MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT/SBM

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA: QUE PRECIOSIDADES ENVOLVEM OS PROBLEMAS DESTA COMPETIÇÃO E QUAL O SEU IMPACTO PARA O PROFESSOR DE MATEMÁTICA SEM EXPERIÊNCIA EM OLIMPÍADAS E A SUA IMPORTÂNCIA PARA O ESTUDANTE?

Autor : Carlos Alberto da Silva Victor

Orientador : Wanderson José Lambert

UFRRJ-2013

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

CARLOS ALBERTO DA SILVA VICTOR

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, no Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 14/03/2013

Wanderson José Lambert – Doutor em Matemática – IMPA

(Orientador)

Orlando dos Santos Pereira – Doutor em Matemática – UFRJ

Gladson Octaviano Antunes – Doutor em Matemática – UFRJ

AGRADECIMENTOS

Inicialmente agradeço a todos os organizadores deste grande projeto — PROFMAT—, que possivelmente enfrentaram infinitas dificuldades, que certamente desconhecemos, para que este intento em rede nacional tivesse o sucesso alcançado. Sou grato a todos pela alegria que nós, professores de Escola Pública Básica do Brasil, estamos sentindo pela oportunidade ímpar de nos aperfeiçoarmos.

Agradeço ao meu orientador "Wanderson José Lambert", e também professor de três disciplinas do nosso curso, cujo carisma e paciência divina, fizeram com que essa dissertação tivesse a coerência de toda a minha proposta de trabalho. Ao mestre Orlando dos Santos Pereira, coordenador do PROFMAT-UFRRJ e a todos os mestres das disciplinas, o meu muito obrigado pelas orientações e grandes discussões obtidas durante todo o curso.

Agradeço também ,ao meu mestre "Pedro Carlos Pereira", pelo consideração e confiança surgidas em todas as discussões que tivemos em sala de aula, na disciplina de *História da Matemática.*

À "Daisy Aparecida Nogueira", os meus sinceros agradecimentos pela sua revisão ortográfica e a sua incansável boa vontade em tornar este trabalho consistente.

Aos meus colegas de turma, obrigado pelos momentos inesquecíveis que passamos juntos; certamente, eles ficarão em minha memória por toda a vida daqui para a frente.

A Luiz Amorim Goulart, um agradecimento especial, pelo constante incentivo para que este e outros trabalhos fossem realizados.

A "Rafael Castiglione" por suas orientações computacionais infalíveis nos momentos em que as brigas com os arquivos instalavam-se.

A Antonio Bartolomeu pela confiança platônica e sua paciência indiscritível em todos os momentos difíceis.

À "Antonio Luiz Santos (Gandhi)", pelas valiosas contribuições durante anos, em mostrar muitos caminhos descritos neste trabalho e por estar sempre presente para qualquer tipo de ajuda.

Finalmente a todos aqueles que diretamente ou indiretamente, estiveram junto comigo nesta trajetória.

DEDICATÓRIA

A meu pai, Francisco, por sua orientação durante toda a minha caminhada.

À minha mãe, Maria Dinorah, por sua infinita preocupação pelos caminhos que segui.

À minha esposa, Maria de Lourdes, por sua força incomparável de luta e compreensão, para que tudo isso fosse realizado.

Em" Memória" do meu irmão, Agenor, por alegres momentos que passamos juntos.

E, especialmente, em "Memória" à minha cachorrinha, " Mel", companheira fiel que compartilhou, por 12 anos, as minhas tristezas e as minhas alegrias.

RESUMO

VICTOR, Carlos Alberto da Silva. **Olimpíada de Matemática: que preciosidades matemáticas envolvem os problemas desta competição e qual o seu impacto para o professor de matemática sem experiência em olimpíadas e a sua importância para o estudante?** 95 p., Dissertação (Mestrado em Rede Nacional – PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, RJ, 2013.

A Olimpíada de Matemática na busca de novos talentos tem a característica de ser uma competição intelectual, utilizando para isto problemas desafiadores que exigem do aluno a sua capacidade criativa na resolução dos mesmos. Em geral, se não houver uma preparação específica, deparamo-nos com várias barreiras que estão escondidas nas teorias. Este fato pode ser comum tanto ao discente quanto ao docente e, principalmente, nas fases finais das Olimpíadas. Um sentimento de frustração nos abrange quando não sabemos de que forma devemos enfrentar tais barreiras. Temos aqui uma proposta na tentativa de diminuir a distância que ocorre com matemática nas Escolas Básicas e a Olimpíada de Matemática. A dinâmica dessa proposta foi baseada em experiências no preparo de alunos para as Olimpíadas e de alguma forma tentando mostrar como podemos crescer teoricamente através dos problemas envolvidos. Buscamos através da resolução de alguns problemas escolhidos traçar algumas estratégias interessantes para a resolução dos mesmos utilizando pouca teoria. Em tais resoluções fazemos comentários dessas estratégias e de possíveis dificuldades que o aluno e/ou professor possam se deparar. Esta experiência indicou que há vários problemas que estimulam os jovens a gostar de matemática e se interessar pelos Problemas Olímpicos, bastando para isto desenvolver o raciocínio dele através de assuntos que possuem facilidades na aprendizagem. Como complementação, fazemos uma discussão não exaustiva de vários livros ou textos utilizados nesta experiência para o preparo de alunos às diversas competições Olímpicas dentro da Matemática.

Palavras-chave: Problemas de Olimpíadas de Matemática, Matemática na Escola Básica, Preparação de alunos e professores, Descrição de Livros para preparação em Olimpíadas.

ABSTRACT

VICTOR, Carlos Alberto da Silva. **Math Olympiad: that mathematical morsels involve the problems of this competition and its impact to the math teacher with no experience in the Mathematical Olympiad and its importance to the student?** 95 p., Thesis (MA in National Network - PROFMAT). Institute of Mathematical Sciences, Department of Mathematics, Federal Rural University of Rio de Janeiro, RJ, 2013.

The Mathematical Olympiad in searching of new talent has the characteristic of being an intellectual competition, using for this challenging problems which require from the student his creative ability in solving them. In general, if there is no specific preparation, we are faced with several barriers that are hidden in the theories. This may be common to both student as the teacher, and especially in the final stages of the Mathematical Olympiad. A feeling of frustration covers us when we do not know how we should address such barriers. Here we have a proposal in an attempt to bridge the gap that occurs with mathematics in basic schools and Mathematical Olympiad. The dynamics of this proposal was based on experiences in preparing students for the Mathematical Olympiad and somehow trying to show how we can theoretically grow through the issues involved. We seek through solving some problems chosen to draw some interesting strategies for solving them by using little theory. In such resolutions we do reviews on these strategies and possible difficulties that the student and / or teacher may find. This experience indicated that there are several problems that encourage young people to enjoy and take an interest in solving problems enough for this to develop his reasoning through issues that have abilities for learning. Summarizing, we complement our discussion by analysing several books and texts used in this experience to prepare students for various competitions within the Mathematical Olympiad.

Keywords: Mathematical Olympiad Problems, Mathematics in Primary School, Preparing students and teachers, Description of books in preparation for the Mathematical Olympiad.

ÍNDICE DOS PROBLEMAS

ÍNDICE DAS SOLUÇÕES

ÍNDICE DAS TABELAS

ÍNDICE DAS FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho teve sua motivação inicial através de uma experiência própria com relação às Olimpíadas de Matemática na década de 90. Mesmo com grande experiência em preparatórios para os diversos vestibulares militares e civis, a dificuldade em resolver determinadas questões das Olimpíadas de Matemática se tornava evidente. O porquê de tais dificuldades era uma reflexão comum também a vários colegas de profissão quando se deparavam com essas provas, principalmente nas fases finais da competição.

O que mais incomodava era que as dificuldades se tornavam cada vez maiores, mesmo tendo ciência de que os problemas envolvidos, em sua grande maioria, eram e são atualmente de conteúdos da grade curricular da Matemática do Ensino Básico.

Apesar de a dificuldade ser um conceito relativo, existem professores de Matemática de diversos níveis de ensino que se deparam com inúmeros obstáculos quando tentam solucionar algumas questões dessas Olimpíadas, e isso pode não traduzir o conhecimento matemático deles em termos de conteúdos do currículo dos Ensinos Básico ou Superior, já que a abordagem das questões tem um formato que muitas vezes difere do que estamos acostumados a encontrar nos livros textos, o que talvez atrapalhe a compreensão ou o desenvolvimento de tais problemas.

As questões propostas nas Olimpíadas de Matemática são, em geral, desafiadoras, instigantes, renovadoras e, como a competição tem um caráter intelectual, as resoluções exigem do candidato a capacidade de abstração, criatividade e um raciocínio que, em geral, depende, de um treinamento. Os próprios *sítios na internet* das Olimpíadas destacam que um dos objetivos é estimular o jovem a estudar Matemática, além da busca de novos talentos.

O próprio projeto de Olimpíadas de Matemática descreve a importância de termos no Brasil uma competição de caráter nacional:

> *Temos hoje brilhantes matemáticos e cientistas de renome mundial que tiveram origem nas Olimpíadas de Matemática. Entretanto, reconhecemos que, com esta atividade, pode-se fazer muito mais. Com parceria do IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada) e com a SBM (Sociedade Brasileira de Matemática), foi submetido ao CNPq um projeto que pretende contribuir para a melhoria do ensino de Matemática no Brasil utilizando as Olimpíadas de Matemática*

como mecanismo propagador. (revista Eureka! número 1-1998-apresentação).

Para que esse jovem seja estimulado a participar de tais competições ou mesmo para que ele tenha o interesse em estudar Matemática, existe a necessidade da participação intensiva do professor, o qual deve ter a vontade de desenvolver em suas aulas, ou em atividades extraclasse, questões inerentes a esse tipo de competição. Como consequência, o docente se vê obrigado a buscar um aperfeiçoamento e, com isso, a melhoria no ensino de Matemática nas Escolas Básicas.

Um questionamento ocorre em função do parágrafo anterior: "*De que forma deve o professor se aperfeiçoar?"*. Somente com as soluções das provas anteriores, talvez não haja material suficiente para capacitar o professor, a fim de que ele prepare os alunos para as Olimpíadas de Matemática. Conforme Biondi,Vasconcelos e Menezes [4] explicam, o "Banco de Questões" (veja a Seção 3.1) ajuda na melhoria da qualidade do desempenho dos alunos nas avaliações da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Entretanto, pelo que se pode observar, muitas vezes, o professor e aluno não são instigados a pensar ou seguir os passos que levaram o autor a chegar à solução.

Acreditamos, também, que em algumas questões, como, por exemplo, do Ensino Médio, conhecer determinados conteúdos, *de Teoria dos Números, Análise, Álgebra, Combinatória, Geometria, Trigonometria, entre outros,* tornam mais seguros o raciocínio e a criatividade, o que nos conduzirá a um preparo mais amplo em relação ao currículo da "Matemática Elementar"; além disso, ter uma bibliografia que desenvolva essas habilidades é um fato que devemos levar em consideração.

A revista Eureka! de 98 (número 1) tratou do tema; segundo ela:

> *A cada ano, livros novos são editados repetindo quase sempre o mesmo estilo e os mesmos conteúdos dos anteriores. Existem hoje no Brasil bons livros de Matemática dedicados aos alunos tanto do ensino fundamental quanto do ensino médio. Entretanto, o que lhes falta é um ingrediente que, no mundo de hoje, é fundamental: o estímulo à criatividade. Entendemos que não é suficiente para a formação do futuro cidadão um aprendizado burocrático da Matemática e percebemos a importância de estimular os alunos desde tenra idade a resolver problemas novos e*

> *desafiantes, propiciando o desenvolvimento da imaginação e da criatividade.*
>
> *O programa de Olimpíadas de Matemática é reconhecido em todos os países do mundo desenvolvido como o mais eficiente instrumento para atingir esse objetivo. Aproveitando o natural gosto dos jovens pelas competições, as Olimpíadas de Matemática têm conseguido estimular alunos a estudar conteúdos além do currículo escolar e, também, por outro lado, aumentar e desenvolver a competência dos professores*. (EUREKA!-1998).

O início em 2011 do programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) trouxe uma oportunidade para o professor que atua na Educação Pública de um aprimoramento na sua formação. Os conteúdos idealizados pelos coordenadores e inicialmente disponibilizados no *"sítio do PROFMAT"* para os participantes do mestrado foram editados no ano de 2012 em livros da "*Coleção PROFMAT". A* natureza dessa coleção tem um aprofundamento e uma nova visão dos assuntos ministrados nas escolas básicas do Brasil e, certamente, são um grande apoio e incentivo para o professor na qualidade de sentir-se mais seguro em sala de aula.

O que notamos com relação a esse programa de mestrado ─ PROFMAT ─, é que sua coleção, muitas vezes nos desenvolvimentos dos conteúdos e dos exercícios propostos, tem uma conexão com o programa de Olimpíadas de Matemática no Brasil, como, por exemplo, a disciplina de "*Resoluções de Problemas*", obrigatória no mestrado.

Acreditamos que dessa forma o professor será capaz de criar estratégias em suas escolas juntamente com os orientadores, diretores e a Secretaria de Educação, como, por exemplo, competições na sua própria escola ou com outras, de modo que um aluno, que por algum motivo não goste de Matemática, venha a se interessar a estudar a disciplina, participando das Olimpíadas não por obrigação, mas por vontade própria. Para os alunos que gostam, surgirão oportunidades de mostrar os seus potenciais e, quem sabe, virá a descoberta de novos talentos. Entendemos, também, que todo esse processo de aprendizagem é mais uma forma de integração social do cidadão, visto que ele poderá encontrar jovens da mesma faixa etária com objetivos semelhantes .

Ressaltamos que a prática de resoluções de problemas nos fortalece e nos faz sentir mais seguros na busca de novos conhecimentos tornando-se muito gratificante quando, após várias tentativas, a solução surge e, quebrando o desafio descrito na questão.

O problema 21 do capítulo 2, cujo enunciado consta de uma revista Australiana denominada Function – A School Mathematics Journal - Volume 21 Part 5 – October 1997- Problem 21.5.2, página 167, da seção de problemas, é um dos exemplos da incessante procura pessoal para uma solução geométrica. Durante aproximadamente 30 dias pensando nesse problema, em que uma possível frustração já se instalava pela não resolução da questão, o esperado ocorre como um acaso após um determinado traçado. Situação semelhante, provavelmente, já ocorreu com vários professores; a solução se evidencia, e a perplexidade nos questiona: o que nos levou a realizar esse traçado? Tal fato vem a confirmar que *" tentar requer paciência" (vide cap 3 ítem 3.2-- introdução).* Transferir essa satisfação para o aluno é, também, um dos nossos desafios.

Há dissertações e trabalhos que descrevem as origens das Olimpíadas de Matemática, nos quais são analisados os objetivos, os regulamentos, suas conseqüências na qualificação do ensino da disciplina na Educação Básica e os impactos para os alunos das escolas públicas.

Um exemplo desses trabalhos pode ser encontrado em uma dissertação de mestrado [1], na qual o autor discute, com aprofundamento, tais origens e as diversas Olimpíadas de Matemática, inclusive Internacionais. Em [1], o autor cita trabalhos correlatos de Nascimento e Oeiras [12] e um estudo de Sucupira [19] sobre a participação feminina nas Olimpíadas de Matemática, através de contribuições dos membros do Conselho de Administração do IMPA de Bondi, Vasconcelos e Menezes [4] e Peraino [13]. O autor descreve, através de questionário, uma pesquisa entre professores e alunos, e como é o comportamento do aluno em participar nesse tipo de competição .

Outro trabalho interessante sobre o assunto é [10], no qual é descrita em linhas gerais a OBMEP, sua origem e seus possíveis impactos no ensino de Matemática na Escola Pública no Brasil. Todos esses trabalhos indicados nas referências bibliográficas descrevem, também as origens e os regulamentos das Olimpíadas Internacionais.

Entretanto, há poucos trabalhos discutindo quais os caminhos a seguir na resolução dos problemas, como enfrentar os obstáculos nas questões propostas e obtenção de motivações para outros problemas.

A meta desse trabalho é tentar amenizar dificuldades semelhantes às que surgiram quando nos debruçamos sobre as questões e, apresentamos caminhos aos que pretendem iniciar-se nessa arte de resolver problemas, objetivando que esse não seja mais um artigo de soluções, mas que, através dos problemas aqui sugeridos, nasça um estímulo para o professor ou leitor iniciantes em Olimpíadas de Matemática a fim de que se sintam mais confortáveis ao se depararem com essas provas.

O trabalho está dividido em três capítulos, a saber:

No Capítulo 1, os enunciados de 50 problemas são apresentados com o objetivo de que o leitor tente, inicialmente, resolvê-los; neles são descritos origem e finalidade de cada um, bem como uma sugestão que pode ajudar na solução.

No Capítulo 2, uma possível solução para os problemas, além de comentários relevantes ao desenvolvimento da questão. Deixaremos, a partir do problema 33, que o leitor faça os próprios comentários com relação aos problemas apresentados, e às soluções, para que a experiência dele em sala de aula ─ não necessariamente para o preparo de alunos para as Olimpíadas de Matemática ─ possa enriquecer esse trabalho para uma futura versão.

Nesse capítulo observaremos como problemas aparentemente complexos para muitos podem ser resolvidos com ferramentas do Ensino Básico, utilizando estratégias que evidentemente não são únicas, mas que, futuramente, possam ser úteis para novos problemas.

No capítulo 3, apresentamos uma biblioteca que nos conduziu a um aperfeiçoamento e nos ajudou no preparo e na orientação dos nossos jovens para a competição. Uma descrição dos seus conteúdos é também mencionada.

Os 50 problemas do capítulo 2 foram selecionados visando que o leitor venha a ser estimulado através das soluções apresentadas, interessando-se por problemas desafiadores propostos nas Olimpíadas, revistas ou livros que contenham questões nesse estilo.

Destacamos detalhes nos conteúdos programáticos exigidos do ensino da Matemática nas escolas de Ensinos Fundamental e Médio que geralmente não estão presentes nos livros textos básicos. Todas as soluções apresentadas são, em sua maioria, das bancas examinadoras, dos livros ou artigos que constam no capítulo 3 ou nas referências bibliográficas, ou ainda, fruto de discussões entre grupos de professores do qual fazemos parte, bem como de alunos participantes da competição.

Destacamos que não foram inseridas questões de determinados conteúdos, como por exemplo, Trigonometria, Análise, áreas afins da Aritmética (como por exemplo; Congruências), Jogos Matemáticos (os quais trazem bastantes benefícios para a criatividade e o desenvolvimento do perfil de um aluno olímpico), entre outras, por se tratar de um primeiro trabalho cuja finalidade é levar o iniciante em Olimpíadas a pensar com menos teoria possível. Tais assuntos podem ser encontrados nos livros do Capítulo 3, bem como em outras literaturas, que certamente farão parte de novas dissertações ou livros do gênero de nosso trabalho. Importante destacar que existe uma infinidade de problemas que poderiam ser inseridos no capítulo 1 com o mesmo propósito.

Para salientarmos a beleza de uma prova de Olimpíada de Matemática e o que ela pode proporcionar em termos de originalidade, criatividade e imaginação, fecharemos o quinquagésimo problema do capítulo 1 com um surpreendente resultado que pode deixar perplexos mesmo aqueles experientes em Olimpíadas. É claro que temos, em Matemática, outros resultados "fascinantes", porém, esse foi escolhido pela originalidade e porque um aluno do 9° ano do Ensino Fundamental consegue entendê-lo após a solução, além de esse aluno ser capaz de criar outros no mesmo estilo.

As figuras presentes neste trabalho foram geradas inicialmente pelo software Cabri Geometry II Plus e em algumas vezes sendo ajustadas no Paint do Windows ; apenas a Figura 10 foi gerada pelo software GeoGebra.

Esperamos que novos trabalhos do mesmo gênero surjam com o objetivo de propiciar ao professor de Matemática ou o leitor interessado, "*que de alguma forma é temeroso ao se deparar com uma Olimpíada"* momentos de deleite nas resoluções e que essas literaturas sejam estimulantes na prática de resolver problemas similares aos propostos na competição.

MANUAL DO PROFESSOR

Para melhor perfomance futura e para um conforto em relação às questões de Olimpíadas, relatarei aqui alguns passos pelos quais podemos desenvolver a teoria e problemas referentes aos conteúdos do Ensino Básico. Certamente, após um tempo em que o amadurecimento na prática de problemas torna-se uma realidade, o professor tomará os próprios rumos para o mundo das Olimpíadas de Matemática e possivelmente uma alteração enriquecedora deste manual.

O passo inicial é que, de alguma forma, dentro do conteúdo que está sendo estudado no momento, devemos utilizar alguma estratégia de modo que o aluno se sinta motivado. Podemos desenvolver um problema com o aluno, conduzindo-o à resposta, encaminhando a resolução e sugerindo alguns passos. Esse procedimento será muito gratificante para o estudante, o qual se sentirá fortalecido para soluções futuras de outros problemas.

Mesmo que o docente não tenha a prática de alguns conteúdos não estudados no Ensino Básico, como, por exemplo, congruências, ele pode idealizar um problema real em que essa teoria possa ser usada, sendo aproveitada pelo professor para que seja estudada, juntamente com o aluno. Essa foi uma das estratégias de que lancei mão, e inicialmente extraclasse. Exemplo : dois sacos de moedas são tais que : o primeiro (saco 1) contém duas moedas de um real e um outro saco (saco 2), contém três moedas de um real . Quantos sacos de (1) e de (2) devemos ter, para pagar uma conta de 137 reais ?

Passos sugeridos:

(I) Escolha, inicialmente, a área na qual mais se sinta à vontade (Aritmética, Álgebra ou Geometria); procure desenvolver com os alunos questões um pouco mais sofisticadas . Faça com eles as que tenham resultados surpreendentes (problema 1 do Cap 1, por exemplo); isso, certamente, chamará a atenção dos estudantes, e você se sentirá como um agente transformador e um expectador motivado. Um exemplo para um aluno de 9º ano é resolver uma equação do 2° grau, utilizando apenas a fatoração e completando os quadrados.

(II) Os livros citados em (3.6), (3.7) e (3.8) são fundamentais para todo esse início.

(III) Estude com os alunos os artigos para iniciantes da revista Eureka!.

(III) Desenvolva com os alunos o Vol 1 da coleção correspondente de (3.9) .

(IV) Siga as informações do Capítulo 3.

Agora, uma dica importante:

Tenha o hábito de resolver problemas, perca tempo pensando, não desista, tenha paciência, e logo verás os resultados surpreendentes; busque novos conhecimentos nos livros descritos neste trabalho. Escolha um dos problemas propostos da revista Eureka!, fique em "cima dele", trabalhe com paciência. Se a ideia não aparecer logo, pare um pouco e, assim que tiver um tempinho, pense nele novamente. Se mesmo assim nenhuma ideia surgir, escolha um outro problema e continue tentando. Afirmo que em breve você estará dando soluções brilhantes ....

CAPÍTULO 1 : ENUNCIADOS DOS PROBLEMAS

Neste capítulo temos os enunciados dos problemas que na sua maioria fizeram parte de Olimpíadas. Comentários sobre suas origens e sugestões para uma possível solução serão apontados apenas com o intuito de facilitar as idéias. Mas, sugerimos que antes do leitor ir ao Capítulo 2 que tente resolver alguns desses problemas. Não se preocupe pelo tempo que muitos poderiam vir a pensar que é "perdido" com as tentativas, muitos especialistas em Olimpíadas passaram por isto e todo este processo faz parte do desenvolvimento criativo.

No momento que estudar a solução, verifique a possibilidade de uma outra de modo que esta tenha um outro formato e talvez uma resolução com maior brilhantismo. Caso isso não ocorra, não desanime; com o decorrer do tempo novas idéias surgirão e breve terás sucesso. Viaje nesse valioso mundo dos problemas de Olimpíadas de Matemática. Lembre-se: " *tentar requer paciência".*

PROBLEMA 1 (quadrado dividido em 1993 outros quadradinhos)

É possível dividir um quadrado em 1993 outros quadradinhos ? esses quadradinhos não são necessariamente congruentes.

Esta questão foi parte da prova da Olimpíada de Colorado (1993) [17]. Esboçar um quadrado e dentro deste montar outros quadradinhos menores é uma estratégia para a solução.

PROBLEMA 2 (quadrado dividido em "n"outros quadradinhos)

(generalização do problema 1) *É possível dividir um quadrado em "n" outros quadradinhos? Esses quadradinhos não são necessariamente congruentes.*

Não se sabe se o Problema 1 teve a sua origem desta generalização, pois tal fato não é comentado no livro em que o problema 1 está resolvido.

PROBLEMA 3 (soma de inversos de naturais)

(problema de uma Olimpíada Russa) Prove que a soma

$$S = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

não é um valor inteiro.

Esta questão foi proposta numa Olimpíada Russa (vide [16]) e cuja solução origina uma propriedade interessante descrita a seguir.

Tente inicialmente pensar na maior potência de 2 de 1 até n e logo após faça o M.M.C dos denominadores.

PROPRIEDADE 1 *: Todo número natural diferente de zero , pode ser escrito na forma* $2^k.I$ *, onde k é um inteiro não negativo e I um ímpar .*

Observe que esta propriedade aparece exatamente quando trabalhamos com fatoração em números primos. Veja os exemplos :

$$17 = 2^0.17;$$
$$22 = 2^1.11.$$

PROBLEMA 4 (uma fatoração com conseqüências fascinantes)

Considere um paralelepípedo retângulo de lados variáveis e reais tais que o perímetro é constante igual a P . Determine o volume máximo deste paralelepípedo e suas dimensões .

É uma questão que em geral aparece em livros de Cálculo diferencial e integral e em artigos de desigualdades. A solução apresentada é utilizando uma fatoração de

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

e não muito comum em livros textos do ensino básico. Utilizaremos também uma propriedade aparentemente simples, mas que resolve muitos problemas.

PROPRIEDADE 2: *O quadrado de qualquer número real é sempre maior do que zero ou igual a zero.*

PROBLEMA 5 (de novo a fatoração do problema 4)

Suponha que tenhamos a,b,c números reais não nulos , tais que $a+b+c=0$*. Determine o valor da expressão* $\dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ac}+\dfrac{c^2}{ab}$.

Esta questão foi inspirada numa outra proposta no livro de Titu Andreescu [2].

PROBLEMA 6 (que incrível princípio!)

Qual a quantidade mínima "k" de pessoas presentes numa reunião, para que possamos garantir que "n" pessoas nasceram no mesmo dia da semana ?

Questão proposta para que o aluno perceba que através de uma situação do "*dia a dia*", na verdade, está diante de um princípio que , além de resolver vários problemas de olimpíadas, garante uma aplicação.

PROBLEMA 7 (é de tirar o fôlego !)

Seja ABC um triângulo tal que AB=AC e que $\angle BAC = 20^0$. *Sobre os lados AB e AC, marcamos os pontos P e Q respectivamente, tais que* $\angle PCB = 6O° \, e \, \angle CBQ = 5O°$. *Determine* $\angle CPQ$.

Esta questão é uma das propostas no livro " *Problemas de Geometria Planimetria*" de " I.Shariguin , editora Mir Moscú" e se trata de problemas denominados de " *ângulos adventícios", que são ângulos nos quais são resultados dados por números inteiros, quando se faz traçados como na figura desse problema (veja o Apêndice D).*

É uma questão que se faz presente em algumas apostilas e livros de cursos preparatórios e, possui um grau alto de dificuldade pois somente com a Lei Angular de Tales, a solução se torna impossível.

PROBLEMA 8 (uma soma que dá o que falar)

Prove que $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ ou $x + \dfrac{1}{x} \leq -2 \, , x \neq 0$ *e real.*

Essas duas desigualdades foram mencionadas devido a duas propriedades dos números reais em que geralmente não constam de livros textos básicos tanto do ensino fundamental e médio. Geralmente, quando elas são apresentadas aos alunos, há uma reação de surpresa pelo fato de ser fácil a verificação numérica e eles nunca terem visto nas aulas de matemática. Constataremos durante os problemas como essas desigualdades nos ajudam!.

PROBLEMA 9 (sabe que eu pensei em multiplicar tudo por "x"?)

Resolva nos reais a equação : $\sqrt[13]{x} + \dfrac{\sqrt[13]{x^{12}}}{x} = \sqrt[13]{7}$

Questão semelhante foi alvo do concurso para os alunos do Colégio Naval .

Sugestão : use a questão (8).

PROBLEMA 10 (rapaz ! o que que eu faço aqui ?)

6 amigos encontraram numa expedição um tesouro em que havia N cristais iguais . Durante a noite um deles vai até o tesouro e faz a divisão dos N cristais por 6. Feita a divisão, ele percebe que sobra um cristal. Ele pega uma das partes que lhe cabe e joga fora o cristal que sobrou. Cada um dos outros quatro colegas repete o procedimento, ou seja, cada um divide a quantidade que está no momento por 6 e sempre sobrando um cristal, pega a sua parte e joga fora o cristal que sobrou. No dia seguinte, o último repete o mesmo procedimento e ocorrendo sempre o mesmo fato dos anteriores. Determine o menor valor possível de N para que este processo seja possível .

É um problema cujo enunciado semelhante aparece no livro Selecionados de Matemática [10], no qual todos os exercícios têm como origem as Olimpíadas Americanas.

Sugestão: Faça todas as divisões pedidas no problema e perceba algum detalhe de somar as mesmas quantidades em ambos os membros das igualdades que aparecem.

PROBLEMA 11 (ainda não dei esta matéria !!)

Resolva nos reais a equação : $x^4 = 4x + 1$.

Uma questão proposta no livro "*Problemas Selecionados de Matemática" [15]* e cujo objetivo é levar o leitor a pensar numa fatoração que simplifique a dificuldade em trabalhar com uma equação do 4º grau.

Sugestão : tente desenvolver algo do tipo " $a^2 = b^2$ " .

PROBLEMA 12 (estou só olhando prá ela !)

Determine x+y onde x e y são números reais tais que:

$$4x^2 + 9y^2 - 4x - 12y + 5 = 0 .$$

Questão proposta para utilizar o quadrado de uma soma e a Prop 2.

PROBLEMA 13 (é preciso resolver mais problemas de polinômios !!)

Sabendo que (x-a)(x-10) = (x+b)(x+c)-1 , para todo x real , onde a , b e c são números inteiros . Encontre a soma dos valores de a .

Do livro " The USSR Olympiad Problem Book" [16]

PROBLEMA 14 (está me dando raiva !!)

Determine a diferença entre a maior e a menor raiz real da equação

$$x^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 27 .$$

Do livro "*Problemas Selecionados de Matemática" [15]*.

Sugestão : quadrado de uma diferença .

PROBLEMA 15 (por que que no meu livro não tem isto ? e agora ?)

Resolva nos reais : $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor = 15$, *onde* $\lfloor x \rfloor$ *representa o maior inteiro menor do que " x " ou igual a " x ".*

Esta questão foi proposta com o intuito de mostrar de que forma devemos trabalhar com variáveis em $\lfloor x \rfloor$.

PROBLEMA 16 (deste tipo eu não sabia!)

A igualdade na variável x : 2mx-x +5 = 3px-2m+p admite as raízes $\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}$ *e* $\sqrt[3]{3}+\sqrt{3}$ *. Determine o valor de* $m^2 + p^2$.

Um fato que muita das vezes esquecemos de chamar a atenção dos alunos : "*uma equação que foi escrita na variável "x" do 1º grau admitindo duas raízes, os coeficientes ....*"

PROBLEMA 17 (aí você está querendo me derrubar!!)

Determine o inteiro mais próximo da raiz da equação $(2x-3)(4x-3)(x+1)(4x+1)=9.$

Do livro "*Problemas Selecionados de Matemática" [15].*

Sugestão : tente montar uma equação do 2º grau .

PROBLEMA 18 (só sabia fazer por produtos notáveis!)

Sejam x_1 *e* x_2 *as raízes da equação* $ax^2+bx+c=0$ *e seja* $S_n = x_1^{\,n}+x_2^{\,n}$. *Prove que* $aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0$ *.Utilize esta igualdade para calcular* S_2 , S_{-2} , S_3 , S_{-3} , S_{-1} .

Esta questão encontra-se no livro descrito no capítulo 3 ítem (3.6) e denominada de " Fórmula de Newton" para a equação do 2° grau .

Nos comentários da solução é feita uma menção à recorrências .

PROBLEMA 19 (Eu não sei esta tal de Diofantina !)

Quantas soluções inteiras e positivas possui a equação 2x + 3y = 763 ?

Apesar de ser uma "equação diofantina", propomos que seja resolvida para o aluno sem esta teoria.

Sugestão : tire "x" como função de "y"

PROBLEMA 20 (rapaz, eu pensei substituir valores !)

Prove que $\sqrt{4n+2}$ *não é inteiro para todo natural n .*

Sugestão : Pense no que ocorre com um quadrado perfeito quando o dividimos por 4.

PROBLEMA 21 (por geometria ? deve ter um traçado mágico!)

Seja ABC um triângulo isósceles de base BC . Seja P um ponto sobre o lado AC tal que BP passe pelo circuncentro do triângulo . Sabendo BC=AP , determine os ângulos do triângulo .

Proposta na Magazine Function [6] com um bom grau de dificuldade .

Sugestão da revista : use trigonometria (na solução usamos apenas argumentos geométricos).Tente, vale a pena pensar !

PROBLEMA 22 (é muita imaginação!)

Uma escada possui 10 degraus . Uma pessoa sobe até o último degrau na seguinte condição :subindo um ou dois degraus . De quantas maneiras esta pessoa pode chegar ao último degrau ?

Interessante pensar nesta questão sem utilizar argumentos combinatórios.

Sugestão : faça para uma quantidade menor de degraus e verifique o que está ocorrendo...

PROBLEMA 23 (instigante hein !)

O número 3 pode ser expresso como a soma de um ou mais naturais de 4 maneiras, contando com as ordens :

$$3,\ 1 + 2,\ 2 + 1,\ 1+1+1.$$

De quantas maneiras podemos expressar o natural " n" ?

Do livro " Mathematical Morsels " [7] .

Sugestão : Faça uma fila de "n" " uns" e pense nos espaços existentes. Tente argumentar sem combinatória, isto será interessante para o aluno do 9° ano do fundamental.

PROBLEMA 24 (até dá pra pensar em alguma coisa!)

Seja n um inteiro positivo dado . Se x e y são inteiros positivos tais que xy = 137x + 137y, calcule o menor e o maior valor possível de x .

Modificada do livro Do livro "*Problemas Selecionados de Matemática" [15].*

PROBLEMA 25 (deve ser desigualdade triangular, eu acho!)

Em um quadrilátero ABCD convexo , mostre que $MN \leq \dfrac{AB+CD}{2}$ *; onde M e N são os pontos médios BC e AD , respectivamente .*

Questão proposta e utilizada como um teorema para resolver uma questão da 13° OBM. Este teorema se encontra no livro do capítulo 3 ítem (3.3).

PROBLEMA 26 (vou sair no braço!)

Sejam ABCD um quadrado , E médio de CD e M interior ao quadrado . Sabendo que $\angle MAB = \angle MBC = \angle EMB = x$ *, determine* x *.*

De uma Olimpíada Americana.

Sugestão : *use a propriedade de que a mediana relativa à hipotenusa no triângulo retângulo, é a metade da hipotenusa .*

PROBLEMA 27 (esta de alguma forma sai!)

Considere a equação $2007x^2 - 4012x + 2005 = 0$ *e sejam a e b suas raízes . Determine valor de a-b em módulo.*

Questão que já foi alvo do concurso de acesso ao Colégio Naval .

Sugestão : observe os coeficientes; o objetivo é não utilizar a fórmula resolvente da equação.

PROBLEMA 28 (nossa! O que é isto meu camarada ?)

Seja S o conjunto solução , no campo dos reais , da equação

$$\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x}+\frac{x\sqrt[3]{x^4+2x^2+1}}{x^2+1}=\frac{1+\sqrt{2}}{3} \quad .$$

Determine o número de elementos de S.

Aparentemente uma equação difícil. Idealizada para utilizarmos o problema 8.

PROBLEMA 29 (esta acho que também sai !)

Se $(x^2+x+4)^2+8x(x^2+x+4)+15x^2=0$ *,determine o número de valores reais de x desta equação .*

Do livro "*Problemas Selecionados de Matemática" [15].*

PROBLEMA 30 (prá que esta complicação!)

Se a, b,c formam um triângulo, prove que ,para todo n=2,3,4,..., $\sqrt[n]{a}$ *,* $\sqrt[n]{b}$ *,* $\sqrt[n]{c}$ *também formam um triângulo.*

Do livro " Mathematical Morsels" ,pag 52 ," On the Lengths of sides of a triangle", [7].

PROBLEMA 31 (sei lá o que eu vou fazer!)

Para " n" natural maior do que 1, prove que

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n^2}>1 \ .$$

Do livro " Mathematical Morsels" ,pag 155 ," an inequality of reciprocals", [7].

PROBLEMA 32 (isto tá me cheirando médias!)

Sejam $b_1, b_2, ..., b_n$ qualquer permutação dos números reais positivos $a_1, a_2, ..., a_n$. Prove que

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+...+\frac{a_n}{b_n}\geq n.$$

Do livro " Mathematical Morsels" ,pag 83 ," fractions by permutation", [7].

PROBLEMA 33 (esses caras ficam inventando!)

Quatro pontos P,Q,R,S pertencem a um círculo de tal forma que o ângulo PSR é reto. Sejam H e K as projeções de Q nos segmentos PR e OS, respectivamente. Prove que a reta HK divide o segmento QS ao meio.

Da revista Eureka! 35 – problema proposto número 153.

PROBLEMA 34 (por onde eu começo ?)

Sejam a,b,c números reais positivos tais que a+b+c=1. Prove que

$$\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ac}{b+ac}+\frac{c-ab}{c+ab}\leq\frac{3}{2} \ .$$

Da revista Eureka! 35 – problema proposto número 154.

PROBLEMA 35 (acho que vou usar a calculadora!)

Sem o uso de uma calculadora , qual dos números $\sqrt{3}^{\,7}$ *e* $7^{\sqrt{3}}$ *é o maior ?*

Uma questão que pode ser proposta para os alunos que estudam logaritmos, mas que sugerimos que utilize o fato de que 48 < 49 e somente propriedades de potenciação.

PROBLEMA 36 (essas desigualdades me deixa pasmo!)

Se a,b,c,d são números reais positivos tais que a soma seja igual a 1, prove que

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\sqrt{4d+1}<6\,.$$

Do livro " More Mathematical Morsels"[8]. (Problems from the Leningrad High School Olympiad,1980).

PROBLEMA 37 (vou traçar paralelas ao lados do quadrado a partir de P!)

P é um ponto interior ao quadrado ABCD tal que PA=1, PB=2 e PC=3. Determine $\angle APB$.

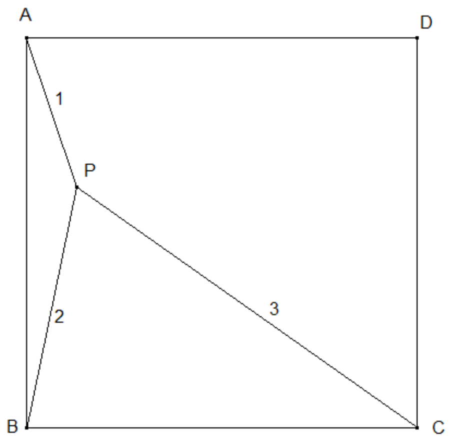


Figura 1: (Ponto interno no quadrado)

Do livro " More Mathematical Morsels"[8]. (Problem M796 from Kvant(p.269)

PROBLEMA 38 (esta não dá pra mim!)

Prove que a raiz positiva de

$$x(x+1)(x+2)...(x+2013)=1$$

é menor do que $\dfrac{1}{2013!}$ *, onde 2013! = 1.2.3.....2013.*

Do livro "More Mathematical Morsels"[8]. (Leningrad High School Olympiad,1981)

PROBLEMA 39 (hum! 121 = 11x11 !)

Seja "n" um inteiro. Existe algum "n" tal que $n^2+2n+12$ *divide 121 ?*

Do livro “ The Canadian Mathematical Olympiad-problem 6-1971)

PROBLEMA 40 (rapaz , você tem imaginação!)

Qual o maior inteiro positivo “n” tal que $n+10$ *divide* $n^3 + 100$ *?* .

Do livro “ More Mathematical Morsels”[5]. (Problem from the american Invitational Mathematics Exam, 1986)

PROBLEMA 41 (a primeira eu faço é no braço mesmo, mas a segunda , não sei não!)

Uma solução para “divisão de polinômios” que facilita em algumas situações para ser abordada em sala de aula que causa “ surpresa” :

a*) Determine o resto da divisão de P(x) =* $x^3 + 5x + 1$ *por D(x) =* $x^2 + 3x + 1$

b) Determine o resto da divisão de P(x) = $x^{2013} + 5x^{247} + 6x + 1$ *por D(x) =* $x^8 + 1$.

PROBLEMA 42 (saindo no braço,acho que dá!)

Uma desigualdade instigante : Sejam a,b,c,d números reais . prove que

$$1+ab\;{}^{2} + \;1+cd\;{}^{2} + \;ac\;{}^{2} + \;bd\;{}^{2} \geq 1.$$

Do livro “ Leningrad Mathematical Olympiads” (The Fifty-Third Olympiad-1987)

PROBLEMA 43 (caramba!)

Qual o valor máximo possível da área de um quadrilátero que tem os lados iguais a 1,4,7 e 8?

Do livro “ Leningrad Mathematical Olympiads” (The Fifty-fifth Olympiad-1987).

PROBLEMA 44 (isto me assusta!)

Existe algum natural “n” tal que $n^n + (n+1)^n$ *seja divisível por 4027 ?*

Modificado do livro “ Leningrad Mathematical Olympiads” (The Fifty-Third Olympiad-1987).

PROBLEMA 45 (eu vou desenvolver tudo e....!)

Sejam a,b,c,d números reais positivos. Prove que

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq\frac{64}{a+b+c+d} \ .$$

Do livro " Leningrad Mathematical Olympiads" (The Fifty-fourth Olympiad-1988).

PROBLEMA 46 (isto é loucura , vou é particularizar!)

Escreva 2013 como soma de (um número arbitrário de) parcelas de modo que o produto das parcelas seja o maior possível.

Adaptado da revista Eureka! – número 1-1998.

PROBLEMA 47 (o meu camarada! Por que você faz isto comigo!)

Represente o número 989.1001.1007+320 como um produto de primos.

Do livro " Leningrad Mathematical Olympiads" (The Fifty-Third Olympiad-1987).

PROBLEMA 48 (vou sair no braço também e vejo o que dá no final!)

Um quadrilátero tem cada um dos seus vértices sobre os lados de um quadrado de lado 1.Tomando a,b,c, d como sendo os lados deste quadrilátero , prove que

$$2\leq a^2+b^2+c^2+d^2\leq 4 \ .$$

Do livro " The Canadian Mathematical Olympiad-problem 5-1970).

PROBLEMA 49 (sem dizer a quantidade de dígitos !)

Prove que não existe um inteiro tal que a retirada do primeiro dígito produz um resultado que é $\frac{1}{35}$ *do inteiro original.*

.

Do livro “ The Canadian Mathematical Olympiad-problem 4b-1971)

PROBLEMA 50 (este é o mesmo que ganhar na MegaSena!)

Um problema difícil e um resultado interessante : determine o valor de

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{\ldots}}}}}\ .$$

Do livro “ Problemas selecionados de Matemática” [10] .

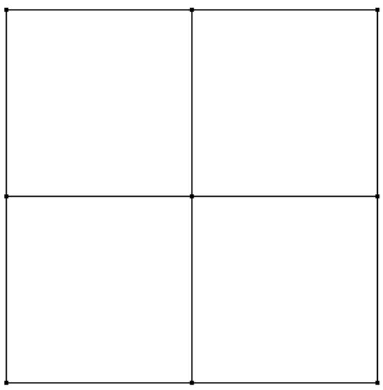
CAPÍTULO 2 : SOLUÇÕES DOS PROBLEMAS

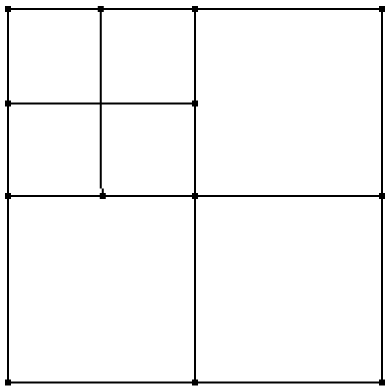
Neste capítulo solucionaremos os problemas utilizando apenas o conhecimento de teorias curriculares do ensino fundamental. Faremos as construções de idéias e raciocínios, onde neles contém desenvolvimentos de conteúdos programáticos na disciplina de Matemática Básica com um formalismo diferente dos livros textos utilizados nas escolas públicas.

Solução do Problema 1

É possível dividir uma quadrado em 1993 outros quadradinhos ?esses quadradinhos não são necessariamente congruentes.

Uma das soluções dada é observar que dado um quadrado podemos dividi-lo em quatro quadradinhos menores (Fig. 2) e depois um dos quadradinhos dividi-lo novamente em quatro outros quadradinhos (Fig. 3) e repetir o procedimento.





Figuras 2 e :3 *(divisão do quadrado em 4 e 7 quadradinhos)*

Observe que de um quadrado obtivemos a sequência de quantidade de quadrados : 1 ,4 ,7,.... Temos só que verificar se 1993 está nesta seqüência e caso esteja, o procedimento da divisão será o descrito acima. Podemos verificar que realmente 1993 está nesta seqüência. Tente !

Logo a resposta é Sim .

COMENTÁRIOS :

(I) A construção que está descrita acima, provavelmente, fará o aluno a questionar se há outra uma construção. O leitor fica convidado a pensar se há uma outra montagem que nos leve à solução.

(II) Dentro do exposto podemos observar que rascunhar ideias e situações simplificadas pelo que foi pedido torna-se importante para uma melhor visualização.

(III) Após a montagem da figura, questionar como o aluno conseguiria mostrar que 1993 está na seqüência sem utilizar a teoria de P.A, é interessante. Para o aluno que tenha o conhecimento de PA, utilizar a expressão do termo geral da PA é um fator motivador da aplicação desta expressão. Neste momento levar o aluno a verificar que na montagem da figura, a cada quadradinho dividido acrescentamos três outros quadradinhos na quantidade anterior e que é a razão da P.A .

(IV) Olhando para o enunciado, podemos imaginar a possibilidade de dividir o quadrado em outra quantidade diferente de 1993. Pense nisto!

(V) Note que esta questão pode ser um bom exemplo de aplicação da expressão do termo geral da PA , ou seja ,

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$

em que

$$1993=1+(n-1).3$$

donde teremos

$$n=665.$$

Como n é um inteiro, chegamos à conclusão que 1993 está na sequência encontrada.

Solução do Problema 2

É possível dividir uma quadrado em "n" outros quadradinhos ? esses quadradinhos não são necessariamente congruentes.

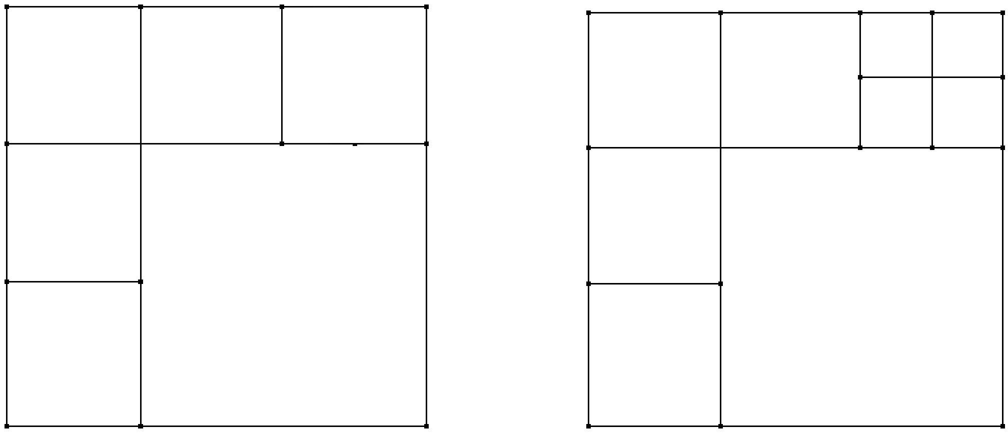
O problema surgiu diante de uma discussão entre professores e cuja solução abaixo é fruto de várias ideias.

Observe as divisões a seguir :

a) Dividindo o quadrado em 4 e 7 quadradinhos: vide Figs. 2 e 3.

Observe que a cada quadradinho são acrescidos 3 quadradinhos e temos a sequência; 4,7,10,... , que é a solução do problema anterior.

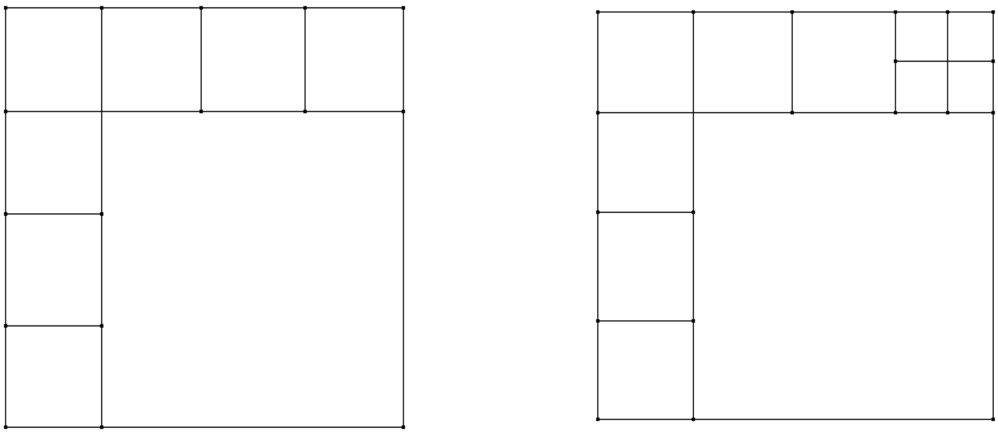
b) Dividindo o quadrado em 6 e 9 quadradinhos



Figuras 4 e 5 *(divisão do quadrado em 6 e 9 quadradinhos)*

E utilizando o procedimento anterior teremos a seqüência : 6,9, 12,...

c) Dividindo o quadrado em 8 e 11 quadradinhos



Figuras 6 e 7 *(divisão do quadrado em 8 e 11 quadradinhos)*

Observe que teremos a seqüência : 8,11,14,...

Vamos agora escrever separadamente as sequências obtidas :

1ª seqüência : 4,7, 10, 13, 16, ... (do problema 1)

2ª seqüência: 6,9,12,15,...

3ª sequência; 8,11,14,17,...

Unindo as três sequências obtidas obtemos 4,6,7,8,9,10,11,... que é a seqüência dos números naturais a partir do quatro , com exceção do 5 .

CONCLUSÃO :

Pela sequência final obtida verificamos a possibilidade em dividir um quadrado em qualquer quantidade de outros quadradinhos, não constando a divisão em 5 outros quadradinhos.

COMENTÁRIOS **:**

(I) Utilizando os comentários do problema 1 podemos entender o porquê das construções .

(II) Fazer com que o aluno pense o motivo pelo qual um quadrado não possa ser dividido em cinco outros quadradinhos é realmente um grande desafio. Deixamos ao leitor tal desafio, o qual não temos uma resposta afirmativa ou negativa contundente, entretanto, acreditamos que seja impossível obter tal divisão.

Solução do Problema 3

Prove que a soma

$$S = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

não é um valor inteiro .

Observe que na seqüência 1,2,3,4,...,n ; existe um único inteiro positivo k com $2^k \le n < 2^{k+1}$. Caso tivéssemos na decomposição dos números 2,3,4,...,n em fatores primos algum número com o expoente de 2 superior a k , não poderia ocorrer $2^k \le n < 2^{k+1}$.

Tomando o mmc dos números 1,2,3,4,...,n , encontraremos uma fração cujo numerador é um número ímpar (tente mostrar) e o denominador um número da forma $2^k.I$ que é par; o que torna o resultado um racional não inteiro.

COMENTÁRIOS:

(I) Observe que o desenvolvimento pode não ser visível de imediato para um aluno inexperiente em Olimpíadas, portanto é interessante pedir ao aluno que faça algumas contas para n pequeno e enfatizar o termo 2^k e, com isto perceber o que está ocorrendo quando se coloca sob um mesmo denominador. Verificar que o numerador final é um ímpar pode não ser tão imediato.

(II) A Prop 1 gera uma certa surpresa até para alunos acostumados em enfrentar determinados concursos militares e, mais surpresos ainda ficam os que estão se preparando para as Universidades em geral.

(III) A prova da Prop 1 é obtida pela decomposição em fatores primos , pois teremos $n = 2^{k_1}3^{k_2}5^{k_3}....$ que obviamente é um número da forma $2^k.I$, onde I é um ímpar.

(IV) Um fato que deve ser comentado é que a Prop 1 não é o determinante na solução e sim um endosso curioso que podemos retirar do problema.

Solução do Problema 4

Considere um paralelepípedo retângulo de lados variáveis e reais tais que o perímetro é constante igual a P . Determine o volume máximo deste paralelepípedo e suas dimensões .

Fatoração **:**

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

com a,b,c números reais.

Podemos escrever a fatoração acima da seguinte forma:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2) \ .$$

Vamos agora considerar a,b,c números reais positivos .

Pela Prop 2 temos que

$$a-b^{\ 2} + \ b-c^{\ 2} + \ a-c^{\ 2} \geq 0,$$

ou seja,

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$$

Observe que a igualdade ocorre quando tivermos a=b=c e tomando a^3=x, b^3=y e c^3=z , podemos escrever

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$$

e concluir a seguinte propriedade :

PROPRIEDADE 3: *A média aritmética de números reais positivos é maior do que ou igual à média geométrica e, apesar de aparecer somente para três números reais positivos , prova-se que a desigualdade é válida para uma quantidade qualquer de números reais positivos (vide [3]).*

Sejam x , y e z as dimensões do paralelepípedo retângulo . Pelo enunciado temos : $4(x+y+z)=P$ e o volume $V = xyz$ .Usando Prop. 3 teremos

$$\frac{P}{12} \geq \sqrt[3]{V}$$

e consequentemente

$$V \leq \frac{P^3}{12^3}\ .$$

Observe que o volume máximo é

$$\frac{P^3}{12^3}$$

e cada dimensão nessas condições é dada por

$$x = y = z = \frac{P}{12}\,,$$

onde evidentemente temos um cubo.

COMENTÁRIOS:

(I) Inicialmente é importante provar Prop 2 .

(II) Importante também provar a fatoração indicada, fatoração esta que em geral não aparece em livros textos do ensino fundamental ou médio .

(III) Talvez um aluno de 9º ano ou até mesmo do ensino médio, não tenha a facilidade de avaliar que a Prop 2 e a fatoração sejam o caminho para a solução dada acima. Nos livros ou artigos de desigualdades indicados no capítulo 3 há uma quantidade expressiva de problemas que utilizam esta propriedade.

(IV) É bem provável que o docente que não tenha a vivência em preparo para alunos de Olimpíadas de Matemática, pense logo em usar o cálculo diferencial integral. Note que mesmo assim temos um problema de cálculo a mais de uma variável, fato este que nem sempre é lembrado pelo professor que não atua em aulas de cálculo.

Solução do Problema 5

Suponha que tenhamos a,b,c números reais não nulos , tais que $a+b+c=0$. *Determine o valor da expressão* $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}$.

Uma questão proposta em função do problema 4.

Observe que de acordo com a fatoração do problema 4:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

e já que

$$a+b+c = 0$$

teremos

$$a^3+b^3+c^3=3abc$$

e dividindo a expressão por abc (abc $\neq$ 0) :

$$\frac{a^3}{abc}+\frac{a^3}{abc}+\frac{a^3}{abc}=3$$

ou

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}=3\ .$$

COMENTÁRIOS:

(I) Observe que os passos utilizados na solução se tornam eficazes com o conhecimento da fatoração.

(II) É interessante também notar que um aluno poderia desenvolver as somas das frações como a seguir :

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$$

e que através da fatoração

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc)$$

e já que $a+b+c=0$ encontraremos o valor 3 como resposta.

(III) É também muito importante chamar a atenção do aluno com relação ao fato do enunciado ter colocado a,b,c reais não nulos , pois esses valores surgem nos denominadores .

Solução do Problema 6

Qual a quantidade mínima "k" de pessoas presentes numa reunião, para que possamos garantir que "n" pessoas nasceram no mesmo dia da semana ?

Uma questão que tem como objetivo chamar a atenção de um "*princípio*" presente em várias situações.

Neste problema é interessante começar com pequenos valores para "n" e verificar alguma recorrência:

a) n=2

segunda	Terça	quarta	quinta	sexta	sábado	domingo
X	X	X	X	X	X	X
X						

Tabela 1 *(quantidade mínima para n = 2)*

Como temos 7 dias na semana e montando o quadro acima , temos k=8

b) n=3

segunda	terça	quarta	quinta	sexta	sábado	domingo
X	X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X	X
X						

Tabela 2 *(quantidade mínima para n = 3)*

Usando o mesmo argumento do caso (a), observe que temos k = 15.

Observando o que ocorre nos dois casos particulares temos

k = 7(n-1)+1 .

COMENTÁRIOS :

(I) É interessante deixar que o aluno pense nas situações (a) e (b), e logo depois conclua a expressão acima e caso ele tenha dificuldade em concluir, ajudá-lo na construção da expressão.

(II) Podemos neste momento comentar que na verdade se trata de um problema envolvendo o Princípio das Casas dos Pombos que denominaremos aqui de PCP .Enunciar o princípio talvez seja instigante para o aluno.

(III) O grande desafio no PCP é como utilizá-lo em problemas que fazem partes dos livros do Capítulo 3.

Solução do Problema 7

Seja ABC um triângulo tal que AB=AC e que $\angle BAC = 20^0$ *como na figura. Determine* $\angle CPQ$.

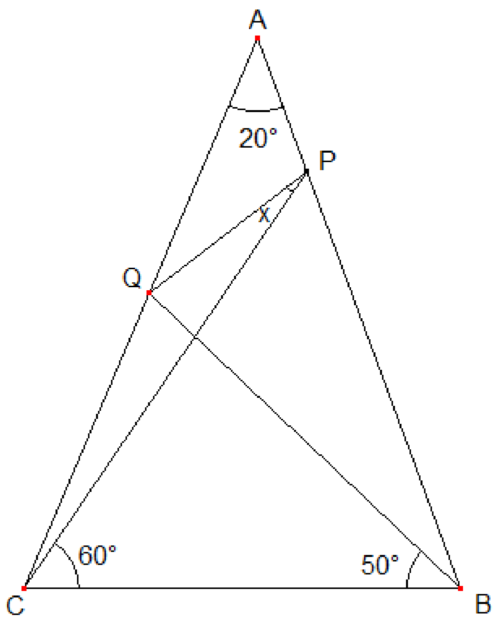


Figura 8 *(um antigo problema que nos deixa perplexos)*

Este problema possui um detalhe interessante em relação à Lei angular de Tales; não se consegue o valor do ângulo trabalhando apenas com esta lei nos triângulos que aparecem no interior de ABC.

Traçando CR como indicado na figura 10 e utilizando a Lei angular de Tales(a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180°), teremos as seguintes conclusões :

BC=CQ(triânguloBCQ é isósceles) (1)

CR=BC(triângulo BCR é isósceles) (2)

CR= PR (triângulo CRP é isósceles) (3)

De (1) e (2) podemos concluir que

CR= CQ (4)

e consequentemente o triângulo CQR é isósceles.

Como no triângulo CQR o ângulo interno de vértice C é de 60° , concluímos que o triângulo CQR é na verdade equilátero(todo triângulo isósceles que possui o ângulo interno de lados congruentes igual a 60° é equilátero), donde podemos concluir que

CR=CQ=QR (5).

De (3) e (5) conluímos que QR=PR, logo o triângulo QRP é isósceles .Como neste triângulo o ângulo interno de vértice R é igual a 40° e que os ângulos internos de vértices Q e P são iguais , teremos :

40+40+x+40+x =180 e donde x = 30°.

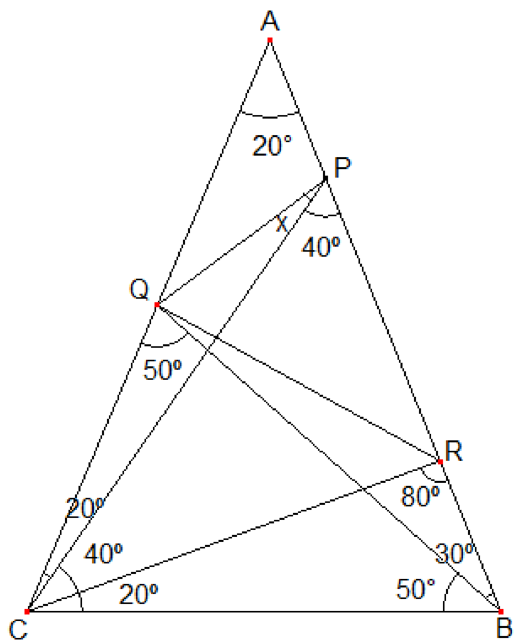


Figura 9 *(que genialidade!)*

COMENTÁRIOS :

(I) Podemos ver que dificilmente um aluno que não conheça a solução pensaria da forma que foi desenvolvida.

(II) É interessante que no momento que se traça o segmento CR como na figura 2 , deixar o aluno tirar as conclusões e acompanhá-lo até chegar o valor do ângulo pedido.

(III) É um problema muito difundido para os participantes de Olimpíadas e várias soluções já surgiram para a questão, inclusive trigonométrica (para alunos com alguns conhecimentos nesta disciplina), vide Apêndice E.

(IV) Os problemas de triângulos que envolvem segmentos e cálculo de ângulos inteiros como o valor encontrado de “x” são denominados de ângulos adventícios (vide Apêndice D).

Solução do Problema 8

$$\textit{Prove que } x+\frac{1}{x}\geq 2 \quad \text{ou} \quad x+\frac{1}{x}\leq -2\,, x\neq 0 \textit{ e real}$$

Utilizaremos esse problema como uma propriedade, pois a utilizaremos em outros deste capítulo.

PROPRIEDADE 4 :

$$x+\frac{1}{x}\geq 2 \quad ou \quad x+\frac{1}{x}\leq -2\,, x\neq 0$$

Prova :

$$\text{Seja m=} \ x+\frac{1}{x} \ \rightarrow \ x^2-mx+1=0$$

Como x é um real, devemos ter o $\Delta \geq 0$, ou seja $m^2-4\geq 0$ .Resolvendo a inequação em “m” temos m ≤ -2 ou m ≥ 2 , que traduz a propriedade (4) .

COMENTÁRIOS :

(I) Esta propriedade pode ser escrita da seguinte forma :

PROPRIEDADE 4': *Um número real (não nulo) somado com o seu inverso , é maior do que 2 ou igual a 2 ; ou menor do que " -2" ou igual a "-2" .*

(II) Interessante mostrar que as igualdades ocorrem para x =1 quando x é positivo e x = -1 quando x é negativo .

(III) Observe que para x positivo , podemos utilizar a desigualdade das médias para os dois reais x e $\frac{1}{x}$ (Prop. 3).

$$\frac{x+\frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x.\frac{1}{x}} \rightarrow x+\frac{1}{x} \geq 2 \ .$$

(IV) Interessante também mostrar que utilizando produtos notáveis e a Prop. 2 teremos, nas condições de (III) que

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2 \geq 0 \rightarrow \quad x+\frac{1}{x} \geq 2 \ .$$

Solução do Problema 9

Resolva nos reais a equação : $\sqrt[13]{x}+\frac{\sqrt[13]{x^{12}}}{x}=\sqrt[13]{7}$

Observe que a primeira parcela da soma é o inverso da segunda e, como $\sqrt[13]{7}$ é uma valor entre 1 e 2, podemos utilizar a Prop 4 para garantir que não há solução nos reais .

COMENTÁRIOS :

(I) A observação de que temos a soma com o seu inverso pode não ser óbvio , portanto chamar a atenção com relação a este fato talvez torna-se necessário.

(II) Após ter a visão do inverso é interessante mostrar a seguinte solução ;

Tomando $y=\sqrt[13]{x}$, teremos

$$y+\frac{1}{y}=\sqrt[13]{7}$$

e consequentemente

$$y^2-\sqrt[13]{7}y+1=0$$

não possui raízes reais.

(III) Interessante também justificar o fato de que $\sqrt[13]{7}$ é um valor entre 1 e 2.

Observe que

$$1<7<2^{13}$$

e consequentemente

$$1<\sqrt[13]{7}<2\ .$$

Solução do Problema 10

6 amigos encontraram numa expedição um tesouro em que havia N cristais iguais . Durante a noite um deles vai até o tesouro e faz a divisão dos N cristais por 6. Feita a divisão, ele percebe que sobra um cristal. Ele pega uma das partes que lhe cabe e joga fora o que sobrou. O procedimento é repetido por cada um dos outros quatro colegas, ou seja, cada um divide a quantidade que está no momento por 6 e sempre sobrando um cristal, pega a sua parte e joga fora o cristal que sobrou . No dia seguinte, o último repete o mesmo procedimento e ocorrendo sempre o mesmo fato dos anteriores .Determine o menor valor possível de N para que este processo seja possível .

Esse problema demonstra para o leitor uma originalidade extraordinária. Após encontrarmos o valor de N verificamos que não é um problema que possa ocorrer na vida real como descreveremos a seguir.

Pelo enunciado :

$$\begin{cases} N = 6q_1 + 1 \text{ } \textit{e quando o segundo chega para fazer a divisão} \\ \textit{encontra } 5q_1 \textit{ moedas, donde}: \\ 5q_1 = 6q_2 + 1 \\ 5q_2 = 6q_3 + 1 \\ 5q_3 = 6q_4 + 1 \\ 5q_4 = 6q_5 + 1 \\ 5q_5 = 6q_6 + 1 \end{cases}$$

Somando 5 em ambos os lados de cada igualdade teremos :

$$\begin{cases} N + 5 = 6(q_1 + 1) \\ 5(q_1 + 1) = 6(q_2 + 1) \\ 5(q_2 + 1) = 6(q_3 + 1) \\ 5(q_3 + 1) = 6(q_4 + 1) \\ 5(q_4 + 1) = 6(q_5 + 1) \\ 5(q_5 + 1) = 6(q_6 + 1) \end{cases}$$

Multiplicando todas as seis igualdades teremos :

$5^5(N + 5) = 6^6(q_6 + 1)$.

Observe que temos somente inteiros em ambos os lados da igualdade e

$$q_6 + 1 = \frac{5^5(N + 5)}{6^6}$$

ou seja,

$$N = 6^6.t - 5$$

com t sendo um inteiro positivo.

Concluímos que o menor valor de N é igual a ($6^6 - 1$) =46651.

COMENTÁRIOS :

(I) A tentativa inicial em substituir e relacionar as igualdades geralmente se torna um trabalho árduo que em geral se desiste no meio do caminho.

(II) Ter a visão de adicionar 5 unidades em ambos os lados das igualdades mostra uma "sacada"[1] extraordinária, ou seja, tal ideia mostra que a experiência em se resolver muitos de problemas é um fator relevante.

(III) Podemos neste problema comentar a definição de números primos entre si ou primos relativos, pois 5 e 6 são primos entre si, apesar de 6 não ser primo .

Solução do Problema 11

Resolva nos reais a equação : $x^4 = 4x + 1$.

É também é uma questão do livro [6] e de imediato o leitor poderá perder muito tempo em tentar buscar alguma propriedade que leve à solução.

Note que podemos escrever a equação da seguinte forma :

$$\left(x^2+1\right)^2 = 2(x+1)^2 \text{ e consequentemente } x^2+1 = \pm\sqrt{2}(x+1).$$

Resolvendo as duas últimas igualdades, encontraremos apenas uma equação do 2º com raízes reais.Teremos apenas dois valores reais para o conjunto solução.

COMENTÁRIOS :

(I) É interessante observar que um aluno que nunca resolveu uma equação desse tipo, certamente terá dificuldade em completar os quadrados.

(II) Induzir o aluno a tentar completar quadrados em ambos os lados da equação, pode fazer com que ele chegue na solução acima.

(III) Um aluno que tenha conhecimento de equações polinomiais poderia tentar conseguir soluções particulares, fato este que fatalmente o levaria a desistir, já que as soluções não são racionais

(IV) Após o aluno perceber o que ocorreu na solução, desafiar o aluno a construir outros tipos de equações que nos leve a soluções semelhantes pode ser um fator bastante agradável para o mesmo.

(V) Talvez seja interessante para um aluno que conheça algumas construções gráficas indicar a quantidade de soluções encontradas como a intersecção dos gráficos das funções g(x) = x^4 e f(x) = 4x+1 (veja a seguir).

[1] "sacada" é a expressão utilizada pelos alunos do PROFMAT da minha turma para dizer que alguém teve uma ideia brilhante com relação a um problema

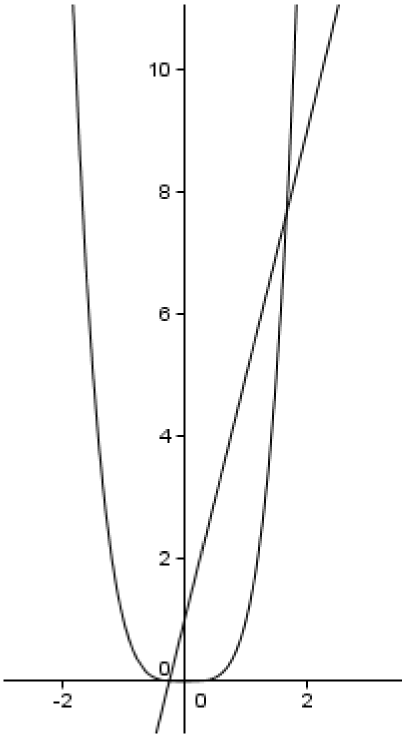


Figura 10 *(verificando se há solução)*

Solução do Problema 12

Determine x+y onde x e y são números reais tais que:

$$4x^2+9y^2-4x+12y+5=0\,.$$

É uma questão para justamente chamar atenção com relação aos quadrados que aparecem no início da equação .A dificuldade inicial é que temos duas variáveis.

Observe que podemos escrever a equação da seguinte forma :

$$2x-1\ ^{2}+\ 3y-2\ ^{2}=0$$

Utilizando P2 verificamos que devemos ter obrigatoriamente :

2x-1=0 e 3y-2=0 , ou seja

$$x=\frac{1}{2}\quad \text{ou} \quad y=\frac{2}{3}$$

$$x+y=\frac{7}{6}\ .$$

COMENTÁRIOS :

(I) Apesar de usar uma propriedade simples, a igualdade com duas variáveis pode parecer um exercício difícil para alguns.

(II) Para alunos que conhecem o estudo de cônicas provavelmente teriam a ideia de completar os quadrados.

(III) Chamar atenção para o fato de que a soma dos quadrados de dois números reais só é zero quando ambos são nulos.

Solução do Problema 13

Sabendo que $(x-a)(x-10) = (x+b)(x+c)-1$, para todo x real, onde a, b e c são números inteiros. Encontre a soma dos valores de a.

É um problema de uma Olimpíada Russa [16] ,que dependendo do caminho a ser seguido, a solução poderá ser não muito trivial.

Como temos uma identidade , já que a igualdade ocorre para todo x real , podemos em ambos os lados da igualdade colocar $x = -b$ e consequentemente :

$$(b+a)(b+10) = -1.$$

E como a, b e c são inteiros ,devemos ter :

1ª hipótese : $b+a = 1$ e $b+10 = -1$, ou seja $b= -11$ e $a =12$.

2ª hipótese : $b+a = -1$ e $b+10 = 1$, ou seja $b= -9$ e $a = 8$.

Soma = 18.

COMENTÁRIOS :

(I) Observe que se substituíssemos $x = c$ encontraríamos as mesmas soluções. Tente explicar este argumento.

(II) É Interessante pedir ao aluno para pensar na identidade de dois polinômios para encontrar os valores de a.

Solução do Problema 14

Determine a diferença entre a maior e a menor raiz real da equação

$$x^2+\frac{9x^2}{(x+3)^2}=27 \quad .$$

Esta questão foi de uma Olimpíada Americana e em geral traduz uma grande dificuldade para muitos que tentaram solucioná-la.

Observe o desenvolvimento a seguir :

$$\left(x-\frac{3x}{x+3}\right)^2=x^2-\frac{6x^2}{x+3}+\frac{9x^2}{(x+3)^2}\,. \tag{6}$$

Desenvolvendo o lado esquerdo da igualdade acima , teremos :

$$\left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2=x^2-\frac{6x^2}{x+3}+\frac{9x^2}{(x+3)^2} \tag{7}$$

e observando que $x^2+\dfrac{9x^2}{(x+3)^2}=27$ e fazendo $y=\dfrac{x^2}{x+3}$

a equação (7) ficará da seguinte forma $y^2=-6y+27$ ou $y^2+6y-27=0$.

Teremos então y = -9 ou y = 3 e encontrando então os valores reais de x , a diferença pedida será igual a $3\sqrt{5}$.

COMENTÁRIOS :

(I) Observe que a solução apresentada , apesar de utilizar produtos notáveis , se faz de uma forma sofisticadíssima e portanto um aprendizado e tanto.

(II) Orientar o aluno a pensar no quadrado de uma diferença e tentar induzi-lo a chegar na solução acima , pode ser gratificante para ele.

Solução do Problema 15

Resolva nos reais : $\lfloor x\rfloor+\lfloor 2x\rfloor=15$*, onde* $\lfloor x\rfloor$ *representa o maior inteiro menor do que " x " ou igual a " x ".*

Podemos perceber que x =5 é solução da equação e como a variável x não é necessariamente inteira , por verificação temos que o intervalo [5, 11/2[é a solução da equação.

É claro que a ideia acima seria viável para uma prova de múltipla escolha na qual se ganha tempo. Uma forma geral de solucionar o problema é descrita a seguir.

Sejam $\lfloor x \rfloor = k$ e y tais que x = k + y , onde $0 \le y < 1$ e 2x = 2k + 2y .

Como $0 \le y < 1$ teremos $0 \le 2y < 2$.

Temos então duas hipóteses :

1ª hipótese : $0 \le 2y < 1$ ou $0 \le y < \frac{1}{2}$, logo k < x = k + y < k + 1 e 2k < 2x =2 k + 2y < 2k + 1, ou seja, $\lfloor x \rfloor = k$ e $\lfloor 2x \rfloor = k$.

A equação $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor = 15$ será escrita como 3k =15 ou k = 5.

Temos neste caso então a solução x = 5 + y com $0 \le y < \frac{1}{2}$.

2ª hipótese : $1 \le 2y < 2$ ou $\frac{1}{2} \le y < 1$, logo logo k + 1/2 < x = k + y < k + 1 e 2k + 1 < 2x =2 k + 2y < 2k + 2, ou seja, $\lfloor x \rfloor = k$ e $\lfloor 2x \rfloor = 2k+1$.

A equação $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor = 15$ será escrita como 3k + 1 =15 ou k = $\frac{14}{3}$, que não é inteiro.

Descartamos então esta segunda hipótese.

A resposta do problema é o intervalo $\left[5, \frac{11}{2}\right[$.

COMENTÁRIOS :

(I) Pedir ao aluno que tente experimentar valores pode ajudar para que ele tenha alguma intuição em presseguir a solução descrita.

(II) Observar que a dificuldade pode se estender se tivermos um termo do 2º grau. Tente exemplificar.

(III) Tente resolver a equação a seguir utilizando a mesma ideia : $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor = \lfloor 3x \rfloor$.

Solução do Problema 16

A igualdade na variável x : 2mx-x +5 = 3px-2m+p admite as raízes $\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}+\sqrt{3}$.
Determine o valor de m^2+p^2.

A equação originalmente dada na variável x é do 1º grau , ou seja teremos apenas uma raiz. Como o enunciado admite duas raízes e escrevendo a equação original na forma

$$(2m\text{-}3p\text{-}1)x = p\text{-}5\text{-}2m,$$

Devemos ter obrigatoriamente :

$$\begin{cases} 2m-3p-1=0 \\ e \\ p-2m-5=0 \end{cases}$$ e resolvendo o sistema encontramos m = - 4 e p = - 3.

Logo $m^2+p^2=25$.

COMENTÁRIO:
Nos livros textos básicos em geral não são apresentadas equações com este formato e o aluno fica perplexo com este tipo de equação.

Solução do Problema 17

Determine o inteiro mais próximo da maior raiz da equação $(2x-3)(4x-3)(x+1)(4x+1)=9$.

Multiplicando o 1º binômio com o terceiro encontraremos : $2x^2-x-3$ e multiplicando o 2° binômio com o quarto : $16x^2-8x-3$. Fazendo $y=2x^2-x$, a equação original ficará escrita da seguinte forma : $y-3 \quad 2y-3 \;=9$ em que teremos $2y^2-9y=0$, o que nos fornece $y=0$ ou $y=\frac{9}{2}$. Voltando para a variável x e resolvendo as equações do 2º grau teremos como resposta do problema o valor 2.

COMENTÁRIOS :

(I) pedir o aluno a desenvolver o produto é interessante para perceber a dificuldade final.

(II) Tentar uma outra multiplicação diferente da apresentada pode surgir uma ideia diferente, tente ....

Solução do Problema 18

Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $ax^2+bx+c=0$ e seja $S_n = x_1^{\,n} + x_2^{\,n}$ .Prove que $aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0$. Utilize esta igualdade para calcular S_2 , S_{-2} , S_3 , S_{-3} , S_{-1} .

Como x_1 e x_2 são raízes da equação $ax^2+bx+c=0$ teremos

$$ax_1^{\,2}+bx_1+c=0 \tag{8}$$

e

$$ax_2^{\,2}+bx_2+c=0\,. \tag{9}$$

Multiplicando (8) por x_1^{n-1} e (9) por x_2^{n-1} encontraremos

$$ax_1^{\,n}+bx_1^{n-1}+c=0 \tag{10}$$

e

$$ax_2^{\,n}+bx_2^{n-1}+c=0 \tag{11}$$

Somando (10) e (11) : $a(x_1^{\,n}+x_2^{\,n})+b(x_1^{\,n-1}+x_2^{\,n-1})+c=0$ ou

$$aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0. \tag{12}$$

Em (12) fazendo n =2 , teremos: $aS_2 + bS_1 + cS_0 = 0$ e sabendo que $S_1 = -\dfrac{b}{a}$ e $S_0 = 2$.

Encontramos $S_2 = \dfrac{b^2-2ac}{a^2} = S_1^2 - 2P$, tomando P = $\dfrac{c}{a}$.

Em (12) fazendo n=3, teremos $aS_3 + bS_2 + cS_1 = 0$ e conhecendo S_1 e S_2 , determinamos o valor de $S_3 = S_1(S_1^2 - 3P)$. Tente agora realizar as operações para encontrar as outras somas pedidas.

COMENTÁRIO :

Em geral esas somas são desenvolvidas por fatoração sem a recorrência apresentada. É interesante que faça com o aluno por produtos notáveis ou fatoração.

Solução do Problema 19

Quantas soluções inteiras e positivas possui a equação 2x + 3y = 763 ?

A equação pode ser escrita como $x = \frac{763-3y}{2}$ e já que x é um inteiro , devemos ter (763-3y) par , ou seja , 3y deve ser ímpar , donde y tem que ser um ímpar.

Observe que 763-3y> 0 ou y < $\frac{763}{3}$ e como y é ímpar, temos que y ∈ {1, 3, 5, ...,253}. Concluímos então que há 127 valores possíveis para y e consequentemente 127 pares (x,y) como soluções da equação.

COMENTÁRIO :

Dependendo dos coeficientes das variáveis , a solução acima pode ser inviável. Aqui está o bom momento para *"parar e estudar com os alunos as equações diofantinas"*. Com certeza será muito gratificante resolver este e outros problemas com essa teoria.

Solução do Problema 20

Prove que $\sqrt{4n+2}$ não é inteiro para todo natural n .

PROPRIEDADE 5: *" um quadrado de um inteiro é sempre da form 4k ou 4k+1" .*

Prova : Seja x=2t então $x^2 = 4t^2 = 4k$.

Seja x = 2t + 1 então $x^2 = 4t^2 + 4t + 1 = 4s + 1$.

Utilizando a Prop. 5, concluímos que 4n+2 nunca é um quadrado perfeito, daí $\sqrt{4n+2}$ não é um inteiro.

COMENTÁRIO :

Repare que você pode sugerir uma infinidade de radicandos com este formato e que não tenha raiz exata.

Solução do Problema 21

Seja ABC um triângulo em que AB=AC . Seja P um ponto sobre o lado AC tal que BP passe pelo circuncentro" O" do triângulo . Sabendo BC=AP , determine os ângulos do triângulo .

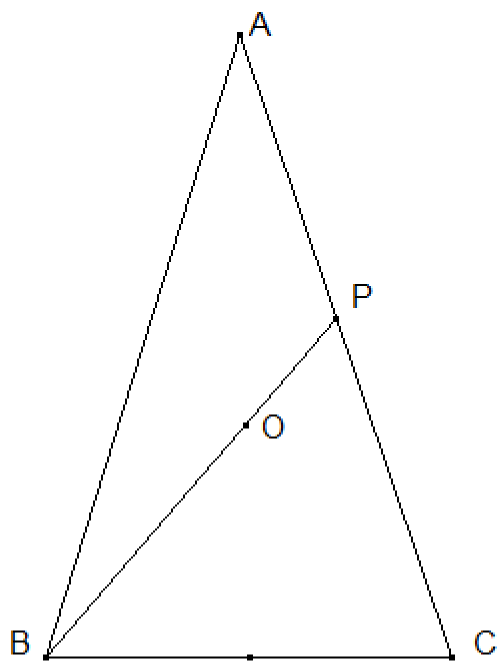


Figura 11 *(um circuncentro e tanto !)*

Como o triângulo é isósceles a altura traçada do vértice A passa pelo circuncentro O e pelo ponto médio M de BC.

Tracemos AM (figura 12) e seja $\theta = \angle BAO$, então $\theta = \angle PAO$ e $2\theta = \angle BOM$, já que AO=BO=OC.

Seja Q sobre OM tal que $\theta = \angle OBQ$. Observe agora que os triângulos AOP e BOQ são congruentes (caso ALA)(figura 13), ou seja BQ = AP. Teremos que o triângulo BQC será eqüilátero.

Note que o ângulo BQM = 3θ e consequentemente teremos 6θ = 60° , ou seja θ = 10°.

Logo $\angle BAC = 20°$ e $\angle ABC = \angle ACB = 80°$.

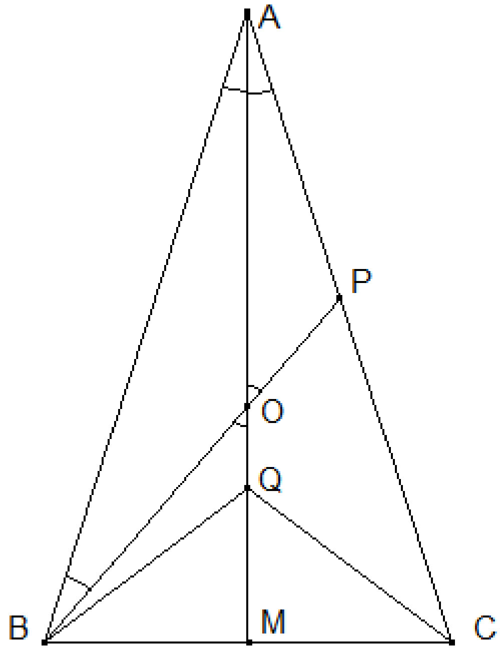


Figura 12 *(uma solução geométrica divina)*

COMENTÁRIO :

A incessante busca foi para uma solução geométrica . Tente por trigonometria é também muito gratificante ! (use a Lei dos Senos e transformações de soma em produto e viceversa)

Solução do Problema 22

Uma escada possui 10 degraus . Uma pessoa sobe até o último degrau com a seguinte condição: subindo um ou dois degraus . De quantas maneiras esta pessoa pode chegar ao último degrau ?

Pelas condições do enunciado, podemos imaginar duas situações :

Primeira: alcançando o nono degrau(que é o penúltimo), a pessoa conseguirá chegar ao décimo, subindo mais um degrau.

Segunda: alcançando o oitavo degrau(que é antepenúltimo), a pessoa conseguirá chegar ao décimo, subindo um ou dois degraus.

Agora conclua que :

1) "O número de maneiras de chegar ao décimo é o número de maneiras de chegar ao oitavo somado com o número de maneiras de chegar ao nono".
2) "O que está descrito em (1) usando o fato apenas do penúltimo e antepenúltimo , independe do número de degraus (é claro que devemos ter no mínimo um degrau).

Podemos então resolver o problema utilizando quantidade de degraus menores e tentando verificar algum detalhe nos resultados . Veja a seguir ;

Tomando "n" como sendo o número de degraus ,
para n=1, o número de maneiras é "1".
para n=2, o número de maneiras é igual a "2".
para n=3, utilizamos a conclusão (1), que nos dará 1+2=3
para n=4, utilizamos a conclusão (1), que nos dará 3+2=5 .

Observe que temos a seguinte seqüência de valores : 1,2,3,5,8,... , na qual estamos sempre somando o penúltimo com o antepenúltimo para conseguir o próximo e que cada um deles representa a quantidade de maneiras de chegar ao degrau "n". Isto não é interessante ?

Fazendo as contas até n=10 : 1,2,3,5,8,13,21,34,55,89, obtemos como resposta : 89.

COMENTÁRIO:
Também é um excelente momento para estudar com os alunos " *Recorrências".....*

Solução do Problema 23

O número 3 pode ser expresso como a soma de um ou mais naturais de 4 maneiras, contando com as ordens :

3, 1 + 2, 2 +1, 1+1+1.

De quantas maneiras podemos expressar o natural " n" ?

Considere uma fileira de "n" "uns" como abaixo:

$$11111111111\ldots1$$

Observe que entre os algarismos há " n-1" espaços e tomando , por exemplo, três desses teremos :

$$\underset{3}{111}\,\underset{4}{1111}\,\underset{2}{11}\,\underset{n-9}{11\ldots1}\ .$$

Podemos escrever n = 3 + 4 + 2 + n – 9 .

Agora nós temos que escolher ou não qualquer um dos espaços internos e colocar uma barra.

Concluímos então que há 2^{n-1} formas de escrever o natural " n" como no enunciado.

COMENTÁRIOS :

(I) Tentar argumentar com os alunos sem o uso de combinatória.

(II) Porque não estudar agora com os alunos o " *Princípio Multiplicativo"?* Com certeza eles vão adorar ! .

Solução do Problema 24

Seja n um inteiro positivo dado . Se x e y são inteiros positivos tais que

$$xy = 137x + 137y\,,$$

calcule o menor e o maior valor possível de x .

Resolvendo em y teremos :

$$y = \frac{137x}{x-137} \text{ com } x \neq 137.$$

e reescrevendo esta igualdade

$$y = \frac{137x - 137^2 + 137^2}{x-137} = 137 + \frac{137^2}{x-137}\ .$$

Observe que para que y seja um inteiro, (x-137) deve ser divisor de 137^2 , e como 137 é primo devemos ter :

$$x-137 = -1 \text{ ou } x-137 = 1 \text{ ou } x-137 = -137 \text{ ou } x-137 = 137$$
$$\text{ou } x-137 = -137^2 \text{ ou } x - 137 = 137^2.$$

Como x é um inteiro positivo, o menor valor é 136 e o maior valor é $137^2 + 137$.

COMENTÁRIOS:

(I) refaça o problema com soluções inteiras positivas ou negativas, é interessante também!

(II) peça ao aluno para refazer o problema com "n natural " no lugar de 137.

Solução do Problema 25

Em um quadrilátero ABCD convexo , mostre que $MN \leq \dfrac{AB+CD}{2}$ *; onde M e N são os pontos médios de BC e de AD , respectivamente .*

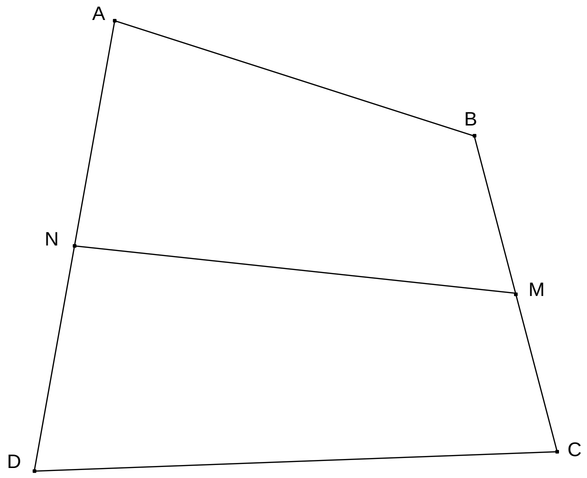


Figura 13 *(um quadrilátero que não se esquece)*

Tracemos as diagonais AC e BD. Seja Q o ponto médio de BD como na figura 2. Como NQ e MQ são bases médias no triângulos ABD e BCD , respectivamente , temos que

$NQ = \dfrac{AB}{2}$ com NQ paralelo a AB e $MQ = \dfrac{CD}{2}$ com MQ paralelo a CD.

Temos agora duas situações :

Primeira : AB e CD não são paralelos e como conseqüência (pela existência de triângulo) que MN< NQ + MQ ou $MN < \dfrac{AB+CD}{2}$.

Segunda : AB e CD são paralelos . Teremos M, Q e N alinhados e a igualdade MN = NQ + MQ ocorrerá .

Conclusão : $MN \leq \dfrac{AB+CD}{2}$

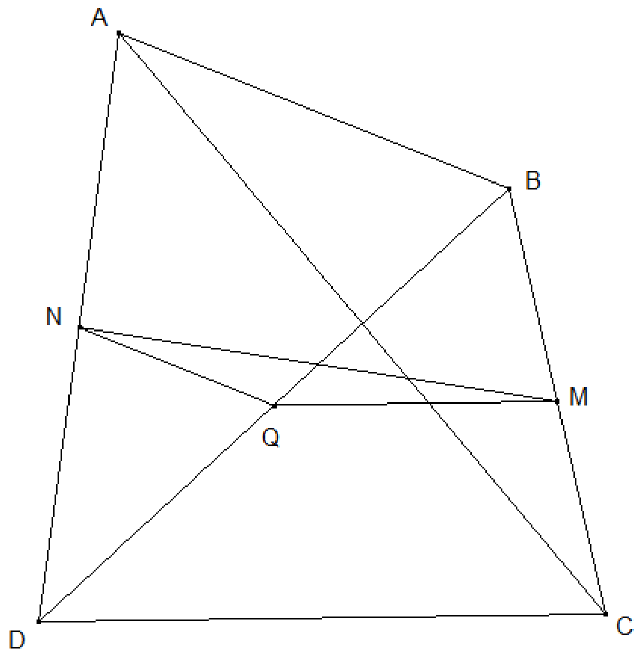


Figura 14 *(muito interessante!)*

COMENTÁRIO :

Peça ao aluno para demonstrar para os pontos médios dos outros dois lados. Isto lhe trará uma certa segurança neste tipo de problema.

Solução do Problema 26

Sejam ABCD um quadrado , E médio de CD e M interior ao quadrado . Sabendo que $\angle MAB = \angle MBC = \angle EMB = x$ *, determine x .*

Pelos dados do enunciado concluímos que o triângulo AMB é retângulo. Seja N o ponto médio de AB. Na Fig 15 trace MN e EN, e sabendo que num triângulo retângulo a mediana relativa à hipotenusa é a metade da hipotenusa,tem-se que AN=MN=NB.

Pela Fig. 16 temos que o triângulo EMN também é retângulo . Como EN = 2.MN , os ângulos agudos do triângulo EMN são 30° e 60°.

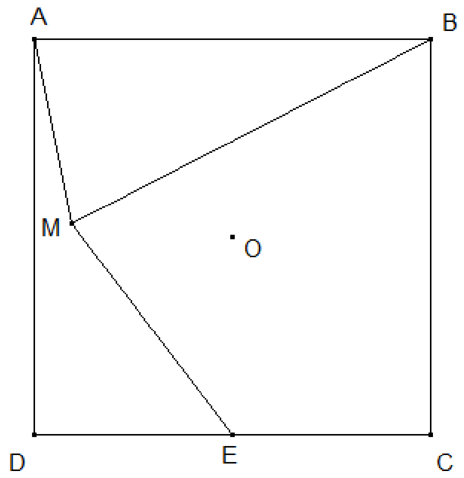


Figura 15 *(que ponto particular!)*

Como pela Fig 16 $\angle MNE = 2x - 90$ encontramos $2x - 90 = 60$, ou seja, $x = 75^0$.

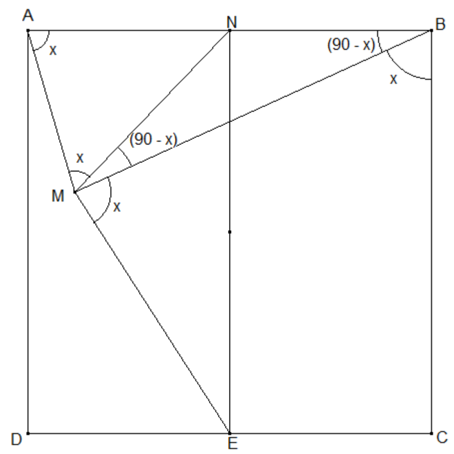


Figura 16 *(muita observação!)*

COMENTÁRIOS :

(I) demonstre para o aluno a relevância do triângulo retângulo de ângulos agudos iguais a 30° e 60°.

(II) Observamos como uma propriedade simples resolve brilhantemente a questão, não é verdade?

Solução do Problema 27

Considere a equação $2007x^2 - 4012x + 2005 = 0$ *e sejam a e b suas raízes . Determine o valor de a-b.*

Notando-se que a soma dos coeficientes da equação é zero , podemos utilizar a Prop. 4 e concluir que uma das raízes, por exemplo, a=1. Como o produto das raízes da equação $Ax^2 + Bx + C = 0$ é dada por $\frac{C}{A}$, concluímos que b = $\frac{2005}{2007}$ (verifique).

COMENTÁRIOS:

(I) Peça ao aluno para desenvolver pela fórmula resolvente e verifique a reação dele.

(II) Com esta questão podemos idealizar infinidade de outras questões neste mesmo estilo.

Solução do Problema 28

Seja S o conjunto solução , no campo dos reais , da equação

$$\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x} + \frac{x\sqrt[3]{x^4+2x^2+1}}{x^2+1} = \frac{1+\sqrt{2}}{3} \quad .$$

O número de elementos de S é

Observando a igualdade dada que na soma à esquerda, um dos termos é o inverso do outro. Note também que do lado direito temos um valor positivo e menor do que 2.

Utilizando a Prop 4 , temos que não solução há no campo dos reais.

Logo o número de elementos de S é zero .

COMENTÁRIO:

Reveja os comentários da questão 9.

Não é interessante, como uma propriedade simples resolve o problema ?

Solução do Problema 29

Se $(x^2+x+4)^2+8x(x^2+x+4)+15x^2=0$ *,determine o número de valores reais de x desta equação* .

Seja $y=x^2+x+4$, a equação ficará escrita como $y^2+8xy+15x^2=0$, uma equação do segundo grau em y cujas raízes são : 3x e 5x.

Consequentemente teremos as equações : $3x=x^2+x+4$ ou $5x=x^2+x+4$. Continue o desenvolvimento .....

COMENTÁRIO :

Acredito que neste momento, com tudo que foi desenvolvido antes, o aluno já estaria pensando como na resolução dada, não ?

Solução do Problema 30

Se a, b,c formam um triângulo, prove que ,para todo n=2,3,4,..., $\sqrt[n]{a}$ *,* $\sqrt[n]{b}$ *,* $\sqrt[n]{c}$ *também formam um triângulo.*

Se a, b, c formam um triângulo ,então a + b > c . Consequentemente

$$\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\;^{n} > \text{a+b} > \text{c=}\ \sqrt[n]{c}\;^{n}$$

ou seja, $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}>\sqrt[n]{c}$, o que queríamos provar.

COMENTÁRIO :

Verifique a desigualdade para n=2 e n=3 e isto facilitará a ideia final.

Solução do Problema 31

Para " n" natural maior do que 1, prove que

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n^2}>1 \ .$$

Observe que para n natural e maior do que 1 :

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n^2}>\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)$$

Ou seja,

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n^2}>\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}(n^2-n)=1 \ .$$

COMENTÁRIOS :

(I) tomar alguns valores para " n" nos trará uma boa visão para prosseguir com a solução geral

(II) Mostre para o aluno os motivos : $n < n^2$, $n+1 < n^2$, ... , e depois faça os inversos pra finalmente realizar as somas.

Solução do Problema 32

Sejam b_1, b_2, ...,b_n qualquer permutação dos números reais positivos a_1, a_2, ..., a_n. Prove que

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n}{b_n}\geq n.$$

Notamos que utilizando a Prop 3 a resolução se torna imediata :

$$\frac{\dfrac{a_1}{b_1}+\dfrac{a_2}{b_2}+\ldots+\dfrac{a_n}{b_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{a_1}{b_1}.\frac{a_2}{b_2}.\ldots.\frac{a_n}{b_n}}=1,$$

pois uma sequência é a outra numa certa ordem.

NOTA: *Faça a partir daqui os seus próprios comentários e nos envie suas sugestões.*

Solução do Problema 33

Quatro pontos P,Q,R,S pertencem a um círculo de tal forma que o ângulo PSR é reto. Sejam H e K as projeções de Q nos segmentos PR e OS, respectivamente. Prove que a reta HK divide o segmento QS ao meio.

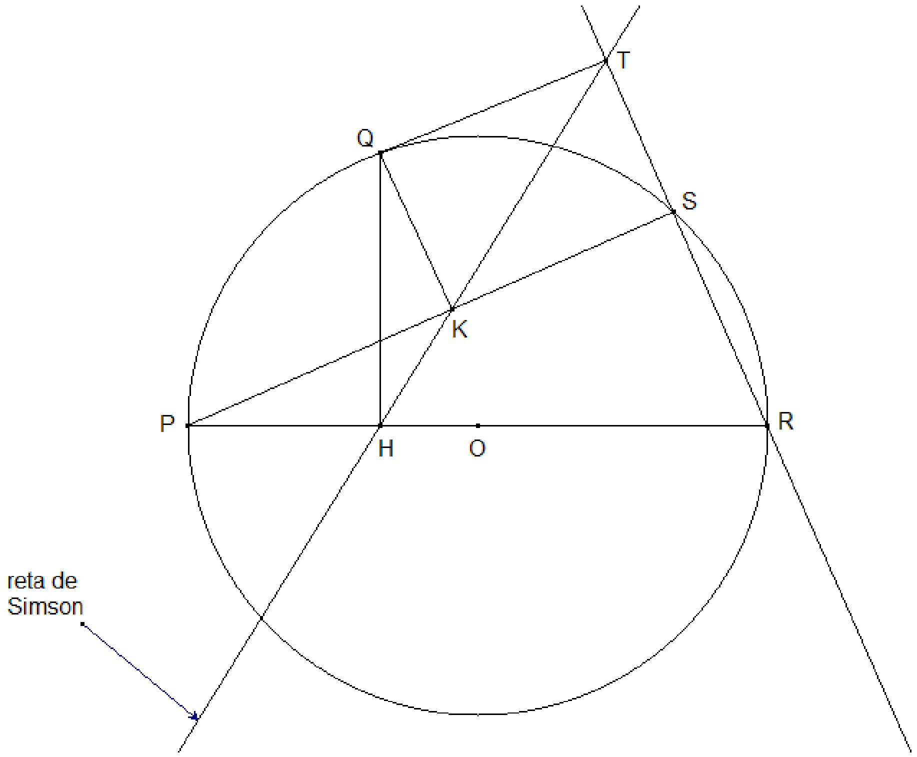


Figura 17 *(uma reta abençoada)*

Pelo enunciado, temos que PR é um diâmetro. Tomando o ponto Q e as as projeções H e K nos segmentos PR e OS , temos que a reta que passa pelos pontos H e K é a reta de "*Simson*" e, consequentemente, a intersecção de HK com a reta SR se dá com a projeção T de Q sobre a reta SR, ou seja, $\angle QTS = 90°$. Observe agora que teremos o quadrilátero QTSK sendo um retângulo; donde QS e KT se cortam ao meio.

Solução do Problema 34

Sejam a,b,c números reais positivos tais que a+b+c=1. Prove que

$$\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ac}{b+ac}+\frac{c-ab}{c+ab}\le\frac{3}{2}\ .$$

Provar a desigualdade é equivalente a provar que

$$1-\frac{2bc}{a+bc}+1-\frac{2ac}{b+ac}+1-\frac{2ab}{c+ab}\le\frac{3}{2}$$

que é equivalente à

$$\frac{ab}{c+ab}+\frac{ac}{b+ac}+\frac{bc}{a+bc}\ge\frac{3}{4} \qquad (13)$$

e já que a+b+c=1 , teremos

$$\begin{cases} c+ab=(1-a)(1-b) \\ a+bc=(1-b)(1-c) \end{cases} .$$

Observe agora que (13) ficará escrita da seguinte forma

$$\frac{ab}{(1-a)(1-b)}+\frac{ac}{(1-a)(1-c)}+\frac{bc}{(1-b)(1-c)}\ge\frac{3}{4}\ . \qquad (14)$$

Desenvolvendo (14) e usando o fato de que a+b+c =1 , chegaremos à

$$ab+bc+ac\ge 9abc \quad \text{ou}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 9\ . \qquad (15)$$

Note que provar a desigualdade do enunciado é equivalente a provar (15) , usando a Prop 4 teremos

$$\frac{a+b+c}{3} \quad \ge \quad \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$

E como a+b+c=1 , encontramos

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9$$

Que é a desigualdade (15).

Solução do Problema 35

Sem o uso de uma calculadora, qual dos números $\sqrt{3}^{\,7}$ *e* $7^{\sqrt{3}}$ *é o maior ?*

Note inicialmente que por $48<49$, temos que

$$4\sqrt{3}<7 \qquad (16)$$

Observe que

$$\sqrt{3}^{\,4\sqrt{3}}=9^{\sqrt{3}} \qquad (17)$$

Como
‘’’’

’’’’’’’’’’’’’’ $7<9$ teremos $7^{\sqrt{3}}<9^{\sqrt{3}}$ e usando (17) :

$$7^{\sqrt{3}}<\sqrt{3}^{\,4\sqrt{3}} \qquad (18)$$

Usando (1) em (3) , concluímos que

$$7^{\sqrt{3}}<\sqrt{3}^{\,4\sqrt{3}}<\sqrt{3}^{\,7}.$$

Logo o maior é $7^{\sqrt{3}}$.

Solução do Problema 36

Se a,b,c,d são números reais positivos tais que a soma seja igual a 1, prove que

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\sqrt{4d+1}<\mathbf{6}\,.$$

Vamos utilizar novamente a Prop 3 para os números 1 e 4a+1 , com “a” positivo, teremos:

$$\frac{1+4a+1}{2}\geq\sqrt{1.(4a+1)} \quad \text{ou}$$

$$\sqrt{4a+1}\leq 2a+1 \ .$$

Observe que a igualdade não ocorrerá já que “a” não é nulo . Logo,

$$\sqrt{4a+1}<2a+1\,.$$

Fazendo o mesmo para b, c e d, e adicionando as desigualdades ,teremos :

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}+\sqrt{4d+1}<2a+1+2b+1+2c+2d+1$$

ou

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}+\sqrt{4d+1}<2(a+b+c+d)+4$$

e como

$$a+b+c+d=1$$

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}+\sqrt{4d+1}<2.1+4=6\,.$$

Solução do Problema 37

P é um ponto interior ao quadrado ABCD tal que PA=1, PB=2 e PC=3. Determine $\angle APB$.

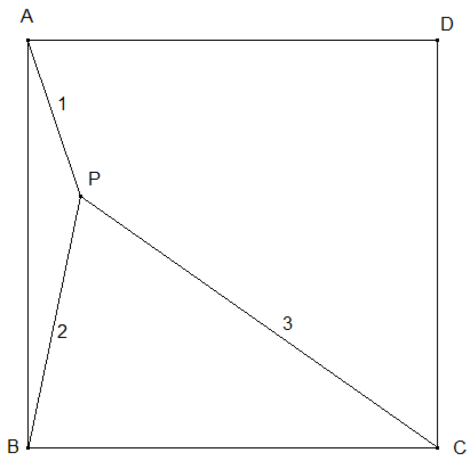


Figura 18 *(qual é a ideia?)*

Considere a construção como na fig 2 , na qual traçamos o quadrado ABEF simétrico de ABCD em relação ao lado AB. BP foi traçado de forma que BQ = BP e $\angle QBP = 90°$ e teremos o lado PQ = $2\sqrt{2}$.

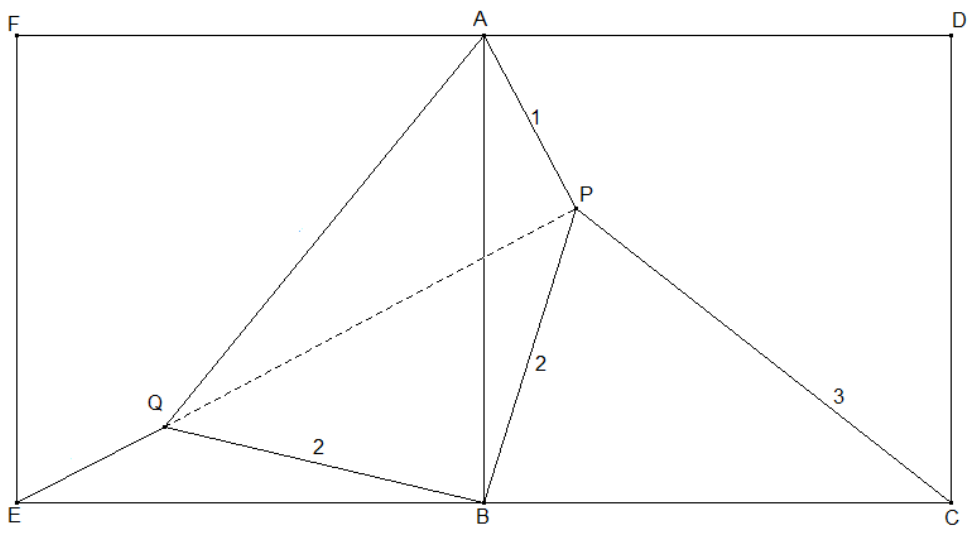


Figura 19 *(só poderia ser de Murray Klamkin)*

Observe agora que $\angle ABP = \angle QBE$ e os triângulos EQB e ABP são congruentes (caso LAL) e, isto nos garante que EQ = AP = 1. Fato semelhante ocorre para os triângulos ABQ e BCP, ou seja, AQ = PC = 3. Podemos verificar que $AQ^2 = AP^2 + PQ^2$ e como o Teorema de Pitágoras é *"se e somente se"*, concluímos que $\angle QBP = 90°$ e consequentemente $\angle APB = 135°$.

(SOLUÇÃO DE MURRAY KLAMKIN)

Solução do Problema 38

Prove que a raiz positiva de

$$x(x+1)(x+2)...(x+2013) = 1$$

é menor *do que* $\frac{1}{2013!}$ *, onde 2013! = 1.2.3.....2013.*

Pela equação inicial

$$x = \frac{1}{(x+1)(x+2)...(x+2013)} . \tag{19}$$

Como " x" é um valor positivo podemos escrever

$$(x+1)(x+2)...(x+2013) > 1.2.3.....2013$$

Ou

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)...(x+2013)} < \frac{1}{1.2.3.....2013} \tag{20}$$

(20) em (19) :

$$x < \frac{1}{1.2.3.....2013} .$$

Solução do Problema 39

Seja "n" um inteiro. Existe algum "n" tal que $n^2+2n+12$ *divide 121 ?*

Suponha que tenhamos

$$n^2+2n+12=121k\,.$$

Então

$$(n+1)^2=11(11k-1)\ .$$

Já que 11 é primo e divide $(n+1)^2$ concluímos que 11 divide (n+1) .....(tente provar isto).

Logo 11^2 divide $(n+1)^2=11(11k-1)$, ou 11 divide (11k-1) . Claramente impossível.

Resposta : Não.

Solução do Problema 40

Qual o maior inteiro positivo "n" tal que n +10 divide n^3+100 *?* .

Escreva a seguinte relação:

$$n^3+100=n^3+1000-900\,.$$

A motivação em escrever a igualdade acima desta forma foi devido ao fato de que

$$(a+b)\ \text{ divide }\ (a^3+b^3)\ .$$

Como (n+10) divide (n^3+1000) devemos ter necessariamente que (n+10) divida 900

Logo $n_{\text{máximo}} = 890$.

Solução do Problema 41

Uma discussão para ser realizada em sala de aula para alunos que conhecem muitas teorias não abordadas no ensino Fundamental e médio :

a) *Determine o resto da divisão de P(x) =* x^3+5x+1 *por D(x) =* x^2+3x+1

Para P(x) vamos substituir x^2 por " -3x-1" .

Observe que P(x) = x^3+5x+1 = $x.x^2+5x+1$. fazendo a substituição encontramos

$$x.x^2+5x+1 \rightarrow \text{x(-3x-1) + 5x+1= -3x}^2 - \text{x +5x +1 = -3x}^2 \text{ + 4x + 1.} \qquad (21)$$

Novamente em (21) substituindo x^2 por " -3x-1" , teremos

$$-3x^2 + 4x + 1 = -3(-3x-1) + 4x + 1= 13x + 4.$$

O resto na divisão de P(x) por D(x) será R(x) = 13x + 4 .

Faça agora a divisão pelo procedimento encontrado em livros básicos e verifique que o resultado será o mesmo.

b) *Determine o resto da divisão de P(x) =* $x^{2013}+5x^{247}+6x+1$ *por D(x) =* x^8+1.

Vamos utilizar o mesmo procedimento do item (a) :

Como 2013 = 8.251+5 e 247 = 8.30+7 , teremos

$$x^{2013}+5x^{247}+6x+1=(x^8)^{251}.x^5+5(x^8)^{30}.x^7+6x+1 \qquad (22)$$

Em (22) substituindo x^8 por (-1), teremos :

$$(x^8)^{251}.x^5+5(x^8)^{30}.x^7+6x+1 \rightarrow (-1)^{251}.x^5+5(-1)^{30}.x^7+6x+1$$

$$(-1)^{251}.x^5+5(-1)^{30}.x^7+6x+1=-x^5-5x^7+6x+1$$

E o resto na divisão de P(x) por D(x) será

$$R(x)=-5x^7-x^5+6x+1.$$

Solução do Problema 42

Uma *desigualdade instigante : Sejam a,b,c,d números reais . prove que*

$$(1+ab)^2+(1+cd)^2+(ac)^2+(bd)^2\geq 1.$$

Podemos escrever a seguinte igualdade:

$$(1+ab)^2+(1+cd)^2+(ac)^2+(bd)^2=1+2ab+(ab)^2+1+2cd+(cd)^2+(ac)^2+(bd)^2$$

$$1+2ab+(ab)^2+1+2cd+(cd)^2+(ac)^2+(bd)^2+1=(1+ab+cd)^2+(ac-bd)^2+1$$

Pela Prop 2:

$$(1+ab+cd)^2+(ac-bd)^2+1\geq 1\ .$$

Solução do Problema 43

Qual o valor máximo possível da área de um quadrilátero que tem os lados iguais a 1,4,7 e 8?

Observe inicialmente que $1^2+8^2=4^2+7^2$ e tente mostrar o motivo pelo qual a área máxima será igual a 18 .

Pense na particularidade desses dados e tente deduzir uma condição geral para um quadrilátero tenha um valor máximo para a sua área.

Solução do Problema 44

Existe algum natural "n" tal que $n^n+(n+1)^n$ *seja divisível por 4027 ?*

Usando o fato de que a^n+b^n é divisível por $a+b$ para n ímpar , podemos verificar que

$n^n+(n+1)^n$ será divisível por $n+(n+1)$ para n ímpar .

Note agora que se fizermos $n+(n+1)$ =4027 , termos para nossa surpresa n = 2013.

Podemos notar que este valor satisfaz às condições do problema, logo n =2013 é uma resposta para o problema.

Solução do Problema 45

Sejam a,b,c,d números reais positivos. Prove que

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq\frac{64}{a+b+c+d}\ .$$

Provar esta desigualdade é equivalente provar que

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\right)(a+b+c+d)\geq 64\,. \tag{23}$$

Vamos desenvolver o lado esquerdo da desigualdade (23) :

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\right)(a+b+c+d)=22+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+2\left(\frac{2a}{c}+\frac{c}{2a}\right)\\&+4\left(\frac{4a}{d}+\frac{d}{4a}\right)+2\left(\frac{2b}{c}+\frac{c}{2b}\right)+4\left(\frac{4b}{d}+\frac{d}{4b}\right)+8\left(\frac{2c}{d}+\frac{d}{2c}\right)\end{aligned} \tag{24}$$

Utilizando a Prop 4 , ou seja , $x+\frac{1}{x}\geq 2$, $x>0$ para cada termo entre parênteses do lado direito de (24) , encontraremos :

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\right)(a+b+c+d)\geq 22+2+2.2+4.2+2.2+4.2+8.2$$

Ou seja

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\right)(a+b+c+d)\geq 64\,.$$

Solução do Problema 46

Escreva 2013 como soma de (um número arbitrário de) parcelas de modo que o produto das parcelas seja o maior possível.

Observe inicialmente que, dado $n \in$ N,

$$\text{se } n\ (n > 4) \text{ é par, temos } \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} > n \tag{25}$$

$$\text{se } n\ (n > 3) \text{ é ímpar, temos } \left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right) > n\,. \tag{26}$$

Sejam $2013 = n_1 + n_2 + n_3 + \dots n_k$ e

$P = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots n_k$

Com as observações (25) e (26) devemos ter $n_i \in \{1, 2, 3, 4\}$ e como $4 = 2 \cdot 2$ podemos substituir 4 por "2 + 2" e teremos $n_i \in \{1, 2, 3\}$; logo $P = 1^{\alpha} \cdot 2^{\beta} \cdot 3^{\delta}$. É evidente que $\alpha = 0$; pois se $\alpha = 1$, "1 + 2" pode ser substituído por um 3 e "1 + 3" pode ser substituído por "2 + 2". Também $\beta \le 2$, pois "2 + 2 + 2" pode ser substituído por "3 +3" ($3 \cdot 3 > 2 \cdot 2 \cdot 2$) e conseqüentemente $P = 2^{\beta} \cdot 3^{\delta}$ com ($\beta = 1$ ou 2). Como $2013 = 3 \cdot 671 + 0$, $P = 3^{671}$ e $S = \underbrace{3+3+3+\dots+3}_{671 vezes}$.

(solução apresentada na revista por Carlos Victor)

Solução do Problema 47

Represente o número 989.1001.1007+320 como um produto de primos.

Façamos x= 991 e seja N = *989.1001.1007+320*

$$N = (x-2)(x+10)(x+16) + 320 = x^3+24x^2+108x = x(x+6)(x+18)$$

Logo

N=991.997.1009.

Bastando agora verificar se os valores encontrados são primos. De fato eles são.

Solução do Problema 48

Um quadrilátero tem cada um dos seus vértices sobre os lados de um quadrado de lado 1.Tomando a,b,c, d como sendo os lados deste quadrilátero , prove que

$$2 \le a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \le 4 \ .$$

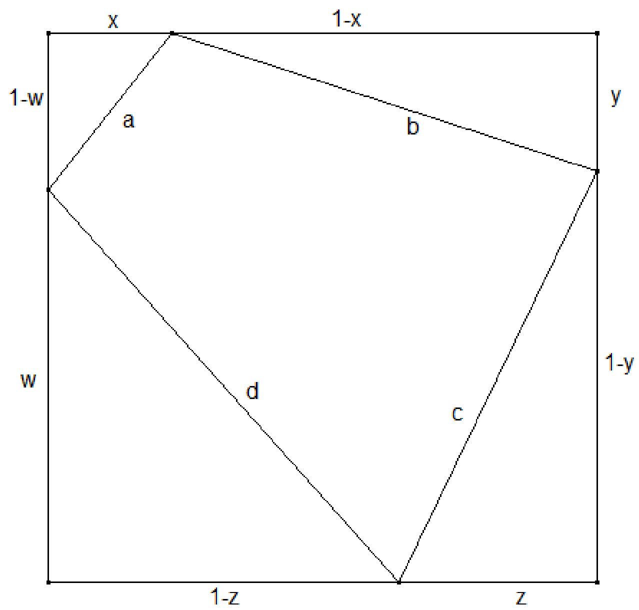


Figura 20 *(só Pitágoras)*

Pela figura podemos escrever que :

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2+d^2 &= x^2+(1-x)^2+y^2+(1-y)^2+x^2+(1-x)^2 \\ &+z^2+(1-z)^2+w^2+(1-w)^2 \end{aligned} \qquad (27)$$

Agora considere o fato de que :

$\frac{1}{2} \le x^2+(1-x)^2 \le 1$ para $0 \le x \le 1$ e em (27) teremos :

$$2 \le a^2+b^2+c^2+d^2 \le 4 \, .$$

Solução do Problema 49

Prove que não existe um inteiro tal que a retirada do primeiro dígito produz um resultado que é $\frac{1}{35}$ *do inteiro original.*

Seja $N = a_1 a_2 ... a_k$, onde $0 \leq a_i \leq 9$ ou seja $N = a_1.10^m + n$.

Pelas condições do enunciado :

$$n = \frac{a_1.10^m + n}{35}$$

Ou

$$17n = a_1.2^{m-1}.5^m$$

que é uma igualdade impossível.

Solução do Problema 50

Um problema difícil e um resultado interessante : determine o valor de

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{...}}}}}\ .$$

Considere o desenvolvimento para “n” natural :

$n+2\ ^{2} = 1+4n+4 = 1+(n+1)(n+3)$ com “n” natural .

Podemos escrever

$$n+2\ ^{2} = 1+4n+4 = 1+(n+1)(n+3) \tag{28}$$

e como “n” é natural :

$$(n+2) = \sqrt{1+(n+1)(n+3)} \tag{29}$$

donde

$$n(n+2) = n.\sqrt{1+(n+1)(n+3)}\ . \tag{30}$$

Façamos $P(n) = n(n+2)$, logo (30) poderá ser escrita da seguinte forma:

$$P(n) = n\sqrt{1+P(n+1)}\ . \tag{31}$$

Agora, o mais surpreendente : use a recorrência (31) para (n+1) e ficamos com

$$P(n+1) = (n+1)\sqrt{1+P(n+2)} \qquad (32)$$

Logo (31)   ficará escrita como

$$P(n) = n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+P(n+2)}} \qquad (33)$$

ou

$$P(n) = n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+(n+3)\sqrt{1+(n+4)\sqrt{...}}}}} \qquad (34)$$

Em (34) faça n=1 e tenha a seguinte "*surpresa*"

$$P(1) = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{...}}}}}$$

E como P(n) = n(n+2) ,teremos :

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{...}}}}} = 3 .$$

Fascinante, não!

CAPÍTULO 3: DESCRIÇÃO DE LIVROS, REVISTAS E ARTIGOS PARA AS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

Neste capítulo faremos uma breve análise de livros que podem ser utilizados para todos que desejam se aprimorar nas resoluções de problemas e também para aqueles que de alguma forma se interessam por matemática. A escolha foi em função de abordagens teóricas ou de enunciados dos problemas ou das experiências de professores que preparam alunos para as diversas Olimpíadas de Matemática. Esclarecemos que a biblioteca aqui registrada não é única e, possivelmente muitos livros que podem ser referências ficarão de fora desta e de alguma forma esses farão partes de futuros trabalhos referentes às Olimpíadas de Matemática.

Importante observar que na década de 90, muitos dos livros, revistas ou artigos aqui registrados não se faziam presentes, mas que foram endossados como enriquecedores para o nosso atual preparo.

Apesar de muitos livros aqui presentes não serem direcionados para as Olimpíadas, acreditamos que por experiências, sejam no aperfeiçoamento do professor ou do aluno, tornam-se inicialmente necessários para enfrentarmos os problemas dessas competições.

(3.1) *BANCO DE QUESTÕES DA OBMEP*

> *A cada ano a OBMEP vem estimulando professores e alunos das escolas públicas a participarem desta Olimpíada, que além de uma integração social, fortalece o laço entre o professor de matemática e o seu aluno. Oferecida a todas as escolas públicas, o Banco de Questões fornece soluções das questões anteriores com o propósito de proporcionar um treinamento para as provas seguintes. As soluções são revisadas e na sua maioria de origem das apresentadas no sítio da OBMEP. As questões divididas por níveis e temas, Aritmética, Combinatória e Geometria, são de grande contribuição para o aluno, de tal forma que a escolha dos problemas requerem mais raciocínio e criatividade do que conhecimentos prévios. Algumas questões propostas na revista não são necessariamente de provas anteriores, mas apenas para aguçar o*

raciocínio e um treino na criatividade e imaginação do aluno. (resumo do próprio banco de questões)

(3.2) *OLIMPÍADAS BRASILEIRAS DE MATEMÁTICA- 1ª a 8ª (problemas e resoluções)- Compilado por Élio Mega e Renate Watanabe*

Este livro é uma coleção dos 110 problemas propostos nas oito primeiras Olimpíadas Brasileiras.

O livro compõe-se de três partes :

Na primeira, encontram-se os enunciados dos problemas classificados por área e, dentro de cada área, por grau de dificuldade. O que é difícil para uma pessoa poderá ser trivial para uma outra. Assim, se o leitor encontrar dificuldade em um problema, este fato não deverá impedi-lo de tentar resolver o seguinte .

Na segunda parte do livro, encontram-se soluções de todos os problemas. Estas são, quase sempre, precedidas por um item intitulado "Fatos que ajudam" e, às vezes, por *"Sugestões". "Fatos que ajudam"* são conceitos ou teoremas que permitem resolver o problema. As *"sugestões*" são mais um passo em direção à solução.

Na terceira parte do livro, encontram-se os Apêndices, contendo :

1) As 8 provas das Olimpíadas ;
2) Uma relação dos alunos premiados nestas Olimpíadas;
3) Uma bibliografia.

COMENTÁRIO **:**

Há um texto no prefácio intitulado *" Como utilizar o livro"* **.**

Este texto é para todos aqueles que estão iniciando na arte de resolver problemas olímpicos que descrevo aqui na íntegra e que se torna útil em qualquer outra bibliografia referente à solução de qualquer problema:

> *" Escolha um problema na área de sua preferência – leia-o atentamente, até saber com precisão o que é dado e o que é pedido .*
>
> *Tente resolver o problema sem recorrer à segunda parte do livro(soluções). Tentar requer paciência. Não desista se a solução*

não aparecer na primeira tentativa.É uma experiência muito gratificante encontrar, após algum tempo, a solução de um problema que ,inicialmente, parecia ser muito difícil.

Não fique frustrado se não encontrar uma solução. Recorra, então, à segunda parte do livro, tomando conhecimento dos " fatos que ajudam" e das "sugestões". Tente de novo durante algum tempo ... e só depois estude a solução apresentada, completando as passagens não explícitas. Aí, comece tudo de novo, com outro problema."

Este texto foi assinado pela Comissão de Olimpíadas da SBM em São Paulo em janeiro de 1988.

***(3.3)** OLIMPÍADAS BRASILEIRAS DE MATEMÁTICA (da 9ª à 15ª) -- LUIZ AMANCIO MACHADO DE SOUSA JR.- EUFC*

Este livro é dividido em quatro partes :

Primeira : Enunciados dos Problemas Propostos para as Olimpíadas

Segunda : Classificação dos Problemas por Assuntos

Nesta parte o autor divide os problemas propostos em Álgebra, Análise, Combinatória e Probabilidade, Geometria Analítica, Geometria Plana, Geometria Espacial, Jogos, teoria dos Números e Outros Tópicos.

Terceira : Soluções dos Problemas Propostos

Quarta : Sugestões e Respostas para os Problemas Propostos. Nesta parte o autor coloca as sugestões relevantes para a solução de cada questão.

Além de uma lista de símbolos utilizados , há um Glossário dos principais termos e teoremas usados durante as soluções .

COMENTÁRIOS :

(I) Para uma compreensão total do livro se torna necessário que conheça alguns tópicos da matemática não desenvolvida no Ensino Básico e cuja bibliografia se encontra no final do livro .

(II) *" Devido à grande experiência do autor em preparo de alunos para as Olimpiadas Nacional e Internacional, a obra é de extrema valia para a formação de professores, para o aperfeiçoamento de alunos e para o deleite de todos que gosta de matemática"* – palavras do saudoso professor Augusto César Morgado .

(3.4) *REVISTA EUREKA!*

Com a carência de revistas e livros brasileiros cujos conteúdos sejam direcionados para as Olimpíadas de Matemática , a revista Eureka! foi criada com o objetivo de apoiar os alunos e professores a se desenvolverem neste tipo de competição, com edições impressa e eletrônica (sítio da OBM). Os coordenadores, editores e membros da comissão da revista são em geral ex-olímpicos e com grandes experiências no preparo de alunos para as olimpíadas Nacionais e Internacionais. A revista atualmente é editada duas vezes por ano descritas a seguir.

1) A primeira revista que geralmente é editada no início do ano, tem como conteúdos:

a) Os enunciados e soluções das três fases da OBM do ano anterior.

b) Os enunciados e soluções das duas fases da OBM universitária do ano anterior.

c) Agenda Olímpica, com as datas das Olimpíadas

2) A segunda geralmente editada no final do ano, tem como conteúdos:

a) Os enunciados e resultados das Olimpíadas de Maio, do Cone Sul, Internacional (IMO), Ibero-Americana, etc....

b) Uma seção de artigos de conteúdos de Matemática Elementar divididos como "Avançados, Intermediários e Iniciantes", complementando conteúdos do ensino básico ou com abordagens mais aprofundadas.

c) Uma seção de "Problemas Propostos" na qual o leitor é convidado a enviar soluções e com as publicações das melhores posteriormente. Em geral são problemas propostos pela comissão ou enviados por leitores, cujos enunciados podem ser de outras Olimpíadas Nacionais e Estrangeiras ou até mesmo de livros especializados.

d) Uma seção das "Soluções dos Problemas Anteriores" com características que visam o rigor dos conceitos teóricos e acrescidos, se necessário, de comentários dos editores na solução.

e) Agenda Olímpica , com as datas das Olimpíadas.

(3.5) REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA-RPM- Sociedade Brasileira de matemática

Uma revista quadrimestral da SBM com apoio da USP amplamente conhecida por professores de matemática cujos conteúdos divididos em seções se tornam um excelente material de apoio para a sala de aula. Através dos seus artigos, ao longo da existência da revista, temos vários temas que são úteis no preparo para as Olimpíadas de Matemática. A sua seção de problemas é extremamente interessante, pois são selecionados com a preocupação de que tenha algum detalhe não muito comum nos livros textos e, muitas das vezes são questões que fizeram parte de Olimpíadas de Matemática, sejam Nacionais ou Estrangeiras. Há também uma seção *"O Leitor pergunta"*, na qual uma dúvida sobre um problema ou algum detalhe teórico será devidamente esclarecido pelos responsáveis pela seção. Portanto, a revista é um ótimo material no preparo para as Olimpíadas de Matemática.

(3.6) ÁLGEBRA I – A.C.MORGADO; E.WAGNER; M.JORGE -- Livraria Francisco Alves Editora S.A

Destinado na época (1974) para alunos do antigo 2º grau, exame supletivo e vestibulares tornou-se até aproximadamente o ano 2000 uma referência para os alunos do 9º ano que se preparavam para os concursos do Colégio Naval, Escolas Técnicas Federais e Escolas Militares do Exército e Aeronáutica.

O livro trata inicialmente dos principais conceitos básicos da aritmética nos inteiros e incluindo o estudo inicial de congruência. Os capítulos seguintes são; Potências, Raízes, Polinômios, Fatoração, Equação do 1º grau, Equação do 2º grau e trinômio do 2º grau. A teoria e os exercícios (resolvidos e propostos) são boas fontes de consulta para todo aluno do 9º ano que necessita de um preparo inicial para as Olimpíadas. O interessante neste livro é que há uma menção sobre quatro problemas (propostos) que até naquele momento ninguém tinha resolvido, inclusive o Último Teorema de Fermat. Vale a pena comentar que neste livro consta a demonstração que fizemos no problema 18 do capítulo 1.

Na época havia comentários entre professores que teríamos o volume 2, mas que infelizmente não foi editado.

(3.7) *GEOMETRIA I -- A.C.MORGADO; E.WAGNER; M.JORGE -- Livraria Francisco Alves Editora S.A-1974*

Um livro com 138 páginas e com a mesma finalidade do livro (3.6), temos uma referência em geometria plana Euclidiana com todos os conceitos bem formalizados e necessários para um bom desenvolvimento na prática de resolver problemas de geometria; por este motivo torna-se um excelente livro de consulta. Neste livro na página 111, o exercício 63 é o nosso problema 7 do capítulo 1.

(3.8) *GEOMETRIA II -- A.C.MORGADO; E.WAGNER; M.JORGE -- Livraria Francisco Alves Editora S.A-1974*

Seguindo a mesma linha do livro (3.7) o livro faz um tratamento complementar da teoria e inclusive o apêndice é enriquecido com teorias não presentes nos livros textos básicos do ensino fundamental e médio.

(3.9) *TÓPICOS DE MATEMÁTICA-IME-ITA-OLIMPÍADAS—CARLOS A.GOMES; JOSÉ MARIA GOMES –Livraria VestSeller.*

Uma coleção de 6 volumes nos quais cada capítulo possui um resumo teórico e questões que foram selecionadas de diversas Olimpíadas de Matemática Nacionais e Internacionais e de livros especializados. Os autores são experientes no treinamento, orientando alunos e elaborando materiais didáticos para as Olimpíadas e para os concursos do IME (Instituto Militar de Engenharia) e do ITA (Instituto Tecnológico da Aeronáutica).

A seguir as divisões dos volumes :

Vol 1 : produtos notáveis, fatorações e desigualdades.

Vol 2 : indução matemática e teoria elementar dos números.

Vol 3 : geometria e trigonometria.

Vol 4 : funções, equações funcionais, sequências e séries.

Vol 5 : combinatória e probabilidade.

Vol 6 : números complexos, polinômios e equações algébricas

(3.10) *EXERCICES DE GEOMETRIE - - T H. CARONNET- Les Courbes Usuelles*

Uma coleção de 9 Livros traduzidos em 1959 por vários professores brasileiros pela Editora AO LIVRO TÉCNICO LTDA - Rio de Janeiro. A coleção, apesar da quase impossibilidade de encontrá-las nas livrarias, tem até hoje uma grande repercussão para os professores de geometria por conter exercícios com grande grau de dificuldades e, o mais interessante são as soluções que possuem originalidades que dificilmente encontraríamos em outras coleções do gênero. Em cada capítulo há um resumo teórico e enunciados de alguns teoremas relevantes para as soluções. Vale a pena tentar encontrar em sebos ou qualquer outro companheiro de profissão que possa vender esta coleção. O professor Antonio Luiz Santos autor do livro "Problemas Selecionados de Matemática" [10], possui a coleção completa em Francês.

(3.11) *104 NUMBER THEORY PROBLEMS -- FROM THE TRAINING OF THE USA IMO TEAM-TITU ANDREESCU; DORIN ANDRICA; ZUMING FENG- Birkhauser*

Uma das referências para navegar nos mares da "*teoria dos números"*. O livro aborda inicialmente um resumo teórico com exemplos de várias competições internacionais e as soluções apresentadas nos deixam em geral perplexos pelas "sacadas" e criatividades dos autores. Costumo geralmente dizer; "*Grande Titio Andreescu"* .

(3.12) *CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS – E.WAGNER COM A COLABORAÇÃO DE J.P.CARNEIRO—coleção do Professor de Matemática-SBM.*

Há muito tempo que a disciplina de Construções Geométricas foi abolida por várias escolas, e com isto abriu-se uma lacuna para o crescimento do raciocínio geométrico de nossos alunos. Acreditamos que as construções geométricas fortalecem o nosso raciocínio para resolvermos problemas de geometria em geral. Este livro resgata juntamente com a didática e experiência do autor, a sequência que devemos ter para uma precisão na construção de uma determinada figura geométrica.

O livro está dividido em cinco capítulos a saber:

Cap 1 --- Construções Geométricas Elementares;

Cap 2 --- Construções de Expressões Algébricas;

Cap 3 --- Áreas;

Cap 4 --- Construções aproximadas;

Cap 5 --- Transformações Geométricas;

Apêndice --- Construções Possíveis Usando Régua e Compasso.

Certamente um livro de uma grande valia para o preparo dos nossos alunos às competições matemáticas.

(3.13) *CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS—EXERCÍCIOS E SOLUÇÕES – SÉRGIO LIMA NETO- SBM*

Este livro contém todos os exercícios propostos do livro (3.13) e suas soluções didaticamente simples, engenhosas e detalhadas. O Prof. Sérgio possui uma publicação das soluções das provas do vestibular do IME (Instituto Militar de Engenharia) dos últimos 50 anos; um outro trabalho bem difundido para todos que se preparam para este vestibular.

Com as soluções elegantes e com figuras bem explicativas, o livro torna-se indispensável para os alunos olímpicos[2].

(3.14) *ELEMENTOS DE MATEMÁTICA – VOL 0 – MARCELO RUFINO- Editora e Livraria VestSeller*

O livro aborda do nível básico ao avançado os estudos de Potências e Radiciação, Bases de Numeração, Médias, Sistema Métrico decimal, Razões e Proporções, Regra de 3 simples e composta, juros, porcentagens, frações, dízimas periódicas, equaçoes e inequações do 1º grau, do 2º grau, biquadradas, modulares, irracionais dentre outros. Há uma grande quantidade de problemas resolvidos e propostos da Epcar, Colégio Naval, e demais vestibulares nacionais.

Base essencial para os alunos olímpicos.

[2] Os alunos olímpicos aqui denominados, representam todos que de alguma forma se preparam para as Olimpíadas da Matemática.

(3.15) ELEMENTOS DE MATEMÁTICA – VOL 1 – MARCELO RUFINO; MÁRCIO RODRIGUES Editora e Livraria VestSeller

O livro aborda com profundidade Conjuntos, Funções e Aritmética (Congruência, Equações Diofantinas, Função Máximo Inteiro). Esse livro inclui vasta quantidade de problemas resolvidos e propostos das Escolas Militares, Olimpíadas Nacionais e Internacionais.

Podemos observar pelo o conteúdo do livro que ele é indispensável para os alunos olímpicos e também para o preparo dos professores.

(3.16) *ELEMENTOS DE MATEMÁTICA – VOL 2 – MARCELO RUFINO; MÁRCIO RODRIGUES Editora e Livraria VestSeller*

O livro aborda com excelente profundidade toda a Geometria Plana. Possui vários problemas resolvidos e propostos da Epcar, Escola Naval, IME, ITA e Olimpíadas Nacionais e Internacionais.

Podemos observar pelo o conteúdo do livro que ele é indispensável para os alunos olímpicos e também para o preparo dos professores.

(3.17) *ELEMENTOS DE MATEMÁTICA – VOL 3 – MARCELO RUFINO; MÁRCIO RODRIGUES Editora e Livraria VestSeller*

Um excelente livro que aborda as Sequências, Recorrência, Combinatória e Matrizes. Esse livro inclui muitos problemas resolvidos e propostos nas Escolas Militares e Olimpíadas Nacionais e Internacionais.

Certamente de grande valia para os alunos olímpicos.

(3.18) *ELEMENTOS DE ARITMÉTICA – A.HEFEZ*

O livro foi utilizado no projeto de Mestrado PROFMAT e o interessante é que todo estudo se dá no conjunto dos naturais. No capítulo de "*Equações Diofantinas Lineares"* há um conjunto que o autor denomina de " *Conjuto de Lacunas"* , uma colocação engenhosa que em geral não aparece em livros de Teoria dos Números. Há neste livro a indicação e uma discussão do Jogo de Nim.

Certamente de grande valia para os alunos olímpicos.

(3.19) *TÓPICOS DE TEORIA DOS NÚMEROS – CARLOS GUSTAVO DE A. MOREIRA; FABIO E. BROCHERO MARTINEZ;NICOLAU C. SALDANHA- SBM*

Um livro escrito por professores ex-olímpicos e medalhistas em diversas Olimpíadas de Matemática traduz toda a experiência dos autores em preparo de alunos nas Olimpíadas Nacionais e Internacionais.Os autores conseguiram desenvolver os conteúdos da aritmética de uma forma didática e aprofundada na parte teórica e nos exercícios resolvidos.

Uma excelência no ramo que torna-se necessário em qualquer biblioteca Olímpica.

(3.20) *THE SOUTH AFRICAN MATHEMATICAL SOCIETY—MATHEMATICAL OLYMPIAD TRAINING NOTES- MATHEMATICAL TALENT SEARCH- UNIVERSITY OF CAPE TOWN- JH Webb.*

Uma coletânea de " *Notas*" no preparo dos alunos que se destacam em " *Mathematical* Talent Search" para a IMO (Olimpíada Internacional de Matemática), realizada pela " University of Cape Town" . As notas são de excelência em conteúdos e divididos como a seguir :

No.1 *The Pigeon~hole Principle, by Valentin Goranko*

No.2 Topics in Number Theory*, by Valentin Goranko*

No.*3 Inequalities for the Olympiad Enthusiast, by Graeme West*

No.4 *Graph Theory for the Olympiad Enthusiast, by Graeme West*

No.5 *Functional Equations for the Olympiad Enthusiast, by Graeme West*

No.6 *Mathematical Induction for the Olympiad Enthusiast, by david Jacobs*

Nesta coleção há um resumo teórico com uma profundidade que dificilmente encontramos em outros artigos do gênero. Essencial para os alunos que estão em um nível mais avançado nas Olimpíadas, mas que pode ser adaptado para os alunos iniciantes.

(3.21) *PROOFS WITHOUT WORDS — EXERCISES IN VISUAL THINKING — CLASSROOM RESOURCE MATERIALS / NUMBER / THE MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA (MAA) - ROGER B. NELSEN – MAA-1993*

" Proofs without words" como o própio titulo descreve, são figuras ou diagramas de resultados matemáticos que foram editados regularmente em revistas e artigos pela MAA, e cujas demonstrações são elaboradas apenas por aspectos puramente geométricos visuais .

As figuras instigam o leitor a pensar geometricamente sobre a igualdade ou a desigualdade proposta . Possui seções divididas nos seguintes assuntos :

1) Geometria e Álgebra

2) Trigonometria, Cálculo e Geometria Analítica.

3) Desigualdades.

4) Sequências e Séries.

5) Uma miscelânea de resultados que nos deixam pasmos.

Este livro se torna extremamente valioso e eficaz para aguçar o raciocínio e a criatividade do aluno para as Olimpíadas. Todo jovem olímpico deve ter este livro.

(3.22) *POWER PLAY—EDWARD J. BARBEAU- MAA—1997*

O autor faz uma referência no prefácio do livro sobre o número 142857, o qual tem a propriedade de que seus seis primeiros múltiplos envolvem os mesmos seis dígitos numa mesma ordem cíclica.

Os capítulos são descritos da seguinte forma :

Cap 1 :Inteiros ímpares e quadrados.

Cap 2 : Triplas Pitagóricas e relativos.

Cap 3 : Sequências.

Cap 4 : Equação de Pell.

Cap 5 : Somas iguais de iguais potências.

Cap 6 : Dígitos e somas de sotências

Cap 7 : Conjuntos interessantes .

Indispensável esse livro para desenvolvermos a nossa capacidade de potências.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerando como um foco de estudo o impacto para um "*professor de matemática sem experiência em Olimpíadas nesta disciplina"*, decidimos analisar estratégias de aperfeiçoamento profissional com a finalidade de que ele enfrente os desafios propostos nas questões dessas atividades e que ele desenvolva um conjunto de ações na resolução dos problemas das Olimpíadas de Matemática.

Temos, anualmente, o crescimento da quantidade de alunos participantes de tais competições, principalmente na OBMEP, devido à sua divulgação intensiva nas escolas públicas. O que devemos ressaltar é a forma como se dá esse crescimento, ou seja, se há, simplesmente, imposição para que uma determinada turma realize as provas ou se existem estímulos mostrando a importância da referida competição.

Para aqueles alunos que possuem afinidades com a Matemática, a Olimpíada torna-se um medidor para o raciocínio e a sua criatividade. Mesmo assim, a prova pode se tornar um fator decepcionante se um preparo prévio não ocorrer, seja através das provas anteriores ou através de grupos de estudo com material especializado. Para os alunos que por algum motivo se sintam desinteressados em estudar Matemática, realizar a competição se torna um martírio e, provavelmente, um acréscimo nesse desinteresse, já que estão realizando a prova por uma imposição.

Fazer o aluno gostar de estudar Matemática é uma tarefa desafiadora para o professor, e criar instrumentos incentivadores para esse jovem competir numa Olimpíada de Matemática deve ser uma preocupação inserida nessa tarefa.

Acreditamos que através de projetos internos na escola, juntamente com o grupo de orientadores, os diretores e uma biblioteca específica, o professor conseguirá bons resultados para a escola nessas Olimpíadas. Para isso o incentivo no uso da tecnologia fornecido nos "*sitos na internet das Olimpíadas"* é um instrumento que ajuda no aprendizado ([1], pag 80).

Para professores que de alguma forma, no passado, participaram mais intensamente de Olimpíadas de Matemática como alunos, os instrumentos incentivadores e os pré-requisitos necessários para um bom desempenho dos jovens nas Olimpíadas são ferramentas que ele sabe onde encontrar. Podemos tomar um instrumento incentivador na escola, como sendo algum tipo de premiação de todo o corpo pedagógico e, como pré-requisito uma biblioteca destinada a esse tipo e competição, por exemplo.

O que tratamos ao longo de todo esse trabalho foi uma preocupação que em geral está presente nos professores ─ mesmo entre os experientes ─ no preparo de alunos para diversos concursos, isso é, *como dirimir as dificuldades presentes nas Olimpíadas de Matemática?*

Afirmar que a solução foi descrita nesse trabalho, é uma revelação muito prepotente, mas temos ciência de que a prática de resolver problemas, juntamente com uma biblioteca direcionada, certamente propicia uma minimização nas dificuldades, e cada vez mais, estaremos capacitados a preparar e a incentivar os alunos para a competição e, como resultado, os objetivos dos organizadores das Olimpíadas serão atingidos.

Podemos nesse momento, atentar para uma parte do título do nosso trabalho;" *Que preciosidades envolvem os problemas desta competição?"* De acordo com os problemas aqui apresentados, observamos como determinados detalhes nos fomentam a passear no mundo da criatividade de suas resoluções e, juntamente com a imaginação do autor que propôs a questão, não é difícil de responder à pergunta.

O que nos levou a introduzir a segunda pergunta do título deste trabalho foi uma vivência com professores que de alguma forma tinham e têm receios principalmente nas fases finais dessas Olimpíadas. Talvez possamos conjecturar as possíveis dificuldades existentes: uma falta de exigência externa, ou seja, escolas que de alguma forma não tenham um compromisso de preparar o aluno para as competições; ou por dificuldades presentes nas questões e cujo motivo da existência era desconhecido. Essas conjecturas podem, talvez, explicar as possíveis resistências de muitos serem temerosos no que se refere às Olimpíadas de Matemática.

O professor pode ser excelente na atuação de suas atividades escolares dentro da grade curricular de Matemática do Ensino Básico e, no entanto, não possuir facilidade nas resoluções dos problemas propostos nas Olimpíadas. Fica, então, claro o impacto para o docente de Matemática sobre o que essas desafiadoras questões podem lhe trazer.

Estamos cientes que toda a trajetória seguida nesse trabalho pode não ser única, mas visamos alcançar aqueles que por algum motivo não tiveram a oportunidade de participar, como ex-olímpicos ou como agentes preparadores de alunos nesse tipo de competição, e visando, ainda, a todos que desejam encantar-se com as pérolas matemáticas envolvidas nas questões olímpicas. Dessa forma, estaremos, também, contribuindo com um desejo do Ministério da Educação, que é a melhoria do ensino da Matemática no Brasil.

A cada ano, os projetos de Olimpíadas se intensificam, haja vista o crescimento de outras Olimpíadas, como as de Informática, Física, Língua Portuguesa. Com esse tipo de avanço, as formas de interação entre o preparo de alunos e professores tomará rumos que talvez sejam diferentes daqueles descritos nos diversos trabalhos sobre as Olimpíadas, inclusive os descritos aqui. Tais consequências poderão vir a ser tema de novos trabalhos que futuramente serão alvo de outros pesquisadores sobre a Olimpíada de Matemática ou sobre outras Olimpíadas.

Por fim, a motivação desse trabalho deve-se a uma experiência própria e à forma como ocorreu o decrescimento dos incômodos nessa deslumbrante competição, o que está explicitado ao longo dos capítulos 2 e 3. Muitos desses problemas desenvolvidos da forma aqui descrita, integraram as aulas na preparação de alunos, em escolas públicas, municipais e federais, cujos resultados foram também os incentivadores para que essa dissertação tenha sido realizada.

Apesar da vontade de construir um trabalho semelhante a este, surgir anteriormente, o PROFMAT abriu as portas para que o sonho fosse realizado. Esperamos que novas produções voltadas ao mesmo tema sejam frutos de novas dissertações ou livros, complementares a esse trabalho, intenção essa vislumbrada para ocorrer em futuro próximo. A proposta deste trabalho foi incentivar a todos aqueles que por algum motivo se sentem inseguros nos problemas olímpicos e "*não sabem como lapidar esta pérola que é a Olimpíada de Matemática*".

REFERÊNCIAS

[1] ALVES, Washington,J.S.; *O Impacto da Olimpíada de Matemática em Alunos da Escola Pública;* PUC/SP-2010 (Dissertação de Mestrado Profissional Em Ensino de Matemática);

[2] ANDREESCU,T., FENG, Z.; *Mathematical Olympiads 1998-1999,problems and solutions from Around the world;* MAA, 2000;

[3] ANDREESCU, T.; *Old and New Inequalities* ; MAA-2005;

[4] BIONDI, R. L.; VASCONCELOS, L. e MENEZES FILHO, N. A. de: *Avaliando o impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) no desempenho de matemática nas avaliações educacionais.* Disponível em : http://bibliotecadigital.fgv.br/ocs/index.php/sbe/EBE09/paper/view/1092/315. Acesso em 12/02/2013.

[5] da Comissão de Olimpíadas da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM); *Olimpíadas Brasileiras de Matemática – 1ª a 8ª(problemas e resoluções)*-compilado por Élio Mega e Renate Watanabe. Atual Editora Ltda, São Paulo,1995;

[6] FUNCTION MAGAZINE; A SCHOOL MATHEMATICS JOURNAL- MONASH UNIVERSITY-2003;

[7] HONSBERGER,R; *Mathematical Morsels*; Mathematical Association of American (MAA), Whashington,1978;

[8] HONSBERGER,R; *More Mathematical Morsels*; Mathematical Association of American, Whashington,1991;

[9] LARSON, L. C.;Problem-Solving Through Problems; Springer-Verlag; 1983

[10] MARCOS, V. M.M.-CMPA; B. ,MARCUS,V.A.-UFRGS; *Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP): As Origens de um Projeto de Qualificação do ensino de matemática na Educação Básica-X Encontro Gaúcho de Educação Matemática-*2009/Ijuí/RS

[11] MOREIRA, C. G. T. DE A.; WAGNER, E.. 10 *Olimpíadas Iberoamericanas de Matemática.* OEI,1996;

[12] NASCIMENTO, M. G.; OEIRAS, J. T.Y.; *Olímpico: Um ambiente Virtual para Competições Escolares Via Internet.Belém*, PA:UFPa, 2006;

[13] PERAINO, M. A.; *Adolescente Com altas habilidades/Superdotação de um assentamento rural: um estudo de caso : campo Grande*, Mato Grosso do Sul:2007.104f (Dissertação de Mestrado em Psicologia). UCDB;

[14] REVISTA EUREKA!; *Olimpíada Brasileira de Matemática*-SBM-IMPA;

[15] SANTOS, A.L.; *Problemas Selecionados de Matemática;* Editora Ciência Moderna Ltda,Rio de Janeiro,2006;

[16] SHKLARSLY,D.O.;*The USSR Olympiad Problem Book: selected problems and theorems of elementary mathematics;* Dover Publications, Inc., New York,1993;

[17] SOIFER,A.;*Colorado Mathematical Olympiad: The First ten Years and Further Explorations;*Springer;U.S (Paperback-june-1994);

[18] SOUSA JR,L.A.M.; *Olimpíadas Brasileiras de Matemática da 9ª à 15ª* Edições UFC,Fortaleza,1994;

[19] SUCUPIRA, G..;*Será que as Meninas Não gostam de Matemática? Reflexão sobre Gênero, Educação e Ciência a partir de uma Etnologia sobre as Olimpíadas de matemática em Santa Catarina.* SC : UFSC-2008;

APÊNDICES

APÊNDICE A : SEMANA OLÍMPICA

Para os alunos premiados na Olimpíada Brasileira de Matemática, vem sendo realizada desde 1998, um treinamento durante uma semana por uma equipe de professores especializados em preparo de alunos para as Olimpíadas. Esses jovens representarão o Brasil nas competições internacionais de Matemática e além de proporcionar aos alunos um intensivo preparo, os jovens têm momentos oportunos de uma nova integração com outros alunos da mesma faixa etária e com interesses similares. Este ano a XVI Semana Olímpica aconteceu em Aracaju com apresença dos alunos premiados na OBM e Universitária.

Os conteúdos discutidos foram :

1) Combinatória Geométrica

2) Contagem

3) Até que tamanho podemos brincar de esconde-esconde ?

4) Álgebra para Intermediários-máximos e mínimos e outras ideias úteis

5) Bissetrizes e suas propriedades

6) Por que o quadrado de terminados em 5 é tão fácil?

*7) Como resolver problemas difíceis usando Bhaskar**a***

8) Como cobrir tabuleiros

9) Teoria aditiva dos números

10) Números primos e seus mistérios

11) geometria

Todo o material da Semana Olímpica, inclusive os anteriores podem ser encontrados no "*sito na internet da OBM*".

APÊNDICE B : RETA DE SIMSON

(Retirado de um artigo escrito por Marcelo Mendes de Oliveira)

Reta de Simson

Nível 2

Marcelo Mendes de Oliveira

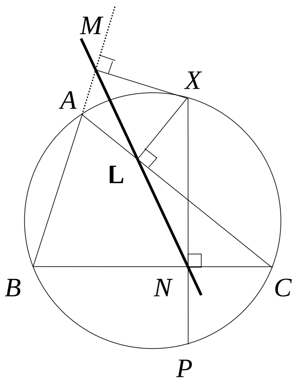
marcelom@ceara.net

Introdução

Apesar de essa reta famosa ter sido descoberta por William Wallace em 1797, por descuido atribuiu-se falsamente, à época, o resultado a Robert Simson (1687-1768). Os seguintes problemas apresentam propriedades e aplicações da Reta de Simson ou Reta de Simson-Wallace.

Reta de Simson

RETA DE SIMSON: Se perpendiculares são traçadas a partir de um ponto sobre o circuncírculo de um triângulo a seus lados, suas interseções com os lados do triângulo são colineares e pertencem à *Reta de Simson*. (A recíproca também é verdadeira.)



De fato, $\angle NLC = \angle NXC$ (quadrilátero $NLXC$) e $\angle ALM = \angle AXM$ (quadrilátero $ALXM$) e, além disso, $\angle NXC$ e $\angle AXM$ somados com $\angle AXN$ suplementam $\angle ABC$. Segue que $\angle NLC = \angle ALM$ e M, L, N são colineares.

NOTA: Se a perpendicular XN a BC corta o circuncírculo novamente em P, então AP é paralela à Reta de Simson de X.

APÊNDICE C : POTI - POLOS OLÍMPICOS DE TREINAMENTO INTENSIVO

A partir de 2012 a OBM, OBMEP e o IMPA iniciaram um projeto de treinamento para os alunos com aulas presenciais em pólos especificados. Há no sitio do POLO material didático e aulas em vídeo, como descreve o próprio sitio (http://poti.impa.br/index.php/site/) :

1)Sobre o POTI

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e o Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) estão dando continuidade em 2013 ao programa Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI) onde serão oferecidos, ao longo de todo o ano, cursos gratuitos de matemática para os estudantes de todo o Brasil.

O programa é destinado aos interessados em participar da OBM e ou OBMEP e que estejam matriculados no oitavo ou nono anos do Ensino Fundamental (nível II) ou em qualquer uma das séries do Ensino Médio (nível III).

O curso para cada um dos níveis cobrirá os conteúdos de Álgebra, Combinatória, Geometria Plana e Teoria dos Números. O site oficial disponibiliza todo material teórico e os vídeos das aulas correspondentes.

2) Para os alunos que não tiverem acesso aos polos presenciais, o POTI disponibiliza aulas em vídeo gravadas no Instituto Nacional da Matemática Pura e Aplicada (IMPA) por uma equipe de renomados professores que contam com ampla experiência de treinamentos para alunos de competições nacionais e internacionais.

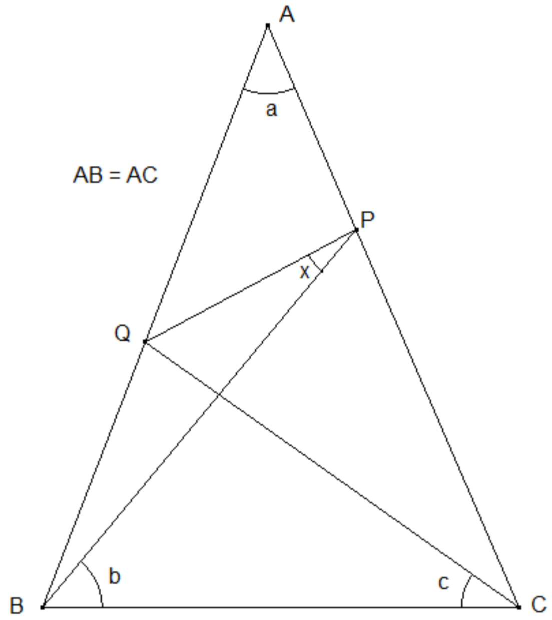
Para um melhor aproveitamento das aulas em vídeo, recomendamos que os alunos e professores façam uso do material teórico correspondente.

3) O material didático do POTI contempla toda a matemática olímpica das séries finais do ensino fundamental e de todo o ensino médio. Todo material didático produzido pelo POTI que se encontra disponível nesta página e pode ser usado e distribuído livremente para quaisquer finalidades não comerciais.

Cada aula é um arquivo contendo teoria, problemas e exercícios propostos visa estimular o estudo autodidata de alunos que não possuam acesso à Polos presenciais"

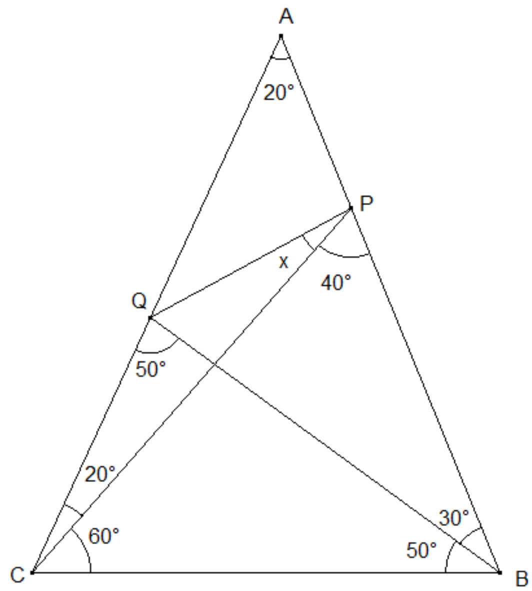
APÊNDICE D : ÂNGULOS ADVENTÍCIOS

Com relação à figura , dados os ângulos a,b,c múltiplos de 1°, com b > c. A tripla (a,b,c) é Adventíca se o ângulo correspondente " x" é também um múltiplo de 1°. O ângulo "x" é denominado de " *Ângulo Derivado"*.



Retirado do artigo "Adventitious angles", Colin Tripp,Mathematical Gazette, 59, pp 98-106, 1975.

APÊNDICE E : UMA SOLUÇÃO TRIGONOMÉTRICA PARA O PROBLEMA 7



Usando a Lei dos senos nos triângulos PQB, BCQ e PQC , teremos :

$$\frac{BQ}{sen(x+40)} = \frac{PQ}{sen(30°)}$$
$$\frac{BQ}{sen(80°)} = \frac{BC}{sen(50°)}$$
$$\frac{CQ}{sen(x)} = \frac{PQ}{sen(20°)}$$

Eliminando BQ, PQ, BC, CQ com BC = QC , encontraremos :

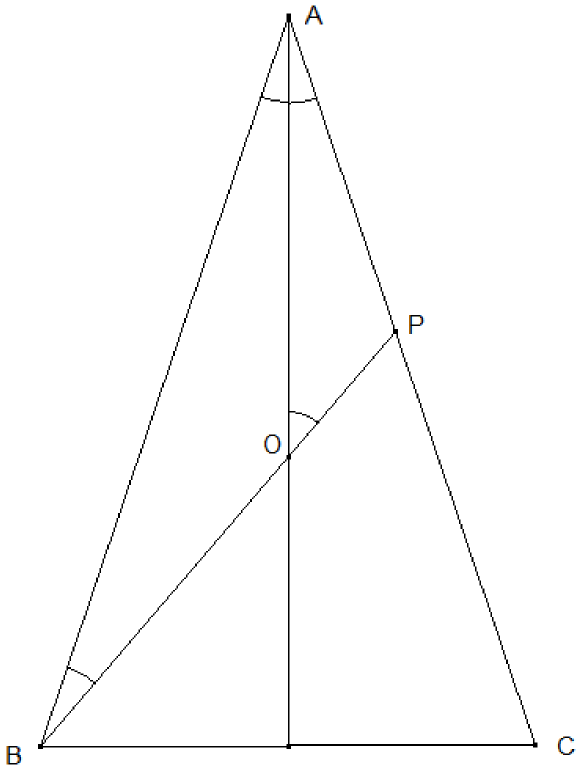
Senx.sen(80°) = 2sen(x+40°).sen(50).sen(20°) ; ou seja

Senx = sen(x+40).[sen(130) – sen(30)] ; ou

Senx = sen(x+80) +senx –sen(x+40) ; onde devemos ter :

x + 80 + x + 40 = 180 , o que acarreta x = 30° .

APÊNDICE F : UMA SOLUÇÃO TRIGONOMÉTRICA PARA O PROBLEMA 21



Seja $\theta = \angle OBA$

sen(2ϴ) = BC/2BO

AP/sen(2ϴ) = AO/sen(3ϴ)

Logo

2 sen(2ϴ) = sen(2ϴ)/ sen(3ϴ)

sen(3ϴ) = 1/2

ϴ = 30° .

Um Comentário: “ 3ϴ pode ser igual a 150° ?”

.