boa montagem de configurações e para a solução de um problema

Sem dúvida alguma, a maneira em como se pensa na solução de um problema de combinatória é fundamental e decisiva para resolvê-lo. Por isso, seguirei alguns passos nas soluções das questões a partir de agora:

1) Definir o conjunto de onde se deve retirar os elementos para a montagem das configurações.
2) Identificar a propriedade que determina a montagem das configurações.
3) Escolher a sequência de decisões que gere uma e somente uma configuração do tipo desejado, pois uma mesma configuração não pode ser gerada mais de uma vez.
4) Não devem ser feitas mais de uma escolha por decisão.
5) Variar as escolhas, de forma que todas as configurações possíveis sejam geradas.

OBS: A partir de agora iremos usar símbolo I I para indicar a cardinalidade de um conjunto.

Ex: seja A = { a, e, i, o, u }, então I A I = 5, indicando que o conjunto A possui 5 elementos ou possui cardinalidade igual a cinco.

Ex: Peças de dominó. Quantas peças de dominó existem?

Seja D = $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \}$ o conjunto formado pelos valores marcados nas peças de dominó.

Propriedade: Subconjuntos de dois elementos pertencentes à D.

Obs: Decisão$_1$ – será chamada de d_1 a partir de agora e assim por diante.

Obs: Levando-se em consideração que cada decisão gera um conjunto, iremos indicar a cardinalidade de tais conjuntos que refletem as possibilidades das decisões em questão.

d_1: Escolher um elemento de D para ocupar a primeira posição da peça de dominó. Temos 7 possibilidades.

d_2: Neste caso, temos de impor uma restrição na escolha, para não cairmos na regra 3), caso contrário, teríamos configurações (peças de dominó) repetidas. Com esses cuidados, podemos garantir as regras citadas anteriormente.

Temos então, de escolher um elemento de D maior ou igual ao escolhido em d_1 para ocupar a segunda posição da peça de dominó.

Isso nos força a dividir o problema em 7 casos diferentes, já que são 7 as escolhas de d_1.

1º caso – elemento escolhido em $d_1 = 0$ e $d_2 \geq d_1$, então d_2 pode ser 0, 1, 2, ..., 6.

Neste caso, Possibilidades de $d_1 = |d_1| = 1$ e Possibilidades de $d_2 = |d_2| = 7$.

Pelo principio multiplicativo, temos $|d_1| \times |d_2| = 1 \times 7 = 7$. Analogamente, teremos para:

2º caso - elemento escolhido em d_1 é o 1 e Possibilidades de

$d_2 = |d_2| = 6$, então, $|d_1| \times |d_2| = 1 \times 6 = 6$

3º caso - elemento escolhido em d_1 é o 2 e Possibilidades de

$d_2 = |d_2| = 5$, então, $|d_1| \times |d_2| = 1 \times 5 = 5$

4º caso - elemento escolhido em d_1 é o 3 e Possibilidades de

$d_2 = |d_2| = 4$, então, $|d_1| \times |d_2| = 1 \times 4 = 4$

5º caso - elemento escolhido em d_1 é o 4 e Possibilidades de

$d_2 = |d_2| = 3$, então, $|d_1| \times |d_2| = 1 \times 3 = 3$

6º caso - elemento escolhido em d_1 é o 5 e Possibilidades de

$d_2 = |d_2| = 2$, então, $|d_1| \times |d_2| = 1 \times 2 = 2$

7^o caso - elemento escolhido em d_1 é o 6 e Possibilidades de

d_2 = $|d_2|$ = 1, então, $|d_1| \times |d_2| = 1 \times 1 = 1$

Pelo princípio aditivo, teremos,

$|1^o caso| + |2^o caso| + \cdots + |7^o caso|$ = =7+6+5+4+3+2+1 = 28

Temos então, um total de 28 peças de dominó ou 28 configurações diferentes.

Embora possam resolver todos os problemas, os princípios de contagem podem tornar a resolução de alguns problemas, os que possuem muitas informações, extremamente difícil. Nestes casos, para resolvê-los, faremos o aluno perceber que o uso de ferramentas da Análise Combinatória, como Arranjos, Combinações e Permutações, tornará a questão bem mais simples.

1.4
Alguns problemas resolvidos apenas com os princípios fundamentais da contagem.

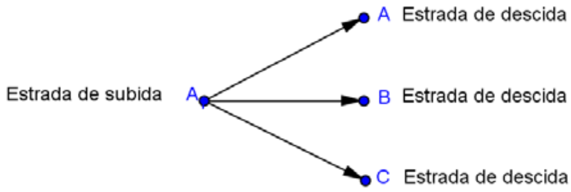
Problema 1: Três estradas A, B e C conduzem ao topo de um morro. De quantas maneiras diferentes uma pessoa pode subir e descer esse morro.

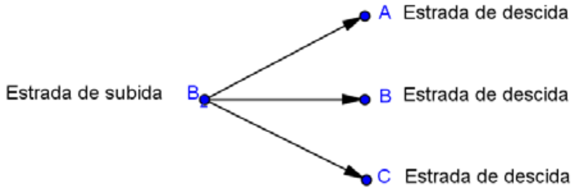
Solução:

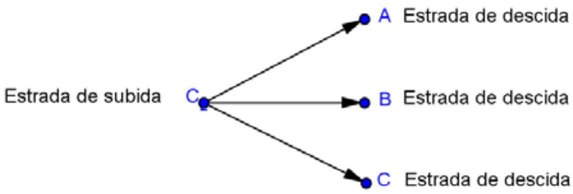
Seja E = $\{a, b, c\}$ o conjunto formado pelas estradas em questão.

Propriedade: Ordem linear de dois elementos onde o primeiro é a estrada de subida e o segundo é a estrada de descida.

Através de um esquema conhecido como árvores de possibilidades, podemos visualizar todas as possibilidades em questão. Tal sistema deve ser usado em sala de aula, no início, pois o mesmo ajuda o aluno a visualizar e entender o princípio multiplicativo.







d_1: Escolher um elemento de E(Estrada), para a subida. Temos três possibilidades, logo, $|d_1| = 3$

d_2: Escolher um elemento de E(Estrada), para a descida. Como não há qualquer restrição, teremos três possibilidades, logo, $|d_2| = 3$

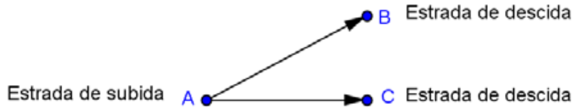
Pelo principio multiplicativo, temos que $|d_1| \times |d_2| = 3 \times 3 = 9$
Como para cada subida, temos três possibilidades de descida, teremos $3 \times 3 = 9$ modos diferentes.

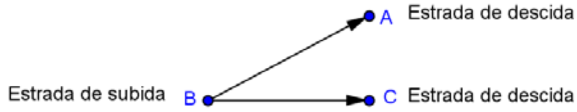
Problema 2: Suponhamos que no problema anterior a pessoa não queira descer o morro pela estrada que subiu. Quantos caminhos diferentes de ida e volta ela poderá fazer?

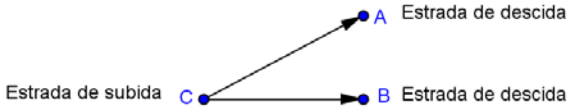
Solução:

Seja E = $\{a, b, c\}$ o conjunto formado pelas estradas em questão.

Propriedade: Ordem linear de dois elementos em que o primeiro é a estrada de subida e o segundo é a estrada de descida diferente da estrada de subida.







d_1: Escolher um elemento de E(Estrada), para a subida. Temos três possibilidades, logo, $|d_1|$ = 3

d_2: Escolher um elemento de E(Estrada), para a descida, diferente da escolhida em d_1. Neste caso temos uma restrição e com isso, teremos duas possibilidades, logo, $|d_2|$ = 2

Pelo princípio multiplicativo, temos que $|d_1| \times |d_2| = 3 \times 2 = 6$

Problema 3: De quantos modos 3 pessoas podem sentar-se em 7 cadeiras em fila?
Solução:

Seja C = $\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7\}$ o conjunto formado pelas sete cadeiras.

Propriedade: Ordem linear de três elementos(cadeiras).

d_1: Escolher uma cadeira para a primeira pessoa. Temos sete possibilidades, logo, $|d_1|$ = 7

d_2: Escolher uma cadeira para a segunda pessoa, diferente da escolhida em d_1, já que duas pessoas não podem sentar ao mesmo tempo numa mesma cadeira. Neste caso temos uma restrição e com isso, teremos seis possibilidades, logo, $|d_2|$ = 6

d_3: Escolher uma cadeira para a terceira pessoa, diferente das escolhidas em d_1 e d_2. Neste caso, teremos cinco possibilidades, logo, $|d_3|$ = 5

Pelo principio multiplicativo, temos que $|d_1| \times |d_2| \times |d_3| = 7 \times 6 \times 5 = 210$ configurações diferentes.

Problema 4: Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 10 questões de múltipla escolha, com cinco alternativas por questão?

Solução:

Seja C=$\{a, b, c, d, e\}$ *o conjunto formado pelas alternativas.*
Propriedade: Ordem linear de dez elementos sem restrições.

d_1:Escolher um elemento de C para 1º questão. Logo, $|d_1|$ = 5

d_2:Escolher um elemento de C para 2º questão. Logo, $|d_2|$ = 5

d_3:Escolher um elemento de C para 3º questão. Logo, $|d_3|$ = 5

Repetindo o processo de decisões até a 10ª questão, teremos pelo princípio multiplicativo:$|d_1| \times |d_2| \times |d_3| \times \ldots\ldots \times |d_{10}| = 5 \times 5 \times 5 \times \ldots \times 5 == 5^{10}$

Problema 5: Em uma banca de jornal há 5 exemplares iguais da revista A, 6 exemplares iguais da revista B e 10 exemplares iguais da revista C. Quantas coleções não vazias de revistas dessa banca é possível formar?

Solução:

Seja A=$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ o conjunto formado pelas quantidades de exemplares da revista A, B=$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ o conjunto formado pelas quantidades de exemplares da revista B e C=$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ o conjunto formado pelas quantidades de exemplares da revista C.

Propriedade: Ordem linear de três elementos, sendo um pertencente a A, um pertencente a B e um pertencente a C.

d_1: Escolha de um elemento de A. Logo, $|d_1|$ = 6

d_2: Escolha de um elemento de B. Logo, $|d_2|$ = 7

d_3: Escolha de um elemento de C. Logo, $|d_3|$ = 11

Pelo princípio multiplicativo, teremos, $|d_1| \times |d_2| \times |d_3| = 6 \times 7 \times 11 = 462$ coleções, sendo uma coleção vazia, representada pelos elementos 0 de cada conjunto, portanto, teremos 461 coleções não vazias.

Problema 6: Qual a quantidade de divisores positivos do número 72?

Solução:

Sejam X=$\{0,1,2,3\}$ e Y=$\{0,1,2\}$ respectivamente os conjuntos dos possíveis expoentes dos fatores primos 3 e 2 que aparecem na fatoração de 72 = 2^3 x 3^2 e que geram um divisor de 72. Um divisor de 72 é um número da forma $2^x \times 3^y\ com\ x \in X\ e\ y \in Y.$

Propriedade: Ordem linear de dois elementos, sendo o elemento do fator primo 2 pertencente a X e o elemento do fator primo 3 pertencente a Y.

d_1: Escolher um elemento de X para o expoente x do fator primo 2. Logo, $|d_1|$ = 4

d_2: Escolher um elemento de Y para o expoente do fator primo 3. Logo, $|d_2|$ = 3

Pelo princípio multiplicativo, teremos, $|d_1| \times |d_2| = 4 \times 3 = 12$ divisores positivos.

Problema 7: Quantas palavras podemos formar com todas as letras da palavra Brasil?

Solução:

Seja D = $\{b, r, a, s, i, l\}$ o conjunto das letras da palavra Brasil.

Propriedade: Ordem linear dos seis elementos de D sem restrições.

d_1: Escolha de um elemento de D para ocupar o primeiro caracter da palavra. Existem 6 letras, logo, $|d_1|$ = 6

d_2: Escolha de uma letra diferente da escolhida em d_1 para ocupar o segundo caracter da palavra. Restam 5 letras, logo, $|d_2|$ = 5

d_3: Escolha de uma letra diferente da escolhida em d_1 e d_2 para ocupar o terceiro caracter da palavra. Restam 4 letras, logo, $|d_3|$ = 4

d_4: Escolha de uma letra diferente da escolhida em d_1, d_2 e d_3, para ocupar o segundo caracter da palavra. Restam 3 letras, logo, $|d_4|$ = 3

d_5: Escolha de uma letra diferente das escolhidas anteriormente para ocupar o último caracter da palavra. Restam 2 letras, logo, $|d_5|$ = 2

d_6: Escolha de uma letra diferente das escolhidas anteriormente para ocupar o último caracter da palavra. Só resta uma letra, logo, $|d_6|$ = 1

Pelo princípio multiplicativo, teremos, $|d_1| \times |d_2| \times |d_3| \times |d_4| \times |d_5| \times |d_6| = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ Palavras distintas.

OBS: O que foi feito nesse exercício, nada mais é do que o cálculo da quantidade de permutações da palavra Brasil ou a quantidade de anagramas. Dessa forma podemos mostrar ao aluno um novo conceito e generalizar tal conceito deixando claro que o uso da fórmula, nada mais é do que a compreensão de tal tema. Isso é o que será feito no próximo capítulo.

Capítulo II

Definições e Soluções de Problemas envolvendo Permutações, combinações e Arranjos

A partir desse momento, após a compreensão dos princípios fundamentais da contagem e dos conceitos que aqui serão apresentados, os alunos serão capazes de compreender as fórmulas, tendo em mente todos os passos utilizados no capítulo anterior e acabarão concluindo que usar as fórmulas na verdade é queimar as etapas anteriores, encurtando a solução. Devemos lembrar que essa é a hora de apresentarmos aos alunos um novo conceito, o de fatorial, bem como sua aplicação.

Embora o conhecimento das fórmulas seja útil, principalmente quando ao resolver um problema for possível enquadrá-lo como um dos conceitos que serão descritos (e, consequentemente, na técnica correspondente), tal conhecimento não substitui a posse de um raciocínio combinatório, aprendido através da plena compreensão dos Princípios Multiplicativo e Aditivo, e da articulação dos dois em uma mesma situação, quando necessário. Por isso, para cada conceito neste capítulo, será apresentado um problema com uma solução em que usou-se apenas o princípio multiplicativo e uma solução usando a definição. O objetivo é fazer o aluno perceber que o uso do conceito (fórmula), em muitos casos, facilita e encurta a solução.

2.1
Permutações Simples

Sejam 2 objetos distintos, $o_1 \, _e \, o_2$, ordenados em fila. Vamos contar todas as configurações com esses dois objetos ordenados em fila. Neste caso, temos $o_1\, o_2$ e $o_2\, o_1$, duas configurações. Podemos pensar da seguinte forma: Para a primeira posição da configuração, temos dois objetos para serem escolhidos, já para a segunda posição só nos resta um objeto. Logo, pelo princípio multiplicativo, teremos 2×1= 2 configurações.

Vamos agora pegar três objetos a b c e listar as configurações desses três objetos ordenados em fila. Teremos a b c, a c b, b a c, b c a, c a b, c b a, num total de seis configurações. Pelo mesmo raciocínio, temos três escolhas para a primeira posição, duas para a segunda e apenas uma para última posição. Logo, pelo princípio multiplicativo, teremos $3 \times 2 \times 1 = 6$ configurações diferentes. Podemos observar que para uma quantidade pequena de objetos fica fácil listar as configurações. Agora vamos generalizar.

Sejam n objetos distintos, ordenados em fila. Quantas configurações de n objetos ordenados em fila existem?

Cada configuração desses n objetos recebe o nome de *permutação simples*. O número de configurações das ordenações possíveis, ou seja, o número de permutações dos objetos dados é denotado por P_n.

O raciocínio é o seguinte: para escolher o 1° elemento da ordenação, temos n opções; escolhido o 1°, restam apenas (n – 1) opções para o segundo (não podemos usar o elemento já escolhido para ocupar a 1ª posição). Esse raciocínio prossegue, até que, para escolher o último elemento, resta apenas uma opção (o único elemento que ainda não foi escolhido). Pelo Princípio Fundamental da Contagem, o total de maneiras de ordenar tais objetos em fila ou o número de permutações simples desses objetos é igual a: $n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 3 \times 2 \times 1 = n!$, onde se lê (n fatorial) e é representado pelo produto em questão. Então, $P_n = n!$

Problema 8: Quantos números de 4 algarismos distintos podemos escrever com os algarismos 2,4, 6 e 8?

Solução sem uso de fórmula:

Seja D = $\{ 2, 4, 6, 8 \}$ o conjunto dos algarismos em questão.

Propriedade: ordem linear de 4 algarismos distintos.

d_1: Escolher o 1º algarismo. Como são 4 algarismos diferentes, temos 4 possíveis escolhas, logo, $|d_1|$ = 4

d_2: Escolher o 2º algarismo diferente do escolhido em d_1. Como restam 3 algarismos diferentes, temos 3 possíveis escolhas, logo, $|d_2|$ = 3

d_3: Escolher o 3º algarismo diferente dos escolhidos anteriormente. Como restam 2 algarismos diferentes, temos 2 possíveis escolhas, logo, $|d_3|$ = 2

d_4: Escolher o 2º algarismo diferente dos escolhidos anteriormente. Como só resta 1 algarismo diferente, temos 1 possível escolha, logo, $|d_4|$ = 1
Pelo Princípio Multiplicativo, teremos $|d_1| \times |d_2| \times |d_3| \times |d_4| = 4 \times 3 \times 2 \times\times 1 = 24$ números.

Solução com uso de fórmula:

Queremos todas as ordenações de 4 dígitos com os algarismos fornecidos, ou seja, queremos as permutações desses 4 dígitos. Pela definição, teremos $P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ números.

Problema 9: Uma bibliotecária recebeu uma doação de 3 livros diferentes de Matemática, 4 livros diferentes de Química e 3 livros diferentes de Física. De quantas formas ela poderá arrumá-los em uma prateleira de livros novos?

Solução:

Podemos pensar em cada livro diferente como sendo a letra de uma palavra e então, nesse caso, cairíamos num problema de anagramas que é calculado pela fórmula já vista. Como temos um total de 3 livros diferentes de Matemática + 4 livros diferentes de Química + 3 livros diferentes de Física = 10 livros diferentes, teremos $P_{10} = 10! = 3.628.800$ formas diferentes de arrumá-los em uma prateleira.

2.2
Permutações com Repetição

Seja aab uma coleção com objetos nem todos distintos. Vamos listar todas as permutações com esses três objetos: aab, aba, baa, num total de três permutações.

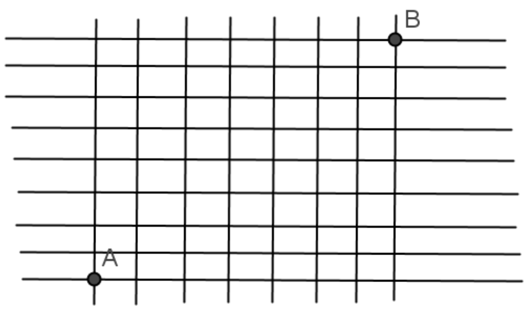
Olhemos agora para a seguinte coleção: aabb. Vamos então listar todas as permutações com esses quatro objetos: aabb, abab, bbaa, baba, baab, abba, num total de seis permutações. Se aumentarmos a quantidade de objetos, teremos mais dificuldade em listar as permutações. Vamos então generalizar o nosso problema.

Se há n objetos, com r_1 objetos iguais do tipo 1, r_2 objetos iguais do tipo 2, ... , r_m objetos iguais do tipo m, onde $r_1 + r_2 + ... + r_m$ = n, então todas as permutações distintas geradas pelos objetos recebem o nome de *permutações com repetição* desses objetos e essa quantidade total é denotada por $P_n^{r_1,r_2,...,r_m}$. Então, Quantas permutações com esses n objetos existem?

Se disséssemos que são n! permutações, estaríamos calculando as permutações simples desses n objetos, portanto, estaríamos contando permutações de objetos iguais como se fossem diferentes, mas sabemos que existem objetos repetidos. Então, Para descontarmos o que foi contado a mais, devemos dividir pelo número de permutações de cada objeto igual, presente no conjunto.

Com isso, teremos $P_n^{r_1,r_2,...,r_m} = \frac{n!}{r_1!\,r_2!\,...r_m!}$ permutações com repetição.

Problema 10: A figura ao lado representa 17 ruas que se cortam perpendicularmente, sendo 8 verticais e 9 horizontais. Quantos caminhos mínimos uma pessoa pode percorrer para ir do ponto A ao ponto B?



Solução sem uso de fórmula:

Seja C = $\{H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, H_7, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7, V_8\}$ o conjunto das direções a serem seguidas para que saindo de A se chegue a B.

Propriedade: Ordem linear dos 15 elementos de C ou quantidade de anagramas da palavra formada por tais consoantes. Os índices foram colocados para representarmos o conjunto C, logo devemos lembrar que so existem duas direções, horizonta e vertical.

d_1: Escolher o 1º elemento. Como são 15 consoantes, temos 15 possíveis escolhas, logo, $|d_1|$ = 15

d_2: Escolher o 2º elemento. Como sobraram 14 consoantes, temos 14 possíveis escolhas, logo, $|d_2|$ = 14

Repetiremos tal processo até que se acabe todas as consoantes, ou seja, teremos 15 decisões.
Pelo Princípio Multiplicativo, teremos $|d_1| \times |d_2| \times |d_3| \times ... \times |d_{15}| = 15 \times 14 \times 13 \times ... \times 2 \times 1$.

Mas temos um problema, pois as palavras formadas possuem letras repetidas, de tal forma que se não descontarmos as repetições, estaremos contando palavras como se tivessem letras todas distintas. Como temos 9 letras de um tipo e 8 letras de outro tipo, descontaremos as palavras repetidas, dividindo o resultado anterior pelas permutações das 8 letras iguais de um tipo e pelas 7 letras iguais de outro tipo. Com isso, teremos, $\frac{15!}{8!7!}$ = 6.435 caminhos diferentes.

Solução com uso da fórmula:

Podemos observar que a sequência de caminhos H, H, V,......,V nada mais é do que uma palavra com letras repetidas. Então, se calcularmos os anagramas de tal palavra, acharemos todos os possíveis caminhos. De acordo com a definição, teremos permutações com repetições, que se calculam da seguinte maneira:
$P_{15}^{8,7} = \frac{15!}{8!7!}$ = 6.435 caminhos diferentes.

Problema 10: (A loteria esportiva era um jogo muito popular nos anos 80 e 90 que consistia em marcar um cartão com treze jogos do campeonato Brasileiro, onde havia três opções para cada jogo: vitória, empate ou derrota e cada opção era representada por uma coluna. Ganhava o prêmio aquele que fizesse os treze pontos.)

Ao preencher um cartão da loteria esportiva, André optou pelas seguintes marcações: 4 colunas um, 6 colunas do meio e 3 colunas dois. De quantas maneiras distintas André poderá marcar os cartões?

Solução:

Podemos pensar nos três tipos de coluna como sendo três letras diferentes e nas 13 colunas como sendo uma palavra de 13 letras. Nesse caso, nosso problema se resume a calcular os anagramas da palavra formada com letras repetidas. Então teremos, $P_{13}^{4,6,3} = \frac{13!}{4!*6!*3!} = 60.060$ maneiras distintas de marcar os cartões.

2.3 Arranjos Simples

Seja abc um grupo com 3 objetos distintos. Vamos então listar todos os grupos com dois desses três objetos distintos: ab, ac, ba, bc, ca, cb, num total de seis grupos com dois objetos distintos.

Vamos pegar agora, abcd, um grupo com 4 objetos distintos e listemos todos os grupos com dois desses quatro objetos distintos: ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc, num total de 12 grupos de dois objetos distintos.

Se listássemos os grupos com três desses quatro objetos distintos, teríamos um total de 24 grupos. Podemos então observar que mesmo com uma quantidade pequena de objetos não é tão simples listar os grupos, imaginem com uma grande quantidade de objetos. Vamos então generalizar o nosso problema.

Arranjos simples são todos os grupos de k elementos distintos, escolhidos de um grupo de n elementos (onde $k \leq n$), que diferem entre si pela ordem e pela natureza dos k elementos. A quantidade total desses grupos é denotada por $A_{n,k}$ ou A_n^k.

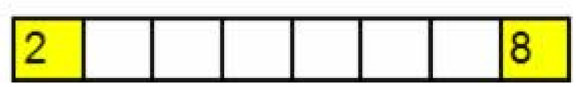
Então, quantos grupos de k elementos distintos podemos tirar de um grupo de n elementos?

$$A_{n,k} = A_n^k = n\,(n-1)(n-2)\,.\,.\,.(n-k+1) \times \frac{(n-k)!}{(n-k)!} =$$

$\frac{n\,(n-1)(n-2)\,.\,.\,.\,(n-k+1)\,(n-k)(n-k-1)\,.\,.\,.\,3\times2\times1}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$ Podemos pensar da seguinte maneira: para escolhermos o primeiro dos k elementos, temos n opções; uma vez tendo escolhido um dos n elementos, este não pode mais ser utilizado, restando (n – 1) opções para escolher o 2° elemento; o raciocínio prossegue o mesmo até a escolha do k-ésimo elemento, que pode ser feita de (n – k + 1) maneiras. Então, pelo princípio multiplicativo, temos que o total de modos de escolher os k elementos é dado pelo produto: $n\,(n-1)(n-2)\,.\,.\,.(n-k+1)$. Multiplicando essa expressão por $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$, chega-se à $A_{n,k} = A_n^k = n\,(n-1)(n-2)\,.\,.\,.(n-k+1) \times \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n\,(n-1)(n-2)\,.\,.\,.\,(n-k+1)\,(n-k)(n-k-1)\,.\,.\,.\,3\times2\times1}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$

Temos então, $A_{n,k} = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Problema 11: Um número de telefone é formado por 8 algarismos. Determine quantos números de telefone podemos formar com algarismos diferentes, que comecem com 2 e terminem com 8.



solução sem uso de fórmula:

Seja D = $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ o conjunto dos dígitos em questão.

Propriedade: ordem linear de 8 dígitos distintos, onde o 1º dígito é o 2 e o 8º dígito é o 8.

d_1: Escolher o 2º dígito. Como são 10 dígitos diferentes e dois já foram fixados(o alg 2 e o alg 8) temos 8 possíveis escolhas, logo, $|d_1|$ = 8

d_2: Escolher o 3º dígito diferente do escolhido em d_1. Como só restam 7, temos 7 possíveis escolhas, logo, $|d_2|$ = 7

d_3: Escolher o 4º dígito diferente do escolhido em d_1 e d_2, . Como só restam 6, temos 6 possíveis escolhas, logo, $|d_3|$ = 6

d_4: Escolher o 5º dígito diferente dos escolhidos anteriormente . Como só restam 5, temos 5 possíveis escolhas, logo, $|d_4|$ = 5

d_5: Escolher o 6º dígito diferente dos escolhidos anteriormente . Como só restam 4, temos 4 possíveis escolhas, logo, $|d_5|$ = 4

d_6: Escolher o 7º dígito diferente dos escolhidos anteriormente . Como só restam 3, temos 3 possíveis escolhas, logo, $|d_6|$ = 3

Pelo Princípio Multiplicativo, teríamos $|d_1| \times |d_2| \times |d_3| \times |d_4| \times |d_5| \times |d_6| = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 20.160$ números de telefone.

solução com uso de fórmula:

Para formar o número de telefone, já que foram fixados dois algarismos, o 2 no primeiro dígito e o 8 no último dígito, teremos de escolher seis números distintos de um total de 8, observando que a ordem interfere na escolha dos números de telefone. De acordo com a definição, estamos diante de um problema de arranjo simples (devemos escolher 6 números distintos de um grupo de 8 números, onde a ordem interfere na escolha). A quantidade de números de telefone é dada por $A_{8,6} = \frac{8!}{(8-6)!} = \frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2!}{2!} = 20.160$ números de telefone.

Problema 12: Em uma empresa, quinze funcionários se candidataram para as vagas de diretor e vice-diretor financeiro. Eles serão escolhidos através do voto individual dos membros do conselho da empresa. Vamos determinar de quantas maneiras distintas essa escolha pode ser feita.

Solução:

Para preencher as duas vagas, teremos de escolher dois funcionários distintos entre 15 funcionários no total, observando que a ordem da escolha irá interferir nas vagas. Estamos diante de um problema de arranjo e teremos $A_{15,2} = \frac{15!}{(15-2)!}\frac{15\times14\times13!}{13!} = 210$

2.4
Combinações Simples

Imaginemos o conjunto dos principais times cariocas, T = {Flamengo, Vasco, Botafogo, Fluminense}. Agora vamos listar os subconjuntos com dois desses times cariocas: {Flamengo, Vasco}, {Flamengo, Botafogo}, {Flamengo, Fluminense}, {Vasco, Botafogo}, {Vasco, Fluminense}, {Botafogo, Fluminense}, num total de seis subconjuntos.

Vamos listar agora, os subconjuntos com três desses times: {Flamengo, Vasco, Botafogo}, {Flamengo, Vasco, Fluminense}, {Flamengo, Botafogo, Fluminense}, {Vasco, Botafogo, Fluminense} num total de quatro subconjuntos. Neste caso, diferentemente dos arranjos onde a ordem dos objetos gera novas configurações, a ordem é irrelevante, por isso, temos de pensar em conjuntos e subconjuntos para as coleções de objetos e combinações desses objetos. Mais uma vez, podemos observar que com um conjunto com poucos elementos fica fácil listar as combinações dos elementos, o que não acontece com um conjunto muito grande. Vamos então, pensar no caso geral.

Seja A um conjunto com n elementos. Combinações simples de n elementos tomados p a p ($0 \leq p \leq n$) são os subconjuntos de A com exatamente p elementos que se podem formar com os n elementos dados. Lembrando que subconjuntos diferem entre si não pela ordem, mas apenas pela natureza de seus elementos. A quantidade total desses subconjuntos é denotada por $C_{n,p}$ ou C_n^p.

Quantos subconjuntos de p elementos, podemos extrair de um conjunto com n elementos?

Se usássemos o mesmo raciocínio feito para os arranjos simples chegaríamos a $\frac{n!}{(n-p)!}$, mas nesse caso, a ordem entre os p elementos escolhidos é irrelevante, e por isso, a permutação das ordenações possíveis entre esses p elementos não deve ser considerada. Para descontarmos essas permutações, basta dividir a expressão $\frac{n!}{(n-p)!}$ por p! chegando, assim, à fórmula $C_{n,p} = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Por convenção, temos que 0! =1, logo, $C_n^0 = C_n^n = 1$

Problema 13: Quantas saladas de fruta contendo exatamente 4 frutas distintas podemos formar se dispomos de 10 frutas diferentes?

Solução sem uso de fórmula:

Seja F = $\{f_1, f_2, f_3, . . . , f_{10}\}$ o conjunto das frutas em questão.

Propriedade: ordem linear de quatro frutas

d_1: Escolher a 1ª fruta. Como são 10 frutas diferentes, temos 10 possíveis escolhas, logo, $|d_1|$ = 10

d_2: Escolher a 2ª fruta diferente da escolhida em d_1. Como só restam 9 frutas diferentes, temos 9 possíveis escolhas, logo, $|d_2|$ = 9

d_3: Escolher a 3ª fruta diferente das escolhidas em d_1 e d_2. Como só restam 8 frutas diferentes, temos 8 possíveis escolhas, logo, $|d_3|$ = 8

d_4: Escolher a 4ª fruta diferente das escolhidas anteriormente. Como só restam 7 frutas diferentes, temos 7 possíveis escolhas, logo, $|d_4|$ =7

Pelo Princípio Multiplicativo, teríamos $|d_1| \times |d_2| \times |d_3| \times |d_4| = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$ opções de salada. Mas, por exemplo, uma salada com maçã, banana, laranja e abacaxi, não é diferente de uma salada com banana, maçã, laranja e abacaxi (a ordem de escolha das frutas não interfere na salada final). Assim, devemos dividir o resultado obtido pelo número de permutações entre as 4 frutas, para descontar o que foi contado a mais. A solução é, portanto, $\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1} = 210$ saladas.

Solução com uso de fórmula:

Para montar a salada precisamos escolher 4 frutas distintas, de um total de 10 frutas distintas, em que a ordem de escolha não interfere na salada que será obtida. Trata-se portanto, de acordo com a definição, de um problema de combinação simples (devemos combinar as 10 frutas, em grupos de 4 frutas, ou seja, queremos subconjuntos de quatro elementos de um conjunto de 10 elementos). O número de saladas é $C_{10,4} = \frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1} = 210$

Problema 14: Quantas são as peças de um dominó comum?

Solução:

As pedras de um dominó comum são marcadas com valores de zero até 6. Então seja $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ o conjunto dos valores que irão marcar as pedras. Cada pedra é marcada com dois valores, portanto estamos procurando subconjuntos de V, com dois elementos distintos. Queremos então, as combinações dos sete elementos de V tomados 2 a 2. Logo, $C_7^2 = 21$. Mas as combinações simples não calculam subconjuntos de dois elementos repetidos, o que seria necessário para calcular as pedras do tipo 0 e 0, 1 e 1, ..., 6 e 6. Portanto, devemos somar a 21, as sete pedras com valores repetidos, totalizando as 28 pedras procuradas.

Problema 15: Uma importante aplicação de combinação simples é nas loterias: Megassena, quina entre outras. A megassena consiste em uma cartela de 60 números dentre os quais devemos acertar 6 (prêmio principal). Calcule a quantidade total de resultados possíveis para o prêmio principal.

Solução:

Para marcar um cartão, precisamos escolher 6 entre 60 números, em que a ordem de escolha não interfere no cartão que será marcado. Trata-se portanto, de acordo com a definição, de um problema de combinação simples (devemos combinar 60 números, em grupos de 6 números, ou seja, queremos subconjuntos de 6 elementos de um conjunto de 10 elementos). O número de cartões é $C_{60}^{6} = \frac{60\times59\times58\times57\times56\times55}{6\times5\times4\times3\times2\times1} = 50.063.860$

2.5
A Relação entre Combinação e Arranjo

Se temos *n* elementos e desejamos escolher *p* deles, de tal forma que a ordem com que fazemos tais escolhas não seja importante, dizemos que queremos a combinação simples de *n* elementos tomados *p* a *p*. Usamos a notação C_n^p para designar a combinação de *n objetos* tomados *p* a *p*. Vimos anteriormente que o número de arranjos simples de *n* elementos tomados *p* a *p* são todos os grupos de p elementos distintos, escolhidos de um grupo de n elementos (onde $p \leq n$), que diferem entre si pela ordem e pela natureza dos p elementos é dado por $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

.Embora a ordem seja importante num arranjo simples, ela deixa de ser numa combinação simples. Então para cada combinação particular de *n* elementos *p* a *p* (onde não importa a ordem), podemos fazer a permutação de seus *p* elementos, de forma que obtemos todos os arranjos de *n* elementos tomados *p* a *p* (onde importa a ordem). Dessa forma, fica claro que $A_n^p = P_p C_n^p$, isto é, $C_n^p = A_n^p \frac{1}{P_p} = \frac{n!}{(n-p)!}\frac{1}{P!} = \frac{n!}{P!(n-p)!}$

Fazer o aluno perceber que existe uma relação entre combinação e arranjo irá ajudá-lo a perceber a sutil diferença entre tais conceitos que se resume à importância ou não da ordem, além de familiarizá-lo com as expressões de tais conceitos.

Capítulo III

Permutações Circulares, Combinações Completas e o Princípio de Dirichlet

3.1
Permutações Circulares

Imaginemos uma criança numa roda de ciranda. Vamos ver de quantas maneiras diferentes ela pode se sentar. Vamos Chamar de C1, a referida criança.

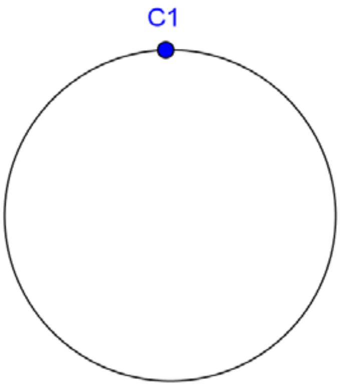


Figura -a

Neste caso, só existe essa possibilidade, já que esta criança é a única na roda de ciranda.

Imaginemos duas crianças numa roda de ciranda. Vamos ver de quantas maneiras diferentes elas podem se sentar. Chamemos de C1 e C2 as duas crianças.

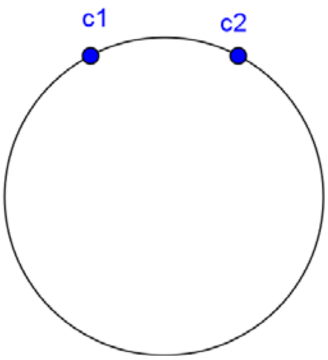


Figura -1a

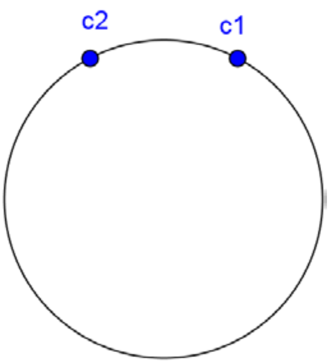


Figura -1b

Só existe uma maneira das crianças se sentarem que é C2 sentar-se imediatamente após C1, ou seja, as duas configurações são iguais.

Só existe uma maneira das crianças se sentarem que é C2 sentar-se imediatamente após C1, ou seja, as duas configurações são iguais.

Vamos então pegar três crianças, colocar na roda de ciranda e ver de quantas maneiras elas podem se sentar. Vamos, agora, chamá-las de C1, C2 e C3.

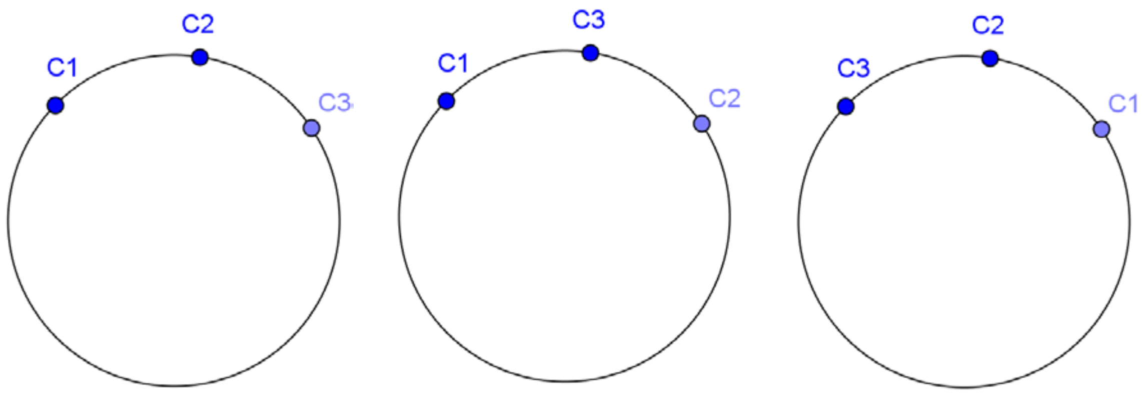


Figura -2a Figura -2b Figura -2c

Neste caso, só existem duas maneiras das crianças se sentarem, que é C3 sentar-se entre C1 e C2 ou C3 sentar-se após C2. Observe que nas figuras 2a e 2c a posição relativa das crianças é a mesma, logo temos a mesma configuração. Qualquer outra disposição das crianças na roda de ciranda, coincidirá em posição relativa e trará configurações repetidas.

Mais uma vez, podemos observar que para uma quantidade pequena de objetos, fica fácil listarmos as configurações, o que não acontece com uma quantidade grande. Então, vamos generalizar o nosso problema.

Permutações circulares são as permutações de n objetos dispostos em círculo, em que diferentemente das permutações simples em que importam os lugares que os objetos ocupam, nas permutações circulares o que importa é apenas a posição relativa dos objetos entre si. A quantidade total de permutações circulares de n objetos é denotada por $(PC)_n$. De quantos modos podemos colocar n objetos distintos em n lugares em torno de um círculo, se considerarmos equivalentes disposições que possam coincidir por rotação?

Para entendermos este raciocínio podemos pensar da seguinte maneira:

Como o importante é a posição relativa dos objetos, há apenas um modo de colocarmos o $1^{\underline{o}}$ objeto no círculo, pois onde ele for colocado, será o único no círculo. Também só há um modo de colocar o $2^{\underline{o}}$ objeto no círculo, que é imediatamente após o $1^{\underline{o}}$. Há dois modos de colocar o $3^{\underline{o}}$ objeto no círculo que é entre o $1^{\underline{o}}$ e o $2^{\underline{o}}$ ou após o $2^{\underline{o}}$. Há três modos de colocar o $4^{\underline{o}}$ objeto no círculo que é entre o $1^{\underline{o}}$ e o $2^{\underline{o}}$, entre o $2^{\underline{o}}$ e o $3^{\underline{o}}$ ou após o $3^{\underline{o}}$. Continuando com esse raciocínio até o n-ésimo objeto, teremos neste, (n-1) modos de colocá-lo no círculo. Então pelo princípio multiplicativo, teremos: $1 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (n-2)(n-1) = (n-1)! = (PC)_n$

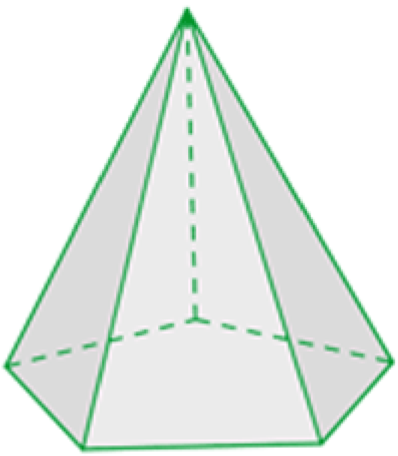
Problema 16: De quantos modos 5 pessoas podem se dispor em torno de uma mesa circular?

Solução:

A questão torna-se até fácil, a partir do momento que se compreende o conceito de permutação circular e a justificativa para seu cálculo. Tendo identificado a questão como um problema de permutação circular, só nos resta aplicar a fórmula. $(PC)_5 = (5 - 1)! = 4! = 24$ disposições.

Problema 17: De quantos modos se pode pintar as faces de uma pirâmide pentagonal regular, usando 6 cores diferentes, sendo cada face de uma cor?

Solução:



Vamos começar pela base da pirâmide. Com 6 cores, temos 6 possibilidades de pintar a base.

Agora, passemos para as faces. Temos 5 cores restantes para pintar as cinco faces. Temos de pintar as faces com cores diferentes, então podemos fazer uma analogia com o problema das crianças (cores) numa roda de ciranda. Então, pintar as faces se traduz num problema de permutações circulares e é calculado por $(PC)_5 = (5 - 1)! = 4! = 24$. Pelo princípio multiplicativo, temos $6 \times 24 = 144$ modos diferentes de pintar a pirâmide.

3.2
Combinações Completas

Combinações completas de n elementos tomados k a k, são combinações de k elementos não necessariamente distintos, escolhidos entre n elementos distintos.

Denotamos por CR_n^k as combinações completas de k elementos, escolhidos entre n elementos, ou seja, é o número de maneiras de escolher k objetos dentre n, podendo haver repetição.

Por exemplo: Seja A= $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Vamos Calcular CR_5^3 listando todas as combinações e depois iremos estabelecer uma bijeção com o conjunto de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3$, da seguinte maneira:

Ao invés do conjunto A, vamos considerar a quina ordenada, A = (1, 2, 3, 4, 5), para fixarmos as posições dos elementos do conjunto A e para mantermos uma relação entre as coordenadas da quina ordenada A e as respectivas coordenadas das novas quinas ordenadas que serão geradas. Cada combinação criada é transformada, pela função bijetora, numa quina ordenada de tal forma que cada coordenada representa a quantidade de vezes que os elementos de A aparecem na combinação e cuja soma das coordenadas é 3. Dessa forma, da combinação 1 1 1, teremos a quina ordenada (3, 0, 0, 0, 0), onde a coordenada 3 informa que o algarismo 1 aparece três vezes na combinação e os zeros informam que os demais algarismos não aparecem na combinação. Com essa ideia, temos todas as transformações listadas:

1 1 1 → (3, 0, 0, 0, 0)
2 2 2 → (0, 3, 0, 0, 0)
3 3 3 → (0, 0, 3, 0, 0)
4 4 4 → (0, 0, 0, 3, 0)
5 5 5 → (0, 0, 0, 0, 3)
1 1 2 → (2, 1, 0, 0, 0)
1 1 3 → (2, 0, 1, 0, 0)
1 1 4 → (2, 0, 0, 1, 0)
1 1 5 → (2, 0, 0, 0, 1)
2 2 1 → (1, 2, 0, 0, 0)
2 2 3 → (0, 2, 1, 0, 0)
2 2 4 → (0, 2, 0, 1, 0)
2 2 5 → (0, 2, 0, 0, 1)
4 4 1 → (1, 0, 0, 2, 0)
4 4 2 → (0, 1, 0, 2, 0)
4 4 3 → (0, 0, 1, 2, 0)
4 4 5 → (0, 0, 0, 2, 1)
5 5 1 → (1, 0, 0, 0, 2)
5 5 2 → (0, 1, 0, 0, 2)
5 5 3 → (0, 0, 1, 0, 2)
5 5 4 → (0, 0, 0, 1, 2)
1 2 3 → (1, 1, 1, 0, 0)
1 2 4 → (1, 1, 0, 1, 0)
1 2 5 → (1, 1, 0, 0, 1)
1 3 4 → (1, 0, 1, 1, 0)
1 3 5 → (1, 0, 1, 0, 1)

3 3 1 $\rightarrow$ (1, 0, 2, 0, 0)
3 3 2 $\rightarrow$ (0, 1, 2, 0, 0)
3 3 4 $\rightarrow$ (0, 0, 2, 1, 0)
3 3 5 $\rightarrow$ (0, 0, 2, 0, 1)
1 4 5 $\rightarrow$ (1, 0, 0, 1, 1)
2 3 4 $\rightarrow$ (0, 1, 1, 1, 0)
2 3 5 $\rightarrow$ (0, 1, 1, 0, 1)
2 4 5 $\rightarrow$ (0, 1, 0, 1, 1)
3 4 5 $\rightarrow$ (0, 0, 1, 1, 1)

Podemos observar que as 35 quinas ordenadas são todas as soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3$.

É óbvio que para valores pequenos fica fácil listarmos as combinações e achar todas as soluções da equação em questão.

De um modo geral o conjunto de escolhas de k objetos dentre n, com repetição, está em bijeção com o conjunto de soluções da equação $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$. Então, para acharmos as soluções procuradas, pensaremos da seguinte maneira:

Dada uma solução $(x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,x_n)$ qualquer, substituiremos cada número não nulo da solução por igual quantidade de símbolos ‘’I’’ na equação, mantendo-se todos os sinais de adição que em nosso caso geral são (n – 1) sinais “ + “. Os zeros da solução serão substituídos por espaços vazios .

Por exemplo, na equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3$, temos as soluções (0, 0, 3, 0, 0) e (0, 2, 1, 0, 0) que serão representados por 0+0+I I I+0+0 e 0+I I+I+0+0, que ao eliminarmos os zeros teremos, + + I I I + + e + I I + I + + respectivamente. Com isso, se contarmos todos os anagramas de uma dessas palavras formadas por esses símbolos, estaremos contando todas as soluções procuradas.

Então, em nosso caso geral, teremos k símbolos ‘’I’’, já que a soma das coordenadas é sempre igual a k e (n – 1) sinais “ + “ que formarão uma palavra do tipo $\underbrace{+\ +\ +\ldots+}_{n-1\ vezes}\underbrace{I\,I\ldots I}_{k\ vezes}$.

Basta então, calcularmos os anagramas de tal palavra que acharemos as soluções da equação geral, o que já sabemos fazer através de permutações com repetição. Logo, $CR_n^k = P_{n-1+k}^{n-1,\ k} = \frac{(n-1+k)!}{(n-1)!(k)!} = C_{n+k-1}^{k} = C_{n+k-1}^{n-1}$

Problema 18: De quantas maneiras é possível escolher 5 balas em um grande pacote que possui 9 sabores distintos?

Solução:

Ao tentar solucionar o problema temos uma tendência a pensar que a resposta é C_9^5 = 126. Na verdade, C_9^5 seria o número de maneiras de escolher sabores diferentes entre os 9 oferecidos, ou seja, seria o número de maneiras de escolher 5 balas diferentes em um pacote que possui 9 balas.

A solução desse problema é representada por CR_9^5, número de combinações completas de classe 5 de 9 objetos. Assim, CR_9^5, é o número de maneiras de escolher 5 objetos distintos ou não entre 9 objetos distintos, podendo escolher o mesmo objeto mais de uma vez.

Para solucionar o problema podemos chamar x_1 a quantidade de balas do 1º sabor, x_2 a quantidade de balas do 2º sabor, . . . , x_9 a quantidade de balas do 9º sabor. Logo, escolher 5 balas em um grande pacote que possui 9 sabores distintos estará associado a uma solução em inteiros não negativos da equação $x_1 + x_2 + . . . + x_9 = 5$:

Sabemos que CR_9^5, é o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + . . . + x_9 = 5$

Vamos, mais uma vez, solucionar esta equação representando cada solução por uma fila de sinais ''I'' e ''+''. Por exemplo, as soluções abaixo serão representadas da seguinte maneira:

1) (3, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) → I I I + I + + + + + + + I
2) (0, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) → + I I I I I + + + + + + +
3) (1, 0, 2, 0, 1, 0, 1, 0, 0) → I + + I I + + I + + I + +

Então, achar as soluções procuradas é o mesmo que calcular os anagramas ou as permutações de uma das palavras acima, representadas pelos símbolos ''I'' e ''+''.

Podemos calcular pensando em permutações com repetições ou usar a formula das combinações completas.

$P_{13}^{5,8} = CR_9^5 = C_{13}^5 = \frac{13!}{5! * 8!} = 1.287$ escolhas

Problema 19: De quantas maneiras é possível colocar 6 anéis diferentes em 4 dedos? E se os anéis fossem todos iguais?

Solução:

Podemos pensar em combinações completas e olhar para a seguinte equação: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$, onde as variáveis representam os dedos.

A solução de tal equação, pelo o que já foi visto é $CR_4^6 = C_9^6 = 84$. Sem dúvidas, essa é a solução da equação, mas não é solução da questão, já que os anéis são diferentes, logo, a ordem em que são colocados altera a configuração, de tal forma que se permutarmos os seis anéis em uma determinada configuração, teremos todas as possíveis variações para a configuração em questão. Então, pelo princípio multiplicativo, teremos a solução da equação em questão multiplicada pela permutação dos seis anéis diferentes, logo, teremos $84 \times P_6 = 84 \times 6! = 84 \times 720 = 60.480$ maneiras.

Se os anéis forem todos iguais, a questão já estará resolvida, já que não mais é preciso permutar os seis anéis. Nesse caso, a solução é a solução da equação citada anteriormente, portanto, 84 maneiras.

Problema 20: Quantas são as peças de um dominó comum?

Agora podemos voltar a essa questão que foi abordada no início deste trabalho, usando-se apenas o princípio multiplicativo e depois usando-se combinação simples, em ambos os casos, percebeu-se que sempre faltava alguma coisa a mais para solução da questão e precisou-se dividir o problema em casos. Com o conhecimento de combinações completas, a solução agora sai em poucas linhas, senão vejamos:

Solução:

As pedras de um dominó comum são marcadas com valores de zero até 6. Então seja $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ o conjunto dos valores que irão marcar as pedras. Cada pedra é marcada com dois valores, logo, estamos procurando subconjuntos de V, com dois elementos distintos ou não. Queremos então, as combinações completas dos sete elementos de V tomados 2 a 2. Logo, $CR_7^2 = C_8^2 = 28$ peças de dominó.

Problema 21: Uma fábrica receberá 20 novos funcionários, entre tratoristas, operadores de máquinas e soldadores. De quantos modos pode ser preenchido o efetivo da fábrica se deve haver entre os novos funcionários, pelo menos um de cada tipo?

Solução:

Podemos escrever $x_1 + x_2 + x_3 = 20$ e $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$, onde x_1, x_2, x_3 representam os tipos de funcionários, tratoristas, operadores de máquinas e soldadores, ou seja, estamos procurando, agora, soluções inteiras positivas e não soluções inteiras não negativas, pois o zero não faz parte das soluções. Portanto devemos pensar da seguinte maneira:

vamos resolver esta equação representando cada solução por uma fila de sinais ''I'' e ''+''. Por exemplo, as soluções abaixo serão representadas da seguinte maneira:

1) (3, 15, 2) → III + IIIIIIIIIIIIIII + II
2) (6, 7, 7) → IIIIII + IIIIIII + IIIIIII
3) (0, 13, 2) → esse é o tipo de solução que não queremos.

Então, achar as soluções procuradas é o mesmo que calcular as combinações dois a dois de espaços ocupados pelos dois sinais ''+'', tomando o cuidado de excluir o primeiro espaço à esquerda e o último espaço à direita, já que esses espaços representam soluções em que o zero aparece. Neste caso, como temos 19 possíveis espaços a serem ocupados e dois sinais, logo, teremos como solução: $C_{19}^{2} = 171$ modos diferentes.

Agora podemos generalizar:

Seja $x_1 + x_2 + . . . + x_n = k$ uma equação linear, então o número de soluções inteiras positivas é dado por C_{k-1}^{n-1}. A justificativa é a seguinte:
Teremos as soluções representadas por ''+'' e ''I'' e devemos lembrar que o sinal ''+'' não deve ocupar nem o primeiro nem o último espaço, para que as soluções que contenham o zero sejam excluídas .

Portanto, o sinal ''+'' aparecerá (n-1) vezes e teremos (k-1) possíveis espaços a serem ocupados entre os k símbolos ''I''.

$$\underbrace{+\ +\ +\ldots+}_{n-1\ vezes} \quad \underbrace{I\ I\ldots I}_{k-1\ espaços\ entre\ os\ n\ símbolos\ I}$$

O que nos leva a concluir a solução C_{k-1}^{n-1}, como soluções inteiras positivas.

3.3
O Princípio das gavetas de Dirichlet ou Princípio da Casa dos Pombos

Se n objetos forem colocados em no máximo (n – 1) gavetas então pelo menos uma das gavetas conterá dois objetos no mínimo. Esse é o princípio conhecido como princípio das gavetas de Dirichlet

A demonstração de tal princípio é feita por absurdo, senão vejamos: Vamos supor por absurdo que após a distribuição dos n objetos pelas gavetas, cada uma das gavetas contenha, no máximo, um objeto. Então o número total de objetos nelas encontrados será, no máximo, (n – 1), o que é uma contradição, já que n objetos foram distribuídos. Logo, pelo menos uma gaveta deverá conter mais de um objeto.

O Princípio da Casa dos Pombos foi utilizado pela primeira vez por G. Lejeune Dirichlet em 1834 com o nome de *Schubfachprinzip* ("princípio das gavetas"), por esse motivo esse princípio também é conhecido como Princípio das Gavetas de Dirichlet. Vamos enunciá-lo desta forma:

Se tivermos (n + 1) pombos para serem colocados em n casas, então pelo menos uma casa deverá conter, pelo menos, dois pombos.

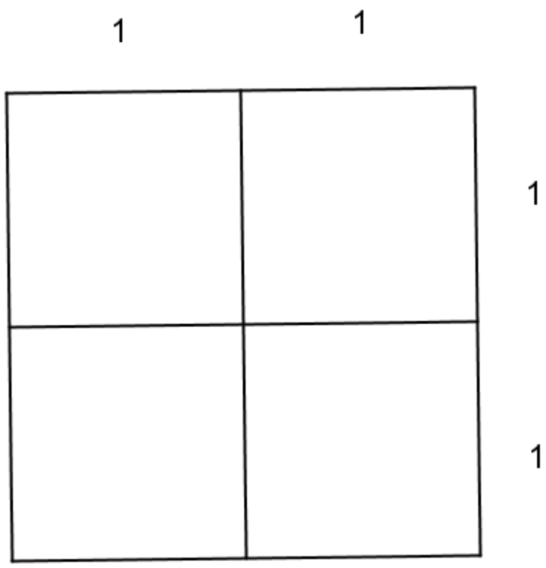
Problema 22: Quantas pessoas, no mínimo, são necessárias para garantirmos que pelo menos duas aniversariam no mesmo mês.

Solução:

Como existem 12 (gavetas) meses em um ano, então pelo princípio das gavetas de Dirichlet, com 13(objetos) pessoas, pelo menos duas aniversariam no mesmo mês.

Problema 23: Escolhem-se 5 pontos ao acaso sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que pelo menos um dos segmentos que eles determinam tem comprimento menor que ou igual a $\sqrt{2}$.

Solução:



Vamos dividir o quadrado de lado 2 em quatro quadrados menores de lado 1. Pelo princípio de dirichlet, pelo menos dois dos cinco pontos (objetos) pertencerão a um mesmo quadrado (gaveta) de lado 1. De sorte que a distância entre esses dois pontos será no máximo igual a diagonal do quadrado de lado 1, portanto, menor que $\sqrt{2}$ ou igual, como queríamos.

Problema 24: Em uma gaveta há 12 meias pretas e 12 meias brancas. Quantas meias devemos retirar ao acaso para termos certeza de obter um par de meias da mesma cor?

Solução:

Imaginemos que as meias sejam retiradas ao acaso e após verificação de sua cor, sejam colocadas em dois cestos, um para cada cor de meia. Como existem duas cores (gavetas) de meias, pelo princípio de Dirichlet, podemos garantir que com três meias (objetos), pelo menos um cesto conterá um par de meias da mesma cor.

Problema 25: 63.127 candidatos compareceram a uma prova de vestibular (25 questões de múltipla-escolha com 5 alternativas por questão). Considere a afirmação: ‘’Pelo menos dois candidatos responderam de modo idêntico as k primeiras questões da prova’’. Qual é o maior valor de k para o qual podemos garantir que a afirmação acima é verdadeira?

Solução:

Temos de ter em mente que, pelo princípio multiplicativo, existem 5^{25} possíveis respostas diferentes de provas. Como esse valor é bem superior a 63.127 candidatos, podemos garantir que k < 25. Portanto, teremos de achar a maior potência de 5 menor do que 63.127. Temos que $5^6 = 15.625 < 63.127 < 5^7 = 78.125$

Temos que com 7 questões, não teremos candidatos suficientes para garantir tal afirmação, mas com 6 questões, teremos 15.625 possíveis gabaritos diferentes e pelo princípio de Dirichlet, podemos afirmar que com 15.626 candidatos, pelo menos dois responderão a mesma coisa nas 6 primeiras questões.

Também podemos afirmar que com 31.251 candidatos, pelo menos três candidatos responderão as 6 primeiras questões de maneira idêntica, com 46.876 candidatos, pelo menos quatro candidatos responderão as 6 primeiras questões de maneira idêntica e com 62.501 candidatos, pelo menos 5 candidatos responderão as 6 primeiras questões de maneira idêntica.

Podemos concluir que dadas as condições do problema, o k máximo é igual a 6 e neste caso podemos afirmar que no mínimo 5 pessoas colocarão respostas idênticas nas 6 primeiras questões.

Problema 26: Mostre que em um grupo de *n* pessoas há pelo menos duas pessoas que conhecem exatamente a mesma quantidade de pessoas do grupo.

Solução:

Sabendo que qualquer pessoa do conjunto pode conhecer no mínimo zero e no máximo (n – 1) pessoas, dividiremos a solução deste problema em dois casos:

1° Caso: Todas as pessoas conhecem pelo menos outra pessoa do grupo.

Se todas as pessoas do grupo conhecem pelo menos uma pessoa do grupo, cada pessoa tem um número de conhecidos que varia de 1 a n – 1 (uma pessoa não conhece a si mesma, então não pode conhecer n pessoas). Podemos aplicar o Princípio da Casa dos Pombos da seguinte forma:

O número de conhecidos são as casas e variam de 1 a n – 1, portanto temos (n – 1) casas e temos n pessoas (pombos) no grupo, logo, há pelo menos duas pessoas que conhecem a mesma quantidade de pessoas do grupo.

2°Caso: Há uma pessoa no grupo que não conhece ninguém. Observe que se houver mais de uma pessoa que não conhece ninguém o problema está resolvido.

Mas se há exatamente uma pessoa do grupo que não conhece ninguém, cada pessoa tem um número de conhecidos que varia de 0 a n – 2, pois ao considerarmos que uma pessoa não conhece ninguém, obrigatoriamente estamos excluindo a possibilidade de alguém conhecer n – 1 pessoas. Sendo assim, podemos aplicar o Princípio da Casa dos Pombos de modo análogo ao que foi feito no caso anterior, com a diferença de que agora as casas são rotuladas de 0 a n – 2, mas continuamos com (n – 1) casas e n pombos. Sendo assim, concluímos também que neste caso há pelo menos duas pessoas do grupo que conhecem exatamente o mesmo número de pessoas do grupo.

Capítulo IV
Aplicações de Análise Combinatória à probabilidade

4.1
Um pouco de história

Durante muitos séculos os matemáticos tentaram compreender os fenômenos que ocorrem de maneira aleatória, cujos resultados obtidos não dependem da intervenção humana, pois estes acontecem de maneira espontânea, sem que se possa estabelecer uma ordem para esses acontecimentos. Desta forma surge a probabilidade. No início estava associada apenas a jogos de azar, mas com o aprofundamento dos seus conteúdos passou a ser um dos mais importantes assuntos do conhecimento humano.

Contribuíram para essa transformação, nomes como: Girolamo Cardano (1501 - 1576) autor do trabalho - “Libar de ludo aleal ”(Livros sobre jogos de azar), Pascal (1654) que se referia a probabilidade como a “Geometria do Acaso” e descreveu a famosa fórmula da probabilidade de um evento A:

$$P(A) = \frac{\text{total de casos favoravéis}}{\text{total de casos possíveis}}.$$

Fermat com seus esforços matemáticos deu o arranque definitivo à probabilidade, Jacques Bernoulli (1713) escreveu sobre a “Lei dos Grandes Números”, Laplace (1749 - 1827) enunciou pela primeira vez a definição clássica de probabilidade, Gauss (1777 - 1855) dá uma aplicação científica à probabilidade na “teoria dos erros”, Kolmogorov propôs uma axiomática completa e consistente do cálculo de probabilidade, dentre outros nomes que contribuíram com essa teoria.

4.2
Definições

4.2.1
Experimento Aleatório

É Todo experimento que, repetido em condições idênticas, pode representar diferentes resultados. A variabilidade de resultados deve-se ao acaso.

A fim de se compreender melhor esses resultados, iremos observar o que há de comum nos seguintes experimentos:

E_1: Retirar uma carta de um baralho com 52 cartas e observar seu naipe.

E_2: Jogar uma moeda dez vezes e observar o número de coroas obtidas.

E_3: Retirar com ou sem reposição, bolas de urna que contém 5 bolas brancas e seis pretas.

E_4: Jogar um dado e observar o número mostrado na face de cima.

E_5: Contar o número de peças defeituosas da produção diária de uma máquina.
A análise desses experimentos revela duas coisas:

1) Cada experimento poderá ser repetido indefinidamente sob as mesmas condições.

2) Não se pode prever um resultado particular de um experimento, porém, pode-se descrever todos os possíveis resultados (possibilidades).

3) Quando o experimento for repetido um grande número de vezes surgirá uma regularidade, ou seja, haverá uma estabilidade da fração f = $\frac{r}{n}$ (frequência relativa), onde n é o número de repetições e r o número de sucessos.

4.2.2
Ponto Amostral

Para cada experimento aleatório E, define-se ponto amostral como sendo cada um dos possíveis resultados a serem obtidos.

Exemplo:

E = jogar um dado e observar o número mostrado na face de cima.
$\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ Conjunto de pontos amostrais.

4.2.3
Espaço Amostral

Para cada experimento aleatório E, define-se espaço amostral como sendo o conjunto de todos os possíveis resultados desse experimento. O espaço amostral é indicado pela letra grega Ω (letra grega que se lê ômega). Indicaremos o número de elementos de um espaço amostral por $n(\Omega)$.

Exemplo 1:

a) E = jogar um dado e observar o número mostrado na face de cima.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $n(\Omega) = 6$. Cada elemento do conjunto é um dos pontos amostrais.

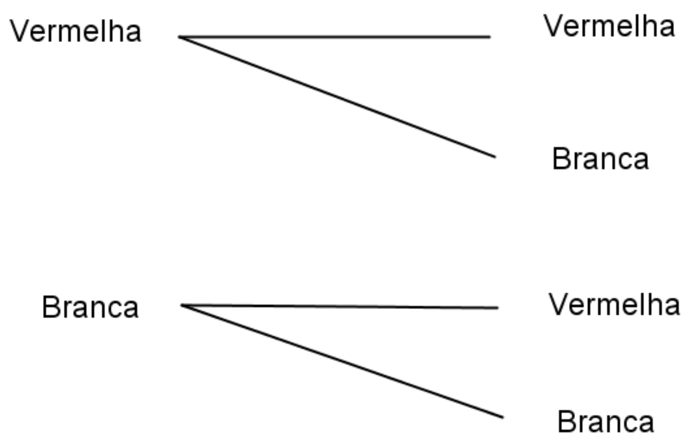
b) E = jogar duas moedas e observar os resultados.

$\Omega = \{(C,C) , (C,K) , (K,C) , (K,K)\}$, onde C = cara e K = coroa, $n(\Omega) = 4$. Cada par ordenado é um ponto amostral.

Exemplo 2:

Uma urna contém 5 bolas vermelhas e 4 bolas brancas. Duas bolas são extraídas, ao acaso, sucessivamente e sem reposição. Observamos a sequência de cores das bolas sorteadas.

1ª extração 2ª extração



Indicando vermelha por V e banca por B, temos: $\Omega = \{(V,V) , (V,B) , (B,V) , (B,B)\} \Rightarrow n(\Omega) = 4$. Cada par ordenado ao lado é um dos pontos amostrais de Ω.

4.2.4
Evento

É um conjunto de resultados do experimento. Em termos de conjuntos, é um subconjunto de Ω. Em particular, Ω e $\emptyset$ (conjunto vazio) são eventos. Ω é dito evento certo e $\emptyset$ evento impossível.

Usando as operações de conjuntos, podemos formar novos eventos:

$A \cup B \rightarrow$ É o evento que ocorre se um dos dois ocorrer ou ambos ocorrerem.

$A \cap B \rightarrow$ É o evento que ocorre se A e B ocorrerem.

$\overline{A} \rightarrow$ Evento complementar. É o evento que ocorre se A não ocorrer.

Exemplo$_1$: Considere o experimento E: Jogar três moedas e observar os resultados:

Ω = { (C,C,C) , (C,C,K) , (C,K,C) , (K,C,C) , (K,K,K) , (K,K,C) , (K,C,K) , (C,K,K) }
Seja E_1 o evento: ocorrer pelo menos duas caras. Então, E_1 = { (C,C,C) , (C,C,K) , (C,K,C) , (K,C,C) }

Exemplo$_2$: Considere o experimento E: lançar um dado e observar o resultado da face superior:
Ω = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 }

Seja E_2 o evento: observar o resultado da face superior. Então, E_2 = Ω = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 } é um evento certo.

Seja E_3 o evento: ocorrência de um número maior que 8 como resultado da face superior. Então, $E_3 = \emptyset$ é um evento impossível.

Seja E_4 o evento: ocorrência de um número múltiplo de 2 como resultado da face superior. Então, E_4 = { 2, 4, 6 }

4.2.5
Probabilidades em espaços amostrais equiprováveis

Consideremos um espaço amostral Ω, formado por k pontos amostrais:

$\Omega = \{ a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k \}$

Vamos associar a cada um desses pontos amostrais um número real, p{a_i}, chamado probabilidade do evento {a_i} (ou probabilidade de ocorrência do ponto amostral a_i), tal que:

I. $0 \leq p_i \leq 1$

II. $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_k = 1$

Consideraremos, em nossos exercícios, os espaços amostrais equiprováveis, ou seja, aqueles cujos pontos amostrais têm a mesma probabilidade de ocorrer. Assim, denotando por p a probabilidade de ocorrência de cada um dos pontos amostrais de Ω, temos em (II):

$$\underbrace{p + p + p + \ldots + p}_{\text{K vezes}} = 1 \Rightarrow k.p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{k}$$

Por exemplo, ao lançarmos um dado, a probabilidade de ocorrência de cada face é $\frac{1}{6}$.

A probabilidade de ocorrência de um evento E, formado por r pontos amostrais E = { a_1, a_2, a_3, . . . , a_r}, com r ≤ k, é dada por:

$$P(E) = P_1 + P_2 + \ldots + P_r \Rightarrow P(E) = \underbrace{\frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \ldots + \frac{1}{k}}_{r\ vezes}$$

$$P(E) = \frac{r}{k} = \frac{número\ de\ elementos\ de\ E}{número\ de\ elementos\ de \Omega} = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

Como E ⊂ Ω, temos que n(E) ≤ n(Ω). Dessa forma: $p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$ é tal que $0 \leq p(E) \leq 1$.

Essa definição de probabilidade é intuitiva, isto é, a probabilidade de ocorrer determinado evento é dada pela razão entre o número de casos favoráveis(ou número de casos que nos interessam) e o número de casos possíveis(ou número total de casos). Assim:

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{número\ de\ casos\ ''favoráveis''}{número\ de\ casos\ ''\ possíveis''}$$

OBS: $p(E) + p(E^c) = 1$

4.3
Alguns problemas de probabilidade

Problema 27: De um baralho de 52 cartas, uma é selecionada ao acaso. Qual é a probabilidade de observarmos:

a) O sete de copas
b) O número sete
c) Um número diferente de sete

Solução:

Sabendo que n(Ω) = 52

a) O evento de interesse é E = { 7 de copas } $\Rightarrow p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{número\ de\ casos\ ''favoráveis''}{número\ de\ casos\ ''\ possíveis''} = \frac{1}{52}$

b) Há 4 casos favoráveis E = {sete de copas, sete de paus, sete de ouros e sete espadas}, então:

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{número\ de\ casos\ ''favoráveis''}{número\ de\ casos\ ''\ possíveis''} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

c) Basta considerarmos o evento complementar do evento do item b), ou seja, E^c={cartas do baralho que não contêm o número 7}

Sabendo que $n(\Omega) = n(E) + n(E^c) \Rightarrow n(E^c) = 52 - 4 = 48$

$$p(E^c) = \frac{n(E^c)}{n(\Omega)} = \frac{número\ de\ casos\ ''favoráveis''}{número\ de\ casos\ ''\ possíveis''} = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$$

Problema 28: Qual a probabilidade de se acertar o prêmio principal da megassena com apenas um cartão?

Solução:

Tendo visto o Problema 15, temos que n(Ω) = $C_{60}^{6} = \frac{60*59*58*57*56*55}{6*5*4*3*2*1} = 50.063.860$

E = { acertar com um cartão }, então:

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{número\ de\ casos\ ''favoráveis''}{número\ de\ casos\ ''\ possíveis''} = \frac{1}{50.063.860}$$

Problema 29: Qual a probabilidade de em um grupo de 13 pessoas, duas aniversariarem no mesmo mês?

Solução:

Tendo visto o Problema 22, temos que $p(E) = 1$, pois em um grupo de 13 pessoas, pelo menos duas aniversariam no mesmo mês.

Problema 30: Em um programa de prêmios de TV, são colocadas oito fichas sobre uma mesa, das quais três contêm prêmios. O participante deve escolher duas fichas ao acaso e virá-las simultaneamente. Qual é a probabilidade de que haja prêmios nas duas fichas?

Solução:

O número de resultados possíveis desse experimento corresponde a todas as possíveis maneiras do participante selecionar, sem importar a ordem, duas das oito fichas disponíveis. Isso pode ser feito de

$$C_8^2 = 28 \Rightarrow n(\Omega\,) = 28$$

O evento E de interesse é aquele em que duas fichas escolhidas contêm prêmios. O número de maneiras de escolher duas dentre as três ficha premiadas é $C_3^2 = 3 \Rightarrow n(E) = 3$. Então:

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{número\ de\ casos\ ''favoráveis''}{número\ de\ casos\ ''\ possíveis''} = \frac{3}{28}$$

Problema 31: O problema de Monty Hall, também conhecido por paradoxo de Monty Hall é um problema matemático e paradoxo que surgiu a partir de um concurso televisivo dos Estados Unidos chamado *Let’s Make a Deal*, exibido na década de 1970.

O jogo consiste no seguinte: Monty Hall (o apresentador) apresentava 3 portas aos concorrentes, sabendo que atrás de uma delas está um carro (prêmio bom) e que as outras têm prêmios de pouco valor.

1. Na 1ª etapa o concorrente escolhe uma porta (que ainda não é aberta);
2. Em seguida Monty Hall abre uma das outras duas portas que o concorrente não escolheu, sabendo à partida que o carro não se encontra aí;
3. Agora com duas portas apenas para escolher — pois uma delas já se viu, na 2ª etapa, que não tinha o prêmio — e sabendo que o carro está atrás de uma delas, o concorrente tem que se decidir se permanece com a porta que escolheu no início do jogo e abre-a ou se muda para a outra porta que ainda está fechada para então a abrir.

Qual é a estratégia mais lógica? Ficar com a porta escolhida inicialmente ou mudar de porta? Com qual das duas portas ainda fechadas o concorrente tem mais probabilidades de ganhar? Por quê? Isso é o que vamos estudar nesse problema.

Imagine-se em um programa de auditório em que 3 portas são colocadas à sua frente. Atrás de uma delas há um prêmio milionário e atrás das outras duas não há nada. O apresentador pede que você escolha uma das 3 portas. Após sua escolha, o apresentador vai até uma das duas portas restantes e a abre, mostrando que está vazia. Daí ele faz a pergunta: *VOCÊ QUER TROCAR DE PORTA, OU PREFERE MANTER A PORTA QUE ESCOLHEU?*

E então, você acha que deve trocar de porta, não deve trocar ou tanto faz?

Solução:

No início, quando se escolheu uma das portas, havia 1/3 de probabilidade de ganhar o prêmio. Não existe razão nenhuma para essa probabilidade mudar após o apresentador ter aberto uma das portas que não era premiada. As outras duas portas não escolhidas tinham em conjunto 2/3 de probabilidade de ocultarem o prêmio, e quando uma dessas portas é aberta (por não ter prêmio) a porta não escolhida que continua fechada passa a ter 2/3 de probabilidade de ser a porta do prêmio. Vamos então fazer esses cálculos.

Calculando a probabilidade de após escolhida uma das portas, estarmos com a porta premiada, teremos:

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{número\ de\ casos\ ''favoráveis''}{número\ de\ casos\ ''\ posíveis''} = \frac{1}{3}$$

Portanto, a probabilidade da porta escolhida ser a errada é de

$$p(E^c) = \frac{n(E^c)}{n(\Omega)} = \frac{número\ de\ casos\ ''favoráveis''}{número\ de\ casos\ ''\ posíveis''} = \frac{2}{3}$$

Cálculo que justifica o fato do candidato trocar de porta, visto que a probabilidade da porta ser a errada é o dobro da probabilidade da porta ser a certa.

Para aqueles que ainda não se sentem convencidos, iremos simular todas as possibilidades de escolhas e resultados e ver de fato o que pode acontecer. Vamos analisar o espaço amostral:

Opções	Porta 1	Porta 2	Porta 3	Ganha?
Escolhe 1 e não troca	Prêmio	Nada	Nada	Sim
Escolhe 1 e troca	Prêmio	Nada	Nada	Não
Escolhe 1 e não troca	Nada	Prêmio	Nada	Não
Escolhe 1 e troca	Nada	Prêmio	Nada	Sim
Escolhe 1 e não troca	Nada	Nada	Prêmio	Não
Escolhe 1 e troca	Nada	Nada	Prêmio	Sim

Simular o espaço amostral colocando o prêmio em outra porta é análogo ao que foi feito e nos traria o mesmo resultado.

Analisando o espaço amostral, fica fácil entender a solução, pois pelos cálculos, já sabemos que após escolhida uma das portas, a probabilidade da porta escolhida ser a certa é menor do que ser a errada.

Com isso, fica claro que trocar de porta é a opção correta. Isso significa que, mesmo antes de o experimento se iniciar, já se sabe que, ao escolher TROCAR DE PORTA, sua probabilidade de ganhar é 2 vezes maior. São 66,7% de chance de ganhar e 33,3% de chance de perder.

Capítulo V
Considerações Finais

O trabalho com resolução de problemas tem grande importância no processo de ensino-aprendizagem, tanto da Matemática como de outras disciplinas, já que o ser humano é desafiado a resolver problemas a todo o momento em seu dia a dia.

Segundo Pinheiro (2008, p. 54), a metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática, por meio da resolução de problemas, constitui-se num caminho metodológico para ensinar Matemática por meio da resolução de problemas e não de ensinar a resolver problemas.

Tendo em vista o fato de que a formação matemática propicia ao ser humano uma maior facilidade em elaborar estratégias para encontrar as soluções ou vislumbrar diferentes caminhos para resolver os problemas que enfrenta, enxergamos nessa prática um instrumento valioso a ser utilizado.

Problemas de raciocínio combinatório têm uma natureza de serem desafiadores e interessantes (como a análise da possibilidade de se ganhar em loterias e sorteios e da forma de se organizar em chapas eleitorais, dentre diversas outras situações).

Com a prática da resolução de problemas nas aulas de Matemática, os alunos têm a oportunidade de desenvolver e sistematizar os conhecimentos matemáticos, dando significação aos conteúdos trabalhados. Assim, com essa prática, os alunos são levados a desenvolver o raciocínio e a criatividade, a aplicar a Matemática em situações reais e a enfrentar situações novas.

Esse trabalho com resolução de problemas se completa quando o professor resolve adotar atitudes positivas junto aos alunos, tais como: dar oportunidade para que todos possam expressar as próprias estratégias de resolução; valorizar todas as resoluções apresentadas pelos alunos, trabalhando o erro como instrumento pedagógico; e ao desenvolver nos alunos a persistência na elaboração de estratégias para a resolução dos problemas.

Com essa perspectiva, o presente trabalho teve como principal objetivo fornecer uma proposta que possa servir como uma orientação ao professor de abordagem dos problemas de contagem, juntamente aos seus alunos. Nesse intuito, buscou-se fazer com que as atividades propostas tivessem um enfoque gradativo de dificuldade, com problemas iniciais que envolvessem os dois princípios básicos de contagem e posteriormente a apresentação e uso de fórmulas para solucionar tais problemas. Tudo isso se traduz no intuito de mostrar ao aluno, várias opções de solução e como pode se tornar fácil a solução de um problema de combinatória, tendo entendido um determinado conceito (fórmula)

As atividades propostas procuraram viabilizar uma sequência de ensino para introduzir os conceitos básicos da Análise Combinatória, por meio da resolução de problemas de contagem.

Esses problemas propostos, apesar de não terem sido aplicados, em sala de aula, na prática, objetivam contribuir com o processo de ensino-aprendizagem de Análise Combinatória no Ensino Médio. Sendo assim, espero que meus esforços venham a contribuir com o aprendizado de alunos e ajudem professores do ensino médio a ensinar uma disciplina que é ao mesmo tempo tão difícil e fascinante, por estar presente em diversas áreas e no nosso cotidiano.

Referências bibliográficas

[1] BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: ensino médio. Brasília: Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2000.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais-** Matemática. Brasília: Secretaria de Ensino Fundamental-SEF, 1997.

[3] MORGADO, Augusto C.; CARVALHO, João B. P. de; CARVALHO, Paulo Cezar P.; FERNANDEZ, Pedro – **Análise Combinatória e Probabilidade** – 9ª ed. – Rio de Janeiro, SBM, 1991.

[4] SANTOS, José Plínio O.; MELLO, Margarida P.; MURARI, Idani T. C. – **Introdução à Análise Combinatória** – 4ª edição revista – Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2007.

[5] LIMA, Elon Lages. **A Matemática do Ensino Médio.** Volume 2, 6.ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[6] SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. V. **Matemática - ensino médio**. Volume 2, 5.ed. São Paulo: Saraiva, 2005.

[7**]** DANTE, Luís Roberto. **Matemática contexto e aplicações.** Volume 2, 3.ed. São Paulo: Ática, 2004.

[8] SANTOS, José Plínio O.; ESTRADA, Eduardo Luis. **Problemas Resolvidos de Combinatória**. 1ª Ed. Rio de Janeiro. Editora Ciência Moderna, 2007.

[9] SANTOS, José Plínio O.; MELLO, Margarida P. e MURARI, Idani T. C. **Introdução à Análise Combinatória**. 4ª Ed. Rio de Janeiro. Editora Ciência Moderna, 2007.

[10] SOUZA, Ana lúcia C. P. **Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Análise Combinatória Através da Resolução de Problemas**. Dissertação de Mestrado. UNESP- Rio Claro (2010). Disponível em: http://www.athena.biblioteca.unesp.br /exlibris/bd/brc/33004137031P7/2010/souza_acp_me_rcla.pdf (acesso em março de 2014).

[11] PINHEIRO, Carlos A. de M. – **O ensino de Análise Combinatória a partir de situações problema** Disponível em: <http://paginas.uepa.br/mestradoeducacao/index.php?option=com_rokdownloads &view=file&task=download&id=38:carlos-alberto-de-miranda-pinheiro>. Acesso em março de 2014.

[12] S. Ross, Probabilidade - **Um curso moderno com aplicações**, Bookmen, 2010.

[13] S. Hazzan, **Fundamentos de Matemática Elementar**, Editora Atual, 19