Universidade Federal de Mato Grosso

Instituto de Cências Exatas e da Terra

Departamento de Matemática

A GEOMETRIA DINÂMICA COMO FONTE DE MOTIVAÇÃO PARA O ESTUDO DA TRIGONOMETRIA

Moacir Penazzo

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Andre Krindges**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

Julho - 2014

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela vida, saúde e inteligência para chegar até aqui.

Na pessoa do meu orientador Prof. Dr. André Krindges, capaz e bem humorado, sábio e criativo, deixo aqui um profundo, imenso e agradecido abraço aos meus professores do PROFMAT, que me foram tão queridos e importantes.

Aos amigos Renato Tertuliano, Natasha Santiago Koch e Jeremias de Oliveira pela inestimável ajuda na conclusão deste trabalho.

Dedicatória

Dedico este trabalho às pessoas mais importantes da minha vida, cada uma ao seu modo, me inspiraram a querer sempre mais para poder transmitir meu melhor e ser cada vez mais capaz de ajudar quem de mim precisasse.

- À minha mãe Leonilda que fez até o impossível para cuidar de mim.

- À minha amada mulher Delielby, guerreira, parceira presente em todos os momentos.

- Aos meus filhos Rafael e Gabriel, meus amores incondicionais.

Resumo

Este estudo busca apresentar uma proposta moderna para o ensino da Trigonometria no Ensino Médio. Ao utilizar os recursos da tecnologia informática, proporciona uma abordagem nova, rica e muito eficiente no desenvolvimento do processo ensino-aprendizagem. O software utilizado para a realização dos trabalhos é o GeoGebra que reúne geometria, álgebra e cálculo, pois de forma dinâmica, transmite ideias de movimentos e mudanças, contemplando os principais conteúdos de trigonometria, destaca o estudo dos triângulos e, principalmente, o conceito de proporcionalidade, fazendo com que o aluno perceba que senos, cossenos e tangentes estão fortemente ligados com as noções de proporções.

Importantes nomes da História da Matemática surgem no contexto da trigonometria, o que evidencia ser imprescindível conhecê-la para melhor compreender seus conceitos e possibilitar que as experiências adquiridas pela humanidade durante séculos possam ser aplicadas em sala de aula como recurso pedagógico, o que desperta no aluno a vontade e a necessidade de aprender, ao oportunizar assim suas aplicações em seu cotidiano.

Palavras-chave

Geometria Dinâmica. Ensino da trigonometria. Semelhança de triângulos. Proporcionalidade. História da Matemática.

Abstract

This paper presents an innovative proposal to the teaching of trigonometry in high school. By using the computer technology resources, it provides a new, rich and very efficient approach in the development of the teaching-learning process. The software used to do the work is GeoGebra which gathers geometry, algebra and calculus which in a dynamic form, it conveys ideas of movement and changes, covering the main contents of trigonometry, emphasizing the study of triangles and especially the concept of proportionality, making the student realize that sines, cosines and tangents are strongly linked with the notions of proportions.

Important names in the history of mathematics arise in the context of trigonometry, which showed to be essential to know her better understand their concepts and experiences enable mankind for centuries can be applied in the classroom as a pedagogical resource, which arouses in the student the desire and need to learn, to create opportunities so their applications in their daily lives.

Keywords

Dynamic Geometry. Teaching trigonometry. Similar triangles. Proportionality. History of Mathematics.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

A ideia desse estudo surgiu após se verificar a falta de motivação dos estudantes no ensino da matemática, principalmente nos conteúdos referentes à Geometria e à Trigonometria. A História da Matemática é utilizada sempre que necessário como alternativa para a motivação e contextualização, realiza a interdisciplinaridade entre a matemática e as demais disciplinas e promove a completa formação do estudante, pois de acordo com D'Ambrósio (1996) "... não é necessário que o professor seja um especialista para introduzir história da matemática em seus cursos. [...] Basta colocar aqui e ali algumas reflexões. Isto pode gerar muito interesse nas aulas de matemática". (p.13).

Foi apresentado um estudo detalhado de figuras semelhantes, destacando-se a importância da proporcionalidade, pois segundo Cerri (2013), *"O estudante acha as aulas de trigonometria difíceis porque não compreende bem a ideia de proporção"* e diz ainda que:

> "Muitos professores usam as proporções quando ensinam vários tópicos, mas não chamam a atenção do aluno e só percebem que deixaram de sublinhar uma ideia fundamental quando apresentam um problema e a classe se perde. Esse é o caso da trigonometria, que para compreendê-la bem, o estudante precisa reconhecer que senos, cossenos e tangentes são proporções e se o aluno não souber o que isso significa, não entenderá nada de trigonometria".

Nos dias atuais, lidamos com uma infinidade de informações fornecidas pelos meios de comunicação: internet, revistas e outras fontes; esses conhecimentos chegam aos estudantes de forma livre, sem critérios, gerando um excesso de informações muitas vezes sem utilidade real, causando apatia e consequentemente desinteresse pelo conteúdo escolar. E é nesse ambiente conturbado que esta proposta se encaixa. O software de geometria dinâmica escolhido para a elaboração do conteúdo foi o GeoGebra, desenvolvido por Markus Hohenwarter, da Universidade de Salzburg, Áustria, para educação matemática nas escolas. Este programa permite construir figuras, e, a partir da construção, o aluno poderá visualizá-la de diversas formas, o que facilita a compreensão do comportamento geométrico dos elementos envolvidos. Depois de realizada a construção, os elementos e funções se modificam na tela de forma dinâmica, permitindo que o professor trabalhe os conteúdos de maneira prática, proporcionando maior motivação nas aulas, pois, com conteúdo estruturante, aborda a trigonometria como um dos saberes escolares que o aluno deve se apropriar no ensino médio, fazendo-o perceber que a aprendizagem da matemática não consiste apenas em desenvolver habilidades para calcular e resolver problemas, mas para criar estratégias que possibilitem atribuir sentido e construir significados às ideias matemáticas, tornando-o capaz de estabelecer relações, justificar, analisar, discutir e criar.

O texto deste estudo assim como as figuras dinâmicas estão disponíveis no blog Educação em Inovação através do endereço eletrônico:
http://www.educacaoeminovacao.com.br/search/label/geometria%20Din%C3%A2mica

Capítulo 1

O objeto de estudo

Desde as mais remotas civilizações, as figuras geométricas estão presentes em tudo o que nos cerca, e tanto a geometria plana quanto a trigonometria integraram-se à história humana por meio de seus estudos, contribuindo para o desenvolvimento dos povos de modo geral e na evolução do conhecimento humano.

Uma das figuras que tem exercido especial fascínio sobre os homens é o triângulo, quer seja pela beleza de sua forma simples ou pela magia das inúmeras relações existentes entre seus próprios elementos, o triângulo apresenta uma rigidez geométrica que os outros polígonos não possuem. Uma vez construído, é impossível modificar sua forma.

Essa propriedade dos triângulos tem sido muito utilizada no nosso dia a dia, da engenharia à carpintaria, seja na construção de um simples portão, sejam em grandes estruturas de telhados, pontes e torres.

A partir do estudo dos triângulos, este trabalho aborda fortemente a ideia de proporcionalidade, o que facilita muito o entendimento das relações trigonométricas culminando no estudo das funções trigonométricas e suas aplicações em nosso cotidiano.

1.1 Classificação dos triângulos

Os triângulos podem ser classificados de duas maneiras, quanto aos lados ou quanto aos ângulos. A seguir serão detalhadas cada uma dessas formas de classificação.

1.1.1 Quanto aos lados

A classificação quanto aos lados apresenta três casos. A figura 1.1 mostra cada um deles.

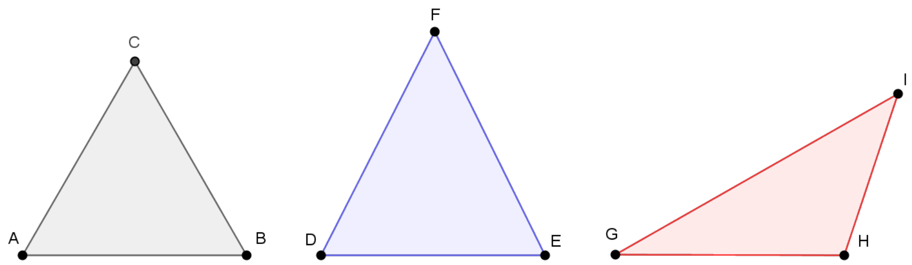


Figura 1.1: Classificação de triângulos quanto aos lados

TRIÂNGULO EQUILÁTERO: Quando os três lados são congruentes (AB=AC=BC).
TRIÂNGULO ISÓSCELES: Quando dois lados são congruentes (FD=FE).
TRIÂNGULO ESCALENO: Quando dois lados quaisquer não são congruentes.

Uma construção muito importante que é abordada no ensino fundamental, referente ao triângulo isósceles, mostra que todo ponto tomado sobre a mediatriz relativa à base do triângulo é equidistante dos vértices desta base.

Na figura 1.2, a reta perpendicular à base, passando pelo seu ponto médio M, é denominada mediatriz do lado AB, indicada pelo segmento MC. Todo ponto C, diferente de M, tomado sobre a mediatriz, provoca o surgimento de dois triângulos retângulos congruentes, comprovados pelo caso de congruência LAL (lado, ângulo, lado). Com isso, o segmento MC é também bissetriz do $\angle ACB$, além de ser mediana relativa ao lado AB, pois M é seu ponto médio, MC é também altura do triângulo ABC, pois representa a menor distância do vértice C à base AB. Com isso, podemos mostrar de forma dinâmica, com a figura em movimento que "**Todo ponto C tomado sobre a mediatriz do lado AB é equidistante dos extremos A e B**".

O programa GeoGebra permite "animar" a figura através de um comando no controle deslizante, que aparece logo abaixo do triângulo, fazendo com que a medida da altura $h = MC$ varie num intervalo pré estabelecido, facilitando a observação de que o ponto C desliza sobre a mediatriz MC, construindo os triângulos retângulos congruentes ACM e BCM, provando assim que C é ponto equidistante dos extremos A e B conforme citado acima.

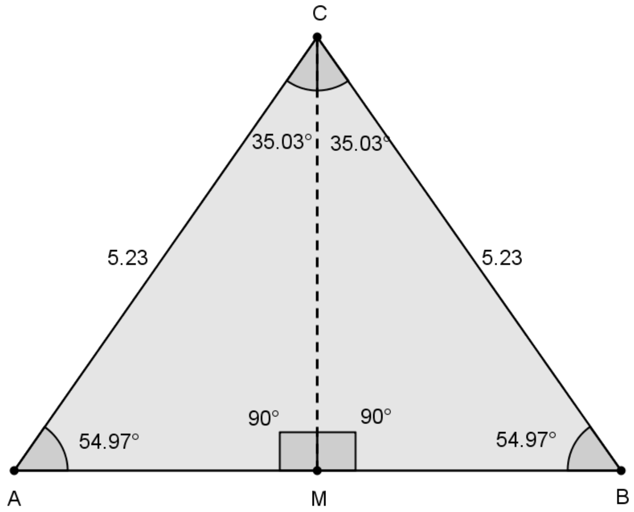


Figura 1.2: Triângulo isósceles e os dois triângulos retângulos congruentes construidos através da mediatriz MC, e o controle deslizante alterando os valores de $h = MC$.

1.1.2 Quanto aos ângulos

A Classificação quanto aos ângulos se dá de três formas. A figura 1.3 mostra essas formas.

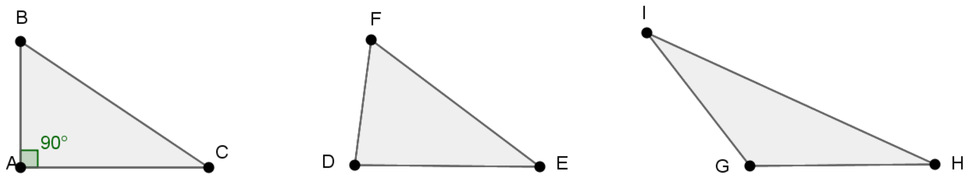


Figura 1.3: Classificação de triângulos quanto aos ângulos

TRIÂNGULO RETÂNGULO: Têm-se um ângulo reto (ângulo A mede 90°)
TRIÂNGULO ACUTÂNGULO: Têm-se três ângulos agudos (ângulos D, E e F são menores que 90°)
TRIÂNGULO OBTUSÂNGULO: Têm-se um ângulo obtuso (ângulo G é maior que 90°)

No Triângulo Retângulo ABC da figura 1.4, o ângulo reto A é formado pelos catetos e o lado oposto ao ângulo reto é a *hipotenusa*.

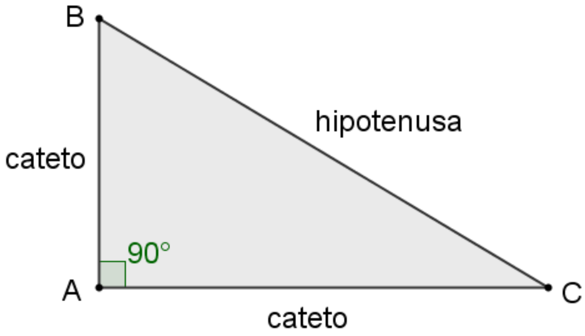
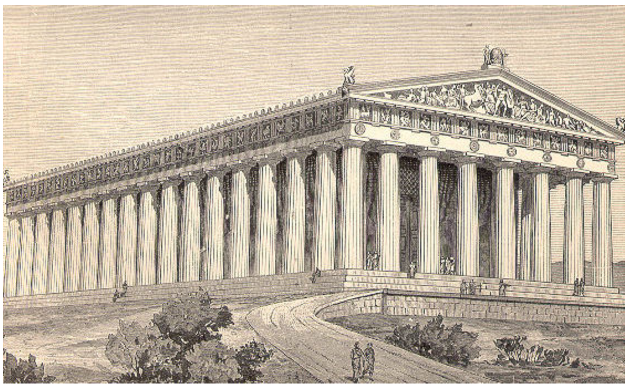


Figura 1.4: Triângulo Retângulo

1.2 Composição de figuras

Com dois triângulos retângulos iguais, podemos formar outras figuras, justapondo catetos ou hipotenusas, como o que foi utilizando na construção do Parthenon pelos gregos, que fizeram a composição de dois triângulos retângulos iguais para formar o triângulo isósceles presente no frontão do Templo.



Fonte: www.wikipedia.org

Figura 1.5: Triângulos isósceles no frontão do Parthenon

A composição de um retângulo a partir de dois triângulos retângulos iguais nos permite calcular a área da região limitada por cada um dos triângulos. A figura 1.6 mostra estes triângulos.

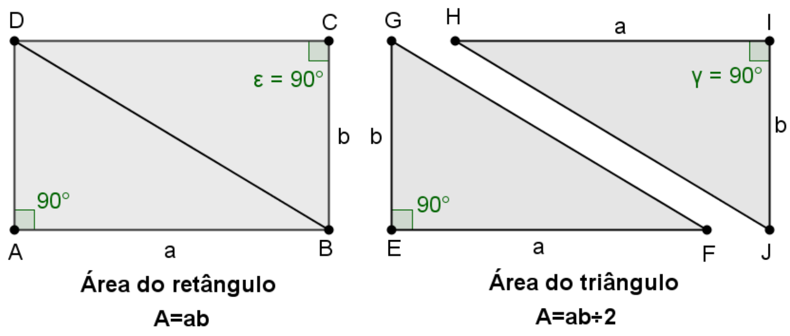


Figura 1.6: A composição de um retângulo a partir de dois triângulos retângulos

Tomemos agora quatro triângulos retângulos iguais, de hipotenusa a e catetos b e c, justapostos, conforme a figura 1.7.

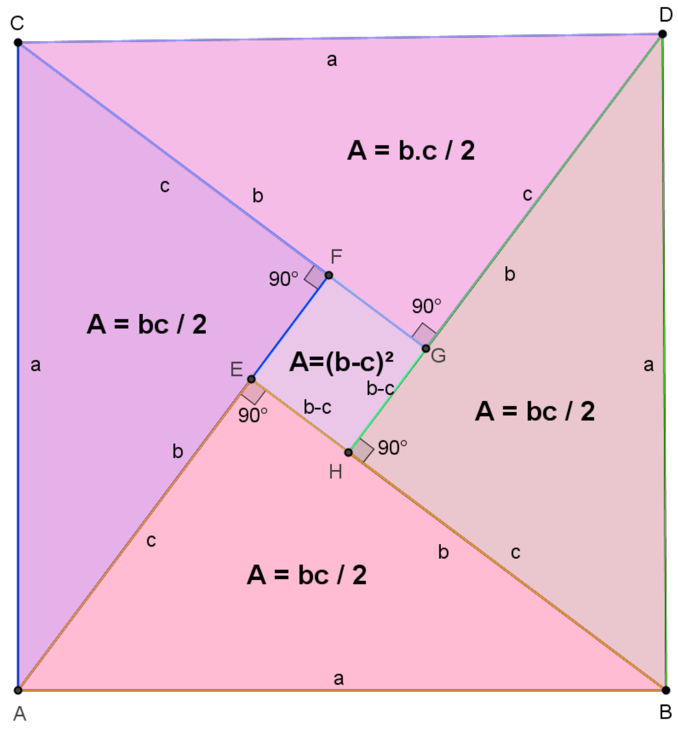


Figura 1.7: A composição de um quadrado a partir de triângulos retângulos iguais

Veja que a área do quadrado maior é Área $= a^2$, que poderá ser calculada através da soma das áreas dos quatro triângulos retângulos somada com a área do quadrado menor EFGH.

Assim:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= 4 \cdot \frac{b \cdot c}{2} + (b-c)^2 \\
a^2 &= 2bc + b^2 - 2bc + c^2 \\
a^2 &= b^2 + c^2
\end{aligned}
$$

Essa relação entre as medidas dos lados do triangulo retângulo é denominada **Relação de Pitágoras**, e expressa que o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Outra forma de interpretação bastante interessante que podemos fazer a partir do triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c, é que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa (a^2) é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos $(b^2 + c^2)$. Veja esta representação na figura 1.8.

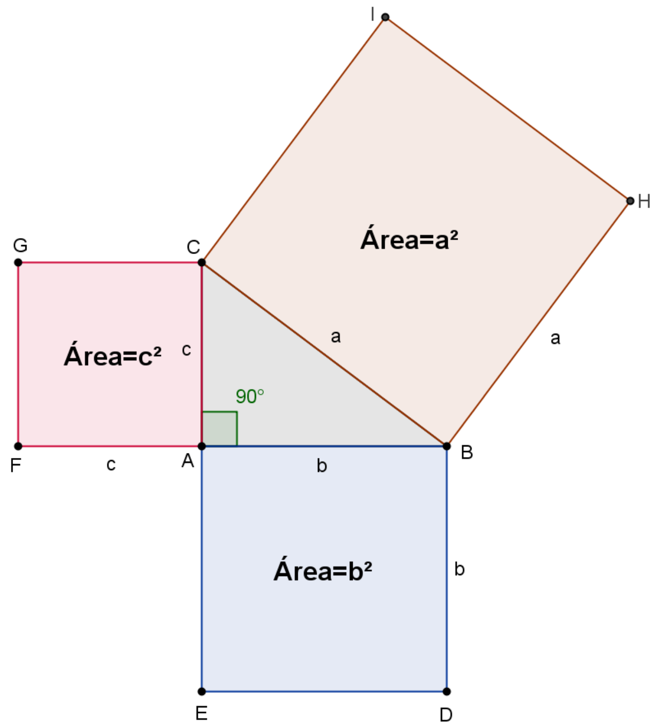


Figura 1.8: Interpretação geométrica do Teorema de Pitágoras

1.3 Quem foi Pitágoras

Pitágoras de Samos foi um filósofo e matemático grego que nasceu em Samos entre cerca de 571 a.C. e 570 a.C. e morreu em Metaponto entre cerca de 497 a.C. ou 496 a.C.

A sua biografia está envolta em lendas. Segundo a tradição, a Pitonisa (uma sacerdotisa do oráculo de Apolo, em Delphos), avisou aos pais de Pitágoras - o rico joalheiro Mnésarcnos e sua esposa Parthénis, que o filho esperado seria um homem de extrema beleza, inteligência e bondade, e iria contribuir de forma única para o benefício de todos os homens.

Quando a criança nasceu na ilha de Samos, seus pais deram-lhe o nome de Pitágoras em homenagem à pitonisa que havia previsto para ele uma vida incomum.

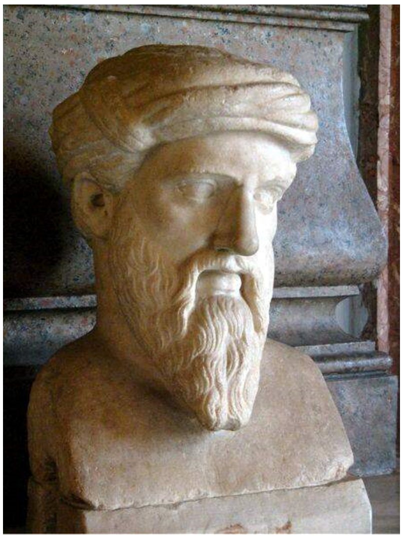
Mal acabado de sair da adolescência, Pitágoras acreditava que todos os conhecimentos que os gregos possuíam nada mais eram do que fragmentos da grande sabedoria que se encontrava nos templos egípcios e na Mesopotâmia. A fim de saber mais sobre os mistérios da vida e do Universo decide fazer uma viagem aos lugares que esses conhecimentos ainda permaneciam vivos. Assim, escolhendo Esparta como ponto de partida, inicia um grande périplo através das maiores cidades e templos do mundo antigo, viagem esta que se prolongou por cerca de quarenta anos. Esta viagem levou-o a encontrar-se com as maiores personalidades do seu tempo e é certo que estudou com os maiores mestres daquela época. Teve como sua principal mestra, a filósofa e matemática Temistocléia.

Ao retornar, fundou em Crotona, na Itália, a sua escola iniciática conhecida pelo nome de "Fraternidade Pitagórica". Ali reuniu um grupo de discípulos, a quem iniciou nos conhecimentos de matemática, música e astronomia, consideradas como a base de todas as artes e ciências.

Pitágoras não deixou nenhum registro escrito, e sendo sua sociedade secreta, certamente existe muito sobre ele que foi perdido após a morte de seus discípulos e da dissolução dos pitagóricos.

É difícil hoje dizer o que ao certo foi obra de Pitágoras e o que foi obra dos seus discípulos, uma vez que a figura de Pitágoras e a figura da Filosofia Pitagórica são indivisíveis.

Talvez a obra mais famosa de Pitágoras seja o seu teorema relacionando os lados de um triângulo retângulo conforme demonstrado anteriormente.



Fonte: www.wikipedia.org

Figura 1.9: Pitágoras de Samos

1.4 Figuras Semelhantes

1.4.1 O conceito de semelhança

Há muitos séculos, a humanidade começou a desenvolver a arte de confeccionar mapas. Um dos principais interesses é representar do modo mais perfeito possível no plano, uma superfície arredondada que é a superfície terrestre. Em outras palavras, o que se pretende em um mapa, é que a figura desenhada seja semelhante à região real do globo terrestre. Para termos a ideia real das distâncias nele representadas, são utilizadas **escalas** que estabelecem a relação (proporção) entre um segmento no mapa e o seu comprimento na realidade. Exemplo, na escala 1:5000 cada centímetro no mapa equivale a 5000 centímetros (50 metros) na realidade.

A escala será considerada como a RAZÃO DE PROPORCIONALIDADE entre o desenho e aquilo que está sendo representado.

Outra aplicação muito utilizada de figuras semelhantes são as plantas e maquetes de prédios que mostram, com precisão, miniaturas daquilo que será construído, aplicando o conceito de escalas.

Usando papel quadriculado, podemos fazer ampliações ou reduções de figuras com muita facilidade. A figura 1.10 mostra os lados do polígono ABHGFEDJ sendo duplicados, mantendo-se as medidas dos ângulos, originando assim figuras semelhantes.

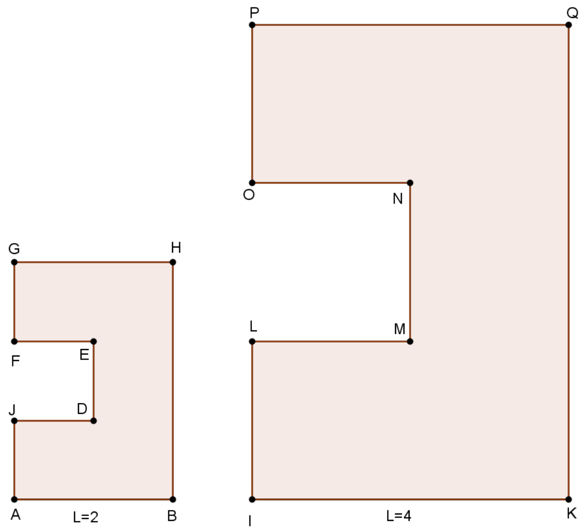


Figura 1.10: Polígonos semelhantes

Ampliações ou reduções de figuras relacionam-se com a ideia de semelhança, como a relação entre figuras que têm a mesma forma e lados correspondentes proporcionais.

Nesta figura 1.10 acima, a escala utilizada foi de 1:2.

A figura 1.11, mostra que dois quadrados são sempre semelhantes:

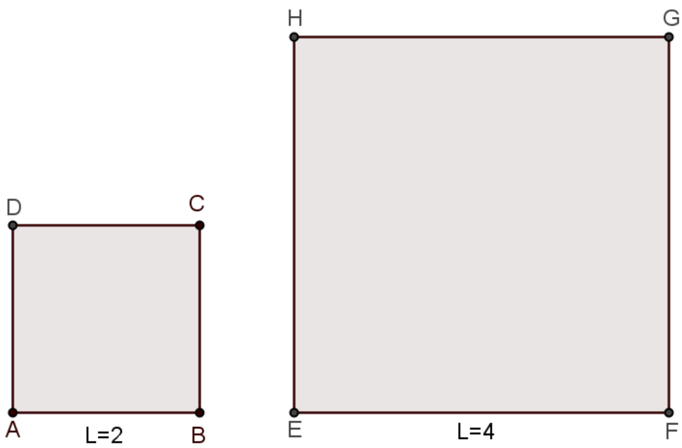


Figura 1.11: Dois quadrados são sempre semelhantes

Porém, dois triângulos nem sempre são semelhantes. Veja na figura 1.12 que dois triângulos nem sempre serão semelhantes.

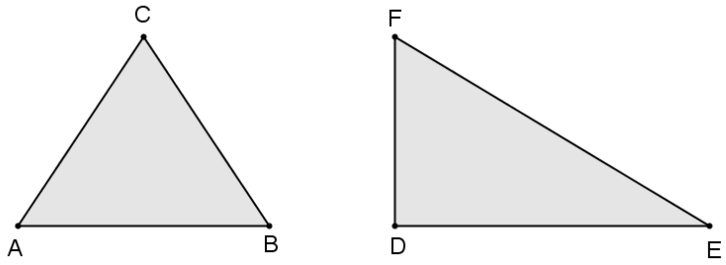


Figura 1.12: Dois triângulos nem sempre serão semelhantes

Veja, pela definição, quando dois polígonos são semelhantes.

Dois polígonos são semelhantes, quando:

- As medidas dos lados correspondentes são proporcionais.
- As medidas dos ângulos correspondentes são iguais.

Veja no exemplo da figura 1.13, que os dois polígonos apresentados são semelhantes porque satisfazem estas duas condições.

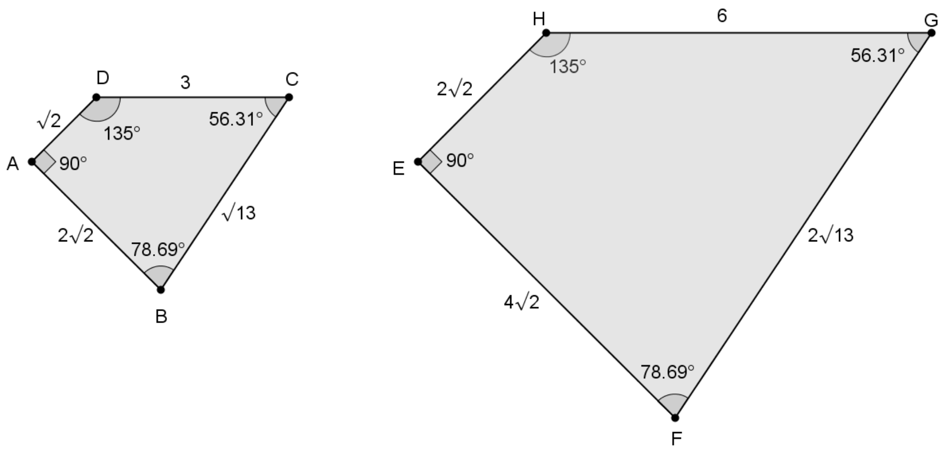


Figura 1.13: Polígonos semelhantes

Esses polígonos foram construídos de modo que:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE} = k = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \hat{A} = \hat{E}; \hat{B} = \hat{F}; \hat{C} = \hat{G}; \hat{D} = \hat{H}$$

Por isso eles são semelhantes. O número real k que aparece nas igualdades é chamado de razão de proporcionalidade ou razão de semelhança.

Assim, para que dois polígonos sejam semelhantes, é necessário que as duas condições sejam satisfeitas. Apenas uma não garante a semelhança. Observa-se na figura 1.14, que ambos os polígonos possuem os mesmos ângulos, mas, como os lados correspondentes não são proporcionais, as figuras não são semelhantes.

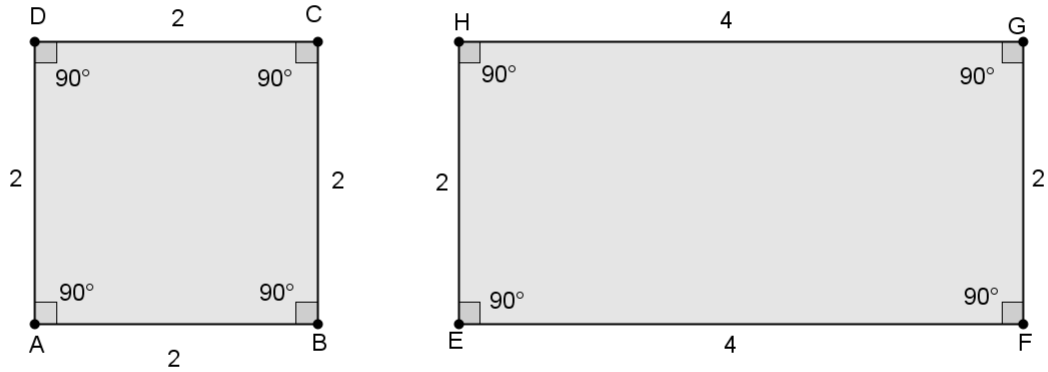


Figura 1.14: Um quadrado e um retângulo não são semelhantes

1.4.2 Construindo figuras semelhantes

A técnica a seguir utiliza o conceito de homotetia (do grego *homós*=igual + *theto*=colocado). **Homotetia** significa ampliação ou redução de qualquer ente geométrico, tais como pontos, segmentos de reta, figuras planas ou espaciais, podendo ser positiva, quando ampliamos ou reduzimos as figuras, ou negativa, quando invertemos a figura com relação a um ponto fixo estabelecido denominado **foco**.

Para definirmos homotetia, necessitamos de um centro de homotetia O (foco) e da razão de homotetia k que pode ser qualquer número real. Um ponto X' é gerado a partir do ponto inicial X através da equação $\vec{OX'}= k\cdot\ \vec{OX}$. Nesta equação, a medida $\vec{OX'}$ será determinada a partir do segmento $\vec{OX}$, alterado pelo fator k numa das situações descritas a seguir e representados na figura 1.15 e 1.16.

Com indicação vetorial, temos a garantia de três fatos importantes:

a) Dois pontos homotéticos estão alinhados com o centro O de homotetia.

b) Se $k > 0$, então X e X' estão em uma mesma semirreta das determinadas por O na reta $\vec{OX}$. (Figura 1.15).

c) Se $k < 0$, então X e X' estão em semirretas opostas das determinadas por O na reta $\vec{OX}$. (Figura 1.16).

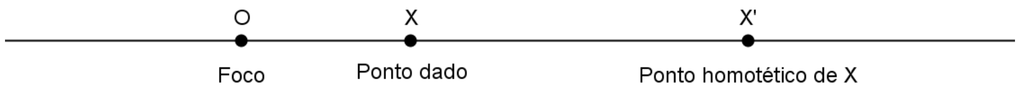


Figura 1.15: Homotetia positiva ($k > 0$)

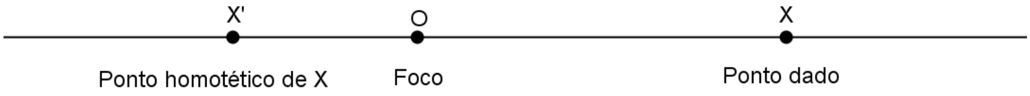


Figura 1.16: Homotetia negativa ($k < 0$)

Utilizando homotetia podemos construir figuras semelhantes, ampliando, reduzindo ou invertendo a figura, conforme o valor adotado para a constante k. Veja na figura 1.17, o comportamento de triângulos semelhantes através do valor de k, em duas situações.

- Se $k > 1$, ampliamos a figura. Veja o triângulo dado BCD ampliado gerando o triângulo GFE.
- Se $0 < k < 1$, reduzimos a figura.
- Se $k < 0$, invertemos a figura em relação ao foco O. Veja o triângulo JIH que representa a inversão do triângulo BCD em relação ao foco A, graças ao valor de $k = -1$.

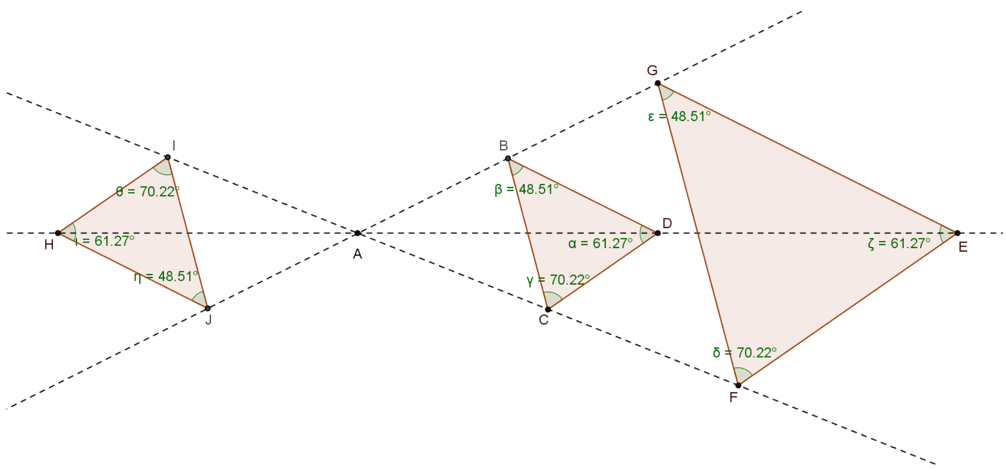


Figura 1.17: Homotetia positiva ($k > 0$) e homotetia negativa ($k < 0$)

Nesse processo de ampliação ou redução, obtemos polígonos semelhantes, isto é, seus lados são proporcionais a k e seus ângulos não se alteram como visto na figura 1.18.

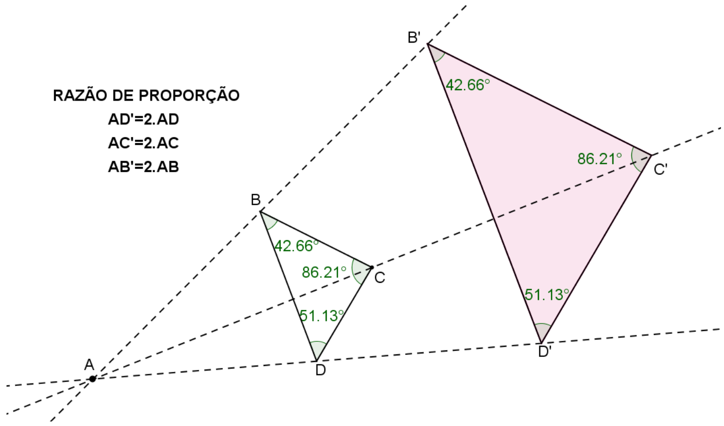


Figura 1.18: Polígonos semelhantes por homotetia ($k = 2$)

1.5 A razão de semelhança k

Quando dois polígonos são semelhantes, a razão entre dois lados correspondentes é chamada razão de semelhança e é normalmente indicada por k. A figura 1.19 mostra esta aplicação para $k = \dfrac{1}{2}$.

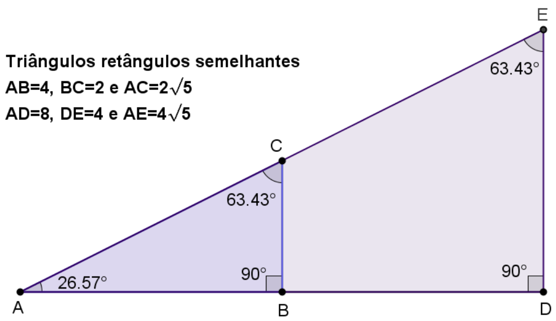


Figura 1.19: Triângulos semelhantes e razão $k = \dfrac{1}{2}$

Como os triângulos ABC e ADE acima são semelhantes, temos as proporções: $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{BC}{DE} = k$, ou seja, $\dfrac{4}{8} = \dfrac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$, onde se pode verificar que $k = \dfrac{1}{2}$.

Já a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes equivale a k^2, pois: $\dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{h_1}{h_2} = k$, temos Área$=\dfrac{b_1}{b_2} \cdot \dfrac{h_1}{h_2} = k \cdot k = k^2$. Veja esta aplicação na figura 1.20.

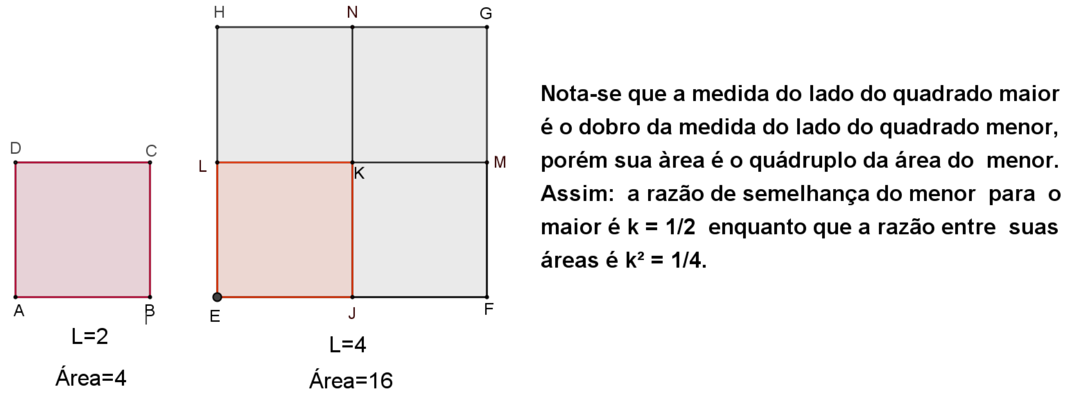


Figura 1.20: Figuras semelhantes. Razão de semelhança $= k$ e razão entre as Áreas $= k^2$

Da mesma maneira, a relação entre os volumes de duas figuras tridimensionais semelhantes é igual a k^3. Veja figura 1.21.

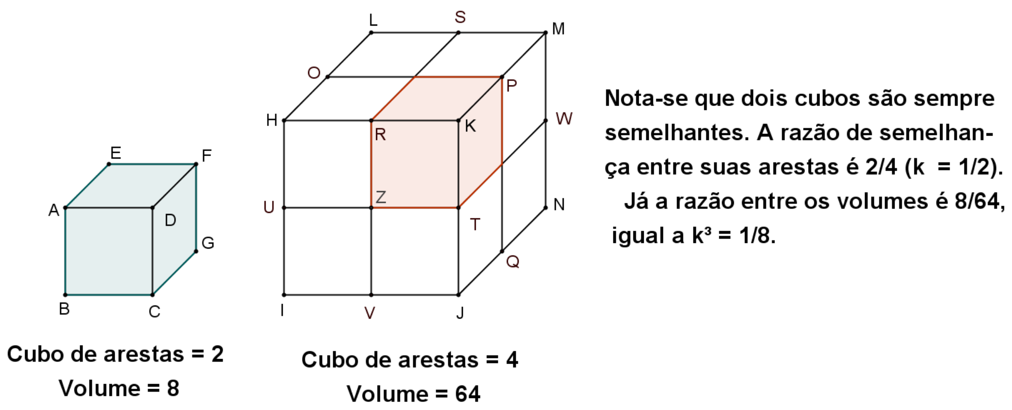


Figura 1.21: Figuras semelhantes. Razão de semelhança $= k$ e razão entre os Volumes $= k^3$

Vejamos dois exemplos de aplicações de figuras semelhantes do nosso cotidiano:

Exemplo 1.5.1. Inspirado em atividade proposta por Iezzi - (2010)

"A escala utilizada em um mapa foi de 1:30.000. Qual a distância real entre duas cidades distantes 20 cm no mapa?"

Solução.

$$\begin{aligned}\frac{1}{30000} &= \frac{20}{x}\\ x &= 600000\ cm\\ x &= 6\ km\end{aligned}$$

Exemplo 1.5.2. Inspirado em atividade proposta por Mello - (2005)

"A distância entre dois pilares paralelos de sustentação de uma rampa é de $1,5\ m$. O pilar mais baixo foi fincado no chão a $2,7\ m$ do pé da rampa e seu topo dista $1,8\ m$ do topo do pilar mais alto. Determine comprimento dessa rampa."

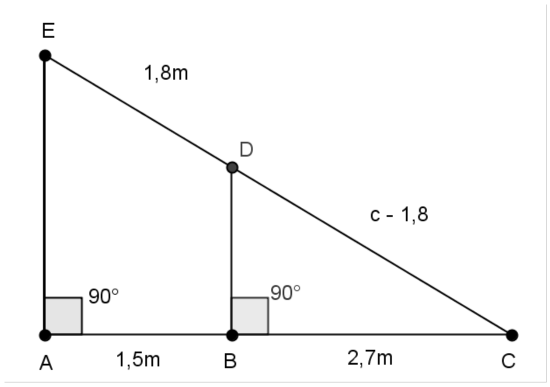


Figura 1.22: Ilustração do exemplo 02, mostrando triângulos retângulos semelhantes

Solução. Denotando por c o comprimento da rampa, temos a seguinte proporção:

$$\begin{aligned} \frac{c}{4,2} &= \frac{c-1,8}{2,7} \\ 4,2c - 7,56 &= 2,7c \\ c &= 5,04\ m \end{aligned}$$

Ora entendido o conceito de proporção e suas aplicações, pode-se, então, aplicar este conceito no estudo das relações trigonométricas, tema que será abordado no capítulo dois a seguir.

Capítulo 2

A trigonometria

Com aplicações em várias áreas do conhecimento como engenharia, medicina e muitos ramos da física, a trigonometria surgiu da necessidade de resolver problemas práticos relacionados à astronomia e navegação em que era necessário fazer medições de grandes distâncias que não poderiam ser determinadas com os aparelhos disponíveis na época, e por isso, deveriam ser calculadas através de relações matemáticas conhecidas, especialmente aquelas ligadas ao triângulo retângulo. Daí a importância de se estudar trigonometria (do grego *trigono* = triangular + *metria* = medida), que relaciona medidas de lados e ângulos de um triângulo.

2.1 A razões trigonométricas

Vamos começar pelo triângulo retângulo ilustrado na figura 2.1.

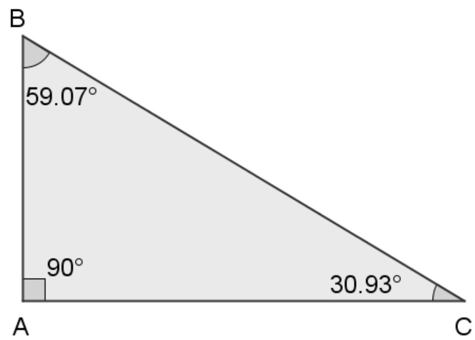


Figura 2.1: Triângulo retângulo - ($\hat{A}$ = 90°)

Como já sabemos, a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

No triângulo ABC da figura 2.1, temos $\hat{A} = 90°$

Como A+B+C=180°, temos que B + C = 90°.

- B e C são ângulos agudos (menores que 90º)
- Como B e C somam 90°, são chamados **complementares**.

Como já foi visto, os lados do triângulo retângulo recebem nomes especiais:

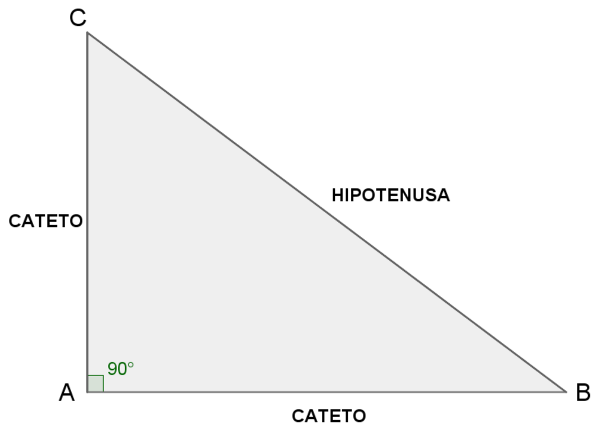


Figura 2.2: Triângulo retângulo

Com relação ao ângulo B, o cateto AC é o cateto oposto enquanto o cateto AB é o cateto adjacente.

Com relação ao ângulo C, o cateto AB é o oposto e AC é adjacente.

Ao tomar como exemplo o triângulo retângulo da figura 2.3, podemos relacionar seus lados a partir de um determinado ângulo agudo.

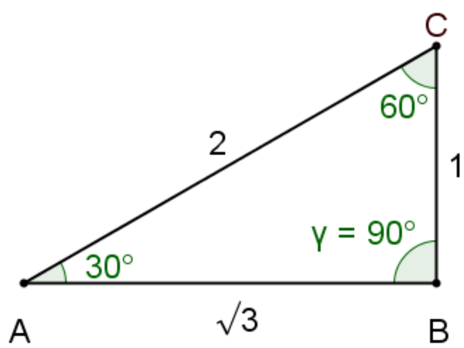


Figura 2.3: Triângulo retângulo

Em relação ao ângulo $\hat{A} = 30°$

$$\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Vamos agora considerar o triângulo MPN semelhante ao triângulo ABC, mostrado na figura 2.3.

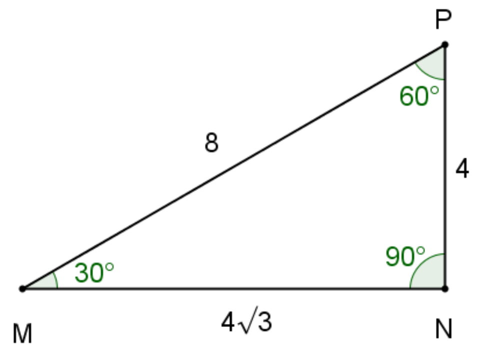


Figura 2.4: Triângulo retângulo MNP, semelhante ao triângulo ABC da figura 2.3.

$$\frac{\Delta MNP}{\Delta ABC} = \frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{MP}{AC} = k$$

Assim:

$$\frac{\Delta MNP}{\Delta ABC} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4}{1} = \frac{8}{2} = 4$$

Vamos agora relacionar as medidas dos ângulos com os lados do triângulo MPN semelhante com ABC.

Em relação ao ângulo M = 30°

$$\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Percebe-se que pelo fato de $\hat{A} = \hat{M}$, todas as relações desses ângulos são iguais, ou seja, se tivermos dois triângulos retângulos com um ângulo de 30°, as razões trigonométricas $\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$, $\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$ e $\frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$ serão sempre iguais, independentemente do triângulo ser pequeno ou grande, *pois as razões trigonométricas dependem do ângulo e não do tamanho do triângulo*.

Cada uma dessas razões recebe um nome especial:

A razão $\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$ será chamada seno e indicada por $\operatorname{sen}(A) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$.

A razão $\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$ será chamada cosseno e indicada por $\cos(A) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$.

A razão $\frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$ será chamada tangente e indicada por $\operatorname{tg}(A) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$.

Dessa forma, os matemáticos construíram tabelas com os valores das razões seno, cosseno e tangente dos ângulos compreendidos entre 0° e 90°, facilitando muito a resolução de problemas, como o exemplo 2.1.1 a seguir, representado pela figura 2.5.

Exemplo 2.1.1. Inspirado em atividade proposta por Barroso - (2010)

"Na dança folclórica da trança-fitas, usa-se um mastro, com geralmente 3 metros de altura. Para certa passagem da dança, precisa-se que o ângulo entre a fita esticada (com a ponta no chão) e a horizontal tenha 30°. Sabendo-se que o sen 30° = 0,5, determinar o comprimento da fita e a distância dessa ponta ao mastro."

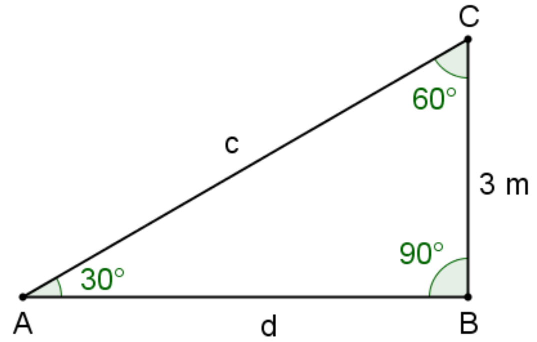


Figura 2.5: Interpretação matemática para o exemplo 2.1.1 acima descrito.

Solução.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(30^o) &= \frac{3}{c} \\
\frac{1}{2} &= \frac{3}{c} \\
c &= 6\ m
\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}
6^2 &= d^2 + 3^2 \\
d^2 &= 27 \\
d &= 3\sqrt{3}\ m \cong 5,2\ m
\end{aligned}$$

Portanto, a fita tem 6 metros de comprimento e sua extremidade está a aproximadamente 5,2 metros da base do mastro.

2.2 Um pouco de História

Foi através dos árabes que a trigonometria, baseada na meia corda de uma circunferencia, chegou à Europa.

Os árabes haviam traduzido textos de trigonometria do sânscrito. Os hindus tinham dado o nome de *jiva* à metade da corda, e os árabes a transformaram em *jiba*. Na lingua árabe é comum escrever apenas as consoantes de uma palavra, deixando que o leitor acrescente mentalmente as vogais. Desse modo, os tradutores árabes registraram *jb*. Na sua tradução do árabe para o latim, Robert de Chester interpretou *jb* como as consoantes de *jaib*, que significa “baia” ou “enseada”, e escreveu *sinus*, que é o equivalente em latim.

A partir daí, a *jiba*, ou meia corda hindu passou a ser chamada de *sinus*, em português, seno.

O astrônomo e matemático Hiparco, nascido em Niceia (atual Turquia), viveu aproximadamente entre 190-125 a.C., e ficou conhecido com o Pai da Trigonometria, pela sua contribuição na construção de tabelas de senos, cossenos e tangentes, facilitando enormemente a resolução de problemas ligados ao estudo da posição dos planetas e das estrelas, enquanto na topografia, por exemplo, auxilia na determinação da altura de montanhas e morros.

Atualmente, esses valores são facilmente obtidos através das calculadoras científicas encontradas no comércio. Para isto, basta digitar a medida do ângulo e, em seguida, apertar a tecla referente à função desejada. Aparecerá, no visor, o valor de tal função do ângulo desejado.

Exemplo: Para calcular o seno de 42° usando uma calculadora científica, digita-se 42° e, em seguida, a tecla sin (seno). No visor aparecerá 0,669130606 que é o valor procurado.

2.3 A importância dos ângulos complementares

Uma propriedade muito importante que existe nos triângulos retângulos, é que os ângulos agudos são complementares. Veja o exemplo da figura 2.6 onde $\angle$ A=30,96° e $\angle$ C=59,04°, note que:

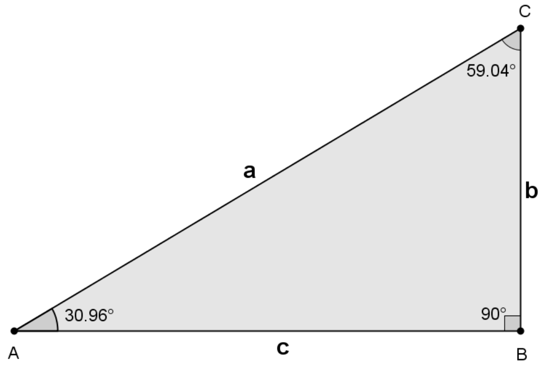


Figura 2.6: Triângulo retângulo destacando os ângulos A e C complementares.

$A + C = 90°$ e, devido a isso, veja o que acontece:

$$\begin{array}{rr} \operatorname{sen}(A) = \dfrac{b}{a} & \operatorname{sen}(C) = \dfrac{c}{a} \\ \cos(A) = \dfrac{c}{a} & \cos(C) = \dfrac{b}{a} \\ \operatorname{tg}(A) = \dfrac{b}{c} & \operatorname{tg}(C) = \dfrac{c}{b} \end{array}$$

Importa notar que $\operatorname{sen}(A) = \cos(C)$; $\cos(A) = \operatorname{sen}(C)$ e que as tangentes são inversas.

Isso ocorre sempre que os ângulos A e C forem complementares (Somarem 90°).

Exemplo 2.3.1. Calcular o valor da expressão: $E = \operatorname{sen}(1°) + \operatorname{sen}(2°) + \operatorname{sen}(3°) - \cos(87°) - \cos(88°) - \cos(89°)$.

Solução. Conforme foi abordado acima, temos: $\operatorname{sen}(1°) = \cos 89°$, pois $1° + 89° = 90°$ e do mesmo modo $\operatorname{sen}(2°) = \cos 88°$ e também $\operatorname{sen}(3°) = \cos 87°$. Desta forma, a expressão E vale zero.

2.4 Aplicações da trigonometria na física

São muitas as aplicações das razões trigonométricas nos diferentes ramos da física. Vamos ver um exemplo de sua aplicação na decomposição de forças.

Decompor uma força significa obter suas projeções ortogonais na horizontal e vertical. Para isso, traçamos pela origem da força, os eixos cartesianos ortogonais Ox e Oy. Pela extremidade da força, traçamos retas perpendiculares aos eixos Ox e Oy, obtendo as componentes vertical $(\vec{F}y)$ e horizontal $(\vec{F}x)$. A figura 2.7 mostra a situação descrita e o triângulo retângulo destacado, em que $\vec{F}$ é a hipotenusa e $(\vec{F}y)$ e $(\vec{F}x)$ são os catetos.

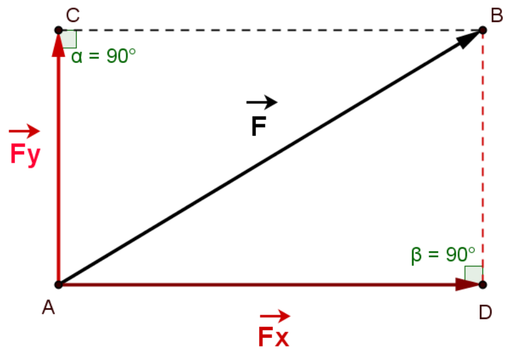


Figura 2.7: Decomposição da força $\vec{F}$ e suas componentes $(\vec{F}x)$ e $(\vec{F}y)$.

Exemplo 2.4.1. Inspirado em atividade proposta por Zampirolo, (2000)

Consulte uma tabela ou uma calculadora e calcule as componentes horizontal e vertical da força $\vec{F}$ de $40N$ (Leia-se: 40 Newton) abaixo:

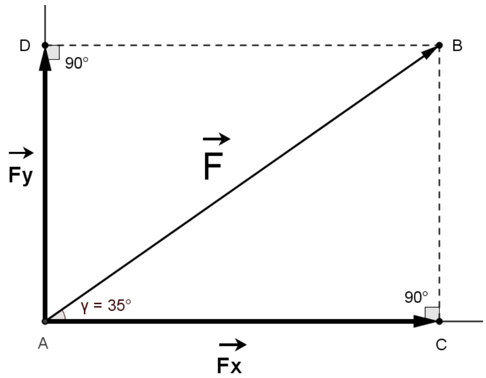


Figura 2.8: Força $\vec{F}$ sendo decomposta e suas componentes $(\vec{F}x)$ e $(\vec{F}y)$.

Solução.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(35^\circ) &= \frac{Fy}{F} & \cos 35^\circ &= \frac{Fx}{F} \\ 0,5736 &= \frac{Fy}{40} & 0,8192 &= \frac{Fx}{40} \\ \vec{F}y &= 21,944N & \vec{F}x &= 32,768N \end{aligned}$$

Saiba mais:

Newton é a unidade de força. Um Newton é a força que, aplicada a um corpo de massa 1 kg dá a ele aceleração de 1 m/s^2.

A representação de força aparece com uma flecha sobre a letra F $(\vec{F})$ indicando que é uma grandeza vetorial, isto é, possui módulo, direção e sentido.

2.5 Arcos e ângulos

Outra utilização da trigonometria ocorre quando exploramos conceitos de arcos e ângulos. Ao marcarmos dois pontos distintos A e B sobre uma circunferência de centro O ela ficará dividida em duas partes chamadas arcos. Esses arcos podem ser medidos de várias maneiras, segundo a unidade escolhida, sejam centímetros, metros, graus, radianos, etc.

2.5.1 A unidade Grau

A unidade grau provém da divisão da circunferência em 360 partes iguais. Assim, 1° é um arco de medida $\frac{1}{360}$ da circunferência em que se encontra. A figura 2.9 mostra que a medida do arco AB equivale à medida do ângulo central $A\hat{O}B$ correspondente.

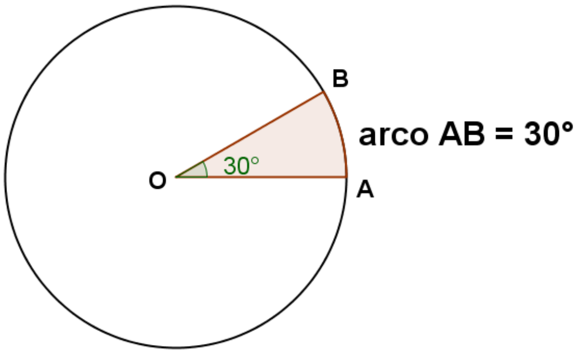


Figura 2.9: Ângulo central do setor circular

$$\text{Arco } \overset{\frown}{\text{AB}} = 30^\circ$$

$$\text{Ângulo Central } A\hat{O}B = 30^\circ$$

Assim, $\frac{1}{6}$ da circunferência equivale a 60°, enquanto $\frac{1}{4}$ dela equivale a 90°.

Outra unidade importante para medir arcos é o radiano, que será mostrado a seguir.

2.5.2 A unidade Radiano

O radiano é um arco de mesma medida do raio da circunferência.

Assim, se tomarmos um arco de comprimento r numa circunferência de raio r, conforme a figura 2.10, esse arco terá medida de **um** radiano. Se medido em graus, um radiano equivale a aproximadamente 57°.

O arco $\widehat{\mathrm{AB}}$ mede **um** rad, pois é igual ao raio r da circunferência.

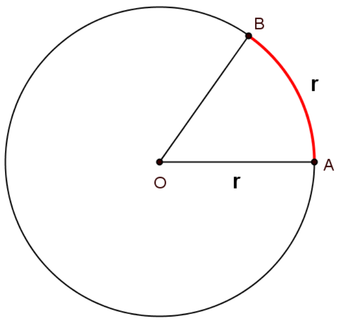


Figura 2.10: Arco de medida um radiano.

Como sabemos, o comprimento de uma circunferência é $2\pi r$ e, como o raio tem a medida de 1 radiano, dizemos que o comprimento da circunferência é 2π radianos.

Dessa forma, um arco de 360° equivale a 2π rad enquanto um arco de 180° equivale a π rad.

A partir desse conceito, podemos também medir um arco, adotando medidas de comprimento. Para isso é importante lembrar que o comprimento da circunferência é $2\pi r$ e sendo $\pi \cong 3,14$, podemos, por exemplo, calcular o comprimento do arco $\widehat{\mathrm{AB}}$ da figura 2.11.

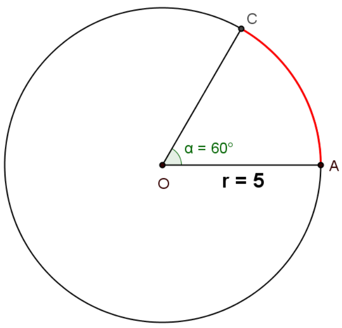


Figura 2.11: Arco de 60° na circunferência de raio 5 cm.

Deve-se armar uma proporção:

$$\begin{aligned} 360^\circ &\rightarrow 2\pi 5 \\ 60^\circ &\rightarrow x \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2\pi 5 \cdot 60^\circ}{360^\circ} \\ x &= 5,23\ cm \end{aligned}$$

2.6 Representação geométrica de um número

Aqui, vamos representar geometricamente um número na reta real e também na circunferência orientada.

2.6.1 Na reta numerada

Para localizar um número na reta numérica, traçamos uma reta e adotamos um de seus pontos como zero. Veja na figura 2.12, esta representação. Estabelecemos em seguida um sentido positivo (convencionalmente à direita do zero) e um sentido negativo (em sentido oposto), e uma unidade de medida.

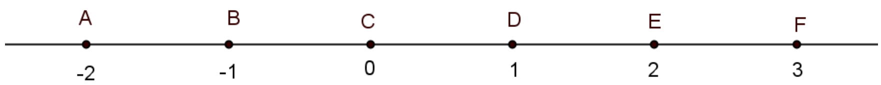


Figura 2.12: Representação da reta numérica.

A partir daí, podemos marcar qualquer número nessa reta, por exemplo, $A = 1$ e $B = 2,5$. Acompanhe ilustração na figura 2.13.

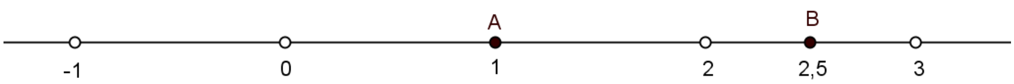


Figura 2.13: Localização de pontos na reta numérica.

Desta mesma maneira, vamos desenvolver uma forma de representar números em uma circunferência.

Para localizar um número na circunferência, esboçamos uma circunferência e adotamos um de seus pontos como zero, veja figura 2.14. Estabelecemos em seguida um sentido. Convencionalmente o sentido positivo é o anti-horário.

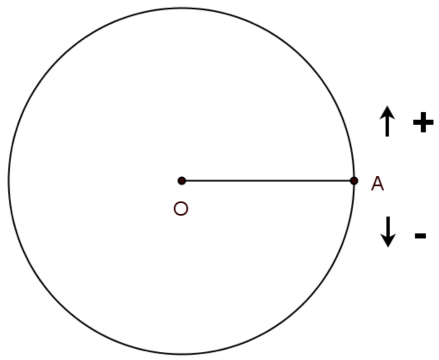


Figura 2.14: Circunferência orientada.

Se adotarmos o raio da circunferência como nossa unidade de medida, estaremos medindo os arcos na unidade Radiano, assim, a cada número real x adotado, corresponderá um ponto P na circunferência, de tal forma que o arco $\widehat{\mathrm{AP}}$ mede x rad.

Desta forma, numa circunferência de raio 1, o ponto correspondente ao número $x = 3$, representará, no sentido anti-horário, ao arco $\widehat{\mathrm{AP}}$ de medida 3 rad. Acompanhe pela figura 2.15.

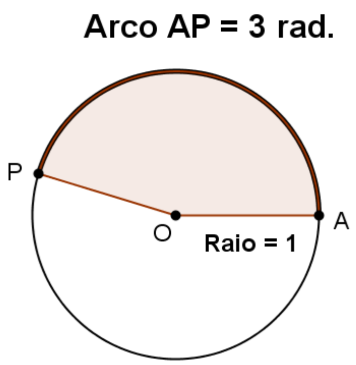


Figura 2.15: Arco de 3 rad na circunferência.

Veja que partindo da origem A, ao girarmos um número inteiro de voltas completas no sentido anti-horário, voltaremos sempre ao ponto A, que representará os arcos $0,\ 2\pi,\ 4\pi, \cdots$ etc , enquanto que, se dermos um número inteiro de voltas completas no sentido horário, voltaremos sempre ao ponto A que representará os arcos 0, -2π, $-4\pi, \cdots$, etc.

Da mesma forma, se adotarmos a unidade Grau, a cada valor adotado para x, corresponderá a um ponto P na circunferência de tal forma que o arco $\widehat{\mathrm{AP}}$ mede x graus. Assim, para $x = 30°$ teremos um ponto P na circunferência tal que $\widehat{\mathrm{AP}} = 30°$. Partindo de P e girando um número inteiro de voltas completas no sentido anti-horário, voltaremos sempre ao ponto P que representará os arcos de medidas 390°, 750°, 1110°..., etc., conforme mostra a figura 2.16.

Podemos representar todos esses arcos através de uma lei matemática denominada Expressão Geral dos arcos, assim: $x = 30° + k.\ 360°$, onde k é um número inteiro.

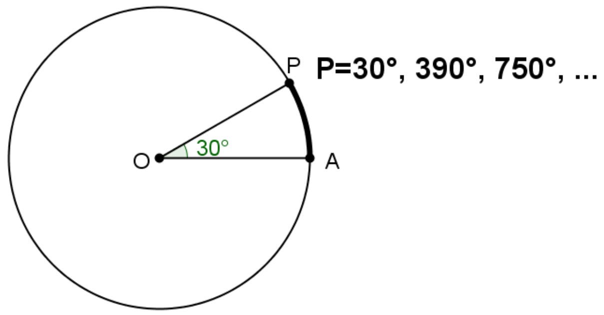


Figura 2.16: Arcos côngruos com primeira determinação de 30°.

Aí está a grande diferença entre a reta e a circunferência. Enquanto na reta, cada valor de x corresponde a um único ponto P marcado sobre ela, na circunferência, a cada valor de x adotado, teremos um ponto P na circunferência que representará uma infinidade de arcos.

É por isso que chamamos esta circunferência orientada de ciclo, ou ciclo trigonométrico, pois os pontos se repetem a cada volta, facilitando assim, o entendimento de funções que se repetem periodicamente, como por exemplo, quando precisamos estudar as marés e assim determinar a altura da água do mar no decorrer de um dia, ou estudar a velocidade de aspiração e expiração de ar dos pulmões de um indivíduo. Mais adiante veremos como isto poderá ser estudado.

2.7 O Ciclo Trigonométrico

O ciclo trigonométrico é uma circunferência de raio unitário ($r = 1$) com centro na origem do sistema cartesiano, dividida pelos eixos coordenados em quatro partes denominadas quadrantes, nomeados a partir do ponto $A(1, 0)$ no sentido anti-horário. Veja representação na figura 2.17.

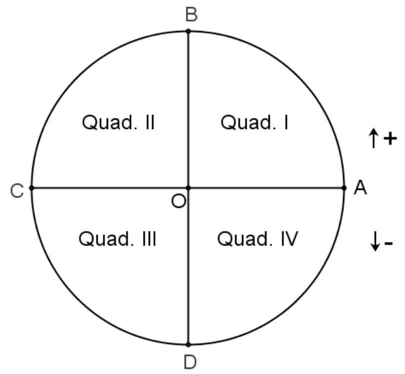


Figura 2.17: Ciclo trigonométrico

Como já vimos, para cada número real "x", existe um ponto P no ciclo de tal forma que a medida do arco $\widehat{\text{AP}}$ mede x e a esse ponto ficará associado sua abscissa x_p e sua ordenada y_p, conforme ilustrado na figura 2.18.

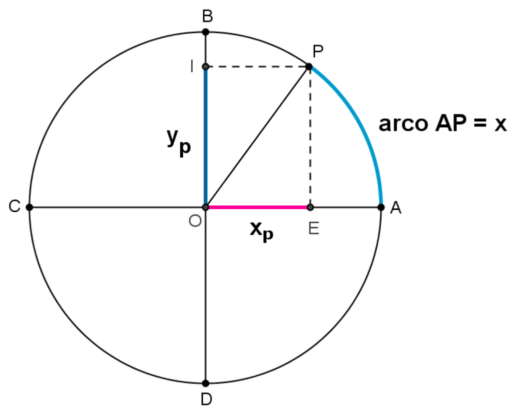


Figura 2.18: Arco de medida x e suas coordenadas x_p e y_p.

$$
\begin{aligned}
P &= (x_p, y_p) \\
P &= (\cos(x), \operatorname{sen}(x))
\end{aligned}
$$

O número x_p é chamado cosseno de x e o número y_p é chamado seno de x, assim:

$$\boxed{x_p = \cos(x)}\boxed{y_p = \operatorname{sen}(x)}$$

Percebe-se que, para todo valor de x corresponde um ponto no ciclo, cujas coordenadas cartesianas são respectivamente $\cos(x)$ e $\operatorname{sen}(x)$ variando entre -1 e 1, caracterizando assim, que $\operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x)$ são funções de x que variam de acordo com as tabelas abaixo:

$-1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1$	$-1 \leq \cos(x) \leq 1$

2.8 A relação fundamental

Lembrando que o raio do ciclo trigonométrico mede um, temos a aplicação direta do Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo destacado na figura 2.19.

O Teorema de Pitágoras garante que "Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos", então no triângulo destacado, temos: $1^2 = (\operatorname{sen}(x))^2 + (\cos(x))^2$.

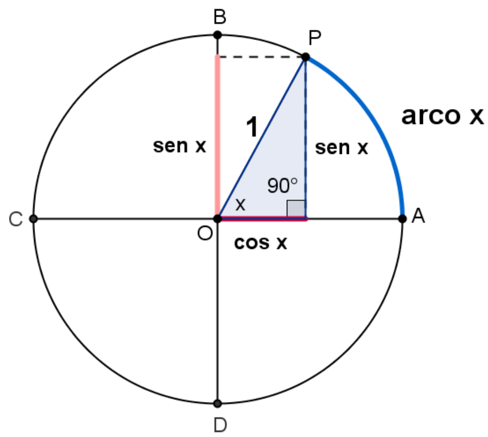


Figura 2.19: Ciclo Trigonométrico.

Assim, $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$ é conhecida como a Relação Fundamental, da qual podemos concluir:

$$\operatorname{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x) \qquad \text{e} \qquad \cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x)$$

2.9 A função seno

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é denominada função seno quando associa a cada número real x (arco $\widehat{\mathrm{AP}}$) ao número real $\operatorname{sen}(x)$. $$f(x) = \operatorname{sen}(x)$$

Quando utilizamos o programa GeoGebra, fica muito fácil a compreensão da variação dos valores do seno dos ângulos da primeira volta do ciclo trigonométrico, já que a animação da figura faz com que os arcos $AP = x$ variem no intervalo de 0 a 360°, levando o aluno a perceber que os valores do seno dos arcos estão variando de 0 a 1, e daí até -1, voltando a oscilar novamente a cada volta completa no ciclo. A geometria dinâmica permite esta análise de forma clara e prática. A figura 2.20 mostra essa variação.

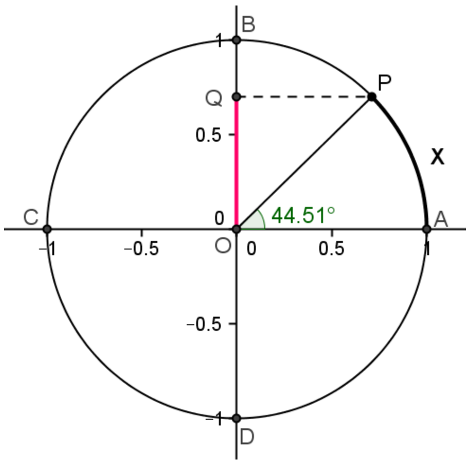


Figura 2.20: Deslocamento do arco $AP = x$ sobre o ciclo trigonométrico.

Já a figura 2.21 mostra a representação gráfica da função $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.

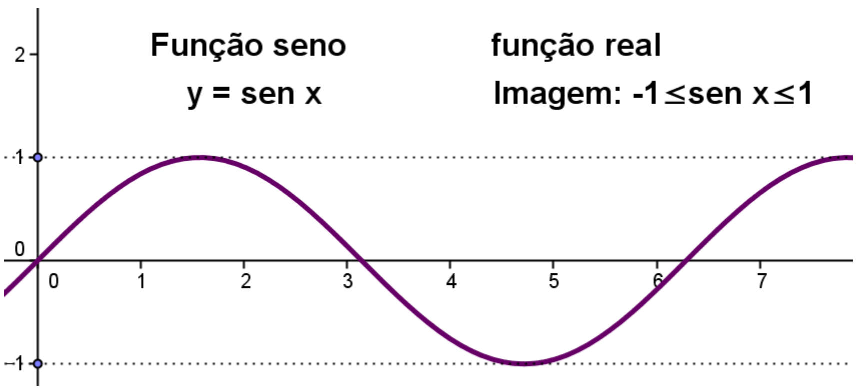


Figura 2.21: Função $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.

2.9.1 As características da função seno

- A imagem da função seno é o intervalo $[-1, 1]$, ou seja $-1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1$, para qualquer x real.

- A função seno é periódica e seu período é 2π, pois, como vemos na figura 2.20, $\operatorname{sen}(x) = OQ$ e também $\operatorname{sen}(x + k2\pi) = OQ$, para valores de $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, o período é o menor valor positivo de $k2\pi$ que é 2π.

- A função seno é ímpar, pois para qualquer valor real x e seu simétrico $-x$, tem-se $f(-x) = -f(x)$. Exemplo: $f\left(\dfrac{-\pi}{2}\right) = -f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$.

2.9.2 As simetrias da função seno

A partir de um número real x, medida do arco $\widehat{\mathrm{AP}}$, serão associados arcos simétricos a x como mostra a figura 2.22, arco $\widehat{\mathrm{AT}} = \pi - x$, $\widehat{\mathrm{AR}} = \pi + x$ e $\widehat{\mathrm{AS}} = 2\pi - x$.

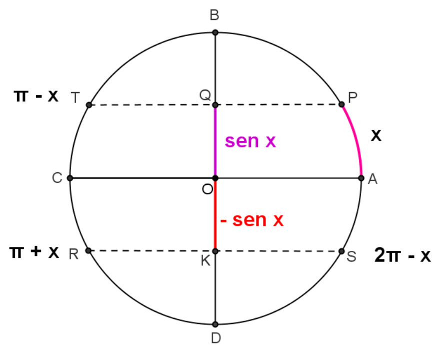


Figura 2.22: As simetrias na função seno.

Pela figura 2.22 tem-se, $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen}(x)$ enquanto que $\operatorname{sen}(\pi + x) = \operatorname{sen}(2\pi - x) = -\operatorname{sen}(x)$, por exemplo, se $x = \frac{\pi}{6}$ podemos concluir que $\operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ e também $\operatorname{sen}\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

Na simulação representada pela figura 2.23, o ciclo trigonométrico foi deslocado para a esquerda da origem do plano cartesiano centrado no ponto $A = (-1, 0)$, para que desta forma tenhamos a real compreensão do desenvolvimento da função seno quando o arco x se desloca de 0 a 360°, representado no eixo Ox em radianos, fazendo assim a associação entre a medida do arco x medido em graus e em radianos. Ao comando de animar a figura através do controle deslizante, o aluno percebe a variação dos arcos numa volta completa no ciclo e associado a isso, os pontos S aparecem ao lado, construindo o gráfico da função $f(x) = \text{sen}\,(x)$, num período completo.

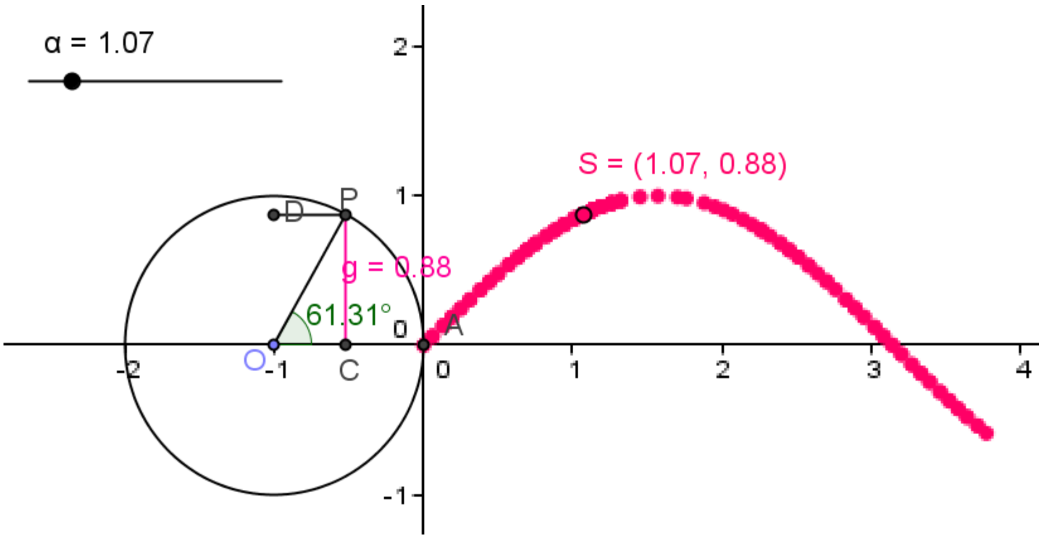


Figura 2.23: Ciclo trigonométrico e Função $f(x) = \text{sen}\,(x)$.

Quando estudamos eletricidade, um dos ramos mais importantes da física, realizamos uma experiência que consiste em ligar um fio condutor nos polos de uma pilha para acender uma lâmpada, o que faz com que os elétrons livres desse fio, que antes estavam em movimento desordenado, passem a ter um deslocamento preferencial. Como a pilha é um gerador de corrente contínua, o fio é percorrido por uma corrente que vai sempre do polo positivo para o negativo, e esta polaridade não muda com o passar do tempo.

Existem também fontes de tensão, como as que utilizamos em nossas cidades, que geram correntes alternadas, onde o sentido da corrente se inverte periodicamente. Num certo intervalo de tempo, denominado período, o sentido da corrente se inverte duas vezes. Na primeira metade do período, a corrente vai de um polo para o outro, enquanto na segunda metade, a corrente volta para o polo inicial.

A frequência da corrente alternada é o número de períodos ou ciclos realizados em um segundo e será expresso em ciclos por segundos ou Hertz. No Brasil, esta frequência é da ordem de 60 ciclos por segundo ou 60 Hertz, isto é, um ciclo tem duração de $\frac{1}{60}$ de segundo.

Vejamos como varia a tensão durante um ciclo completo aqui no Brasil.

No instante $t = 0$, a tensão é $V = 0$. A partir daí, ela cresce e atinge o valor máximo em $\frac{1}{240}s$, decrescendo em seguida, voltando a ser zero no instante $t = \frac{2}{240}s$, completando meio ciclo. Nesse instante a polaridade se inverte e dá início a outro meio ciclo atingindo valores negativos, até chegar ao valor mínimo no instante $t = \frac{3}{240}s$. Em seguida, volta a crescer e atinge o valor zero no instante $t = \frac{4}{240}s$, quando completa o ciclo. A partir daí, a polaridade se inverte e outro ciclo recomeça. Acompanhe esse processo na figura 2.24.

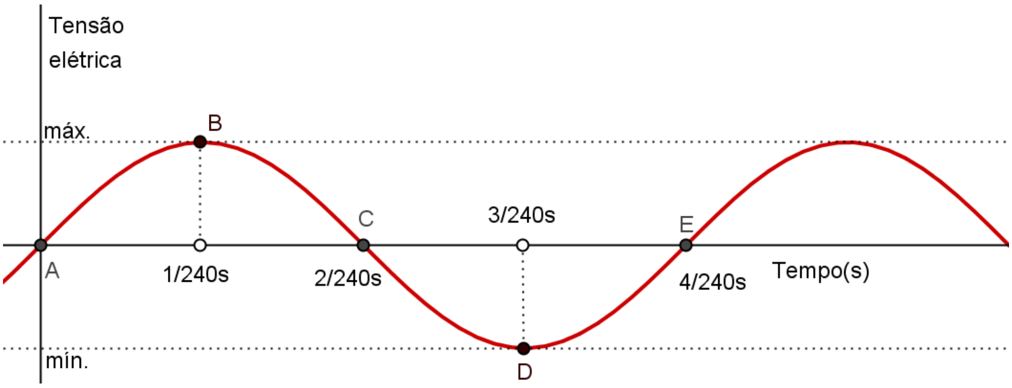


Figura 2.24: Variação da tensão elétrica em um período completo.

2.10 A função cosseno

Outra importante função periódica que muito nos auxilia no entendimento de certos fenômenos físicos e sociais de comportamento cíclico é a função cosseno. Vamos então estudar a variação dessa função.

> A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é denominada função cosseno quando associa a cada número real x (medida do arco $\widehat{\mathrm{AP}}$) ao número real $\cos(x)$.
>
> $$f(x) = \cos(x)$$

Dado um ponto P no ciclo trigonométrico cujo arco $\widehat{\mathrm{AP}}$ tem medida x e considerando a projeção ortogonal do ponto P no eixo horizontal, a abscissa x_p do ponto P é o cosseno desse arco de medida x (segmento OQ). A figura 2.25 mostra a representação do cosseno do arco $AP = x$.

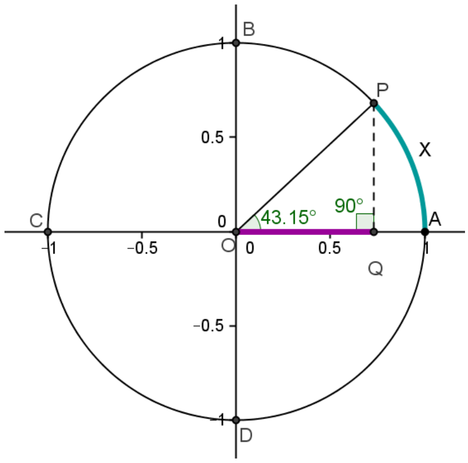


Figura 2.25: Representação do cosseno do arco $AP = x$.

Assim, a função cosseno é a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada número real x ao número real $x_p = \cos{(x)}$, ou seja, $f(x) = \cos{(x)}$.

O programa de geometria dinâmica GeoGebra permite a fácil visualização da variação dos valores do cosseno dos arcos $AP = x$, pois ao comando de animar a figura 2.25 percebe-se o deslocamento do arco x entre 0° e 360° e a projeção ortogonal OQ do ponto P sobre o eixo das abscissas, representando o cosseno do arco x, que varia entre 1 e -1.

Quando analisamos o desenvolvimento da função no ciclo trigonométrico, o programa nos permite também construir o gráfico da função $f(x) = \cos{(x)}$ num período completo, dando a ideia real de movimento da função.

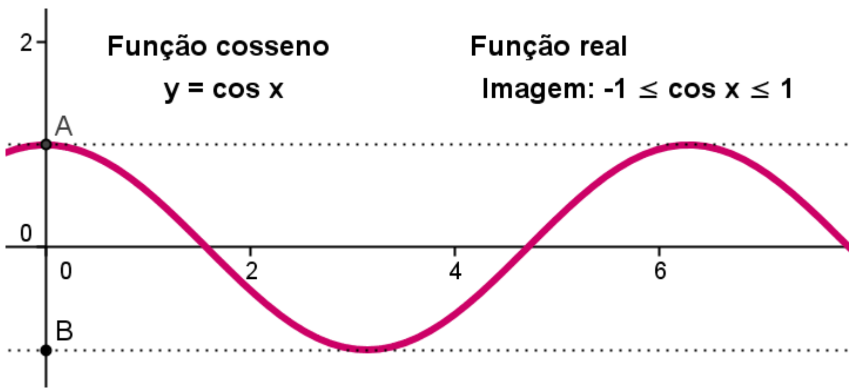


Figura 2.26: Representação gráfica da função $y = \cos{(x)}$.

2.10.1 As características da função cosseno

- A imagem da função cosseno é o intervalo $[-1, 1]$, ou seja $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, para qualquer x real.

- A função cosseno é periódica e seu período é 2π, pois na figura 2.25 $\cos(x) = OQ$ e também $\cos(x + k2\pi) = OQ$, para valores de $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, o período é o menor valor positivo de $k2\pi$ que é 2π.

- A função cosseno é par, pois para qualquer valor real x e seu simétrico $-x$, tem-se $f(-x) = f(x)$. Exemplo: $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2.11 As simetrias da função cosseno

A partir de um número real x, medida do arco $\widehat{AP}$, serão associados arcos simétricos a x como mostra a figura 2.27, arco $\widehat{AQ} = \pi - x$, $\widehat{AR} = \pi + x$ e $\widehat{AS} = 2\pi - x$.

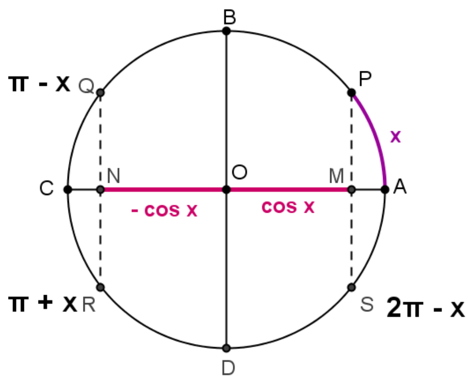


Figura 2.27: As simetrias do cosseno.

Nota-se que, $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ e também $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$, enquanto $\cos(2\pi - x) = \cos(x)$. Por exemplo, se $x = \dfrac{\pi}{3}$, podemos concluir que $\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ da mesma forma que $\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ e também $\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

Nesta simulação, o ciclo trigonométrico foi deslocado para a esquerda dos eixos coordenados para proporcionar a real compreensão dos valores do cosseno do arco $\widehat{AP} = x$ à medida que seus valores percorrem o intervalo de 0 a 360°. Acionando o controle deslizante ao lado do gráfico, os arcos x variam com medida em radianos, o que faz aparecer no plano os pontos S de coordenadas $(x, \cos(x))$, num período completo. Acompanhe pela figura 2.28.

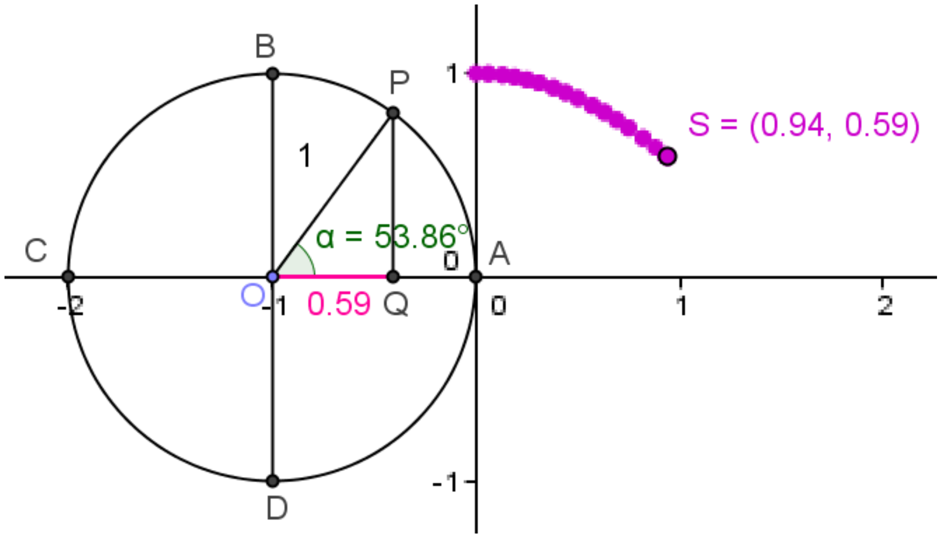


Figura 2.28: Ciclo trigonométrico e função $y = \cos(x)$.

2.11.1 Aplicação da função cosseno na Física

Vamos fazer uma experiência com um bloco B preso à extremidade de uma mola, em torno de um ponto de equilíbrio O. Experiência esta proposta por Carron, p.479.

"Se distendermos a mola, afastando o bloco até a posição A_1, e o abandonarmos, ele passará a oscilar em trajetória retilínea em torno do ponto O em um movimento conhecido como Movimento Harmônico Simples". Para simular este movimento, basta acionar o controle deslizante da figura 2.29, mostrando que, quando o bloco parte da posição A_1 no instante $t = 0s$, ele atinge o ponto de equilíbrio com velocidade máxima, comprimindo a mola até parar na posição A_2 (simétrico de A_1 em relação ao ponto O).

Em seguida, empurrado pela mola, o movimento se inverte e o bloco se desloca no sentido contrário passando pelo ponto de equilíbrio O com velocidade máxima, distendendo a mola até parar na posição A_1, dando início a um novo ciclo. Este movimento é descrito pela função cosseno, como podemos observar na simulação apresentada abaixo, pela figura 2.29.

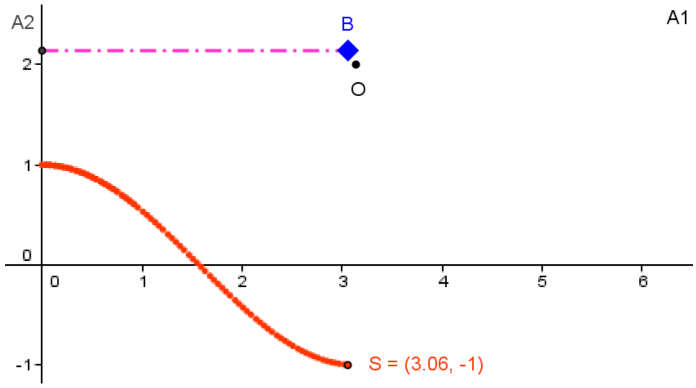


Figura 2.29: Bloco P preso por mola ao ponto A_2 e descrição do movimento através da função cosseno.

O tempo necessário para que o bloco B parta da posição A_1 e chegue até a posição A_2, o que o faz inverter seu movimento e voltar novamente para a posição A_1 é denominado período P da função. Na figura abaixo, acionando o controle deslizante, podemos observar o período da função com muita clareza.

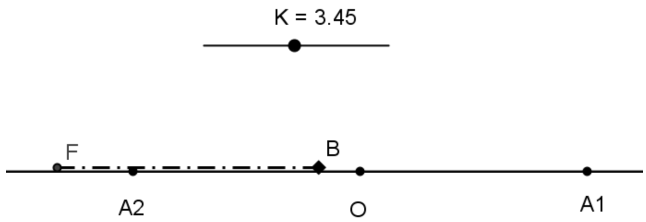


Figura 2.30: Bloco preso por mola.

2.12 A função tangente

A função $f : \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada função tangente quando associa a cada número real de seu domínio, ao número real $\operatorname{tg}(x)$, isto é:

$$f(x) = \operatorname{tg}(x)$$

O eixo das tangentes é obtido no ciclo trigonométrico traçando-se uma reta tangente à circunferência pelo ponto $A(1,0)$.

Quando adotamos um valor para "x", determinamos um arco $\widehat{AP}$ cuja tangente é obtida traçando-se uma reta que liga o centro O ao ponto P. Esta reta intercepta o eixo das tangentes no ponto Q e a medida do segmento AQ é a tangente de x. Na figura 2.31, veja que $AQ = \operatorname{tg}(x) = t$.

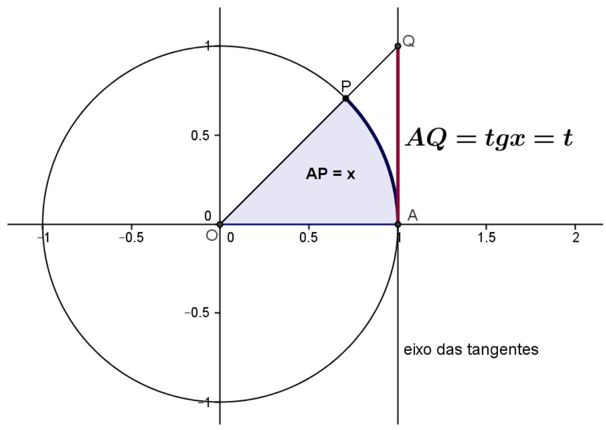


Figura 2.31: Ciclo trigonométrico e o eixo das tangentes.

Para estudar o comportamento da função tangente, é importante dar uma volta completa no ciclo.

Partindo do ponto A onde a tangente vale zero, à medida que "x" aumenta, o ponto P se distancia de A e a tangente aumenta. Quanto mais próximo de B estiver o ponto A, maior fica a tangente de x, como mostra a figura 2.32. Quando P coincide com B, a reta que liga o centro O ao ponto P é paralela ao eixo das tangentes, fazendo com que não exista a tangente para 90° $\left(\frac{\pi}{2}rad.\right)$.

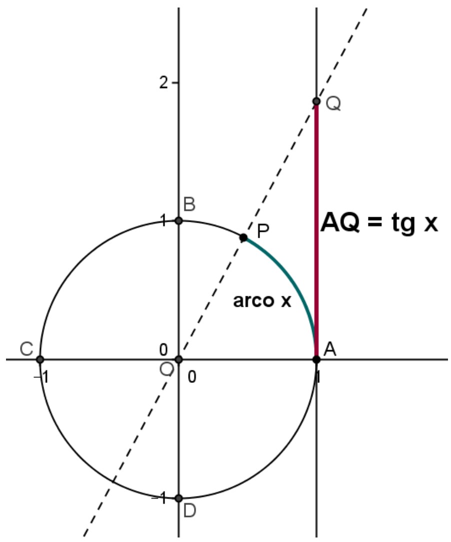


Figura 2.32: Ciclo trigonométrico com a marcação da tangente do arco x no primeiro quadrante.

Quando passamos de B, o ponto Q surge na parte negativa do eixo das tangentes, e, à medida que nos aproximamos de C, o valor da tangente se aproxima de zero. Em C

a tangente vale zero, e, fecha-se assim, o primeiro ciclo. Acompanhe o desenvolvimento da função tangente no segundo quadrante através da figura 2.33.

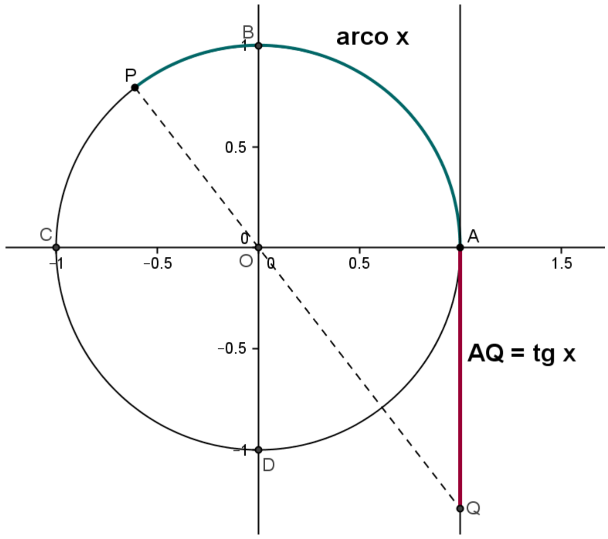


Figura 2.33: Ciclo trigonométrico com a marcação da tangente do arco x no segundo quadrante.

Quando ultrapassamos o ponto C, entramos no terceiro quadrante e o comportamento da função é idêntico ao primeiro quadrante, até atingir o ponto D (270°) onde também não existe tangente.

A figura 2.34 mostra esta representação com muita clareza.

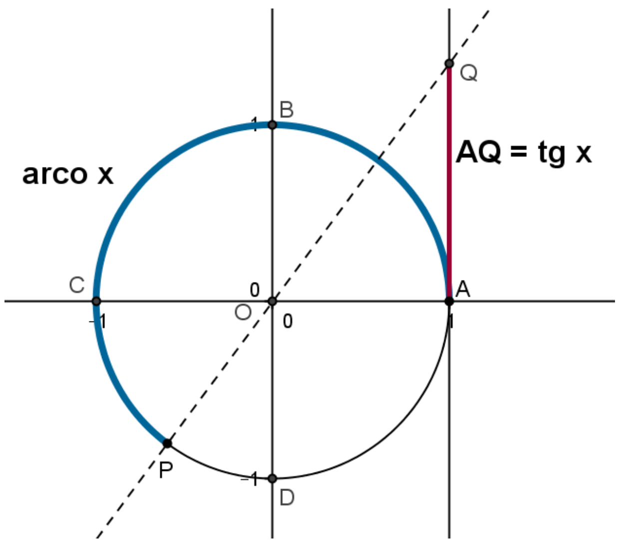


Figura 2.34: Ciclo trigonométrico com a marcação da tangente do arco x no terceiro quadrante.

No quarto quadrante, os pontos são simétricos ao segundo, terminando o segundo ciclo no ponto A, conforme mostra a figura 2.35.

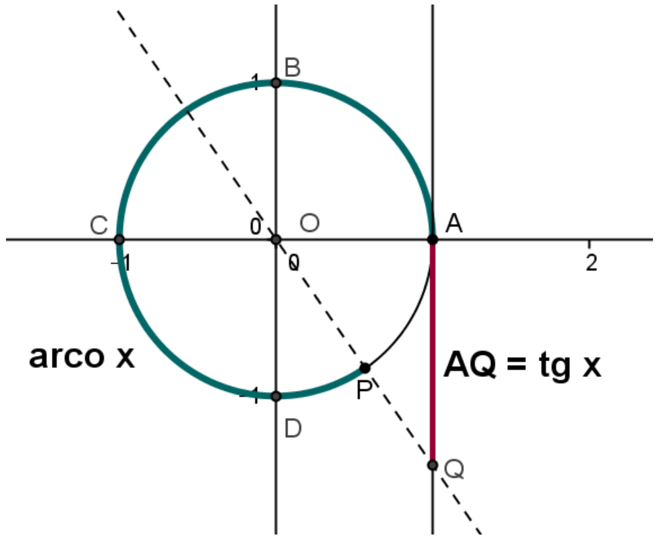


Figura 2.35: Ciclo trigonométrico com a marcação da tangente do arco x no quarto quadrante.

O período da função tangente é de 180° ou π rad., pois a cada meia volta no ciclo trigonométrico, tudo volta a se repetir. No gráfico da função tangente mostrado na figura 2.36, as retas verticais que passam pelos pontos de abscissa $\frac{\pi}{2} + k\pi$; com $k\pi\mathbb{Z}$, são denominadas assíntotas da curva que representa a tangente do ângulo x, denominada *tangentóide*. Quando um ponto qualquer do gráfico se move ao longo dessa curva, afastando-se da origem, a distância desse ponto à assíntota se aproxima de zero.

Para acompanhar todo o desenvolvimento da função tangente no ciclo trigonométrico, basta acionar o controle deslizante da figura 2.36 que o gráfico se desenvolve em dois períodos completos.

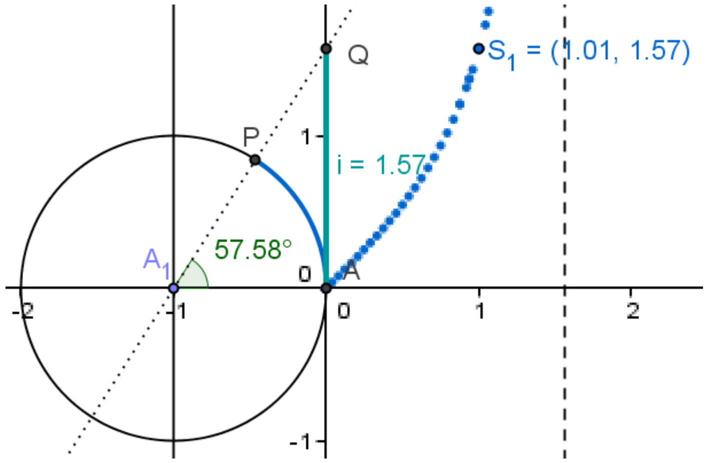


Figura 2.36: Ciclo trigonométrico e desenvolvimento da função tangente.

2.12.1 As características da função tangente

- A imagem da função tangente é o conjunto dos números reais, pois, para cada y real, existe um x real tal que $\operatorname{tg}(x) = y$.

- A função tangente é periódica e o seu período é π, pois, considerando que $\operatorname{tg}(x) = AQ$ e para $k \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{tg}(x + k\pi) = AQ$, pode-se observar pela figura 2.37, que x e $x + k\pi$ são pontos diametralmente opostos, tendo assim o mesmo valor de tangente, ou seja $\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(x + k\pi)$, mostrando que a função tangente é periódica e o seu período é o menor valor positivo para $k\pi$, ou seja π.

- A função tangente é ímpar, pois, para qualquer número real x e seu simétrico $-x$, tem-se $f(-x) = -f(x)$, por exemplo, $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$.

2.12.2 As simetrias da função tangente

A partir de um número real x, medida do arco $\widehat{\mathrm{AP}}$, serão associados arcos simétricos a x como mostra a figura 2.37, arco $\widehat{\mathrm{AT}} = \pi - x$, $\widehat{\mathrm{AR}} = \pi + x$ e $\widehat{\mathrm{AS}} = 2\pi - x$.

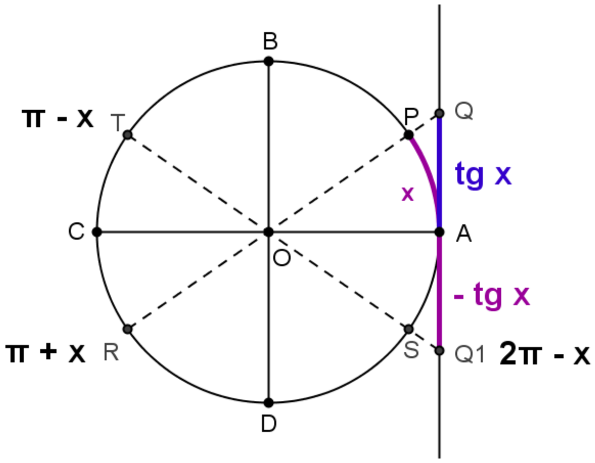


Figura 2.37: As simetrias da função tangente.

Note que, $\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(\pi + x)$ e $\operatorname{tg}(\pi - x) = \operatorname{tg}(2\pi - x) = -\operatorname{tg}(x)$. Assim, por exemplo, se $x = \frac{\pi}{4}$, podemos concluir que $\operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1$ e que $\operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$, assim como $\operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -1$.

São frequentes as questões de vestibulares tratando do domínio da função tangente.

Exemplo 2.12.1. Atividade proposta por Iezzi, (2010)

Determinar o domínio da função real $f(x) = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Solução. Conforme foi abordado, a função tangente não admite arcos côngruos a $\frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k\pi\mathbb{Z}$.

Assim:

$$\begin{aligned}
2x + \frac{\pi}{6} &\neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\
2x &\neq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + k\pi \\
2x &\neq \frac{\pi}{3} + k\pi \\
x &\neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, \text{ para } k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Logo, o domínio da função $f(x) = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ é

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Capítulo 3

Aplicações das Funções Trigonométricas

As funções trigonométricas seno, cosseno e tangente são muito utilizadas na modelagem matemática de fenômenos naturais periódicos, daí a importância de seu estudo e suas aplicações no nosso cotidiano, pois, com algumas alterações, desenvolvem gráficos mais complexos, que estudaremos a seguir.

3.1 As alterações nas funções trigonométricas

O estudo das funções até aqui desenvolvido, apresenta as funções trigonométricas fundamentais $y = \operatorname{sen}(x)$, $y = \cos(x)$ e $y = \operatorname{tg}(x)$. Porém, é muito comum que essas funções sofram algumas alterações, provocadas pelos parâmetros a, b, c e d fazendo com que o gráfico de funções do tipo $y = a + b\operatorname{sen}(cx + d)$, $y = a + b\cos(cx + d)$ ou $y = a + b\operatorname{tg}(cx + d)$ se torne mais complexo.

O objetivo desse tópico é possibilitar ao aluno a construção de gráficos sem o uso de tabelas. Para isso é fundamental o entendimento do papel que cada parâmetro desempenha na função estudada.

3.2 O coeficiente a

O gráfico de funções trigonométricas do tipo:

$y = a + \operatorname{sen}(x)$	$y = a + \cos(x)$	$y = a + \operatorname{tg}(x)$

sofre uma translação de $|a|$ unidades em relação ao gráfico original, da seguinte forma:

Se $a > 0$, a translação é de $|a|$ para cima.
Se $a < 0$, a translação é de $|a|$ para baixo.

3.2.1 Funções do tipo $y = a + \text{sen}\,(x)$

Vamos observar a alteração provocada pelo parâmetro a na função $y = \text{sen}\,(x)$.

A figura 3.1 mostra a alteração provocada pelo parâmetro a na função $f(x) = a + \text{sen}\,(x)$. Para ter a visualização completa desta alteração, basta acionar o controle deslizante indicado na figura que deslocará o gráfico da função $g(x) = \text{sen}\,(x)$ para cima e para baixo, no intervalo $0 \leq a \leq 2$.

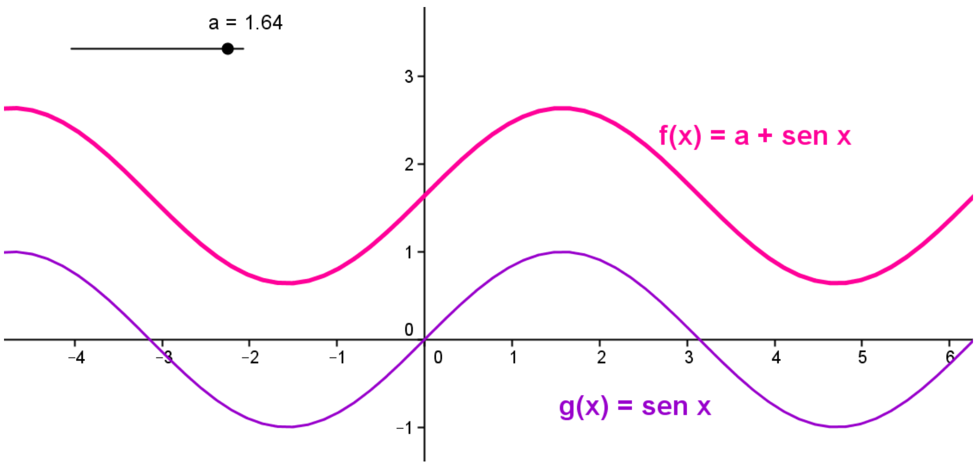


Figura 3.1: Alteração provocada pelo parâmetro a na função $f(x) = a + \text{sen}\,(x)$.

3.2.2 Funções do tipo $y = a + \cos\,(x)$.

Vejamos o comportamento da função $y = \cos\,(x)$ com a presença do parâmetro a.

A figura 3.2 mostra a alteração provocada pelo parâmetro a na função $g(x) = \cos\,(x)$, para ter a visualização completa desta alteração, basta acionar o controle deslizante indicado na figura que, neste caso, fará o deslocamento da função $g(x) = \cos\,(x)$ para a função $f(x) = a + \cos\,(x)$, com valores de $a \in [-1, 2]$, subindo ou descendo o gráfico de $g(x)$.

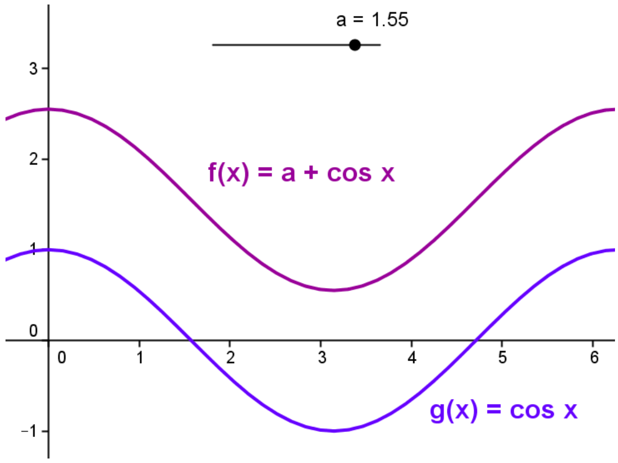


Figura 3.2: Alteração provocada pelo parâmetro a na função $f(x) = a + \cos(x)$.

3.2.3 Funções do tipo $y = a + \text{tg}\,(x)$.

A figura 3.3 mostra a alteração provocada pelo parâmetro a na função $g(x) = \text{tg}\,(x)$. Para termos a visualização completa desta alteração, basta acionar o controle deslizante indicado na figura que, neste caso, fará o deslocamento da função $g(x) = \text{tg}\,(x)$ para a função $f(x) = a + \text{tg}\,(x)$, para cima ou para baixo, segundo os valores de $a \in [-1, 2]$.

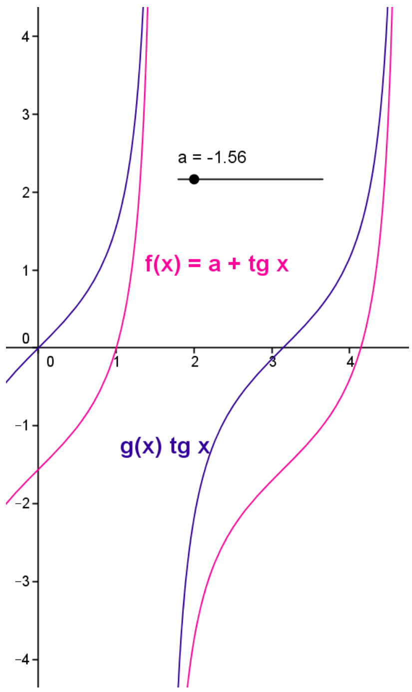


Figura 3.3: Alteração provocada pelo parâmetro a na função $f(x) = a + \text{tg}\,(x)$.

Vejamos um exemplo, inspirado em atividade proposta por Fugita, (2009) Considere a função: $f(x) = 3 + \operatorname{sen}(x)$

Ao observar as funções $f(x) = 3 + \operatorname{sen}(x)$ e $g(x) = \operatorname{sen}(x)$, nota-se que ambas possuem o mesmo domínio e mesmo período, porém o gráfico de $g(x)$ foi transladado três unidades para cima, pois como $a = 3$ faz com que o conjunto imagem de $f(x)$ seja o intervalo $[2, 4]$. Se o valor de a fosse igual a -3 teríamos a mesma translação, porém para baixo.

Para melhor compreensão da alteração provocada pelo parâmetro a, os gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$ foram construídos num mesmo sistema cartesiano, na figura 3.4.

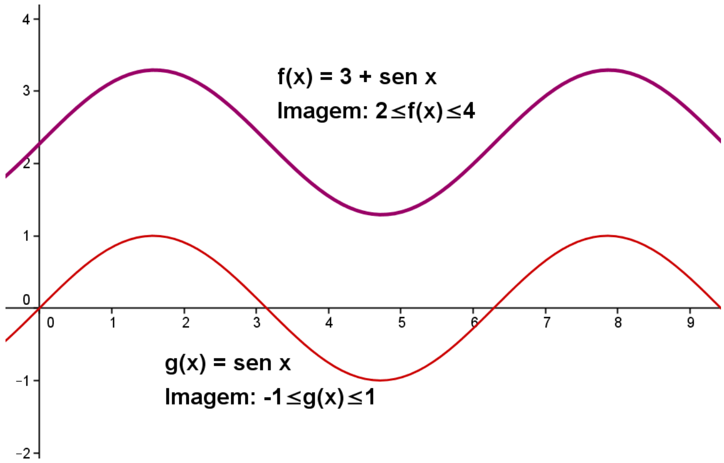


Figura 3.4: Função seno sofrendo alteração pelo parâmetro $a = 3$ e $f(x) = 3 + \operatorname{sen}(x)$.

3.3 O coeficiente b.

O gráfico de funções do tipo:

$y = b\operatorname{sen}(x)$	$y = b\cos(x)$

Nas funções do tipo $y = b\operatorname{sen}(x)$ e $y = b\cos(x)$ não ocorre translação, nem horizontal nem vertical, pois o parâmetro b altera a amplitude das funções, multiplicando seu conjunto imagem por $|b|$.

Estas funções terão amplitude $|b|$, enquanto que esta análise para a função tangente não é necessária, pois, neste caso, não se trabalha com amplitude, pois a função tangente é ilimitada. $(Im = \mathbb{R})$.

Vamos observar essas alterações nos dois casos propostos.

3.3.1 Funções do tipo $y = b\,\mathbf{sen}\,(x)$

Na figura 3.5, acionando o controle deslizante, o parâmetro b provocará a alteração na amplitude do gráfico da função $y = \text{sen}\,(x)$ para valores de b programados no intervalo $0 \leq b \leq 5$, fazendo com que o conjunto imagem da função $y = b\,\text{sen}\,(x)$ seja o conjunto $Im = [-5, 5]$.

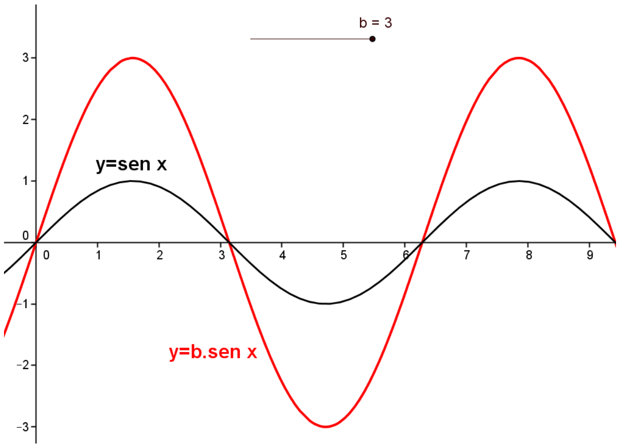


Figura 3.5: Função seno sofrendo alteração pelo parâmetro b.

3.3.2 Funções do tipo $y = b\cos(x)$

Na figura 3.6, quando o controle deslizante é acionado, o parâmetro b provocará a alteração na amplitude do gráfico da função $y = \cos(x)$ para valores de b programados no intervalo $0 \leq b \leq 5$.

Isso faz com que as imagens da função sejam alteradas, variando no intervalo $[-5, 5]$.

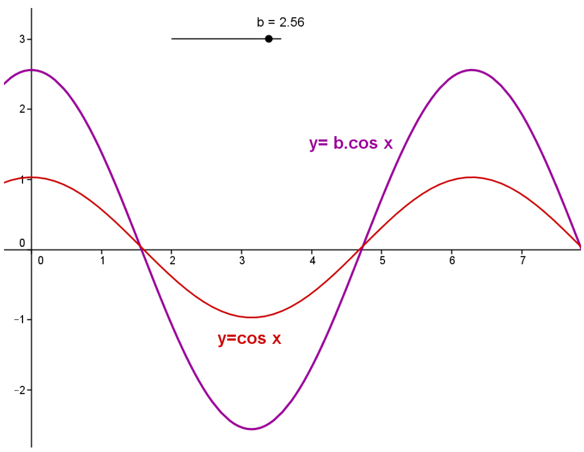


Figura 3.6: Função cosseno sofrendo alteração pelo parâmetro b.

Exemplo 3.3.1. Inspirado em Fugita, (2009)

Seja a função $f(x) = 2\cos(x)$

Solução. Esta função apresenta mesmo domínio e período que $h(x) = \cos(x)$, porém sua amplitude é 2, o dobro da amplitude de $h(x)$, conforme verifica-se abaixo:

Sabe-se que para todo x real, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.

Quando multiplicamos ambos os membros dessas desigualdades por 2, temos: $-2 \leq 2\cos(x) \leq 2$, ou seja, $-2 \leq f(x) \leq 2$ conforme os gráficos a seguir, representados na figura 3.7.

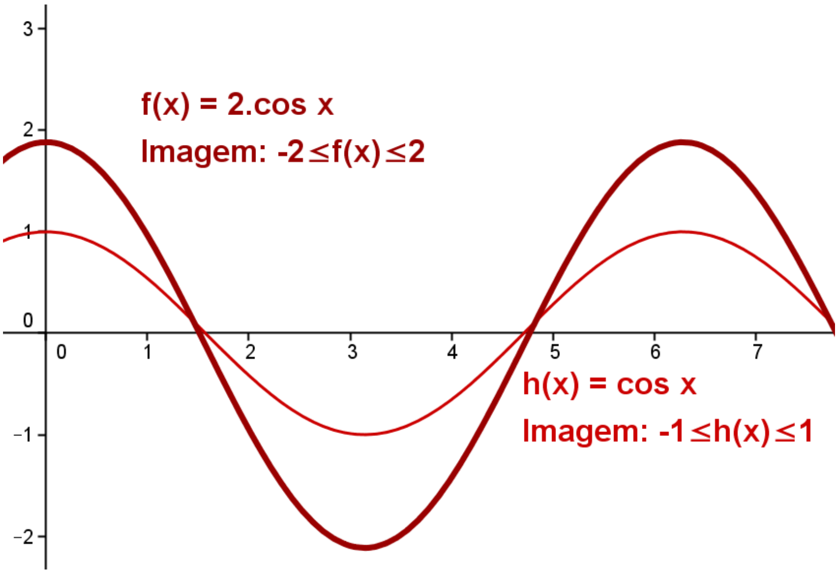


Figura 3.7: Função $h(x) = \cos(x)$ sofre alteração pelo parâmetro $b = 2$ e função $f(x) = 2\cos(x)$.

3.4 O coeficiente d

O gráfico de funções do tipo:

$y = \text{ sen }(x+d)$	$y = \cos(x+d)$	$y = \text{ tg }(x+d)$

Sofre uma translação (deslocamento) de $|d|$ unidades em relação ao gráfico original da seguinte forma:

Se $d > 0$, a translação é de $|d|$ unidades para a esquerda.
Se $d < 0$, a translação é de $|d|$ unidades para a direita.

3.4.1 Funções do tipo $y = \mathbf{sen}\,(x + d)$

Na figura 3.8, quando o controle deslizante é acionado, o parâmetro d provocará a alteração do gráfico da função $y = \operatorname{sen}(x)$ para valores de d programados no intervalo $0 \leq d \leq \pi$, deslocando o gráfico da função $y = \operatorname{sen}(x)$ para a esquerda em $|d|$ unidades.

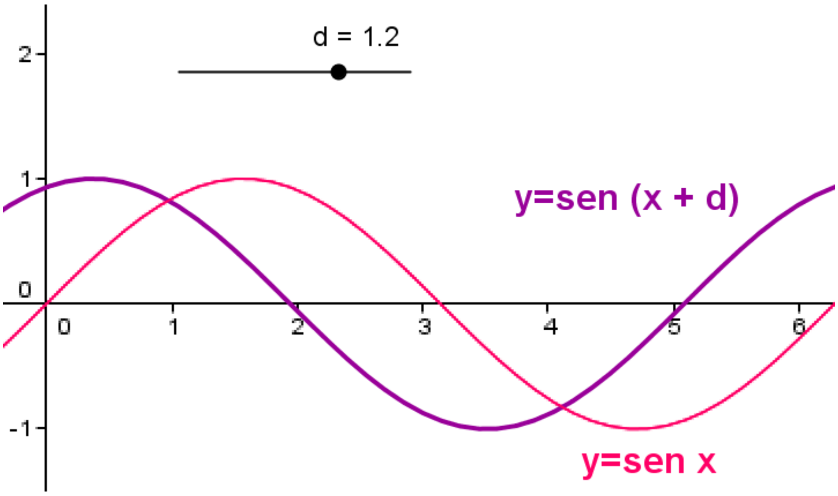


Figura 3.8: Função seno sofre alteração pelo parâmetro d.

3.4.2 Funções do tipo $y = \cos(x + d)$

Na simulação representada pela figura 3.9, a função $y = \cos(x)$ sofre a alteração provocada pelo parâmetro d que deslocará o gráfico para a direita ou para a esquerda dependendo do valor de d. No caso aqui representado, os valores de d estão variando no intervalo $[-\pi, \pi]$.

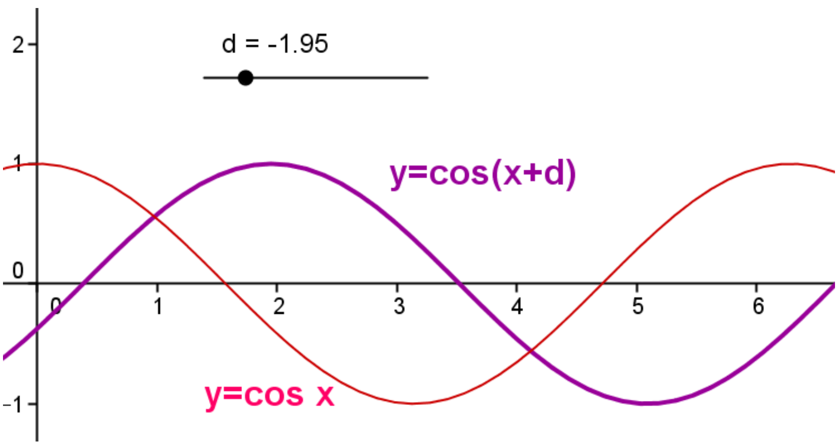


Figura 3.9: Função cosseno sofre alteração pelo parâmetro d.

3.4.3 Funções do tipo $y = \mathbf{tg}\,(x + d)$

Na figura 3.10, quando o controle deslizante é acionado, o parâmetro d provocará a alteração no gráfico da função $g(x) = \operatorname{tg}(x)$ para valores de d programados no intervalo $-\pi \leq d \leq \pi$, deslocando este gráfico para a direita ou para a esquerda dependendo do valor adotado para d.

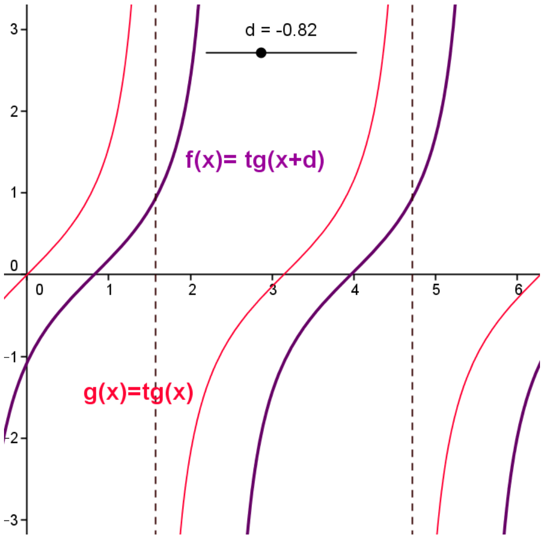


Figura 3.10: Função tangente sofre alteração pelo parâmetro d

Exemplo 3.4.1. Inspirado em atividade proposta por Mello, (2005)

Considere a função $f(x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

Solução. Esta função apresenta o mesmo período, domínio e imagem da função $g(x) = \cos(x)$, porém seu gráfico sofre um deslocamento de $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda, indicado pelo ponto $A\left(\frac{-\pi}{2}, 1\right)$ da figura 3.11, onde o gráfico tem seu início, terminando o primeiro ramo completo no ponto $B\left(\frac{3\pi}{2}, 1\right)$.

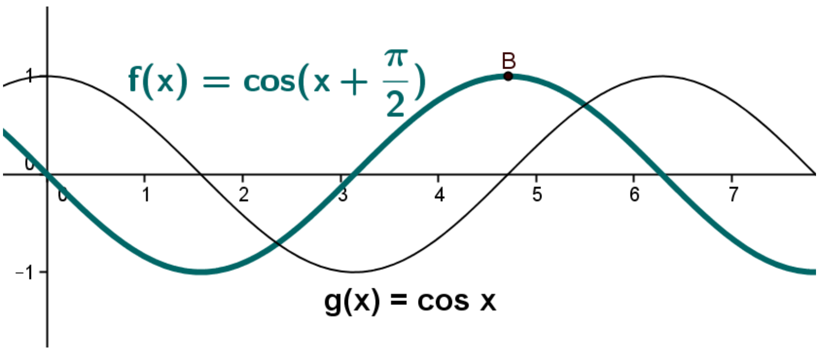


Figura 3.11: Função cosseno sofre alteração pelo parâmetro $d = \frac{\pi}{2}$ e função $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Observe que se adicionássemos $-\frac{\pi}{2}$ ao argumento da função $g(x) = \cos(x)$, a translação seria feita para a direita e o gráfico coincidiria com a função $v(x) = \text{sen}\,(x)$.

Desta forma, podemos dizer que a cossenóide é uma senóide com translação de $\frac{\pi}{2}$ para a direita.

3.5 O coeficiente c

Neste tópico vamos estudar as funções que sofrem alterações de período em relação às funções básicas. As funções do tipo $y = \text{sen}\,(cx+d)$ e $y = \cos(cx+d)$ terão período $\frac{2\pi}{|c|}$ conforme podemos verificar abaixo.

Na função $f(x) = \text{sen}\,(cx+d)$, considerando $cx+d = \alpha$, para que $\text{sen}\,(\alpha)$ complete um período, é necessário que α varie entre 0 e 2π.

$$0 \leq \alpha \leq 2\pi$$
$$0 \leq cx+d \leq 2\pi$$
$$-d \leq cx \leq 2\pi - d$$

Primeira parte: Para $c > 0$

Como vimos: $-d \leq cx \leq 2\pi - d$; $\frac{-d}{c} \leq x \leq \frac{2\pi-d}{c}$, isto é, o ângulo x pertence ao intervalo $\left[\frac{-d}{c}, \frac{2\pi-d}{c}\right]$ e o período p desta função é calculado da seguinte forma: $p = \frac{2\pi-d}{c} - \left(\frac{-d}{c}\right)$; $p = \dfrac{2\pi}{c} - \frac{d}{c} + \frac{d}{c}$, conclui-se que $p = \frac{2\pi}{c}$.

Segunda parte: Para $c < 0$.

Partindo das desigualdades $-d \leq cx \leq 2\pi - d$; $\frac{-d}{c} \geq x \geq \frac{2\pi-d}{c}$, isto é, o ângulo x pertence ao intervalo $\left[\frac{2\pi-d}{c}, \frac{-d}{c}\right]$ e o período p desta função é calculado fazendo: $p = \dfrac{-d}{c} - \left(\frac{2\pi-d}{c}\right)$

$$p = \frac{-d}{c} - \frac{2\pi}{c} + \frac{d}{c}$$

$p = -\frac{2\pi}{c}$ que é positivo.

Em resumo: $p = \frac{2\pi}{|c|}$

De forma análoga, prova-se que o gráfico da função $y = \text{tg}\,(x)$ tem período $p = \frac{\pi}{|c|}$.

3.5.1 As funções do tipo $y = \text{sen}\,(cx)$.

A função $y = \text{sen}\,(x)$ têm período $p = \frac{2\pi}{|c|}$, conforme foi demonstrado acima. Acionando o controle deslizante da figura 3.12, percebemos que o gráfico da função $y = \text{sen}\,(x)$ sofre a alteração de seu período de acordo com os valores adotados para c. Nesta simulação, os valores de c pertencem ao intervalo real $-2 \leq c \leq 4$.

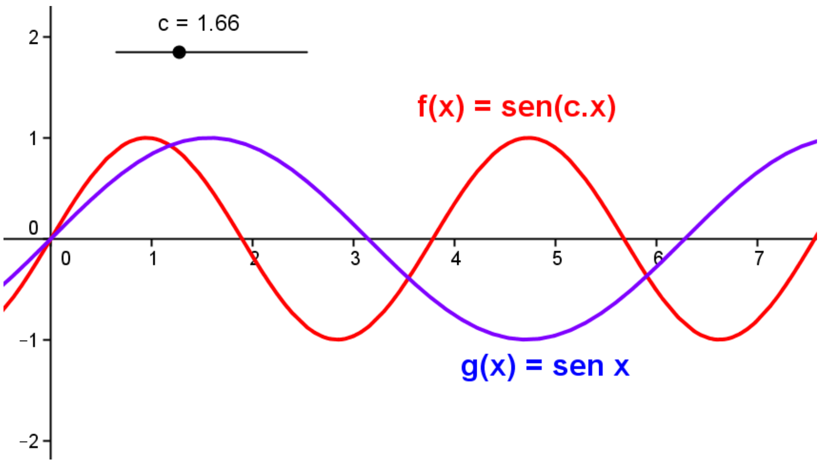


Figura 3.12: Função seno sofre alteração pelo parâmetro c.

3.5.2 As funções do tipo $y = \cos\,(cx)$.

A figura 3.13 mostra a alteração provocada pelo parâmetro c na função $y = \cos\,(x)$. Ao ser acionado, o controle deslizante faz c variar no intervalo $[-4, 4]$, mostrando como o período da função se altera. Neste caso, como $c = 4$, observa-se que enquanto desenhamos um ramo completo da função $y = \cos\,(x)$, conseguimos construir quatro ramos completos da função $y = \cos\,(4x)$.

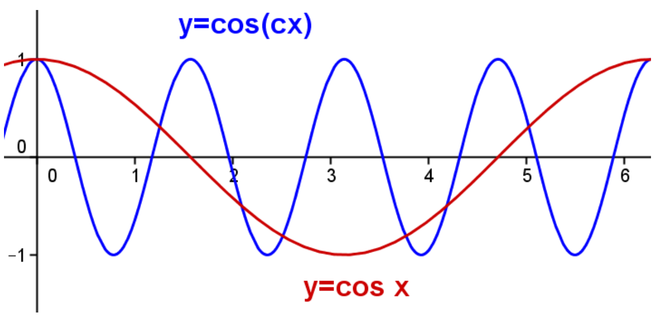


Figura 3.13: Função cosseno sofre alteração pelo parâmetro c.

3.5.3 As funções do tipo $y = \mathbf{tg}\,(cx)$.

A figura 3.14 simula a alteração provocada pelo parâmetro c na função $y = \text{tg}\,(x)$, pois o controle deslizante provoca neste caso, alterações no período da função para $c \in [-2, 2]$. No caso apresentado, o período da função $g(x) = \text{tg}\,(0,4x)$ é $p = \frac{5\pi}{2}$.

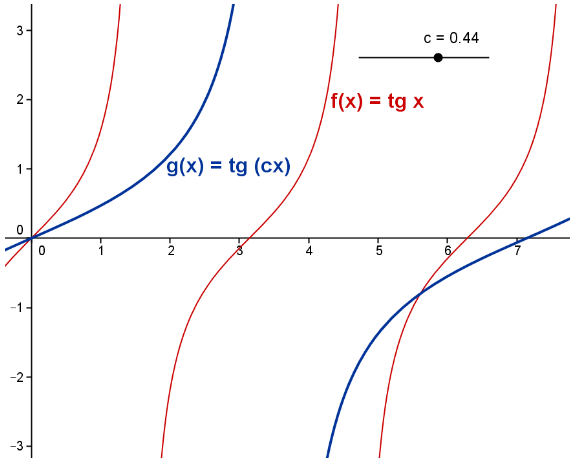


Figura 3.14: Função tangente sofre alteração pelo parâmetro c.

Exemplo 3.5.1. Inspirado em atividade proposta por Ávila, (2006)

Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = \text{sen}\,(2x)$.

Solução. Observa-se que ela possui o mesmo domínio, amplitude e imagem que a função $g(x) = \text{sen}\,(x)$, porém com período $p = \frac{2\pi}{|c|}$. Ao substituir $c = 2$ temos $p = \frac{2\pi}{|2|}$, donde se conclui que $p = \pi$, que é a metade do período de $g(x)$. Conforme mostra a figura 3.15, no intervalo de $[0, 2\pi]$ destacado pelo retângulo sombreado, a função $g(x) = \text{sen}\,(x)$ apresenta um ramo do gráfico, enquanto que a função $f(x) = \text{sen}\,(2x)$ apresenta dois ramos do gráfico, pois o parâmetro c faz esta alteração no período da função.

Graficamente, temos:

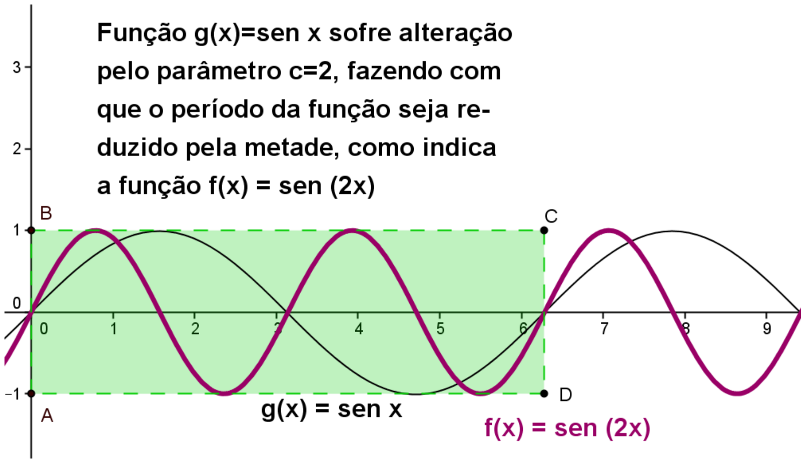


Figura 3.15: Função seno sofre alteração pelo parâmetro $c = 2$ e função $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$.

3.6 Aplicações das funções trigonométricas no nosso cotidiano.

Neste tópico serão apresentadas importantes aplicações das funções trigonométricas relacionadas com fenômenos naturais periódicos em diversos ramos de atividades. Vejamos alguns exemplos das funções citadas anteriormente que têm como variável independente o tempo x.

Exemplo 3.6.1. Inspirado em atividade proposta por Mello, (2005)

"Em certa cidade litorânea, a altura h da maré (em metros), em função do tempo, é dada pela expressão $h(x) = 2 + 0,5\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$, na qual x é o tempo, medido em horas, a partir da meia-noite ($x = 0$ representa meia-noite)".

Esboçar o gráfico da função, determinar os respectivos período e conjunto imagem e descrever um ciclo completo dessa maré, indicando as alturas máxima e mínima que ela atinge e em que momentos isso ocorre.

Solução. Para esboçar o gráfico de $h(x)$ e iniciar a análise dessa função, vamos tomar a função original $f(x) = \cos(x)$.

1ª etapa: $\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ o período é dado por $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}$ que é igual a $6h$.

2ª etapa: $0,5\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$. A multiplicação por 0,5 faz com que o gráfico tenha amplitude 0,5.

3ª etapa: $2 + 0,5\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$. A adição de 2 faz com que o gráfico sofra uma translação de duas unidades para cima, o que indica que o conjunto imagem da função corresponde o intervalo $Im = [1,5; 2,5]$. Acompanhe pela figura 3.16.

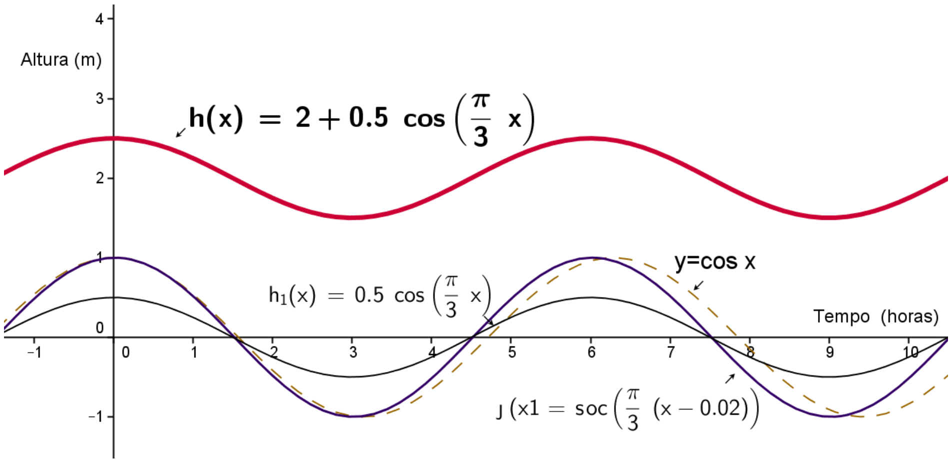


Figura 3.16: Função $h(x) = 2 + 0,5\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$, mostrando a altura da maré.

Podemos observar, no esboço do gráfico, que a maré atinge sua altura máxima de 2,5 metros em dois momentos: em $t = 0$, ou seja, à meia-noite, e em $t = 6$, que representa 6 horas da manhã e atinge a altura mínima de 1,5 metros às 3 horas da manhã. Com ciclos completos de 6 horas, perfaz um total de quatro ciclos por dia.

Exemplo 3.6.2. Inspirado em questão do vestibular da Vunesp-SP.

"Em situação normal, observa-se que os sucessivos períodos de aspiração e expiração de ar dos pulmões de um indivíduo são iguais em tempo, bem como na quantidade de ar inalada e expelida. A velocidade de aspiração e expiração de ar dos pulmões de um indivíduo está representada pela curva do gráfico, considerando apenas um ciclo do processo".

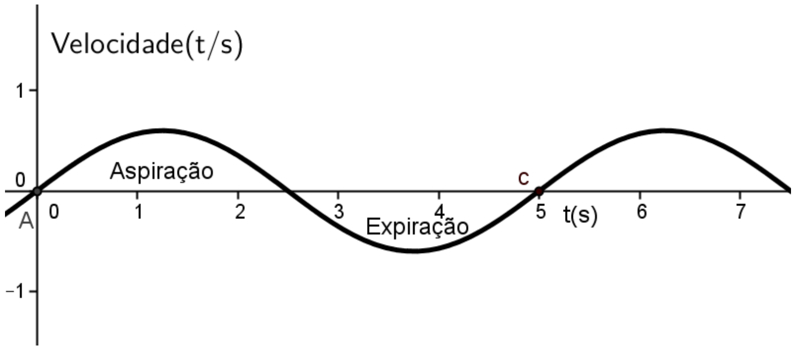


Figura 3.17: Gráfico representando movimento de aspiração e expiração de ar nos pulmões de um indivíduo.

Sabendo-se que, em uma pessoa em estado de repouso, um ciclo de aspiração e expiração completo ocorre a cada 5 segundos, e que pela observação do gráfico, vemos que a taxa máxima de inalação e exalação, em módulo, é 0,6 litro por segundo, a expressão da função cujo gráfico mais se aproxima da curva representada na figura 3.17 é:

a) $v(t) = \frac{2\pi}{5} \operatorname{sen}\left(\frac{3}{5}t\right)$.

b) $v(t) = \frac{3}{5} \operatorname{sen}\left(\frac{5}{2\pi}t\right)$.

c) $v(t) = 0,6 \cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$.

d) $v(t) = 0,6 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$.

e) $v(t) = \frac{5}{2\pi} \cos(0,6t)$.

Solução.

- Como o período da função é 5, temos que $\frac{2\pi}{|c|} = 5$, donde se conclui que $c = \frac{2\pi}{5}$;

- Como as taxas de inalação e exalação são representadas por 0,6, temos que $b = 0,6$;

- A função não poderia ser $v(t) = 0,6 \cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$ pois para $t = 0$, a imagem deveria ser 0,6;

- Logo, a função indicada no gráfico está mais bem representada pela alternativa.
  d) $v(t) = 0,6 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$.

Exemplo 3.6.3. Inspirado em atividade proposta por Barroso, (2010)

"Uma pesquisa mostrou que a procura por empregos temporários em determinada cidade, medida em milhares de formulários de emprego preenchidos por semana, poderia ser modelada pela função:"

$$D(x) = 6,7 + 3,21 \operatorname{sen}(0,9x + 1,5)$$

Em que x é o tempo, medido em anos a partir de janeiro de 2011 $(x = 0)$. Calcular o período, esboçar o gráfico e interpretar os resultados.

Solução. Comparando a expressão $D(x) = a + b \operatorname{sen}(cx + d)$ com a função dada, temos:

1ª etapa: Período: $p = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow p = \frac{2\pi}{|0,9|} \Rightarrow p \cong 7$ anos; confira na figura 3.18.

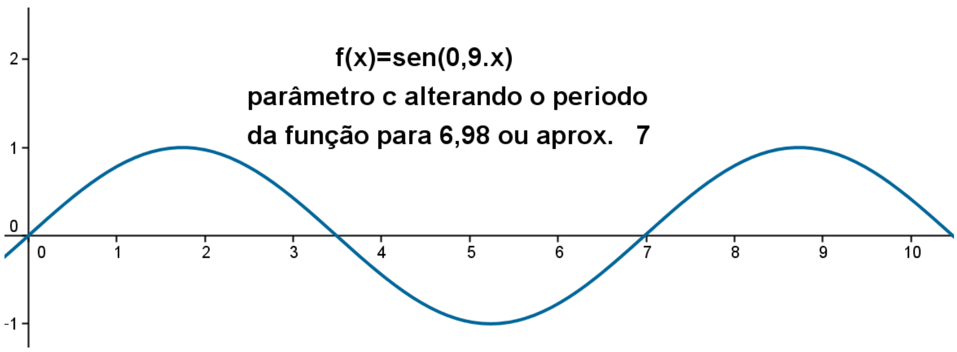


Figura 3.18: Alteração de periodo, provocada pelo parâmetro $c = 0,9$

2ª etapa: Translação horizontal: $d = 1,5$ anos, o gráfico se desloca $\frac{-1,5}{0,9} \cong -1,67$ para a esquerda, conforme mostra o gráfico da figura 3.19.

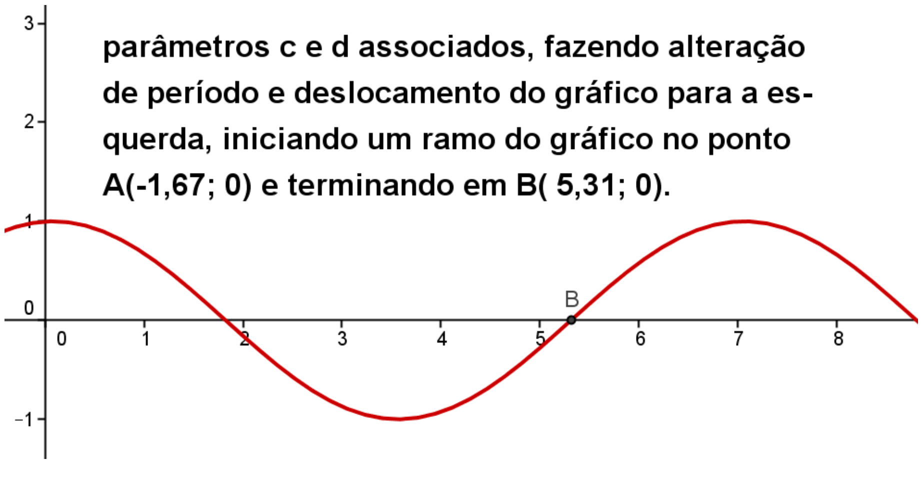


Figura 3.19: Deslocamento do gráfico para a esquerda.

3ª etapa: Amplitude: O parâmetro $b = 3,21$ altera a imagem da função para o intervalo $[-3,21; 3,21]$ formulários, como pode ser acompanhado pela figura 3.20 abaixo.

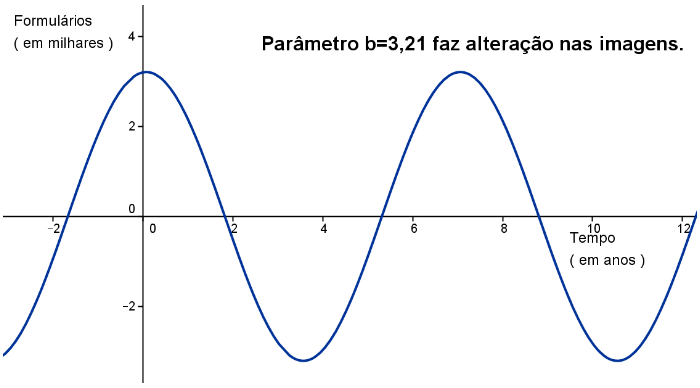


Figura 3.20: Alterações nas imagens, através do parâmetro $b = 3,21$.

4ª etapa: Translação vertical: O parâmetro $a = 6,7$ faz com que o gráfico sofra uma translação para cima em 6,7; alterando o conjunto imagem para $[3,49; 9,91]$ formulários. Veja figura 3.21.

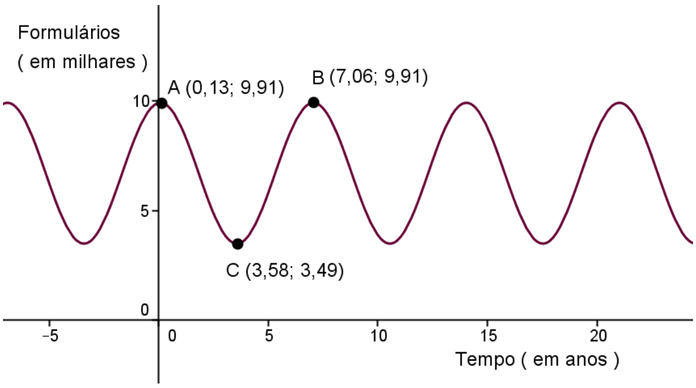


Figura 3.21: Gráfico final da função $D(x) = 6,7 + 3,21\,\mathrm{sen}\,(0,9x + 1,5)$.

Para estabelecer o conjunto imagem da função, sabemos que a imagem da função $f(t) = \mathrm{sen}\,(t)$ é $[-1, 1]$. Quando f é multiplicada por 3,21, a imagem passa para $[-3,21, 3,21]$. Ao adicionar 6,7, a nova imagem será $[3,49, 9,91]$.

Para saber quando ocorre a menor procura, basta igualar $D(t)$ com 3,49, obtendo $t \cong 3,6$ anos.

Como a função é dada em milhares de formulários, conclui-se então que a procura por empregos temporários oscila entre 3.490 e 9.910 formulários preenchidos semanalmente, em ciclos completos a cada sete anos, atingindo o número mínimo de 3.490

formulários em cerca de 3,6 anos, a partir de janeiro de 2011, ou seja, no início de junho de 2.014.

No primeiro ciclo, que se iniciou em janeiro de 2011, o número de formulários preenchidos atingiu o máximo de 9.910 pela primeira vez, em cerca de 1 mês, ou seja, entre janeiro e fevereiro de 2011.

Exemplo 3.6.4. inspirado em exercício do vestibular da FGV- SP, e proposto por Mello, (2005)

"Um supermercado, que fica aberto 24 horas por dia, faz a contagem do número de clientes na loja a cada 3 horas. Com base nos dados observados, estima-se que o número de clientes possa ser calculado pela função trigonométrica $f(x) = 9 - 8\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{12}\right)$, em que $f(x)$ é o número de clientes (em centenas) e x a hora da observação (x é um número inteiro tal que $0 \leq x \leq 24$). Utilizando essa função, estime da diferença entre o número máximo e o número mínimo de clientes dentro do supermercado, em um dia completo".

Solução. Para esboçar o gráfico de $f(x)$ e iniciar a análise dessa função, vamos tomar a função original $g(x) = \operatorname{sen}(x)$.

1ª etapa: $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{12}\right)$ o período é dado por $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}}$ que é igual à $24h$.

2ª etapa: $-8\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{12}\right)$. A multiplicação por -8 faz com que o gráfico tenha amplitude 8, determinando a imagem no intervalo $[-8, 8]$, com inversão no sentido do gráfico provocada pelo sinal negativo.

3ª etapa: $9 - 8\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{12}\right)$. A adição de 9 faz com que o gráfico sofra uma translação de 9 unidades para cima, indicando que o conjunto imagem é o intervalo $[1, 17]$. Desta forma, a diferença entre o número máximo e mínimo de clientes dentro do supermercado, em um dia completo será $17 - 1 = 16$, e como na função, o número de clientes é dado em centenas, concluímos que esta diferença se refere a 1.600 clientes. Acompanhe pela figura 3.22.

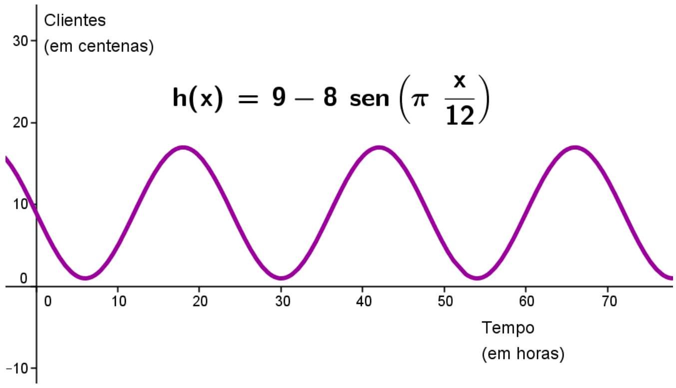


Figura 3.22: Gráfico da função $f(x) = 9 - 8\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{12}\right)$.

Capítulo 4

As Demais Razões Trigonométricas

Neste capítulo, vamos estudar outras três razões trigonométricas, a secante, a cossecante e a cotangente, provenientes das razões já estudadas cosseno, seno e tangente e também as relações trigonométricas auxiliares, muito importantes na resolução de exercícios de trigonometria.

4.1 Secante

Definimos secante de um ângulo de medida x, e indicamos por $\sec(x)$, à razão:

$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$, para $\cos(x) \neq 0$.

No ciclo trigonométrico apresentado na figura 4.1, identificamos a $\sec(x)$ pelo segmento OE.

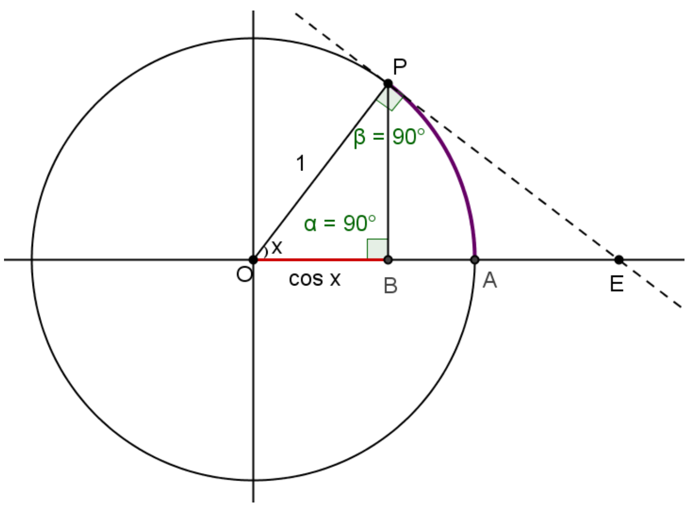


Figura 4.1: Ciclo trigonométrico e identificação da secante do arco x.

Veja na figura 4.1 que pelo ponto P, extremo do arco $\widehat{\text{AP}}$ de medida x, traça-se uma reta tangente ao ciclo que intercepta o eixo das abscissas no ponto E. Note que os triângulos OBP e OPE são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo), assim, por semelhança de triângulos, temos a proporção:

$$\begin{aligned} \frac{OE}{1} &= \frac{1}{\cos(x)}, \text{ logo:} \\ OE &= \sec(x) \end{aligned}$$

Acionando o comando de animar ponto P da figura 4.2, consegue-se observar bem como se desenvolvem os valores da secante do arco $x = \widehat{\text{AP}}$, iniciando em 1 para $x = 0°$ até valores de OE muito grandes para arcos que se aproximam de 90°. Quando o arco x atinge 90° o aluno percebe facilmente que não existe valor de secante pois a reta tangente em P é paralela ao eixo O_x, e assim que os arcos passam de 90°, a secante, que tende ao menos infinito e cresce muito rapidamente chegando a -1 quando o arco atinge 180°, diminui em seguida até atingir 270°, onde também não existe o valor da secante. Ao passar de 270°, os valores da secante aparecem na parte positiva do eixo das abscissas com valores muito grandes para OE, diminuindo rapidamente até atingir o valor 1 para o arco de 360°, onde se fecha o primeiro ciclo completo, repetindo todo o estudo ao iniciar outra volta. Este movimento é muito fácil de ser observado com a utilização do software de geometria dinâmica GeoGebra.

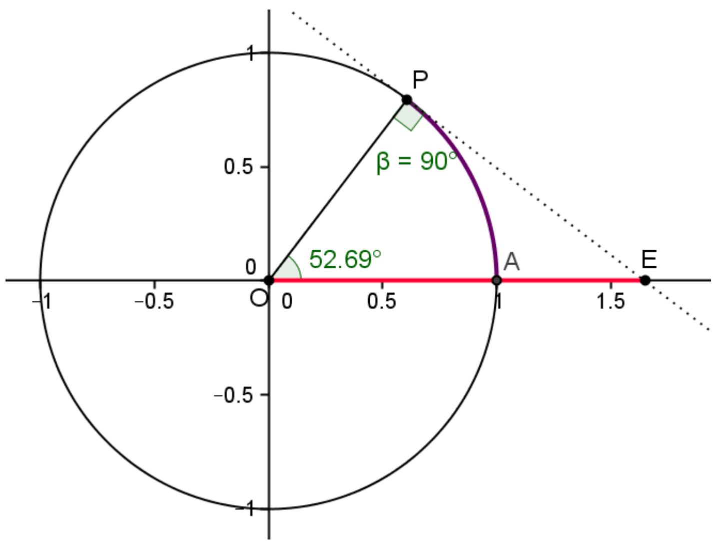


Figura 4.2: Ciclo trigonométrico e indicação da secante do arco x.

4.2 Cossecante

Definimos cossecante de um ângulo de medida x, e indicamos por $\csc(x)$, à razão:

$\csc(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$, para $\operatorname{sen}(x) \neq 0$.

Na figura 4.3, identificamos a $\csc(x)$ pelo segmento OF.

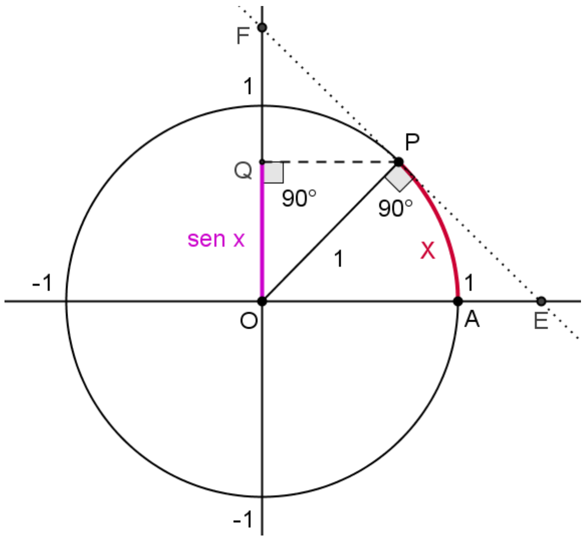


Figura 4.3: Ciclo trigonométrico e indicação da cossecante do arco x.

Pelo ponto P, extremo do arco $\widehat{AP}$ de medida x, traça-se uma reta tangente ao ciclo que intercepta o eixo das ordenadas no ponto F. Note que os triângulos OPF e OQP são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo), assim, por semelhança de triângulos, temos a proporção:

$$\begin{aligned} \frac{OF}{1} &= \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}, \text{ logo:} \\ OF &= \csc(x) \end{aligned}$$

Animando o ponto P da figura 4.4, consegue-se observar facilmente como se desenvolvem os valores da cossecante do arco $x = \widehat{AP}$, iniciando em $x = 0°$ onde não existe o valor da cossecante. À medida que o arco x aumenta, os valores da cossecante, que são muito grandes, vão diminuindo à medida que x se aproxima de 90°, chegando a 1 em $x = 90°$. Assim que os arcos passam de 90°, a cossecante inverte seu desenvolvimento e tende ao mais infinito à medida que o arco x se aproxima de 180°. Quando o ponto P se localizar no ponto $(-1, 0)$ também não existe o valor da cossecante. Ao passar de

180°, a cossecante aparece no menos infinito e cresce rapidamente à medida que o arco x se aproxima de 270° onde a cossecante vale -1. Ao passar de 270° os valores da cossecante diminuem e tendem ao menos infinito novamente à medida que o arco x se aproxima de 360°, onde a cossecante não existe. A partir daí, o estudo reinicia e tudo se repete novamente.

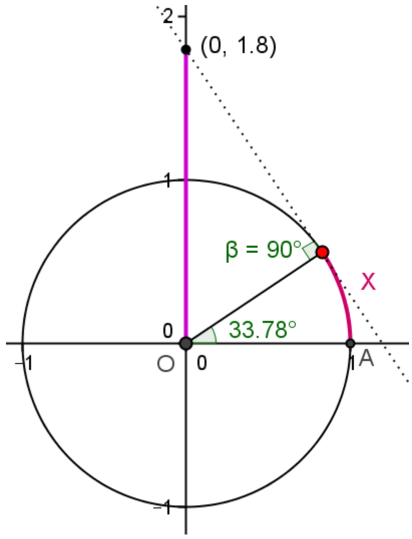


Figura 4.4: Ciclo trigonométrico e cossecante do arco x, indicada pelo segmento OF.

4.3 Cotangente

Definimos cotangente de um ângulo de medida x, e indicamos por $\cot(x)$, à razão:

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}, \text{ para } \operatorname{sen}(x) \neq 0.$$

Na figura 4.5, a cotangente do arco x é indicada pelo segmento BQ.

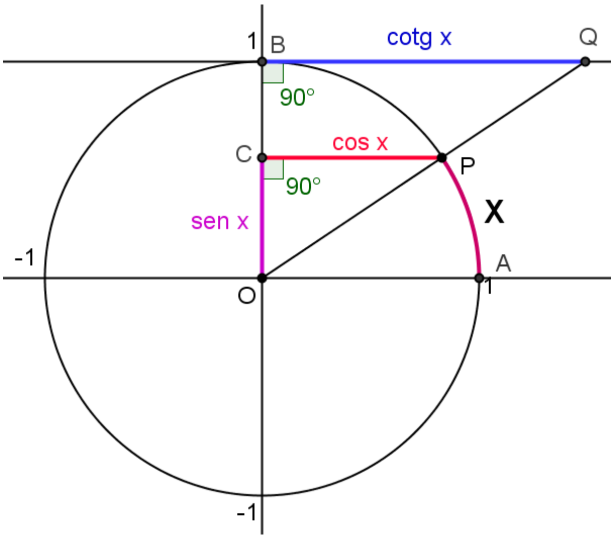


Figura 4.5: Ciclo trigonométrico e indicação da cotangente do arco x.

Traça-se a reta r tangente ao ciclo trigonométrico no ponto de tangência B. Determinamos o arco $\widehat{AP}$ de medida x. A reta OP intercepta a reta r no ponto Q. Note que os triângulos OBQ e OCP são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo), e por isso, montamos a proporção:

$$\begin{aligned}\frac{BQ}{\cos(x)} &= \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \\ BQ &= \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \\ BQ &= \cot(x)\end{aligned}$$

Animando o ponto P da figura 4.6, percebe-se claramente todo o desenvolvimento da função cotangente numa volta completa no ciclo trigonométrico. Vemos que, partindo do arco $x = 0°$ onde não existe o valor para a cotangente, pois o domínio da função não prevê $x = 0$. À medida que x aumenta, os valores da cotangente que tendem ao mais infinito, diminuem rapidamente e chega a valer 0 quando x atinge 90°. A partir daí, os valores da cotangente diminuem e tendem ao menos infinito à medida que x se aproxima de 180°, onde não existe novamente valor para cotangente. Ao entrar no terceiro quadrante, os valores da cotangente surgem novamente no mais infinito, diminuindo rapidamente à medida que o arco x se aproxima de 270° onde a cotangente valerá zero novamente. Ao passar de 270°, os valores da cotangente diminuem muito rapidamente e tendem ao menos infinito à medida que x se aproxima de 360° onde não haverá valor para cotangente, fechando uma volta completa no ciclo e reiniciando todo o estudo novamente. Percebe-se assim que em uma volta completa no ciclo a cotangente se desenvolveu duas vezes, pois seu período é de 180° ou π rad.

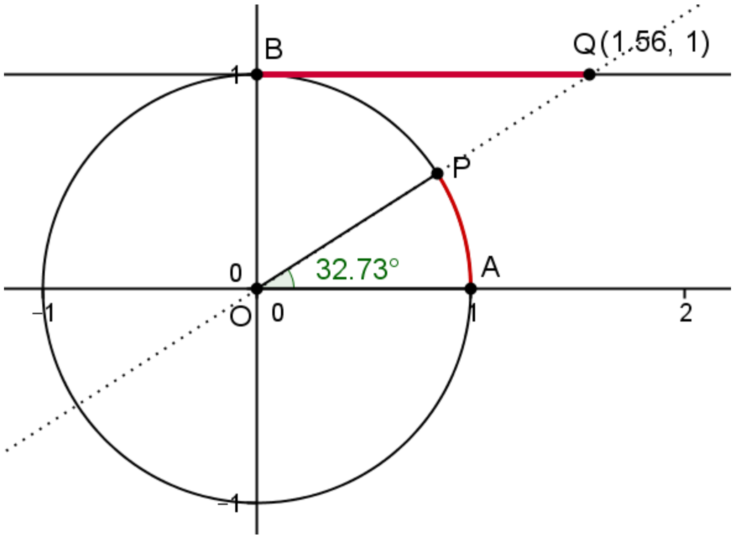


Figura 4.6: Ciclo trigonométrico e cotangente do arco x, indicada pelo segmento BQ.

4.4 Relações trigonométricas auxiliares.

Até esse momento, já conhecemos cinco relações trigonométricas muito importantes:

- $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$
- $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$
- $\csc(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$
- $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$

A partir dessas relações, vamos desenvolver outras duas igualmente importantes:

4.4.1 Primeira relação auxiliar

Se tomarmos $\cos x \neq 0$, isto é, para $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, dividindo ambos os membros da relação $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$ por $\cos^2(x)$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^2(x)} &= \frac{1}{\cos^2(x)}\\
\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)}+\frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} &= \frac{1}{\cos^2(x)}\\
\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right)^2+1 &= \left(\frac{1}{\cos(x)}\right)^2\\
\\
\operatorname{tg}^2(x)+1 &= \sec^2(x), \text{ para } \cos(x)\neq 0.
\end{aligned}
$$

4.4.2 Segunda relação auxiliar

Se tomarmos $\operatorname{sen}(x)\neq 0$, isto é, para $x\neq k\pi$, com $k\in\mathbb{Z}$, dividindo ambos os membros da relação $\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)=1$ por $\operatorname{sen}^2(x)$, vamos obter:

$$
\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} &= \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}\\
\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}+\frac{\cos^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} &= \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}\\
1+\left(\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\right)^2 &= \left(\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right)^2\\
\\
1+\cot^2(x) &= \csc^2(x), \text{ para } \operatorname{sen}(x)\neq 0.
\end{aligned}
$$

Vamos agora aplicar essas relações na resolução de problemas.

Exemplo 4.4.1. Atividades propostas por Iezzi (1983)

Demonstrar as seguintes identidades:

a) $\sec^2(x)+\csc^2(x)=\sec^2(x)\cdot\csc^2(x)$

Solução. Desenvolvendo o primeiro membro da igualdade, podemos provar que é igual ao segundo:

$$\begin{aligned}
\sec^2(x) + \csc^2(x) &= \frac{1}{\cos^2(x)} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x) \cdot \operatorname{sen}^2(x)} \\
&= \frac{1}{\cos^2(x) \cdot \operatorname{sen}^2(x)} \\
&= \frac{1}{\cos^2(x)} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \\
&= \sec^2(x) \cdot \csc^2(x)
\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

b) $(1 + \cot(x))^2 + (1 - \cot(x))^2 = 2\csc^2(x)$

Solução. Desenvolvendo o primeiro membro da igualdade, podemos provar que é igual ao segundo:

$$\begin{aligned}
(1 + \cot(x))^2 + (1 - \cot(x))^2 &= \\
1 + 2\cot(x) + \cot^2(x) + 1 - 2\cot(x) + \cot^2(x) &= \\
2 + 2\cot^2(x) &= \\
2 \cdot (1 + \cot^2(x)) &= 2\csc^2(x)
\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

Capítulo 5

Adição e Subtração de Arcos

Neste capítulo veremos como obter as razões trigonométricas para a soma $a + b$ ou para a diferença $a - b$ de dois arcos de medidas a e b, e também as relações para a duplicação de arcos a partir dos valores das razões trigonométricas de a e de b.

5.1 Seno da soma de dois arcos.

É possível calcular o valor de $\operatorname{sen}(a+b)$ usando a fórmula:

$$\boxed{\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a)}$$

Para facilitar o entendimento da demonstração desta fórmula, as figuras 5.1 e 5.2 ilustram apenas o primeiro quadrante do ciclo trigonométrico e as indicações dos arcos de medidas a e b.

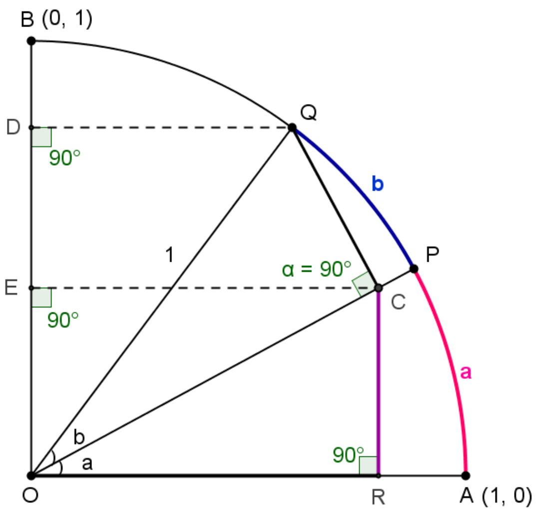


Figura 5.1: Ciclo trigonométrico e indicações dos arcos a e b.

Primeira parte:

Note que: $\operatorname{sen}(a+b) = OE + DE$;

No triângulo OCQ, temos, $senb = \frac{QC}{1} = QC$ e $\cos(b) = \frac{OC}{1} = OC$;

No triângulo ORC, temos: $\operatorname{sen}(a) = \frac{CR}{OC}$ então, $\operatorname{sen}(a) = \frac{CR}{\cos(b)}$;

mas como $CR = OE$, temos: $\operatorname{sen}(a) = \frac{OE}{\cos(b)}$, logo:

$$\boxed{OE = \operatorname{sen}(a)\cos(b)}$$

Segunda parte:

Na sequência da demonstração da fórmula do $\operatorname{sen}(a+b)$, observe na figura 5.2 que o triângulo QFC é semelhante ao triângulo ORC, pelo critério AA (ângulo-ângulo).

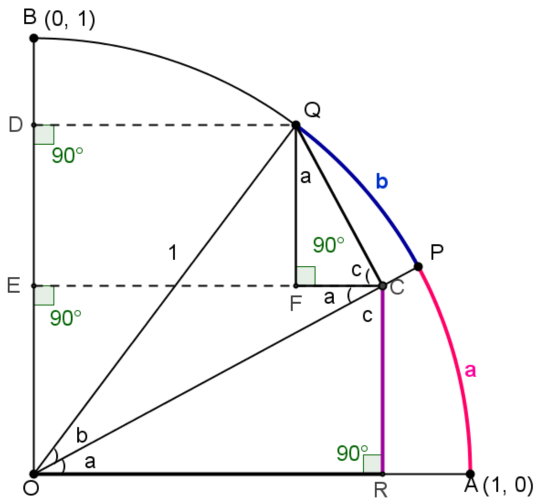


Figura 5.2: Arcos a e b no ciclo trigonométrico e cálculo de $\operatorname{sen}(a+b)$.

No triângulo QFC, veja que $\cos(a) = \frac{QF}{QC}$ e como $QC = \operatorname{sen}(b)$

Temos então, $\cos a = \frac{QF}{\operatorname{sen}(b)}$, desta forma, $QF = \operatorname{sen}(b)\cos(a)$

mas como $QF = DE$, podemos concluir que:

$$\boxed{DE = \operatorname{sen}(b)\cos(a)}$$

Mas, como foi visto no início, o valor do $\operatorname{sen}(a+b) = OE + DE$, podemos então concluir que:

$$\boxed{\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a)}$$

Exemplo 5.1.1. Vejamos a aplicação desta relação numa atividade prática proposta por Iezzi, (1983)

Calcular o valor do $\operatorname{sen}(75°)$

Solução. Podemos dizer que 75° = 45° + 30°, pois conhecemos as relações dos arcos 30° e 45°.

$\operatorname{sen}(75°) = \operatorname{sen}(45° + 30°) = \operatorname{sen}(45°)\cos(30°) + \operatorname{sen}(30°)\cos(45°)$

$\operatorname{sen}(75°) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Exemplo 5.1.2. Vamos fazer agora uma atividade proposta por Ávila, (2006)

Demonstre e seguinte identidade:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a)$$

Solução. Utilizando a fórmula $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos b + \operatorname{sen}(b)\cos a$, temos:

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(a) + \operatorname{sen}(a)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = 1\cos(a) + \operatorname{sen}(a)0$

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$, como queríamos demonstrar.

Neste exemplo, podemos verificar como a alteração provocada pelo parâmetro d na função seno faz com que o gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ coincida com o gráfico da função $h(x) = \cos(x)$.

Acionando o controle deslizante da figura 5.3, pode-se observar o deslocamento da função $f(x)$ para a esquerda até atingir $d = \dfrac{\pi}{2} = 1,57$, onde coincide com a função $h(x)$.

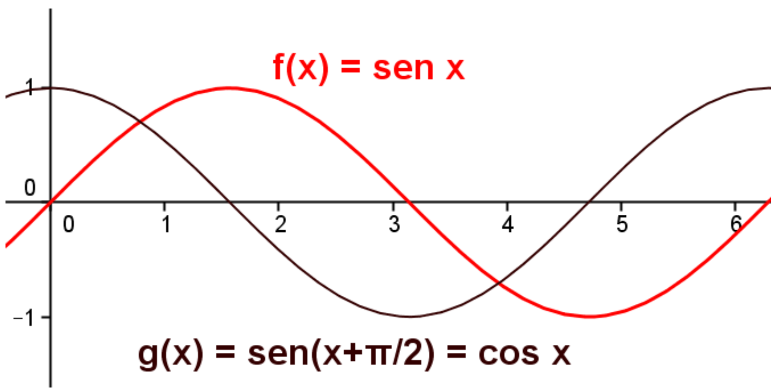


Figura 5.3: Alteração d na função seno fazendo com que $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$.

5.2 Seno da diferença de dois arcos.

Para simplificar a demonstração da fórmula que calcula $\operatorname{sen}(a-b)$, podemos substituir o arco b da relação $\operatorname{sen}(a+b)$ pelo arco $-b$, obtendo assim a relação:

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos a$

$\operatorname{sen}(a+(-b)) = \operatorname{sen}(a)\cos(-b) + \operatorname{sen}(-b)\cos(a)$,

mas como já foi visto anteriormente, $\cos(-b) = \cos(b)$ e $\operatorname{sen}(-b) = -\operatorname{sen}(b)$, temos então:

$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + (-\operatorname{sen}(b))\cos a$

logo:

$$\boxed{\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(b)\cos(a)}$$

Exemplo 5.2.1. Exemplo prático em atividade proposta por Ávila, (2006)

Demonstre a seguinte identidade:

$\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) = 2\cos(a)\operatorname{sen}(b)$

Solução. Desenvolvendo o primeiro membro da igualdade chegaremos ao segundo membro.

$\operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a) - (\operatorname{sen}(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(b)\cos(a))$

$\operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a) - \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a)$

$2\operatorname{sen}(b)\cos(a)$, conforme queríamos demonstrar.

5.3 Cosseno da soma de dois arcos.

Na figura 5.4, percebemos que $\cos(a+b) = OE$.

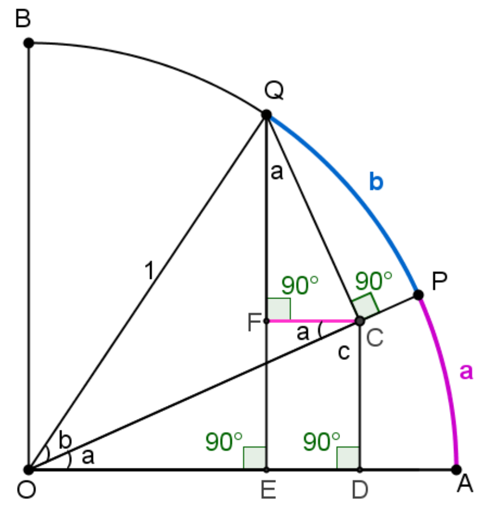


Figura 5.4: Arcos a e b no ciclo trigonométrico e cálculo de $\cos(a+b)$.

No triângulo OCQ temos $\cos(b) = \frac{OC}{1} = OC$ e $\operatorname{sen}(b) = \frac{QC}{1} = QC$ enquanto no triângulo ODC

$\cos(a) = \frac{OD}{OC}$, mas como $OC = \cos(b)$, temos: $\cos(a) = \frac{OD}{\cos(b)}$, donde podemos concluir que:

$$\boxed{OD = \cos(a)\cos(b)}$$

Observe na figura 5.4 que o triângulo QFC é semelhante ao triângulo ODC, pelo critério AA (ângulo-ângulo).

Assim: $\operatorname{sen}(a) = \frac{FC}{QC}$ e como $QC = \operatorname{sen}(b)$, podemos dizer que $\operatorname{sen}(a) = \frac{FC}{\operatorname{sen}(b)}$,então $FC = \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$

Veja também que $FC = ED$, logo:

$$\boxed{ED = \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)}$$

Mas, como foi visto no início da demonstração, o valor do $\cos a + b = OE$

E como $OE = OD - ED$, podemos então concluir que:

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)}$$

5.4 Cosseno da diferença de dois arcos.

Para simplificar a demonstração da fórmula que calcula $\cos(a-b)$, podemos substituir o arco b da relação $\cos(a+b)$ pelo arco $-b$, obtendo assim a relação:

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$

$\cos(a+(-b)) = \cos(a)\cos(-b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(-b)$

conforme foi visto anteriormente, $\cos(-b) = \cos(b)$ e $\operatorname{sen}(-b) = -\operatorname{sen}(b)$, podemos então escrever:

$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)(-\operatorname{sen}(b))$, logo:

$$\boxed{\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)}$$

Exemplo 5.4.1. Vamos aplicar esta relação numa atividade prática:

Calcular $\cos(15°)$

Solução. Podemos adotar 15° = 60° - 45°, pois conhecemos as relações dos arcos 60° e 45°.

$\cos(15°) = \cos(60° - 45°)$

$\cos(15°) = \cos(60°)\cos(45°) + \operatorname{sen}(60°)\operatorname{sen}(45°)$

$\cos(15°) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Observamos neste resultado uma propriedade muito importante citada anteriormente que trata dos ângulos complementares. Assim, $\operatorname{sen}(75°) = \cos(15°)$, conforme provado nos cálculos.

Da mesma forma como foi feito com o seno e o cosseno, também podemos calcular a tangente da soma e a tangente da diferença de dois arcos reais a e b.

5.5 Tangente da soma de dois arcos.

Para determinar a tangente da soma de dois a e b de medidas reais, a partir das razões trigonométricas $\operatorname{tg}(a)$ e $\operatorname{tg}(b)$, podemos escrever aplicar a seguinte fórmula:

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg}(a) + \operatorname{tg}(b)}{1 - \operatorname{tg}(a)\operatorname{tg}(b)}$, para valores de a, b e $(a+b)$ diferentes de $\frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Na demonstração dessa fórmula, utilizamos a relação $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ e substituímos α por $(a+b)$.

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)}$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)}$, com a condição de que a e b sejam diferentes de $\frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, podemos dividir numerador e denominador dessa fração por $\cos(a)\cos(b)$, assim:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\frac{\operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)}}{\frac{\cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)}{\cos(a)\cos(b)}}$$

$$= \frac{\frac{\operatorname{sen}(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)} + \frac{\operatorname{sen}(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)}}{\frac{\cos(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)} - \frac{\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)}{\cos(a)\cos(b)}}$$

$$= \frac{\frac{\operatorname{sen}(a)}{\cos(a)} + \frac{\operatorname{sen}(b)}{\cos(b)}}{1 - \frac{\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)}{\cos(a)\cos(b)}}$$

substituindo agora $\frac{\operatorname{sen}(a)}{\cos(a)} = \operatorname{tg}(a)$ e $\frac{\operatorname{sen}(b)}{\cos(b)} = \operatorname{tg}(b)$, chegaremos na fórmula que escrevemos no início:

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg}(a) + \operatorname{tg}(b)}{1 - \operatorname{tg}(a)\operatorname{tg}(b)}$, para valores de a, b e $(a+b)$ diferentes de $\frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 5.5.1. Vamos aplicar esta relação num exemplo proposto por Iezzi, (1983)

Calcular $\operatorname{tg}(75°)$

Solução.

$$\operatorname{tg}(75°) = \operatorname{tg}(45° + 30°) = \frac{\operatorname{tg}(45°) + \operatorname{tg}(30°)}{1 - \operatorname{tg}(45°)\operatorname{tg}(30°)} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$$

5.6 Tangente da diferença de dois arcos.

Para calcular a tangente da diferença de dois arcos a e b, podemos substituir o arco b da fórmula $\operatorname{tg}(a+b)$ pelo arco $-b$, facilitando a obtenção do resultado.

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg}(a) + \operatorname{tg}(b)}{1 - \operatorname{tg}(a)\operatorname{tg}(b)}$

$\operatorname{tg}(a+(-b)) = \frac{\operatorname{tg}(a) + \operatorname{tg}(-b)}{1 - \operatorname{tg}(a)\operatorname{tg}(-b)}$

E, como já foi citado anteriormente, $\operatorname{tg}(-b) = -\operatorname{tg}(b)$, temos:

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg}(a) + (-\operatorname{tg}(b))}{1 - (-\operatorname{tg}(a)\operatorname{tg}(b))}$

$\operatorname{tg}(a-b) = \dfrac{\operatorname{tg}(a) - \operatorname{tg}(b)}{1 + \operatorname{tg}(a)\operatorname{tg}(b)}$, para valores de a, b e $(a-b)$ diferentes de $\frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

O assunto que veremos a seguir representa um dos conteúdos mais importantes no aprofundamento dos estudos de trigonometria. Trata-se da duplicação de arcos ou fórmulas de multiplicação.

5.7 Funções circulares do arco $2a$

Considerando que $2a = a + a$, podemos utilizar as fórmulas de adição de arcos para obter as relações para o arco $2a$.

5.7.1 Seno do arco duplo

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a)$

Substituindo b por a, temos:

$\operatorname{sen}(a+a) = \operatorname{sen}(a)\cos(a) + \operatorname{sen}(a)\cos(a)$

então:

$$\boxed{\operatorname{sen}(2a) = 2\operatorname{sen}(a)\cos(a)}$$

5.7.2 Cosseno do arco duplo

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$

Substituindo b por a, temos:

$\cos(a+a) = \cos(a)\cos(a) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(a)$

$$\boxed{\cos(2a) = \cos^2(a) - \operatorname{sen}^2(a)}$$

Lembrando da relação fundamental da trigonometria: $\operatorname{sen}^2(a) + \cos^2(a) = 1$, podemos escrever:

$\cos^2(a) = 1 - \operatorname{sen}^2(a)$ e substituir na fórmula:

$\cos^2(a) = \cos^2(a) - \operatorname{sen}^2(a)$,

$\cos^2(a) = 1 - \operatorname{sen}^2(a) - \operatorname{sen}^2(a)$

temos:

$$\boxed{\cos^2(a) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a}$$

ou ainda podemos escrever $\operatorname{sen}^2(a) = 1 - \cos^2(a)$

$\cos^2(a) = \cos^2(a) - \operatorname{sen}^2(a)$

$\cos^2(a) = \cos^2(a) - (1 - \cos^2(a))$

$\cos^2(a) = \cos^2(a) - 1 + \cos^2(a)$

conclusão:

$$\boxed{\cos^2(a) = 2\cos^2(a) - 1}$$

Temos ainda as relações para a tangente do arco duplo $2a$. Veja na sequência:

5.7.3 Tangente do arco duplo

Na relação $\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg}(a) + \operatorname{tg}(b)}{1 - \operatorname{tg}(a)\operatorname{tg}(b)}$ substituindo o arco b por a, obtemos a relação para o arco duplo $2a$.

$\operatorname{tg}(a+a) = \dfrac{\operatorname{tg}(a) + \operatorname{tg}(a)}{1 - \operatorname{tg}(a)\operatorname{tg}(a)}$, donde se conclui:

$$\boxed{\operatorname{tg}(2a) = \frac{2\operatorname{tg}(a)}{1 - \operatorname{tg}^2(a)}, \text{ para valores de } a \text{ e } 2a \text{ diferentes de } \tfrac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.}$$

Exemplo 5.7.1. Aplicação deste conteúdo em atividade proposta por Iezzi, (2010)

Sendo $\operatorname{tg}(x) = \dfrac{3}{4}$ e $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, calcular $\operatorname{sen}(2x)$.

Solução. Primeiramente, lembramos que:

$\sec^2(x) = 1 + \operatorname{tg}^2(x) \rightarrow \sec^2(x) = 1 + \frac{9}{16} \rightarrow \sec^2(x) = \frac{25}{16} \rightarrow \sec(x) = -\frac{5}{4}$ assim $\cos(x) = -\frac{4}{5}$ e $\operatorname{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x) \rightarrow \operatorname{sen}^2(x) = 1 - \frac{16}{25} \rightarrow \operatorname{sen}^2(x) = \frac{9}{25} \rightarrow \operatorname{sen}(x) = -\frac{3}{5}$

Com estes valores, já podemos calcular $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$

$\operatorname{sen}(2x) = 2\left(\dfrac{-3}{5}\right)\left(\dfrac{-4}{5}\right) \rightarrow \operatorname{sen}(2x) = \dfrac{24}{25}$

Considerações Finais

Por buscar sempre despertar o interesse do aluno pelo conteúdo da Trigonometria, várias estratégias foram utilizadas tais como as aplicações na física, os gráficos em movimentos e exemplos de aplicações no cotidiano das pessoas, com diferentes enfoques, na tentativa de motivar o aluno a aprender e a buscar o conhecimento. Em certos momentos, a Matemática foi trazida à luz da História, para oportunizar que os conhecimentos adquiridos e acumulados pela humanidade durante séculos possam contribuir como recurso pedagógico.

Atualmente, a popularização das novas tecnologias de informação e comunicação, permite aos educadores e estudantes renovar suas metodologias de estudo da Matemática através de aplicações computacionais dinâmicas com forte componente gráfico, passíveis de serem desenvolvidas conjuntamente por alunos e professores, pois segundo Araújo (2010) "*Apesar do GeoGebra fornecer condições que permitem a elaboração de situações que favorecem a construção de conhecimentos pelo aluno, ele, sozinho, não pode ensinar coisa alguma. Para que haja aprendizagem efetiva com esse recurso, é necessário a elaboração de situações de uso e sua aplicação*". E foi a partir dessa perspectiva que este trabalho foi escrito.

O objetivo principal deste trabalho é evidenciar de que forma a apreensão de importantes conceitos matemáticos pode ser facilitada utilizando diferentes ferramentas computacionais como o programa de geometria dinâmica GeoGebra ou softwares adequados à disciplina, que permitam estruturar o pensamento matemático e aprofundar seus conhecimentos nos diferentes ramos da matemática, seja álgebra, cálculo ou geometria, despertando também o interesse por outras disciplinas, pois só assim poderemos contribuir para a construção de uma sociedade intelectualmente preparada para o futuro da ciência.

O texto deste estudo assim como as figuras dinâmicas estão disponíveis no blog Educação em Inovação através do endereço eletrônico:

http://www.educacaoeminovacao.com.br/search/label/geometria%20Din%C3%A2mica

Referências Bibliográficas

[1] D'AMBROSIO, Ubiratan; **Cadernos cedes 40: História e educação matemática.**, 1ª edição, Papirus, Campinas, São Paulo. 1996.

[2] ———; **Educação matemática: da teoria à prática**, Papirus, Campinas, São Paulo. 1996.

[3] ARAÚJO, Luís C.L. e NÓBRIGA, Jorge C.C.; **Aprendendo Matemática com o GeoGebra**, 1ª edição, Exato,São Paulo, 2010.

[4] DANTE, Luiz R.; **Matemática - volume único.**, 1ª edição, Ática, São Paulo, 2005.

[5] MELLO, José L. P.; **Matemática - volume único.**, Moderna, São Paulo, 2005.

[6] SPINELLI, Miguel.; **Filósofos Pré-Socráticos: Primeiros Mestres da Filosofia e da Ciência Grega.**, 3ª edição, Edipucrs, Porto Alegre, 2012.

[7] ZAMPIROLO, Maria José C. V.; **Projeto escola e cidadania: Matemática.**, Editora do Brasil, São Paulo, 2000.

[8] IEZZI, Gelson.; **Fundamentos de Matemática Elementar - volume 3**, 5ª edição, Atual, São Paulo, 1983.

[9] ———; **Matemática: ciência e aplicações - volume 1**, 6ª edição, Saraiva, São Paulo, 2010.

[10] CARRON, Wilson e GUIMARÃES, Oswaldo.; **As faces da Física - volume único**, 2ª edição, Moderna, São Paulo, 2002.

[11] BARROSO, Juliane M.; **Conexões com a matemática - volume 1**, 1ª edição, Moderna, São Paulo, 2010.

[12] ÁVILA, Geraldo.; **Cálculo das funções de uma variável - volume 1**, 7ª edição, LTC, Rio de Janeiro, 2006.

[13] FUGITA, Felipe; **Matemática, 2ª série: ensino médio - volume 1**, 1ª edição, SM, São Paulo, 2009.

[14] REVISTA CÁLCULO; **Uma passagem secreta para o mundo triângulo**, Tozetto Claudia, 24ª edição, p.24-41. Segmento, São Paulo, 2013.