UNICAMP

VICENTE MASTROPAULO NETO

COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE COM APLICAÇÕES NO ENSINO DE GEOMETRIA

CAMPINAS
2014

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

VICENTE MASTROPAULO NETO

COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE COM APLICAÇÕES NO ENSINO DE GEOMETRIA

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: ANTÔNIO CARLOS DO PATROCINIO

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO VICENTE MASTROPAULO NETO, E ORIENTADA PELO PROF. DR. ANTÔNIO CARLOS DO PATROCINIO.

Assinatura do Orientador

APatrocinio

____

CAMPINAS
2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

M395c Mastropaulo Neto, Vicente, 1969-
Combinatória e probabilidade com aplicações no ensino de geometria / Vicente Mastropaulo Neto. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Antônio Carlos do Patrocinio.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Análise combinatória. 2. Probabilidades. 3. Geometria - Estudo e ensino. 4. Probabilidades combinatórias. I. Patrocinio, Antônio Carlos do,1941-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Combinatorics and probability with applications on geometry teaching
Palavras-chave em inglês:
Combinatorial analysis
Probabilities
Geometry - Study and teaching
Combinatorial probabilities
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestre
Banca examinadora:
Antônio Carlos do Patrocinio [Orientador]
Anamaria Gomide
Roberto Ribeiro Paterlini
Data de defesa: 14-05-2014
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 14 de maio de 2014 e aprovada Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

____
Prof.(a). Dr(a). ANTÔNIO CARLOS DO PATROCINIO

____
Prof.(a). Dr(a). ANAMARIA GOMIDE

____
Prof.(a). Dr(a). ROBERTO RIBEIRO PATERLINI

Abstract

This paper approaches the topic of Combinatorics and Probability with applications to the teaching of Geometry and has as its main objective to serve as support to Elementary School mathematics teachers, providing them with suggestions to elaborate problems which gather different contents of the curriculum, taking Combinatorics and Probability as their main topics. The problems presented here are thought for the 3rd grade of high school and must be preferably applied during the fourth bimester, aiming to promote a general review, with emphasis on Geometry problems. We initially present a historical contextualization of the probability theory besides the origin of geometric probability through Buffon's needle classic problem. Next we continue with a theoretical fundamentation and some applications of the central topics, Combinatorics and Probability, and then we conclude with a didactic sequence used in classroom with twelve problems which associate the main principles of Combinatorics and Probability with the basic concepts of Plane Geometry, Spatial Geometry and Analytical Geometry.

Keywords: Combinatorics, Probability, Geometry Teaching.

Resumo

Este trabalho aborda o tema Combinatória e Probabilidade com aplicações no ensino de Geometria e tem como objetivo principal servir de apoio aos professores de Matemática da escola básica, fornecendo sugestões para a elaboração de problemas que reúnem conteúdos distintos do currículo, tomando Combinatória e Probabilidade como temas centrais. Os problemas aqui apresentados são voltados ao 3º ano do Ensino Médio e devem ser aplicados, preferencialmente, no quarto bimestre, no intuito de promover uma revisão geral, com ênfase em problemas de Geometria. Apresentamos inicialmente uma contextualização histórica da teoria das probabilidades, além da origem da probabilidade geométrica através do clássico problema da agulha de Buffon. Prosseguimos com uma fundamentação teórica e algumas aplicações dos temas centrais, Combinatória e Probabilidade, e concluímos com uma sequência didática aplicada em sala de aula com doze problemas que relacionam os princípios elementares de Combinatória e Probabilidade aos conceitos básicos de Geometria Plana, Geometria Espacial e Geometria Analítica.

Palavras-chave: Combinatória, Probabilidade, Ensino de Geometria.

Sumário

Aos meus pais, Vicente *(in memorian)* e Célia, que dedicaram suas vidas à minha criação, minha saúde, meu bem estar, minha educação e, principalmente, à minha felicidade.

“A teoria do azar consiste em reduzir todos os acontecimentos do mesmo gênero a um certo número de casos igualmente possíveis, ou seja, tais que estejamos igualmente inseguros sobre sua existência, e em determinar o número de casos favoráveis ao acontecimento cuja probabilidade é buscada. A razão deste número para o de todos os casos possíveis é a medida dessa probabilidade, a qual é portanto uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador é o número de todos os casos possíveis.”

Pierre Simon Laplace

Agradecimentos

A Deus, em primeiro lugar, pela vida maravilhosa que me proporcionou.

Aos meus pais, Vicente (*in memorian*) e Célia, pelo amor incondicional, o carinho, a compreensão, a paciência, o caráter, a honestidade, a devoção e o apoio constante em todas as situações da minha vida.

Aos meus irmãos, Vagner e Vanderlei (Vag e Budi), grandes parceiros desde a nossa infância, pela amizade, o companheirismo, a lealdade e a união.

A todos os meus familiares, especialmente minha tia Hersy (Tia Cói), uma autêntica segunda mãe.

A todos os amigos que conheci nas diversas etapas da vida.

À amiga Mariana, companheira nos momentos difíceis que enfrentamos juntos em busca de um caminho, pela sua amizade e seu grande amor.

Aos amigos Cido e Érica, por sua filha Iara, o anjo de luz que veio iluminar a minha vida, com seu amor e sua alegria.

Aos alunos das turmas de 3º ano de 2013 da Escola Estadual Professor Almeida Junior, pelo respeito e pelo empenho demonstrado ao longo da sequencia didática que tornou possível este trabalho.

À Sociedade Brasileira de Matemática, pela criação do PROFMAT.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

À Direção e a todos os funcionários do IMECC, pela receptividade, o acolhimento, o ambiente caloroso e familiar, o atendimento amável e imediato a todas as minhas solicitações e, principalmente, pela atenção às questões referentes à acessibilidade.

Aos Coordenadores do curso, Prof(s). Sergio Antônio Tozoni e Ricardo Miranda Martins, pela dedicação à causa e o excelente trabalho à frente do PROFMAT.

Ao meu orientador, Prof. Antônio Carlos do Patrocínio, pelo incentivo e pela dedicação, a paciência, a compreensão, a liberdade de trabalho, às recomendações da parte histórica e, principalmente, pelas orientações precisas, que foram fundamentais na elaboração desta dissertação.

Aos membros da Banca Examinadora, Prof. Anamaria Gomide e Prof. Roberto Ribeiro Paterlini, pela leitura minuciosa da dissertação e pelas observações e correções pertinentes.

Aos professores Patrocínio, Anamaria, Chéti, Vera, Pedro, Diego, Claudina, Maria Lúcia, Edmundo, Fábio, Lúcio, Sueli, Otília, Rosa, Ary, Sergio, Roberto e Paulo, pelos cursos ministrados, pelo tratamento fraterno e pela entrega à causa do PROFMAT.

A todos os colegas de turma, pela amizade, o companheirismo, a solidariedade, a união e, principalmente, pela convivência maravilhosa ao longo desses dois anos.

Aos colegas Alessandro, Vivianne e Maria Cláudia, pela ajuda em momentos estratégicos.

Aos colegas Janaína e André Spina, pela parceria nos estudos nas vésperas de provas e pela ajuda preciosa na conclusão deste trabalho.

Ao menino Samir, filho da colega Michele, pelo momento de iluminação no dia da aula inaugural.

Ao amigo Max Bruno, colega de profissão e de Unidade Escolar, pela descoberta do PROFMAT e pela confecção das figuras no Geogebra.

Ao amigo Max Jahnke, do IME-USP, pela ajuda inestimável com o LaTeX.

Ao Prof. Claudio Possani, do IME-USP, pelo apoio imenso na época da graduação e pelas contribuições referentes à origem da Probabilidade Geométrica.

Introdução

Combinatória e Probabilidade constituem duas áreas muito importantes no ensino de Matemática, bastante recomendadas na elaboração dos atuais PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais). De acordo com essa recomendação, a Proposta Curricular da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo contempla esses tópicos com um módulo bimestral, o terceiro bimestre do 2º ano do Ensino Médio. Pessoalmente, consideramos este módulo o mais interessante de todo o Currículo, pela riqueza e a variedade na criação de situações-problema e pelo desafio que esses tópicos oferecem.

Vários fatores exerceram influência na escolha deste tema para a nossa dissertação: a importância e a diversidade já citadas no parágrafo acima, a incidência cada vez maior de questões relativas à área em vestibulares e concursos públicos, o gosto pessoal do autor pela área, os resultados práticos obtidos em sala de aula e o curso de Matemática Discreta do PROFMAT, realizado no primeiro semestre de 2012. Desde aquele momento já estávamos fortemente inclinados a escrever esta dissertação na área de Combinatória e Probabilidade. Naquele ano, estávamos trabalhando com três turmas do 2º ano do Ensino Médio, e pudemos realizar, no terceiro bimestre, experiências recomendadas no material da disciplina MA12 (Matemática Discreta) do PROFMAT, obtendo resultados bem gratificantes.

A idéia de relacionar Combinatória e Probabilidade ao estudo de outros tópicos do currículo de Matemática da escola básica surgiu pouco mais de um ano depois, em meio ao segundo semestre de 2013, quando já estávamos cursando as duas últimas disciplinas do PROFMAT e nossas turmas do ano anterior já estavam caminhando para o final do 3º ano. Então decidimos fazer, no quarto bimestre, uma revisão geral do Currículo do Ensino Médio, aproveitando a base de Combinatória e Probabilidade desenvolvida no 2º ano como ferramenta de apoio e fator de estímulo na investigação de problemas pertinentes aos mais variados conteúdos do programa. Os resultados foram surpreendentes. Como o programa é muito extenso, decidimos restringir esta dissertação aos problemas relacionados à Geometria, dividindo-os em Geometria Plana, Geometria Espacial e Geometria Analítica.

Assim, este trabalho apresenta, no Capítulo 1, uma perspectiva histórica, contando a origem da Teoria das Probabilidades (o Problema dos Pontos), descrevendo em ordem cronológica as principais contribuições prestadas por grandes matemáticos ao desenvolvimento desta área e contextualizando a origem do estudo da Probabilidade Geométrica (a agulha de Buffon). O Capítulo 2 aborda os princípios básicos da Combinatória (permutações, combinações e arranjos), sugere uma abordagem alternativa sem fórmulas e mostra três aplicações importantes das combinações: o Triângulo de Pascal, o Binômio de Newton e o Princípio da Casa dos Pombos, de Dirichlet. O

Capítulo 3 trata da Teoria das Probabilidades, definindo conceitos básicos como espaço amostral, evento e combinações de eventos (evento complementar, união e intersecção de eventos), apresentando a definição clássica de probabilidade de Laplace, o cálculo de probabilidade simples e suas propriedades básicas, seguindo por probabilidade com raciocínio combinatório, probabilidade binomial e probabilidade condicional e concluindo com a definição de eventos independentes e a probabilidade da intersecção. Por fim, o Capítulo 4 contém sugestões de problemas de Combinatória e Probabilidade com aplicações na Geometria, através de problemas que utilizam os princípios básicos de Combinatória e Probabilidade para retomar conceitos de Geometria Plana, Geometria Espacial e Geometria Analítica.

Devemos salientar que o objetivo deste trabalho não se restringe ao ensino de Combinatória e Probabilidade. A idéia fundamental é apresentar o potencial que esses temas possuem na criação de problemas que relacionam conteúdos distintos, servindo como um instrumento bastante eficaz na assimilação de conceitos pertinentes a outros tópicos do Currículo de Matemática.

A idéia de propor atividades que relacionam conteúdos distintos é amplamente defendida tanto pelos idealizadores da **OBMEP** (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), inaugurada em 2005, quanto pelos criadores do **PROFMAT**, implantado em 2011. Esse tipo de abordagem também constitui um dos princípios norteadores do projeto **"São Paulo Faz Escola"**, uma Proposta Curricular da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. A equipe responsável pela área de Matemática elaborou centenas de problemas com essa característica, produzindo um material muito fértil para apoiar a prática do professor em sala de aula. Essa equipe se refere a esse tipo de abordagem como Currículo Circular, pois os conteúdos já vistos anteriormente retornam com frequência, reforçando o aprendizado prévio e abrindo campo para os conteúdos seguintes.

Esperamos que este trabalho possa servir de guia aos professores de Matemática do Ensino Médio, no sentido de fornecer sugestões quanto à elaboração de problemas que envolvam dois ou mais conteúdos distintos do Currículo de Matemática, e que possa estimular a idéia de elaborar situações-problema com essa característica, pois constatamos na prática que esse tipo de abordagem é muito produtivo.

Capítulo 1

Uma perspectiva histórica

1.1 A origem da teoria das probabilidades

A origem da teoria das probabilidades é controversa. Conforme alguns historiadores da Matemática [1], a teoria das probabilidades surgiu como um ramo da Matemática e esse estudo teve como ponto de partida o clássico Problema dos Pontos, encaminhado por Chevaliér de Méré a Blaise Pascal. Outros defendem que essa tese é totalmente equivocada, pois séculos antes dessa famosa correspondência já existia uma curiosidade empírica no sentido de discutir as chances de vitória em determinados jogos, e vários problemas probabilísticos eram considerados tanto por matemáticos quanto por leigos [6]. É difícil definir a origem exata da probabilidade, pois ela começou como uma ciência empírica e só bem mais tarde começou a se desenvolver como uma ciência matemática. Apesar dessa divergência de opiniões, há um certo consenso quanto à idéia de que a probabilidade tem raízes em duas fontes nitidamente diferentes de interesse: a solução de problemas relacionados às chances de sucesso em jogos e apostas e a análise de dados estatísticos relacionados a instrumentos quantitativos como índices de mortalidade e tarifas de seguros.

Assim, podemos considerar que a probabilidade e a estatística nasceram praticamente juntas e assim permaneceram durante um bom tempo, ora com as idéias probabilísticas dando embasamento a análises estatísticas, ora com dados estatísticos ajudando no cálculo de probabilidades. Nas primeiras décadas do século XVIII essas duas ciências caminharam intimamente relacionadas e, de forma mais restrita, essa situação ainda ocorre nos dias de hoje, visto que é muito comum a mistura das duas idéias por parte de muita gente, inclusive matemáticos. Ouvimos com muita frequência a expressão “Probabilidade e Estatística”. Acreditamos que é importante tomar um certo cuidado com essa associação automática. É fato que essas duas ciências nasceram e cresceram juntas mas, já a partir da segunda metade do século XVIII, ambas começaram a se desenvolver e tomar caminhos próprios, com objetos de estudo e interesses distintos, e cada uma ganhou seu espaço como áreas de grande importância na Matemática. Atualmente, a estatística está presente em tantas áreas distintas do conhecimento humano que muitos já não a consideram mais um ramo da matemática e nem mesmo uma ciência exata.

Este trabalho não entrará no campo da estatística, e vamos considerar o Problema dos Pontos como o marco histórico da origem da probabilidade.

1.2 O problema dos pontos

Em 1654, o nobre francês Chevalier De Méré, soldado, linguista e estudioso clássico, mas também um grande apreciador de jogos de dados e cartas, propôs um problema ao prodígio científico da época, o excepcional matemático francês Blaise Pascal $(1623 - 1662)$:

"Como dividir de forma justa as apostas de um jogo não terminado?"

Embora não fosse um matemático de sucesso, De Méré sabia o suficiente a respeito do assunto para propor alguns problemas interessantes e fazia suas apostas conforme seu próprio sistema de probabilidades [6]. Apresentamos a seguir uma versão simplificada do Problema dos Pontos:

"Dois jogadores A e B estão disputando um jogo de dados com a seguinte regra: a cada lançamento de um dado honesto o jogador A marca um ponto se o resultado obtido for ímpar e o jogador B marca um ponto se o resultado for par. Cada jogador apostou 30 fichas e o ganhador do prêmio será o primeiro que totalizar três pontos. Vamos supor que, por algum motivo, o jogo foi interrompido quando o placar registrava dois pontos para o jogador A e um ponto para o jogador B, e não havia nenhuma possibilidade de continuar o jogo depois. Qual é a maneira correta de dividir as 60 fichas?"

1.3 Uma correspondência importante

Pascal se interessou muito pelo problema proposto por De Méré e então comunicou-se com o também francês Pierre de Fermat $(1601 - 1665)$, outro gigante da Matemática.

Uma correspondência formidável seguiu-se entre os dois grandes matemáticos franceses, e os dois encontraram soluções diferentes para o problema, ambas corretas e muito interessantes.

Em uma de suas cartas Pascal afirma que a solução de Fermat era muito interessante mas a dificuldade das combinações era muito grande, então ele achou um outro método mais curto e claro. Então Fermat respondeu explicando melhor seu método e, meses mais tarde, Pascal enviou outra carta dizendo que, com essa nova explicação, entendera perfeitamente o método de Fermat, que era bem diferente do seu mas chegava facilmente ao mesmo objetivo. [6]

Nessa troca de correspondências, Pascal e Fermat estabeleceram os fundamentos para a teoria matemática das probabilidades, um acontecimento que Howard Eves[1] chama de "um grande momento da Matemática". [4]

1.4 A solução de Pascal

Como o dado é honesto, as probabilidades de se obter uma face par ou uma face ímpar são iguais. Então há duas situações possíveis e equiprováveis para o quarto lançamento: se saísse uma face ímpar, o jogador A marcaria o terceiro ponto e ganharia o prêmio, e se saísse uma face par os dois jogadores ficariam empatados com dois pontos cada um e decidiriam o jogo no quinto

[1]Howard Whitley Eves $(1911 - 2004)$, matemático estadunidense especializado em História da Matemática

lançamento, que também teria duas situações possíveis e equiprováveis. Então o jogador A teria direito a pelo menos metade do prêmio (30 fichas) em virtude da sua chance de fechar o jogo no quarto lançamento, e as outras 30 fichas deveriam ser divididas ao meio pois ambos teriam a mesma chance de vitória no quinto lançamento.

Assim, o jogador A deve receber 45 fichas e o jogador B deve receber 15 fichas.

1.5 A solução de Fermat

A abordagem de Fermat foi mais probabilística: partindo do placar no momento em que o jogo foi interrompido (A 2x1 B), há duas situações possíveis e equiprováveis para o placar do jogo após o quarto lançamento: A 3x1 B e A 2x2 B. No primeiro caso o jogador A fecha o jogo, enquanto que, no segundo caso, haveria um quinto lançamento, com 50% de chance de vitória para cada jogador (A 3x2 B ou A 2x3 B).

Assim, denotando por P_A e P_B a probabilidade de vitória de cada jogador, temos:

$$P_A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2} \Rightarrow P_A = \frac{3}{4} \qquad \text{e} \qquad P_B = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} \Rightarrow P_B = \frac{1}{4}.$$

Portanto, o jogador A tem direito a 75% do prêmio (45 fichas) e o jogador B tem direito a 25% do prêmio (15 fichas).

1.6 Outras contribuições importantes

O primeiro tratamento sério, do ponto de vista matemático, da teoria das probabilidades começou na parte final do século XV e no início do século XVI, mais de um século antes do Problema dos Pontos de De Méré, quando alguns matemáticos italianos começaram a considerar as "chances matemáticas" em certos jogos de azar. [6]

Girolamo Cardano (1501 – 1570) foi um professor de Matemática italiano com uma carreira muito interessante e variada. Seu trabalho mais famoso é intitulado **"Ars Magna"**, publicado originalmente em 1545, no qual ele apresenta todas as regras da álgebra até então desenvolvidas. Mas Cardano também foi um jogador inveterado, e empregou um bom tempo analisando as chances de retirar ases de um baralho e de obter "setes" lançando dois dados. Ele relatou os resultados de suas pesquisas em um livro chamado **"Liber de Ludo Aleae"**, por volta de 1539, mas a obra só veio a ser publicada nove anos depois que Pascal e Fermat resolveram o Problema dos Pontos. Consta que Luca Pacioli (1445 – 1509), em seu livro **"Summa de Arithmetica"**, de 1494, foi um dos primeiros autores a apresentar o Problema dos Pontos em um trabalho de Matemática. Posteriormente, o problema foi discutido por Cardano e seu contemporâneo Tartaglia, pseudônimo de Nicola Fontana (1499 – 1557), mas nenhum dos dois resolveu o problema de forma correta.

Em 1657, o físico holandês Holandes Christian Huygens (1629 – 1695) escreveu o primeiro tratado formal sobre probabilidades, **"On Reasoning in a Dice Game"** (Raciocinando em um Jogo de Dados), baseado nas correspondências trocadas por Pascal e Fermat. [6] Huygens estendeu a idéia inicial para situações que envolvessem mais de dois jogadores. Ele também partia da idéia de resultados equiprováveis e criou o conceito de expectativa, ou resultado esperado. [1]

Jakob Bernoulli ($1654 - 1705$), em seu livro **"Ars Conjectandi"** (A arte de Conjecturar), que foi publicado em 1713, oito anos após sua morte (curiosamente, seu nascimento ocorreu no mesmo ano em que De Méré enviou a Pascal o Problema dos Pontos), reconhece que a teoria das probabilidades tem uma ampla gama de aplicações em problemas do cotidiano. Bernoulli identifica a dificuldade de ajustar a idéia de eventos equiprováveis em estudos que envolvem saúde da população e expectativa de vida, e então sugere uma abordagem baseada em dados estatísticos, aprimorando a Lei dos Grandes Números criada por Cardano. Segundo Bernoulli, dada uma margem de erro, existe um número de repetições que leva a diferença entre a probabilidade e a razão entre o número real de sucessos e o número total de repetições a estar dentro da margem de erro adequada. Bernoulli desenvolveu um método para calcular o número necessário de repetições, mas esse processo foi considerado ineficiente, por indicar um número absurdo de tentativas. [1]

A obra de Bernoulli foi seguida de importantes contribuições à teoria das probabilidades, destacando-se o trabalho do francês Abraham De Moivre ($1667 - 1754$), **"Doctrine of Chances"** (Doutrina das Chances), que continha vasto material sobre teoria das probabilidades. Considera-se ainda que De Moivre foi o primeiro a trabalhar com cálculo integral em probabilidade e com a curva de frequência normal, tão importante em estatística. [4]

Já na parte final do século XVIII, o matemático francês Pierre Simon Laplace ($1749 - 1827$) escreveu uma série de artigos sobre o assunto entre 1774 e 1786. Após uma pausa para estudar o sistema solar, Laplace publicou, em 1812, a obra **"Théorie Analytique des Probabilités"** (Teoria Analítica das Probabilidades). A densidade dessa obra era tamanha que o matemático britânico Augustus De Morgan ($1806 - 1871$) a descreve como o Mont Blanc da matemática. Tal fato levou Laplace a publicar um prefácio expositório de 153 páginas para a segunda edição, em 1814, e esse prefácio foi transformado em um pequeno livro chamado **"Ensaio Filosófico sobre Probabilidades"**. [1]

Atualmente, a teoria das probabilidades é aplicada a diversos campos de atividade humana, como economia, negócios, política, ciências sociais, esportes, medicina e até mesmo na educação.

1.7 A agulha de Buffon

Historiadores da matemática afirmam que o início do estudo da **probabilidade geométrica** ocorreu por volta de 1733 a partir de uma situação conhecida como **o problema da agulha de Buffon**.

O francês Georges-Louis Leclerc ($1707 - 1788$), conhecido como o Conde de Buffon, membro da Academia Francesa de Ciências, interessou-se em determinar o comprimento que uma agulha deveria ter para que, lançando-a sobre um feixe de retas paralelas equidistantes, a probabilidade da agulha cruzar uma das retas fosse igual à probabilidade de a agulha cair sem cruzar nenhuma das retas.

Após realizar muitos experimentos, o Conde de Buffon concluiu que, sendo d a distância entre as retas, l o comprimento da agulha e P a probabilidade de a agulha cruzar uma das retas, temos:

$$P = \frac{2l}{\pi.d} \quad \text{e} \quad P = \frac{1}{2} \Rightarrow l = \frac{\pi.d}{4}.$$

A demonstração desses resultados foge aos objetivos de nosso trabalho. Para maiores informações recomenda-se a leitura de [18].

Essa fórmula permite a dedução imediata de dois casos particularmente interessantes:

$$l = \frac{d}{2} \Rightarrow P = \frac{1}{\pi} \qquad \text{e} \qquad l = d \Rightarrow P = \frac{2}{\pi}.$$

Como $\pi \cong 3,14$, as implicações acima permitem afirmar que, se o comprimento da agulha for igual à metade da distância entre as retas, a probabilidade será praticamente igual a $\frac{1}{3}$, e se o comprimento for igual à distância, a probabilidade é praticamente igual a $\frac{2}{3}$.

1.8 Uma aplicação na medicina

Essa brincadeira aparentemente ingênua abriu caminho para o surgimento de um dos mais importantes recursos da medicina atual: a tomografia computadorizada.

Em 1979, o bioquímico e físico nuclear sul-africano Allan MacLeod Cormack e o engenheiro elétrico inglês Godfrey Newbold ganharam o Prêmio Nobel de medicina pela invenção do sistema de tomografia computadorizada, cuja maior contribuição no trabalho médico é a possibilidade de estimar o comprimento de uma lesão no cérebro com extrema precisão.

O princípio básico consiste em disparar sucessivos feixes de radiações paralelas (raios X, raios laser, etc) sobre a lesão que se deseja medir. Em outras palavras, o princípio da tomografia computadorizada é o inverso do problema da agulha de Buffon, ou seja, ao invés de jogar a agulha no feixe de retas paralelas, joga-se o feixe na agulha. Assim, a razão entre o número de feixes que cortam a agulha e o total de feixes emitidos permite calcular o comprimento da lesão, de forma análoga aos cálculos probabilísticos efetuados pelo Conde de Buffon.

Para maiores informações recomenda-se a leitura de [8].

Capítulo 2

Combinatória

2.1 Combinatória no Ensino Médio

Combinatória costuma ser descrita como a área da Matemática que aborda problemas de contagem, divididos em permutações, combinações e arranjos [3]. Mas a Combinatória vai muito além disso e engloba temas como o Triângulo de Pascal, o Binômio de Newton, o Princípio da Casa dos Pombos e a Teoria de Grafos. Suas inúmeras aplicações vão desde a resolução de problemas de Probabilidade e Teoria dos Jogos até campos como a Combinatória Algébrica e a Ciência da Computação. [11]

O programa de Combinatória do Ensino Médio fica mais restrito aos problemas de contagem e de formação de subconjuntos de um conjunto finito, mas isso já é suficiente para considerarmos essa área como uma das mais importantes do currículo de Matemática da escola básica [11], sendo cada vez maior a frequência de questões dessa natureza em vestibulares e concursos públicos.

O módulo dedicado à Combinatória e Probabilidade é tido por muitos professores como o mais difícil do currículo. Em oposição a essa idéia, consideramos por experiência própria que este pode ser o módulo mais desafiador, mas talvez seja o mais rico em termos de diversidade de situações a se trabalhar e, ao mesmo tempo, o mais gratificante em relação aos resultados obtidos.

Uma provável explicação para a dificuldade inicial é que Combinatória exige um tipo de raciocínio muito específico e ligeiramente diferente das outras áreas da Matemática [3]. Estimular e desenvolver o raciocínio combinatório é tão importante quanto uma boa visão geométrica e a habilidade para efetuar manipulações algébricas em suas respectivas áreas. Depois de superar essa barreira inicial, os resultados positivos passam a ser facilitados em decorrência da simplicidade da área em relação a pré-requisitos aritméticos e algébricos, pois quase todos os problemas de contagem podem ser resolvidos através de poucas operações elementares com números naturais. [17]

Assim, acreditamos que as idéias fundamentais no ensino de Combinatória na escola básica são: apresentar situações-problema e explorar princípios e técnicas básicas que permitam ao aluno desenvolver o raciocínio combinatório. Este trabalho tratará basicamente de problemas elementares de contagem, apresentando duas abordagens distintas, uma teórica e outra sem fórmulas, no intuito de oferecer subsídios aos professores do Ensino Médio para a resolução de problemas em sala de aula.

2.2 O Princípio Aditivo

Se A e B são dois conjuntos disjuntos com, respectivamente, n_1 e n_2 elementos, então o conjunto $A\ U\ B$ possui $n_1 + n_2$ elementos. [9]

2.3 O Princípio Multiplicativo

Se há n_1 modos de tomar uma decisão D_1 e, depois disso, há n_2 modos de tomar uma decisão D_2, então há $n_1.n_2$ modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2. [9]

Exemplo 1. Um restaurante oferece cinco variedades de massas com quatro tipos de molho e quatro variedades de carne com três tipos de acompanhamento. Se o cliente deve escolher uma massa **ou** uma carne, quantas opções ele tem para fazer o pedido?

Solução: Pelo Princípio Multiplicativo, há $5.4 = 20$ modos de escolher uma massa com um molho e há $4.3 = 12$ modos de escolher uma carne com um acompanhamento. Então, pelo Princípio Aditivo, há $20 + 12 = 32$ modos de fazer o pedido.

Exemplo 2. [7] As placas dos veículos são formadas por três letras (de um alfabeto de 26) seguidas por quatro algarismos (de 0 a 9). Quantas placas distintas podem ser formadas?

Solução: Há 26 opções para cada letra e 10 opções para cada algarismo. Então, podem ser formadas $26^3.10^4 = 175\,760\,000$ placas.

Exemplo 3. [17] Existem 9 000 números de quatro algarismos, desde 1 000 até 9 999.

A) Quantos números possuem quatro algarismos distintos?

B) Quantos deles são ímpares?

C) Quantos são pares?

D) Por que os resultados dos itens B) e C) são diferentes?

Solução:

A) Há nove modos de escolher o primeiro algarismo, que deve ser diferente de zero. Definido isso, há nove modos de escolher o segundo algarismo, que deve ser diferente do primeiro. A partir daí, há oito modos de escolher o terceiro algarismo e sete modos de escolher o quarto. Então, pelo Princípio Multiplicativo, há $9.9.8.7 = 4\,536$ números de quatro algarismos distintos.

B) Quando a questão envolve a paridade do número, deve-se analisar primeiro o algarismo das unidades, que contém a restrição maior. Nesse caso, há cinco opções para preencher a casa das unidades $(1, 3, 5, 7$ ou $9)$. Definido o algarismo das unidades, há oito modos de escolher o primeiro algarismo (diferente de zero e diferente do algarismo ímpar que ocupará a casa das unidades), há oito modos de escolher o segundo algarismo (diferente do primeiro e do último) e sete modos de preencher o dígito restante. Então, pelo Princípio Multiplicativo, há $8.8.7.5 = 2\,240$ números ímpares de quatro algarismos distintos.

C) Nesse caso, também temos cinco opções para preencher a casa das unidades $(2, 4, 6, 8$ ou $0)$. Porém, isso cria uma indefinição a respeito do primeiro dígito, pois seriam nove opções se o zero ocupar a casa das unidades e oito opções se essa casa for preenchida por um dos outros quatro algarismos pares. Então, devemos separar essa contagem em dois casos:

1º caso: Se o algarismo das unidades for igual a zero. Nesse caso, o quarto algarismo já está definido, e restam nove opções para o primeiro algarismo, oito para o segundo e sete para o terceiro. Então, pelo Princípio Multiplicativo, há $9.8.7 = 504$ números nessas condições.

2º caso: Se o algarismo das unidades for igual a $(2, 4, 6$ ou $8)$. Nesse caso há quatro opções para o algarismo das unidades, oito opções para o primeiro algarismo (pois o zero não está na casa das unidades), oito opções para o terceiro e sete para o quarto. Então há $8.8.7.4 = 1\,792$ números nessas condições.

Os dois casos acima são disjuntos. Então pelo Princípio Aditivo, há $504 + 1\,792 = 2\,296$ números pares de quatro algarismos distintos.

D) Porque a restrição imposta quanto à distinção dos algarismos interfere mais nos números ímpares do que nos pares, em virtude da impossibilidade de preencher o primeiro dígito com zero, causando a diferença dos resultados dos itens B) e C).

2.4 Formação de Filas: Permutações Simples

A questão básica dos problemas de permutação é: de quantos modos podemos colocar em fila n objetos distintos? Os algarismos $1, 2$ e 3 podem formar seis números de três algarismos distintos: 123, 132, 213, 231, 312 e 321. Uma permutação de n objetos distintos é um grupo ordenado desses objetos. Vamos denotar por P_n o número total de permutações possíveis. Generalizando o exemplo acima, há n modos de escolher o primeiro objeto, $n-1$ modos de escolher o segundo, $n-2$ modos de escolher o terceiro, e assim sucessivamente, até chegar ao último objeto, que só poderá ser escolhido de um modo. Então, pelo Princípio Multiplicativo, há $n.(n-1).(n-2)...2.1$ modos de formar a fila. Portanto,

$$P_n = n!\,.$$

Exemplo 4. Quantos anagramas tem a palavra "somar"? E quantos deles começam com vogal?

Solução: O total de anagramas é igual a $P_5 = 5! = 120$. Começando por vogal, há 2 modos de escolher a vogal do início e há $4! = 24$ modos de ordenar as outras quatro letras. Então, pelo Princípio Multiplicativo, há $2.24 = 48$ anagramas da palavra "somar" que começam com vogal.

Exemplo 5. [17] Considere todos os números distintos que podem ser formados com os algarismos $1, 2, 3$ e 4. Se esses números forem colocados em ordem crescente, qual será a posição do número $4\,231$ nessa fila?

Solução: Há $4! = 24$ modos de ordenar os quatro algarismos dados, então são 24 números distintos. Há $3! = 6$ modos de ordenar três objetos distintos. Então, definido o primeiro algarismo, há 6 números distintos que começam com cada um desses algarismos. Ordenando os números que começam com 4 obtemos 4 123, 4 132, 4 213, 4 231, 4 312 e 4 321, ou seja, o número 4 231 é o quarto número iniciado pelo algarismo 4. Como há $3.6 = 18$ números iniciados pelos outros três algarismos, o número 4 231 é o 22º da fila.

Exemplo 6. De quantos modos podemos ordenar em uma estante cinco livros diferentes de Matemática, três de História e dois de Biologia, mantendo juntos os livros de uma mesma disciplina?

Solução: Há $3! = 6$ modos de definir a ordem das disciplinas, $5! = 120$ modos de ordenar os livros de Matemática, $3! = 6$ modos de ordenar os livros de História e $2! = 2$ modos para Biologia. Então, há $6.120.6.2 = 8\,640$ modos de ordenar esses livros.

2.5 Permutações com Repetição

Quando os n objetos não são todos distintos, deve-se dividir $n!$ pelo produto dos fatoriais das quantidades de elementos repetidos, pois k elementos iguais produzem $k!$ permutações idênticas.

Exemplo 7. Calcule o número total de anagramas que podem ser formados com as letras das palavras “casa”, “parada” e “jararaca”.

Solução: A palavra “casa” tem quatro letras, sendo que a letra “a” aparece duas vezes. Assim, temos $P_{4,2} = \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$ anagramas. Analogamente, a palavra “parada” possui $P_{6,3} = \frac{6!}{3!} = \frac{720}{6} = 120$ anagramas. Já a palavra “jararaca”, com oito letras, tem duas letras que se repetem, sendo que a letra “a” aparece quatro vezes e a letra “r” aparece duas vezes. Então temos $\frac{8!}{4!.2!} = \frac{40320}{48} = 840$ anagramas da palavra “jararaca”.

2.6 Permutações Circulares

De quantas maneiras podemos ordenar n objetos igualmente espaçados em torno de um círculo? Já vimos que é possível formar $n!$ filas distintas com n objetos. Mas, colocando n objetos em círculo, não existem exatamente o primeiro e o último objetos. Como a roda gira, o que importa é a posição relativa entre os objetos, ou seja, uma mesma sequência de n objetos seria contada n vezes. Então deve-se dividir o total por n para eliminar repetições. Portanto, denotando por $(PC)_n$ o total de permutações circulares de n elementos, temos:

$$(PC)_n = \frac{n!}{n} \Rightarrow (PC)_n = (n-1)!\,.$$

Exemplo 8. Quantas rodas de ciranda distintas podem ser formadas com seis crianças? E se duas dessas crianças devem permanecer em duas posições consecutivas?

Solução: É possível formar $(PC)_6 = 5! \Rightarrow (PC)_6 = 120$ rodas. No segundo caso, considera-se essas duas crianças como um único objeto, que pode ser ordenado de 2 modos. Então, temos $2.(PC)_5 = 2.4! = 48$ rodas.

2.7 Grupos Ordenáveis: Arranjos Simples

Sejam $n, p \in \mathbb{N}$ e seja C um conjunto com n elementos distintos, ou seja, $C = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Arranjos simples de n elementos tomados p a p, sendo $1 \leq p \leq n$, são grupos ordenáveis de p elementos distintos tomados entre os n elementos de C. Esses grupos diferem entre si pela natureza e pela ordem dos seus elementos. [10]

Há n modos de escolher o primeiro elemento do grupo, $(n-1)$ modos de escolher o segundo elemento e assim sucessivamente, até chegarmos a $[n-(p-1)] = (n-p+1)$ modos de escolher o último elemento do grupo. [10] Assim, denotando por A_n, p o número total de arranjos possíveis de n elementos tomados p a p, temos que

$$A_n, p = n.(n-1).....(n-p+1) \Rightarrow A_n, p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Exemplo 9. Dez professores de uma escola estão concorrendo aos cargos de presidente e vice-presidente do Conselho Escolar. Quantas duplas distintas podem ser formadas?

Solução: O grupo é ordenável, pois os cargos são diferentes. Então,

$$A_{10,2} = \frac{10!}{8!} = 10.9 = 90 \text{ duplas.}$$

Exemplo 10. Doze times de futebol disputam um campeonato estadual e os quatro primeiros colocados conquistarão vaga para o campeonato nacional, sendo que o campeão estadual disputará o campeonato nacional no grupo A, o vice no B e o terceiro e o quarto, respectivamente, nos grupos C e D. De quantas formas distintas podem ser definidos os quatro representantes desse estado no campeonato nacional?

Solução: O grupo é ordenável, pois a ordem dos quatro classificados interfere no destino de cada um no campeonato nacional. Assim, temos:

$$A_{12,4} = \frac{12!}{8!} = 12.11.10.9 = 11\,880 \text{ formas.}$$

2.8 Grupos Não Ordenáveis: Combinações Simples

Sejam $n, p \in \mathbb{N}$ e seja C um conjunto com n elementos distintos, ou seja, $C = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Combinações simples de n elementos tomados p a p, sendo $1 \leq p \leq n$, são grupos **não** ordenáveis de p elementos distintos tomados entre os n elementos de C. Esses grupos diferem entre si apenas pela natureza dos seus elementos, não importando a ordem dos mesmos. [10]

Há n modos de escolher o primeiro elemento do grupo, $(n-1)$ modos de escolher o segundo elemento e assim sucessivamente, até chegarmos a $[n-(p-1)] = (n-p+1)$ modos de escolher o último elemento do grupo. Mas, como a ordem dos elementos do grupo é irrelevante, e sabemos que p objetos distintos podem ser ordenados de $p!$ modos, então estamos contando cada grupo $p!$

vezes, ou seja, devemos dividir o total por $p!$ para eliminar repetições. Assim, denotando por C_n, p o número total de combinações possíveis de n elementos tomados p a p, temos que:

$$C_n, p = \frac{n.(n-1).....(n-p+1)}{p.(p-1).....2.1} \Rightarrow C_n, p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

Exemplo 11. Dez professores de uma escola estão concorrendo a dois cargos no Conselho Escolar. Quantas duplas distintas podem ser formadas?

Solução:
O grupo é **não** ordenável, pois não há distinção entre os cargos. Então,

$$C_{10,2} = \frac{10!}{2!\,8!} = \frac{10.9}{2} = 45 \text{ duplas}.$$

Exemplo 12. Doze times de futebol disputam um campeonato estadual e os quatro primeiros colocados conquistarão vaga para o campeonato nacional.Considere que esses quatro classificados entrarão no campeonato nacional em igualdade de condições. De quantas formas distintas podem ser definidos os quatro representantes desse estado no campeonato nacional?

Solução: O grupo é **não** ordenável, pois a ordem dos quatro classificados não interfere no destino de cada um no campeonato nacional. Assim, temos:

$$C_{12,4} = \frac{12!}{4!\,8!} = \frac{12.11.10.9}{4.3.2.1} = 495 \text{ formas}.$$

Exemplo 13. [7] Onze cientistas trabalham em um projeto sigiloso. Por questões de segurança, os planos são guardados em um cofre protegido por muitos cadeados, de modo que só é possível abrir todos os cadeados se houver pelo menos cinco cientistas presentes.

A) Qual é o número mínimo de cadeados?

B) Quantas chaves cada cientista deve ter, nas condições do item A)?

Solução: Para abrir todos os cadeados são necessários cinco cientistas. Então, para cada grupo de quatro cientistas existe pelo menos um cadeado que eles não conseguem abrir. Assim, o número mínimo de cadeados é igual ao número de quartetos que podem ser formados entre os onze cientistas. Além disso, o número de chaves que cada cientista deve ter é igual ao número de cadeados que não podem ser abertos sem a sua presença, ou seja, é igual ao número de quartetos que podem ser formados com os outros dez cientistas. Sejam N_A o número mínimo de cadeados do cofre e N_B o número de chaves de cada cientista. Temos:

A) $N_A = C_{11,4} = \frac{11!}{4!7!} = \frac{11.10.9.8}{4.3.2.1} = 330$ cadeados.

B) $N_B = C_{10,4} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10.9.8.7}{4.3.2.1} = 210$ chaves.

Exemplo 14. De um grupo formado por cinco torcedores da Ponte Preta e quatro torcedores do Guarani serão escolhidos três torcedores da Macaca e dois do Bugre para formar uma comissão. Quantas comissões distintas podem ser formadas?

Solução: Há $C_{5,3} = \frac{5!}{2!3!} = 10$ modos de escolher os três ponte-pretanos e $C_{4,2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$ modos de escolher os dois bugrinos. Então, pelo Princípio Multiplicativo, podem ser formadas $10.6 = 60$ comissões distintas.

Exemplo 15. O Centro Acadêmico de uma determinada faculdade é formado por 24 alunos, sendo dez estudantes de Matemática, oito de Estatística e seis de Computação. Esses alunos precisam montar uma chapa com seis delegados, sendo três matemáticos, dois estatísticos e um computólogo, para representar a faculdade em um encontro nacional de estudantes. Quantas chapas distintas podem ser formadas?

Solução: Há $C_{10,3} = 120$ modos de escolher os três alunos de Matemática, $C_{8,2} = 28$ modos de escolher os dois estatísticos e 6 modos de escolher o único computólogo. Então, pelo Princípio Multiplicativo, podem ser formadas $120.28.6 = 20\,160$ chapas distintas.

Exemplo 16. [7] Quantos são os números naturais de sete dígitos contendo exatamente três dígitos iguais a 4 e dois dígitos iguais a 8?

Solução: Primeiramente, devemos observar que qualquer número natural nas condições dadas no enunciado contém necessariamente dois dígitos diferentes de 4 e diferentes de 8. Vamos separar o processo de contagem em três casos:

(1) Se o primeiro dígito for igual a 4.
Nesse caso, há $C_{6,2} = 15$ modos de definir as posições dos outros dois dígitos iguais a 4, $C_{4,2} = 6$ modos de definir as posições dos dois dígitos iguais a 8 e $8.8 = 64$ modos de definir os dois dígitos restantes. Então, pelo Princípio Multiplicativo, há $15.6.64 = 5\,760$ números naturais nessas condições.

(2) Se o primeiro dígito for igual a 8.
Há $C_{6,3} = 20$ modos de definir as posições dos três dígitos iguais a 4, 3 modos de definir a posição do outro dígito igual a 8 e $8.8 = 64$ modos de definir os dois dígitos restantes. Então são $20.3.64 = 3\,840$ números naturais nesse caso.

(3) Se o primeiro dígito for diferente de 4 e diferente de 8.
Há 7 modos de definir o primeiro dígito (que também deve ser diferente de zero), há $C_{6,3} = 20$ modos de definir as posições dos três dígitos iguais a 4, há $C_{3,2} = 3$ modos de definir as posições dos dois dígitos iguais a 8 e há 8 modos de definir o dígito restante. Então temos $7.20.3.8 = 3\,360$ números naturais desse tipo.

Assim, pelo Princípio Aditivo, há $5\,760 + 3\,840 + 3\,360 = 12\,960$ números naturais nas condições pedidas no enunciado.

2.9 Uma Abordagem Sem Fórmulas

As fórmulas apresentadas nas outras seções deste capítulo são muito úteis, mas não são suficientes para resolver todos os tipos de problemas de contagem. Decorar fórmulas não desenvolve raciocínio [3]. Além disso, muitos alunos enxergam uma fórmula como um problema a mais para administrar. Conhecer estratégias variadas e identificar a mais adequada à resolução de cada problema é muito mais importante que a simples memorização de fórmulas. [3]

Assim, uma abordagem sem fórmulas pode ser uma alternativa interessante para apresentar problemas de contagem, deixando as formulações teóricas para um segundo momento, apresentando-as como um recurso para simplificar os cálculos e facilitar a execução das técnicas aprendidas.

O professor deve dar ênfase à compreensão e à visualização da situação que cada problema apresenta, e então estimular a análise do problema a partir de quatro idéias fundamentais:

(1) Quantas escolhas serão feitas?

(2) Quantas opções existem para cada escolha?

(3) A ordem dos elementos escolhidos importa?

(4) Quando a ordem não importa, deve-se usar a divisão para eliminar repetições.

Além disso, se alguma das escolhas contém uma restrição maior do que as outras (por exemplo, a casa das unidades em problemas que abordam a paridade de um número natural), ou quando uma decisão interfere nas outras, a contagem deve começar por essa decisão.

Este trabalho não tem a intenção de defender o uso da abordagem formal ou da informal, pois acreditamos que ambas devem ser trabalhadas e o professor deve estar preparado para lidar com as duas situações, cabendo a ele fazer as escolhas que julgar mais adequadas para cada turma.

Veremos a seguir alguns exemplos de abordagem sem fórmulas.

Exemplo 17. Quantas filas distintas podem ser formadas com 5 pessoas?

Solução: Serão feitas cinco escolhas. Há 5 opções para escolher a primeira pessoa da fila. Definida a primeira pessoa, há 4 opções para escolher a segunda pessoa, e depois, restarão 3 opções para a terceira pessoa, 2 opções para a quarta e uma única opção para a última posição da fila. Então, podem ser formadas $5.4.3.2.1 = 120$ filas distintas.

Exemplo 18. Dois alunos serão escolhidos para ser representantes de classe, e cinco alunos da classe se candidataram. Quantas duplas distintas podem ser eleitas em cada caso abaixo?

A) Se os dois alunos tiverem a mesma função.

B) Se houver distinção de cargos, ou seja, um representante e um vice.

Solução:

A) Serão eleitos dois alunos, portanto serão feitas duas escolhas. Há 5 opções para a primeira escolha, e depois dela, há 4 opções para a segunda escolha. Então, pelo Princípio Multiplicativo, seriam $5.4 = 20$ duplas. Mas a ordem dos elementos **não** importa nesse caso, então estamos contando duas vezes cada dupla , pois uma dupla pode ser ordenada de duas maneiras. Assim, o resultado obtido deve ser dividido por 2 para eliminar as repetições. Como $20 : 2 = 10$, há 10 duplas distintas.

B) Nesse caso a ordem importa, pois os cargos são diferentes. Então a divisão por 2 não deve ser efetuada, pois as 20 duplas são realmente distintas, já que a mudança de ordem indica uma inversão dos cargos.

Exemplo 19. Dez times de futebol disputam um torneio estadual visando três vagas para um torneio nacional. De quantas maneiras distintas pode-se definir os representantes desse estado no torneio nacional se:

A) Os três times entrarem no torneio nacional em igualdade de condições?

B) A classificação final dos três times no torneio estadual (campeão, vice-campeão e terceiro colocado) for relevante para a formação das chaves do torneio nacional?

Solução:

A) Serão três escolhas. Há 10 opções para a primeira escolha, 9 opções para a segunda e 8 opções para a terceira. Temos $10.9.8 = 720$. A ordem dos times **não** importa, pois os três entrarão no torneio nacional em igualdade de condições. Um trio pode ser ordenado de $3.2.1 = 6$ maneiras, então o resultado obtido deve ser dividido por 6. Como $720 : 6 = 120$, esse estado pode ser representado de 120 maneiras distintas no torneio nacional.

B) Como a ordem é relevante não devemos dividir por 6, portanto há 720 representações distintas para o estado.

Exemplo 20. Uma escola possui oito professores de Matemática, e quatro deles serão sorteados para formar uma comissão que irá representar a escola em um congresso. Quantas comissões distintas podem ser formadas?

Solução: São quatro escolhas a fazer. Há 8 opções para a primeira escolha, 7 opções para a segunda, 6 opções para a terceira e 5 opções para a quarta. Temos $8.7.6.5 = 1\,680$, mas a ordem dos componentes do quarteto **não** importa. Um quarteto pode ser ordenado de $4.3.2.1 = 24$ maneiras, então o produto obtido deve ser dividido por 24. Como $1\,680 : 24 = 70$, a comissão pode ser formada de 70 maneiras distintas.

Situações semelhantes a esses quatro problemas aparecem com frequência, a ponto de terem um nome especial e uma fórmula. Apesar disso, os problemas de contagem não são, em geral, do tipo arranjo ou combinação. Por isso, quando nos deparamos com um problema de contagem, não devemos nos preocupar, de imediato, em escolher qual fórmula usar. O raciocínio lógico e a criatividade podem ser mais importantes em um primeiro momento. [3]

2.10 O Triângulo de Pascal

Chamamos de Triângulo de Pascal[1] o quadro abaixo, formado com os diversos valores de $C_{n,p}$ (chamados de Números Binomiais, Coeficientes Binomiais ou Números Combinatórios). Contando as linhas e colunas do triângulo a partir do zero, o elemento da linha n e coluna p é igual a $C_{n,p}$. [9]

$$\begin{array}{llllll}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5}
\end{array}$$

Calculando o valor dos números binomiais acima, obtemos a forma simplificada do Triângulo de Pascal:

$$\begin{array}{llllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}$$

Podemos construir rapidamente o Triângulo de Pascal através da seguinte proposição:

Teorema 2.10.1. (Relação de Stifel)

$$C_{n,p} + C_{n,p+1} = C_{n+1,p+1}.$$

A Relação de Stifel[2] afirma que, somando dois elementos consecutivos de uma linha obtemos o elemento situado abaixo da segunda parcela. [9]

Demonstração: [7] Considere um conjunto A com $n+1$ elementos. Seja $x \in A$. O número de subconjuntos de A com $p+1$ elementos é igual a $C_{n+1,p+1}$. Esse número é igual à soma entre os $C_{n,p+1}$ subconjuntos aos quais x pertence e os $C_{n,p}$ subconjuntos aos quais x não pertence.

[1]Blaise Pascal (1623 – 1662), matemático, filósofo e físico francês.
[2]Michael Stifel (1487 – 1567), algebrista alemão.

Portanto,

$$C_{n,p} + C_{n,p+1} = C_{n+1,p+1}. \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.10.2. (Relação das Combinações Complementares)

$$C_{n,p} = C_{n,n-p}.$$

A fórmula acima nos diz que, em uma mesma linha do Triângulo de Pascal, elementos equidistantes dos extremos são iguais. [9]

Demonstração:

$$C_{n,n-p} = \frac{n!}{(n-p)!\,[n-(n-p)!\,]} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = C_{n,p}. \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.10.3. (Teorema das Linhas)

$$C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + ... + C_{n,n-1} + C_{n,n} = 2^n.$$

Esse teorema afirma que a soma dos elementos da linha n é igual a 2^n. [9]

Demonstração: Considere um conjunto A com n elementos. Existem $C_{n,p}$ subconjuntos de A com p elementos, então $C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + ... + C_{n,n-1} + C_{n,n}$ é o número total de subconjuntos de A. O conjunto A tem n elementos. Então, formar um subconjunto de A significa tomar n decisões sucessivas (uma para cada elemento), sendo que cada decisão equivale a incluir ou não incluir cada elemento no subconjunto. Portanto, há dois modos de tomar cada uma das n decisões, e consequentemente há 2^n modos de tomar as n decisões. Assim,

$$C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + ... + C_{n,n-1} + C_{n,n} = 2^n. \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.10.4. (Teorema das Colunas)

$$C_{p,p} + C_{p+1,p} + C_{p+2,p} + ... + C_{p+n,p} = C_{p+n+1,p+1}.$$

Esse teorema afirma que a soma dos n primeiros elementos de uma coluna p do triângulo é igual ao elemento situado na coluna $p+1$ da linha imediatamente inferior ao último elemento da soma.

Demonstração: Basta aplicar a Relação de Stifel aos elementos da coluna $p+1$ e somar membro a membro as igualdades obtidas, simplificando parcelas iguais que aparecem em membros opostos.

Teorema 2.10.5. (Teorema das Diagonais)

$$C_{n,0} + C_{n+1,1} + C_{n+2,2} + ... + C_{n+p,p} = C_{n+p+1,p}.$$

Esse teorema afirma que a soma dos elementos de uma diagonal é igual ao elemento situado imediatamente abaixo da última parcela da soma. [9]

Demonstração: [9] Usando sucessivamente a Relação das Combinações Complementares, o Teorema das Colunas e, novamente, a Relação das Combinações Complementares, temos:

$$C_{n,0} + C_{n+1,1} + ... + C_{n+p,p} = C_{n,n} + C_{n+1,n} + ... + C_{n+p,p} \Rightarrow$$
$$C_{n,0} + C_{n+1,1} + ... + C_{n+p,p} = C_{n+p+1,n+1} \Rightarrow$$
$$C_{n,0} + C_{n+1,1} + ... + C_{n+p,p} = C_{n+p+1,p}. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 21. [9] Em uma sala há seis lâmpadas. De quantos modos essa sala pode ser iluminada?

Solução: A sala pode ser iluminada com uma, duas, três, quatro, cinco ou seis lâmpadas acesas. Então a sala pode ser iluminada de $2^6 - C_{6,0} = 64 - 1 = 63$ modos.

Exemplo 22. [9] Quantos coquetéis de duas ou mais vitaminas diferentes podemos formar com sete vitaminas?

Solução: Podemos formar $2^7 - C_{7,0} - C_{7,1} = 128 - 7 - 1 = 120$ coquetéis.

2.11 O Binômio de Newton

Nesta seção, vamos obter o desenvolvimento de binômios do tipo $(a+b)^n$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. É imediato que:

$$(a+b)^0 = 1 \qquad \text{e} \qquad (a+b)^1 = a+b.$$

Além disso, o quadrado e o cubo da soma de dois termos são trabalhados no Ensino Fundamental, então é familiar para o aluno (ou pelo menos deveria ser) que

$$(a+b)^2 = a^2 + 2a.b + b^2 \qquad \text{e} \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3.$$

Esses resultados podem ser facilmente demonstrados através da propriedade distributiva da multiplicação. O problema que surge aqui é o seguinte: É possível obter os termos do desenvolvimento de $(a+b)^n$ sem efetuar sucessivas multiplicações do binômio? [5]

A resposta é positiva. O Binômio de Newton[3] traz a solução desse problema, fornecendo a expressão do desenvolvimento de $(a+b)^n$. Este é um resultado muito importante da Álgebra e decorre diretamente das técnicas de Combinatória apresentadas neste capítulo, como veremos a seguir.

[3]Isaac Newton (1642 – 1727), matemático e físico inglês.

Teorema 2.11.1. (O Binômio de Newton) [9] Se a e b são números reais e n é um inteiro positivo, então:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^n b^{n-k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)^n = a^n x^0 + a^{n-1}b^1 + a^{n-2}b^2 + ... + a^2 b^{n-2} + a^1 b^{n-1} + a^0 b^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)^n = a^n + a^{n-1}x + a^{n-2}x^2 + ... + a^2 x^{n-2} + a x^{n-1} + x^n.$$

Demonstração: Temos $(a+b)^n = (a+b).(a+b).....(a+b)$.

Cada termo desse produto é obtido escolhendo-se, em cada parênteses, um a ou um b e multiplicando-se os escolhidos. Para cada valor de k, $0 \le k \le n$, o termo a em k parênteses, o termo b será escolhido em $n-k$ parênteses, e o produto será igual a $a^k b^{n-k}$. Isso pode ser feito de $C_{n,k}$ modos. Então o binômio $(a+b)^n$ é igual a uma soma na qual existem $C_{n,k}$ parcelas iguais a $a^k b^{n-k}$ para cada $k \in \{0, 1, ..., n\}$. Portanto,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_{n,k} a^k b^{n-k}. \qquad \blacksquare$$

Devemos observar que:

(1) O desenvolvimento de $(a+b)^n$ possui $n+1$ termos.

(2) Os coeficientes do desenvolvimento de $(a+b)^n$ são os elementos da enésima linha do Triângulo de Pascal.

Exemplo 23. Determine o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $(x^2-1)^7$.

Solução: O termo genérico do desenvolvimento desse binômio é dado por

$$C_{7,p}(-1)^p (x^2)^{7-p} = C_{7,p}(-1)^p x^{14-2p}.$$

O termo em x^4 é obtido se $14-2p=4$, ou seja, se $p=5$. Então o termo procurado é $C_{7,5}(-1)^5 x^4 = -21x^4$. Portanto, o coeficiente é -21.

Exemplo 24. [7] Determine o termo máximo do desenvolvimento de $(1+\frac{1}{3})^{50}$.

Solução: O termo genérico do desenvolvimento é:

$$t_p = C_{n,p} a^p x^{n-p} = C_{50,p} \left(\frac{1}{3}\right)^p.$$

Vamos descobrir para quais valores de p os termos crescem. Para isso, calculamos:

$$t_p - t_{p-1} = C_{50,p} \left(\frac{1}{3}\right)^p - C_{50,p-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{p-1} =$$

$$= \frac{50!}{p!\,(50-p)!\,3^p} - \frac{50!}{(p-1)!\,(51-p)!\,3^{p-1}} =$$

$$= \frac{50!}{(p-1)!\,(50-p)!\,3^{p-1}} . \left(\frac{1}{3p} - \frac{1}{51-p} \right) =$$

$$= \frac{50!}{(p-1)!\,(50-p)!\,3^{p-1}} . \left(\frac{51-4p}{3p(51-p)} \right) .$$

Temos $t_p > t_{p-1}$ quando $51 - 4p > 0$ e temos $t_p < t_{p-1}$ quando $51 - 4p < 0$. Portanto, $t_p > t_{p-1}$ quando $p \leq 12$ e $t_p < t_{p-1}$ quando $p \geq 13$. Assim, temos

$$t_0 < t_1 < ... < t_{11} < t_{12} > t_{13} > t_{14} > ... > t_{49} > t_{50}.$$

Então o termo máximo é:

$$t_{12} = \frac{C_{50,12}}{3^{12}}.$$

2.12 O Princípio da Casa dos Pombos

Os problemas apresentados nas outras seções deste capítulo são, basicamente, problemas de contagem. Nesta seção, apresentaremos um teorema muito simples e muito interessante no sentido de provar a existência de elementos: o Princípio da Casa dos Pombos, de Dirichlet[4] [10]

Teorema 2.12.1. (O Princípio da Casa dos Pombos) [10] Se $n+1$ pombos devem ser colocados em n gaiolas, então pelo menos uma gaiola deverá conter pelo menos dois pombos

Demonstração: Vamos supor que cada gaiola contenha no máximo um pombo. Então teremos no máximo n pombos, o que é uma contradição. ■

Veremos agora três exemplos de aplicação do Princípio da Casa dos Pombos em problemas de Geometria, sendo o primeiro em Geometria Plana, o segundo em Geometria Espacial e o terceiro em Geometria Analítica.

Exemplo 25. [7] Prove que, tomando aleatoriamente cinco pontos de um retângulo de largura 4 e altura 2, existem pelo menos dois deles cuja distância não é maior que $\sqrt{5}$.

Solução: Unindo os pontos médios dos lados opostos, podemos dividir o retângulo dado em quatro retângulos de largura 2 e altura 1. Cada um desses retângulos terá diagonal

$$d = \sqrt{2^2 + 1^2} \Rightarrow d = \sqrt{5}$$

.

[4]Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859), matemático alemão.

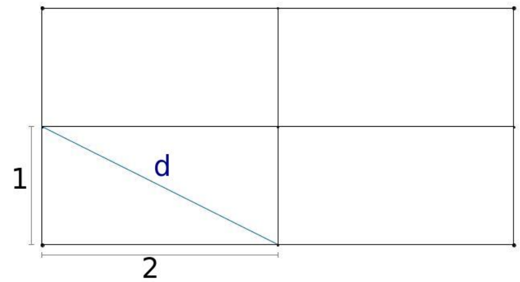

Figura 2.1:

Pelo Princípio da Casa dos Pombos, tomando cinco pontos do retângulo original, pelo menos um dos quatro retângulos menores conterá pelo menos dois pontos, e assim a distância máxima entre esses dois pontos é igual a $\sqrt{5}$. ■

Exemplo 26. [10] Mostre que, dentre nove pontos quaisquer de um cubo de aresta 2, existem pelo menos dois pontos que distam no máximo $\sqrt{3}$ entre si.

Solução: Unindo os pontos médios de cada par de arestas opostas de uma mesma face, dividimos o cubo original em oito cubos de aresta 1.

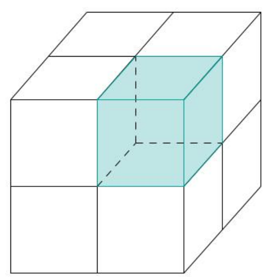

Figura 2.2:

Cada um desses oito cubos de aresta 1 terá diagonal $d = \sqrt{3}$. Tomando nove pontos do cubo de aresta 2, pelo menos um dos cubos de aresta 1 conterá pelo menos dois pontos. Portanto, a distância máxima entre eles é igual a $\sqrt{3}$. ■

Exemplo 27. [7] Seja C um conjunto formado por cinco pontos de coordenadas inteiras do plano cartesiano. Prove que o ponto médio de algum dos segmentos cujos extremos pertencem a C também tem coordenadas inteiras.

Solução: Sejam $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ dois pontos quaisquer do plano cartesiano e seja $M = (x_M, y_M)$ o ponto médio do segmento AB. Então, temos:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad \text{e} \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Daí segue que $x_M, y_M \in \mathbb{Z}$ se, e somente se, $x_A + x_B$ é par e $y_A + y_B$ é par. Mas a soma de dois números inteiros é par se, e somente se, ambos tem a mesma paridade. Assim, seja $P = (x_P, y_P)$

um ponto qualquer do plano cartesiano. Existem quatro situações possíveis quanto à paridade das coordenadas de P :

1) x_P é par e y_P é par.

2) x_P é par e y_P é ímpar.

3) x_P é ímpar e y_P é par.

4) x_P é ímpar e y_P é ímpar.

O conjunto C possui cinco pontos do plano. Então, pelo Princípio da Casa dos Pombos, pelo menos uma das quatro situações descritas acima contém pelo menos dois pontos de C, ou seja, pelo menos dois pontos de C tem abcissas de mesma paridade e ordenadas de mesma paridade. Portanto, existe pelo menos um segmento cujos extremos são pontos de C que tem ponto médio com coordenadas inteiras. ■

Teorema 2.12.2. (Generalização do Princípio da Casa dos Pombos) [10] Se n gaiolas são ocupadas por $nk+1$ pombos, então pelo menos uma gaiola deverá conter pelo menos $k+1$ pombos.

Demonstração: Vamos supor que cada gaiola contenha no máximo k pombos. Como são n gaiolas, teremos no máximo nk pombos, o que é uma contradição. ■

Exemplo 28. [10] Uma urna contém 4 bolas vermelhas, 7 bolas verdes, 9 bolas azuis e 6 bolas amarelas. Qual é o menor número de bolas que devemos retirar, sem olhar, para que possamos ter certeza de termos tirado pelo menos três bolas de uma mesma cor?

Solução: Considerando como gaiolas as quatro cores diferentes temos, pelo Teorema 6, que $n = 4$ e $k = 2$. Então, devemos retirar $4.2 + 1 = 9$ bolas.

Exemplo 29. [15] Qual é o número mínimo de pessoas para garantir a ocorrência de cada uma das situações abaixo?

A) Que pelo menos quatro pessoas façam aniversário em um mesmo mês.

B) Que pelo menos quatro pessoas do mesmo sexo façam aniversário em um mesmo mês.

Solução:
Sejam N_A e N_B o número mínimo de pessoas em cada item.

A) Considerando as gaiolas como os doze meses do ano, temos pelo Teorema 6 que $N_A = 12.3 + 1 \Rightarrow N_A = 37$ pessoas.

B) Nesse item, o Princípio da Casa dos Pombos deve ser aplicado duas vezes. Para garantir a existência de quatro pessoas do mesmo sexo, tomando como gaiolas os dois sexos, são necessárias $2.3+1 = 7$ pessoas. Então, precisamos que pelo menos 7 pessoas tenham nascido em algum dos doze meses do ano, ou seja, $N_B = 12.6 + 1 \Rightarrow N_B = 73$ pessoas.

Capítulo 3

Probabilidade

3.1 Probabilidade no Ensino Médio

A Teoria das Probabilidades é o estudo dos fenômenos que envolvem a incerteza e se originou como um instrumento para modelar jogos de azar, como cartas e dados. Sua parte mais elementar é uma das aplicações da Combinatória, e uma das principais aplicações do estudo das probabilidades é a Teoria dos Jogos. [12]

A Probabilidade serviu de base para a Estatística, ciência utilizada nas mais variadas atividades humanas, como Saúde, Educação, Política, Ciências Sociais, Economia e Administração. Atualmente, a Teoria das Probabilidades é utilizada como ferramenta em algumas áreas da Física e, cada vez mais, em áreas da própria Matemática. Por esse motivo, o estudo de Probabilidade no Ensino Médio é importante e atual. [12]

Intuitivamente, a idéia de probabilidade faz parte do senso comum e o cotidiano das pessoas apresenta situações que envolvem, de modo informal, o cálculo de probabilidades, desde situações simples da vida pessoal até tomadas de decisões na vida profissional. Outras situações, como calcular as chances de ser sorteado em uma rifa, ganhar na loteria ou desenvolver estratégias de sucesso para vencer em jogos de azar são exemplos interessantes de que a idéia intuitiva de probabilidade é algo muito presente na vida das pessoas. [3]

Em razão disso, o estudo da Probabilidade desperta bastante interesse na maioria dos alunos do Ensino Médio. Calcular a chance de ocorrência de determinadas situações, ou de vitória em determinados jogos, aguça a curiosidade dos alunos e serve como fator de motivação inicial para desenvolver um estudo mais aprofundado sobre o tema. Como o assunto é muito vasto, trataremos aqui de alguns conceitos básicos e aplicações.

As primeiras seções deste capítulo definirão espaço amostral, evento e probabilidade simples, e sugerimos trabalhar esses conceitos, inicialmente, apresentando o cálculo de probabilidades sem a exigência de raciocínio combinatório, no intuito de priorizar a idéia de que a chance de ocorrência de um determinado evento pode ser expressa através de uma razão entre dois valores, a parte e o todo [17]. O numerador dessa razão representa o total de resultados favoráveis ao evento, e o denominador representa o total de resultados possíveis. Em seguida, apresentaremos algumas propriedades básicas, como evento complementar, união e intersecção de eventos e, por fim, entraremos no terreno da probabilidade com raciocínio combinatório, no qual os princípios básicos de contagem serão usados para encontrar a fração que define a probabilidade procurada.

A principal dificuldade que um professor de Matemática da escola básica enfrenta ao trabalhar Probabilidade em sala de aula é a defasagem que os alunos apresentam com relação às operações com números racionais na forma fracionária. Assim, uma consequência involuntária, mas muito útil, do cálculo de probabilidades no Ensino Médio, é o fato que esse estudo ajuda a corrigir essa defasagem e estimula a descoberta de diversas relações entre as representações fracionária e decimal.

Além disso, o estudo da Probabilidade é bastante eficaz no sentido de ajudar a desmistificar o conceito intuitivo de sorte e azar.

3.2 Espaço Amostral

Chamamos de experimento determinístico todo experimento que, quando repetido em condições semelhantes, produz resultados idênticos. Se um experimento é repetido em condições semelhantes e produz resultados diferentes, ele é chamado de experimento aleatório. [9]

Existem muitas situações da vida cotidiana que despertam a curiosidade de saber qual é a probabilidade de ocorrência de um determinado experimento aleatório. Para responder essa pergunta com precisão, é fundamental saber descrever todos os resultados possíveis do experimento em questão. Para isso, vamos definir o conceito de espaço amostral.

Definição 3.2.1. Chamamos de espaço amostral, e indicamos por Ω, o conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. [5]

Exemplos: [5]

1) Lançar uma moeda e observar a face de cima.

$$\Omega = \{K, C\}, \text{ em que K denota cara e C, coroa.}$$

2) Lançar um dado e observar o número da face de cima.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

3) De uma urna contendo três bolas vermelhas (V), duas bolas brancas (B) e cinco bolas azuis (A), extrair uma bola e observar sua cor.

$$\Omega = \{V_1, V_2, V_3, B_1, B_2, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$$

4) Lançar uma moeda duas vezes e observar o par de resultados obtidos.

$$\Omega = \{(K, K), (K, C), (C, K), (C, C)\}$$

3.3 Eventos

Dado um experimento aleatório com espaço amostral Ω, vamos definir o conceito de evento. Em geral, indicamos um evento por uma letra maiúscula do alfabeto: $A, B, C, ..., X, Y, Z$.

Definição 3.3.1. Seja Ω um espaço amostral qualquer. Chamamos de evento todo subconjunto de Ω. Em particular, os elementos de Ω são chamados de eventos elementares. [9]

Dizemos que um evento A ocorre se, realizado o experimento, o resultado obtido for pertencente a A. [5]

Exemplos: [5]

1) Um dado é lançado e observa-se o número da face de cima.

$$\Omega \ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Eis alguns eventos:

A: Ocorrência de número ímpar. $A = \{1, 3, 5\}$.
B: Ocorrência de número primo. $B = \{2, 3, 5\}$.
C: Ocorrência de número menor que 4. $C = \{1, 2, 3\}$.
D: Ocorrência de número menor que 7. $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$.
E: Ocorrência de número maior que 6. $E = \emptyset$.

2) Uma moeda é lançada três vezes e observa-se a tripla de resultados obtidos.

$$\Omega = \{(K, K, K), (K, K, C), (K, C, K), (K, C, C),$$
$$(C, K, K), (C, K, C), (C, C, K), (C, C, C)\}.$$

Eis alguns eventos:

A: Ocorrência de cara (K) no primeiro lançamento.

$$A = \{(K, K, K), (K, K, C), (K, C, K), (K, C, C)\}$$

B: Ocorrência de exatamente uma coroa.

$$B = \{(K, K, C), (K, C, K), (C, K, K)\}$$

C: Ocorrência de, no máximo, duas coroas.

$$C = \{(K, K, K), (K, K, C), (K, C, K), (K, C, C),$$
$$(C, K, K), (C, K, C), (C, C, K)\}.$$

D: Ocorrência de pelo menos duas caras.

$$D = \{(K, K, K), (K, K, C), (K, C, K), (C, K, K)\}.$$

3.4 Combinações de eventos

Já definimos espaço amostral e evento como conjuntos. Então, usando algumas propriedades básicas de conjuntos, podemos combinar eventos para formar novos eventos. [5]

Definição 3.4.1. (Complementar de um evento) Seja Ω um espaço amostral e seja A um evento contido em Ω. Chamamos de evento complementar de A, e denotamos por A^c, o evento que ocorre se, e somente se, A não ocorrer.

Definição 3.4.2. (União de dois eventos) Seja Ω um espaço amostral e sejam A e B dois eventos contidos em Ω. Chamamos de união entre o evento A e o evento B, e denotamos por $A \cup B$, o evento que ocorre se, e somente se, pelo menos um dos eventos A ou B ocorrer.

Definição 3.4.3. (Intersecção de dois eventos) Seja Ω um espaço amostral e sejam A e B dois eventos contidos em Ω. Chamamos de intersecção entre o evento A e o evento B, e denotamos por $A \cap B$, o evento que ocorre se, e somente se, os eventos A e B ocorrerem simultaneamente.

Em particular, se $A \cap B = \emptyset$, A e B são chamados de eventos **mutuamente excludentes**, ou **eventos disjuntos**.

Exemplo 30. [5] Um dado honesto é lançado e observa-se o número da face de cima. Logo, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Sejam os eventos:

A: ocorrência de número par. $A = \{2, 4, 6\}$

B: ocorrência de número maior ou igual a 4. $B = \{4, 5, 6\}$

C: ocorrência de número ímpar. $C = \{1, 3, 5\}$

Assim, temos:

$A \cup B$: ocorrência de número par **ou** número maior ou igual a 4. Então,

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$$

$A \cap B$: ocorrência de número par **e** número maior ou igual a 4. Então,

$$A \cap B = \{4, 6\}$$

$A \cup C$: ocorrência de número par **ou** número ímpar. Então,

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$$

$A \cap C$: ocorrência de número par **e** número ímpar. Então,

$$A \cap C = \emptyset$$

$B \cup C$: ocorrência de número maior ou igual a 4 **ou** número ímpar. Então,

$$B \cup C = \{1, 3, 4, 5, 6\}$$

$B \cap C$: ocorrência de número maior ou igual a 4 **e** número ímpar. Então,

$$B \cap C = \{5\}$$

A^c : ocorrência de número **não** par. Então,

$$A^c = \{1, 3, 5\} \quad \Rightarrow \quad A^c = C$$

B^c : ocorrência de número menor que 4. Então,

$$B^c = \{1, 2, 3\}$$

C^c : ocorrência de número **não** ímpar. Então,

$$C^c = \{2, 4, 6\} \quad \Rightarrow \quad C^c = A$$

3.5 Definição Clássica de Probabilidade

A definição clássica de probabilidade apareceu pela primeira vez na obra **"Liber de Ludo Aleae"**, já citada no Capítulo 1 deste trabalho. Cardano[1] foi o primeiro a definir formalmente uma probabilidade como o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Posteriormente, Laplace[2] também denominou os elementos do evento A e do espaço amostral Ω como casos favoráveis e casos possíveis [9]. Por ora, vamos adotar a idéia inicial de que uma probabilidade, denotada por P, pode ser obtida através da razão abaixo:

$$P = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

A partir dessa idéia inicial, vamos adotar a definição abaixo:

Definição 3.5.1. Seja Ω o espaço amostral finito de um experimento aleatório. Uma probabilidade é uma função P que associa, a cada evento A contido em Ω, um número real $P(A)$, chamado de probabilidade do evento A, que satisfaça às seguintes condições:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$.

2) $P(\Omega) = 1 \quad \text{e} \quad P(\emptyset) = 0$.

3) Se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

[1]Girolamo Cardano (1501 – 1570), matemático italiano.
[2]Pierre Simon Laplace (1749 – 1827), matemático e físico francês.

3.6 Espaços Amostrais Equiprováveis

Nesta seção, abordaremos espaços amostrais nos quais todos os seus eventos elementares têm a mesma probabilidade de ocorrência.

Definição 3.6.1. Seja $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ um espaço amostral qualquer e sejam $P(\{a_1\}), P(\{a_2\})$, $\ldots, P(\{a_n\})$ as respectivas probabilidades de cada um dos eventos elementares contidos em Ω. Dizemos que Ω é um espaço amostral equiprovável se $P(\{a_1\}) = P(\{a_2\}) = \ldots = P(\{a_n\})$, ou seja, se todos os eventos elementares contidos em Ω tiverem a mesma probabilidade.

Teorema 3.6.1. Se $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ é um espaço amostral equiprovável, então,

$$P(\{a_i\}) = \frac{1}{n}, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Demonstração: Se Ω é um espaço amostral equiprovável temos, pela Definição 3.6.1, que $P(\{a_1\}) = P(\{a_2\}) = \ldots = P(\{a_n\})$, e pela Definição 3.5.1, $P(\Omega) = 1$. Logo,

$$P(\{a_i\}) = \frac{1}{n}, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad \blacksquare$$

Teorema 3.6.2. Seja $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ um espaço amostral equiprovável, seja A um evento contido em Ω e sejam $\sigma(A)$ e $\sigma(\Omega)$, respectivamente, o número de elementos de A e de Ω. Então,

$$P(A) = \frac{\sigma(A)}{\sigma(\Omega)}.$$

Demonstração: Por hipótese, $\sigma(\Omega) = n$. Logo,

$$P(A) = \sigma(A).\frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{\sigma(A)}{\sigma(\Omega)} \quad \blacksquare$$

Exemplo 31. No lançamento de um dado honesto, calcule a probabilidade de ocorrência de cada um dos eventos abaixo:

A) Obter a face 2.

B) Obter um número ímpar.

C) Obter um número primo.

Solução: Em um dado honesto, temos que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ é um espaço amostral equiprovável, portanto $\sigma(\Omega) = 6$ e, pelo Teorema 3.6.1, a probabilidade de obter cada face é igual a $\frac{1}{6}$. Sejam $\sigma(A), \sigma(B)$, e $\sigma(C)$ o número de elementos de cada um dos eventos pedidos no enunciado. Assim, pelo Teorema 3.6.2, temos:

A) $A = \{2\} \quad \Rightarrow \quad \sigma(A) = 1 \quad \text{e} \quad P(A) = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad P(A) \cong 0,17.$

B) $B = \{1, 3, 5\} \quad \Rightarrow \quad \sigma(B) = 3 \quad \text{e} \quad P(B) = \frac{3}{6} \quad \Rightarrow \quad P(B) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad P(B) = 0,5.$

C) $C = \{3, 6\} \quad \Rightarrow \quad \sigma(C) = 2 \quad \text{e} \quad P(C) = \frac{2}{6} \quad \Rightarrow \quad P(C) = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad P(C) \cong 0,33.$

Exemplo 32. Um baralho completo é composto por quatro naipes: ouros($\diamondsuit$), copas($\heartsuit$), espadas($\spadesuit$) e paus($\clubsuit$), sendo que cada naipe possui 13 cartas, sendo nove cartas numeradas de 2 a 10, um valete(J), uma dama(Q), um rei(K) e um ás(A). Sorteando aleatoriamente uma carta do baralho, calcule a probabilidade de ocorrência de cada um dos eventos abaixo:

A) Sortear o rei de copas($\heartsuit$).

B) Sortear uma carta de ouros($\diamondsuit$).

C) Sortear uma carta de um naipe preto.

D) Sortear uma carta que contenha uma letra.

Solução: Seja Ω o conjunto formado pelas 52 cartas do baralho. Então $\sigma(\Omega) = 52$. Logo, a probabilidade de obter cada carta é $\frac{1}{52}$. Sejam $\sigma(A), \sigma(B), \sigma(C)$ e $\sigma(D)$ o número de elementos de cada um dos eventos pedidos no enunciado. Assim, temos:

A) $\sigma(A) = 1 \quad \text{e} \quad P(A) = \frac{1}{52} \quad \Rightarrow \quad P(A) \cong 0,02.$

B) $\sigma(B) = 13 \quad \text{e} \quad P(B) = \frac{13}{52} \quad \Rightarrow \quad P(B) = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad P(B) = 0,25.$

C) Os naipes pretos são espadas($\spadesuit$) e paus($\clubsuit$). Então,
$\sigma(C) = 2.13 = 26 \quad \text{e} \quad P(C) = \frac{26}{52} \quad \Rightarrow \quad P(C) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad P(C) = 0,5.$

D) Cada um dos quatro naipes possui quatro cartas que contém letras (J,Q,K e A). Então,

$$D = \{J\diamondsuit, Q\diamondsuit, K\diamondsuit, A\diamondsuit, J\heartsuit, Q\heartsuit, K\heartsuit, A\heartsuit, J\spadesuit, Q\spadesuit, K\spadesuit, A\spadesuit, J\clubsuit, Q\clubsuit, K\clubsuit, A\clubsuit\}$$

. Logo, $\sigma(D) = 4.4 = 16 \quad \text{e} \quad P(D) = \frac{16}{52} \quad \Rightarrow \quad P(D) = \frac{4}{13} \quad \Rightarrow \quad P(D) \cong 0,31.$

3.7 Cálculo de Probabilidades em Espaços Equiprováveis

Nesta seção, serão apresentados exemplos de situações nas quais o cálculo das probabilidades não envolve raciocínio combinatório, ou seja, os termos da fração clássica que define a probabilidade de ocorrência do evento dado podem ser determinados sem o uso dos princípios básicos de contagem.

Exemplo 33. Uma urna contém três bolas brancas e quatro bolas vermelhas. Uma bola será sorteada aleatoriamente. Qual é a probabilidade de que a bola sorteada seja branca?

Solução: Denotando as bolas brancas como B e as vermelhas como V, temos:

$$\Omega = \{B_1, B_2, B_3, V_1, V_2, V_3, V_4\} \text{ e } A = \{B_1, B_2, B_3\}.$$

Então, temos que $\sigma(A) = 3$ e $\sigma(\Omega) = 7$. Portanto,

$$P(A) = \frac{3}{7} \quad \Rightarrow \quad P(A) \cong 0,43.$$

Exemplo 34. Três moedas são lançadas simultaneamente. Qual é a probabilidade de ocorrência de cada um dos eventos abaixo?

A: obter duas caras.

B: obter pelo menos duas caras.

Solução: Denotando cara como K e coroa como C, temos o seguinte espaço amostral:

$$\Omega = \{(K,K,K),(K,K,C),(K,C,K),(K,C,C),$$
$$(C,K,K),(C,K,C),(C,C,K),(C,C,C)\}.$$

Então $\sigma(\Omega) = 8$. Sejam $P(A)$ e $P(B)$, respectivamente, as probabilidades dos eventos pedidos. Temos:

A) Dos oito resultados possíveis contidos em Ω, três contém duas caras, ou seja,

$$A = \{(K,K,C),(K,C,K),(C,K,K)\} \quad \text{e} \quad \sigma(A) = 3.$$

Portanto,

$$P(A) = \frac{3}{8} \quad \Rightarrow \quad P(A) = 0,375.$$

B) Deve-se acrescentar o resultado que contém três caras (K,K,K) ao conjunto obtido no item A). Portanto,

$$P(B) = \frac{4}{8} \quad \Rightarrow \quad P(B) = 0,5.$$

Exemplo 35. Dois dados são lançados simultaneamente. Qual é a probabilidade de que a soma dos números obtidos seja igual a 9?

Solução: Os resultados possíveis são:

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (2,1) & (3,1) & (4,1) & (5,1) & (6,1) \\
(1,2) & (2,2) & (3,2) & (4,2) & (5,2) & (6,2) \\
(1,3) & (2,3) & (3,3) & (4,3) & (5,3) & (6,3) \\
(1,4) & (2,4) & (3,4) & (4,4) & (5,4) & (6,4) \\
(1,5) & (2,5) & (3,5) & (4,5) & (5,5) & (6,5) \\
(1,6) & (2,6) & (3,6) & (4,6) & (5,6) & (6,6)
\end{array}$$

Daí segue que $\sigma(\Omega) = 36$. O evento pedido é o conjunto A tal que:

$$A = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}.$$

Então $\sigma(A) = 4$ e, consequentemente,

$$P(A) = \frac{4}{36} \quad \Rightarrow P(A) = \frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad P(A) \cong 0,11.$$

Exemplo 36. [5] De um total de 200 alunos inscritos nos cursos de Física, Química e Biologia, sabemos que:

1) O curso de Física teve 60 inscrições, sendo 50 do sexo masculino.

2) O total de homens inscritos é 120.

3) Existem 20 mulheres inscritas no curso de Química.

Sorteando ao acaso uma das fichas de inscrição, qual é a probabilidade de que a ficha sorteada seja de uma mulher inscrita no curso de Biologia?

Solução: Seja A o conjunto das mulheres inscritas no curso de Biologia. São 200 alunos no total, então $\sigma(\Omega) = 200$. Por 2) há 120 homens, logo há 80 mulheres inscritas. Por 1) há $60 - 50 = 10$ mulheres inscritas no curso de Física, e por 3), há 20 mulheres inscritas em Química. Então, há $80 - 10 - 20 = 50$ mulheres inscritas no curso de Biologia. Logo, $\sigma(A) = 50$. Portanto,

$$P(A) = \frac{50}{200} \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad P(A) = 0,25.$$

3.8 Propriedades Básicas

Nesta seção serão apresentadas as propriedades básicas do cálculo de probabilidades das combinações de eventos definidas na seção 3.4. Para efeito de completividade, vamos considerar o espaço amostral Ω e o conjunto vazio $\emptyset$ como eventos. O primeiro denomina-se evento certo e o segundo, evento impossível. [2]

Teorema 3.8.1. Seja Ω um espaço amostral qualquer. Temos:

$$P(\Omega) = 1 \quad \text{e} \quad P(\emptyset) = 0.$$

Demonstração: Pelo Teorema 3.6.2, temos:

$$P(\Omega) = \frac{\sigma(\Omega)}{\sigma(\Omega)} = 1 \quad \text{e} \quad P(\emptyset) = \frac{0}{\sigma(\Omega)} = 0. \quad \blacksquare$$

Teorema 3.8.2. Seja Ω um espaço amostral qualquer e sejam A e B dois eventos contidos em Ω. Temos:

$$\text{Se } A \subset B, \text{ então } P(A) \leq P(B).$$

Demonstração:

(1) Se $A = B$, é imediato que $P(A) = P(B)$.

(2) Se $A \subset B$ com $A \neq B$, então $\sigma(A) < \sigma(B)$. Logo, $\frac{\sigma(A)}{\sigma(\Omega)} < \frac{\sigma(B)}{\sigma(\Omega)} \quad \Rightarrow \quad P(A) < P(B)$.

Assim, por (1) e (2), $P(A) \leq P(B)$. $\blacksquare$

Teorema 3.8.3. Seja Ω um espaço amostral qualquer e seja A um evento contido em Ω. Então, temos:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Demonstração: É imediato que $\emptyset \subset A \subset \Omega$. Então, decorre imediatamente dos Teoremas 3.8.1 e 3.8.2 que:

$$P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(\Omega) \quad \Rightarrow \quad 0 \leq P(A) \leq 1. \quad \blacksquare$$

Teorema 3.8.4. (Probabilidade da União.) Seja Ω um espaço amostral qualquer e sejam A e B dois eventos contidos em Ω. Então, temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Demonstração: Somando $\sigma(A)$ com $\sigma(B)$, os elementos pertencentes a $A \cap B$ são contados duas vezes, pois pertencem simultaneamente a A e B. Logo, $\sigma(A \cup B) = \sigma(A) + \sigma(B) - \sigma(A \cap B)$. Então, temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \quad \blacksquare$$

Obs: Em particular, se A e B são eventos mutuamente excludentes, temos $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Demonstração: Se A e B são eventos mutuamente excludentes, temos que $A \cap B = \emptyset$, ou seja, $\sigma(A \cap B) = 0$ e, consequentemente, $P(A \cap B) = 0$. Daí, segue que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B). \quad \blacksquare$$

Teorema 3.8.5. (Probabilidade do Evento Complementar) Seja Ω um espaço amostral qualquer e seja A um evento contido em Ω. Então, temos:

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

Demonstração: Como $A \cap A^c = \emptyset$ e $A \cup A^c = \Omega$, decorre do Teorema 3.8.4 que:

$$P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c). \Rightarrow P(A) + P(A^c) = 1. \text{ Logo,}$$

$$P(A^c) = 1 - P(A). \quad \blacksquare$$

Veremos agora um exemplo de aplicações dos teoremas apresentados nesta seção:

Exemplo 37. [5] Uma urna contém 100 bolinhas, numeradas de 1 a 100. Uma bolinha é sorteada aleatoriamente e observa-se o seu número. Assumindo que todas as bolinhas tem probabilidade $\frac{1}{100}$ de serem sorteadas, calcule a probabilidade de ocorrência de cada um dos eventos abaixo:

A) Sortear uma bolinha cujo número seja, simultaneamente, múltiplo de 6 **e** de 8.

B) Sortear uma bolinha cujo número seja múltiplo de 6 **ou** de 8.

C) Sortear uma bolinha cujo número **não** seja múltiplo de 5.

Solução: Temos $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$, e os 100 eventos elementares são equiprováveis.

A) Um múltiplo simultâneo de 6 e 8 é, necessariamente, múltiplo de 24. Então, o evento desejado é $A = \{24, 48, 72, 96\}$. Assim, temos:

$$P(A) = \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25} \quad \Rightarrow \quad P(A) = 0,04.$$

B) Sejam os eventos:

$$B: \text{ sortear um múltiplo de 6} \quad \text{e} \quad C: \text{ sortear um múltiplo de 8.}$$

Então, $B = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96\}$ e
$C = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96\}$.
Logo, pelo Teorema 3.6.2, temos:

$$P(B) = \frac{16}{100} = \frac{4}{25} \quad \text{e} \quad P(C) = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}.$$

Agora, devemos observar que $B \cup C$ é o evento desejado e $B \cap C$ é exatamente o evento A. Então, pelo Teorema 3.8.4, temos:

$$P(A \cup B) = \frac{4}{25} + \frac{3}{25} - \frac{1}{25} = \frac{6}{25} \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = 0,24.$$

C) Considere o evento D : sortear um múltiplo de 5. Então, temos:

$$D = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100\}.$$

Portanto, $P(D) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$. O evento desejado é D^c. Então, pelo Teorema 3.8.5,

$$P(D^c) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad P(D^c) = 0,8.$$

3.9 Probabilidade com Raciocínio Combinatório

Existem inúmeros problemas de probabilidade nos quais a montagem da fração da probabilidade de Laplace exige a mobilização do raciocínio combinatório, utilizando os princípios básicos de contagem. Os casos mais comuns estão associados à formação de grupos **não** ordenáveis (combinações) [17]. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 38. De um grupo formado por seis homens e quatro mulheres, quatro pessoas serão sorteadas aleatoriamente e **sem** reposição para receber um prêmio. Os quatro prêmios são idênticos. Qual é a probabilidade de que sejam sorteados exatamente dois homens e duas mulheres?

Solução: Seja A o evento desejado. Há dez pessoas no grupo, portanto há $C_{10,4} = \frac{10!}{4!6!} = 210$ modos de se sortear quatro pessoas distintas desse grupo. Há $C_{6,2} = \frac{6!}{4!2!} = 15$ modos de escolher dois dos seis homens e há $C_{4,2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$ modos de escolher duas das quatro mulheres. Portanto, há $15.6 = 90$ modos de se sortear dois homens e duas mulheres desse grupo. Assim, temos:

$$P(A) = \frac{90}{210} = \frac{3}{7} \quad \Rightarrow \quad P(A) \cong 0,43.$$

Exemplo 39. De um baralho completo foram separadas quatro cartas de cada naipe: o valete(J), a dama(Q), o rei(K) e o ás(A). Desse conjunto de 16 cartas, quatro serão sorteadas aleatoriamente e **sem** reposição. Qual é a probabilidade de que sejam sorteadas duas cartas de um mesmo naipe e duas cartas de um dos outros naipes?

Solução: Seja A o evento desejado. Há $C_{16,4} = \frac{16!}{4!12!} = 1820$ modos de se sortear quatro cartas quaisquer do conjunto. Nas condições pedidas, há $C_{4,2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$ modos de definir os dois naipes e há $C_{4,2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$ modos de sortear duas cartas de cada um dos dois naipes. Portanto, há $6.6.6 = 216$ modos de se sortear as quatro cartas nas condições pedidas no enunciado. Assim, temos:

$$P(A) = \frac{216}{1820} = \frac{54}{445} \quad \Rightarrow \quad P(A) \cong 0,12.$$

Exemplo 40. [7] Cinco dados honestos serão lançados simultaneamente. Calcule a probabilidade de obter cada uma das situações abaixo:

A) um par.

B) dois pares.

C) uma trinca.

D) um full hand, ou seja, uma trinca e um par.

Solução: Há $6^5 = 7\,776$ resultados possíveis. Sejam A, B, C e D os eventos desejados em cada item.

A) Há 6 modos de definir o par, há $C_{5,2} = 10$ modos de definir os dois dados que formarão o par e há $5.4.3 = 60$ modos de definir os resultados dos outros três dados, que devem ser diferentes entre si e diferentes dos dados do par. Portanto, há $6.10.60 = 3\,600$ modos de formar um par lançando cinco dados. Então, temos:

$$P(A) = \frac{3\,600}{7\,776} = \frac{25}{54} \quad \Rightarrow \quad P(A) \cong 0,46.$$

B) Há $C_{6,2} = 15$ modos de definir os dois pares, há $C_{5,2} = 10$ modos de definir os dois dados do primeiro par, há $C_{3,2} = 3$ modos de definir os dois dados do segundo par e há 4 modos de definir o resultado do quinto dado, que deve ser diferente dos dois pares. Portanto, há $15.10.3.4 = 1\,800$ modos de formar dois pares. Então, temos:

$$P(B) = \frac{1\,800}{7\,776} = \frac{25}{108} \quad \Rightarrow \quad P(B) \cong 0,23.$$

C) Há 6 modos de definir a trinca, há $C_{5,3} = 10$ modos de definir os três dados da trinca e há $5.4 = 20$ modos de definir os resultados dos outros dois dados. Portanto, há $6.10.20 = 1200$ modos de formar uma trinca. Então, temos:

$$P(C) = \frac{1\,200}{7\,776} = \frac{25}{162} \quad \Rightarrow \quad P(C) \cong 0,15.$$

D) Há 6 modos de definir a trinca, 5 modos de definir o par e $C_{5,3} = 10$ modos de definir os três dados da trinca (o que, automaticamente, define os dois dados do par). Portanto, há $6.5.10 = 300$ modos de formar um full hand. Então, temos:

$$P(D) = \frac{300}{7\,776} = \frac{25}{648} \quad \Rightarrow \quad P(D) \cong 0,04.$$

Exemplo 41. [17] No jogo de loteria oficial Mega-Sena, existem 60 dezenas disponíveis, e um apostador escolhe, no mínimo 6, e no máximo 10 delas. São sorteadas seis dezenas, e o apostador que tiver escolhido todas as seis dezenas sorteadas ganha o prêmio maior. Calcule a probabilidade de ganhar o prêmio maior para cada uma das apostas possíveis.

Solução: Sejam $P(A), P(B), P(C), P(D)$ e $P(E)$, respectivamente, as probabilidades de ganho de um apostador que escolheu $6, 7, 8, 9$ e 10 dezenas. Há $C_{60,6} = 50\,063\,860$ extrações possíveis. Então,

$$P(A) = \frac{1}{50\,063\,860} \quad \Rightarrow \quad P(A) \cong 0,00000002.$$

Temos $C_{7,6} = 7$, $C_{8,6} = 28$, $C_{9,6} = 84$ e $C_{10,6} = 210$. Multiplicando $P(A)$ separadamente por cada um desses valores, obtemos:

$$P(B) = \frac{7}{50\,063\,860} \quad \Rightarrow \quad P(B) \cong 0,00000014.$$

$$P(C) = \frac{28}{50\,063\,860} \quad \Rightarrow \quad P(C) \cong 0,00000056.$$

$$P(D) = \frac{84}{50\,063\,860} \quad \Rightarrow \quad P(D) \cong 0,00000168.$$

$$P(E) = \frac{210}{50\,063\,860} \quad \Rightarrow \quad P(E) \cong 0,0000042.$$

3.10 Probabilidade Binomial

Consideremos agora experimentos que possuem apenas dois resultados possíveis, que chamaremos de sucesso e fracasso. Por exemplo: [9]

1) Lançamos uma moeda honesta e definimos sucesso como cara e fracasso como coroa.

2) Lançamos um dado honesto e definimos sucesso como 5 ou 6 e fracasso como $1, 2, 3$ ou 4.

3) De uma urna que contém seis bolas brancas e quatro bolas pretas, sorteamos uma bola e definimos sucesso como uma bola preta e fracasso como uma bola branca.

Chamando de $P(A)$ a probabilidade de sucesso, temos que $P(A^c)$ é a probabilidade de fracasso. Nos exemplos acima, os valores de $P(A)$ são, respectivamente, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5}$.

Suponhamos agora que nosso experimento será repetido um determinado número de vezes, e queremos obter um número mínimo de sucessos. Qual é a chance disso ocorrer? Em outras palavras, qual é a probabilidade de obtermos k sucessos em n tentativas, com $\quad k, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq k \leq n$?

Teorema 3.10.1. (Teorema Binomial) A probabilidade P_k de ocorrerem exatamente k sucessos em uma sequência de n experimentos iguais e independentes entre si, com $k, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq k \leq n$, na qual a probabilidade de sucesso em cada experimento é p, é dada por:

$$P_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Demonstração: Obter k sucessos em n tentativas significa que ocorrerão $n-k$ fracassos. Há $C_{n,k}$ modos de definir a ordem dos n sucessos e dos $n-k$ fracassos. Pelo Princípio Multiplicativo, a probabilidade de obter k sucessos é p^k e a probabilidade de obter $n-k$ fracassos é $(1-p)^{n-k}$. Então,

$$P_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \quad \blacksquare$$

Em particular, se o sucesso e o fracasso são equiprováveis, temos:

$$P_k = \binom{n}{k} (\frac{1}{2})^k (\frac{1}{2})^{n-k} \quad \Rightarrow \quad P_k = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}.$$

Exemplo 42. Quatro moedas honestas serão lançadas simultaneamente. Qual é a probabilidade de obtermos exatamente duas caras e duas coroas?

Solução: Queremos saber a probabilidade de obter dois sucessos e dois fracassos. Então,

$$P = \binom{4}{2}.(\frac{1}{2})^2.(\frac{1}{2})^2 = 6.\frac{1}{4}.\frac{1}{4} = \frac{3}{8} \quad \Rightarrow \quad P = 0,375.$$

Exemplo 43. Seis moedas honestas serão lançadas simultaneamente. Qual é a probabilidade de obtermos exatamente quatro caras e duas coroas?

Solução: Queremos saber a probabilidade de obter quatro sucessos e dois fracassos. Então,

$$P = \binom{6}{4}.(\frac{1}{2})^4.(\frac{1}{2})^2 = 15.\frac{1}{16}.\frac{1}{4} = \frac{15}{64} \quad \Rightarrow \quad P = 0,234.$$

Exemplo 44. Seis moedas honestas serão lançadas simultaneamente. Qual é a probabilidade de obtermos pelo menos quatro caras?

Solução: Queremos saber a probabilidade de obter quatro, cinco ou seis sucessos. Então,

$$P = \frac{\binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6}}{2^6} = \frac{15+6+1}{64} = \frac{22}{64} = \frac{11}{32} \quad \Rightarrow \quad P \cong 0,344.$$

Exemplo 45. [9] Um aluno marca, de forma aleatória, as respostas em uma prova de múltipla escolha com dez questões e cinco alternativas por questão. Qual é a probabilidade dele acertar:

A) exatamente quatro questões?

B) menos de quatro questões?

C) pelo menos cinco questões?

D) as dez questões?

Solução: Sejam $P(A), P(B), P(C)$ e $P(D)$ as probabilidades pedidas em cada item. Temos:

A) $P(A) = \binom{10}{4}.(\frac{1}{5})^4.(\frac{4}{5})^6 = \frac{172\,032}{1\,953\,125} \quad \Rightarrow \quad P(A) \cong 0,088.$

B) $P(B) = \binom{10}{0}.(\frac{1}{5})^0.(\frac{4}{5})^{10} + \binom{10}{1}.(\frac{1}{5})^1.(\frac{4}{5})^9 + \binom{10}{2}.(\frac{1}{5})^2.(\frac{4}{5})^8 + \binom{10}{3}.(\frac{1}{5})^3.(\frac{4}{5})^7 \Rightarrow$
$P(B) = \frac{8\,585\,216}{9\,765\,625} \quad \Rightarrow \quad P(B) \cong 0,879.$

C) $P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - 0,088 - 0,879 \quad \Rightarrow \quad P(C) \cong 0,033.$

D) $P(D) = (\frac{1}{5})^{10} = \frac{1}{9\,765\,625} \quad \Rightarrow \quad P(D) \cong 0,0000001.$

3.11 Probabilidade Condicional

Nesta seção, será apresentada mais uma técnica básica importante, chamada de probabilidade condicional. Essa técnica é usada quando se deseja calcular a probabilidade de ocorrer um evento B sabendo que ocorreu um evento A, ambos do mesmo espaço amostral.

Consideremos o experimento que consiste em lançar um dado **não** viciado. Sejam os eventos:

A: obter um número par.

B: obter um número menor que 4.

Temos $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. É imediato que $P(B) = \frac{1}{2}$. Essa é a probabilidade de B a priori, ou seja, antes da realização do experimento. Suponhamos que, após a realização do experimento, alguém nos informe que o resultado obtido foi um número par, ou seja, A ocorreu. Isso muda nossa opinião a respeito da ocorrência de B, pois B só pode ter ocorrido se o resultado obtido for 2. Intuitivamente, passamos a enxergar P(B) como $\frac{1}{3}$, pois $\sigma(A \cap B) = 1$ e $\sigma(A) = 3$. Essa é a probabilidade de B a posteriori, que vamos definir como probabilidade condicional. [9]

Definição 3.11.1. [9] Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de B dado A é o número $P(A \cap B)/P(A)$. Denotaremos essa probabilidade por $P(B \,/\, A)$. Então, temos:

$$P(B \,/\, A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Essa fórmula raramente é usada para calcular uma probabilidade condicional, que pode ser obtida por outros caminhos. Sua grande utilidade é o cálculo de $P(A \cap B)$. [7]

Obs: Sendo dado que A ocorreu, temos $P(A) > 0$. Portanto o número acima está bem definido. Supondo que $P(B) > 0$, a fórmula acima é equivalente às duas expressões abaixo:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B\,/\,A) \quad \text{e} \quad P(A \cap B) = P(B).P(A\,/\,B).$$

Vejamos agora algumas propriedades básicas da probabilidade condicional:

Teorema 3.11.1. [9] Seja A tal que $P(A) > 0$. Então,

(1) $P(\emptyset\,/\,A) = 0, \quad P(\Omega\,/\,A) = 1 \quad$ e $\quad 0 \leq P(B\,/\,A) \leq 1$.

(2) $P((B \cup C)\,/\,A) = P(B\,/\,A) + P(C\,/\,A)$, se $B \cap C \neq \emptyset$.

Demonstração:

(1) $(\emptyset\,/\,A) = \frac{P(\emptyset \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\emptyset)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0$.
$P(\Omega\,/\,A) = \frac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$.
Como $0 \leq P(A \cap B) \leq P(A)$, temos

$$0 \leq \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad \text{ou seja} \quad 0 \leq P(B\,/\,A) \leq 1. \quad \blacksquare$$

(2) $P((B \cup C)\,/\,A) = \frac{P((B \cup C) \cap A)}{P(A)} \quad \Rightarrow$

$P((B \cup C)\,/\,A) = \frac{P((B \cap A) \cup (C \cap A))}{P(A)} \quad \Rightarrow$

$P((B \cup C)\,/\,A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} + \frac{P(C \cap A)}{P(A)} \quad \Rightarrow$

$P((B \cup C)\,/\,A) = P(B\,/\,A) + P(C\,/\,A). \quad \blacksquare$

Teorema 3.11.2. (Teorema do Produto) [9] Se $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n) \neq 0$, então

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n) =$$

$$= P(A_1).P(A_2/A_1).P(A_3/(A_1 \cap A_2)) \ldots P(A_n/(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_{n-1}).$$

Demonstração: Para dois eventos A_1 e A_2 a fórmula é válida, pois coincide com a Definição 3.11.1. Para três eventos $(n = 3) A_1$, A_2 e A_3, temos:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_3\,/\,(A_1 \cap A_2)).P(A_1 \cap A_2) \quad \Rightarrow$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_3\,/\,(A_1 \cap A_2)).P(A_2\,/\,A_1).P(A_1)$$

Para $n > 3$, o raciocínio é semelhante, e usa-se o Princípio de Indução Completa.

Exemplo 46. [7] Uma urna contém quatro bolas brancas e seis bolas pretas. Sacam-se sucessivamente e sem reposição duas bolas dessa urna. Calcule a probabilidade de ambas serem brancas.

Solução: Sejam os eventos:

$$A: \text{a primeira bola é branca e } B: \text{a segunda bola é branca. Temos:}$$

$$P(A \cap B) = P(A).P(B \,/\, A) = \frac{4}{10}.\frac{3}{9} = \frac{2}{15} \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) \cong 0,13.$$

Exemplo 47. [7] Uma urna contém quatro bolas brancas e seis bolas pretas. Sacam-se sucessivamente e sem reposição duas bolas dessa urna. Calcule a probabilidade da primeira bola ser branca, sabendo que a segunda bola é branca.

Solução: Sejam os eventos:

A: a primeira bola é branca.

B: a primeira bola é preta.

C: a segunda bola é branca.

Queremos $P(A \,/\, C)$. Usaremos a fórmula da definição de probabilidade condicional. Sabemos, do exemplo anterior, que $P(A \cap C) = \frac{2}{15}$. O cálculo de P(C) depende do resultado da primeira extração, pois a primeira bola sacada pode ter sido uma bola branca ou uma bola preta. Considerando as duas possibilidades, temos:

$$P(C) = P((A \cap C) \cup (B \cap C)) \quad \Rightarrow$$
$$P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C) \quad \Rightarrow$$
$$P(C) = \frac{2}{15} + P(B).P(C \,/\, B) \quad \Rightarrow$$
$$P(C) = \frac{2}{15} + \frac{6}{10}.\frac{4}{9} \quad \Rightarrow$$
$$P(C) = \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad P(C) = 0,4.$$

Então,

$$P(A \,/\, C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{2}{15} : \frac{2}{5} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad P(A \,/\, C) \cong 0,33.$$

Exemplo 48. [13] João, ao partir para uma viagem, ficou de enviar um cartão postal para sua mãe. A probabilidade de que ele envie o cartão é igual a $0,7$. Além disso, a probabilidade de um cartão postal se extraviar é $0,1$.

A) Qual é a probabilidade de que a mãe de João receba um cartão postal dele?

B) Se ela não receber um cartão de João, qual é a probabilidade de que ele o tenha enviado?

Solução: Sejam os eventos:

A: João enviar o cartão.

B: O cartão **não** se extraviar.

C: A mãe de João receber um cartão dele.

D: A mãe de João **não** receber um cartão dele.

Temos:

$$P(A) = 0,7 \quad \text{e} \quad P(B) = 1 - 0,1 = 0,9.$$

A) O evento desejado é $C = A \cap B$. Então, temos:

$$P(C) = P(A \cap B) = 0,7\,.\,0,9 = 0,63.$$

B) O evento pedido é A dado D, e o evento D equivale a C^c. Então, a probabilidade de a mãe **não** receber o cartão é $P(C^c) = 1 - 0,63 = 0,37$. A probabilidade dela não receber o cartão por não ter sido enviado é $1 - 0,7 = 0,3$ e a probabilidade dela não receber o cartão por ter havido extravio é $0,1\,.\,0,7 = 0,07$. Portanto,

$$P(A\,/\,D) = \frac{0,07}{0,37} = \frac{7}{37} \quad \Rightarrow \quad P(A\,/\,D) \cong 0,19.$$

Exemplo 49. [14] Uma moeda viciada, com probabilidade $0,6$ de dar cara, é lançada duas vezes.

A) Qual é a probabilidade de se obter dois resultados iguais?

B) Dado que foram obtidos dois resultados iguais, qual é a probabilidade condicional de que esse resultado tenha sido cara?

Solução: Sejam $P(A)$ e $P(B)$, respectivamente, a probabilidade de obter dois resultados iguais e a probabilidade de obter duas caras.

A) Podemos considerar que os dois lançamentos são eventos independentes. Há dois modos de se obter dois resultados iguais: duas caras ou duas coroas. Essas duas possibilidades são mutuamente excludentes. Assim, temos:

$$P(A) = 0,6\,.\,0,6 + 0,4\,.\,0,4 = 0,36 + 0,16 = 0,52.$$

B) Dado que foram obtidos dois resultados iguais, temos:

$$P(B\,/\,A) = \frac{0,36}{0,52} = \frac{36}{52} = \frac{9}{13} \quad \Rightarrow \quad P(B\,/\,A) \cong 0,69.$$

Agora,veremos dois resultados que generalizam as situações descritas nesta seção: **o Teorema da Probabilidade Total e o Teorema de Bayes**[3]. Uma das relações mais importantes envolvendo probabilidades condicionais é dada pelo Teorema de Bayes, que expressa uma probabilidade condicional em termos de outras probabilidades condicionais e marginais. [2]

Teorema 3.11.3. (Teorema da Probabilidade Total) [9] Se B é um evento contido numa união de eventos disjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ com

$$P(A_1) \geq 0,\ P(A_2) \geq 0, \dots, P(A_n) \geq 0, \quad \text{então}$$

$$P(B) = P(A_1).P(B\,/\,A_1) + P(A_2).P(B\,/\,A_2) + \dots + P(A_n).P(B\,/\,A_n).$$

Demonstração: Temos que:

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B) \quad \Rightarrow$$

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) \quad \Rightarrow$$

$$P(B) = P(A_1).P(B\,/\,A_1) + P(A_2).P(B\,/\,A_2) + \dots + P(A_n).P(B\,/\,A_n). \quad \blacksquare$$

Teorema 3.11.4. (Teorema de Bayes) [9] Nas condições do teorema anterior, se $P(B) > 0$, então, para todo i, $\quad i = 1, 2, \dots n$, temos:

$$P(A_i\,/\,B) = \frac{P(A_i).P(B\,/\,A_i)}{P(A_1).P(B\,/\,A_1) + \dots + P(A_n).P(B\,/\,A_n)}.$$

Demonstração: Temos que:

$$P(A_i\,/\,B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i).P(B\,/\,A_i)}{P(B)}.$$

Usando a identidade obtida no Teorema da Probabilidade Total chega-se à fórmula dada. $\blacksquare$

Exemplo 50. [9] A probabilidade de chuva em um determinado dia é $\frac{4}{10}$. Um certo time tem probabilidade de vitória igual a $\frac{6}{10}$ se chover e $\frac{4}{10}$ se não chover. Sabendo que esse time ganhou um jogo naquele dia, qual é a probabilidade de que tenha chovido naquele dia?

Solução: Sejam $P(A)$ e $P(B)$, respectivamente, as probabilidades de chuva e de vitória naquele dia. Usando o Teorema de Bayes, temos:

$$P(A\,/\,B) = \frac{P(A).P(B\,/\,A)}{P(A).P(B\,/\,A) + P(A^c).P(B\,/\,A^c)} \quad \Rightarrow$$

$$P(A\,/\,B) = \frac{\frac{4}{10}.\frac{6}{10}}{\frac{4}{10}.\frac{6}{10} + \frac{6}{10}.\frac{4}{10}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad P(A\,/\,B) = 0,5.$$

[3]Thomas Bayes (1702 – 1761), matemático inglês.

Exemplo 51. [9] Em um determinado exame há três respostas para cada pergunta e apenas uma delas é correta. Portanto, para cada pergunta, um aluno qualquer tem $\frac{1}{3}$ de probabilidade de acerto se ele "chutar" e 1 se ele souber a resposta. Um determinado aluno sabe 30% das respostas do exame. Se ele acertou a resposta de uma determinada pergunta, qual é a probabilidade de que ele tenha chutado?

Solução: Sejam $P(A)$ e $P(B)$, respectivamente, as probabilidades de chute e de acerto desse aluno na questão pedida. Como o aluno sabe 30% das respostas, então a probabilidade de que ele chute uma questão qualquer é $0,7$. Usando o Teorema de Bayes, temos:

$$P(A\,/\,B) = \frac{\frac{7}{10}.\frac{1}{3}}{\frac{7}{10}.\frac{1}{3} + \frac{3}{10}.1} = \frac{7}{16} \quad \Rightarrow \quad P(A\,/\,B) = 0,437.$$

3.12 Independência de Eventos

Finalizando este capítulo, vamos introduzir a noção de independência de eventos. Suponhamos que uma informação prévia a respeito da ocorrência de um dado evento A não exerça nenhuma influência sobre nossa posição para tirar conclusões a respeito da ocorrência de um outro evento B, ou seja, a ocorrência de A não interfere no cálculo da probabilidade de B. Então, a probabilidade condicional de B dado A é igual a probabilidade de B. Nesse caso, temos:

Definição 3.12.1. (Eventos Independentes) Dois eventos A e B são chamados de eventos independentes se, e somente se,

$$P(A\,/\,B) = P(A) \quad \text{e} \quad P(B\,/\,A) = P(B).$$

Teorema 3.12.1. (Probabilidade da Intersecção de Eventos Independentes.) Se A e B são dois eventos independentes, então:

$$P(A \cap B) = P(A)\,.\,P(B).$$

Demonstração: Sejam A e B dois eventos independentes. Então, decorre imediatamente da Definição 3.11.1 que:

$$P(B\,/\,A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A).P(B\,/\,A).$$

Consequentemente, decorre da Definição 3.12.1 que:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B\,/\,A) \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A)\,.\,P(B). \quad \blacksquare$$

Obs: Em particular, se A e B são eventos mutuamente excludentes, temos $P(A \cap B) = 0$.

Demonstração: Por definição, se os eventos A e B são mutuamente excludentes, temos que $A \cap B = \emptyset$. Então, $\sigma(A \cap B) = 0$. Logo,

$$P(A \cap B) = \frac{\sigma(A \cap B)}{\sigma(\Omega)} = \frac{0}{\sigma(\Omega)} = 0. \quad \blacksquare$$

Uma consequência imediata dessa definição é que o vazio $\emptyset$ e o espaço amostral Ω são independentes de qualquer outro evento, pois, se A é um evento, então:

$$P(A \cap \emptyset) = P(A) \,.\, P(\emptyset) = P(A) \,.\, 0 = 0 = P(\emptyset) \quad \text{e}$$

$$P(A \cap \Omega) = P(A) \,.\, P(\Omega) = P(A) \,.1 = P(A). \text{ [9]}$$

Exemplo 52. [9] Treze cartas são escolhidas de um baralho comum de 52 cartas. Seja A o evento "o ás de copas foi escolhido" e B o evento "foram escolhidas 13 cartas de um mesmo naipe". Mostre que A e B são eventos independentes.

Solução: Temos:

$$P(A) = \frac{\binom{51}{12}}{\binom{52}{13}} = \frac{51!\,13!\,39!}{12!\,39!\,52!} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4},$$

$$P(B) = \frac{4}{\binom{52}{13}} \quad \text{e} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{\binom{52}{13}}.$$

Então $P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B),$ ou seja, A e B são eventos independentes.

Exemplo 53. Uma caixa contém vinte bolinhas, numeradas de 1 a 20. Três bolinhas serão sorteadas aleatoriamente e **com** reposição. Calcule a probabilidade de obter cada uma das situações abaixo:

A) Um múltiplo de 5, um múltiplo de 4 e um múltiplo de 3, nessa ordem.

B) Dois números ímpares e um número par, em qualquer ordem.

Solução:

A) Entre os números naturais 1 e 20 existem quatro múltiplos de 5, cinco múltiplos de 4 e seis múltiplos de 3. Então,

$$P(A) = \frac{1}{5} \,.\, \frac{1}{4} \,.\, \frac{3}{10} = \frac{3}{200} \quad \Rightarrow \quad P(A) = 0,015.$$

B) Denotando ímpar por I e par como P, há três ordenações possíveis para o evento pedido: IIP, IPI e PII. Então,

$$P(B) = 3 \,.\, \frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \quad \Rightarrow \quad P(B) = 0,375.$$

Exemplo 54. Uma caixa contém vinte bolas coloridas, sendo oito bolas vermelhas, cinco verdes, quatro amarelas e três azuis. Duas bolas serão sorteadas aleatoriamente e **com** reposição. Calcule a probabilidade de obter cada uma das situações abaixo:

A) Duas bolas vermelhas.

B) Duas bolas verdes.

C) Duas bolas amarelas.

D) Duas bolas azuis.

E) Uma bola vermelha e uma verde, nessa ordem.

F) Uma bola amarela e uma azul, em qualquer ordem.

G) Nenhuma bola vermelha.

H) Nenhuma bola azul.

I) Duas bolas da mesma cor.

J) Duas bolas de cores diferentes.

Solução: Sejam $A, B, C, \ldots, I$ e J os eventos pedidos em cada item e sejam suas respectivas probabilidades denotadas por $P(A), P(B), P(C), \ldots, P(I)$ e $P(J)$. As vinte bolas são equiprováveis. Considere os eventos abaixo:

X: sortear **uma** bola vermelha.

Y: sortear **uma** bola verde.

Z: sortear **uma** bola amarela.

W: sortear **uma** bola azul.

Assim, temos:

$$P(X) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}, \quad P(Y) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}, \quad P(Z) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \quad \text{e} \quad P(W) = \frac{3}{20}.$$

A) $P(A) = P(X)\,.\,P(X) = \frac{2}{5}.\frac{2}{5} = \frac{4}{25} \quad \Rightarrow \quad P(A) = 0,16.$

B) $P(B) = P(Y)\,.\,P(Y) = \frac{1}{4}.\frac{1}{4} = \frac{1}{16} \quad \Rightarrow \quad P(B) = 0,0625.$

C) $P(C) = P(Z)\,.\,P(Z) = \frac{1}{5}.\frac{1}{5} = \frac{1}{25} \quad \Rightarrow \quad P(C) = 0,04.$

D) $P(D) = P(W)\,.\,P(W) = \frac{3}{20}.\frac{3}{20} = \frac{9}{400} \quad \Rightarrow \quad P(D) = 0,0225.$

E) Nesse item, a ordem das cores é obrigatória. Então,
$P(E) = P(X)\,.\,P(Y) = \frac{2}{5}.\frac{1}{4} = \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad P(A) = 0,1.$

F) Nesse item, a ordem das cores não importa. Procedendo de forma análoga ao item anterior, estaríamos considerando apenas a ordem amarela e azul, portanto devemos multiplicar o produto por 2. Então,
$P(F) = P(Z)\,.\,P(W)\,.2 = \frac{1}{5}.\frac{3}{20}.2 = \frac{3}{100}.2 \quad \Rightarrow \quad P(A) = 0,06.$

G) Como $P(X) = \frac{2}{5}$, temos que $P(X^c) = \frac{3}{5}$. Então,
$P(G) = P(X^c)\,.\,P(X^c) = \frac{3}{5}.\frac{3}{5} = \frac{9}{25} \quad \Rightarrow \quad P(A) = 0,36.$

H) Como $P(W) = \frac{3}{20}$, temos que $P(W^c) = \frac{17}{20}$. Então,
$P(H) = P(W^c)\,.\,P(W^c) = \frac{17}{20}.\frac{17}{20} = \frac{289}{400} \quad \Rightarrow \quad P(A) = 0,7225.$

I) O evento desejado é $A \cup B \cup C \cup D$. Os eventos A, B, C e D são mutuamente excludentes dois a dois. Então,
$P(I) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) \quad \Rightarrow$
$P(I) = 0,16 + 0,0625 + 0,04 + 0,0225 \quad \Rightarrow \quad P(I) = 0,285.$

J) O evento desejado é o complementar do evento I. Então,
$P(J) = 1 - 0,285 \quad \Rightarrow \quad P(J) = 0,715.$

Capítulo 4

Problemas de Combinatória e Probabilidade com Aplicações na Geometria

4.1 Uma União Interessante

O objetivo deste capítulo é apresentar aos professores de Matemática do Ensino Médio algumas sugestões de problemas de Combinatória e Probabilidade como fator de estímulo na assimilação de conceitos geométricos. Vamos apresentar uma sequência didática formada por doze problemas com essa característica, sendo quatro problemas de Geometria Plana, quatro de Geometria Espacial e quatro de Geometria Analítica.

O cálculo de probabilidades, à primeira vista, parece não ter nenhuma relação com a Geometria, pois o foco central das probabilidades é calcular as chances de ocorrência de um determinado evento através da razão entre o número total de casos favoráveis e o número total de casos possíveis, enquanto a Geometria estuda as medidas e as formas. Mas esse casamento, aparentemente improvável, pode vir a ser muito rico do ponto de vista pedagógico, pois os conceitos geométricos presentes no currículo do Ensino Médio são férteis no sentido de fornecer ao professor situações que podem ser exploradas para discutir probabilidade tanto quanto os lançamentos de dados e moedas ou retiradas de cartas de baralho.

O tipo de probabilidade explorado neste capítulo é ligeiramente diferente dos problemas clássicos dos livros didáticos. Apesar disso, a forma de calcular essas probabilidades segue a definição clássica, ou seja, através de uma razão entre as situações favoráveis e as situações possíveis. Mas alguns problemas aqui apresentados quantificam os termos dessa razão em função de medidas de áreas de figuras planas ou volumes de sólidos geométricos, o que ajuda no aprendizado de fórmulas e relações de pertinência e continência. Além disso, apresentaremos outros problemas que demandam, no processo de contagem, o domínio de conceitos geométricos teóricos como raio e diâmetro da circunferência, classificação de triângulos, inscrição e circunscrição, paralelismo e perpendicularismo, intersecção de retas concorrentes, distância entre pontos e reconhecimento de cônicas.

Os problemas 1 a 11 foram objeto de experiência real em sala de aula. O problema 12 não foi aplicado por falta de tempo hábil para trabalhar as cônicas. Lamentamos profundamente constatar que, em virtude da grande defasagem apresentada pelos alunos do Ensino Médio quanto aos conteúdos algébricos e geométricos do ciclo II do Ensino Fundamental, alguns tópicos do Ensino Médio tornam-se completamente inviáveis, e alguns outros podem ser trabalhados apenas parcialmente. Para que o ensino de Matemática na escola básica possa atingir os níveis desejados, é preciso analisar o problema desde as séries iniciais do Ensino Fundamental.

Essa sequência didática foi apresentada em duas classes do 3º ano do Ensino Médio entre 29 de outubro e 21 de novembro de 2013, e temos a satisfação de poder afirmar que os resultados foram surpreendentes e extremamente satisfatórios. A maioria dos alunos dessas duas turmas apresentava um bom domínio dos princípios básicos de contagem e de probabilidade, e assim a necessidade de efetuar os processos de contagem para encontrar a fração que determina a probabilidade revelou-se um instrumento muito eficaz no sentido de despertar o interesse em conhecer as fórmulas e os conceitos geométricos requisitados em cada problema.

A solução de alguns problemas deste capítulo apóia-se na idéia axiomática que, dadas duas regiões planas R_1 e R_2, de áreas A_1 e A_2, com R_1 contido em R_2, a probabilidade de que um ponto de R_2 pertença a R_1 é igual à razão entre as áreas A_1 e A_2 e, analogamente, dados dois sólidos geométricos S_1 e S_2, de volumes V_1 e V_2, com S_1 contido em S_2, a probabilidade de que um ponto de S_2 pertença a S_1 é igual à razão entre os volumes V_1 e V_2.

4.2 Geometria Plana

Nesta seção, sugerimos que o professor procure explorar as figuras ao máximo, estimulando a classe a usar o raciocínio dedutivo visual para compreender a situação proposta e identificar os passos necessários para encontrar a solução, e só então começar os cálculos.

Problema 1. [16] Na roleta da figura, os ângulos correspondentes aos setores circulares coloridos formam uma progressão aritmética com razão de 10°. O menor setor tem ângulo central igual a 10°.

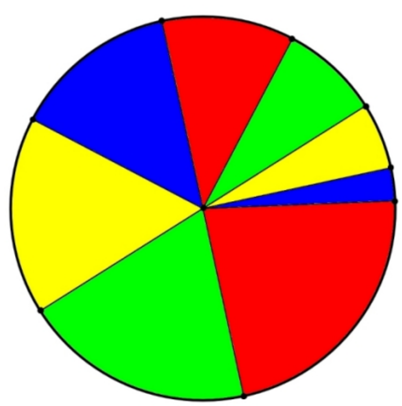

Figura 4.1:

Calcule a probabilidade de o ponteiro parar em cada uma das cores.

Solução: Os ângulos centrais dos oito setorem vão de $10°$ a $80°$. Sejam S_1, S_2, S_3 e S_4, respectivamente, as somas dos dois setores azuis, vermelhos, verdes e amarelos, e sejam P_1, P_2, P_3 e P_4 as respectivas probabilidades de cada cor. Assim, temos:

(1) $S_1 = 10° + 50° = 60°$. Então, $P_1 = \frac{60}{360} \Rightarrow P_1 = \frac{1}{6} \Rightarrow P_1 \cong 0,16$.

(2) $S_2 = 20° + 60° = 80°$. Então, $P_2 = \frac{80}{360} \Rightarrow P_2 = \frac{2}{9} \Rightarrow P_2 \cong 0,22$.

(3) $S_3 = 30° + 70° = 100°$. Então, $P_3 = \frac{100}{360} \Rightarrow P_3 = \frac{5}{18} \Rightarrow P_3 \cong 0,27$.

(4) $S_4 = 40° + 80° = 120°$. Então, $P_4 = \frac{120}{360} \Rightarrow P_4 = \frac{1}{3} \Rightarrow P_4 \cong 0,33$.

Comentários: Este problema relaciona probabilidade com progressão aritmética e ângulos de setores circulares. As dificuldades foram mínimas e o índice de acerto foi muito alto. Muitos alunos perceberam que as somas dos ângulos dos setores de mesma cor $(60°, 80°, 100°, 120°)$ também formam uma P.A. Porém, devido à pouca familiariedade com as operações com números racionais na forma fracionária, ninguém notou que as probabilidades também formam uma P.A. Nesse momento, sugerimos que eles tentassem reduzir as frações a um denominador comum, e então vários alunos descobriram a razão $\frac{1}{18}$.

Problema 2. [16] Considere o alvo de um jogo de dardos representado na figura abaixo. O círculo central tem raio $10\,cm$ e os anéis estão igualmente espaçados de 10 em $10\,cm$.

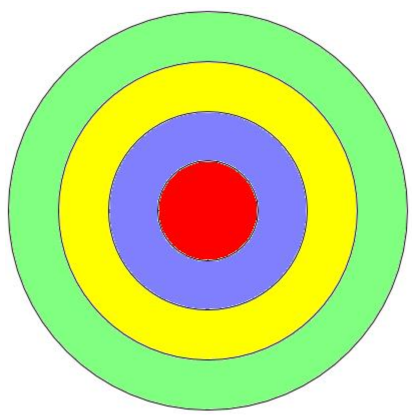

Figura 4.2:

A) Calcule a probabilidade de acerto em cada cor, no lançamento aleatório de um dardo no alvo.

B) Quais seriam as medidas dos quatro raios para que as quatro regiões tivessem a mesma probabilidade de acerto?

Solução:

A) Sejam r_1, r_2, r_3 e r_4 os raios dos quatro círculos, sejam A_1, A_2, A_3 e A_4 as áreas das quatro regiões coloridas e sejam P_1, P_2, P_3 e P_4 as probabilidades de acerto em cada cor. Assim, temos:

(1) $r_1 = 10\,cm, \quad r_2 = 20\,cm, \quad r_3 = 30\,cm$ e $r_4 = 40\,cm$.

(2) $A_1 = 100\pi\,cm^2$,
$A_2 = 400\pi\,cm^2 - 100\pi\,cm^2 \Rightarrow A_2 = 300\pi\,cm^2$,
$A_3 = 900\pi\,cm^2 - 400\pi\,cm^2 \Rightarrow A_3 = 500\pi\,cm^2$ e
$A_4 = 1600\pi\,cm^2 - 900\pi\,cm^2 \Rightarrow A_4 = 700\pi\,cm^2$.

(3) $P_1 = \frac{100\pi}{1600\pi} \Rightarrow P_1 = \frac{1}{16} \Rightarrow P_1 \cong 0,06$,
$P_2 = \frac{300\pi}{1600\pi} \Rightarrow P_2 = \frac{3}{16} \Rightarrow P_2 \cong 0,19$,
$P_3 = \frac{500\pi}{1600\pi} \Rightarrow P_3 = \frac{5}{16} \Rightarrow P_3 \cong 0,31$ e
$P_4 = \frac{700\pi}{1600\pi} \Rightarrow P_4 = \frac{7}{16} \Rightarrow P_4 \cong 0,44$.

B) É necessário ter as quatro áreas iguais, ou seja, $A_1 = A_2 = A_3 = A_4$.

(1) $A_1 = A_2 \Rightarrow \pi r_1^2 = \pi r_2^2 - \pi r_1^2 \Rightarrow \pi r_2^2 = 2\pi r_1^2 \Rightarrow r_2^2 = 2r_1^2 \Rightarrow r_2 = r_1\sqrt{2}$.

(2) $A_1 = A_3 \Rightarrow \pi r_1^2 = \pi r_3^2 - \pi r_2^2 \Rightarrow \pi r_3^2 = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 \Rightarrow r_3^2 = r_1^2 + r_2^2 \Rightarrow r_3^2 = r_1^2 + (r_1\sqrt{2})^2 \Rightarrow r_3^2 = 3r_1^2 \Rightarrow r_3 = r_1\sqrt{3}$.

(3) $A_1 = A_4 \Rightarrow \pi r_1^2 = \pi r_4^2 - \pi r_3^2 \Rightarrow r_4^2 = r_1^2 + r_3^2 \Rightarrow r_4^2 = r_1^2 + (r_1\sqrt{3})^2 \Rightarrow r_4^2 = 4r_1^2 \Rightarrow r_4 = 2r_1$.

Portanto os raios seriam $r_1, r_1\sqrt{2}, r_1\sqrt{3}$ e $2r_1$. Tomando como exemplo $r_1 = 10\,cm$, teríamos $r_2 \cong 14,1\,cm, r_3 \cong 17,3\,cm$ e $r_4 = 20\,cm$.

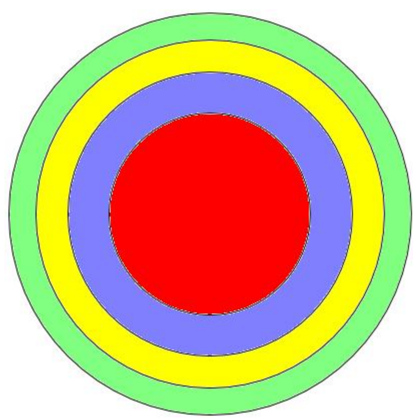

Figura 4.3:

Comentários: Este problema relaciona probabilidade com o cálculo da área do círculo e de coroas circulares. O item A) teve um bom índice de acerto. O único erro a ser corrigido, num primeiro momento, foi que muitos alunos não observaram que, para calcular a área da coroa, deve-se subtrair a área do círculo anterior. É interessante enfatizar que as áreas das cores formam uma P.A. de razão $200\pi\,cm^2$, e consequentemente as probabilidades formam uma P.A. de razão $\frac{1}{8}$. O item B) teve um índice de acerto apenas mediano, pois muitos alunos apresentam dificuldade quando é necessário igualar duas expressões e obter uma grandeza em função de outra. Este item tornou-se mais claro para eles depois que estipulamos um valor para r_1.

Problema 3. A figura representa uma folha de papel pega-moscas, em formato retangular, com $20\,cm$ de comprimento e $12\,cm$ de largura. Essa folha foi dividida em seis regiões diferentes e cada região foi pintada com uma cor.

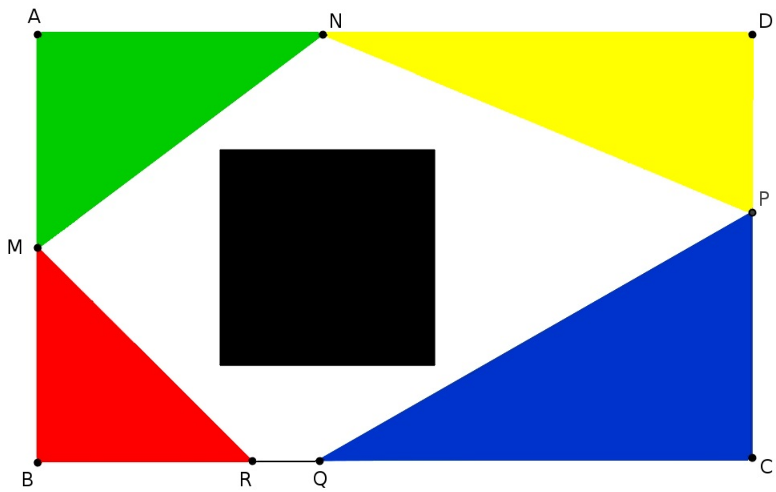

Figura 4.4:

Calcule a probabilidade de uma mosca pousar em cada cor, sendo dados:

I) O ângulo $B\hat{M}R$ mede $45°$ e o ângulo $P\hat{Q}C$ mede $30°$.

II) $\overline{MN} = 10\,cm$, $\overline{NP} = 13\,cm$ e $\overline{PQ} = 14\,cm$.

III) A região preta é um quadrado com $6\,cm$ de lado.

Solução: É imediato que a área total da folha é igual a $240\,cm^2$. Sejam A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e A_6, respectivamente, as áreas das regiões azul, amarela, verde, vermelha, preta e branca, e sejam P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6 as respectivas probabilidades de pouso em cada cor.

As regiões azul, amarela, verde e vermelha estão contidas em quatro triângulos retângulos. Para calcular as áreas desses triângulos é preciso, inicialmente, descobrir as medidas dos oito catetos através dos dados fornecidos no enunciado. Então, temos:

(1) Região azul: Por hipótese, $\overline{PQ} = 14\,cm$ e $P\hat{Q}C = 30°$. Usando o seno e o cosseno de $30°$, obtemos $\overline{PC} = 7\,cm$ e $\overline{QC} = 7\sqrt{3}\,cm \cong 12,11\,cm$. Sugerimos a aproximação $\overline{QC} \cong 12\,cm$ no intuito de facilitar os cálculos, já que a diferença é irrelevante para a área. Portanto,

$$A_1 = \frac{12.7}{2} \Rightarrow A_1 = 42\,cm^2 \quad \text{e} \quad P_1 = \frac{42}{240} \Rightarrow P_1 = \frac{7}{40} \Rightarrow P_1 = 0,175.$$

(2) Região amarela: Por hipótese, $\overline{NP} = 13\,cm$, e por (1), $\overline{PC} = 7\,cm \Rightarrow \overline{DP} = 5\,cm$. Então, pelo Teorema de Pitágoras, $\overline{ND} = 12\,cm$. Portanto,

$$A_2 = \frac{12.5}{2} \Rightarrow A_2 = 30\,cm^2 \quad \text{e} \quad P_2 = \frac{30}{240} \Rightarrow P_2 = \frac{1}{8} \Rightarrow P_2 = 0,125.$$

(3) Região verde: Por hipótese, $\overline{MN} = 10\,cm$, e por (2), $\overline{ND} = 12\,cm \Rightarrow \overline{AN} = 8\,cm$. Então, pelo Teorema de Pitágoras, $\overline{AM} = 6\,cm$. Portanto,

$$A_3 = \frac{6.8}{2} \Rightarrow A_3 = 24\,cm^2 \quad \text{e} \quad P_3 = \frac{24}{240} \Rightarrow P_3 = \frac{1}{10} \Rightarrow P_3 = 0,1.$$

(4) Região vermelha: Por hipótese, $B\hat{M}R = 45°$, e por (3), $\overline{AM} = 6\,cm$. Então $\overline{MB} = \overline{BR} = 6\,cm$. Portanto,

$$A_4 = \frac{6.6}{2} \Rightarrow A_4 = 18\,cm^2 \quad \text{e} \quad P_4 = \frac{18}{240} \Rightarrow P_4 = \frac{3}{40} \Rightarrow P_4 = 0,075.$$

(5) Região preta:

$$A_5 = 6^2 = 36\,cm^2 \quad \text{e} \quad P_5 = \frac{36}{240} \Rightarrow P_5 = \frac{3}{20} \Rightarrow P_5 = 0,15.$$

(6) Região branca: A soma das áreas das outras cinco regiões é igual a $150\,cm^2$. Então,

$$A_6 = 240 - 150 \Rightarrow A_6 = 90\,cm^2 \quad \text{e} \quad P_6 = \frac{90}{240} \Rightarrow P_6 = \frac{3}{8} \Rightarrow P = 0,375.$$

Comentários: Este problema relaciona probabilidade com a área do retângulo, do quadrado e do triângulo, Teorema de Pitágoras e as razões trigonométricas no triângulo retângulo, além do raciocínio dedutivo através do Princípio da Subtração. A solução deste problema demanda um certo tempo, pois é preciso calcular as áreas das seis regiões, sendo que, no caso das quatro regiões triangulares, é necessário fazer algumas investigações para encontrar as medidas dos oito catetos. Além disso, o aluno deve perceber que, para calcular a área da região branca, deve-se subtrair da área total a soma das áreas das outras cinco regiões. Nesse momento, muitos perguntaram qual é a fórmula da área da região branca, e alguns perguntaram qual é a fórmula da área do pentágono. Respondemos que esse pentágono não é regular e deve existir um caminho melhor para encontrar a área procurada. Apesar dessas dificuldades, este problema registrou um índice de acerto bem razoável.

Problema 4. [14] Em uma caixa há dez bolas **idênticas**, numeradas de 1 a 10. O número de cada bola corresponde a um dos pontos da figura, os quais dividem a circunferência em dez partes iguais. Nos itens a seguir, considere que as bolas são retiradas ao acaso, uma a uma e sem reposição.

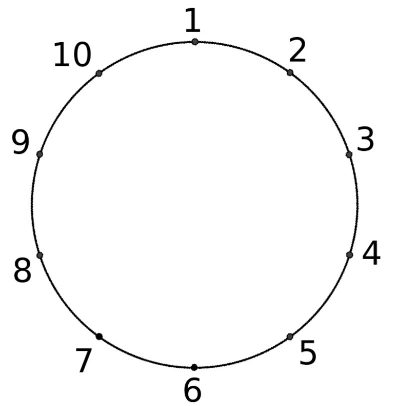

Figura 4.5:

A) Retirando duas bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam extremidades de um diâmetro da circunferência?

B) Retirando três bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um triângulo isósceles?

Solução: Seja P a probabilidade pedida em cada item.

A) Há $C_{10,2} = 45$ modos de retirar duas bolas (o que gera 45 segmentos distintos) e há 5 pares de bolas que representam pontos diametralmente opostos (1 e $6, 2$ e $7, 3$ e $8, 4$ e $9, 5$ e 10). Então,

$$P = \frac{5}{45} \Rightarrow P = \frac{1}{9} \Rightarrow P \cong 0,11.$$

B) Há $C_{10,3} = 120$ modos de retirar três bolas (o que gera 120 triângulos distintos). Agora, precisamos determinar quantos desses triângulos são isósceles: Vamos supor, sem perda de generalidade, que a primeira bola retirada foi a n$^{\underline{o}}$1. O ponto correspondente a ela pode ser o vértice oposto ao lado não congruente de quatro triângulos isósceles distintos: sorteando os trios de bolas $(1, 2, 10), (1, 3, 9), (1, 4, 8)$ e $(1, 5, 7)$. Como esse raciocínio se aplica a qualquer uma das dez bolas, então há $4.10 = 40$ triângulos isósceles distintos. Portanto,

$$P = \frac{40}{120} \Rightarrow P = \frac{1}{3} \Rightarrow P \cong 0,33.$$

Comentários: Este problema relaciona probabilidade com raciocínio combinatório aos conceitos geométricos de raio e diâmetro da circunferência e triângulo isósceles. O índice de acerto foi muito alto. Bastou mostrar um diâmetro e um triângulo isósceles a partir da bola 1 que a grande maioria dos alunos efetuou os processos de contagem sem dificuldades.

4.3 Geometria Espacial

Os problemas apresentados nesta seção têm como objetivos: recordar o cálculo de volumes dos sólidos geométricos elementares e a conversão de unidades de m^3 para l, apresentar os conceitos de inscrição e circunscrição de sólidos, estimular o raciocínio dedutivo quanto às relações entre as medidas dos sólidos inscritos e circunscritos e desenvolver a habilidade de expressar uma grandeza em função de outra.

Problema 5. Considere os seguintes sólidos geométricos: um cubo com aresta $40\,cm$, um cubo com aresta $35\,cm$, um paralelepípedo com $50\,cm$ de comprimento, $30\,cm$ de largura e $30\,cm$ de altura, um paralelepípedo com $60\,cm$ de comprimento, $40\,cm$ de largura e $30\,cm$ de altura e um cilindro com $50\,cm$ de altura e $40\,cm$ de diâmetro. Sorteando aleatoriamente um desses objetos, qual é a probabilidade de que ele comporte mais de 45 l de água?

Solução: Sejam V_1, V_2, V_3, V_4 e V_5 os volumes dos cinco sólidos descritos acima. Temos:

(1) $V_1 = 40^3 \Rightarrow V_1 = 64\,000\,cm^3 \Rightarrow V_1 = 64\,l.$

(2) $V_2 = 35^3 \Rightarrow V_2 = 42\,875\,cm^3 \Rightarrow V_2 = 42,875\,l.$

(3) $V_3 = 50.30.30 \Rightarrow V_3 = 45\,000\,cm^3 \Rightarrow V_3 = 45\,l.$

(4) $V_4 = 60.40.30 \Rightarrow V_4 = 72\,000\,cm^3 \Rightarrow V_4 = 72\,l.$

(5) $V_5 = \pi.20^2.50 \Rightarrow V_5 \cong 62\,800\,cm^3 \Rightarrow V_5 = 62,8\,l.$

Então três dos cinco sólidos comportam mais de $45\,l$ de água. Portanto,

$$P = \frac{3}{5} \Rightarrow P = 0,6.$$

Comentários: Este problema relaciona probabilidade ao cálculo dos volumes do cubo, do paralelepípedo e do cilindro, além da conversão de cm^3 para litros. É um problema bastante simples, e o índice de acerto foi bem alto.

Problema 6. Duas caixas contém, respectivamente, quatro e oito sólidos geométricos. A caixa I contém um cubo com $8\,cm$ de aresta, um paralelepípedo com $16\,cm$ de comprimento, $8\,cm$ de largura e $4\,cm$ de altura, uma esfera com $6\,cm$ de raio e um cilindro com $8\,cm$ de altura e $12\,cm$ de diâmetro. A caixa II contém dois exemplares de cada sólido contido na caixa I. Sorteando aleatoriamente dois desses objetos, calcule a probabilidade de obter dois sólidos com volumes iguais em cada caso abaixo:

A) Sorteando dois objetos da caixa I.

B) Sorteando dois objetos da caixa II.

C) Se os doze objetos forem colocados na mesma caixa.

D) Use os resultados dos itens anteriores para deduzir o que acontece se continuarmos aumentando um objeto de cada tipo na caixa.

Solução: Sejam V_1, V_2, V_3 e V_4 os volumes dos quatro sólidos descritos acima. Temos:

(1) $V_1 = 8^3 \Rightarrow V_1 = 64\,cm^3$.

(2) $V_2 = 16.8.4 \Rightarrow V_2 = 64\,cm^3$.

(3) $V_3 = \frac{4}{3}.\pi.6^3 \Rightarrow V_3 = 288\pi\,cm^3$.

(4) $V_4 = \pi.6^2.8 \Rightarrow V_4 = 288\pi\,cm^3$.

Então $V_1 = V_2$ e $V_3 = V_4$. Seja P a probabilidade pedida em cada item.

A) Há $C_{4,2} = 6$ modos de sortear dois objetos da caixa I e há 2 modos de sortear dois objetos com volumes iguais (o cubo com o paralelepípedo e a esfera com o cilindro). Então,
$$P = \frac{2}{6} \Rightarrow P = \frac{1}{3} \Rightarrow P \cong 0,333.$$

B) Há $C_{8,2} = 28$ modos de sortear dois objetos da caixa II e há $2.C_{4,2} = 12$ modos de sortear dois objetos com volumes iguais. Então,
$$P = \frac{12}{28} \Rightarrow P = \frac{3}{7} \Rightarrow P \cong 0,428.$$

C) Há $C_{12,2} = 66$ modos de sortear dois objetos nesse caso e há $2.C_{6,2} = 30$ modos de sortear dois objetos com volumes iguais. Então,
$$P = \frac{30}{66} \Rightarrow P = \frac{5}{11} \Rightarrow P \cong 0,454.$$

D) Nesse caso, denotando por n o número de objetos de cada tipo, vamos obter a sequência:
$$\frac{1}{3}, \frac{3}{7}, \frac{5}{11}, \frac{7}{15}, \frac{9}{19}, \frac{11}{23}, \ldots, \frac{2n-1}{4n-1}, \ldots$$
Em notação decimal, com valores aproximados, obtém-se:
$$(0,333\,;\,0,428\,;\,0,454\,;\,0,467\,;\,0,474\,;\,0,478\,;\,...)$$
. Para n suficientemente grande, essa sequência converge para $0,4999...$ A conclusão que podemos chegar é que, aumentando o número de objetos nas condições dadas, a probabilidade se aproxima cada vez mais de $0,5$ mas nunca atinge esse valor exato. A intenção dessa pergunta é introduzir, de maneira informal, a idéia de limite. Dizemos que o limite dessa sequência é igual a $\frac{1}{2}$.

Uma outra solução:

A) Retirando o primeiro objeto, restarão três objetos na caixa, sendo que um dos três tem volume igual ao primeiro. Então, $P = \frac{1}{3} \Rightarrow P \cong 0,333$.

B) Retirando o primeiro objeto, restarão sete objetos na caixa, sendo que três deles tem volume igual ao primeiro. Então, $P = \frac{3}{7} \Rightarrow P \cong 0,428$.

C) Analogamente, $P = \frac{5}{11} \Rightarrow P \cong 0,454$.

D) Naturalmente, a conclusão é a mesma da primeira solução apresentada.

Comentários: Este problema relaciona probabilidade com raciocínio combinatório aos volumes do cubo, do paralelepípedo, da esfera e do cilindro. O erro mais comum neste problema é que as quantidades dadas e a existência proposital de dois pares de sólidos diferentes com volumes iguais leva a grande maioria dos alunos à conclusão precipitada e incorreta que a probabilidade pedida no item A) é 50%. Depois de esclarecer essa questão, a segunda conclusão precipitada é pensar que o item B) terá o mesmo resultado do item A). Superado esse segundo obstáculo, os alunos começam a atingir os objetivos do problema. O índice de acerto nos itens A), B) e C) foi alto. Poucos alunos responderam o item D), mas foi muito gratificante ouvir suas conclusões.

Problema 7. Seja $\mathcal{C}$ um cubo de aresta a, sejam $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$, respectivamente, a esfera circunscrita e a esfera inscrita a $\mathcal{C}$, e seja P um ponto qualquer do espaço.

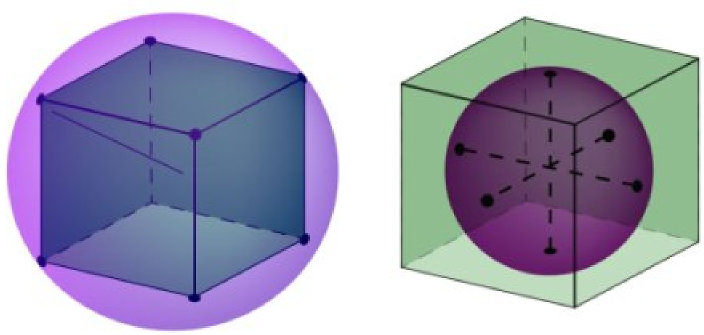

Figura 4.6:

Considere $\pi \cong 3,14$ e $\sqrt{3} \cong 1,73$ e responda às questões abaixo:

A) Se $P \in \mathcal{C}$, qual é a probabilidade de que $P \in \mathcal{E}_2$?

B) Se $P \in \mathcal{E}_1$, qual é a probabilidade de que $P \in \mathcal{C}$?

C) Se $P \in \mathcal{E}_1$, qual é a probabilidade de que $P \in \mathcal{E}_2$?

Solução: Seja P a probabilidade pedida em cada item, sejam V_C, V_1 e V_2, respectivamente, o volume do cubo, da esfera circunscrita e da esfera inscrita, e sejam r_1 e r_2, respectivamente, o raio da esfera circunscrita e da esfera inscrita. Temos:

(1) $r_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ e $r_2 = \frac{a}{2}$.

(2) $V_C = a^3, V_1 = \frac{4}{3}\pi.(\frac{a\sqrt{3}}{2})^3 \Rightarrow V_1 = \frac{\pi.a^3\sqrt{3}}{2}$ e $V_2 = \frac{4}{3}.\pi.(\frac{a}{2})^3 \Rightarrow V_2 = \frac{\pi.a^3}{6}$.

A) $P = \frac{\frac{\pi.a^3}{6}}{a^3} \Rightarrow P = \frac{\pi}{6} \Rightarrow P \cong 0,52$.

B) $P = \frac{a^3}{\frac{\pi.a^3.\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow P = \frac{2}{\pi.\sqrt{3}} \Rightarrow P \cong 0,37$.

C) $P = \frac{\frac{\pi.a^3}{6}}{\frac{\pi.a^3.\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow P = \frac{2\pi.a^3}{6\pi.a^3.\sqrt{3}} \Rightarrow P = \frac{1}{3\sqrt{3}} \Rightarrow P = \frac{\sqrt{3}}{9} \Rightarrow P \cong 0,19$.

Comentários: Este problema relaciona probabilidade com volume do cubo e da esfera, além dos raios das esferas inscrita e circunscrita a um cubo. O índice de acerto foi baixo. A maioria dos alunos apresentou dificuldades para entender a idéia de inscrição e circunscrição e para deduzir os raios em função da aresta, principalmente o raio da esfera circunscrita. Em geral, os alunos têm dificuldade para aceitar um resultado obtido em função de uma constante. Também houve dificuldade na montagem da fração que determina a probabilidade pedida, por ser uma razão entre dois volumes genéricos representados por frações, com o agravante de conter variáveis e números irracionais, o que torna a fração muito poluída e dificulta sua visualização. Além disso, o resultado final é estranho para os alunos.

Problema 8. Seja $\mathcal{P}$ um paralelepípedo de altura h e base quadrada de lado l e seja $\mathcal{C}$ o cone circular reto de altura h cuja base é o círculo inscrito na base de $\mathcal{P}$. Tomando aleatoriamente um ponto de $\mathcal{P}$, qual é a probabilidade de que esse ponto pertença a $\mathcal{C}$?

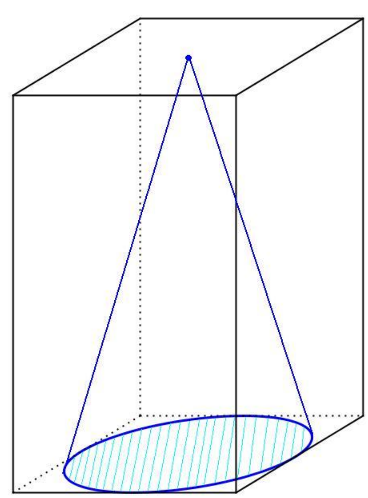

Figura 4.7:

Solução: Seja P a probabilidade pedida. Seja r o raio da base do cone. Por hipótese temos $r = \frac{l}{2}$. Sejam V_P e V_C, respectivamente, os volumes do paralelepípedo e do cone. Temos:

(1) $V_P = a^2.h$

(2) $V_C = \frac{1}{3}.\pi.\left(\frac{a}{2}\right)^2.h \Rightarrow V_C = \frac{\pi.a^2.h}{12}$.

Consequentemente,

$$P = \frac{\frac{\pi.a^2.h}{12}}{a^2.h} \Rightarrow P = \frac{\pi}{12} \Rightarrow P \cong 0,26.$$

Comentários: Este problema relaciona probabilidade aos volumes do paralelepípedo de base quadrada e do cone circular reto, além do raio do círculo inscrito em um quadrado. O índice de acerto foi mediano, muito em função da experiência do problema anterior, mas também porque os cálculos deste problema eram menos trabalhosos do que o outro.

4.4 Geometria Analítica

Recomendamos que os problemas apresentados nesta seção sejam trabalhados, inicialmente, através da abordagem analítica, visando ampliar o desenvolvimento dos alunos em relação aos conceitos estudados em Geometria Analítica. É importante que os alunos desenvolvam a capacidade de resolver esses problemas analiticamentente.

Concluída essa etapa, a abordagem geométrica passa a ser interessante, no intuito de proporcionar aos alunos a visualização geométrica dos resultados obtidos.

Problema 9. A relação abaixo contém as equações de nove retas distintas do plano cartesiano:

$r_1 : y = -2x + 5$	$r_2 : 3x - 6y + 9 = 0$	$r_3 : 2x + y + 7 = 0$
$r_4 : 2x - y - 9 = 0$	$r_5 : y = \frac{x}{2} - \frac{5}{2}$	$r_6 : 2x + 5y + 8 = 0$
$r_7 : 4x + 2y - 1 = 0$	$r_8 : -x + 2y + 8 = 0$	$r_9 : y = -2x + 11$

Sorteando aleatoriamente e sem reposição duas retas dessa lista, calcule a probabilidade de obter cada uma das situações abaixo:

A) Duas retas paralelas.

B) Duas retas perpendiculares.

C) Duas retas cuja intersecção é um conjunto não vazio.

D) Calcule novamente o item C) sabendo que não foram sorteadas duas retas perpendiculares.

Solução: Sejam $m_1, m_2, \ldots, m_9$ os coeficientes angulares das nove retas dadas. Temos:

(1) $m_1 = m_3 = m_7 = m_9 = -2 \Rightarrow \quad r_1 /\!/ r_3 /\!/ r_7 /\!/ r_9$.

(2) $m_2 = m_5 = m_8 = \frac{1}{2} \Rightarrow \quad r_2 /\!/ r_5 /\!/ r_8$.

(3) $m_4 = 2$ e $m_6 = -\frac{2}{5}$.

(4) Por (1) e (2), as retas $r_1, r_3, r_7\, e\, r_9$ são perpendiculares às retas $r_2, r_5\, e\, r_8$.

Há $C_{9,2} = 36$ modos de sortear duas retas dessa lista. Há $C_{4,2} + C_{3,2} = 6 + 3 = 9$ modos de sortear duas retas paralelas e há $4.3 = 12$ modos de sortear duas retas perpendiculares. Então temos:

A) $P = \frac{9}{36} \Rightarrow P = \frac{1}{4} \Rightarrow P = 0,25$.

B) $P = \frac{12}{36} \Rightarrow P = \frac{1}{3} \Rightarrow P \cong 0,33$.

C) $P = 1 - 0,25 \Rightarrow P = 0,75$.

D) $P = \frac{15}{24} \Rightarrow P = \frac{5}{8} \Rightarrow P = 0,625$.

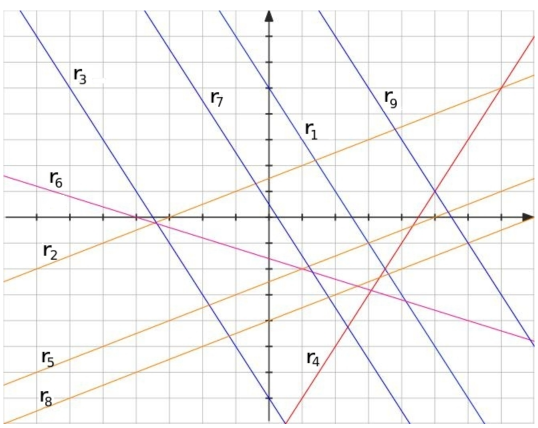

Figura 4.8:

Comentários: Este problema relaciona probabilidade com raciocínio combinatório à identificação do coeficiente angular de uma reta e às condições de paralelismo e perpendicularismo. O índice de acerto foi baixo. As principais dificuldades apresentadas foram a obtenção do coeficiente angular das retas dadas pela equação cartesiana, a percepção da condição de paralelismo quando o coeficiente angular obtido não era uma fração irredutível e, principalmente, a identificação das retas perpendiculares, em virtude da pouca familiariedade com números fracionários, que dificulta a visualização dos números inversos.

Problema 10. Seja $\mathcal{S}$ a região do plano cartesiano limitada pelas condições $|x|\leq 10$ e $|y|\leq 5$, e sejam A,B,C e D, respectivamente, os pontos de intersecção dos quatro pares de retas concorrentes abaixo:

(1) $r_1 : 2x - y - 5 = 0$ e $s_1 : 3x + y - 10 = 0$.

(2) $r_2 : x + 4y - 7 = 0$ e $s_2 : 3x + y + 1 = 0$.

(3) $r_3 : x - 5y = 14$ e $s_3 : 3x + 2y = -9$.

(4) $r_4 : 2x + 4y = 0$ e $s_4 : x - 3y - 10 = 0$.

A) Sorteando aleatoriamente três pontos do conjunto {A,B,C,D} para ser os vértices de um triângulo, qual é a probabilidade de que o baricentro desse triângulo pertença ao quarto quadrante?

B) Tomando aleatoriamente um ponto de $\mathcal{S}$, qual é a probabilidade de que esse ponto pertença ao quadrilátero $ABCD$?

Solução: Seja P a probabilidade pedida em cada item. Por consequência das condições $|x|\leq 10$ e $|y|\leq 5$ a região $\mathcal{S}$ é um retângulo de dimensões 20 por 10. Os pontos A, B, C e D são as soluções dos quatro sistemas lineares abaixo:

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x + y = 10 \end{cases}, \begin{cases} x + 4y = 7 \\ 3x + y = -1 \end{cases}, \begin{cases} x - 5y = 14 \\ 3x + 2y = -9 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ x - 3y = 10 \end{cases}$$

Resolvendo esses sistemas, obtemos $A = (3, 1)$, $B = (-1, 2)$, $C = (-1, -3)$ e $D = (4, -2)$. As coordenadas desses quatro pontos atendem às condições de $\mathcal{S}$, então $A, B, C, D \in \mathcal{S}$, ou seja, o quadrilátero ABCD está contido em $\mathcal{S}$.

A) Há $C_{4,3} = 4$ triângulos distintos cujos vértices são pontos do conjunto $\{A, B, C, D\}$. Calculando as coordenadas do baricentro desses triângulos obtemos os pontos $G_{ABC} = (\frac{1}{3}, 0), G_{ABD} = (2, \frac{1}{3}), G_{ACD} = (2, -\frac{4}{3})$ e $G_{BCD} = (\frac{2}{3}, -1)$. Portanto os triângulos ACD e BCD possuem o baricentro no quarto quadrante. Assim,

$$P = \frac{2}{4} \Rightarrow P = \frac{1}{2} \Rightarrow P = 0,5.$$

B) Sejam S_R e S_Q, respectivamente as áreas do retângulo $\mathcal{S}$ e do quadrilátero ABCD. É imediato que $S_R = 20.10 = 200$. A área do quadrilátero ABCD pode ser calculada através das coordenadas de seus vértices. Dividindo o quadrilátero em dois triângulos (por exemplo, ABC e ACD), temos:

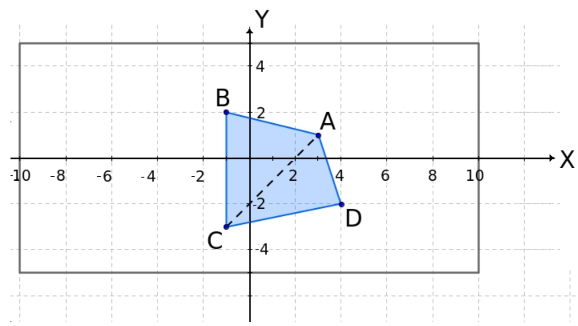

Figura 4.9:

$$D_{ABC} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 20 \quad \text{e} \quad D_{ACD} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 16.$$

Daí segue que:

$$S_Q = \frac{1}{2}|D_{ABC}| + \frac{1}{2}|D_{ACD}| \Rightarrow S_Q = \frac{1}{2}20 + \frac{1}{2}16 \Rightarrow S_Q = 10 + 8 \Rightarrow S_Q = 18.$$

Portanto,

$$P = \frac{18}{200} \Rightarrow P = \frac{9}{100} \Rightarrow P = 0,09.$$

Comentários: Este problema relaciona probabilidade com raciocínio combinatório a vários tópicos do currículo: módulo, ponto de intersecção de duas retas concorrentes, resolução de sistemas lineares, relação entre os quadrantes do plano cartesiano e os sinais das coordenadas dos pontos, baricentro do triângulo e cálculo da área do triângulo através das coordenadas dos vértices. Muitos alunos tiveram dificuldade na resolução dos sistemas, e num dado momento da aula, foi necessário fornecer a eles as coordenadas dos pontos A, B, C e D. A partit daí, o item A) prosseguiu sem dificuldades e o índice de acerto foi alto. No item B), muitos alunos queriam uma fórmula para calcular a área do quadrilátero $ABCD$, que não é regular, e praticamente ninguém estava enxergando o caminho que queríamos seguir. Nesse momento, foi necessária uma nova intervenção, através de alguns gestos feitos sobre o quadrilátero desenhado na lousa. Então, vários alunos entenderam a dica e o índice de acerto foi razoável.

Problema 11. Seja W um conjunto formado pelos dez pontos do plano cartesiano relacionados abaixo:

$$\begin{array}{lllll} A=(4,1), & B=(-1,3), & C=(-5,-2), & D=(2,2), & E=(-5,4), \\ F=(2,-1), & G=(1,5), & H=(-3,-5), & I=(-4,2), & J=(7,3). \end{array}$$

Três elementos de W serão sorteados aleatoriamente e sem reposição. Calcule a probabilidade de que o triângulo com vértices nesses três pontos atenda a cada uma das condições abaixo:

A) Ter os três vértices em três quadrantes distintos.

B) Ser interior à circunferência de equação $(x+2)^2+(y-1)^2=25$.

Solução: Seja P a probablidade pedida em cada item:

A) Há $C_{10,3}=120$ triângulos distintos cujos vértices são pontos de W. Denotando os quatro quadrantes do plano cartesiano por Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4, temos que $A, D, G, J \in Q_1$, $B, E, I \in Q_2$, $C, H \in Q_3$ e $F \in Q_4$. Para calcular o número de triângulos com vértices em três quadrantes distintos devemos analisar separadamente quatro casos:

(1) Q_1, Q_2 e Q_3 : Há $4.3.2=24$ triângulos distintos.

(2) Q_1, Q_2 e Q_4 : Há $4.3.1=12$ triângulos distintos.

(3) Q_1, Q_3 e Q_4 : Há $4.2.1=8$ triângulos distintos.

(4) Q_2, Q_3 e Q_4 : Há $3.2.1=6$ triângulos distintos.

Claramente os quatro casos descritos acima são mutuamente excludentes dois a dois e englobam todas as situações possíveis que satisfazem à pergunta. Então, pelo princípio aditivo, há $24+12+8+6=50$ triângulos cujos vértices são três pontos de W pertencentes a três quadrantes distintos do plano cartesiano. Então

$$P=\frac{50}{120} \Rightarrow P=\frac{5}{12} \Rightarrow P \cong 0,42.$$

B) Sejam K e r, respectivamente, o centro e o raio da circunferência representada pela equação dada no enunciado. Então temos $K=(-2,1)$ e $r=5$.
Para que o triângulo seja interior à circunferência é necessário que a distância de cada vértice em relação ao ponto K seja menor que 5. Calculando a distância de cada ponto de W em relação a K obtemos:

$$\begin{array}{llll} d_{AK}=6>5, & d_{BK}=\sqrt{5}<5, & d_{CK}=3\sqrt{2}<5, & \\ d_{DK}=\sqrt{17}<5, & d_{EK}=3\sqrt{2}<5, & d_{FK}=2\sqrt{5}<5, & d_{GK}=5, \\ d_{HK}=\sqrt{37}>5, & d_{IK}=\sqrt{5}<5, & d_{JK}=\sqrt{85}>5. & \end{array}$$

Portanto há 6 pontos de W que distam menos que 5 unidades em relação ao centro da circunferência, e há $C_{6,3} = 20$ modos de escolher três desses pontos para ser os vértices do triângulo. Sabemos do item A) que há 120 triângulos distintos com vértices pertencentes a W. Então,

$$P = \frac{20}{120} \Rightarrow P = \frac{1}{6} \Rightarrow P \cong 0,16.$$

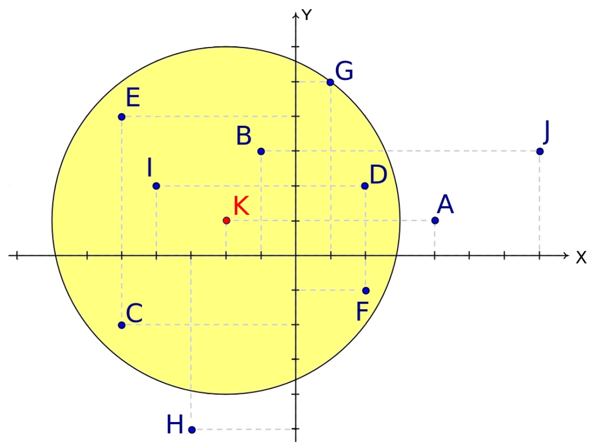

Figura 4.10:

Comentários: Este problema relaciona probabilidade com raciocínio combinatório a quatro temas importantes da Geometria Analítica: relação entre os sinais das coordenadas de um ponto e os quadrantes do plano cartesiano, distância entre dois pontos, equação da circunferência e posições relativas entre um ponto e uma circunferência. O índice de acerto do item A) foi alto. No item B), alguns alunos apresentaram dificuldade no cálculo das distâncias, mas mesmo assim o índice de acerto foi bom.

Problema 12. A relação abaixo contém as equações de doze cônicas (elipses, hipérboles e parábolas) distintas e sem rotação:

(1)$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$	(7)$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$
(2)$y^2 = 12x$	(8)$2y^2 + 5x + 8y - 7 = 0$
(3)$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$	(9)$x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 6 = 0$
(4)$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1$	(10)$3x^2 - 4y^2 + 12x + 8y - 4 = 0$
(5)$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$	(11)$4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$
(6)$(x-3)^2 = -8(y-4)$	(12)$x^2 - 2y^2 + 6x + 4y + 9 = 0$

Um professor vai montar uma avaliação com quatro cônicas dessa lista, sendo que a avaliação deve conter pelo menos uma cônica de cada tipo. Respeitando essa condição, o professor escolherá as quatro cônicas de forma aleatória.

A) Quantas avaliações distintas podem ser montadas?

B) Calcule a probabilidade de que a avaliação tenha duas parábolas.

C) Calcule a probabilidade de que a avaliação tenha uma elipse com reta focal horizontal e outra com reta focal vertical.

D) Calcule a probabilidade de que a avaliação tenha uma hipérbole com distância focal maior que 2.

Solução: As equações (8) a (12) não foram dadas na forma canônica. Utilizando o processo de completar quadrados obtemos:

$(8)(y+2)^2 = -\frac{5}{2}(x-3)$ $\qquad$ $(11)\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

$(9)\frac{(x+1)^2}{4} + (y-\frac{3}{2})^2 = 1$ $\qquad$ $(12)(y+1)^2 - \frac{(x+3)^2}{2} = 1$

$(10)\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{3} = 1$

A) A relação contém cinco elipses $(1, 4, 5, 9$ e $11)$, quatro hipérboles $(3, 7, 10$ e $12)$ e três parábolas $(2, 6$ e $8)$. A prova terá duas cônicas de um tipo e uma cônica de cada um dos outros dois tipos. Vamos separar o processo de contagem em três casos:

1º caso: Há $C_{5,2} = 10$ modos de escolher duas elipses, 4 modos de escolher uma hipérbole e 3 modos de escolher uma parábola. Então temos $10.4.3 = 120$ provas com duas elipses.

2º caso: Há $C_{4,2} = 6$ modos de escolher duas hipérboles, 5 modos de escolher uma elipse e 3 modos de escolher uma parábola. Então temos $6.5.3 = 90$ provas com duas hipérboles.

3º caso: Há $C_{3,2} = 3$ modos de escolher duas parábolas, 5 modos de escolher uma elipse e 4 modos de escolher uma hipérbole. Então temos $3.5.4 = 60$ provas com duas parábolas.

Assim, pelo princípio aditivo, há $120 + 90 + 60 = 270$ provas distintas nas condições dadas.

B) Segue imediatamente do item A) que

$$P = \frac{60}{270} \Rightarrow P = \frac{2}{9} \Rightarrow P \cong 0,22.$$

C) Analisando as equações observa-se que as elipses $1, 9$ e 11 têm reta focal horizontal e as elipses 4 e 5 têm reta focal vertical. Então há $3.2.4.3 = 72$ modos de escolher uma elipse com reta focal horizontal, uma elipse com reta focal vertical, uma hipérbole e uma parábola. Portanto,

$$P = \frac{72}{270} \Rightarrow P = \frac{4}{15} \Rightarrow P \cong 0,27.$$

D) Somente uma das quatro hipérboles dadas tem distância focal maior que 2 (a equação 3), então há um único modo de escolher uma hipérbole com distância focal maior que 2 e há 3 modos de escolher a outra hipérbole, se a prova tiver duas hipérboles. Considerando os três casos descritos no item A) temos $10.1.3 + 1.3.5.3 + 3.5.1 = 30 + 45 + 15 = 90$ provas com uma hipérbole cuja distância focal é maior que 2. Então,

$$P = \frac{90}{270} \Rightarrow P = \frac{1}{3} \Rightarrow P \cong 0,33.$$

Comentários: Este problema relaciona probabilidade com raciocínio combinatório ao estudo de cônicas (elipses, hipérboles e parábolas) dadas pela equação canônica e pela equação geral, e envolve o reconhecimento de uma cônica e seus elementos principais. Infelizmente, este problema não foi trabalhado em sala de aula, e consideramos isso praticamente impossível, pelas razões já expostas na primeira seção deste capítulo.

Considerações Finais

O objetivo principal deste trabalho foi sugerir aos professores de Matemática do Ensino Médio uma sequência didática cujo propósito é promover uma revisão geral dos conteúdos pertinentes ao programa do Ensino Médio, direcionada a alunos do 3º ano e baseada na resolução de problemas que relacionam tópicos distintos do programa, tomando Combinatória e Probabilidade como temas centrais.

A escolha dos tópicos Combinatória e Probabilidade como eixos centrais da sequência didática de revisão foi motivada pela experiência prática desenvolvida, no terceiro bimestre de 2012, com três turmas do 2º ano do Ensino Médio, que apresentaram ótimo desempenho no estudo desses assuntos. Em função disso surgiu, em agosto de 2013, quando nossas turmas já se encontravam na reta final do 3º ano, a idéia de aproveitar o aprendizado do ano anterior para incentivar o estudo de outros tópicos que não haviam atingido o mesmo aproveitamento. Essa revisão não se limita às aplicações de Combinatória e Probabilidade em problemas de Geometria, pois também incluía outros tópicos do programa, tais como conjuntos numéricos, equações, funções, sequências e progressões, matrizes e determinantes, sistemas lineares e estatística. Mas, em função da imensa extensão do tema, optamos por restringir nossa dissertação aos problemas relacionados à Geometria.

A realização prática dessa experiência em sala de aula foi surpreendente e extremamente gratificante. A sequência didática foi aplicada ao longo de 18 aulas, quando já caminhávamos para o final do ano letivo, e os alunos mostraram-se muito interessados, participativos e empenhados, inclusive aqueles que, até então, não costumavam apresentar tais características. Perguntas relevantes foram levantadas, algumas falhas de aprendizado foram sanadas e conceitos relacionados a outros tópicos foram assimilados com rapidez incomum. Os alunos que já estavam acostumados a ter um bom desempenho tiveram um aproveitamento praticamente integral ao longo da sequência didática, e os alunos que costumavam apresentar dificuldades alcançaram um índice satisfatório, superior ao habitual. A avaliação realizada ao final da sequência registrou uma média superior a quase todas as outras avaliações realizadas ao longo de dois anos de trabalho com essas turmas.

É evidente que a viabilidade de aplicação da sequência didática proposta é muito maior em uma turma que já tem domínio dos princípios básicos e das técnicas de Combinatória e Probabilidade, mas isso não impede a realização da experiência em uma turma formada por alunos que, em sua maioria, não tenham esse pré-requisito. Pelo contrário, isso pode ser um motivo a mais para a aplicação desses problemas, no intuito de reforçar o estudo dos temas centrais da proposta. Mas nesse caso, em termos práticos, as possibilidades ficam ligeiramente reduzidas, em virtude da demanda de tempo. Para tais situações, os Capítulos $1, 2$ e 3 do nosso trabalho fornecem subsídios históricos e teóricos para auxiliar a prática do professor em sala de aula.

Por fim, gostaríamos de reafirmar que os objetivos desta dissertação não se limitam ao estudo teórico de Combinatória e Probabilidade. Nossa intenção principal é apresentar uma sugestão de abordagem que utiliza esses temas para desenvolver o estudo de tópicos geométricos. Esperamos que este trabalho possa servir de guia para professores de Matemática do Ensino Médio e que os problemas aqui apresentados possam estimular a criatividade e a motivação para a elaboração de problemas baseados nesse tipo de abordagem, relacionando dois ou mais conteúdos distintos.

Desejamos muito boa sorte a todos os colegas de profissão em nossa batalha diária. Afinal, ensinar Matemática é um grande prazer!

Referências Bibliográficas

[1] BERLINGOFF, W.P., GOUVÊA, F.Q. *A Matemática Através dos Tempos*, Tradução de GOMIDE E.F., CASTRO H., Edição Ampliada, Editora Blucher, São Paulo, 2008.

[2] BUSSAB, W.O., MORETTIN, P.A. *Estatística Básica*, 4a Edição, Atual Editora, São Paulo, 1988.

[3] CERRI, C., DRUCK, I.F. *Combinatória Sem Fórmulas*, Projeto PEC - Construindo Sempre - PEB II, USP-SEE, São Paulo, 2003.

[4] EVES, H. *Introdução à História da Matemática*, Tradução de Domingues, H.H., 5a Edição, Editora da UNICAMP, Campinas, 2011.

[5] HAZZAN, S. *Fundamentos de Matemática Elementar*, v.5, 6a Edição, Atual Editora, São Paulo, 1994.

[6] LIGHTNER, J.E. *A Brief Look at the History of Probability and Statistics*, Mathematics Teacher, v.84, 1991, Tradução de PATROCÍNIO, A.C., 1996.

[7] LIMA, E.L., CARVALHO, P.C.P., WAGNER, E., MORGADO, A.C. *A Matemática do Ensino Médio*, v.2, 6a Edição, SBM, Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, 2006.

[8] MACHADO, N.J. *Matemática e Língua Materna*, 3a Edição, Cortez Editora, São Paulo, 2006.

[9] MORGADO, A.C.O., CARVALHO, J.B.P., CARVALHO, P.C.P., FERNANDEZ, P. *Análise Combinatória e Probabilidade*, SBM, Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, 1991.

[10] OLIVEIRA, J.P.O., MELLO, M.P., MURARI, I.T.C. *Introdução à Análise Combinatória*, 4a Edição, Editora Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2007.

[11] PROFMAT/SBM, Matemática Discreta, U11, SBM, Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro, 2012.

[12] PROFMAT/SBM, Matemática Discreta, U17, SBM, Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro,2012.

[13] PROFMAT/SBM, *Matemática Discreta*, AV3, 2011.

[14] PROFMAT/SBM, *Matemática Discreta*, AV2, 2012.

[15] PROFMAT/SBM, *Matemática Discreta*, AV2, 2013.

[16] PROJETO SPFE: GRANJA, C.E.S.C., MELLO,J.L.P., MACHADO,N.J., MOISÉS,R.P., SPINELLI,W. *Caderno do Professor: Matemática, Ensino Fundamental - 8a série*, v.4 - SEESP, São Paulo, 2009.

[17] PROJETO SPFE: GRANJA, C.E.S.C., MELLO,J.L.P., MACHADO,N.J., MOISÉS,R.P., SPINELLI,W. *Caderno do Professor: Matemática, Ensino Médio - 2a série*, v.3 - SEESP, São Paulo, 2009.

[18] VIANA, F.C.A. *Estudo e Aplicações de Probabilidade Geométrica e Paradoxos*, Dissertação de Mestrado, PROFMAT/SBM, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.