

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL - PROFMAT

GILMAR KLOSTER

NÚMEROS COMPLEXOS E GEOMETRIA PLANA

PONTA GROSSA

2014

GILMAR KLOSTER

NÚMEROS COMPLEXOS E GEOMETRIA PLANA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática PROFMAT – UEPG como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marciano Pereira

PONTA GROSSA

2014

Ficha Catalográfica
Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG

K66 Kloster, Gilmar
Números complexos e geometria plana/
Gilmar Kloster. Ponta Grossa, 2014.
118 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional - Área de
Concentração: Matemática), Universidade
Estadual de Ponta Grossa.

Orientador: Prof. Dr. Marciano Pereira.

1. Números complexos. 2. Geometria.
3. Aplicações geométricas. I. Pereira,
Marciano. II. Universidade Estadual de
Ponta Grossa. Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional. III. T.

CDD: 510



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
**MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**



TERMO DE APROVAÇÃO

GILMAR KLOSTER

“NÚMEROS COMPLEXOS E GEOMETRIA PLANA”

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

Orientador:

Prof. Dr. Marciano Pereira
Departamento de Matemática, UEPG/PR

Prof. Dr. Túlio Oliveira de Carvalho
Departamento de Matemática, UEL/PR

Prof. Dr. Luís Antonio Romero Grados
Departamento de Matemática, UEPG/PR

Ponta Grossa, 04 de Agosto de 2014.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Silvio Kloster e Maria Z. Smulek Kloster, que souberam me educar e sempre acreditaram que o maior investimento de um ser humano é seu caráter e sua formação.

À Minha esposa, Claudiana F. Kloster e minhas filhas Ana Maria F. Kloster e Ana Claudia F. Kloster, pelo amor, apoio e compreensão de minha ausência em diversos momentos.

Aos professores do PROFMAT que proporcionam um espaço de reflexão crítica, troca de conhecimentos e por dividirem a sua amizade comigo.

Ao professor Marciano Pereira pela orientação do trabalho e que, além de orientador, foi uma pessoa com quem sempre pude contar no decorrer de todo o curso de mestrado. Sempre preocupado com o aprendizado e aproveitamento dos conteúdos ministrados, tendo paciência para esclarecer todas dúvidas que surgiam.

Aos amigos e colegas do mestrado, principalmente o Vanderlei Ceccatto, Rafael Gallas e Fernanda Caon, com os quais pude compartilhar meus anseios, conquistas, pontos de vista e que fazem parte de minha história.

A Deus que guiou minha trajetória e proporcionou a realização de mais um de meus sonhos.

Durante este outono, preocupei-me largamente com a consideração geral das superfícies curvas, o que conduz a um campo ilimitado... Essas pesquisas ligam-se profundamente com outros assuntos, inclusive - como me sinto tentado a dizer - com a metafísica da geometria, e não é sem ingentes esforços que consigo me arrancar as conseqüências que daí advém, qual seja, por exemplo, a verdadeira metafísica das grandezas negativas e imaginárias, o verdadeiro sentido de $\sqrt{-1}$, mas creio que será extraordinariamente difícil expressá-lo com palavras.

GAUSS (1777-1885)¹

¹Carl Friedrich Gauss foi matemático, astrônomo e físico alemão que contribuiu muito em diversas áreas da ciência, dentre elas a teoria dos números, estatística, análise matemática, geometria diferencial, geodésica, geofísica, eletrostática, astronomia e óptica. É dele a expressão números complexos. [24]

RESUMO

Os números complexos possuem aplicações tanto na matemática como em outras áreas do conhecimento. Porém no ensino médio, momento em que o aluno inicia o estudo deste conjunto numérico, eles são ensinados dando ênfase as manipulações algébricas, deixando as aplicações geométricas reduzidas apenas a representação de pontos no plano complexo. Em muitos casos, nem mesmo esta aplicação geométrica é abordada. Este trabalho tem por objetivo abordar o Conjunto dos Números complexos utilizando a geometria, valorizando a visualização de alguns resultados no GeoGebra, para proporcionar à aprendizagem mais significativa ao aluno.

Palavras-chave: Números complexos, geometria, aplicações geométricas.

ABSTRACT

Complex numbers have applications both in mathematics and in other areas of knowledge. But in high school, at which time the student begins the study of this set of numbers, they are taught with emphasis on algebraic manipulations, leaving only the geometric applications reduced the representation of points in the complex plane. In many cases, even this geometric application is addressed. This work aims to address the set of complex numbers using the geometry, enhancing the visualization of some results in GeoGebra, to provide more meaningful to the student learning.

Keywords: Complex numbers, geometry, geometrical applications.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	9
CAPÍTULO 01 - UM PROBLEMA E UM POUCO DA HISTÓRIA	11
1.1 O problema da ilha	11
1.2 Números Complexos: Um pouco da história	11
CAPÍTULO 02 - NÚMEROS COMPLEXOS	19
2.1 Números complexos na forma algébrica:.....	19
2.1.1 Definição:.....	19
2.1.2 Propriedades da adição e da multiplicação:	19
2.1.3 Forma algébrica dos números complexos.....	23
2.1.4 Operações com números complexos na forma algébrica.....	23
2.1.5 Potências do número i	24
2.1.6 Conjugado de um número complexo	25
2.1.7 Módulo de um número complexo	27
2.2 Representação Geométrica dos números complexos	28
2.2.1 Interpretação geométrica da adição e da subtração.....	31
2.2.2 Interpretação geométrica do módulo de um número complexo.	32
2.2.3 Interpretação geométrica do conjugado e do oposto de um número complexo.....	32
2.3 Representação Polar ou Trigonométrica dos números complexos.....	34
2.3.1 Operações com números complexos na forma trigonométrica.....	35
CAPÍTULO 03 - NÚMEROS COMPLEXOS E APLICAÇÕES NA GEOMETRIA	44
3.1 Pontos e Ângulos.....	44
3.1.1 Distância entre dois pontos:	46
3.1.2 Colinearidade e Divisão de um Segmento de reta	47
3.1.3 Ângulo formado por três pontos e ângulo formado por duas retas.....	53
3.1.4 Retas paralelas, coincidentes e perpendiculares. Pontos concíclicos.	57
3.1.5 Rotação de um ponto.	60

3.2 Retas	63
3.2.1 Equação da reta no plano complexo.	63
3.2.2 Equação da reta definida por um ponto e uma direção.	67
3.2.3 Ângulo formado por duas retas.	69
3.2.4 Projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta e distância entre ponto e reta.	70
3.3 Triângulos.....	72
3.3.1 Semelhança de triângulos e triângulos equiláteros.	72
3.3.2 Área de um triângulo e área de um polígono convexo.	77
3.3.3 Baricentro, Ortocentro e Circuncentro	81
3.4 Circunferências.....	87
3.4.1 Equação da circunferência.	87
3.4.2 Ângulo formado entre duas circunferências.	88
3.5 Atividades suplementares.....	91
CAPÍTULO 04 - SOLUÇÕES DAS ATIVIDADES PROPOSTAS	94
CONSIDERAÇÕES FINAIS	115
REFERÊNCIAS	116

INTRODUÇÃO

A educação deve promover o desenvolvimento do homem, mas para que isso seja possível, devemos ter um ensino de qualidade, voltado para o desenvolvimento de saberes e competências cada vez mais exigidos pela sociedade.

A escola tem o papel fundamental neste desenvolvimento, pois além de transmitir os saberes historicamente produzidos, deve propiciar ao discente condições para produzir novos saberes. Ela é um ambiente de troca de conhecimentos e experiências, onde o professor é o mediador.

Neste sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio trazem a orientação para que os objetivos do ensino médio devam envolver o desenvolvimento de conhecimentos práticos e contextualizados que correspondam com as necessidades da vida contemporânea, e contínua dando destaque à importância de uma formação geral e não apenas de um treinamento específico:

Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que correspondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. Para a área das Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologias, isto é particularmente verdadeiro, pois a crescente valorização do conhecimento e da capacidade de inovar demanda cidadãos capazes de aprender continuamente, para o que é essencial uma formação geral e não apenas um treinamento específico. (p.6 [19])

Para o desenvolvimento de conhecimentos amplos e abstratos é necessário, além de conhecer o conteúdo em estudo, promover a interdisciplinaridade com os demais conteúdos, evitando assim a simples repetição de técnicas desvinculadas com as outras áreas do conhecimento. Nesse sentido os Parâmetros Curriculares Nacionais trazem no seu texto:

... Vale a pena lembrar que, lado a lado com uma demarcação disciplinar, é preciso desenvolver uma articulação interdisciplinar, de forma a conduzir organicamente o aprendizado pretendido. A interdisciplinaridade tem uma variedade de sentidos e de dimensões que podem se confundir, mas são todos importantes. (p.8 [19])

Nesse contexto, o conjunto dos números complexos apresenta sua parcela de importância devido à sua utilização em áreas de conhecimento tanto na matemática quanto em outras áreas, por exemplo: física e engenharias.

O ensino do conjunto dos números complexos está contemplado nos PCN's, dentro do conteúdo estruturante de Números e Álgebra. Normalmente ele é abordado no final do

Ensino Médio onde é apresentado de maneira descontextualizada, gerando assim a falsa impressão, por parte do discente, que o mesmo é totalmente desvinculado com os demais ramos da matemática. Sua abordagem é quase que totalmente algébrica, com enfoque apenas nas operações de soma, subtração, multiplicação, divisão e potenciação, deixando sua representação geométrica resumida a plotagem de alguns pontos no plano complexo.

Vislumbrando uma forma diferenciada de abordar o ensino dos números complexos no ensino médio, este trabalho apresenta a aplicação dos números complexos na geometria plana, sendo dividido em quatro capítulos.

O primeiro capítulo inicia com um problema que envolve o conteúdo dos números complexos e que será resolvido no quarto capítulo. Também é feita uma breve revisão histórica do aparecimento e desenvolvimento do conceito de números complexos.

O segundo capítulo traz o embasamento teórico onde é conceituado o conjunto de números Complexos, bem como, é apresentado as operações e representações destes números.

O terceiro capítulo traz a aplicação dos números complexos à geometria. Neste capítulo é abordado a parte teórica das aplicações geométricas e são propostos exercícios para o leitor resolver. Na parte de atividades suplementares estão incluídos outros exercícios e quatro exercícios de provas anteriores de geometria do PROFMAT.

O quarto capítulo traz a resolução detalhada de todos os exercícios propostos.

CAPÍTULO 01 - UM PROBLEMA E UM POUCO DA HISTÓRIA

Neste capítulo traremos um problema interessante que remete ao uso de números complexos na sua solução. Também vamos abordar de maneira sucinta os aspectos históricos do desenvolvimento dos números complexos.

1.1 O problema da ilha

Dois piratas decidem enterrar um tesouro em uma ilha. Escolhem, como pontos de referência, uma árvore e duas pedras. Começando na árvore, medem o número de passos até a primeira pedra. Em seguida, dobram, segundo um ângulo reto, à direita, e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem uma marca. Voltam à árvore, medem o número de passos desde a árvore até a segunda pedra, dobram à esquerda, segundo um ângulo reto, e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem outra marca. Finalmente, enterram o tesouro exatamente no ponto médio entre as duas marcas. Anos mais tarde, os dois piratas voltam à ilha e decidem desenterrar o tesouro, mas, para sua decepção, constatam que a árvore não existe mais (o vento, a chuva e os depredadores a haviam arrancado). Então um dos piratas decide arriscar. Escolhe ao acaso um ponto da ilha e diz: “Vamos imaginar que a árvore estivesse aqui.” Repete então os mesmos procedimentos de quando havia enterrado o tesouro: conta os passos até a primeira pedra, dobra à direita, etc., e encontra o tesouro. ([21, p. 127])

- 1) Esse pirata era sortudo ou um matemático?
- 2) Utilizando a matemática, como você pode solucionar este problema?

Estas duas perguntas serão respondidas no capítulo 04. Inicialmente vamos estudar o conjunto dos números complexos e sua aplicação na geometria plana.

1.2 Números Complexos: Um pouco da história

A percepção matemática é uma aptidão inata que permite até mesmo uma criança que nunca teve contato com números perceber quando foi adicionado ou subtraído algum elemento de um pequeno conjunto. Atualmente ainda existem tribos isoladas que possuem pouco conhecimento matemático, onde, em alguns casos, apenas conseguem contar objetos até o número quatro ou cinco e a partir destes apenas classificam como muitos. Portanto ainda hoje existem povos que não conseguem conceber a ideia abstrata de número.

A necessidade de contar nasceu em períodos muito remotos, onde o homem necessitava contar seus rebanhos. No começo esta contagem era feita através de marcas em

bastões de ossos ou de madeira. Somente mais tarde foram criados símbolos para representar a contagem, cerca de 3.500 a.C., pelos sumérios e egípcios. Este sistema de numeração posteriormente foi chamado de conjunto dos números naturais. O símbolo para representar o zero apareceu somente por volta do século X. Posteriormente, devido a novas necessidades para solução de problemas de cunho matemático foram sendo incorporados outros números: números negativos, fracionários, irracionais e radicais negativos, formando assim os conjuntos dos números inteiros, racionais, irracionais, reais e complexos.

De acordo com CARVALHO [26, pp. 149-150], os números complexos começaram a aparecer sistematicamente a partir do século XVI com os algebristas italianos, em uma época onde ainda nem estava esclarecido os conceitos de números negativos e irracionais.

Até o século XIX ainda era discutido por alguns matemáticos a existência dos números negativos. Assim, o desenvolvimento da ideia de número não seguiu uma forma progressiva e natural como muitas vezes é exposta nos textos: Números naturais, inteiros, racionais, irracionais, reais e complexos.

A história dos números complexos ilustra bem como um conceito fundamental pode demorar muito até ser bem compreendido e aceito. É uma história longa de resistência, por parte de excelentes matemáticos, a admitirem a existência dos números complexos, mesmo quando os usavam. [26, p. 149]

Até o século XVI equações de segundo grau que apresentassem discriminante negativo simplesmente eram consideradas sem solução [7]. Foi na procura pela solução de equações polinomiais de grau 3 que os números complexos começaram a aparecer sistematicamente.

Em 1545 Girolamo Cardano² (1501-1576) publicou seu livro *Ars Magna*, no qual, entre outras coisas, foi exibido pela primeira vez os métodos para resolver equações do terceiro grau (cúbicas) e do quarto grau (quárticas). Cardano assegurou na sua obra que a

HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
incipit, est in ordine Decimus.



Hæc in hoc libro, studio Lectoris, Regulas Algebraicas (itali), de la Cof
figuacione nouis adiuuentibus ac demoustrantibus ab Authore ita
locupletatas, ut pro pauca antea uulgis eritis iam septuaginta existerent. No
eg folium, ubi minus numerus alter, aut duo uni, uentem etiam, ubi duo duobus,
aut tres unius fuerint, nodam explicans. Flum ab illo non ideo factu
fuit edere placuit, ut hoc abstruissimum, & planè inextinguibile totius Arithmet
ce thesaurum in lucem eruto, & quall in theatro quodam omnibus ad foret an

Figura 1: Capa de *Ars Magna*.

<http://www.mathsisgoodforyou.com/artefacts/arsmagnacardano.htm>

² Escreveu mais de 200 trabalhos sobre medicina, matemática, física, filosofia, religião e música. Na matemática foi o primeiro a introduzir as ideias gerais da teoria das equações algébricas. Seu hábito de jogar também levou-o a formular as primeiras regras da teoria da probabilidade. Na medicina foi quem primeiro descreveu clinicamente a febre tifóide. Na física escreveu sobre as diferenças entre energia elétrica e magnetismo. [24]

resolução das equações cúbicas foi a ele fornecida pelo matemático italiano Niccolo Fontana (Tartaglia)³ (1500-1557) e a resolução das equações quárticas tinha sido preliminarmente descoberta por seu antigo auxiliar Ludovico Ferrari⁴ (1522-1565). A fórmula indicada para resolver equações cúbicas do tipo $x^3 + px + q = 0$ foi

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Na obra de Cardano aparece a solução do problema de dividir um segmento de comprimento 10 em duas partes, cujo produto destas partes seja igual a 40.

$$x \cdot (10 - x) = 40$$

Este problema reduz-se a resolver a equação do segundo grau $x^2 - 10x + 40 = 0$.

Resolvendo a equação pelo método de completar quadrados:

$$\begin{aligned} x^2 - 10x + 40 = 0 &\Rightarrow x^2 - 10x + 40 + 25 - 25 = 0 \\ &\Rightarrow (x - 5)^2 - 25 + 40 = 0 \Rightarrow (x - 5)^2 = -15 \end{aligned}$$

Deste ponto operando como se os números que aparecem fossem reais obtemos

$$(x - 5)^2 = -15 \Rightarrow (x - 5) = \pm\sqrt{-15} \Rightarrow x = 5 \pm \sqrt{-15}$$

Cardano (apud [3, p. 150]) diz: "Deixando de lado toda a tortura mental envolvida, multiplica $(5 + \sqrt{-15})$ por $(5 - \sqrt{-15})$. O produto é $25 - (-15) = 40$ (...).

Assim progride a sutileza aritmética cujo objetivo, como

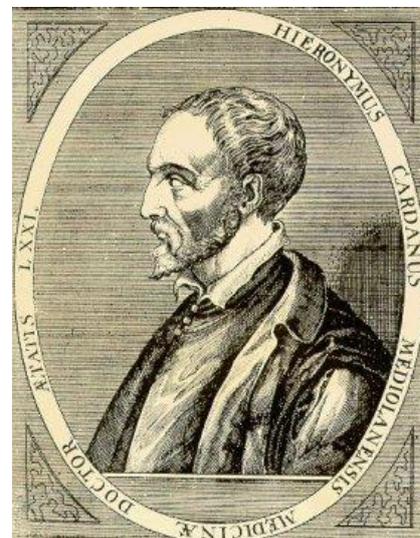


Figura 2: Girolamo Cardano.
http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Jer%C3%B4me_Cardan.jpg

L'ALGEBRA OPERA

Di RAFAEL BOMBELLI da Bologna
Divisa in tre Libri.

*Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta
cognitione della teoria dell'Arithmetica.*

*Con vna Tauola copiosa delle materie, che
in essa si contengono.*

*Per la hora in luce à beneficio degli Studi di
della professione.*



IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rosi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori

Figura 3: Capa de L'Algebra.
http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Algebra_by_Rafael_Bombelli.gif

³ Matemático italiano, cujo nome está ligado ao triângulo de Tartaglia e à solução da equação do terceiro grau. Tartaglia nasceu muito pobre. Quando tinha sete anos uma tropa francesa, ao saquear Brescia, irrompeu em um templo, onde grande parte da população se refugiara. Um soldado deu-lhe um golpe com um sabre no meio do rosto. Depois disso, o menino gaguejou anos a fio. Por isso os amigos o apelidaram de "Tartaglia" (tartamudo ou gago). Não conhecendo o sobrenome da família paterna, nos anos da maturidade decidiu adotar o nome que o destino lhe dera. [24]

⁴ Nascido em Milão, Itália, neto de Bartholomaeus Ferrari, estabeleceu-se em Bolonha, Itália e iniciou sua carreira como auxiliar de Girolamo Cardano. [24]

afirmado, é tão refinado quanto inútil".

Assim, no estudo de equações do terceiro grau, era inevitável o aparecimento de números complexos. No chamado "Caso Irredutível", quando a equação possui três raízes, o emprego do método de Cardano acarreta no uso obrigatório de números complexos.

Em 1572, Raffaele Bombelli⁵ (1526-1573), discípulo de Cardano, publicou a obra denominada *L'Algebra*, onde foi pioneiro em determinar as regras algébricas dos números negativos e dos números complexos. Bombelli ao retomar o estudo das equações de terceiro grau introduziu a quantidade "piu di meno" e "meno di meno", que corresponde a $+\sqrt{-1}$ e $-\sqrt{-1}$, e enunciou, sob forma de versos, as regras de operação com elas.

De acordo com o descrito em [17],

Bombelli concebe então a possibilidade de que exista uma expressão da forma $a + \sqrt{-b}$ que possa ser considerada como raiz cúbica de $2 + \sqrt{-121}$ i.e., que verifique $(a + \sqrt{-b})^3 = 2 + \sqrt{-121}$. A forma em que ele calcula essa raiz é um tanto peculiar; ele assume que a raiz cúbica de $2 - \sqrt{-121}$ seja da forma $a - \sqrt{-b}$. Como ele sabe que 4 deve ser raiz da equação, necessariamente $a + \sqrt{-b} + a - \sqrt{-b} = 4$. Nesse ponto, felizmente, as quantidades não existentes se cancelam e obtemos $a = 2$. Com esse resultado, é muito fácil voltar à equação $(a + \sqrt{-b})^3 = 2 + \sqrt{-121}$ e deduzir que $b = 1$. Assim, ele obtém que $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$ e que: $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$ é uma solução da equação dada.



Figura 4: Raffaele Bombelli.

<http://www.apprendre-math.info/portugal/historyDetail.htm?id=Bombelli>

⁵ Algebrista italiano nascido em Bologna, o mais importante da história da matemática da Itália, pioneiro no estudo sobre os números imaginários: sua principal publicação sobre álgebra, *Algebra*, composto de cinco volumes, e com os livros IV e o V incompletos, só foi editada (1573) no ano seguinte à sua morte. [20]

Continuando com o descrito em [17]

Bombelli percebeu claramente a importância desse achado. Ele diz:

Eu achei uma espécie de raiz cúbica muito diferente das outras, que aparece no capítulo sobre o cubo igual a uma quantidade e um número.

... A princípio, a coisa toda me pareceu mais baseada em sofismas que na verdade, mas eu procurei até que achei uma prova... .

Isto pode parecer muito sofisticado mas, na realidade, eu tinha essa opinião, e não pude achar a demonstração por meio de linhas [i.e. geometricamente], assim, tratarei da multiplicação dando as regras para mais e menos.

Ele utiliza a expressão *più di meno* para se referir ao que nós denotaríamos como $+i$ e *meno di meno* para $-i$. Ele enuncia então o que chama de regras do produto, que citamos abaixo junto com sua tradução na nossa simbologia:

Più via più di meno fa più di meno, $+. (+i) = +i$

Meno via più di meno fa meno di meno, $-. (+i) = -i$

Più via meno di meno fa meno di meno, $+. (-i) = -i$

Meno via meno di meno fa più di meno, $-. (-i) = +i$

Più di meno via più di meno fa meno, $(+i). (+i) = -$

Meno di meno via più di meno fa più, $(-i). (+i) = +$

Meno di meno via meno di meno fa meno. $(-i). (-i) = -$

Com o trabalho desenvolvido por Bombelli fica evidente a insuficiência dos números reais para a resolução de equações algébricas: na resolução das equações de grau 2, quando apareciam raízes de números negativos, simplesmente considerava-se a equação como sem solução, mas o mesmo argumento não pode ser usado com as equações de grau 3 com soluções reais conhecidas, mas que sua determinação dependia da extração da raiz quadrada de números negativos.

A partir dos trabalhos de Bombelli os matemáticos passaram a utilizar os números complexos em seus postulados, aplicando a eles as regras usuais de cálculo com números reais. Isso levou os matemáticos, por vezes, a cometerem enganos. Leonard Euler⁶ (1707-

⁶ Foi o matemático mais prolífico na história. Os 866 livros e artigos dele representam aproximadamente um terço do corpo inteiro de pesquisa em matemática, teorias físicas, e engenharia mecânica publicadas entre 1726 e 1800. Em matemática pura, ele integrou o cálculo diferencial de Leibniz e o método de Newton em análise matemática; refinou a noção de uma função; criou muitas notações matemáticas comuns, incluindo o e , i , o símbolo do π e o símbolo do σ ; e pôs a fundação para a teoria de funções especiais, introduzindo as funções transcendentais beta e gamma. [22]

1783), já no século XVIII, afirmou, por exemplo, que $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} = \sqrt{4} = 2$, por analogia com a regra $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, válida para os números reais.

Conforme CARVALHO [26, p. 153], em 1749, Euler em seu *Pesquisa sobre as Raízes Imaginárias de uma Equação* mostrou que se $a + i$ é raiz de uma equação, então $a - i$ também o é. Ele mostrou que toda equação de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real e que uma equação de grau par ou não possui raízes reais ou então possui pares de tais raízes. Demonstrou que todas as raízes não reais são da forma $a + b\sqrt{-1}$.

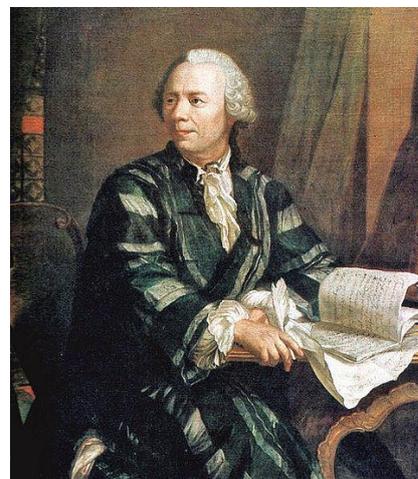


Figura 5: Leonhard Euler.
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Leonhard_Euler_2.jpg

Euler também melhorou a simbologia dos números complexos. Em um trabalho publicado em 1794 (escrito em 1777) ele definiu $\sqrt{-1}$ como sendo i , de maneira que $i^2 = -1$, surgindo assim a base dos números imaginários.

A partir de então, o número $a + b\sqrt{-1}$ passa a ser representado como $a + bi$, possibilitando que as operações de adição, subtração e multiplicação fossem feitas como operações entre polinômios: $(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i$ e $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ (pois $bd i^2 = -bd$).



Figura 6: Carl Friedrich Gauss.
http://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss#mediaviewer/Ficheiro:Carl_Friedrich_Gauss.jpg

Também no século XVIII, Abraham de Moivre⁷ (1667-1754) relacionou os números complexos com a trigonometria, introduzindo, deste modo, métodos mais sofisticados na investigação destes números.

O primeiro registro da representação geométrica dos números complexos é um artigo do dinamarquês-

⁷ Nasceu em Vitry, França. De origem protestante, estudou lógica em Saumur até 1684, tendo de emigrar em 1685 para Inglaterra devido à revogação do Édito de Nantes. A Inglaterra passou a ser o seu país de adoção. Na Inglaterra, foi professor particular de matemática mas sempre teve a esperança de poder vir a lecionar numa Universidade. Isso nunca foi possível nem mesmo com a proteção de Gottfried Leibniz (1646-1716) pois os estrangeiros estavam em desvantagem. Foi eleito membro da Royal Society em 1697, da Academia de Paris e da de Berlim, nas quais publicou vários trabalhos. Contribuiu para o desenvolvimento da geometria analítica e para a teoria das probabilidades. [18]

norueguês Caspar Wessel⁸ (1745-1818), intitulado *Sobre a Representação Analítica da Direção*, entregue em 1797 à Academia Dinamarquesa de Ciências. Uma representação semelhante foi dada em 1806 pelo suíço Jean Robert Argand⁹ (1768-1822) no livro *Ensaio sobre uma maneira de representar as quantidades imaginárias nas construções geométricas*.

Apesar da relevância dos trabalhos de Wessel e Argand, estes trabalhos não ganharam a devida notoriedade, pois os autores eram pouco conhecidos. Somente no final do século XVIII com o prestígio do matemático Carl Friedrich Gauss¹⁰ (1777-1855) é que a representação geométrica dos números complexos passou a ser aceita e conhecida.

É provável que a ideia de representar geometricamente os números complexos tenha ocorrido a Gauss ao demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra em sua tese de doutoramento de 1799, mesmo que ele não tenha utilizado isso na demonstração. Em 1891 publicou suas ideias referindo-se “à verdadeira metafísica das quantidades imaginárias”.

Nesse trabalho, Gauss apresentou a explicação de como os números complexos poderiam ser desenvolvidos em uma teoria exata, apoiada na representação no plano.

Nessa época Gauss inventou o termo “números complexos” que permanece até hoje.

Apesar dos trabalhos de Wessel e Argand sobre a representação geométrica dos números complexos, o plano utilizado para representar os números complexos foi

⁸ Foi um matemático dinamarquês-norueguês que descobriu em 1797 uma representação gráfica para os números complexos, publicada em 1798 nas atas da academia dinamarquesa. O trabalho de Wessel ficou praticamente esquecido. A interpretação geométrica foi amplamente aceita alguns anos mais tarde, quando Gauss publicou resultados análogos. [24]

⁹ Jean Robert Argand nasceu em Genebra (Suíça), a 18 de Julho de 1768. Apesar de ser apenas um matemático amador, Argand ficou famoso pela sua interpretação geométrica dos números complexos, onde i é interpretado como uma rotação de 90° .

O primeiro a publicar a interpretação geométrica de Argand foi Caspar Wessel, no entanto, o nome de Argand nunca apareceu no livro, e por isso era impossível identificar o seu autor. Foi necessário muito tempo para que o trabalho de Argand fosse conhecido como seu.

Em Setembro de 1813, Jacques Français publicou um trabalho no qual aparecia uma representação geométrica dos números complexos, com aplicações interessantes, baseadas nas ideias de Argand. Nesta publicação, Jacques Français dizia que as ideias eram baseadas no trabalho de um matemático desconhecido, e pedia que este se desse a conhecer, para receber o devido crédito pelas suas ideias. O artigo apareceu no jornal Gergonne's, e Argand respondeu a Jacques Français dizendo que era ele o autor dessas ideias. A partir daqui o trabalho de Argand começou a ser conhecido.

Argand apresentou ainda uma prova para o "Teorema Fundamental da Álgebra", sendo, possivelmente, o primeiro a trabalhar com o teorema no caso em que os coeficientes são números complexos. [16]

¹⁰ Carl Friedrich Gauss foi matemático, astrônomo e físico alemão que contribuiu muito em diversas áreas da ciência, dentre elas a teoria dos números, estatística, análise matemática, geometria diferencial, geodésica, geofísica, eletrostática, astronomia e óptica. É dele a expressão números complexos. [24]

denominado de Plano de Argand-Gauss, não dando o merecido crédito ao trabalho de Wessel.

Além dos autores elencados acima, muitos outros nomes também deram suas contribuições para o desenvolvimento do conjunto dos números complexos.

Observando a história dos números complexos percebemos que ela instigou a imaginação de matemáticos em diversas épocas, iniciando na busca da solução de equações cúbicas e chegando na atualidade com as mais variadas aplicações que existem e virão a existir. Também podemos observar a importância da representação geométrica dos números complexos, pois teve papel fundamental na aceitação de tais números.

CAPÍTULO 02 - NÚMEROS COMPLEXOS

A introdução dos números complexos está relacionada com a resolução de equações de terceiro grau, nas quais se tornou inevitável operar com raízes quadradas de números negativos. Observamos no capítulo anterior como se deu o desenvolvimento das ideias até chegar no conjunto dos números complexos com a forma atual. Neste capítulo vamos desenvolver a teoria propriamente dita sobre este conjunto numérico. A parte teórica apresentada a seguir foi baseada em [1], [2], [4], [8], [9], [10], [11], [14], [15], [17], [23] e [25].

2.1 Números complexos na forma algébrica:

2.1.1 Definição:

Para definir o conjunto dos números complexos e suas propriedades vamos considerar que tanto a definição quanto as propriedades do conjunto dos números reais já são conhecidas.

Conforme proposto por Gauss e Hamilton, definimos o conjunto dos números complexos como o conjunto dos pares ordenados de números reais, para os quais estão definidas as operações:

$$\text{Sendo } z_1 = (x_1, y_1) \text{ e } z_2 = (x_2, y_2)$$

$$\text{Igualdade: } z_1 = z_2 \Leftrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2$$

$$\text{Adição: } z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\text{Multiplicação: } z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$$

Denotamos o conjunto dos números complexos por \mathbb{C} .

Também utilizamos \mathbb{C}^* para indicar $\mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$.

2.1.2 Propriedades da adição e da multiplicação:

As operações de soma e produto possuem as seguintes propriedades:

a) A adição e a multiplicação são comutativas:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \text{ e } z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \text{ para todo } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Demonstração:

Sejam $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$, então

Para a soma:

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Usando a propriedade comutativa da soma dos números reais

$$= (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = z_2 + z_1.$$

E para a multiplicação:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$$

Usando a propriedade comutativa da multiplicação dos números reais

$$= (x_2x_1 - y_2y_1, x_2y_1 + y_2x_1) = z_2 \cdot z_1.$$

b) A adição e a multiplicação são associativas:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \text{ e } (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3), \text{ para todo } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$

Demonstração:

Sejam $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ e $z_3 = (x_3, y_3)$, então

Para a soma temos:

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2) + z_3 &= [(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] + (x_3, y_3) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3) \end{aligned}$$

Usando a propriedade associativa da soma dos números reais

$$= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = (x_1, y_1) + [(x_2, y_2) + (x_3, y_3)] = z_1 + (z_2 + z_3).$$

E para a multiplicação:

$$\begin{aligned} (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 &= [(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)] \cdot (x_3, y_3) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) \cdot (x_3, y_3) \\ &= (x_1x_2x_3 - y_1y_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3, x_1x_2y_3 - y_1y_2y_3 + x_1y_2x_3 + x_2y_1x_3) \end{aligned}$$

Usando a propriedade associativa da multiplicação dos números reais

$$= (x_1, y_1) \cdot (x_2x_3 - y_2y_3, x_2y_3 + y_2x_3) = (x_1, y_1) \cdot [(x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3)] = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3).$$

c) A adição e multiplicação possuem elemento neutro, denominados , respectivamente, identidade aditiva e identidade multiplicativa: $(0,0)$ para a adição e $(1,0)$ para a multiplicação.

Existe um único número complexo $0 = (0,0)$ e um único complexo $1 = (1,0)$ tais que

$$z + 0 = 0 + z = z \text{ e } z \cdot 1 = 1 \cdot z = z, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Demonstração:

Sejam $z = (x, y)$, $0 = (0,0)$ e $1 = (1,0)$, então

Para a soma:

$$z + 0 = (x, y) + (0,0) = (x + 0, y + 0)$$

Pela comutatividade e pelo elemento neutro da soma dos números reais

$$= (0 + x, 0 + y) = (x, y) = z.$$

E para a multiplicação:

$$z \cdot 1 = (x, y) \cdot (1,0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1) =$$

Usando a propriedade comutativa e o elemento neutro da multiplicação dos números reais

$$= (1x - 0y, 0x + 1y) = (x, y) = z.$$

d) A adição possui um inverso aditivo, também chamado de oposto ou simétrico e, se $(x, y) \neq (0, 0)$, existe também o inverso multiplicativo

Para todo $z \in \mathbb{C}$ existe um $z' \in \mathbb{C}$ tal que $z + z' = 0 = z' + z$, este é o inverso aditivo; E para qualquer número complexo $z = (x, y) \in \mathbb{C}^*$ existe um número $z^{-1} = (x', y') \in \mathbb{C}$ tal que $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$ e $(x', y') = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$.

Demonstração:

Para o inverso aditivo consideremos $z = (x, y)$ e tomemos $z' = (-x, -y)$, então

$$\begin{aligned} z + z' &= (x, y) + (-x, -y) = [x + (-x), y + (-y)] = (x - x, y - y) = 0 \\ &= (-x + x, -y + y) = [(-x) + x, (-y) + y] = (-x, -y) + (x, y) = z' + z. \end{aligned}$$

Portanto $z + z' = z' + z = 0$.

Para demonstrar o inverso multiplicativo, inicialmente observe que $(x, y) \neq (0, 0)$ implica que $x \neq 0$ ou $y \neq 0$ e $x^2 + y^2 \neq 0$.

Também já sabemos pela comutatividade da multiplicação que $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z$.

Assim,

$$z \cdot z^{-1} = 1 \Rightarrow (x, y) \cdot (x', y') = (1, 0) \Rightarrow (xx' - yy', xy' + x'y) = (1, 0),$$

equivalente ao sistema

$$\begin{cases} xx' - yy' = 1 \\ xy' + x'y = 0. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema obtemos

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2} \text{ e } y' = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Portanto o inverso multiplicativo do número complexo $z = (x, y) \in \mathbb{C}^* \text{ é } \frac{1}{z} = z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \in \mathbb{C}^*.$

e) A multiplicação é distributiva em relação a adição.

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3, \text{ para todo } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

Sejam $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ e $z_3 = (x_3, y_3)$, então,

$$\begin{aligned} z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= (x_1, y_1) \cdot [(x_2, y_2) + (x_3, y_3)] = (x_1, y_1) \cdot (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\ &= [x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3), x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3)] \end{aligned}$$

Aplicando a propriedade distributiva e reorganizando obtemos

$$\begin{aligned} &= (x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3, x_1y_2 + x_1y_3 + y_1x_2 + y_1x_3) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_3 + y_1x_3) \end{aligned}$$

$$= (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) + (x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3) = z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3.$$

2.1.3 Forma algébrica dos números complexos

Para introduzir a representação na forma algébrica, considere o conjunto $\mathbb{R} \times \{0\}$, juntamente com as operações de adição e multiplicação definidas em \mathbb{R}^2 . A função

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \{0\}, f(a) = (a, 0)$$

é bijetiva e ainda $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$ e $(x, 0) \cdot (y, 0) = (xy, 0)$.

Observe que quando o segundo elemento é nulo, o resultado depende somente do primeiro elemento, assim, podemos associar um par ordenado $(x, 0)$ a um número real x . Portanto pela bijeção de f , podemos usar a notação $(x, 0) = x$.

Definindo $i = (0, 1)$, temos:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = x + yi$$

ou

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy$$

Portanto a representação algébrica de um número complexo $z = (x, y)$ será $x + yi$. Podemos então escrever $\mathbb{C} = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\}$.

Nesse tipo de representação, o número real $x = Re(z)$ é denominado parte real do número complexo z , e o número real $y = Im(z)$ é denominado parte imaginária do número complexo z . Quando a $Re(z) = 0$ e $Im(z) \neq 0$, dizemos que o número é imaginário puro, pois $z = (0, y) = 0 + yi = yi$; Mas se $Re(z) \in \mathbb{R}$ e $Im(z) = 0$, dizemos que o número é real, pois $z = (x, 0) = x + 0i = x$.

A igualdade $i^2 = -1$ é obtida usando a multiplicação e a bijeção de f onde usamos a notação $(x, 0) = x$.

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1) = (-1, 0) = -1.$$

2.1.4 Operações com números complexos na forma algébrica

Considere os números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$. Temos então as operações:

a) Adição e subtração:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i,$$

$$z - w = (a + bi) - (c + di) = (a - b) + (c - d)i.$$

Portanto observamos que a adição e a subtração entre números complexos é feita somando-se (subtraindo-se) as partes reais e somando-se (subtraindo-se) as partes imaginárias separadamente.

c) Multiplicação:

$$z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = a \cdot c + a \cdot di + bi \cdot c + bi \cdot di = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Lembre que $i^2 = -1$.

d) Divisão:

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} = (a + bi) \frac{(c - di)}{c^2 + d^2} = z \cdot w^{-1}$$

Obtemos a divisão entre dois números complexos multiplicando o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador. A definição e propriedades sobre conjugado de um número complexo será abordada no item 2.1.6.

2.1.5 Potências do número i

Conhecendo as propriedades de potenciação em \mathbb{R} , podemos calcular as potências de i . Considere i^n , com $n \in \mathbb{Z}$, sabemos que $i^2 = -1$. Separando em dois casos, com $n \geq 0$ e $n < 0$:

Para $n \geq 0$ temos:

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^3 \cdot i = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i$$

$$\vdots$$

$$i^{4n} = 1$$

$$i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i = i$$

$$i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = -1$$

Percebemos que as potências de i são periódicas, cujo período é 4, logo, $i^n \in \{-1, 1, -i, i\}$ para todos os inteiro $n \geq 0$. Para calcular o resultado de uma potência $n \in \mathbb{N}$ de i , dividimos o expoente n de i por quatro, ou seja, $n = 4q + r$, com $r \in \{0, 1, 2, 3\}$, e tomamos o resto r da divisão como novo expoente.

Para $n < 0$ temos:

$$i^{-n} = (i^{-1})^n = \left(\frac{1}{i}\right)^n = (-i)^n.$$

Observação: Repare que $\frac{1}{i} = -i$. Isto se deve ao fato de que para efetuar a divisão entre números complexos multiplicamos numerador e denominador pelo conjugado do denominador, assunto que será tratado adiante.

Assim, no caso de expoentes inteiros negativos, o procedimento para o cálculo das potências de i é análogo ao caso anterior.

$$i^{-1} = (-i)^1 = -i$$

$$i^{-2} = (-i)^2 = -1$$

$$i^{-3} = (-i)^3 = i$$

$$i^{-4} = (-i)^4 = 1$$

$$i^{-5} = (-i)^5 = -i$$

⋮

2.1.6 Conjugado de um número complexo

Sendo $z = x + yi$, o número complexo $\bar{z} = x - yi$ é denominado de complexo conjugado ou conjugado complexo de z .

Propriedades:

Sejam z e w pertencentes a \mathbb{C} , então

a) A relação $z = \bar{z}$ é válida se e somente se $z \in \mathbb{R}$;

Demonstração:

Se $z = x + yi$, então a relação $z = \bar{z}$ equivale a $x + yi = x - yi$. Logo $x = x$ e $y = -y \Leftrightarrow 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0$, logo $z = x \in \mathbb{R}$.

b) A relação $\bar{\bar{z}} = -z$ é válida se e somente se z é um número imaginário puro;

Demonstração:

Se $z = x + yi$, então a relação $\bar{z} = -z$ equivale a $x - yi = -(x + yi) = -x - yi$. Logo $x = -x \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e $-y = -y \Leftrightarrow y = y$; logo $z = yi$ é um número imaginário puro.

c) Para qualquer complexo z a relação $z = \bar{\bar{z}}$ é válida;

Demonstração:

Temos que $z = x + yi$, então $\bar{z} = x - yi$ e $\bar{\bar{z}} = x - (-y)i = x + yi = z$.

d) Para qualquer complexo z o número $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$ é um número real não negativo;

Demonstração:

Considere $z = x + yi$, então $z \cdot \bar{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 - xyi + xyi - y^2i^2 = x^2 + y^2 \geq 0$.

e) Para quaisquer complexos $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ (o conjugado de uma soma é a soma dos conjugados);

Demonstração:

Considere $z = x + yi$ e $w = m + ni$. Temos $\overline{z + w} = \overline{(x + yi) + (m + ni)} = \overline{(x + m) + (y + n)i} = (x + m) - (y + n)i = (x - yi) + (m - ni) = \bar{z} + \bar{w}$.

f) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ (o conjugado de um produto é o produto dos conjugados);

Demonstração:

Considere $z = x + yi$ e $w = m + ni$. Temos $\overline{z \cdot w} = \overline{(x + yi) \cdot (m + ni)} = \overline{(xm - yn) + (xn + ym)i} = (xm - yn) - (xn + ym)i = (x - yi) \cdot (m - ni) = \bar{z} \cdot \bar{w}$.

g) Para qualquer complexo não nulo z , a relação $\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$ é válida;

Demonstração:

Como $z \cdot \frac{1}{z} = 1$, temos que $\overline{\left(z \cdot \frac{1}{z}\right)} = \bar{1} = 1$. Usando a propriedade f), temos $\overline{\left(z \cdot \frac{1}{z}\right)} = \bar{z} \cdot \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \bar{z} \cdot \bar{z}^{-1} = 1$, levando a $\bar{z}^{-1} = (\bar{z})^{-1}$.

h) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$, $w \neq 0$ (o conjugado de um quociente é o quociente dos conjugados);

Demonstração:

Usando as propriedades *f)* e *g)* temos $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(z \frac{1}{w}\right)} = \bar{z} \cdot \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \bar{z} \cdot \frac{1}{\bar{w}} = \bar{z} \cdot \frac{1}{\bar{w}} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$.

i) As fórmulas $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ e $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2}$ são válidas para todo $z \in \mathbb{C}$;

Demonstração:

Considere $z = x + yi$. Observe que $z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x$ e

$z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi$, segue que $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ e $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2}$.

As propriedades *e)* e *f)* podem ser estendidas, usando o Princípio de Indução Finita, para:

$$e') \overline{\left(\sum_{k=1}^n z_k\right)} = \sum_{k=1}^n \bar{z}_k \quad e \quad f') \overline{\left(\prod_{k=1}^n z_k\right)} = \prod_{k=1}^n \bar{z}_k,$$

para todo $z_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

E como consequência de *e')* e *f')* temos: $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$ para inteiro n e qualquer $z \in \mathbb{C}$.

2.1.7 Módulo de um número complexo

O número $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ é chamado de módulo ou valor absoluto do número complexo $z = x + yi$.

Propriedades:

Sejam $z, w \in \mathbb{C}$, então

a) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$;

Demonstração:

Se $z = x + yi$, então $|-z| = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ e $|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$. Portanto $|z| = |-z| = |\bar{z}|$.

b) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$;

Demonstração:

Se $z = x + yi$, então $z \cdot \bar{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 + y^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = |z|^2$.

$$c) |z| = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{z} = \bar{z};$$

Demonstração:

Usando a propriedade *b*) temos $|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$.

$$d) |z \cdot w| = |z| \cdot |w| \text{ (O módulo de um produto é o produto dos módulos);}$$

Demonstração:

Usando a propriedade *b*) temos $|z \cdot w|^2 = (z \cdot w) \cdot \overline{(z \cdot w)} = (z \cdot w) \cdot (\bar{z} \cdot \bar{w}) = |z|^2 \cdot |w|^2$ e conseqüentemente $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, pois $|z| \geq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

$$e) |z^{-1}| = |z|^{-1}, z \neq 0;$$

Demonstração:

Note que a relação $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ implica $|z| \cdot \left| \frac{1}{z} \right| = 1$ ou $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$. Então $|z^{-1}| = |z|^{-1}$.

$$f) \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}, w \neq 0 \text{ (O módulo de um quociente é o quociente dos módulos);}$$

Demonstração:

Usando as propriedades *d*) e *e*), temos:

$$\left| \frac{z}{w} \right| = \left| z \cdot \frac{1}{w} \right| = |z \cdot w^{-1}| = |z| \cdot |w^{-1}| = |z| \cdot |w|^{-1} = \frac{|z|}{|w|}.$$

$$g) |z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|;$$

Demonstração:

Observe que aplicando os itens *b*) (2.1.7) e *e*) (2.1.6) a $|z_1 + z_2|^2$ temos:

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2) \cdot \overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2) \cdot (\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2$$

Como $\overline{\bar{z}_1 \cdot z_2} = z_1 \cdot \bar{z}_2 = \bar{z}_1 \cdot z_2$ (itens *c* e *f* de 2.1.6) temos

$$z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq 2|z_1 \bar{z}_2| = 2|z_1| \cdot |z_2|$$

Portanto

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$

E conseqüentemente $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Para a desigualdade do lado esquerdo temos:

$$|z_1| = |z_1 + z_2 - z_2| = |(z_1 + z_2) + (-z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2| = |z_1 + z_2| + |z_2|$$

Assim

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_2| - |z_2| = |z_1 + z_2|.$$

h) $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;

Demonstração:

$$\text{Observe que } |z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| = |(z_1 - z_2) + (z_2)| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$$

$$\text{Portanto } |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| - |z_2| = |z_1 - z_2|.$$

Para a outra desigualdade temos:

$$|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \leq |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|.$$

2.2 Representação Geométrica dos números complexos

No início do século XIX, Gauss e outros matemáticos observaram que assim como cada ponto da reta poderia ser associado a um número real, cada ponto do plano poderia ser associado a um número complexo.

Temos definido o número complexo como $z = (x, y) = x + yi$ como sendo um par ordenado de números reais $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, portanto convencionou-se associar o número complexo $z = x + yi$ a um ponto $M(x, y)$, denominado afixo, imagem geométrica de z ou lugar geométrico do número complexo, no plano \mathbb{R}^2 . Essa correspondência é biunívoca.

O plano cartesiano onde são representados os números complexos é denominado Plano Complexo, Plano de Argand, Plano de Argand-Gauss ou plano Gaussiano. Neste plano, o eixo das abscissas é denominado eixo real (*Re*) e o eixo das ordenadas é o eixo imaginário (*Im*).

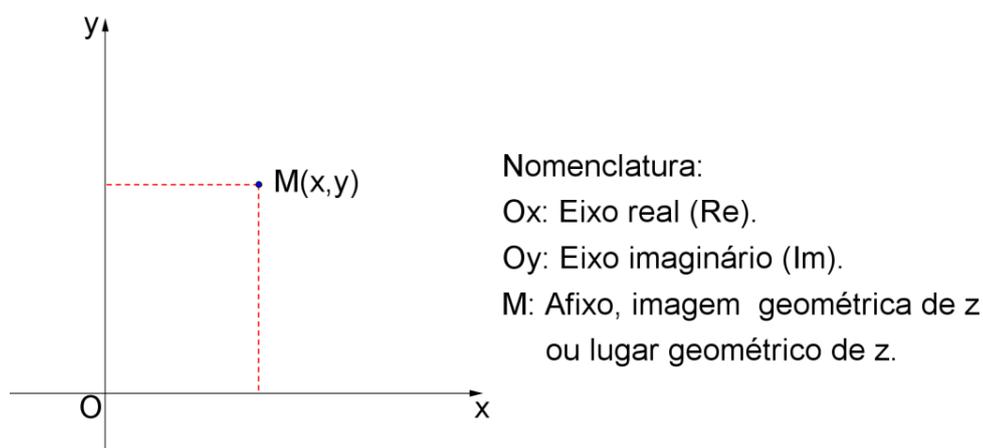


Figura 7: Representação de um número complexo no plano de Argand-Gauss.

Também podemos identificar um número complexo como um vetor. Assim, o número complexo $z = x + yi$ será representado pelo vetor $\vec{z} = \overline{OM}$, onde O é a origem do plano e $M(x, y)$ o lugar geométrico do número complexo z .

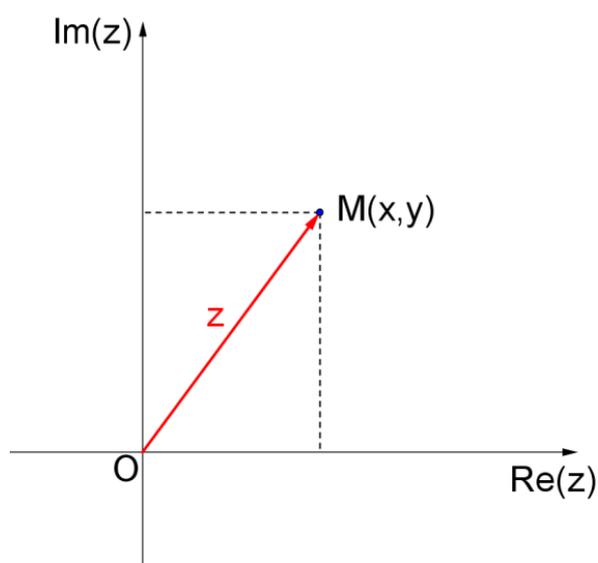


Figura 8: Representação do número complexo como vetor.

Muitos resultados geométricos que serão visualizados neste e no próximo podem ser também visualizados através do GeoGebra. Para tanto, inicialmente vamos observar a forma de introduzir um número complexo no software:

Para introduzir os números complexos $w = -1 + 5i$ e $z = 2 + 4i$, basta digitar estas igualdades, uma a uma, na linha de comando *entrada* do GeoGebra e pressionar *enter*:

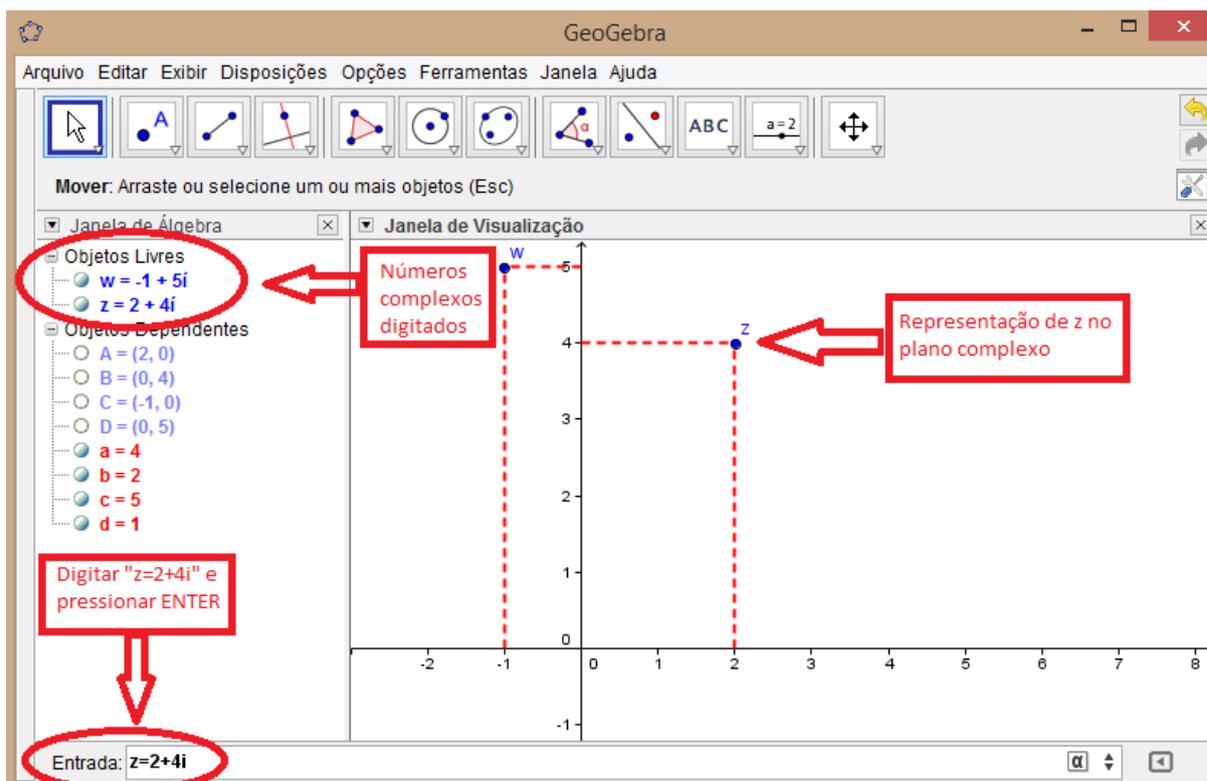


Figura 9: Inserção de números complexos no GeoGebra.

2.2.1 Interpretação geométrica da adição e da subtração

Considere os números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$ e seus respectivos vetores \vec{u} e \vec{v} .

A soma dos números complexos $z + w = (a + c) + (b + d)i$ corresponde a soma dos vetores $\vec{u} + \vec{v} = (a + c, b + d)$. Portanto a soma será representada pela diagonal do paralelogramo cujos lados adjacentes são \vec{u} e \vec{v} .

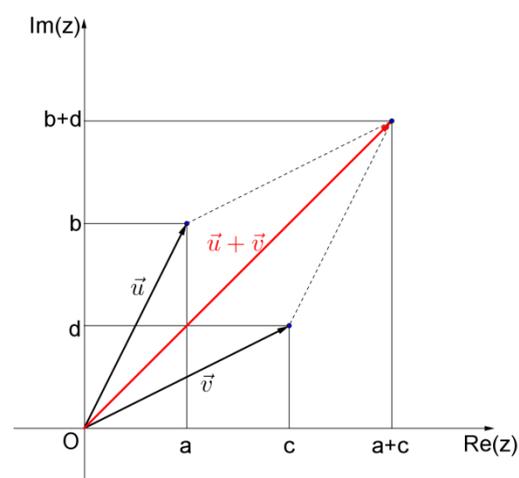


Figura 10: Representação geométrica da soma.

A subtração é obtida somando-se o número complexo z com o oposto do número complexo w , ou seja, $z + (-w) = z - w = (a - c) + (b - d)i$, que corresponde a soma do vetor \vec{u} com o oposto do vetor \vec{v} : $\vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} - \vec{v} = (a - c, b - d)$. A subtração será representada pela diagonal do paralelogramo cujos lados adjacentes são \vec{u} e $-\vec{v}$.

No plano Gaussiano dois números complexos opostos são simétricos em relação a origem.

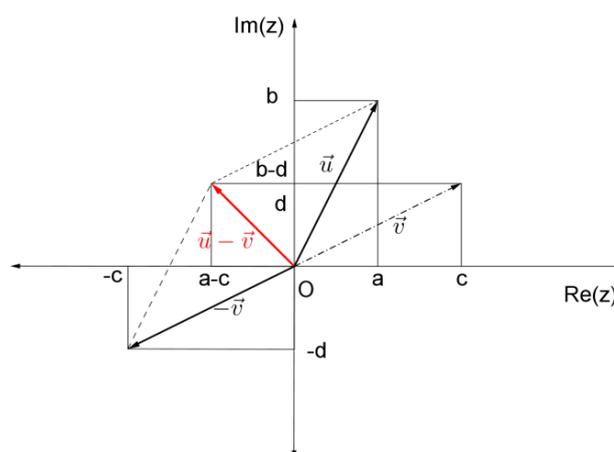


Figura 11: Representação geométrica da subtração.

2.2.2 Interpretação geométrica do módulo de um número complexo.

Vamos considerar o número complexo $z = x + yi$, seu lugar geométrico no plano de Argand-Gauss $M(x, y)$ e sua forma vetorial \vec{u} . A distância OM , entre a origem O e o ponto M , é dada, na geometria Euclidiana, pela fórmula:

$$OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2}.$$

Logo, $OM = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| = |\vec{u}|$. Portanto o módulo de um número complexo é o comprimento do segmento OM ou o módulo (ou norma) do vetor \vec{u} .

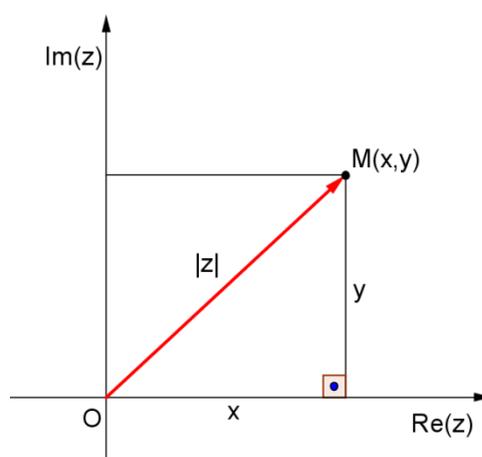


Figura 12: Representação geométrica do módulo de z .

2.2.3 Interpretação geométrica do conjugado e do oposto de um número complexo.

O lugar geométrico do conjugado \bar{z} de um número complexo $z = x + yi$ é a reflexão $M'(x, -y)$, ao longo do eixo real $\text{Re}(z)$, do ponto $M(x, y)$. Já o lugar geométrico do oposto (ou inverso aditivo) $-z$ do número complexo z é a reflexão $M''(-x, -y)$, em relação a origem, do ponto $M(x, y)$.

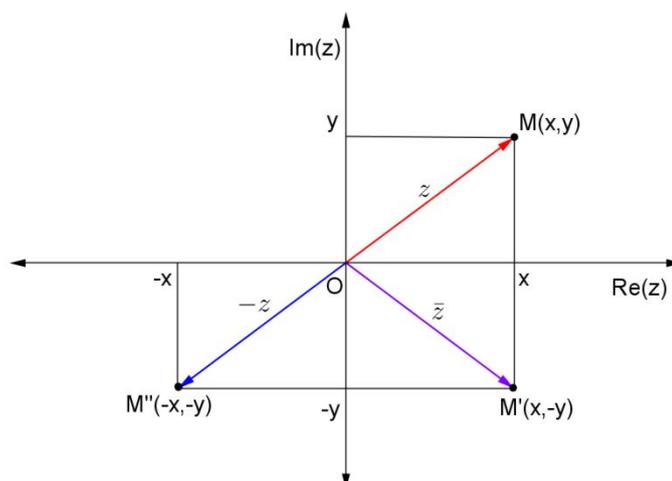


Figura 13: Conjugado e oposto de um número complexo.

Para visualizar estas representações geométricas no GeoGebra, vamos utilizar os números complexos $z = 3 + i$ e $w = 2 + 3i$ (o leitor, caso queira, pode utilizar outros). Também, para facilitar a visualização, utilizaremos a ferramenta vetor.

Procedimento:

- 1) Insira os complexos z e w no Geogebra.
- 2) Utilizando a ferramenta vetor, crie um vetor da origem até cada um dos complexos representados.
- 3) Para representar a soma, digite na linha *comando* $z + w$. Ligue o novo ponto que aparece com um vetor a partir da origem.

Observação: Para a subtração fazemos $z - w$ ou, se for o caso, $w - z$. Para determinar o valor do módulo utilizamos a ferramenta *Distância*, para o oposto de z digitamos na linha de comando $-z$ e para o conjugado de z escrevemos na linha de comando *conjugate*(z).

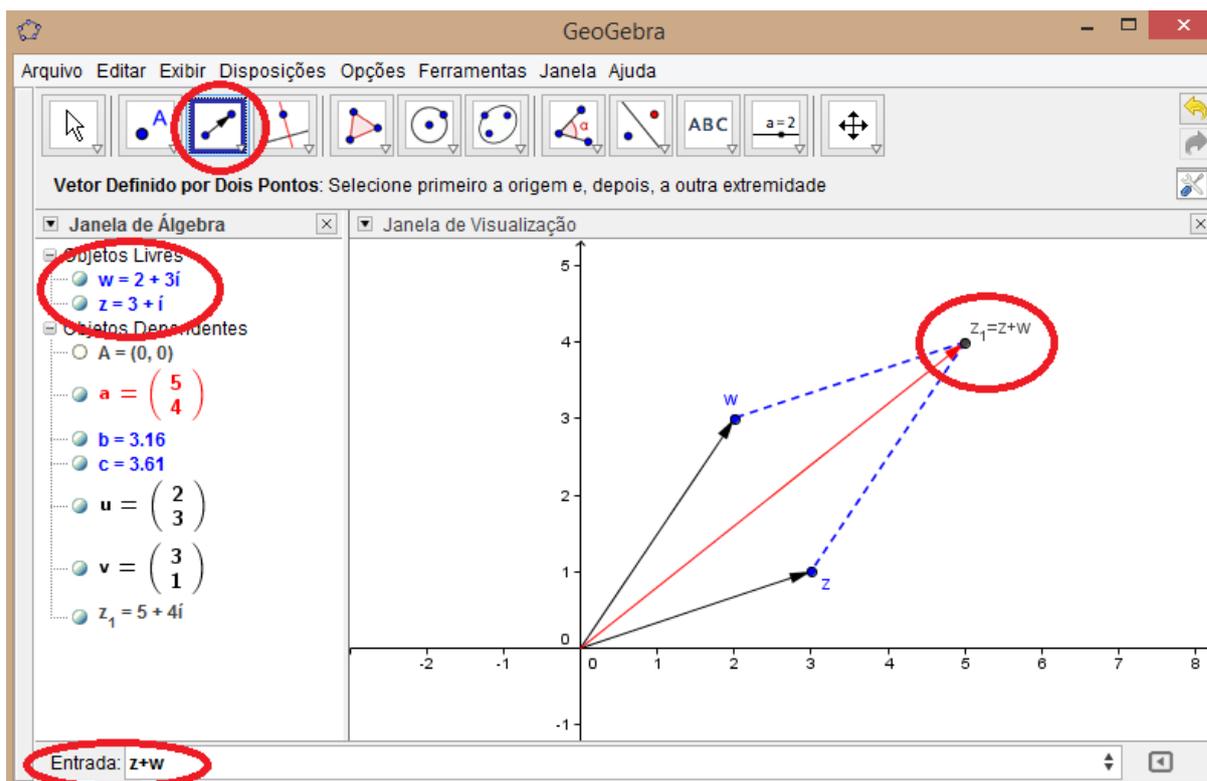


Figura 14: Representação geométrica da soma no GeoGebra.

2.3 Representação Polar ou Trigonométrica dos números complexos

Consideremos o número complexo $z = x + yi$, representado pelo lugar geométrico $M(x, y)$ no plano de Argand-Gauss. O número real $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ é chamado de raio polar do ponto M .

O ângulo, medido no sentido anti-horário, $\theta \in [0, 2\pi)$ formado entre o eixo real ($\text{Re}(z)$) e o vetor \overrightarrow{OM} é denominado Argumento Polar, ou somente Argumento, do número complexo z . É indicado por $\text{arg } z$.

O argumento do número complexo z é determinado através das razões trigonométricas no triângulo OMX :

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{\rho} \Rightarrow y = \rho \cdot \text{sen } \theta$$

$$\text{cos } \theta = \frac{x}{\rho} \Rightarrow x = \rho \cdot \text{cos } \theta$$

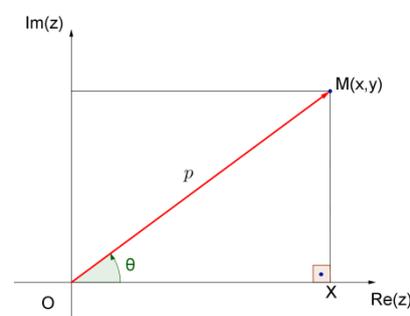


Figura 15: Argumento de z .

Substituindo as relações anteriores em $z = x + yi$ obtemos:

$$z = x + yi \Rightarrow z = \rho \cdot \cos \theta + (\rho \cdot \operatorname{sen} \theta)i$$

$$z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta),$$

onde $\rho \in [0, \infty)$ e $\operatorname{arg} z = \theta \in [0, 2\pi)$.

Esta expressão é denominada forma trigonométrica ou polar de um número complexo.

No GeoGebra, podemos determinar a forma polar de um número complexo utilizando as ferramentas *distância* e *medida de ângulo*. Observe o caso do número $z = 2 + 2i$.

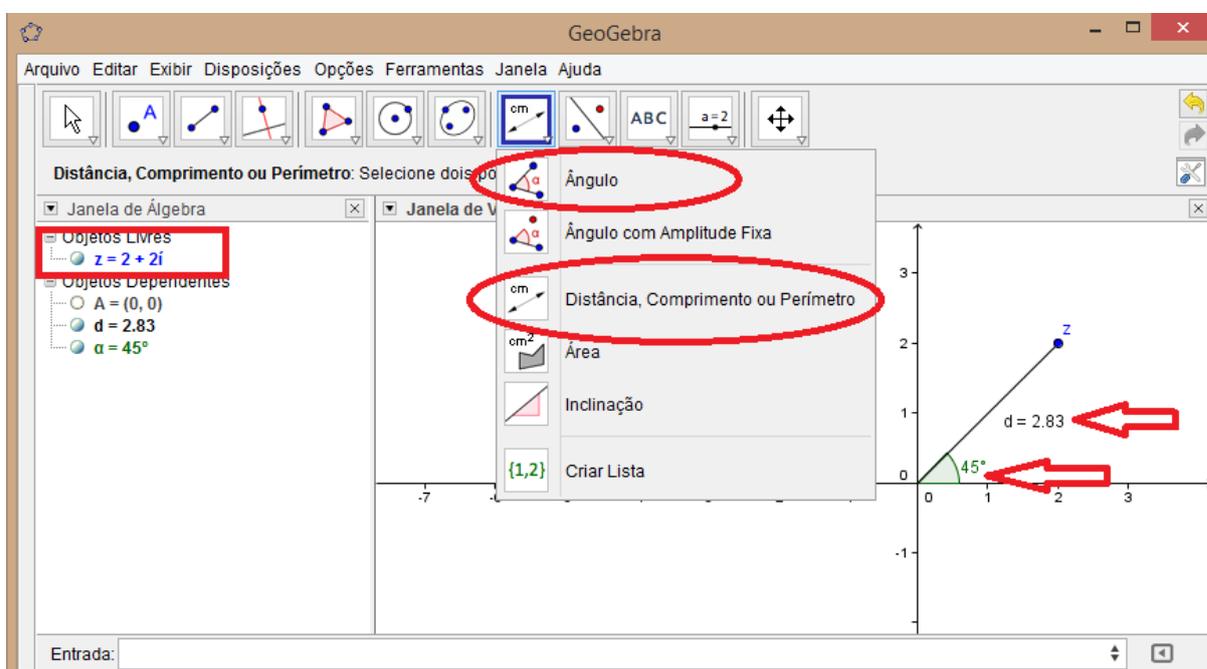


Figura 16: Módulo e argumento no GeoGebra.

Assim, o módulo de z é $2,83 \cong 2\sqrt{2}$ e o argumento 45° . Portanto a forma trigonométrica é

$$z = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right)$$

Outra maneira de determinar o argumento do complexo z é digitar na linha de comando $\operatorname{arg}(z)$.

2.3.1 Operações com números complexos na forma trigonométrica.

As operações de multiplicação, divisão e potenciação tornam-se mais simples quando utilizamos os números complexos na forma trigonométrica.

2.3.1.1 Multiplicação:

Considere dois números complexos z_1 e z_2 , não nulos, representados na forma trigonométrica $z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$. Então

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen} (\theta_1 + \theta_2)].$$

Demonstração:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \cdot \rho_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \cdot (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + i \cdot \cos \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2 + i \cdot \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + i^2 \cdot \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 [(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2) + i \cdot (\cos \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \cos \theta_2)]$$

Aplicando as propriedades trigonométricas da soma e subtração de arcos obtemos:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen} (\theta_1 + \theta_2)].$$

Esta igualdade pode ser estendida para $n \geq 2$ números complexos. Se

$$z_k = \rho_k(\cos \theta_k + i \operatorname{sen} \theta_k), k = 1, 2, \dots, n,$$

então

$$z_1 \cdot z_2 \dots z_n = \rho_1 \cdot \rho_2 \dots \rho_n [\cos (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \operatorname{sen} (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)]$$

A prova é feita por indução. Essa relação pode ser reescrita como

$$\prod_{k=1}^n z_k = \prod_{k=1}^n \rho_k \left(\cos \sum_{k=1}^n \theta_k + i \operatorname{sen} \sum_{k=1}^n \theta_k \right)$$

Portanto, da fórmula da multiplicação podemos extrair que o argumento do produto é igual a soma dos argumentos dos complexos dos fatores.

$$\operatorname{arg} (z_1 z_2) = \operatorname{arg} z_1 + \operatorname{arg} z_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Geometricamente, a multiplicação entre números complexos significa efetuar uma rotação do vetor que representa z_2 , no sentido anti-horário e em torno da origem, por um ângulo igual ao argumento de z_1 ,

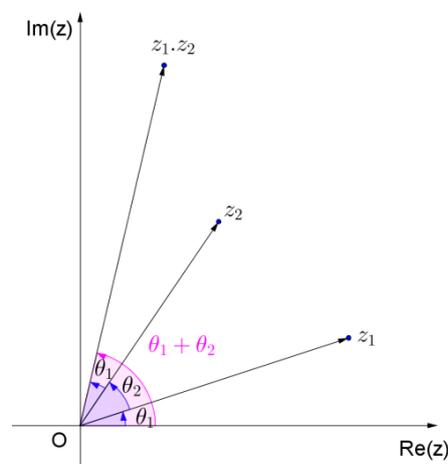


Figura 17: Produto entre números complexos.

seguido de uma contração ou expansão do vetor que representa z_2 . O raciocínio é análogo caso rotacione z_1 .

2.3.1.2 Divisão:

Sejam os números complexos na forma trigonométrica $z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$, com $z_2 \neq 0$. Então

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen} (\theta_1 - \theta_2)].$$

Demonstração:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)}{\rho_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)}{\rho_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)} \cdot \frac{(\cos \theta_2 - i \operatorname{sen} \theta_2)}{(\cos \theta_2 - i \operatorname{sen} \theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - i \cos \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - i^2 \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2)}{(\cos^2 \theta_2 - i \cos \theta_2 \cdot \operatorname{sen} \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2 \cdot \cos \theta_2 - i^2 \operatorname{sen}^2 \theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2)}{(\cos^2 \theta_2 + \operatorname{sen}^2 \theta_2)}$$

Aplicando as propriedades trigonométricas da soma e subtração de arcos e lembrando que $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, obtemos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen} (\theta_1 - \theta_2)].$$

Portanto, da fórmula acima podemos extrair que o argumento do quociente é igual a diferença dos argumentos dos complexos dividendo e divisor.

Geometricamente, a divisão $\frac{z_1}{z_2}$, $z_2 \neq 0$

significa efetuar uma rotação do vetor que representa

z_1 , no sentido horário e em torno da origem, por um

ângulo igual ao argumento de z_2 , seguido de uma contração ou expansão do vetor que

representa z_1 . O raciocínio é análogo caso divida z_2 por z_1 .

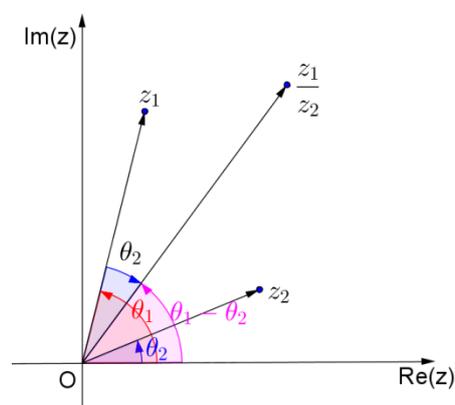


Figura 18: Quociente entre números complexos.

2.3.1.3 Potenciação (1ª Lei de Moivre¹¹):

Seja o número complexo $z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$. Dado um número n natural não nulo temos:

$$z^n = \rho^n [\cos (n\theta) + i \operatorname{sen} (n\theta)].$$

Demonstração:

A potenciação é um caso particular da multiplicação, pelo item 2.3.1.1 temos que

$$z_1 \cdot z_2 \dots z_n = \rho_1 \cdot \rho_2 \dots \rho_n [\cos (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \operatorname{sen} (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)]$$

Tomando $z = z_1 = z_2 = \dots = z_n$, tem-se

$$z^n = \underbrace{\rho \cdot \rho \cdot \rho \dots \rho}_{n \text{ vezes}} \left[\cos \left(\underbrace{\theta + \theta + \dots + \theta}_{n \text{ vezes}} \right) + i \operatorname{sen} \left(\underbrace{\theta + \theta + \dots + \theta}_{n \text{ vezes}} \right) \right]$$

$$z^n = \rho^n [\cos (n\theta) + i \operatorname{sen} (n\theta)].$$

A fórmula de Moivre pode ser estendida para expoentes inteiros negativos:

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{\rho^n [\cos (n\theta) + i \operatorname{sen} (n\theta)]}$$

$$z^{-n} = \frac{1}{\rho^n [\cos (n\theta) + i \operatorname{sen} (n\theta)]} \cdot \frac{[\cos (n\theta) - i \operatorname{sen} (n\theta)]}{[\cos (n\theta) - i \operatorname{sen} (n\theta)]}$$

$$z^{-n} = \frac{1}{\rho^n} \cdot \frac{[\cos (n\theta) - i \operatorname{sen} (n\theta)]}{[\cos^2 (n\theta) + \operatorname{sen}^2 (n\theta)]}$$

$$z^{-n} = \rho^{-n} \cdot [\cos (-n\theta) + i \operatorname{sen} (-n\theta)].$$

Portanto

$$z^n = \rho^n [\cos (n\theta) + i \operatorname{sen} (n\theta)], \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Da fórmula acima podemos escrever $\arg z^n = \{n \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

2.3.1.4 Radiciação (2ª Lei de Moivre):

Considere um número natural $n \geq 2$ e um número complexo $z_0 \neq 0$. Assim como no campo dos números reais, a equação $Z^n - z_0 = 0$ é usada para definir as raízes enésimas do

¹¹ Abraham de Moivre (1667-1754), Matemático Francês pioneiro na teoria das probabilidades e na trigonometria.

complexo z_0 . Portanto, cada solução da equação $Z^n - z_0 = 0$ é chamada de uma raiz enésima do número complexo z_0 .

(2ª Lei de Moivre) Seja o número complexo $z_0 = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, $\rho > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. O complexo z_0 possui n raízes enésimas distintas, dadas pela fórmula

$$Z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right], \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Demonstração:

Usando $Z = r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$, $z_0 = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ e a definição $Z^n - z_0 = 0$, temos

$$Z^n - z_0 = 0 \Rightarrow Z^n = z_0 \Rightarrow r^n [\cos(n\varphi) + i \operatorname{sen}(n\varphi)] = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

Logo, pela igualdade acima obtemos:

$$r^n = \rho \text{ e } n\varphi = \theta + 2k\pi, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

Manipulando algebricamente,

$$r = \sqrt[n]{\rho} \text{ e } \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

Até agora as raízes da equação $Z^n - z_0 = 0$ são

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} (\cos \varphi_k + i \operatorname{sen} \varphi_k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Observe agora que $0 \leq \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_{n-1} < 2\pi$, portanto os números φ_k , $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ são argumentos reduzidos.

Até agora tínhamos n raízes distintas de z_0 :

$$Z_0, Z_1, \dots, Z_{n-1}$$

Considere um inteiro k e seja $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ o resto de k módulo n . Assim $k = nq + j$, para algum $q \in \mathbb{Z}$ e

$$\varphi_k = \frac{\theta}{n} + (nq + j) \frac{2\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + j \frac{2\pi}{n} + 2q\pi = \varphi_j + 2q\pi.$$

Vemos que $Z_k = Z_j$. Assim $\{Z_k : k \in \mathbb{Z}\} = \{Z_0, Z_1, \dots, Z_{n-1}\}$.

Existem exatamente n raízes enésimas distintas z_0 , como afirmado.

Os lugares geométricos das raízes enésimas de um número complexo $z_0 \neq 0$ são os vértices de um n -ágono regular inscrito em uma circunferência com centro na origem e raio $\sqrt[n]{\rho}$.

Para demonstrar isso, denote M_0, M_1, \dots, M_{n-1} como sendo pontos de coordenadas complexas Z_0, Z_1, \dots, Z_{n-1} . Como $OM_k = |Z_k| = \sqrt[n]{\rho}$ para todo $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, segue que os pontos M_k situam-se na circunferência $C(O; \sqrt[n]{\rho})$. Por outro lado, a medida do arco $M_k M_{k+1}$ é igual a $\arg M_{k+1} - \arg M_k = \frac{\theta + 2(k+1)\pi - (\theta - 2k\pi)}{n} = \frac{2\pi}{n}$, para todo $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ e o arco remanescente $\overbrace{M_{n-1} M_0}^{\text{arco}}$ é $\frac{2\pi}{n} = 2\pi - (n-1) \frac{2\pi}{n}$.

Como todos os arcos $\overbrace{M_0 M_1}^{\text{arco}}, \overbrace{M_1 M_2}^{\text{arco}}, \dots, \overbrace{M_{n-1} M_0}^{\text{arco}}$, são iguais, o polígono $M_0 M_1 M_2 \dots M_{n-1}$ é regular.

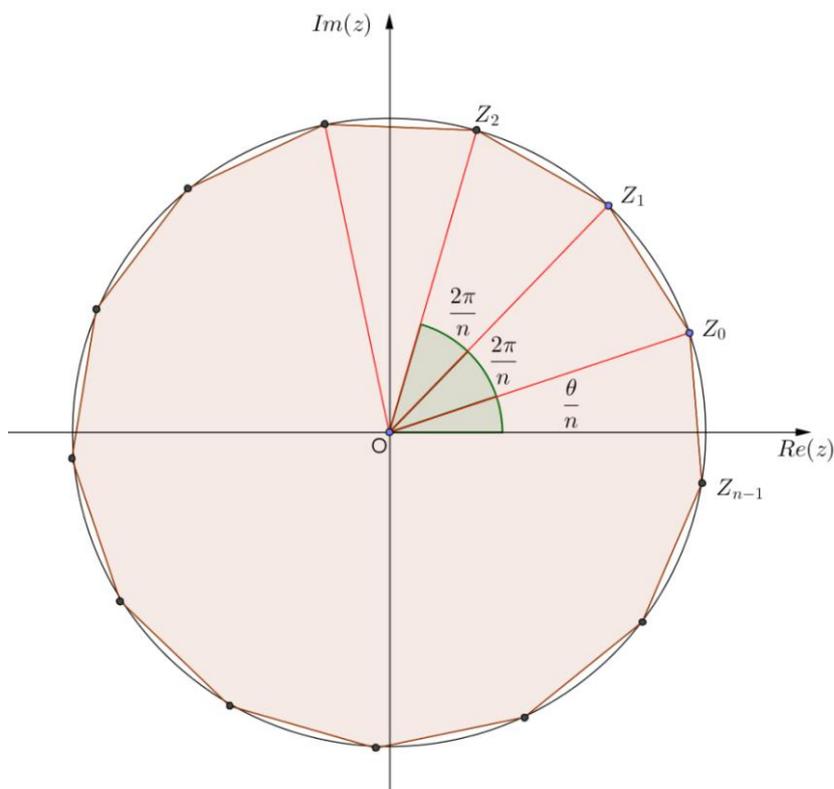


Figura 19: Representação geométrica das raízes n -ésimas.

No GeoGebra, também podemos introduzir um número complexo na forma Polar. Para isso basta digitar na linha de comando a igualdade. Digitamos os ângulo em radianos.

Como exemplo observe a representação geométrica do número

$$w = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right)$$

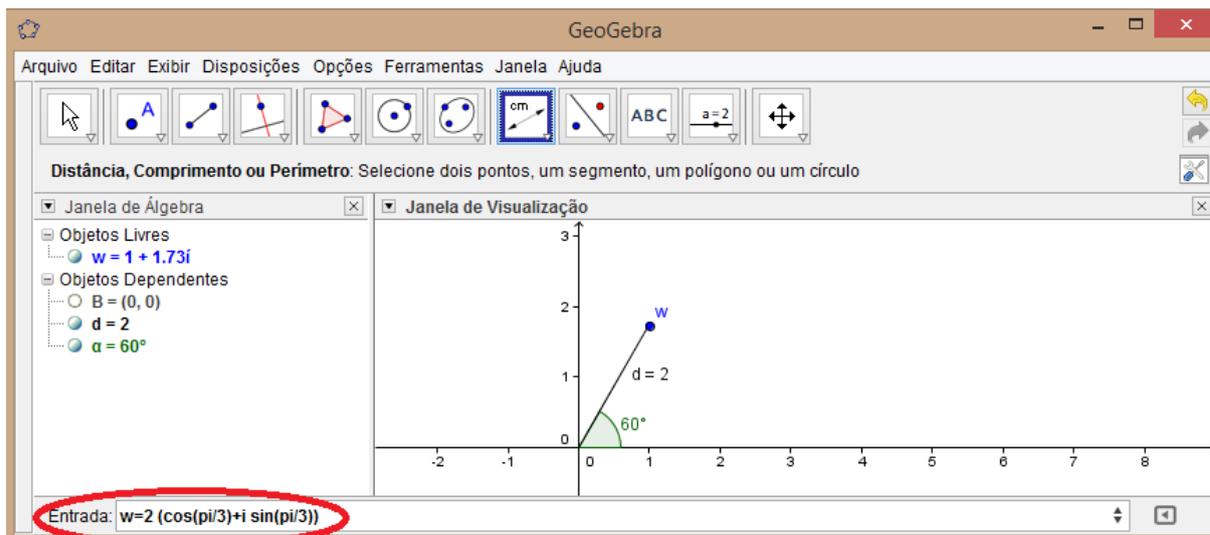


Figura 20: Número complexo na forma polar.

Perceba que após incluir o número complexo na forma polar, o GeoGebra o apresenta na forma algébrica no item objetos livres na janela de álgebra.

Para representar as operações de multiplicação, divisão e potenciação, basta introduzir os números com os quais queremos operar e após efetuar as operações de maneira análoga à explicada na página 31.

Observe o caso em que queremos determinar $w = z^3$ onde $z = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$

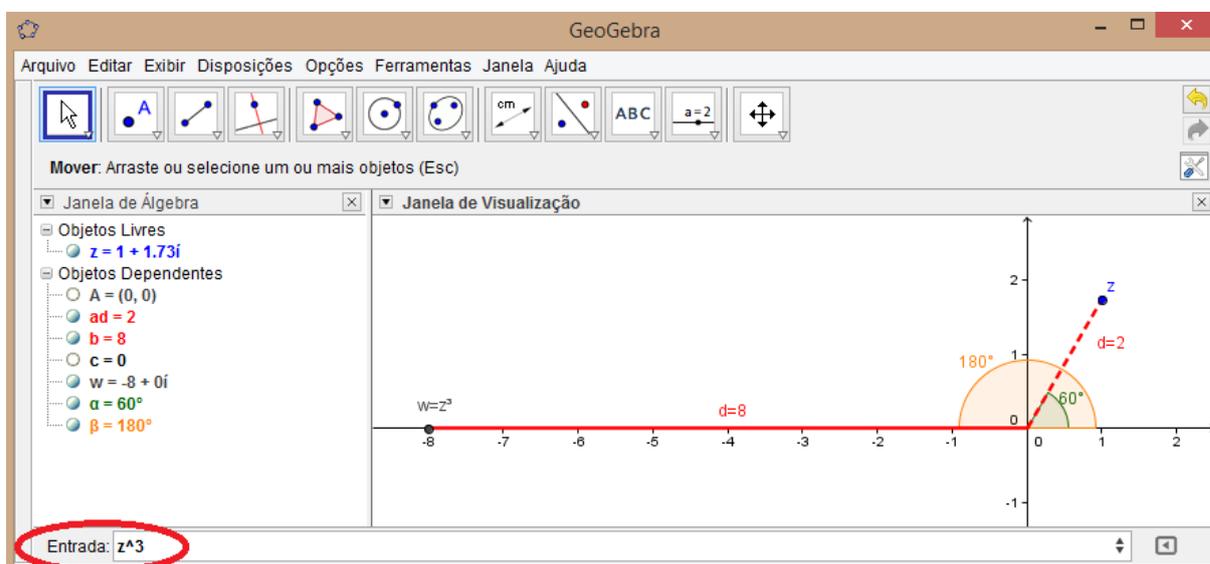


Figura 21: Potência de um número complexo.

Assim, $w = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$.

Veja a seguir como representar a radiciação de um número complexo no GeoGebra:

Vamos fazer, como exemplo, $W_k = \sqrt[10]{z}$ onde $z = 3 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right)$

Procedemos da seguinte maneira:

- 1) No GeoGebra insira um *controle deslizante* e configure-o de modo que seu nome seja representado por k , $\text{mín} = 0$, $\text{max} = 9$ e $\text{incremento} = 1$.

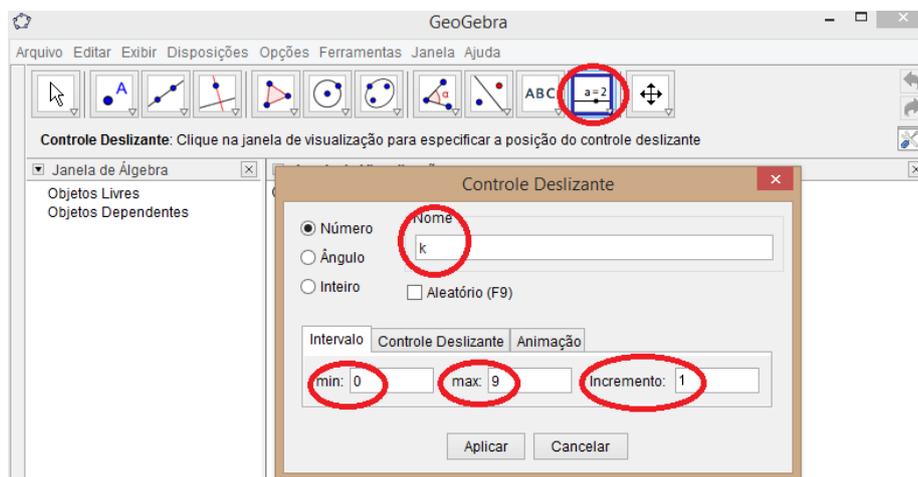


Figura 22: Controle deslizante no Geogebra.

- 2) Insira o número z na fórmula e esta no GeoGebra:

$$W = \sqrt[10]{3} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{10} + i \operatorname{sen} \frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{10} \right)$$

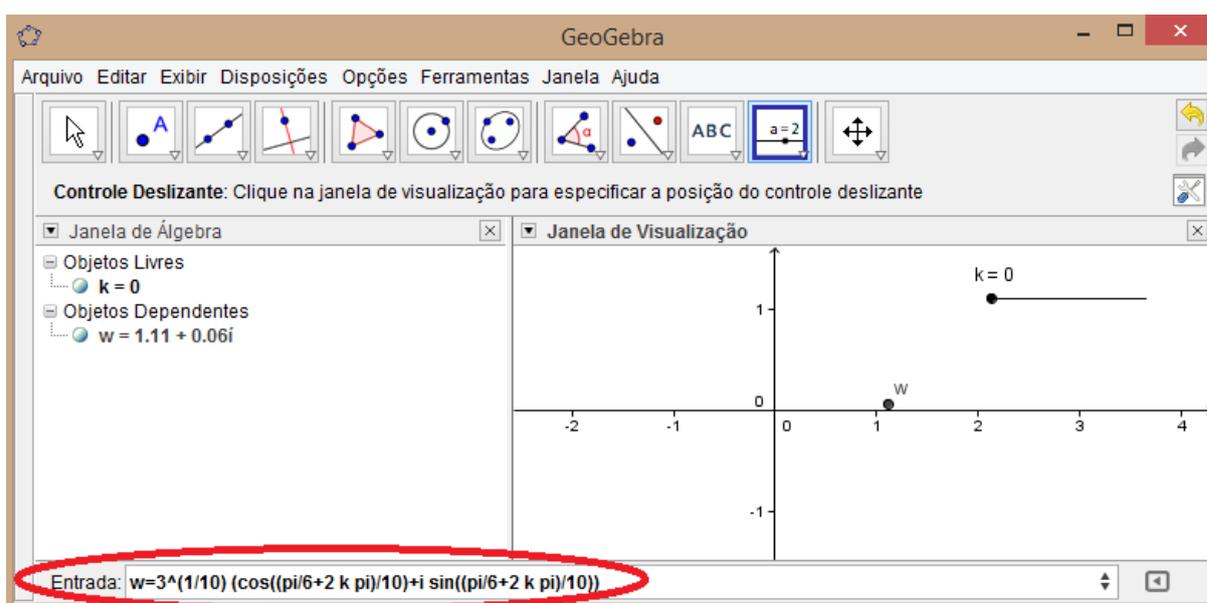


Figura 23: Radiciação de um número complexo no GeoGebra.

- 3) Clique com o botão direito sobre o ponto w e habilite o rastro. Você pode também, para ajudar na visualização, fazer um segmento de reta \overline{OW} , habilitando seu rastro, usar a ferramenta *ângulo* e ainda fazer uma circunferência com centro na origem e raio OW .

Agora movimente o valor de k na barra deslizante e observe o resultado.

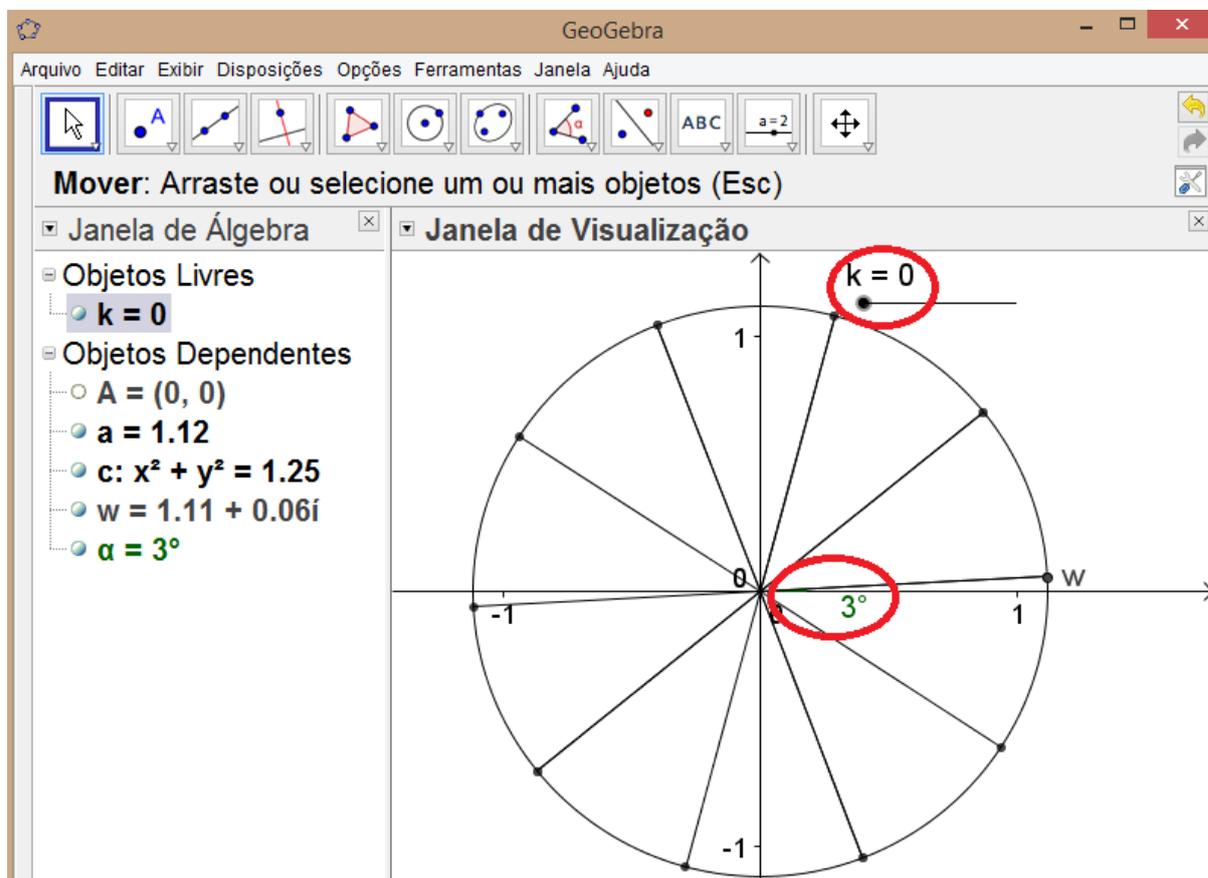


Figura 24: Representação da radiciação de z no GeoGebra.

Assim, para $k = 0$ temos que o ângulo formado entre o vetor \overline{OW} e o eixo $Re(z)$ é de 3° e $^{10}\sqrt{3} \cong 1,116$, logo $W_0 = 1,116 \left(\cos \frac{\pi}{60} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{60} \right)$.

Ao movimentar o valor de k podemos ver os demais raízes enésimas da unidade.

CAPÍTULO 03 - NÚMEROS COMPLEXOS E APLICAÇÕES NA GEOMETRIA

Neste capítulo trataremos da utilização dos números complexos na geometria plana. Além da parte teórica serão propostos exercícios sobre o tema.

3.1 Pontos e Ângulos.

Inicialmente enunciaremos alguns axiomas e definições da geometria Euclidiana plana, compilados de [3], que facilitarão o desenvolvimento do presente tópico:

Axioma I: A todo par de pontos do plano corresponde um número maior ou igual a zero. Este número é zero se e só se os pontos são coincidentes.

O número a que se refere este axioma é chamado de distância entre os pontos ou é referido como comprimento do segmento determinado pelos dois pontos.

Axioma II: Os pontos de uma reta podem ser colocados em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que a diferença entre estes números meça a distância entre os pontos correspondentes.

Utilizando este axioma juntamente com o Axioma I temos que o comprimento de um segmento AB é sempre maior que zero quando $A \neq B$ e igual a zero quando $A = B$. Assim, se a e b são as coordenadas das extremidades deste segmento, seu comprimento será a diferença entre o maior e o menor destes números. Isto equivale a tomar-se a diferença entre a e b em qualquer ordem e, em seguida, considerar o seu valor absoluto. Indicaremos o comprimento de AB pelo símbolo $d(AB)$

$$d(AB) = |b - a|$$

Axioma III: Se o ponto C encontra-se entre A e B na reta \overleftrightarrow{AB} , então $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$.

Definição I: Chamamos de ângulo a figura formada por duas semirretas com a mesma origem. As semirretas são chamadas de lados do ângulo e a origem comum, de vértice do ângulo.

Existem várias maneiras distintas de representar um ângulo. Uma delas é usando as letras que representam o

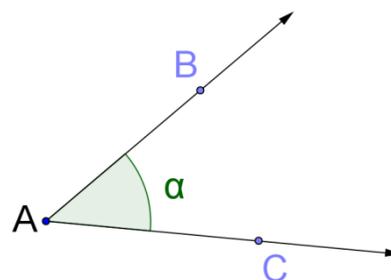


Figura 25: Ângulo

ângulo (conforme Figura 25: Ângulo). Assim temos a representação da forma $B\hat{A}C$ ou $C\hat{A}B$, onde a letra indicativa do vértice deve sempre aparecer entre as outras duas.

Quando nenhum outro ângulo tem o mesmo vértice, podemos usar apenas a letra designativa do vértice para representar o ângulo, ficando neste caso representado por \hat{A} . Tanto neste caso como no anterior, a letra designativa do vértice sempre recebe um acento circunflexo.

Também é comum a utilização de letras gregas para representação de ângulos. Neste caso é conveniente escrever a letra designativa do ângulo próximo ao seu vértice. (Conforme Figura 25: Ângulo).

Axioma IV: Todo ângulo tem uma medida maior ou igual a zero. A medida de um ângulo é zero se, e somente se, ele é constituído por duas semirretas coincidentes.

Para facilitar o enunciado do próximo axioma, vamos dar a seguinte definição:

Definição II: Diremos que uma semirreta divide um semiplano se ela estiver contida no semiplano e sua origem for um ponto da reta que o determina.

Axioma V: É possível colocar, em correspondência biunívoca, os números reais entre zero e 180 e as semirretas da mesma origem que dividem um dado semiplano, de modo que a diferença entre estes números seja a medida do ângulo formado pelas semirretas correspondentes.

Ao fazer tal correspondência chamamos o número que corresponde a uma dada semirreta de coordenada da semirreta. Assim, se a e b forem coordenadas dos lados do ângulo $A\hat{O}B$, então $|a - b|$

é a medida deste ângulo.

Axioma VI: Se uma semirreta S_{OC} divide um ângulo $A\hat{O}B$, então

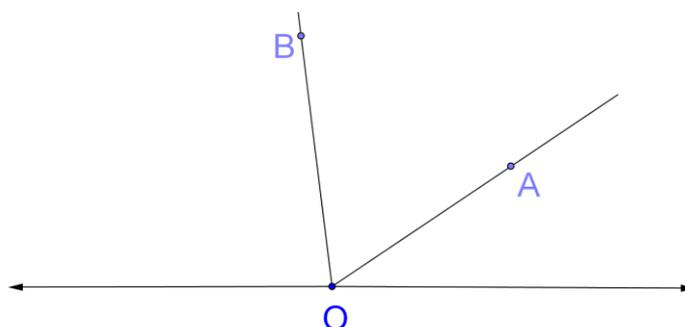


Figura 26: Medida de ângulo.

$$A\hat{O}B = A\hat{O}C + C\hat{O}B$$

A partir do enunciado destes axiomas e definições daremos continuidade ao assunto de Geometria com aplicação de números complexos. A parte teórica apresentada a seguir foi baseada em [1], [2], [3], [4], [5], [6], [8], [9], [10], [11], [12], [14], [15], [17], [23] e [25].

3.1.1 Distância entre dois pontos:

PROBLEMA INICIAL 1: *Considere o problema de geometria plana: Determine a distância d entre os pontos $A(3,2)$ e $B(1,-5)$.*

Antes de resolver este problema usando números complexos vamos estudar a parte teórica. Esta metodologia se repetirá até o fim deste trabalho.

TEORIA:

Suponha que os complexos z_1 e z_2 possuam lugares geométricos M_1 e M_2 no plano complexo. Assim, a distância entre os pontos M_1 e M_2 é dada por $d(M_2M_1) = |M_1 - M_2|$.

A função distância $d: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty)$ é definida por $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ e satisfaz as seguintes propriedades:

a) *Positividade e não degeneração:*

$d(z_1, z_2) \geq 0$ para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$; $d(z_1, z_2) = 0$ se, e somente se, $z_1 = z_2$.

Esta propriedade decorre do que foi exposto nos axiomas I e II.

b) *Simetria:*

$d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$ para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Esta propriedade decorre do que foi exposto no axioma II.

c) *Desigualdade triangular:*

$d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2)$ para todo $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

Para justificar esta desigualdade observe que

$$|z_1 - z_2| = |z_1 - z_2 + z_3 - z_3| = |(z_1 - z_3) + (z_3 - z_2)|$$

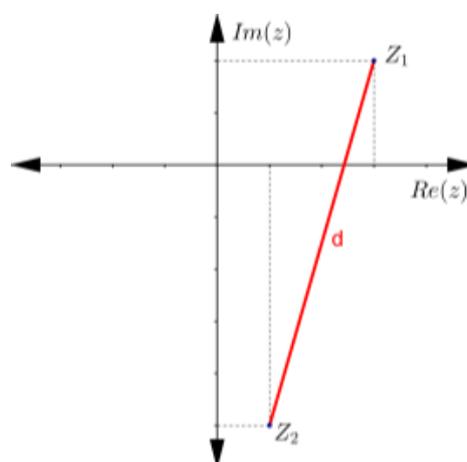


Figura 27: Distância entre dois pontos.

Usando a propriedade do módulo temos

$$|(z_1 - z_3) + (z_3 - z_2)| \leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|$$

A igualdade ocorre se, e somente se, existe um número real positivo k tal que

$$(z_3 - z_1) = k(z_2 - z_3)$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA INICIAL 1:

Consideramos os pontos A e B como lugares geométricos dos complexos z_1 e z_2 no plano complexo, tais que $z_1 = 3 + 2i$ e $z_2 = 1 - 5i$. Assim, a distância entre estes pontos será dada pelo módulo da diferença entre z_1 e z_2 .

$$d(A, B) = |z_1 - z_2| = |(3 + 2i) - (1 - 5i)| = |2 + 7i| = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{53}$$

Comentário: O cálculo de distâncias utilizando números complexos é semelhante ao método utilizado em geometria plana onde é efetuado através da fórmula de distância entre dois pontos $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

ATIVIDADES:

- 3) Utilizando o que foi visto anteriormente neste capítulo, determine a distância entre os pontos:
 - a) $A(3,5)$ e $B(-1, -3)$
 - b) $C(-4,2)$ e $d(3,3)$
- 4) Sendo $A(3,1)$, $B(4, -4)$ e $C(3,3)$ vértices de um triângulo, classifique-o quanto a seus lados.
- 5) Calcule a distância entre os pontos $A(a - 3, b + 9)$ e $B(a + 1, b + 1)$.

3.1.2 Colinearidade e Divisão de um Segmento de reta

PROBLEMA INICIAL 2: Os pontos $A(1,2)$, $B(2,3)$ e $C(4,5)$ são colineares? Qual o ponto médio entre B e C ?

TEORIA:

Colinearidade de três pontos.

Sejam A e B dois pontos distintos representados pelos números complexos z_a e z_b . Dizemos que o ponto M de coordenada complexa z está entre os pontos A e B se $z \neq z_a$, $z \neq z_b$ e a seguinte igualdade ocorre:

$$|z_a - z| + |z - z_b| = |z_a - z_b|.$$

Usaremos a notação $A - M - B$.

O conjunto $(AB) = \{M: A - M - B\}$ é chamado de segmento aberto determinado pelos pontos A e B . O conjunto $[AB] = (AB) \cup \{A, B\}$ representa o segmento fechado definido pelos pontos A e B .

Teorema 1: Suponha que $A(z_a)$ e $B(z_b)$ são dois pontos distintos. As seguintes sentenças são equivalentes:

1 - $M \in (AB)$;

2 - Existe um número real positivo k tal que $z - z_a = k(z_b - z)$;

3 - Existe um número real $t \in (0,1)$ tal que $z = (1 - t)z_a + tz_b$, onde z é a coordenada complexa de M .

Demonstração:

$1 \Leftrightarrow 2$: Temos que $M \in (AB)$ se e somente se $|z_a - z| + |z - z_b| = |z_a - z_b|$, isto é, $d(z_a, z) + d(z, z_b) = d(z_a, z_b)$, ou equivalentemente, existe um número real $k > 0$ tal que $z - z_a = k(z_b - z)$.

$2 \Leftrightarrow 3$: Defina $t = \frac{k}{k+1} \in (0,1)$ ou $k = \frac{t}{1-t} > 0$. Assim $z - z_a = k(z_b - z) \Leftrightarrow z - z_a = \frac{t}{1-t}(z_b - z) \Leftrightarrow (1-t)(z - z_a) = t(z_b - z) \Leftrightarrow (1-t)z - (1-t)z_a = tz_b - tz \Leftrightarrow (1-t)z + tz = tz_b + (1-t)z_a \Leftrightarrow (1-t+t)z = tz_b + (1-t)z_a \Leftrightarrow z = (1-t)z_a + tz_b$.

Utilizando o GeoGebra podemos observar geometricamente este teorema. Para isso vamos considerar os complexos $z_a = 4 + i$ e $z_b = 1 + 3i$ (o leitor pode utilizar outros pontos se assim desejar).

- 1) No GeoGebra insira ambos os pontos (na linha de comando digite $z_a = 4 + i$ e pressione enter, repita o processo para o outro ponto).
- 2) Insira um *controle deslizante* e configure-o de modo que seu nome seja representado por t , $mín = -1$, $max = 2$ e $incremento = 0,1$.
- 3) Na linha de comando digite a fórmula $z = (1 - t)z_a + tz_b$ (que ficará da forma $z=(1-t) z_a+t z_b$).

Para facilitar a visualização você pode utilizar a ferramenta *reta definida por dois pontos* e criar a reta passando por z_a e z_b .

- 4) Movimente o controle deslizante e observe o deslocamento de z .

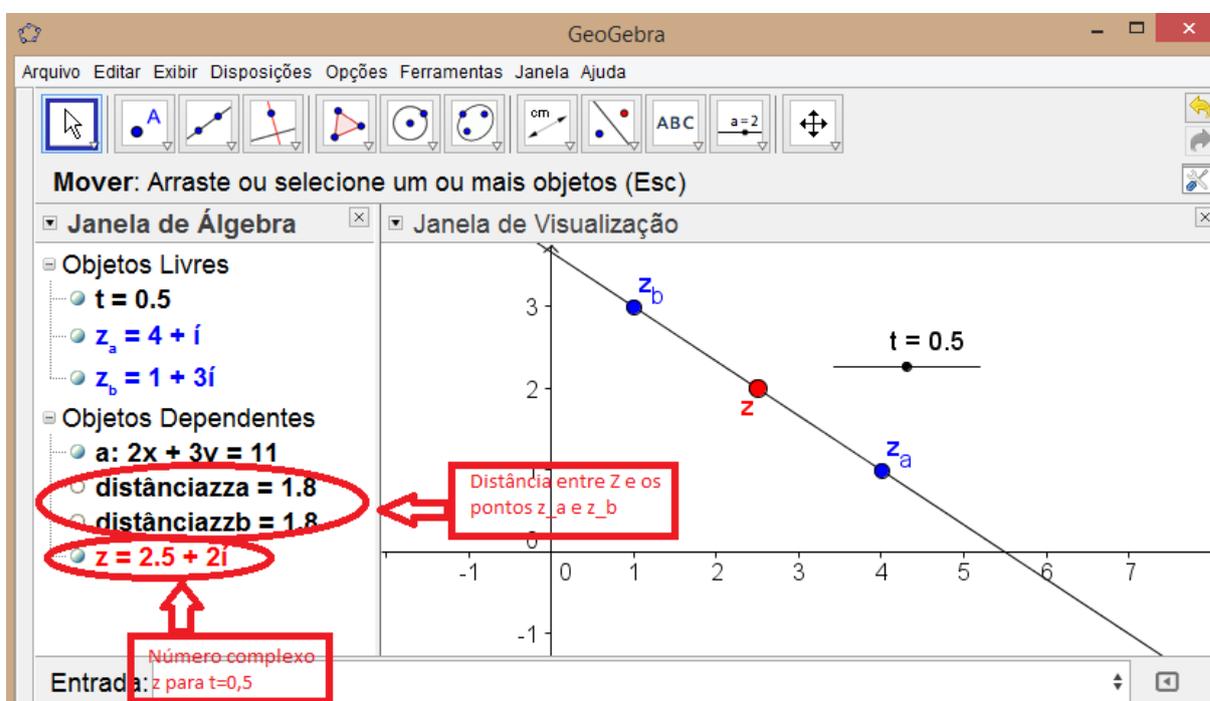


Figura 28: Teorema 1 no GeoGebra.

No caso acima, observamos que z é o ponto médio do segmento quando $t = 0,5$. Deslocando para $t = 0$ observamos que $z = z_a$ e deslocando para $t = 1$ observamos que $z = z_b$. Se $t \notin [0,1]$, então $z \notin (z_a z_b)$.

Teorema 2: Suponha que $A(z_a)$ e $B(z_b)$ são dois pontos distintos. As seguintes sentenças são equivalentes:

- (1) $M \in (AB)$;
- (2) Existe um número real $t \in (0,1)$ tal que $z = (1 - t)z_a + tz_b$, onde z é a coordenada complexa de M ;

$$(3) \operatorname{arg}(z - z_a) = \operatorname{arg}(z_b - z_a);$$

$$(4) \frac{z - z_a}{z_b - z_a} \in \mathbb{R}^+.$$

Demonstração:

(1) \Rightarrow (2): Pelo teorema 1 temos esta demonstração. Resta agora demonstrar que (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1).

(2) \Rightarrow (3) Admitindo que $z = (1 - t)z_a + tz_b$, temos:

$$z = (1 - t)z_a + tz_b \Rightarrow z = z_a - tz_a + tz_b \Rightarrow z - z_a = -tz_a + tz_b \Rightarrow$$

$$z - z_a = t(z_b - z_a)$$

Portanto os segmentos estão sobre uma mesma reta, ou seja, possuem o mesmo argumento. Assim, temos $\operatorname{arg}(z - z_a) = \operatorname{arg}(z_b - z_a)$.

(3) \Rightarrow (4) Temos $\operatorname{arg}(z - z_a) = \operatorname{arg}(z_b - z_a) \Rightarrow \operatorname{arg}(z - z_a) - \operatorname{arg}(z_b - z_a) = 0$. Assim, a relação $\operatorname{arg}\left(\frac{z - z_a}{z_b - z_a}\right) = \operatorname{arg}(z - z_a) - \operatorname{arg}(z_b - z_a) + 2k\pi$ (será demonstrada adiante) para algum $k \in \mathbb{Z}$ implica $\operatorname{arg}\left(\frac{z - z_a}{z_b - z_a}\right) = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Já que $\operatorname{arg}\left(\frac{z - z_a}{z_b - z_a}\right) \in [0, 2\pi)$, segue que $k = 0$ e $\operatorname{arg}\left(\frac{z - z_a}{z_b - z_a}\right) = 0$. Portanto $\frac{z - z_a}{z_b - z_a} \in \mathbb{R}^+$.

NOTAÇÃO: (AB) é a semirreta que inicia em A e passa por B .

(4) \Rightarrow (1) Seja $t = \frac{z - z_a}{z_b - z_a} \in \mathbb{R}^+$. Assim $z = z_a + t(z_b - z_a) = (1 - t)z_a + tz_b$, $t > 0$. Se $t \in (0, 1)$, $M \in (AB) \subset (AB)$.

Se $t = 1$, então $z = z_b$ e $M = B \in (AB)$. Finalmente, se $t > 1$ então, definindo $l = \frac{1}{t} \in (0, 1)$, temos $b = lz + (1 - l)a$. Segue que $A - B - M$ e $M \in (AB)$.

Divisão de um segmento de reta em uma razão dada

Considere dois pontos distintos $A(a)$ e $B(b)$. Um ponto $M(z)$ sobre a reta AB divide o segmento AB na razão $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ se a seguinte relação vetorial ocorre:

$$\overrightarrow{MA} = k \cdot \overrightarrow{MB}$$

Em termos de números complexos esta relação pode ser escrita como

$$a - z = k(b - z) \text{ ou } (1 - k)z = a - kb.$$

Assim, obtemos

$$z = \frac{a - kb}{1 - k}$$

Observe que $k < 0$ o ponto situa-se no segmento de reta que liga os pontos A e B . Se $k \in (0,1)$, então $M \in (BA \setminus [AB])$. Finalmente se $k > 1$, então $M \in (AB \setminus [AB])$. Como consequência, perceba que para $k = -1$ obtemos que a coordenada do ponto médio do segmento $[AB]$ é dada por $z_m = \frac{a+b}{2}$.

OBS: $(BA \setminus [AB])$ é a semirreta que inicia em B passando por A mas não contem o segmento AB . $(AB \setminus [AB])$ é análogo.

Observe como fica no GeoGebra para os complexos $a = 1 - i$ e $b = 2 + 3i$:

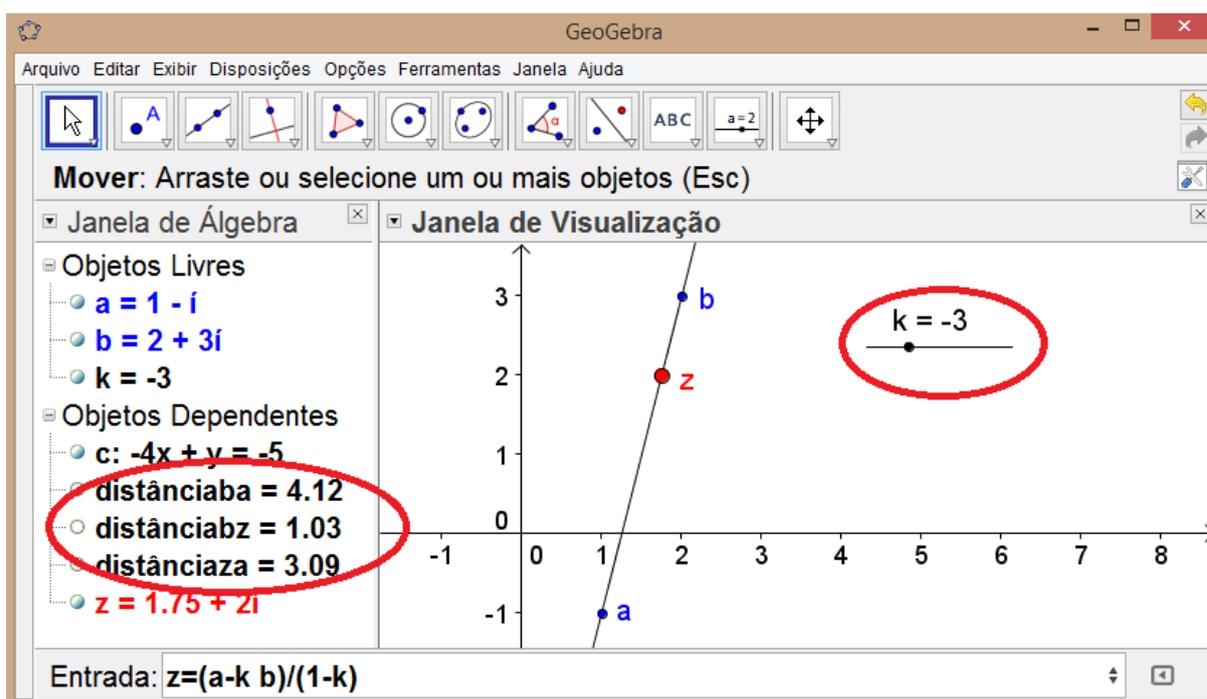


Figura 29: Divisão de um segmento em uma razão dada, no GeoGebra.

No exemplo acima, utilizando $k = -3$ obtemos a posição de z situado, em relação a ao complexo a , a $\frac{3}{4}$ da distância total de ab . Deslocando o controle deslizante você pode observar os demais casos quando $k \in (0,1)$ ou $k > 1$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA INICIAL 2:

Consideramos A , B e C lugares geométricos dos números complexos $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 + 3i$ e $z_3 = 4 + 5i$, nesta ordem, situados no plano complexo. Assim

$$|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| = |z_1 - z_3| \Rightarrow |(1 + 2i) - (2 + 3i)| + |(2 + 3i) - (4 + 5i)| = \\ |(1 + 2i) - (4 + 5i)| \Rightarrow |-1 - i| + |-2 - 2i| = |-3 - 3i|$$

Portanto os pontos (lugares geométricos) são colineares, pois

$$\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} + \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} \Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18} \Rightarrow \sqrt{2} + \\ \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{9 \times 2} \Rightarrow \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

Quanto ao ponto médio, podemos resolver diretamente, pois sabemos que

$$z_m = \frac{a + b}{2} = \frac{(2 + 3i) + (4 + 5i)}{2} = \frac{6 + 8i}{2} = 3 + 4i$$

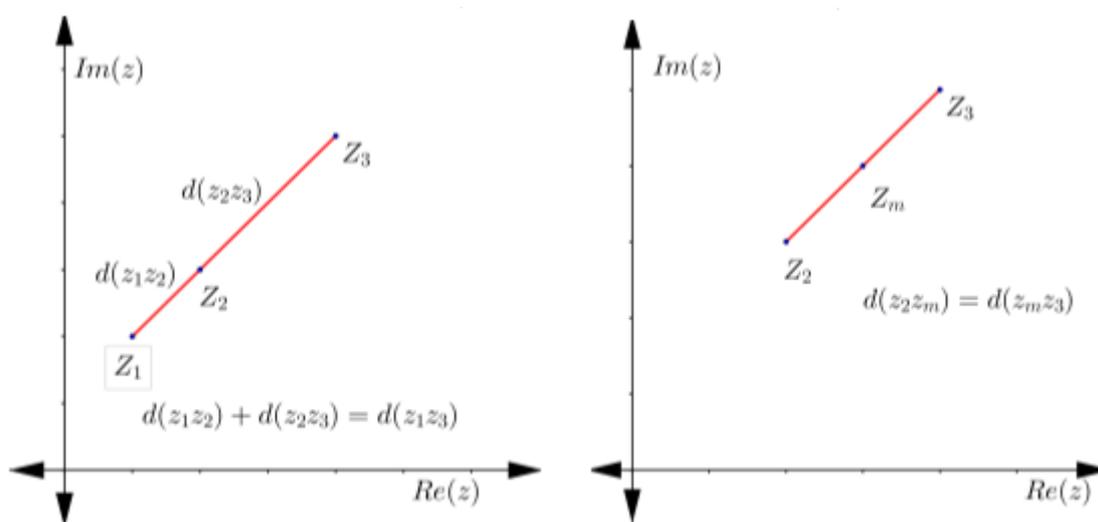


Figura 30: Colinearidade e ponto médio no plano complexo.

Comentário: Esta metodologia de determinar o alinhamento pode ser estendida para mais de três pontos, para tanto basta aumentar o número de módulos que temos na parcela esquerda da igualdade $(|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + \dots + |z_{n-1} - z_n| = |z_1 - z_n|, n \in \mathbb{N})$.

ATIVIDADES:

- 6) Os pontos $A(2,7)$, $B(-3,0)$ e $C(16,5)$ são colineares?
- 7) Determine y para que os pontos $A(3,5)$, $B(-3,8)$ e $C(4,y)$ sejam colineares.
- 8) Mostre que $A(a, -3a)$, $B\left(a + 3, -3a - \frac{6}{5}\right)$ e $C(a + 5, -3a - 2)$ são colineares para todo valor real de a .
- 9) Se $A(0, a)$, $B(a, -4)$ e $C(1,2)$, para que valores de a existe o triângulo ABC ?
- 10) Determine as coordenadas dos pontos que dividem o segmento AB em três partes iguais, sabendo que $A = (-1,7)$ e $B = (11, -8)$.
- 11) Calcule o comprimento da mediana AM do triângulo ABC cujos vértices são os pontos $A(0,0)$, $B(3,7)$ e $C(5, -1)$.

3.1.3 Ângulo formado por três pontos e ângulo formado por duas retas.

PROBLEMA INICIAL 3: Determine o ângulo AOB formado pelos pontos $A(4,7)$, $B(8,7)$ e $O(4,3)$ e classifique este ângulo em agudo, reto ou obtuso.

TEORIA:

Medida do ângulo formado por três pontos: Um ângulo é positivamente ou diretamente orientado se medido no sentido anti-horário, caso contrário ele é negativamente orientado. Considere dois pontos distintos $M_1(z_1)$ e $M_2(z_2)$, diferentes da origem do plano complexo. O ângulo $M_1\hat{O}M_2$ é orientado se M_1 e M_2 são ordenados no sentido anti-horário. (Figura 32: Ângulo negativamente orientado.)

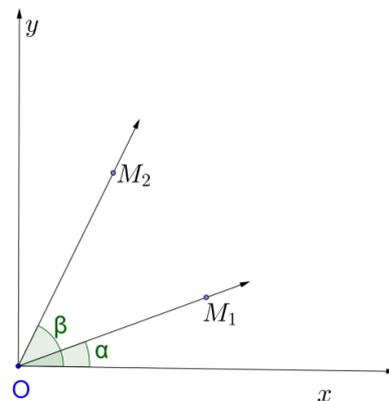


Figura 31: Ângulo orientado positivamente

Proposição 1: A medida de um ângulo diretamente orientado $M_1\hat{O}M_2$ é igual a $\arg \frac{z_2}{z_1}$.

Demonstração:

Considere os dois casos a seguir:

- a) Se o ângulo $M_1\hat{O}M_2$ é positivamente orientado (Figura 31: Ângulo orientado positivamente) então

$$M_1\hat{O}M_2 = x\hat{O}M_2 - x\hat{O}M_1 = \arg z_2 - \arg z_1 = \arg \frac{z_2}{z_1}$$

b) Se o ângulo $M_1\hat{O}M_2$ é negativamente orientado (Figura 32: Ângulo negativamente orientado.) então

$$\begin{aligned} M_1\hat{O}M_2 &= 2\pi - M_2\hat{O}M_1 = 2\pi - (x\hat{O}M_1 - x\hat{O}M_2) = 2\pi - \\ &(\arg z_1 - \arg z_2) = 2\pi - \arg \frac{z_1}{z_2}, \text{ já que o ângulo } M_2\hat{O}M_1 \text{ é} \\ &\text{negativamente orientado. Portanto } M_1\hat{O}M_2 = 2\pi - \arg \frac{z_1}{z_2} = \\ &2\pi - \left(2\pi - \arg \frac{z_2}{z_1}\right) = \arg \frac{z_2}{z_1}. \end{aligned}$$

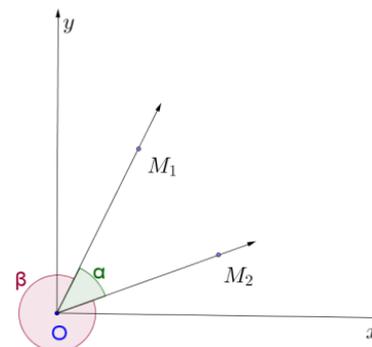


Figura 32: Ângulo negativamente orientado.

OBS: Para demonstrar a igualdade $\arg z_2 - \arg z_1 = \arg \frac{z_2}{z_1}$ precisamos do relembrar dos números complexos na forma trigonométrica ou polar, vistos no capítulo anterior.

Sejam $z_1 = \rho_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\beta + i\sin\beta)$ números complexos na forma trigonométrica, então $\arg z_1 = \alpha$ e $\arg z_2 = \beta$. Pela divisão de números na forma trigonométrica $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta)]$, assim $\arg \frac{z_1}{z_2} = \alpha - \beta$. Portanto $\arg \frac{z_1}{z_2} = \alpha - \beta = \arg z_1 - \arg z_2$.

A *proposição 1* nos auxilia quando queremos determinar o ângulo formado por três pontos, sendo que um deles é a origem do sistema. Para generalizar o próximo teorema trará o resultado para três pontos quaisquer do plano complexo.

Para verificar esta proposição no GeoGebra considere os complexos $z = -2 - i$, $w = 2 + i$ e $t = 1 + 3i$ e vamos determinar o ângulo formado por $W\hat{Z}T$.

Para isso vamos utilizar a ferramenta de medir ângulos e comparar seu resultado com o resultado obtido digitando no campo *comando* $\arg((w - z)/(t - z))$.

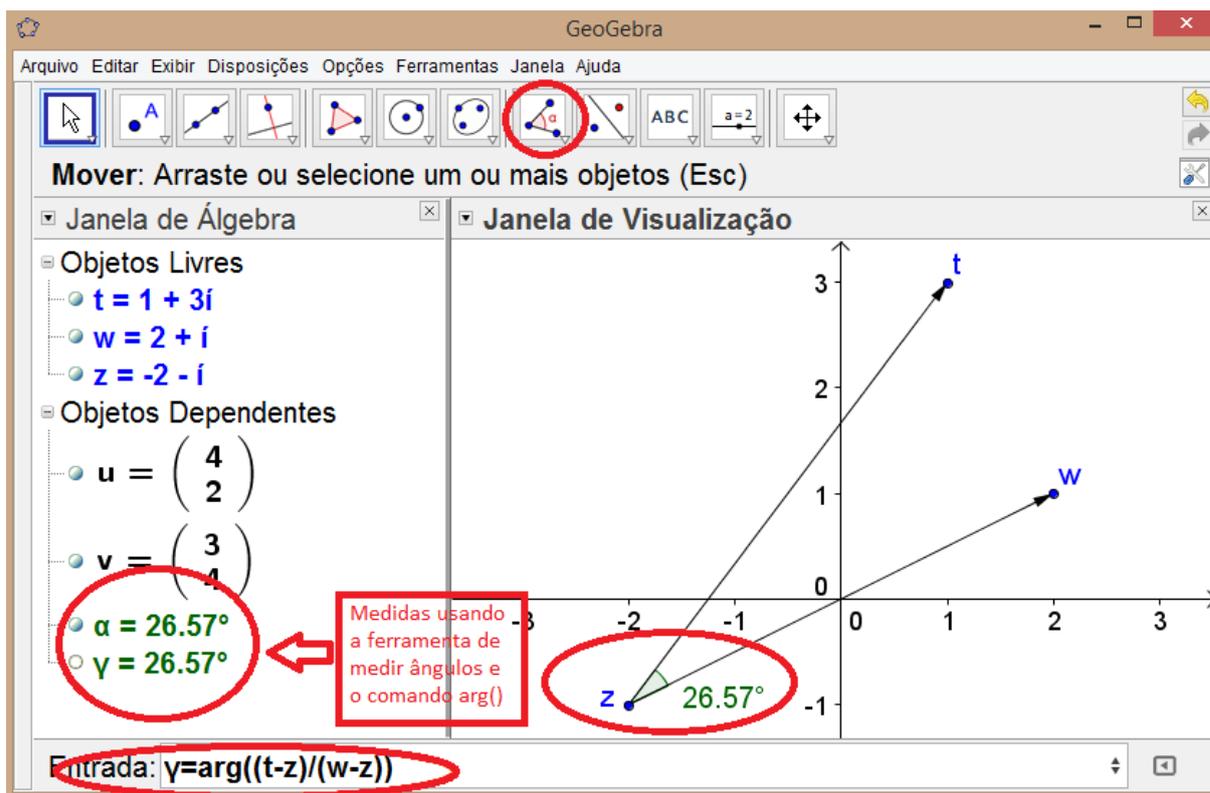


Figura 33: Ângulo formado entre três números complexos no GeoGebra.

Observe que ambas as formas de determinar a medida do ângulo formado retornam o mesmo resultado. Os vetores foram construídos para facilitar a visualização.

Teorema 3: Considere três pontos distintos $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ e $M_3(z_3)$. A medida do ângulo $M_2\widehat{M_1}M_3$ é $\arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$.

Demonstração:

A translação do vetor $-z_1$ marca os pontos M_1 , M_2 , M_3 nos pontos O , M_2' e M_3' , de coordenadas complexas O , $z_2 - z_1$ e $z_3 - z_1$. Além disso, temos que $M_2\widehat{M_1}M_3 = M_2'\widehat{O}M_3'$. Da *proposição 1*, obtemos que $M_2'\widehat{O}M_3' = \arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$, como afirmado.

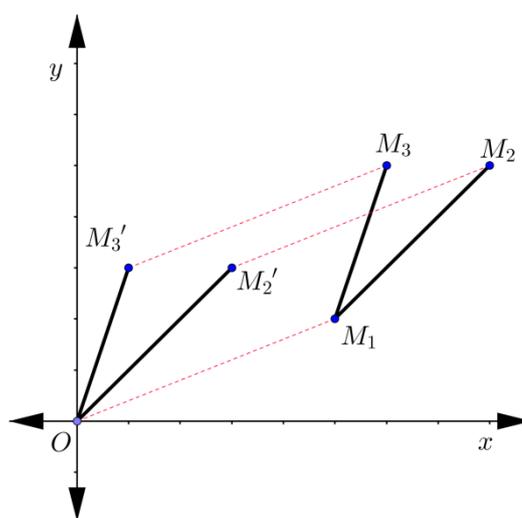


Figura 34: Translação de pontos

Teorema 4: Considere quatro pontos distintos $M_i(z_i)$, $i \in \{1,2,3,4\}$. A medida do ângulo formado pelos segmentos de retas $\overline{M_1M_3}$ e $\overline{M_2M_4}$ é $\arg \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_2}$ ou $\arg \frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_1}$.

Demonstração:

A translação do vetor $-z_1$ marca os pontos M_1, M_3 nos pontos O e M'_3 , de coordenadas complexas O e $z_3 - z_1$ e a translação do vetor $-z_2$ marca os pontos M_2, M_4 nos pontos O e M'_4 , de coordenadas complexas O e $z_4 - z_2$. Do teorema 3 e da proposição 1, obtemos que o ângulo formado pelos segmentos de retas $\overline{M_1M_3}$ e $\overline{M_2M_4}$ é $\arg \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_2}$ ou $\arg \frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_1}$ (dependendo da disposição das retas no plano) como afirmado.

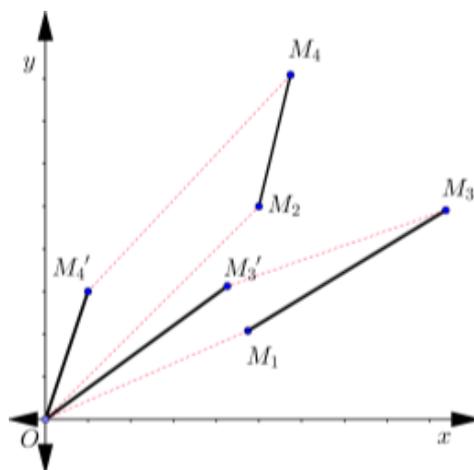


Figura 35: Translação de retas.

Portanto, para determinar o ângulo formado por duas retas no plano inicialmente determinamos quatro pontos distintos, dois sobre cada reta, e então com base nestes podemos determinar o ângulo desejado.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA INICIAL 3:

Para determinar o ângulo AOB basta resolver $\theta = \arg \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$, onde $z_1 = O$, $z_2 = A$ e $z_3 = B$. Assim temos:

$$\theta = \arg \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \arg \frac{(4 + 7i) - (4 + 3i)}{(8 + 7i) - (4 + 3i)} = \arg \frac{0 + 4i}{4 + 4i} = \arg \frac{1 + i}{2} = \frac{\pi}{4}$$

que é a resposta considerando o ângulo no sentido anti-horário. Já no sentido horário temos, considerando $z_2 = B$ e $z_3 = A$ temos

$$\theta = \arg \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \arg \frac{(8 + 7i) - (4 + 3i)}{(4 + 7i) - (4 + 3i)} = \arg \frac{4 + 4i}{0 + 4i} = \arg \frac{2}{1 + i} = \frac{7\pi}{4}$$

Para facilitar a compreensão vamos desenvolver os cálculos da primeira solução proposta deixando a cargo do leitor a segunda:

$$\begin{aligned} \operatorname{arg} \frac{0+4i}{4+4i} &= \operatorname{arg} \left(\frac{4i}{4+4i} \cdot \frac{4-4i}{4-4i} \right) = \operatorname{arg} \left(\frac{16i-16i^2}{16-16i+16i-16i^2} \right) = \operatorname{arg} \frac{16i+16}{16+16} \\ &= \operatorname{arg} \frac{16i+16}{32} = \operatorname{arg} \frac{i+1}{2} \end{aligned}$$

Para determinar o argumento temos $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$\text{Como } (a+bi) = \frac{i+1}{2}, \text{ então } \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Portanto o ângulo } \theta \text{ cujo } \sin\theta = \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ é } \frac{\pi}{4}.$$

Comentário: O uso de números complexos facilita o cálculo do ângulo, mas é necessário que o estudante tenha conhecimento de trigonometria, pois determinamos o ângulo com base no seno e cosseno encontrados. Esta metodologia é a mesma empregada para calcular o ângulo formado por duas retas, como será demonstrado adiante.

ATIVIDADES:

12) Calcule o ângulo formado pelas retas de equação:

a) $3x - y + 5 = 0$ e $2x + y + 3 = 0$

b) $2x + 3y - 1 = 0$ e $6x - 4y + 5 = 0$

c) $5x + 2y = 0$ e $10x + 4y - 7 = 0$

13) Qual é a tangente do ângulo formado pelas retas:

$3x + 2y + 2 = 0$ e $-x + 2y + 5 = 0$?

14) Em um plano, munido de um sistema cartesiano ortogonal de referência, são dados os pontos $A(3,0)$, $B(10,1)$ e $M(6,k)$. Determine o valor de k para qual o ângulo $\hat{B}AM = 45^\circ$.

3.1.4 Retas paralelas, coincidentes e perpendiculares. Pontos concíclicos.

Pontos Concíclicos - Definição: Dizemos que um determinado número de pontos distintos são concíclicos quando estão situados sobre uma mesma circunferência.

No caso de quadriláteros, dizemos que um quadrilátero é concíclico ou inscrito se e somente se tem os ângulos opostos suplementares.

PROBLEMA INICIAL 4: Determine se as retas a seguir são paralelas, coincidentes ou ortogonais:

a) $r(x) = 5x + 3y + 1$ e $s(x) = 10x + 6y - 2$

b) $r(x) = 3x + 6y = 0$ e $s(x) = 2x + 4y = 0$

c) $r(x) = 3x + 2y - 1 = 0$ e $s(x) = 4x - 6y + 3 = 0$

TEORIA:

Vamos considerar quatro pontos distintos $M_i(z_i)$, $i \in \{1,2,3,4\}$.

Proposição 2: Os pontos $M_i(z_i)$, $i \in \{1,2,3\}$ são colineares se e somente se

$$k = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}^*$$

Demonstração:

A colinearidade dos pontos $M_i(z_i)$, $i \in \{1,2,3\}$ é equivalente a $M_1 \widehat{M_2} M_3 \in \{0, \pi\}$. segue que $\arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \{0, \pi\}$ ou, equivalentemente, $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}^*$, como afirmado.

Observe: Sejam $m, n \in \mathbb{R}$, se $\arg \theta = \frac{m+0i}{n}$ temos $\cos \theta = \frac{\frac{m}{n}}{\sqrt{(\frac{m}{n})^2}} = 1$ e $\sin \theta = \frac{\frac{0}{n}}{\sqrt{(\frac{m}{n})^2}} =$

0 , logo $\theta = 0^\circ$ ou $\theta = 180^\circ$; se $\arg \theta = \frac{0+mi}{n}$, de maneira análoga ao anterior temos $\theta = 90^\circ$ ou $\theta = 270^\circ$.

Proposição 3: As retas $\overline{M_1 M_2}$ e $\overline{M_3 M_4}$ são ortogonais se e somente se

$$k = \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in i\mathbb{R}^*$$

Demonstração:

Temos que $M_1 M_2 \perp M_3 M_4$ se e somente se $\angle(\overline{M_1 M_2}, \overline{M_3 M_4}) \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$. Isto é equivalente a

$\arg \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$, ou equivalente a $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in i\mathbb{R}^*$, como afirmado.

Corolário: Se $M_1 = M_4$, então $\overline{M_1 M_2} \perp \overline{M_3 M_4}$ se

$$k = \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} \in i\mathbb{R}^*$$

Proposição 4: Os pontos M_i , $i \in \{1,2,3,4\}$ são concíclicos ou colineares se e somente se

$$k = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R}^*$$

Onde os pontos são colineares se $\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \in \mathbb{R}^*$ e $\frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R}^*$ e os pontos são concíclicos se

$$\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \notin \mathbb{R}^* \text{ e } \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \notin \mathbb{R}^*.$$

Demonstração:

Suponha que os pontos são colineares, então pela *proposição 2* $\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \in \mathbb{R}^*$ e $\frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R}^*$,

logo, $k = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R}^*$, como afirmado.

Suponha agora que os pontos não sejam lineares, então podemos dispô-los em uma circunferência de $(4 - 1)! = 3! = 6$ maneiras diferentes. Considere o caso onde M_1, M_2, M_3, M_4 são dados nesta ordem, os outros cinco casos são análogos. Tomando dois pontos opostos em relação a reta $\overline{M_1 M_3}$, os pontos M_1, M_2, M_3, M_4 são concíclicos se e

somente se $M_1 \widehat{M_2 M_3} + M_1 \widehat{M_4 M_3} \in \{\pi, 3\pi\}$. Isto é

$$\arg \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} + \arg \frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} = \arg \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} = \arg \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \div \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \{\pi, 3\pi\}, \text{ isto é, } \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} :$$

$$\frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R}^*, \text{ como afirmado.}$$

Caso sejam utilizados pontos situados no mesmo semiplano em relação a reta $\overline{M_1 M_4}$, da

geometria plana temos que $M_1 \widehat{M_2 M_4} = M_1 \widehat{M_3 M_4}$, logo $\arg \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = \arg \frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} \Leftrightarrow$

$$\arg \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} - \arg \frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} = 0 \Leftrightarrow \arg \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \div \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} = 0, \text{ donde } \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R}^*.$$

O número k é chamado de razão anarmônica dos quatro pontos $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3), M_4(z_4)$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA INICIAL 4:

Para determinar se estes pares de retas são paralelos, coincidentes ou concorrentes, tomaremos dois pontos distintos sobre cada reta e procederemos cálculo:

a) Sejam $A(1, -2)$, $B(4, -7)$ em $r(x)$ e $C(-1, 2)$ e $D(2, -3)$ em $s(x)$ lugares geométricos

dos complexos z_1, z_2, z_3 e z_4 . então $\frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} = \frac{4 - 7i - (1 - 2i)}{2 - 3i - (-1 + 2i)} = \frac{3 - 5i}{3 - 5i} = 1$, como o resultado é um

número real então as retas são paralelas ou coincidentes. Agora $k = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} = \frac{-1+2i-(4-7i)}{1-2i-(4-7i)} : \frac{-1+2i-(2-3i)}{1-2i-(2-3i)} = \frac{60-2i}{34} : \frac{8-2i}{2}$, logo as retas são paralelas. Para serem coincidentes os pontos necessitam ser colineares e $\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \in \mathbb{R}^*$ e $\frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R}^*$

b) Sejam $A(0,0)$, $B(2,-1)$ em $r(x)$ e $C(0,0)$ e $D(4,-2)$ em $s(x)$ lugares geométricos dos complexos z_1, z_2, z_3 e z_4 . então $\frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} = \frac{2-i-(0+0i)}{4-2i-(0+0i)} = \frac{2-i}{4-2i} = \frac{1}{2}$, como o resultado é um

número real então as retas são paralelas ou coincidentes. Agora $k = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} = \frac{0+0i-(2-i)}{0+0i-(2-i)} : \frac{0+0i-(4-2i)}{0-0i-(4-2i)} = 1 : 1 = 1$, logo as retas são coincidentes.

c) Sejam $A(1,-1)$, $B(3,-4)$ em $r(x)$ e $C(0, \frac{1}{2})$ e $D(1, \frac{7}{6})$ em $s(x)$ lugares geométricos dos complexos z_1, z_2, z_3 e z_4 . então $\frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} = \frac{3-4i-(1-i)}{1+\frac{7}{6}i-(0+\frac{1}{2}i)} = \frac{2-3i}{1+\frac{2}{3}i} = 9i$, como o resultado é um número imaginário puro então as retas são perpendiculares.

Comentário: Esta metodologia para determinar se retas são paralelas, coincidentes ou então perpendiculares torna-se trabalhosa devido ao fato que inicialmente temos de determinar dois pontos sobre cada reta, para somente depois conseguir determinar suas posições relativas. O mesmo ocorreu no item anterior para determinar o ângulo formado entre elas. Por outro lado, superada esta parte, o cálculo é bastante rápido e fácil, desde que o estudante esteja familiarizado com a divisão entre números complexos.

ATIVIDADES:

- 15) Qual é a posição relativa entre as retas (r) $3x - y - 7 = 0$ e (s) $6x - 2y + 14 = 0$?
- 16) Para que valor de k as retas $(k+1)x + 10y - 1 = 0$ e $8x + y + 1 = 0$ são paralelas/coincidentes?
- 17) Discuta em função de m a posição relativa das retas:

$$(r) 5x + y + 5 = 0 \quad e \quad (s) 2x + my + 5m = 0$$

3.1.5 Rotação de um ponto.

PROBLEMA INICIAL 5: Determine as coordenada do ponto A' obtido pela rotação do ponto A(2,5), em um ângulo de 30° em torno da origem.

TEORIA:

Seja um ângulo θ e o número complexo dado por $\omega = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, onde $\rho = 1$, logo, $\omega = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$. Seja também M o lugar geométrico do número complexo $z = \rho_1(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$. Se M' é o lugar geométrico do complexo obtido do produto $z \cdot \omega = \rho \cdot \rho_1[\cos(\theta + \alpha) + i \operatorname{sen}(\theta + \alpha)]$, obtemos que $|z \cdot \omega| = \rho_1$ e $\arg(z \cdot \omega) = \arg(\theta + \alpha)$.

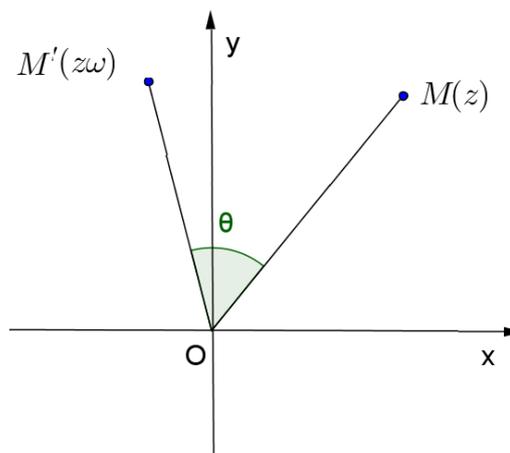


Figura 36: Rotação de um ponto.

Segue que M' é o lugar geométrico de $z \cdot \omega$ obtido pela rotação de M em relação à origem, de um ângulo θ .

Observe que a multiplicação de um número complexo z pela unidade imaginária i rotaciona o lugar geométrico deste número em um ângulo $\theta = 90^\circ$ em relação à origem.

Proposição 5: Suponha que o ponto C é a rotação de B , em relação à A , em um ângulo θ . Se a, b, c são as coordenadas dos pontos A, B, C , respectivamente, então $c = a + (b - a) \cdot z$, onde $z = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$.

Demonstração:

A translação através do vetor $-a$ marca os pontos A, B nos pontos O, B' , de coordenadas $0, b - a$, respectivamente. O ponto C' , de coordenadas $c' - a$, é a imagem do ponto B' obtido pela rotação em relação à origem através de um ângulo θ . Posteriormente a translação $+a$

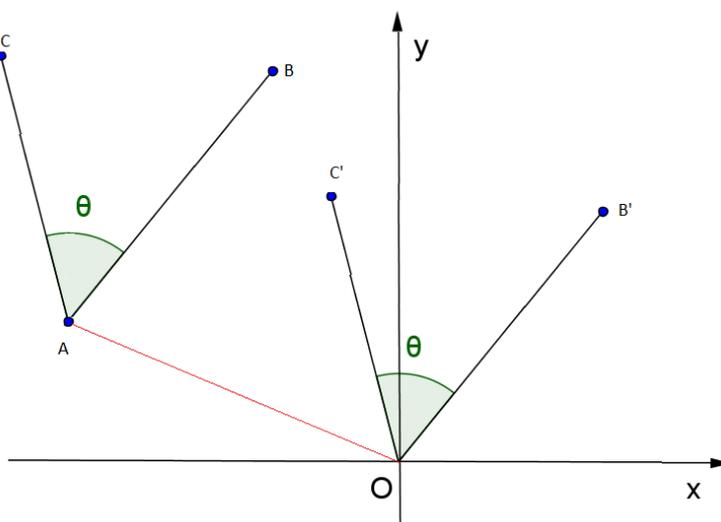


Figura 37: Translação e rotação.

leva o ponto C' ao ponto C , de coordenadas c . Portanto $c - a = (b - a) \cdot z \Rightarrow c = a + (b - a) \cdot z$

Observe que no GeoGebra a rotação de um complexo pode ser feita digitando diretamente a fórmula de rotação na linha de comando. Veja o caso do complexo z' obtido pela rotação do complexo $z = 2 - i$ por um ângulo de $\frac{2\pi}{5}$ em relação ao complexo $w = -1 + i$.

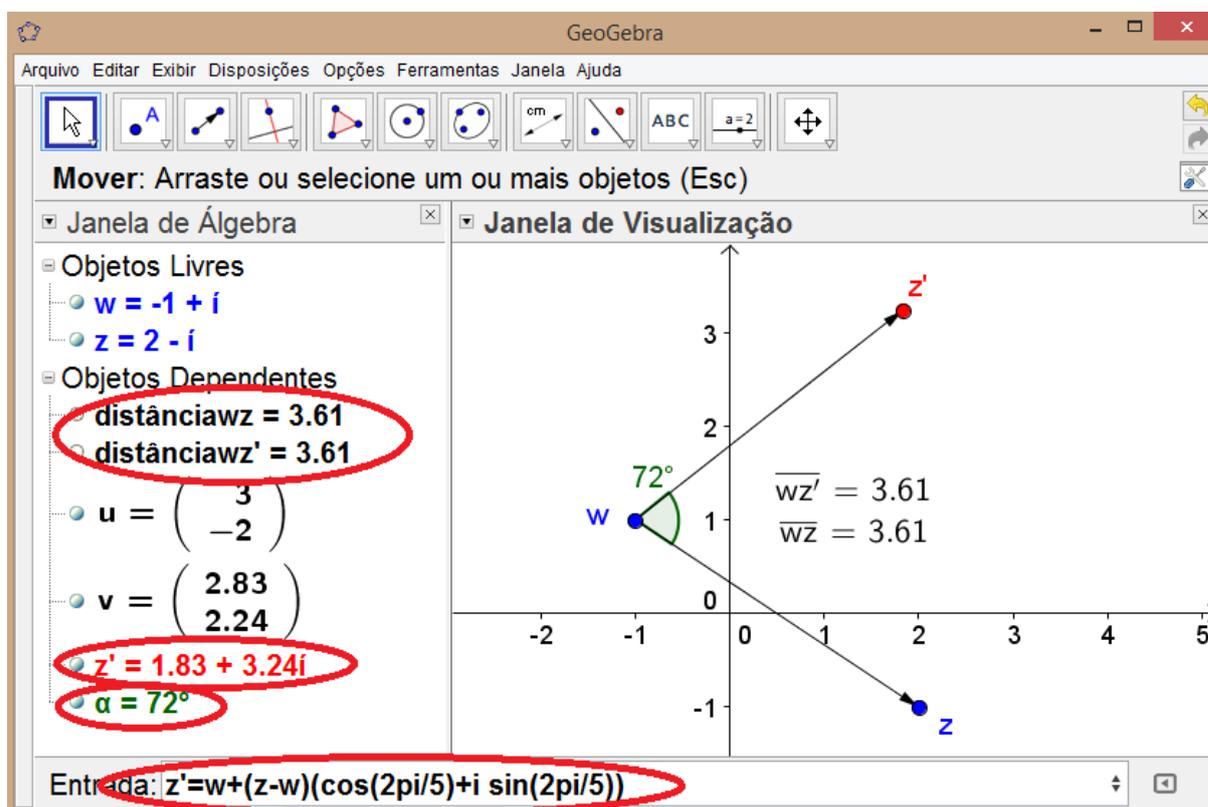


Figura 38: Rotação no GeoGebra.

Você pode conferir o resultado utilizando as ferramentas para medir distâncias e ângulos. Neste exemplo o número complexo obtido será $z' = 1,83 + 3,24i$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA INICIAL 5:

Para rotacionar o ponto utilizaremos a proposição 5. Sejam $A(2,5)$, $O(0,0)$ e A' os lugares geométricos dos complexos a , o e a' . Assim, $a = 2 + 5i$, $o = 0 + 0i$, $\text{sen}30^\circ = \frac{1}{2}$, $\text{cos}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $z = \cos\theta + i\text{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$, então

$$\begin{aligned} a' &= o + (a - o) \cdot z = (0 + 0i) + [(2 + 5i) - (0 + 0i)] \cdot \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\right) = (2 + 5i) \cdot \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\right) \\ &= \frac{(-5 + 2\sqrt{3}) + (2 + 5\sqrt{3})i}{2} \end{aligned}$$

Portanto as coordenadas de A' são $\left(\frac{-5+2\sqrt{3}}{2}, \frac{2+5\sqrt{3}}{2}\right)$.

ATIVIDADES:

- 18) Determine as coordenadas do ponto M' , obtido através da rotação do ponto $M(1,8)$ em um ângulo de 60° em torno do ponto $X(-1,-3)$.
- 19) Um ponto $A(-1,2)$ foi rotacionado em relação ao ponto $B(2,2)$ por um ângulo de 45° marcando o ponto A' . A' foi rotacionado em relação ao ponto $C(-1,-2)$ por um ângulo de 30° , marcando o ponto A'' . Determine a distância entre A e A'' .

3.2 Retas

3.2.1 Equação da reta no plano complexo.

PROBLEMA INICIAL 6: Determine a equação no plano complexo da reta definida no plano cartesiano por $r(x) 2x + 3y + 1 = 0$.

TEORIA:

Proposição 6: A equação da reta no plano complexo, definida a partir da equação no plano cartesiano, é $\bar{\alpha}z + \alpha z + \beta = 0$ onde $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$ e $z = x + yi \in \mathbb{C}$. E o coeficiente angular é $m = -\frac{\alpha + \bar{\alpha}}{\alpha - \bar{\alpha}}i$.

Demonstração

A equação da reta no plano cartesiano é $Ax + By + C = 0$, onde $A, B, C \in \mathbb{R}$ e $A^2 + B^2 \neq 0$. Se definirmos $z = x + yi$, então $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$, pois $x = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{(x + yi) + (x - yi)}{2} = \frac{2x}{2} = x$, e de modo análogo temos $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$. Portanto substituindo na equação $Ax + By + C = 0$ obtemos

$$A \frac{z + \bar{z}}{2} + B \frac{z - \bar{z}}{2i} + C = 0 \Leftrightarrow A \frac{z + \bar{z}}{2} + B \frac{z - \bar{z}}{2i} \cdot \frac{(-2i)}{(-2i)} + C = 0$$

$$\Leftrightarrow A \frac{z + \bar{z}}{2} - Bi \frac{z - \bar{z}}{2} + C = 0 \Leftrightarrow \bar{z} \left(\frac{A + Bi}{2} \right) + z \left(\frac{A - Bi}{2} \right) + C = 0$$

Fazendo $\alpha = \frac{A - Bi}{2} \in \mathbb{C}^*$ e $\beta = C \in \mathbb{R}$ temos $\bar{\alpha}z + \alpha z + \beta = 0$, como afirmado.

Já o coeficiente angular da reta definida por $Ax + By + C = 0$ é $m = -\frac{A}{B}$, logo

$$m = -\frac{A}{B} = -\frac{\frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2}}{\frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2i}} = -\frac{\alpha + \bar{\alpha}}{\alpha - \bar{\alpha}}i$$

pois $A = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2} = \frac{(A+Bi)(A-Bi)}{2} = \frac{2A}{2} = A$, e de maneira análoga temos que $B = \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2i}$.

Proposição 7: A reta que passa por z_1 e z_2 , pontos distintos do plano complexo, pode ser obtida pela igualdade

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}$$

Demonstração:

Temos da geometria plana o seguinte axiomas [3, p. 1 e 3]:

- Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém;
- Dados três pontos distintos de uma reta, um e apenas um deles localiza-se entre os outros dois.

Considerando os pontos $M(z), M_1(z_1)$ e $M_2(z_2)$, tais que um deles se localiza entre os demais, se eles estão sobre uma reta, então pela *proposição 2* temos que os pontos $M(z), M_1(z_1)$ e $M_2(z_2)$ são colineares se e somente se

$$k = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}^*$$

Utilizando o itens 2.1.6 (a), (e) e (f) :

$$k = \bar{k} \Rightarrow \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \overline{\left(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\right)} = \frac{\overline{z - z_1}}{\overline{z_2 - z_1}} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}$$

Portanto

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}$$

Proposição 8: A equação da reta definida por z_1 e z_2 , pontos distintos no plano complexo, é $\bar{\gamma}\bar{z} - \gamma z + \beta = 0$, onde $\gamma \in \mathbb{C}^*$, β é um número imaginário puro, $\bar{\gamma} = z_2 - z_1$, $\gamma = \bar{z}_2 - \bar{z}_1$, $\beta = z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1$ e $z = x + yi \in \mathbb{C}$.

Demonstração:

Da *proposição 7*:

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}$$

Assim,

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} \Leftrightarrow (z_2 - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_1) = (z - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)$$

$$\Leftrightarrow z_2\bar{z} - z_2\bar{z}_1 - z_1\bar{z} + z_1\bar{z}_1 = z\bar{z}_2 - z\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_1$$

$$\Leftrightarrow (z_2 - z_1)\bar{z} - z_2\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_1 = (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z - z_1\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_1$$

$$\Leftrightarrow (z_2 - z_1)\bar{z} - (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z + z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 = 0$$

Fazendo $\bar{\gamma} = z_2 - z_1$, $\gamma = \bar{z}_2 - \bar{z}_1$ e $\beta = z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1$, obtemos

$$\bar{\gamma}\bar{z} - \gamma z + \beta = 0$$

Para provar que β é um imaginário puro temos

$$\bar{\beta} = \overline{z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1} = \bar{z}_1 z_2 - \bar{z}_2 z_1 = -\beta$$

Pois $\beta = a - bi$ e $a - bi = -(a + bi) \Leftrightarrow a - bi = -a - bi \Leftrightarrow a = 0$ ■

Decorre de imediato que

Se $\bar{\gamma} = \gamma$, então $B = 0$ e a reta é vertical.

Se $\bar{\gamma} \neq \gamma$, então, pela definição de coeficiente angular complexo,

$$m_z = \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}$$

ATENÇÃO: $\tan \theta = m = -\frac{\alpha + \bar{\alpha}}{\alpha - \bar{\alpha}}i$ e $\tan \theta_z = m_z = \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}$ ¹².

¹² Para conhecer um pouco mais sobre funções trigonométricas complexas:

<http://www.math.ist.utl.pt/~lmgal/ACCap2.pdf> e

<http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/vc/vc07.htm#htoc4>

Proposição 9: Considere as retas r e s de equações $\bar{\alpha}_1\bar{z} + \alpha_1z + \beta_1 = 0$ e $\bar{\alpha}_2\bar{z} + \alpha_2z + \beta_2 = 0$ respectivamente. As retas r e s são:

(1) Paralelas se e somente se $\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1} = \frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha_2}$;

(2) Perpendiculares se e somente se $\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1} + \frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha_2} = 0$;

Demonstração:

(1) Da geometria plana temos que as retas r e s são paralelas se e somente se $m_1 = m_2$,

$$\text{logo, } -\frac{\alpha_1 + \bar{\alpha}_1}{\alpha_1 - \bar{\alpha}_1}i = -\frac{\alpha_2 + \bar{\alpha}_2}{\alpha_2 - \bar{\alpha}_2}i \Leftrightarrow (\alpha_1 + \bar{\alpha}_1) \cdot (\alpha_2 - \bar{\alpha}_2) = (\alpha_1 - \bar{\alpha}_1)(\alpha_2 + \bar{\alpha}_2) \Leftrightarrow \alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_1\alpha_2 - \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1\alpha_2 - \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2 \Leftrightarrow -\alpha_1\bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_1\alpha_2 = \alpha_1\bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1\alpha_2 \Leftrightarrow 2\bar{\alpha}_1\alpha_2 = 2\alpha_1\bar{\alpha}_2 \Leftrightarrow \frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1} = \frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha_2}.$$

(2) Da geometria plana temos que as retas r e s são perpendiculares se e somente se

$$m_1m_2 = -1, \text{ logo, } \frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1} \cdot \frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha_2} = -1 \Leftrightarrow \left[-\frac{\alpha_1 + \bar{\alpha}_1}{\alpha_1 - \bar{\alpha}_1}i\right] \left[-\frac{\alpha_2 + \bar{\alpha}_2}{\alpha_2 - \bar{\alpha}_2}i\right] = -1 \Leftrightarrow \frac{\alpha_1 + \bar{\alpha}_1}{\alpha_1 - \bar{\alpha}_1} \cdot \frac{\alpha_2 + \bar{\alpha}_2}{\alpha_2 - \bar{\alpha}_2} i^2 = -1 \Leftrightarrow -(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_1\alpha_2 + \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2) = -(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1\alpha_2 + \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2) \Leftrightarrow \alpha_1\bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_1\alpha_2 = -\alpha_1\bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1\alpha_2 \Leftrightarrow 2\alpha_1\bar{\alpha}_2 + 2\bar{\alpha}_1\alpha_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2\alpha_1\bar{\alpha}_2 + 2\bar{\alpha}_1\alpha_2}{2\alpha_1\alpha_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1} + \frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha_2} = 0.$$

Proposição 10: A equação paramétrica da reta é

$$z = (1 - t)z_1 + tz_2, \quad t \in \mathbb{R}$$

Demonstração:

Da *proposição 7* temos:

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}$$

Fazendo

$$t = \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}$$

obtemos:

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = t \Leftrightarrow z - z_1 = t(z_2 - z_1) \Leftrightarrow z = t(z_2 - z_1) + z_1 \Leftrightarrow z = (1 - t)z_1 + tz_2$$

Observe que $\bar{z}, \bar{z}_1, \bar{z}_2$ são colineares, então pela *proposição 2* $\frac{\bar{z}-\bar{z}_1}{\bar{z}_2-\bar{z}_1} \in \mathbb{R}$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA INICIAL 6:

Pela *proposição 6* temos que $\alpha = \frac{A-Bi}{2} \in \mathbb{C}^*$ e $\beta = C \in \mathbb{R}$. Sabendo que $A = 2, B = 3$ e $C = 1$, temos $\alpha = \frac{2-3i}{2}, \bar{\alpha} = \frac{2+3i}{2}$ e $\beta = 1$

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}\bar{z} + \alpha z + \beta &= 0 \Rightarrow \left(\frac{2+3i}{2}\right)\bar{z} + \left(\frac{2-3i}{2}\right)z + 1 = 0 \\ \Rightarrow (2+3i)\bar{z} + (2-3i)z + 2 &= 0\end{aligned}$$

ATIVIDADES:

- 20) Determine a equação, no plano complexo, da reta definida no plano cartesiano por $s(x) = 5x - 3y = 0$.
- 21) Dados $A(2,7)$ e $B(-1,5)$, determine equação, no plano complexo, da reta AB .
- 22) Utilizando os pontos do exercício anterior, determine a equação paramétrica da reta no plano complexo.

3.2.2 Equação da reta definida por um ponto e uma direção.

PROBLEMA INICIAL 7: No plano complexo, determine a equação da reta que passa pelo ponto $A(2, -5)$ e:

- a) é paralela a reta $s: (1+i)\bar{z} + (1-i)z + 2 = 0$.
- b) é perpendicular à reta $t: (3+i)\bar{z} + (3-i)z + 3i = 0$.

TEORIA:

Proposição 11: Seja a reta $r: \bar{\alpha}\bar{z} + \alpha z + \beta = 0$ e o ponto $P_0(z_0)$. A reta que passa por P_0 e é paralela a r é:

$$z - z_0 = -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0)$$

Demonstração:

Da geometria no plano cartesiano temos que a equação da reta que passa por $P(x_0, y_0)$ e inclinação δ é

$$y - y_0 = \delta(x - x_0)$$

Definido $z_0 = x_0 + y_0i$ então $x_0 = z_0 - y_0i \Rightarrow x_0 = \frac{z_0 + \bar{z}_0}{2}$ e $-y_0i = z_0 - x_0 \Rightarrow y_0 = \frac{z_0 - \bar{z}_0}{2i}$, e de modo análogo, $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ e $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$. Sabendo que o coeficiente angular é $\delta = m = -\frac{\alpha + \bar{\alpha}}{\alpha - \bar{\alpha}}i$ (proposição 6) e substituindo na equação anterior obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{z - \bar{z}}{2i} - \frac{z_0 - \bar{z}_0}{2i} &= -\left(-\frac{\alpha + \bar{\alpha}}{\alpha - \bar{\alpha}}i\right)\left(\frac{z + \bar{z}}{2} - \frac{z_0 + \bar{z}_0}{2}\right) \\ \Leftrightarrow (\alpha - \bar{\alpha})(z - \bar{z} - z_0 + \bar{z}_0) &= (\alpha + \bar{\alpha}) \cdot 2i^2 \cdot \left(\frac{z + \bar{z}}{2} - \frac{z_0 + \bar{z}_0}{2}\right) \\ \Leftrightarrow (\alpha - \bar{\alpha})(z - \bar{z} - z_0 + \bar{z}_0) &= -(\alpha + \bar{\alpha})(z + \bar{z} - z_0 - \bar{z}_0) \\ \Leftrightarrow (\alpha - \bar{\alpha})[(z - z_0) - (\bar{z} - \bar{z}_0)] &= -(\alpha + \bar{\alpha})[(z - z_0) + (\bar{z} - \bar{z}_0)] \\ \Leftrightarrow (\alpha - \bar{\alpha} + \alpha + \bar{\alpha})(z - z_0) &= (\alpha - \bar{\alpha} - \alpha - \bar{\alpha})(\bar{z} - \bar{z}_0) \\ \Leftrightarrow 2\alpha(z - z_0) = -2\bar{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0) &\Leftrightarrow z - z_0 = -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0) \end{aligned}$$

OBS: Conforme a *proposição 9*, que para determinar a reta paralela a $r: \bar{\alpha}\bar{z} + \alpha z + \beta = 0$ passando pelo ponto $P_0(z_0)$ usamos $z - z_0 = -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0)$ e para determinar a reta perpendicular a $r: \bar{\alpha}\bar{z} + \alpha z + \beta = 0$ passando pelo ponto $P_0(z_0)$ usamos $z - z_0 = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0)$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA INICIAL 7:

Pela *proposição 11* temos: A reta que passa por $P_0(z_0)$ e é paralela a $r: \bar{\alpha}\bar{z} + \alpha z + \beta = 0$ é

$z - z_0 = -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0)$ e a reta perpendicular é $z - z_0 = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0)$. Assim:

a) Sendo $A(2, -5)$ lugar geométrico do número complexo $z_0 = 2 - 5i$ e $\alpha = (1 - i)$ então

$$z - z_0 = -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0) \Rightarrow z - (2 - 5i) = -\frac{1 + i}{1 - i}[(\bar{z} - (2 + 5i))]$$

$$\Rightarrow (1 - i)[z - (2 - 5i)] = -(1 + i)[(\bar{z} - (2 + 5i))] \Rightarrow (1 + i)\bar{z} + (1 - i)z + 6 = 0$$

Portanto a reta tem equação $(1 + i)\bar{z} + (1 - i)z + 6 = 0$.

b) Usando $z_0 = 2 - 5i$ e $\alpha = (3 - i)$ então

$$z - z_0 = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0) \Rightarrow z - (2 - 5i) = \frac{3 + i}{3 - i}[(\bar{z} - (2 + 5i))]$$

$$\Rightarrow (3 - i)[z - (2 - 5i)] = (3 + i)[(\bar{z} - (2 + 5i))] \Rightarrow (3 + i)\bar{z} - (3 - i)z - 34i = 0$$

Portanto a reta tem equação $(3 + i)\bar{z} - (3 - i)z - 34i = 0$.

ATIVIDADES:

- 23) Qual é a equação da reta, no plano complexo, que passa pelo ponto $P(1,1)$ e é paralela a reta de equação $t: (2 + 5i)\bar{z} + (2 - 5i)z + i = 0$.
- 24) Determine, no plano complexo, a equação da reta perpendicular a $r: (2 + 2i)\bar{z} + (2 - 2i)z + 5 = 0$ que passa pelo ponto $M(1,2)$.
- 25) No plano complexo, qual é a equação da reta que passa pelo ponto $A(1,1)$ e é perpendicular a reta $y = -2x + 1$.
- 26) No plano complexo, qual é a equação da reta que passa pelo ponto $A(2,1)$ e é perpendicular a reta que passa pelos pontos $P(0,0)$ e $Q(2,3)$.

3.2.3 Ângulo formado por duas retas.

PROBLEMA INICIAL 8: Calcular o ângulo agudo formado pelas retas cartesianas $r: 3x - y + 5 = 0$ e $s: 2x + y + 3 = 0$.

TEORIA:

Proposição 12: Sejam as retas $r: \bar{\alpha}\bar{z} + \alpha z + \beta = 0$ e reta $s: \bar{b}\bar{z} + bz + \beta = 0$ não perpendiculares. O ângulo formado entre elas é

$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{\alpha\bar{b} - \bar{\alpha}b}{\alpha\bar{b} + \bar{\alpha}b} i \right|$$

Demonstração:

Da geometria plana temos que o coeficiente angular entre duas retas é

$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \right|$$

Da *proposição 6*, $m_r = -\frac{\alpha+\bar{\alpha}}{\alpha-\bar{\alpha}}i$ e $m_s = -\frac{b+\bar{b}}{b-\bar{b}}i$, substituindo na equação anterior e manipulando algebricamente

$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{\left(-\frac{\alpha+\bar{\alpha}}{\alpha-\bar{\alpha}}i\right) - \left(-\frac{b+\bar{b}}{b-\bar{b}}i\right)}{1 + \left(-\frac{\alpha+\bar{\alpha}}{\alpha-\bar{\alpha}}i\right)\left(-\frac{b+\bar{b}}{b-\bar{b}}i\right)} \right| = \left| -\frac{\alpha\bar{b} - \bar{\alpha}b}{\alpha\bar{b} + \bar{\alpha}b}i \right| = \left| \frac{\alpha\bar{b} - \bar{\alpha}b}{\alpha\bar{b} + \bar{\alpha}b}i \right| \blacksquare$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA INICIAL 8:

Pela *proposição 6*: $\alpha = \frac{A-Bi}{2}$, assim, $\alpha = \frac{A-Bi}{2} = \frac{3+i}{2}$ e $b = \frac{A-Bi}{2} = \frac{2-i}{2}$.

Agora, pela *proposição 12*

$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{\alpha\bar{b} - \bar{\alpha}b}{\alpha\bar{b} + \bar{\alpha}b}i \right| = \left| \frac{\frac{(3+i) \cdot (2+i) - (3-i) \cdot (2-i)}{2}}{\frac{(3+i) \cdot (2+i) + (3-i) \cdot (2-i)}{2}}i \right|$$

$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{(3+i) \cdot (2+i) - (3-i) \cdot (2-i)}{(3+i) \cdot (2+i) + (3-i) \cdot (2-i)}i \right| = \left| \frac{10i}{10}i \right| = 1$$

Como $\operatorname{tg} \theta = 1$ então $\theta = 45^\circ$.

Comentário: Esta forma de determinar o ângulo formado por duas retas no plano complexo é similar a utilizada no plano cartesiano.

ATIVIDADES:

- 27) Qual é a tangente do ângulo formado pelas retas $3x + 2y + 2 = 0$ e $-x + 2y + 5 = 0$?
- 28) Conduza por $P(0,0)$ as retas que formam um ângulo $\theta = \frac{\pi}{4}$ com $r: 6x + 2y - 3 = 0$.

3.2.4 Projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta e distância entre ponto e reta.

PROBLEMA INICIAL 9: Calcule a distância do ponto $P(2, -3)$ à reta $t: 3x - 4y + 2 = 0$.

TEORIA:

Proposição 13: Seja a reta $r: \bar{\alpha}z + \alpha z + \beta = 0$ e o ponto $P_0(z_0)$. A projeção ortogonal de P_0 sobre a reta r é o ponto z de coordenadas:

$$z = \frac{\alpha z_0 - \bar{\alpha} \bar{z}_0 - \beta}{2\alpha}$$

Demonstração:

Pela observação da *Proposição 11* sabemos que a equação da reta que passa por P_0 e é perpendicular a r é $z - z_0 = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0)$. Portanto o ponto procurado é a solução do

$$\text{sistema } \begin{cases} z - z_0 = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0) \\ \bar{\alpha} \bar{z} + \alpha z + \beta = 0 \end{cases}$$

Da segunda equação temos $\bar{\alpha} \bar{z} + \alpha z + \beta = 0 \Rightarrow \bar{z} = \frac{-\alpha z - \beta}{\bar{\alpha}}$. Substituindo na primeira obtemos $z - z_0 = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \left(\frac{-\alpha z - \beta}{\bar{\alpha}} - \bar{z}_0 \right) \Rightarrow z - z_0 = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \left(\frac{-\alpha z - \beta - \bar{\alpha} \bar{z}_0}{\bar{\alpha}} \right) \Rightarrow \alpha(z - z_0) = -\alpha z - \beta - \bar{\alpha} \bar{z}_0 \Rightarrow \alpha z = -\alpha z - \beta - \bar{\alpha} \bar{z}_0 + \alpha z_0 \Rightarrow 2\alpha z = -\beta - \bar{\alpha} \bar{z}_0 + \alpha z_0 \Rightarrow z = \frac{\alpha z_0 - \bar{\alpha} \bar{z}_0 - \beta}{2\alpha}$, como afirmado.

Proposição 14: Seja a reta $r: \bar{\alpha} \bar{z} + \alpha z + \beta = 0$ e o ponto $P_0(z_0)$. A distância entre P_0 e a reta r é igual a

$$d = \frac{|\bar{\alpha} \bar{z}_0 + \alpha z_0 + \beta|}{2\sqrt{\alpha \bar{\alpha}}}$$

Demonstração:

Pela *Proposição 12* sabemos que a projeção ortogonal de $P_0(z_0)$ é $z = \frac{\alpha z_0 - \bar{\alpha} \bar{z}_0 - \beta}{2\alpha}$.

Calculando o módulo entre $P_0(z_0)$ e z obtemos:

$$d = |z - z_0| = \left| \frac{\alpha z_0 - \bar{\alpha} \bar{z}_0 - \beta}{2\alpha} - z_0 \right| = \left| \frac{\alpha z_0 - \bar{\alpha} \bar{z}_0 - \beta - 2\alpha z_0}{2\alpha} \right| =$$

$$\left| \frac{-\alpha z_0 - \bar{\alpha} \bar{z}_0 - \beta}{2\alpha} \right| = \frac{|-\alpha z_0 - \bar{\alpha} \bar{z}_0 - \beta|}{|2\alpha|} = \frac{|\alpha z_0 + \bar{\alpha} \bar{z}_0 + \beta|}{2|\alpha|} = \frac{|\alpha z_0 + \bar{\alpha} \bar{z}_0 + \beta|}{2\sqrt{\alpha \bar{\alpha}}} \blacksquare$$

Observe que se $\alpha = a + bi$, então $\sqrt{\alpha \bar{\alpha}} = \sqrt{(a + bi)(a - bi)} = \sqrt{a^2 - b^2 i^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |\alpha|$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA INICIAL 9:

Usando a proposição 6 temos que $\alpha = \frac{A - Bi}{2} = \frac{3 + 4i}{2}$ e $\beta = 2$

Pela proposição 14:

$$d = \frac{|\bar{\alpha}z_0 + \alpha z_0 + \beta|}{2\sqrt{\alpha\bar{\alpha}}} = \frac{\left| \left(\frac{3-4i}{2}\right)(2+3i) + \left(\frac{3+4i}{2}\right)(2-3i) + 2 \right|}{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{3+4i}{2}\right)\left(\frac{3-4i}{2}\right)}} = \left| \frac{20}{5} \right| = 4$$

Comentário: Aqui novamente a maneira de calcular a distância pouco difere da forma usual quando consideramos as equações e pontos no plano cartesiano.

ATIVIDADES:

- 29) Calcule a distância do ponto $P(1, -3)$ à reta $t: 2x + 6y - 1 = 0$.
- 30) Determine a distância entre o ponto $(-2, 3)$ e o eixo das ordenadas.
- 31) Calcule a distância da origem à reta $r: ax + by + \sqrt{a^2 + b^2} = 0$.
- 32) Calcule o comprimento da altura AH , do triângulo de vértices $A(-3, 0)$, $B(0, 0)$ e $C(6, 8)$.

3.3 Triângulos

3.3.1 Semelhança de triângulos e triângulos equiláteros.

Na Geometria Elementar, os triângulos são as peças básicas e os conceitos fundamentais são a semelhança de triângulos e a congruência. Vamos abordar a semelhança de triângulos. Observe o problema proposto a seguir:

PROBLEMA INICIAL 10: Considere os triângulo ABC tal que $A(1, 1)$, $B(3, 2)$ e $C(2, 5)$. Os triângulos a seguir são semelhantes a ABC ?

- a) $\triangle DEF$ onde $D(3, -2)$, $E(1, -1)$, $F(2, -5)$.
- b) $\triangle GHI$ onde $G(13, -1)$, $H(11, -2)$, $I(12, -5)$.

TEORIA:

Dois triângulos são semelhantes quando for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de maneira que os ângulos correspondentes sejam iguais e os lados correspondentes sejam proporcionais.

Observe na figura que dois triângulos podem ser semelhantes tendo a mesma orientação ou tendo a orientação oposta.

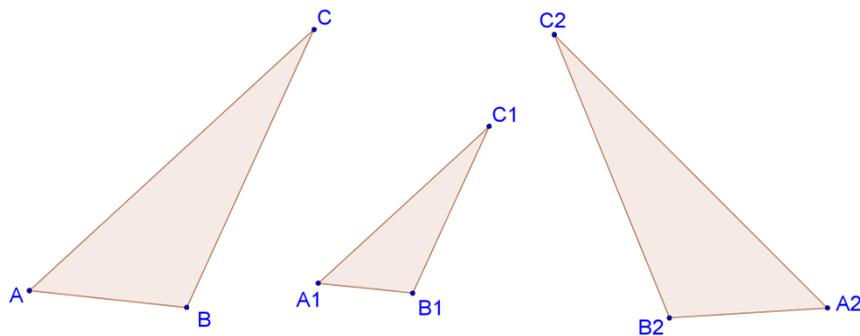


Figura 39: Triângulos semelhantes.

Os triângulos ABC e $A_1B_1C_1$ são semelhantes e possuem a mesma orientação, que é no sentido anti-horário ou positiva; Já os triângulos ABC e $A_2B_2C_2$ são semelhantes mas não possuem a mesma orientação, pois o triângulo $A_2B_2C_2$ está orientado no sentido horário ou negativa.

Sejam seis pontos no plano complexo: $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3$. Dizemos que os triângulos z_1, z_2, z_3 e w_1, w_2, w_3 são semelhantes se o ângulo A_k é igual ao ângulo w_k , $k \in \{1, 2, 3\}$.

Proposição 15: Os triângulos z_1, z_2, z_3 e w_1, w_2, w_3 são semelhantes com a mesma orientação, (denotamos por $\Delta z_1, z_2, z_3 \sim \Delta w_1, w_2, w_3$), se e somente se

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}$$

Que é equivalente a $\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Demonstração:

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, (caso LAL) as razões entre as medidas de dois pares de lados correspondentes são iguais e os ângulos entre estes lados são iguais (incluindo a orientação). Portanto temos que $\Delta z_1, z_2, z_3 \sim \Delta w_1, w_2, w_3$ se e somente se

$$\frac{d(z_1 z_2)}{d(z_1 z_3)} = \frac{d(w_1 w_2)}{d(w_1 w_3)} \text{ e } \widehat{z_3 z_1 z_2} \equiv \widehat{w_3 w_1 w_2}$$

Isto é $\frac{d(z_1 z_2)}{d(z_1 z_3)} = \frac{d(w_1 w_2)}{d(w_1 w_3)} \Leftrightarrow \frac{|z_2 - z_1|}{|z_3 - z_1|} = \frac{|w_2 - w_1|}{|w_3 - w_1|}$ e $\widehat{z_3 z_1 z_2} \equiv \widehat{w_3 w_1 w_2} \Leftrightarrow \arg \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \arg \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}$. Portanto obtemos $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}$.

Quanto à equivalência, aplicando as propriedades do determinante:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 - z_1 & w_2 - w_1 & 0 \\ z_3 - z_1 & w_3 - w_1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (z_2 - z_1)(w_3 - w_1) - (z_3 - z_1)(w_2 - w_1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (z_2 - z_1)(w_3 - w_1) = (z_3 - z_1)(w_2 - w_1) \\ &\Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \blacksquare \end{aligned}$$

Proposição 16: Os triângulos z_1, z_2, z_3 e w_1, w_2, w_3 são semelhantes com orientação inversa, (denotamos por $\Delta z_1, z_2, z_3 \sim_{rev} \Delta w_1, w_2, w_3$), se e somente se

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{\bar{w}_3 - \bar{w}_1}$$

Que é equivalente a $\begin{vmatrix} z_1 & \bar{w}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{w}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{w}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Demonstração:

Seja $P_{(z)}$ o lugar geométrico do número complexo z . O conjugado de z , digamos $P'_{(\bar{z})}$ corresponde, geometricamente, a reflexão deste ponto em relação ao eixo x . Portanto, a reflexão dos pontos w_1, w_2, w_3 em torno do eixo x marca os pontos $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3$. Os triângulos w_1, w_2, w_3 e $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3$ são semelhantes, mas possuem orientação oposta, logo, $\Delta z_1, z_2, z_3 \sim \Delta \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3$ e possuem a mesma orientação. Segue da *proposição 15* que

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{\bar{w}_3 - \bar{w}_1}$$

Que é equivalente a

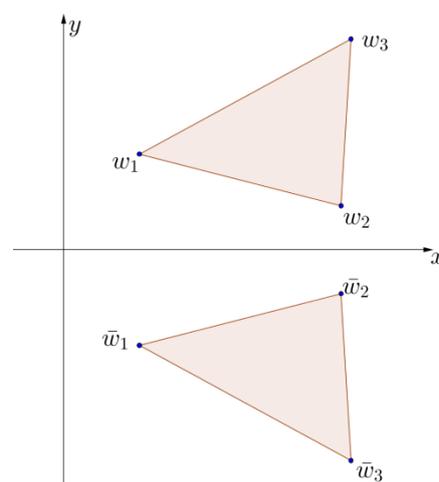


Figura 40: Reflexão de um triângulo.

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{w}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{w}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{w}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \blacksquare$$

Dando continuidade a parte teórica vamos estudar o triângulo equilátero.

Um triângulo equilátero possui todos os lados congruentes, ou seja, iguais, e também é equiângulo: todos os seus ângulos internos são congruentes (medem 60°).

Proposição 17: Suponha que z_1, z_2, z_3 são as coordenadas dos vértices do triângulo $A_1A_2A_3$. As seguintes sentenças são equivalentes:

(1) $A_1A_2A_3$ é um triângulo equilátero;

(2) $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$;

$$(3) \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & 1 \\ z_2 & z_3 & 1 \\ z_3 & z_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(4) \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{z_3 - z_1}{z_1 - z_2}$$

$$(5) z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$$

$$(6) (z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3)(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) = 0 \text{ onde } \omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}.$$

Demonstração:

(1) \Leftrightarrow (2) Temos que um triângulo equilátero possui seus lados com a mesma medida, logo,

$$d(A_1A_2) = d(A_2A_3) = d(A_3A_1) \Leftrightarrow |z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$$

(1) \Leftrightarrow (3) O triângulo $A_1A_2A_3$ é equilátero se e somente se $A_1A_2A_3$ é semelhante, com a

mesma orientação a $A_2A_3A_1$. Pela *proposição 15* decorre que $\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & 1 \\ z_2 & z_3 & 1 \\ z_3 & z_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

(3) \Leftrightarrow (4) Pela *proposição 15* decorre que

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & 1 \\ z_2 & z_3 & 1 \\ z_3 & z_1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{z_3 - z_1}{z_1 - z_2}$$

(4) \Leftrightarrow (5) Manipulando algebricamente temos

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{z_3 - z_1}{z_1 - z_2} \Leftrightarrow (z_2 - z_1)(z_1 - z_2) = (z_3 - z_1)(z_3 - z_2)$$

$$\Leftrightarrow z_2 z_1 - z_2^2 - z_1^2 + z_1 z_2 = z_3^2 - z_3 z_2 - z_1 z_3 + z_1 z_2$$

$$\Leftrightarrow z_2 z_1 + z_1 z_2 + z_3 z_2 + z_1 z_3 - z_1 z_2 = z_3^2 + z_2^2 + z_1^2$$

$$\Leftrightarrow z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = z_3^2 + z_2^2 + z_1^2$$

(5) \Leftrightarrow (6) Manipulando algebricamente

$$z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = z_3^2 + z_2^2 + z_1^2 \Leftrightarrow z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 - z_3^2 - z_2^2 - z_1^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3)(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3) = 0 \text{ ou } (z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & 1 & 1 \\ z_2 & \omega & 1 \\ z_3 & \omega^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ ou } \begin{vmatrix} z_1 & 1 & 1 \\ z_2 & \omega^2 & 1 \\ z_3 & \omega & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Para compreender observe o triângulo equilátero $\Delta 1\omega\omega^2$.

Rotacionando $z = 1 + 0i$ por $\frac{2\pi}{3}$ obtemos o ponto w , e posteriormente rotacionando w por $\frac{2\pi}{3}$ obtemos w^2 . (veja rotação de um ponto).

Assim, $w = \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}$ e $w^2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3}$.

E pela *proposição 14* e *15* temos

$$\begin{vmatrix} z_1 & 1 & 1 \\ z_2 & \omega & 1 \\ z_3 & \omega^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ ou } \begin{vmatrix} z_1 & 1 & 1 \\ z_2 & \omega^2 & 1 \\ z_3 & \omega & 1 \end{vmatrix} = 0$$

OBS: $w^2 + w + 1 = 0$. Verifique!

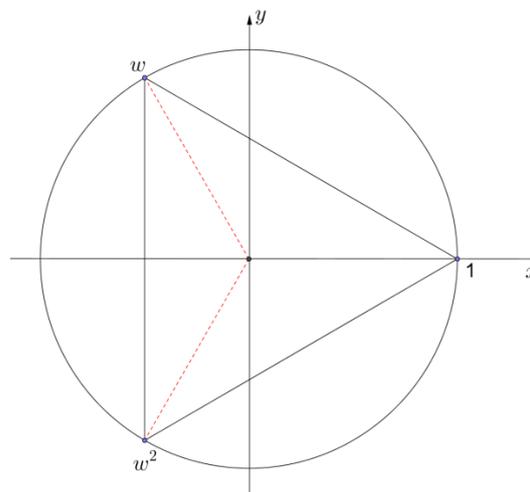


Figura 41: Triângulo equilátero $1ww^2$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA INICIAL 10:

Para resolver este problema utilizaremos a *proposição 15* ou então a *proposição 16*:

a) Sejam A, B, C, D, E, F , lugares geométricos dos números complexos $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3$ respectivamente.

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \Rightarrow \frac{(3 + 2i) - (1 + i)}{(2 + 5i) - (1 + i)} = \frac{(3 - 2i) - (1 - i)}{(2 - 5i) - (1 - i)} \Rightarrow \frac{2 + i}{1 + 4i} = \frac{2 - i}{1 - 4i}$$

Pela proposição 16, $\Delta z_1, z_2, z_3 \sim_{rev} \Delta w_1, w_2, w_3$, pois

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{\bar{w}_3 - \bar{w}_1}$$

b) Sejam A, B, C, D, E, F , lugares geométricos dos números complexos $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3$ respectivamente.

$$\begin{aligned} \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} &\Rightarrow \frac{(3 + 2i) - (1 + i)}{(2 + 5i) - (1 + i)} = \frac{(11 - 2i) - (13 - i)}{(12 - 5i) - (13 - i)} \Rightarrow \frac{2 + i}{1 + 4i} = \frac{-2 - i}{-1 - 4i} \\ &\Rightarrow \frac{6 - 7i}{17} = \frac{6 - 7i}{17} \end{aligned}$$

Pela proposição 15, $\Delta z_1, z_2, z_3 \sim \Delta w_1, w_2, w_3$, pois

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}$$

Comentário: No ensino médio geralmente não é abordado o assunto de semelhança de triângulos através da geometria analítica. A semelhança geralmente é abordada no ensino fundamental usando medidas dos lados e dos ângulos dos triângulos a serem comparados. O mesmo ocorre no caso dos triângulos equiláteros.

ATIVIDADES:

- 33) Os triângulos ΔABC , onde $A(1, -1), B(4, 1), C(2, 2)$, e ΔDEF , com $D(1, -1), E(10, 5), F(4, 8)$, são semelhantes?
- 34) Determine o valor de x para que os triângulos ΔABC e ΔDEF sejam semelhantes. $A(7, -2), B(10, -2), C(9, -1), D(-7, -2), E(-13, -2), F(x, 0)$.
- 35) O triângulo ΔABC , onde $A(0, 0), B(1, 0), C\left(\frac{5}{10}, \frac{\sqrt{75}}{10}\right)$, é equilátero?

3.3.2 Área de um triângulo e área de um polígono convexo.

PROBLEMA INICIAL 11: Determine a área do triângulo cujos vértices são $A(4, 1), B(-2, 3)$ e $C(0, -6)$.

TEORIA:

Teorema 5: A área do triângulo $A_1A_2A_3$ cujos vértices possuem coordenadas $z_1z_2z_3$ é igual ao valor absoluto do número

$$\frac{i}{4} \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Demonstração:

Sejam (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) as coordenadas cartesianas do vértice de um triângulo qualquer, então a área deste triângulo será o valor absoluto dado por

$$Área = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Definido $z_1 = x_1 + y_1i$ então $x_1 = z_1 - y_1i \Rightarrow x_1 = \frac{z_1 + \bar{z}_1}{2}$ e $-y_1i = z_1 - x_1 \Rightarrow y_1 = \frac{z_1 - \bar{z}_1}{2i}$, e de modo análogo $x_2 = \frac{z_2 + \bar{z}_2}{2}$ e $y_2 = \frac{z_2 - \bar{z}_2}{2i}$, $x_3 = \frac{z_3 + \bar{z}_3}{2}$ e $y_3 = \frac{z_3 - \bar{z}_3}{2i}$,

Aplicando as propriedades dos determinantes temos:

$$\begin{aligned} Área &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{z_1 + \bar{z}_1}{2} & \frac{z_1 - \bar{z}_1}{2i} & 1 \\ \frac{z_2 + \bar{z}_2}{2} & \frac{z_2 - \bar{z}_2}{2i} & 1 \\ \frac{z_3 + \bar{z}_3}{2} & \frac{z_3 - \bar{z}_3}{2i} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{8i} \begin{vmatrix} z_1 + \bar{z}_1 & z_1 - \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 + \bar{z}_2 & z_2 - \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 + \bar{z}_3 & z_3 - \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{8i} \begin{vmatrix} z_1 + \bar{z}_1 + z_1 - \bar{z}_1 & z_1 - \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 + \bar{z}_2 - z_2 - \bar{z}_2 & z_2 - \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 + \bar{z}_3 - z_3 - \bar{z}_3 & z_3 - \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{8i} \begin{vmatrix} 2z_1 & z_1 - \bar{z}_1 & 1 \\ 2z_2 & z_2 - \bar{z}_2 & 1 \\ 2z_3 & z_3 - \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{4i} \begin{vmatrix} z_1 & z_1 - \bar{z}_1 + z_1 & 1 \\ z_2 & z_2 - \bar{z}_2 + z_2 & 1 \\ z_3 & z_3 - \bar{z}_3 + z_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4i} \begin{vmatrix} z_1 & z_1 - \bar{z}_1 + z_1 & 1 \\ z_2 & z_2 - \bar{z}_2 + z_2 & 1 \\ z_3 & z_3 - \bar{z}_3 + z_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4i} \begin{vmatrix} z_1 & -\bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & -\bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & -\bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{4i} \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolário: A área de um triângulo diretamente orientado $A_1A_2A_3$ cujos vértices tem coordenadas z_1, z_2, z_3 é

$$\text{Área}(A_1A_2A_3) = \frac{1}{2} \text{Im}(\bar{z}_1z_2 + \bar{z}_2z_3 + \bar{z}_3z_1)$$

onde Im é a parte imaginária do número complexo obtido.

Caso o triângulo esteja negativamente orientado, então consideramos sua área em módulo.

Demonstração:

Calculando o determinante da matriz do *teorema 5* temos

$$\begin{aligned} \text{Área}(A_1A_2A_3) &= \frac{i}{4} \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4} (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1 - \bar{z}_1z_2 - \bar{z}_2z_3 - \bar{z}_3z_1) \\ &= \frac{i}{4} [z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1 - \overline{(z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1)}] \\ &= \frac{i}{4} [2i \text{Im}(z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1)] = \frac{i}{4} [-2i \text{Im}(\bar{z}_1z_2 + \bar{z}_2z_3 + \bar{z}_3z_1)] \\ &= \frac{1}{2} \text{Im}(\bar{z}_1z_2 + \bar{z}_2z_3 + \bar{z}_3z_1) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 6: A área do polígono convexo diretamente orientado $A_1A_2 \dots A_n$, $n \in \mathbb{N}$ cujos vértices tem coordenadas z_1, z_2, \dots, z_n é

$$\text{Área}(A_1A_2 \dots A_n) = \frac{1}{2} \text{Im}(\bar{z}_1z_2 + \bar{z}_2z_3 + \dots + \bar{z}_{n-1}z_n + \bar{z}_nz_1)$$

Caso o polígono esteja negativamente orientado, então consideramos sua área em módulo.

Demonstração:

Usando o princípio da indução finita temos:

i) Para $n = 3$ é verdadeiro, como provado no corolário anterior.

ii) Suponha que a afirmativa é verdadeira para algum $n = k$.

iii) Para $n = k + 1$ temos:

$$\text{Área}(A_1A_2 \dots A_kA_{k+1}) = \text{Área}(A_1A_2 \dots A_k) + \text{Área}(A_1A_kA_{k+1})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \cdots + \bar{z}_k z_1) + \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_k + \bar{z}_k z_{k+1} + \bar{z}_{k+1} z_1) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \cdots + \bar{z}_k z_1 + \bar{z}_1 z_k + \bar{z}_k z_{k+1} + \bar{z}_{k+1} z_1) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \cdots + \bar{z}_k z_{k+1} + \bar{z}_{k+1} z_1) + \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{z}_k z_1 + \bar{z}_1 z_k) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \cdots + \bar{z}_k z_{k+1} + \bar{z}_{k+1} z_1) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Pois $\operatorname{Im}(\bar{z}_k z_1 + \bar{z}_1 z_k) = 0$.

Observe que podemos usar o teorema 6 para determinar a colinearidade de pontos:

Corolário: Os pontos $A_1 A_2 \dots A_n$ de coordenadas z_1, z_2, \dots, z_n são colineares se

$$\operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \cdots + \bar{z}_{n-1} z_n + \bar{z}_n z_1) = 0$$

Demonstração:

Suponha, por absurdo, que o ponto z_j não esteja alinhado com os demais pontos, mas

$$\operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \cdots + \bar{z}_{n-1} z_n + \bar{z}_n z_1) = 0$$

assim,

$$\text{Área}(A_1 A_2 \dots A_n) =$$

$$\text{Área}(A_1 \dots A_{j-1}) + \text{Área}(A_{j-1} A_j A_{j+1}) + \text{Área}(A_{j+1} \dots A_n)$$

Como $A_1 \dots A_{j-1}$ e $A_{j+1} \dots A_n$ são alinhados, então sua área é zero, logo

$$\begin{aligned}
\text{Área}(A_1 A_2 \dots A_n) &= \text{Área}(A_{j-1} A_j A_{j+1}) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{z}_{j-1} z_j + \bar{z}_j z_{j+1} + \bar{z}_{j+1} z_{j-1}) \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \operatorname{Im}(\bar{z}_{j-1} z_j + \bar{z}_j z_{j+1} + \bar{z}_{j+1} z_{j-1}) \neq 0
\end{aligned}$$

O que é um absurdo. Segue que o ponto z_j esta alinhado com os demais pontos.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA INICIAL 11:

Sejam A, B, C lugares geométricos dos complexos z_1, z_2, z_3 , pelo corolário do Teorema 5 temos:

$$\text{Área}(A_1A_2A_3) = \frac{1}{2} \text{Im}(\bar{z}_1z_2 + \bar{z}_2z_3 + \bar{z}_3z_1)$$

$$\text{Área}(A_1A_2A_3) = \frac{1}{2} \text{Im}[(4 - i)(-2 + 3i) + (-2 - 3i)(0 - 6i) + (0 + 6i)(4 + i)]$$

$$\text{Área}(A_1A_2A_3) = \frac{1}{2} \text{Im}(-29 + 50i) = 25$$

Portanto a área do triângulo é de 25 unidades quadradas.

Comentário: Esta fórmula pode ser estendida para o cálculo da área de polígonos convexos com n lados.

ATIVIDADES:

- 36) Calcule a área do triângulo cujos vértices são $A(2,3)$, $B(1,5)$ e $C(0,0)$.
- 37) Determine a área do quadrilátero $ABCD$, dados $A(0,0)$, $B(4, -2)$, $C(6,8)$ e $D(0,4)$.
- 38) Calcule a área do pentágono $ABCDE$, dados $A(2,1)$, $B(2,0)$, $C(0, -4)$, $D(-2,1)$ e $E(0,4)$.
- 39) Determine y de modo que o triângulo de vértices $A(1,4)$, $B(4,1)$ e $C(0,y)$ tenha área 6.

3.3.3 Baricentro, Ortocentro e Circuncentro .

PROBLEMA INICIAL 12: Determine as coordenadas do baricentro do triângulo cujas coordenadas dos vértices são $A(0,0)$, $B(3,5)$ e $C(4,8)$.

TEORIA:

Proposição 18: As três medianas de um triângulo qualquer se encontram em um único ponto. Esse ponto é chamado de baricentro. A coordenada do baricentro é

$$z_b = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

onde z_1, z_2, z_3 são os vértices do triângulo.

Demonstração:

Inicialmente vamos demonstrar que as três retas se intersectam em um ponto. Da geometria plana temos que duas retas concorrentes se intersectam em um ponto, logo, precisamos mostrar que este ponto pertence a terceira reta:

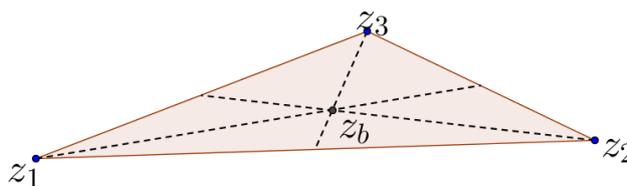


Figura 42: Baricentro de um triângulo.

Considere o triângulo de vértices z_1, z_2, z_3 . A reta suporte da mediana relativa ao lado z_2z_3 é a reta que passa por z_1 e pelo ponto médio $\left(z_m = \frac{z_2+z_3}{2}\right)$ do segmento z_2z_3 .

Pela *proposição 7* esta reta tem equação

$$\begin{aligned} \frac{z - z_1}{z_m - z_1} &= \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z}_m - \bar{z}_1} \Leftrightarrow (z_m - z_1)\bar{z} - (\bar{z}_m - \bar{z}_1)z + z_1\bar{z}_m - z_m\bar{z}_1 = 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{z_2 + z_3}{2} - z_1\right)\bar{z} - \left(\frac{\overline{z_2 + z_3}}{2} - \bar{z}_1\right)z + \frac{\overline{z_2 + z_3}}{2}z_1 - \frac{z_2 + z_3}{2}\bar{z}_1 &= 0 \quad (I) \end{aligned}$$

E de modo análogo temos que as outras duas medianas são

$$\begin{aligned} \left(\frac{z_1 + z_3}{2} - z_2\right)\bar{z} - \left(\frac{\overline{z_1 + z_3}}{2} - \bar{z}_2\right)z + \frac{\overline{z_1 + z_3}}{2}z_2 - \frac{z_1 + z_3}{2}\bar{z}_2 &= 0 \quad (II) \\ \left(\frac{z_1 + z_2}{2} - z_3\right)\bar{z} - \left(\frac{\overline{z_1 + z_2}}{2} - \bar{z}_3\right)z + \frac{\overline{z_1 + z_2}}{2}z_3 - \frac{z_1 + z_2}{2}\bar{z}_3 &= 0 \quad (III) \end{aligned}$$

Agora fazendo a combinação linear de quaisquer duas equações obtemos a terceira. Observe a combinação linear da equação *I* e *II*, os outros dois casos são análogos:

Fazendo *I* + *II* obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{z_2 + z_3}{2} - z_1\right)\bar{z} - \left(\frac{\overline{z_2 + z_3}}{2} - \bar{z}_1\right)z + \frac{\overline{z_2 + z_3}}{2}z_1 - \frac{z_2 + z_3}{2}\bar{z}_1 + \left(\frac{z_1 + z_3}{2} - z_2\right)\bar{z} \\ - \left(\frac{\overline{z_1 + z_3}}{2} - \bar{z}_2\right)z + \frac{\overline{z_1 + z_3}}{2}z_2 - \frac{z_1 + z_3}{2}\bar{z}_2 = 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{z_2 + z_3 - 2z_1}{2}\right)\bar{z} - \left(\frac{\overline{z_2 + z_3 - 2z_1}}{2}\right)z + \frac{\bar{z}_2z_1 + \bar{z}_3z_1}{2} - \frac{z_2\bar{z}_1 + z_3\bar{z}_1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{z_1 + z_3 - 2z_2}{2} \right) \bar{z} - \left(\frac{z_1 + z_3 - 2z_2}{2} \right) z + \frac{\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_3 z_2}{2} - \frac{z_1 \bar{z}_2 + z_3 \bar{z}_2}{2} = 0 \\
\Rightarrow & \left(\frac{-z_2 - z_1 + 2z_3}{2} \right) \bar{z} - \left(\frac{-z_2 - z_1 + 2z_3}{2} \right) z + \frac{\bar{z}_3 z_1 - z_3 \bar{z}_1 + \bar{z}_3 z_2 - z_3 \bar{z}_2}{2} = 0 \\
\Rightarrow & - \left(\frac{z_2 + z_1}{2} - z_3 \right) \bar{z} + \left(\frac{\overline{z_2 + z_1}}{2} - \bar{z}_3 \right) z + \frac{z_1 + z_2}{2} \bar{z}_3 - \frac{\bar{z}_2 + \bar{z}_1}{2} z_3 = 0 \\
\Rightarrow & \left(\frac{z_2 + z_1}{2} - z_3 \right) \bar{z} - \left(\frac{\overline{z_2 + z_1}}{2} - \bar{z}_3 \right) z + \frac{\bar{z}_2 + \bar{z}_1}{2} z_3 - \frac{z_1 + z_2}{2} \bar{z}_3 = 0
\end{aligned}$$

Portanto o ponto de intersecção entre I e III pertence a II, logo, as três retas se intersectam em um ponto.

Para determinar o ponto de intersecção entre as retas utilizamos a proposição 10:

Sejam as retas (I) e (II) escritas na forma paramétrica (para qualquer outra combinação a resolução é análoga):

$$z_b = \begin{cases} z_{(I)} = (1-t)z_1 + t \left(\frac{z_2 + z_3}{2} \right) \\ z_{(II)} = (1-t)z_2 + t \left(\frac{z_1 + z_3}{2} \right) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
(1-t)z_1 + t \left(\frac{z_2 + z_3}{2} \right) &= (1-t)z_2 + t \left(\frac{z_1 + z_3}{2} \right) \\
\Leftrightarrow 2z_1 - 2tz_1 + tz_2 + tz_3 - 2z_2 + 2tz_2 - tz_1 - tz_3 &= 0 \\
\Leftrightarrow 2z_1 - 2z_2 - 3tz_1 + 3tz_2 &= 0 \\
\Leftrightarrow t &= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Assim

$$z_b = \left(1 - \frac{2}{3} \right) z_1 + \frac{2}{3} \left(\frac{z_2 + z_3}{2} \right) = \frac{z_1}{3} + \frac{z_2 + z_3}{3} = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

Proposição 19: três alturas de um triângulo qualquer se encontram em um único ponto. Esse ponto é chamado de ortocentro do triângulo.

Demonstração:

Inicialmente vamos demonstrar que as três retas se intersectam em um ponto. Da geometria plana temos que duas retas concorrentes se intersectam em um ponto, logo, precisamos mostrar que este ponto pertence a terceira reta:

Seja o triângulo de vértices z_1, z_2, z_3 .

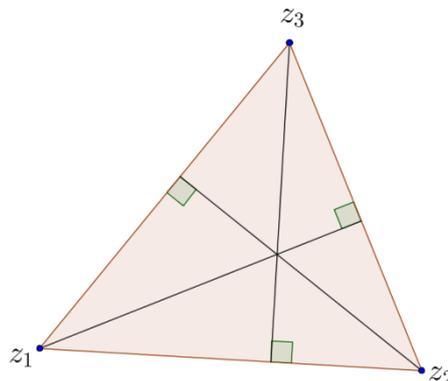


Figura 43: Ortocentro do triângulo.

Pela *proposição 8* as equações das retas $\overrightarrow{z_1 z_2}$, $\overrightarrow{z_2 z_3}$ e $\overrightarrow{z_1 z_3}$ são, respectivamente:

$$(z_2 - z_1)\bar{z} - (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z + z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 = 0$$

$$(z_3 - z_2)\bar{z} - (\bar{z}_3 - \bar{z}_2)z + z_2\bar{z}_3 - z_3\bar{z}_2 = 0$$

$$(z_3 - z_1)\bar{z} - (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)z + z_1\bar{z}_3 - z_3\bar{z}_1 = 0$$

Pela observação da *proposição 11* as equações das retas que passam por z_1 , z_2 e z_3 e perpendiculares, respectivamente, às retas $\overrightarrow{z_2 z_3}$, $\overrightarrow{z_1 z_3}$ e $\overrightarrow{z_1 z_2}$ são:

$$(\bar{z}_3 - \bar{z}_2)(z - z_1) = -(z_3 - z_2)(\bar{z} - \bar{z}_1) \quad (I)$$

$$(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(z - z_2) = -(z_3 - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_2) \quad (II)$$

$$(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(z - z_3) = -(z_2 - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_3) \quad (III)$$

Agora fazendo a combinação linear de quaisquer duas equações obtemos a terceira. Observe a combinação linear da equação *I* e *II*, os outros dois casos são análogos:

Fazendo *I* - *II* obtemos:

$$(\bar{z}_3 - \bar{z}_2)(z - z_1) + (z_3 - z_2)(\bar{z} - \bar{z}_1) - (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(z - z_2) - (z_3 - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_2) = 0$$

$$\Rightarrow (\bar{z}_3 - \bar{z}_2)z - (\bar{z}_3 - \bar{z}_2)z_1 + (z_3 - z_2)\bar{z} - (z_3 - z_2)\bar{z}_1 - (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)z + (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)z_2 - (z_3 - z_1)\bar{z} + (z_3 - z_1)\bar{z}_2 = 0$$

$$\Rightarrow (-\bar{z}_2 + \bar{z}_1)z - (-z_2 + z_1)\bar{z} - (-z_1 + z_2)\bar{z}_3 + (-\bar{z}_1 + \bar{z}_2)z_3 = 0$$

$$\Rightarrow (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(z - z_3) = -(z_2 - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_3)$$

Portanto o ponto de intersecção entre I e II pertence a III, logo, as três retas se intersectam em um ponto.

Proposição 20: As três mediatrizes de um triângulo qualquer se encontram em um único ponto. Esse ponto é chamado de circuncentro do triângulo.

Demonstração:

Inicialmente vamos demonstrar que as três retas se intersectam em um ponto. Da geometria plana temos que duas retas concorrentes se intersectam em um ponto, logo, precisamos mostrar que este ponto pertence a terceira reta:

Seja o triângulo de vértices z_1, z_2, z_3 .

Pela *proposição 8* as equações das retas $\overleftrightarrow{z_1z_2}$, $\overleftrightarrow{z_2z_3}$ e $\overleftrightarrow{z_1z_3}$ são, respectivamente:

$$(z_2 - z_1)\bar{z} - (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z + z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 = 0$$

$$(z_3 - z_2)\bar{z} - (\bar{z}_3 - \bar{z}_2)z + z_2\bar{z}_3 - z_3\bar{z}_2 = 0$$

$$(z_3 - z_1)\bar{z} - (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)z + z_1\bar{z}_3 - z_3\bar{z}_1 = 0$$

O ponto médio dos lados $\overleftrightarrow{z_1z_2}$, $\overleftrightarrow{z_2z_3}$ e $\overleftrightarrow{z_1z_3}$ são, respectivamente:

$$z_{m1} = \frac{z_1+z_2}{2}, z_{m2} = \frac{z_2+z_3}{2} \text{ e } z_{m3} = \frac{z_1+z_3}{2}.$$

Pela observação da *proposição 11* a equação da reta que passam por z_{m1} , perpendicular à reta $\overleftrightarrow{z_1z_2}$ é:

$$(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(z - z_{m1}) = -(z_2 - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_{m1})$$

$$\Rightarrow (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z + (z_2 - z_1)\bar{z} = (\bar{z}_2 - \bar{z}_1) \frac{z_1 + z_2}{2} + (z_2 - z_1) \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{2}$$

$$\Rightarrow (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z + (z_2 - z_1)\bar{z} = \frac{\bar{z}_2z_1 + \bar{z}_2z_2 - \bar{z}_1z_1 - \bar{z}_1z_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 - z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2}{2}$$

$$\Rightarrow (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z + (z_2 - z_1)\bar{z} = \frac{2\bar{z}_2z_2 - 2\bar{z}_1z_1}{2}$$

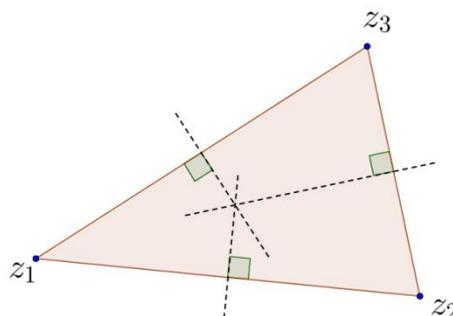


Figura 44: Circuncentro do triângulo.

$$\Rightarrow (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z + (z_2 - z_1)\bar{z} = |z_2|^2 - |z_1|^2 \quad (I)$$

Pois $z\bar{z} = |z|^2$.

E de modo análogo temos

$$(\bar{z}_3 - \bar{z}_2)z + (z_3 - z_2)\bar{z} = |z_3|^2 - |z_2|^2 \quad (II)$$

$$(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)z + (z_3 - z_1)\bar{z} = |z_3|^2 - |z_1|^2 \quad (III)$$

Agora fazendo a combinação linear de quaisquer duas equações obtemos a terceira. Observe a combinação linear da equação *I* e *II*, os outros dois casos são análogos:

Fazendo *I* + *II* obtemos:

$$\begin{aligned} (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z + (z_2 - z_1)\bar{z} - |z_2|^2 + |z_1|^2 + (\bar{z}_3 - \bar{z}_2)z + (z_3 - z_2)\bar{z} - |z_3|^2 + |z_2|^2 &= 0 \\ \Rightarrow (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)z + (z_3 - z_1)\bar{z} &= |z_3|^2 - |z_1|^2 \end{aligned}$$

Portanto o ponto de intersecção entre I e II pertence a III, logo, as três retas se intersectam em um ponto.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA INICIAL 12:

Considerando A, B, C lugares geométricos dos números complexos z_1, z_2, z_3 e pela proposição 18 temos

$$\begin{aligned} z_b &= \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \\ z_b &= \frac{0 + (3 + 5i) + (4 + 8i)}{3} = \frac{7 + 13i}{3} \end{aligned}$$

Portanto as coordenadas do baricentro do triângulo ABC são $(\frac{7}{3}, \frac{13}{3})$.

Comentário: A fórmula utilizada para calcular o baricentro no plano complexo é idêntica à fórmula utilizada no plano cartesiano. O diferencial está no fato de desenvolver o conteúdo utilizando números complexos.

ATIVIDADES:

40) Determine as coordenadas do baricentro de um triângulo, cujos vértices são:

a) $A(2,4), B(6,3)$ e $C(7, -13)$

b) $A(1, -3), B(-4, 7)$ e $C(-6, 8)$

c) $A(3, -10), B(-1, 8)$ e $C(7, -4)$

3.4 Circunferências

3.4.1 Equação da circunferência.

PROBLEMA INICIAL 13: Determine a equação da circunferência, no plano complexo, sabendo que $C(3, 5)$ e $r = 7$.

TEORIA:

Proposição 21: A equação da circunferência no plano complexo é $z\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + \beta = 0$, onde $\alpha \in \mathbb{C}$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

A equação de uma circunferência no plano cartesiano é $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$, $m, n, p \in \mathbb{R}$, $p < \frac{m^2 + n^2}{4}$.

Tomando $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ e $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ e substituindo na equação da circunferência no plano cartesiano obtemos $\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 + m\frac{z+\bar{z}}{2} + n\frac{z-\bar{z}}{2} + p = 0 \Rightarrow \frac{z^2+2z\bar{z}+\bar{z}^2}{4} + \frac{z^2-2z\bar{z}+\bar{z}^2}{-4} + m\frac{z+\bar{z}}{2} + n\frac{z-\bar{z}}{2} + p = 0 \Rightarrow \frac{4z\bar{z}}{4} + m\frac{z+\bar{z}}{2} + n\frac{z-\bar{z}}{2} + p = 0 \Rightarrow z\bar{z} + m\frac{z+\bar{z}}{2} + n\frac{z-\bar{z}}{2} + p = 0$. Que pode ser reescrito como

$$z\bar{z} + z\frac{m-ni}{2} + \bar{z}\frac{m+ni}{2} + p = 0.$$

Fazendo $\alpha = \frac{m-ni}{2} \in \mathbb{C}$ e $\beta = p \in \mathbb{R}$ obtemos

$$z\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + \beta = 0. \quad \blacksquare$$

OBS: O raio da circunferência é $r = \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - p} = \sqrt{\alpha\bar{\alpha} - \beta}$, pois

$$\alpha\bar{\alpha} = \frac{m-ni}{2} \cdot \frac{m+ni}{2} = \frac{m^2+n^2}{4}.$$

Então a equação é equivalente a $(\bar{z} + \alpha)(z + \bar{\alpha}) = r^2$.

Tomando $\gamma = -\bar{\alpha} = -\frac{m+ni}{2}$ a equação da circunferência com centro em γ e raio r se torna

$$(\bar{z} - \bar{\gamma})(z - \gamma) = r^2$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA INICIAL 13:

Considerando C como lugar geométrico do complexo γ e utilizando a proposição 21:

$$\begin{aligned}(\bar{z} - \bar{\gamma})(z - \gamma) = r^2 &\Rightarrow [\bar{z} - (3 - 3i)][z - (3 + 3i)] = 7^2 \\ \Rightarrow z\bar{z} - (3 + 5i)\bar{z} - (3 - 5i)z + 9 + 15i - 15i - 25i^2 - 49 &= 0 \\ \Rightarrow z\bar{z} - (3 - 5i)z - (3 + 5i)\bar{z} - 15 &= 0\end{aligned}$$

Comentário: Esta forma de determinar a equação da circunferência pouco difere da forma ensinada aos alunos do ensino médio. Sua utilização se justifica pelo fato de desenvolver o conteúdo sobre números complexos com uma metodologia mais dinâmica do que da forma que usualmente é feita.

ATIVIDADES:

- 41) Qual é a equação da circunferência, no plano complexo, de centro $C(2, -1)$ que passa por $P(3,3)$?
- 42) Represente a equação da circunferência $\delta: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$ no plano complexo.
- 43) Ache as coordenadas do centro e o raio da circunferência ε cuja equação é $2z\bar{z} - (-2 - i)z - (-2 + i)\bar{z} - 1 = 0$.
- 44) Um quadrado tem vértices consecutivos $A(3,3)$ e $B(4,2)$. Determine a equação da circunferência circunscrita ao quadrado.

3.4.2 Ângulo formado entre duas circunferências.

Sejam duas circunferências que se interceptam em um ponto P , o ângulo θ entre duas circunferências é o ângulo determinado pelas tangentes às circunferências passando por P .

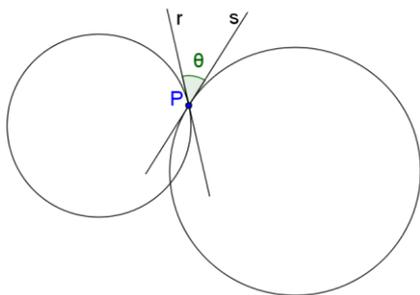


Figura 45: Ângulo entre duas circunferências.

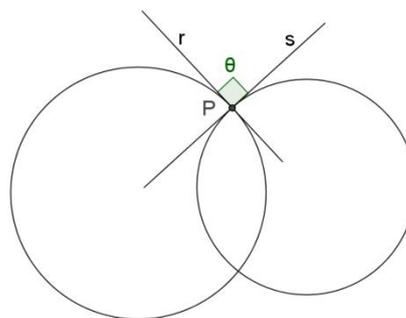


Figura 46: Circunferências ortogonais.

Quando as tangentes r e s , respectivas às circunferências em um ponto P , formam um ângulo reto entre si, dizemos que as circunferências são ortogonais.

PROBLEMA INICIAL 14: Qual é o ângulo formado entre as circunferências ε de $C(3,2)$ e $r = 2$ e σ de $C(4,-1)$ e $r = \sqrt{6}$.

TEORIA:

Proposição 22: Seja θ o ângulo formado entre as circunferências de equações $z\bar{z} + \alpha_1 z + \bar{\alpha}_1 \bar{z} + \beta_1 = 0$ e $z\bar{z} + \alpha_2 z + \bar{\alpha}_2 \bar{z} + \beta_2 = 0$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ e $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, de raios r_1, r_2 respectivamente, secantes, então é válida a fórmula:

$$\cos \theta = \left| \frac{\beta_1 + \beta_2 - (\alpha_1 \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_1 \alpha_2)}{2r_1 r_2} \right|$$

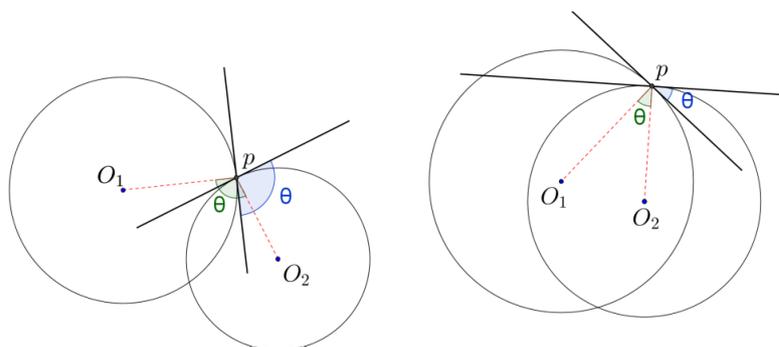


Figura 47: Ângulo entre circunferências.

Demonstração:

Seja P o ponto comum entre as circunferências e sejam $O_1(-\bar{\alpha}_1)$ e $O_2(-\bar{\alpha}_2)$ os centros das circunferências. O ângulo θ é igual a $\widehat{O_1 P O_2}$ ou $\pi - \widehat{O_1 P O_2}$, logo,

$$\cos \theta = |\cos \widehat{O_1 P O_2}| = \left| \frac{r_1^2 + r_2^2 - (O_1 O_2)^2}{2r_1 r_2} \right| =$$

$$\left| \frac{\alpha_1 \bar{\alpha}_1 - \beta_1 + \alpha_2 \bar{\alpha}_2 - \beta_2 - |\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2|^2}{2r_1 r_2} \right| =$$

$$\left| \frac{\alpha_1 \bar{\alpha}_1 + \alpha_2 \bar{\alpha}_2 - \beta_1 - \beta_2 - \alpha_1 \bar{\alpha}_1 - \alpha_2 \bar{\alpha}_2 + \alpha_1 \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_1 \alpha_2}{2r_1 r_2} \right| =$$

$$\left| \frac{\beta_1 + \beta_2 - (\alpha_1 \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_1 \alpha_2)}{2r_1 r_2} \right| \quad \blacksquare$$

OBS: A igualdade $|\cos \widehat{O_1 P O_2}| = \left| \frac{r_1^2 + r_2^2 - (O_1 O_2)^2}{2r_1 r_2} \right|$ é obtida pela lei dos cossenos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$, onde $a = \overline{O_1 O_2}$, $b = r_1$, $c = r_2$ e $A = \theta$.

Quanto a igualdade $\theta = \widehat{O_1 P O_2}$, observe:

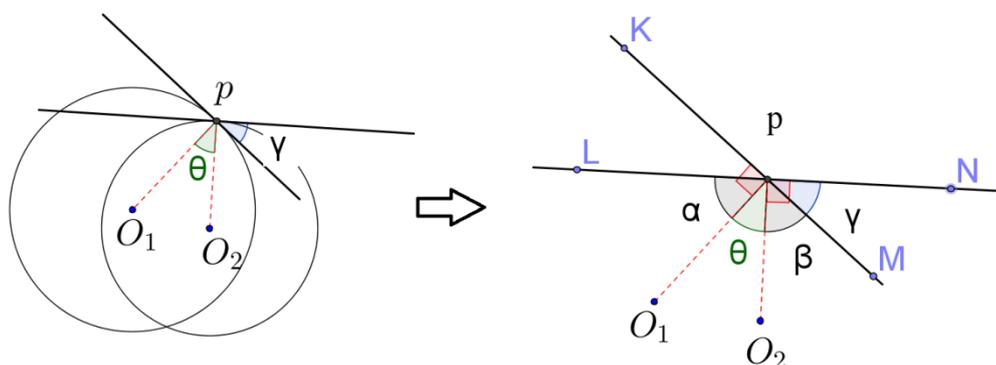


Figura 48: Ângulos congruentes na circunferência.

Considere os ângulos θ e γ , como a tangente forma um ângulo reto com o raio da circunferência, então $\widehat{O_1 P K} = \widehat{O_1 P M} = \widehat{O_2 P L} = \widehat{O_2 P N} = 90^\circ$, assim, $\alpha + \theta = \beta + \theta = \beta + \gamma = 90^\circ \Rightarrow \alpha = \beta$ e $\theta = \gamma$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA INICIAL 14:

Considerando C como lugar geométrico do complexo γ e utilizando a proposição 21:

$$\varepsilon: (\bar{z} - \bar{\gamma})(z - \gamma) = r^2 \Rightarrow [\bar{z} - (3 - 2i)][z - (3 + 2i)] = 2^2$$

$$\Rightarrow z\bar{z} - (3 - 2i)z - (3 + 2i)\bar{z} + 9 = 0$$

$$\sigma: (\bar{z} - \bar{\gamma})(z - \gamma) = r^2 \Rightarrow [\bar{z} - (4 + i)][z - (4 - i)] = (\sqrt{6})^2$$

$$\Rightarrow z\bar{z} - (4+i)z - (4-i)\bar{z} + 11 = 0$$

Usando a proposição 22:

$$\cos \theta = \left| \frac{\beta_1 + \beta_2 - (\alpha_1 \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_1 \alpha_2)}{2r_1 r_2} \right| = \left| \frac{9 + 11 - [(3-2i)(4-i) + (3+2i)(4+i)]}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{6}} \right|$$

$$\cos \theta = \left| \frac{20 - (12 - 3i - 8i + 2i^2 + 12 + 3i + 8i + 2i^2)}{4\sqrt{6}} \right| = \left| \frac{20 - 20}{4\sqrt{6}} \right| = 0$$

Logo $\cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ e as circunferências ortogonais.

Comentário: Este conteúdo geralmente não é abordado no ensino médio, mas é importante para desenvolver o raciocínio geométrico do aluno. Sua manipulação é simples e demanda apenas das operações com números complexos e do conhecimento de trigonometria.

ATIVIDADES:

- 45) Qual é o ângulo formado entre as circunferências ε de $C(2,1)$ e $r = 3$ e σ de $C(7,1)$ e $r = 2$.
- 46) Calcule o ângulo formado entre as circunferências:
 $\varepsilon: z\bar{z} - (2-i)z - (2+i)\bar{z} - 4 = 0$ e $\sigma: z\bar{z} - (3+i)z - (3-i)\bar{z} + 2 = 0$

3.5 Atividades suplementares

- 47) $ABCD$ é um quadrado. Se $A(1,2)$ e $B(2,5)$, determine as coordenadas de C e D .
- 48) Sejam $ABCD$ e $BNMK$ dois quadrados que não se sobrepõem e seja E o ponto médio de AN . Se o ponto F é o pé da perpendicular partindo de B até a reta CK , mostre que os pontos E, F, B são colineares.
- 49) Sobre os lados AB, BC, CD, DA de um quadrilátero $ABCD$, exteriormente ao quadrilátero, construímos quadrados com centros M, N, O, P , respectivamente. Mostre que $MO \perp NP$ e $d(M, O) = d(N, P)$.
- 50) Mostre que se as imagens dos complexos z, w e s são os vértices de um triângulo equilátero, então $z^2 + w^2 + s^2 = zw + ws + sz$.

51) As imagens dos complexos z e w são vértices consecutivos de um hexágono regular. Determine o afixo do centro do hexágono.

52) Lei dos Cossenos e Lei dos Senos. Demonstre as relações a seguir:

a) Lei dos cossenos: Seja ABC um triângulo, então é válida a seguinte relação:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

b) Lei dos senos: Seja ABC um triângulo, então é válida a seguinte relação:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}$$

53) PROFMAT - MA13 - Avaliação 2 2013/2:

As retas r , s e t são paralelas, como mostra a figura abaixo. A distância entre r e s é igual a 3 e a distância entre s e t é igual a 1. O triângulo equilátero ABC possui vértices A , B e C sobre as retas r , s , e t , respectivamente. Determine o lado do triângulo ABC .

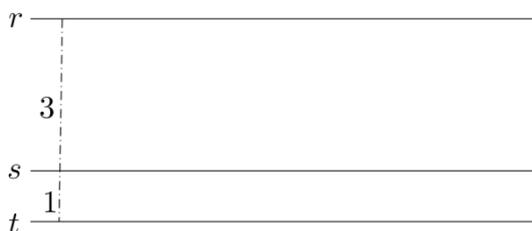


Figura 49: Retas paralelas - problema 53.

54) PROFMAT - MA13 - Avaliação 1 2011:

Dado um paralelogramo $ABCD$ construa no seu exterior os triângulos equiláteros BCE e CDF . Mostre que o triângulo AEF é equilátero.

55) PROFMAT - MA13 - Avaliação 1 2012:

Quadrados foram construídos sobre os lados de um paralelogramo como mostra a figura abaixo. Mostre que os centros desses quadrados são vértices de outro quadrado.

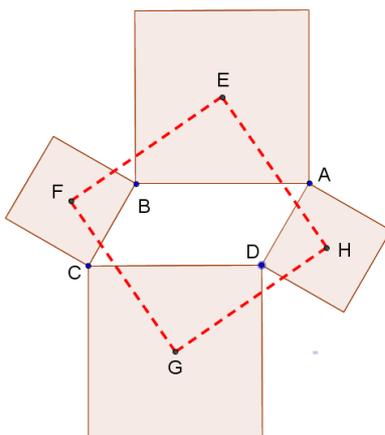


Figura 50: Exercício PROFMAT.

56) TEOREMA DE NAPOLEÃO¹³

Sobre cada lado de um triângulo arbitrário, desenhe um triângulo equilátero (no exterior). Temos então que os baricentros desses três triângulos equiláteros são os vértices de um quarto triângulo equilátero.

¹³ O resultado acima geralmente é atribuído a Napoleão. É bem conhecido que Napoleão estabeleceu l'Ecole Polytechnique (1794), que produziu a maioria dos matemáticos franceses no início do século 19, e gostava de matemática, especialmente geometria. Contudo, muitas pessoas são céticas que Napoleão sabia geometria suficiente para descobrir esse teorema. Aliás, Napoleão Bonaparte é uma das poucas pessoas da história moderna, que são conhecidos por seus primeiros nomes. Galileo Galilei (1564-1642) é outro exemplo.

CAPÍTULO 04 - SOLUÇÕES DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Neste capítulo apresentamos as soluções detalhadas das atividades propostas ao longo do Capítulo 3, com o objetivo de auxiliar os professores e alunos que venham a ler este trabalho.

1. Esta resposta cabe ao leitor decidir, mas é possível resolver este problema utilizando a matemática, como veremos na resposta da segunda questão.
2. Resposta extraída de ([21], P.128).

Qual é a relação entre o problema e os números complexos? Bem, tudo se baseia em dois fatos fundamentais:

1) no plano complexo, a diferença entre dois complexos traduz o vetor com origem no primeiro ponto e extremidade no segundo; é o que se costuma formular por:

$$\overrightarrow{AB} = B - A$$

2) multiplicar um complexo pelo número i (a “unidade imaginária”) equivale a girá-lo de um ângulo reto positivo.

A figura ilustra a situação do problema. Sendo A a árvore, e P e Q as pedras, o tesouro está no ponto T médio dos pontos P' e Q' .

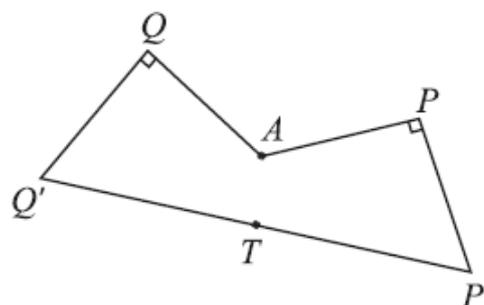


Figura 51: Esquema da localização.
Extraído de [1], P.128

Considerando os pontos pertencentes ao plano complexo, não importando onde esteja a origem, tem-se:

$$T = \frac{P' + Q'}{2} = \frac{P - i(P - A) + Q + i(Q - A)}{2}$$

$$T = \frac{P + Q}{2} + i \frac{(Q - P)}{2}$$

Observando que $\frac{P+Q}{2}$ é o ponto médio de PQ e que

$Q - P = \overrightarrow{PQ}$, esse resultado não só demonstra que

a localização do tesouro independe da posição da árvore (o pirata era um matemático...), como

também permite localizá-lo como o terceiro vértice de um dos triângulos retângulos isósceles com hipotenusa PQ .

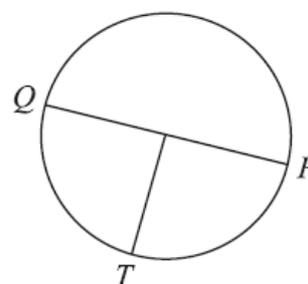


Figura 52: Esquema da localização 2.
Extraído de [1], P.128

3. a) Sejam os pontos A e B como lugares geométricos dos complexos z_1 e z_2 , temos: $d(A, B) = |z_1 - z_2| = |(3 + 5i) - (-1 - 3i)| = |4 + 8i| = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$.

b) Sejam os pontos C e D como lugares geométricos dos complexos z_1 e z_2 , temos: $d(A, B) = |z_1 - z_2| = |(-4 + 2i) - (3 + 3i)| = |-7 - i| = \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$.

4. Para determinar o perímetro precisamos primeiramente determinar as distâncias entre AB, AC, e BC. De posse destas mediadas podemos também classificar o triângulo quanto aos lados: Sejam os pontos A, B e C lugares geométricos dos complexos z_1, z_2 e z_3 . Assim

$$d(A, B) = |z_1 - z_2| = |(3 + i) - (4 - 4i)| = |-1 + 5i| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$

$$d(A, C) = |z_1 - z_3| = |(3 + i) - (3 + 3i)| = |0 - 2i| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} \\ = 2$$

$$d(B, C) = |z_2 - z_3| = |(4 - 4i) - (3 + 3i)| = |1 - 7i| = \sqrt{1^2 + (-7)^2} = \sqrt{50}$$

$$d(B, C) = 5\sqrt{2}.$$

Portanto temos que o triângulo é escaleno, pois as três medidas possuem valores diferentes.

5. Considerando os pontos A e B como lugares geométricos dos complexos z_1 e z_2 , temos: $d(A, B) = |z_1 - z_2| = |[a - 3 + (b + 9)i] - [(a + 1) + (b + 1)i]| = |-4 + 8i| = \sqrt{(-4)^2 + 8^2} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$.

6. Considerando os pontos B, A e C (para que o ponto A fique no segmento BC) como lugares geométricos dos complexos z_1, z_2 e z_3 , temos: $|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| = |z_1 - z_3| \Rightarrow |(-3 + 0i) - (2 + 7i)| + |(2 + 7i) - (16 + 5i)| = |(-3 + 0i) - (16 + 5i)| \Rightarrow |-5 - 7i| + |-14 + 2i| = |-18 - 5i| \Rightarrow \sqrt{(-5)^2 + (-7)^2} + \sqrt{(-14)^2 + 2^2} = \sqrt{(-18)^2 + (-5)^2} \Rightarrow \sqrt{74} + \sqrt{200} = \sqrt{349} \Rightarrow \sqrt{2 \times 37} + \sqrt{4 \times 25 \times 2} = \sqrt{349} \Rightarrow \sqrt{74} + 10\sqrt{2} \neq \sqrt{349}$. Portanto os pontos não são colineares.

7. Sejam os pontos B, A e C (para que o ponto A fique no segmento BC) como lugares geométricos dos complexos z_1, z_2 e z_3 , temos: $z_2 - z_1 = k(z_3 - z_2) \Rightarrow (-3 + 8i) - (3 + 5i) = k[(4 + yi) - (3 + 5i)] \Rightarrow -6 + 3i = k[1 + (y - 5)i] \Rightarrow$

$$k = -6 \text{ e } k(y - 5) = 3, \text{ de onde temos que } -6(y - 5) = 3 \Rightarrow -6y + 30 = 3 \Rightarrow y = \frac{27}{6} \Rightarrow y = \frac{9}{2}.$$

8. Considerando os pontos A, B e C lugares geométricos dos complexos z_1, z_2 e z_3 , temos:
- $$z_2 - z_1 = k(z_3 - z_2) \Rightarrow [(a + 3) + (-3a - \frac{6}{5})i] - (a - 3ai) = k[(a + 5) + (-3a - 2)i] - [(a + 3) + (-3a - \frac{6}{5})i] \Rightarrow 3 - \frac{6}{5}i = k(2 - \frac{4}{5}i) \Rightarrow k = \frac{3}{2}$$
- portanto os pontos são colineares para todo valor real de a.
9. Este exercício é semelhante ao anterior, mas neste caso apenas queremos que os três pontos não sejam colineares. Assim, sejam os pontos A, B e C lugares geométricos dos complexos z_1, z_2 e z_3 , temos: $z_2 - z_1 = k(z_3 - z_2) \Rightarrow (a - 4i) - (0 + ai) = k[(1 + 2i) - (a - 4i)] \Rightarrow a + (-4 - a)i = k[(1 - a) + 6i] \Rightarrow a = k(1 - a)$ e $-4 - a = 6k$. Isolando k na segunda equação e substituindo na primeira temos $a = \frac{-4 - a}{6}(1 - a) \Rightarrow 6a = -4 + 4a - a - a^2 \Rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0$ cujas raízes são $x = 4$ e $x = -1$. Portanto, para que exista o triângulo devemos ter $x \neq 4$ e $x \neq -1$.

10. Neste exercício devemos encontrar dois pontos no intervalo AB e tal modo que este intervalo fique dividido em três partes iguais. Observe pela figura ao lado que para Z_a temos $k = -\frac{1}{2}$ e para Z_b temos $k = -\frac{2}{1}$. Portanto os pontos procurados são:

$$z_a = \frac{z_1 - kz_2}{1 - k} = \frac{(-1 + 7i) + \frac{1}{2}(11 - 8i)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{9}{2} + 3i}{\frac{3}{2}} = 3 + 2i$$

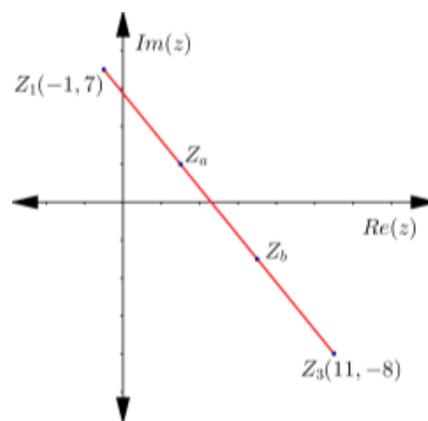


Figura 53: Divisão de um segmento em uma razão dada.

$$z_b = \frac{z_1 - kz_2}{1 - k} = \frac{(-1 + 7i) + 2(11 - 8i)}{1 + 2} = \frac{21 - 9i}{3} = 7 - 3i$$

Portanto os pontos procurados têm coordenadas (3,2) e (7, -3).

11. Inicialmente determinamos z_m e com este resultado determinamos a distância:

$$z_m = \frac{z_2 - kz_3}{1 - k} = \frac{(3 + 7i) + 1(5 - i)}{1 + 1} = \frac{8 + 6i}{2} = 4 + 3i$$

$$\begin{aligned} \text{Assim, } d(AM) &= |z_m - z_1| \\ &= |(4 + 3i) - 0| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \end{aligned}$$

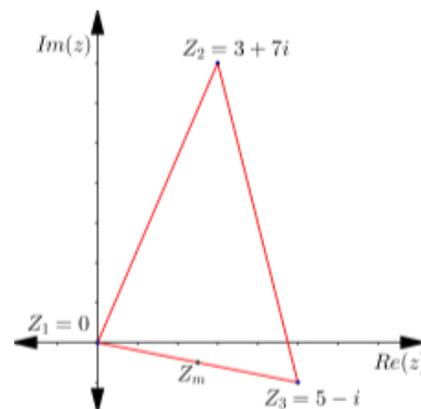


Figura 54: Ponto médio.

12. a) Inicialmente determinamos dois pontos quaisquer sobre cada reta: sejam $A(0,5)$ e $B(1,8)$ sobre a reta $3x - y + 5 = 0$ e $C(0, -3)$ e $D(1, -5)$ pontos sobre a reta $2x + y + 3 = 0$. Considerando A, B, C e D lugares geométricos dos complexos z_1, z_3, z_2 e z_4 , temos que $\theta = \arg \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_2} = \arg \frac{1+8i-(0+5i)}{1-5i-(0-3i)} = \arg \frac{1+3i}{1-2i} = \arg -1 + i \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$, neste caso o ângulo está negativamente orientado. Para ficar positivamente orientado fazemos $\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$, que é o ângulo procurado.
- b) Inicialmente determinamos dois pontos quaisquer sobre cada reta: sejam $A(-1,1)$ e $B(-4,3)$ sobre a reta $2x + 3y - 1 = 0$ e $C(0, \frac{5}{4})$ e $D(-1, -\frac{1}{4})$ pontos sobre a reta $6x - 4y + 5 = 0$. Considerando A, B, C e D lugares geométricos dos complexos z_1, z_3, z_2 e z_4 , temos que $\theta = \arg \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_2} = \arg \frac{-4+3i-(-1+i)}{-1-\frac{1}{4}i-(0+\frac{5}{4}i)} = \arg \frac{-3+2i}{-1-\frac{6}{4}i} = \arg 2i = \frac{3\pi}{2}$, neste caso o ângulo está negativamente orientado. Para ficar positivamente orientado fazemos $2\pi - \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, que é o ângulo procurado.
- b) Determinamos dois pontos quaisquer sobre cada reta: sejam $A(0,0)$ e $B(2, -5)$ sobre a reta $5x + 2y = 0$ e $C(0, \frac{7}{4})$ e $D(1, -\frac{3}{4})$ pontos sobre a reta $10x + 4y - 7 = 0$. Considerando A, B, C e D lugares geométricos dos complexos z_1, z_3, z_2 e z_4 , temos que $\theta = \arg \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_2} = \arg \frac{2-5i-(0+0i)}{1-\frac{3}{4}i-(0+\frac{7}{4}i)} = \arg \frac{2-5i}{1-\frac{10}{4}i} = \arg 8 = 0$, que é o ângulo procurado.
13. Determinamos dois pontos quaisquer sobre cada reta: sejam $A(0, -1)$ e $B(2, -4)$ sobre a reta $3x + 2y + 2 = 0$ e $C(1, -2)$ e $D(-1, -3)$ pontos sobre a reta $-x + 2y + 5 = 0$. Considerando A, B, C e D lugares geométricos dos complexos

z_1, z_3, z_2 e z_4 , temos que $\theta = \arg \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_2} = \arg \frac{2-4i-(0-i)}{-1-3i-(1-2i)} = \arg \frac{2-3i}{-2-i} = \arg \frac{-1+8i}{5}$. O que interessa neste caso é a tangente, então, dos números complexos

na forma trigonométrica, $\cos \theta = \frac{a}{\rho} = \frac{-\frac{1}{5}}{\frac{\sqrt{65}}{5}} = -\frac{1}{\sqrt{65}}$ e $\sin \theta = \frac{b}{\rho} = \frac{\frac{8}{5}}{\frac{\sqrt{65}}{5}} = \frac{8}{\sqrt{65}}$.

Assim $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{8}{\sqrt{65}}}{-\frac{1}{\sqrt{65}}} = -8$, no sentido negativamente orientado e no

sentido positivamente $\tan \theta = 8$.

14. Considere A, B e C lugares geométricos dos complexos $z_1 = A, z_2 = B$ e $z_3 = C$.

Assim $\theta = \arg \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \arg \frac{(10+i)-(3+0i)}{(6+ki)-(3+0i)} = \arg \frac{7+i}{3+ki} = \arg \frac{(21+k)+(3-7k)i}{9+k^2}$. Usando o

fato que $\cos \theta = \frac{a}{\rho} = \frac{\frac{21+k}{9+k^2}}{\frac{\sqrt{50k^2+450}}{9+k^2}} = \frac{21+k}{\sqrt{50k^2+450}}$ e sabendo que $\cos \theta = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

então $\frac{21+k}{\sqrt{50k^2+450}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2(21+k) = \sqrt{2}(\sqrt{50k^2+450}) \Rightarrow (42+k)^2 =$

$(\sqrt{100k^2+900})^2 \Rightarrow 96k^2 - 168k - 864 = 0$ cujas raízes são $k = 4$ ou

$k = -\frac{9}{4}$, Portanto os valores são $k = 4$ ou $k = -\frac{9}{4}$.

15. Sejam A(1, -4), B(0, -7) em $r(x)$ e C(-2,1) e D(1,10) em $s(x)$ lugares

geométricos dos complexos z_1, z_2, z_3 e z_4 . então $\frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} = \frac{-1-3i}{3+9i} = \left(-\frac{1}{3}\right) \frac{1+3i}{1+3i} =$

$-\frac{1}{3}$, como o resultado é um número real então as retas são paralelas ou

coincidentes. Agora $k = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} = \frac{-2+8i}{1+3i} : \frac{-3-9i}{0-14i} = \frac{22+14i}{10} : \frac{126-42i}{196}$, logo as

retas são paralelas. Para serem coincidentes os pontos necessitam ser colineares e

$$\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \in \mathbb{R}^* \text{ e } \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R}^*$$

16. Sejam A(1, $-\frac{k}{10}$), B(0, $\frac{1}{10}$) em $r(x)$ e C(0, -1) e D(-1,7) em $s(x)$ lugares

geométricos dos complexos z_1, z_2, z_3 e z_4 . então

$$\frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} = \frac{1 + \frac{(1+k)i}{10}}{-1+8i} = \left(\frac{1}{10}\right) \frac{-10+(1+k)i}{-1+8i} = \left(\frac{1}{10}\right) \frac{(-10-8-8k)+(-79+k)i}{-65}$$
, como, para as retas

serem paralelas ou coincidentes o resultado deve ser um número real, então

$$-79 + k = 0 \Rightarrow k = 79.$$

17. Sejam A(-1,0), B(1, -10) em $r(x)$ e C(0, -5) e D($-\frac{5m}{2}$, 0) em $s(x)$ lugares

geométricos dos complexos z_1, z_2, z_3 e z_4 . então $\frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} = \frac{2-10i}{-\frac{5m}{2}+5i} = \frac{4-20i}{-5m+10i} =$

$\frac{(-20m-200)+(-40+100m)i}{25m^2+100}$, como, para as retas serem paralelas ou coincidentes o resultado deve ser um número real, então $-40 + 100m = 0 \Rightarrow m = \frac{2}{5}$; Para serem perpendiculares $-20m - 200 = 0 \Rightarrow m = -10$. Nos os demais valores de m , as retas serão concorrentes e formam um ângulo $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

18. Sejam $M(1,8), X(-1, -3)$ e M' os lugares geométricos dos complexos m, x e m' .

Assim, $m = 1 + 8i$, $x = -1 - 3i$, $\text{sen}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{cos}60^\circ = \frac{1}{2}$ e $z = \text{cos}\theta + i\text{sen}\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, então

$$\begin{aligned} m' &= x + (m - x) \cdot z = (-1 - 3i) + [(1 + 8i) - (-1 - 3i)] \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right) \\ &= (-1 - 3i) + (2 + 11i) \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right) = \frac{(-11\sqrt{3}) + (5 + 2\sqrt{3})i}{2} \end{aligned}$$

Portanto as coordenadas de M' são $\left(\frac{-11\sqrt{3}}{2}, \frac{5+2\sqrt{3}}{2}\right)$.

19. Sejam $A(-1,2), B(2,2), C(-1, -2), A'$ e A'' os lugares geométricos dos complexos a, b, c, a' e a'' .

Assim, $a = -1 + 2i, b = 2 + 2i, c = -1 - 2i, \text{sen}45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{cos}45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{sen}30^\circ = \frac{1}{2}, \text{cos}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, z = \text{cos}\theta + i\text{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ e $z' = \text{cos}\theta + i\text{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{1}}{2}i$, então

$$a' = b + (a - b) \cdot z$$

$$\begin{aligned} &= (2 + 2i) + [(-1 + 2i) - (2 + 2i)] \cdot \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2}\right) \\ &= (2 + 2i) + (-3 + 0i) \cdot \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2}\right) \\ &= \left(2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) + \left(2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)i \end{aligned}$$

$$a'' = b + (a' - b) \cdot z$$

$$\begin{aligned} &= (-1 - 2i) + \left[\left(2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) + \left(2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)i - (-1 - 2i)\right] \cdot \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\right) \\ &= (-1 - 2i) + \left[\left(3 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) + \left(4 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)i\right] \cdot \left(\frac{\sqrt{2} + i}{2}\right) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{6}}{4} - 3 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) + \left(-2 + \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{4\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{6}}{4} \right) i$$

Portanto a distância será:

$$\begin{aligned} d(AA') &= |a'' - a| \\ &= \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{6}}{4} - 3 + \frac{3\sqrt{2}}{2} + 1 \right)^2 + \left(-2 + \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{4\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{6}}{4} - 2 \right)^2} \\ &\cong 1,94 \end{aligned}$$

20. Sabendo que $A = 5, B = -3$ e $C = 0$, temos $\alpha = \frac{5+3i}{2}$, $\bar{\alpha} = \frac{5-3i}{2}$ e $\beta = 0$, temos:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}\bar{z} + \alpha z + \beta &= 0 \Rightarrow \left(\frac{5-3i}{2} \right) \bar{z} + \left(\frac{5+3i}{2} \right) z + 0 = 0 \\ &\Rightarrow (5-3i)\bar{z} + (5+3i)z = 0 \end{aligned}$$

21. Sejam A e B lugares geométricos dos complexos z_1 e z_2 . Pela proposição 8 temos $\bar{\gamma} = z_2 - z_1 = (-1 + 5i) - (2 + 7i) = -3 - 2i$, $\gamma = \bar{z}_2 - \bar{z}_1 = (-1 - 5i) - (2 - 7i) = -3 + 2i$ e $\beta = z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 = (2 + 7i) \cdot (-1 - 5i) - (-1 + 5i) \cdot (2 - 7i) = -34i$. Assim:

$$\bar{\gamma}\bar{z} - \gamma z + \beta = 0 \Rightarrow (-3 - 2i)\bar{z} - (-3 + 2i)z - 34i = 0$$

22. Usando a proposição 10 e considerando A e B lugares geométricos dos complexos z_1 e z_2 temos:

$$\begin{aligned} z &= (1-t)z_1 + tz_2, \quad t \in \mathbb{R} \\ z &= (1-t)(2+7i) + t(-1+5i), \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

23. Pela proposição 11 temos:

$$\begin{aligned} z - z_0 &= -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0) \Rightarrow z - (1+i) = -\frac{2+5i}{2-5i}[(\bar{z} - (1-i))] \\ &\Rightarrow (2-5i)[z - (1+i)] = -(2+5i)[(\bar{z} - (1-i))] \\ &\Rightarrow (2+5i)\bar{z} + (2-5i)z - 14 = 0 \end{aligned}$$

24. Pela proposição 11 temos:

$$\begin{aligned} z - z_0 &= \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0) \Rightarrow z - (1+2i) = \frac{2+2i}{2-2i}[(\bar{z} - (1-2i))] \\ &\Rightarrow (2-2i)[z - (1+2i)] = (2+2i)[(\bar{z} - (1-2i))] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (2 + 2i)\bar{z} - (2 - 5i)z + 4i = 0$$

25. Reescrevendo na forma cartesiana a equação $y = -2x + 1$ temos $2x + y - 1 = 0$. Pela proposição 6 $\alpha = \frac{A-Bi}{2} = \frac{2-i}{2}$.

Pela proposição 11 temos:

$$z - z_0 = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} (\bar{z} - \bar{z}_0) \Rightarrow z - (1 + i) = \frac{\frac{2+i}{2}}{\frac{2-i}{2}} [(\bar{z} - (1 - i))]$$

$$\Rightarrow (2 - i)[z - (1 + i)] = (2 + i)[(\bar{z} - (1 - i))]$$

$$\Rightarrow (2 + i)\bar{z} - (2 - i)z + 6 = 0$$

26. Pela proposição 8 $\bar{\alpha} = z_2 - z_1 = (2 + 3i) - (0 + 0i) = (2 + 3i)$.

Pela proposição 11 temos:

$$z - z_0 = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} (\bar{z} - \bar{z}_0) \Rightarrow z - (2 + i) = \frac{2 + 3i}{2 - 3i} [(\bar{z} - (2 - i))]$$

$$\Rightarrow (2 - 3i)[z - (2 + i)] = (2 + 3i)[(\bar{z} - (2 - i))]$$

$$\Rightarrow (2 + i)\bar{z} - (2 - i)z - 8i = 0$$

27. Pela proposição 6 $\alpha = \frac{A-Bi}{2}$, assim, $\alpha = \frac{A-Bi}{2} = \frac{3-2i}{2}$ e $b = \frac{A-Bi}{2} = \frac{-1-2i}{2}$.

Agora, pela proposição 12

$$tg \theta = \left| \frac{\alpha\bar{b} - \bar{\alpha}b}{\alpha\bar{b} + \bar{\alpha}b} i \right| = \left| \frac{\frac{(3-2i) \cdot (-1+2i) - (3+2i) \cdot (-1-2i)}{2}}{\frac{(3-2i) \cdot (-1+2i) + (3+2i) \cdot (-1-2i)}{2}} i \right|$$

$$tg \theta = \left| \frac{(3-2i) \cdot (-1+2i) - (3+2i) \cdot (-1-2i)}{(3-2i) \cdot (-1+2i) + (3+2i) \cdot (-1-2i)} i \right| = \left| \frac{16i}{2} i \right| = 8$$

28. Sabemos que $\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow tg \theta = 1$, $r: 6x + 2y - 3 = 0$, logo, pela proposição 6

$$\alpha = \frac{A-Bi}{2} = \frac{6+2i}{2} = 3 + i.$$

Fazendo $b = x + yi$ e usando a proposição 12:

$$tg \theta = \left| \frac{\alpha\bar{b} - \bar{\alpha}b}{\alpha\bar{b} + \bar{\alpha}b} i \right| \Rightarrow \left| \frac{(3+i)(x-yi) - (3-i)(x+yi)}{(3+i)(x-yi) + (3-i)(x+yi)} i \right| = 1$$

$$\Rightarrow \left| \frac{-2xi + 6yi}{6x - 2y} i \right| = 1 \Rightarrow \left| \frac{2x + 6y}{6x - 2y} \right| = 1$$

Utilizando as propriedades do módulo temos

$$2x + 6y = 6x - 2y \Rightarrow x = 2y \text{ ou } 2x + 6y = -(6x - 2y) \Rightarrow -2x = y$$

$$\text{Assim, fazendo } y = 1 \text{ obtemos } b = 2 + i \text{ ou } b = -\frac{1}{2} + i = 1 - 2i$$

Agora, pela proposição 11 e considerando que $z_0 = 0$

$$z - z_0 = -\frac{\bar{b}}{b}(\bar{z} - \bar{z}_0) \Rightarrow z - 0 = -\frac{2-i}{2+i}(\bar{z} - 0) \Rightarrow (2-i)\bar{z} + (2+i)z = 0$$

ou

$$\begin{aligned} z - z_0 &= -\frac{\bar{b}}{b}(\bar{z} - \bar{z}_0) \Rightarrow z - 0 = -\frac{1+2i}{1-2i}(\bar{z} - 0) \Rightarrow (1+2i)\bar{z} + (1-2i)z \\ &= 0 \end{aligned}$$

29. Usando a proposição 6 temos que $a = \frac{A-Bi}{2} = \frac{2-6i}{2} = 1 - 3i$ e $\beta = -1$

Pela proposição 14:

$$d = \frac{|\bar{\alpha}z_0 + \alpha z_0 + \beta|}{2\sqrt{\alpha\bar{\alpha}}} = \frac{|(1+3i)(1+3i) + (1-3i)(1-3i) - 1|}{2\sqrt{(1-3i)(1+3i)}} = \frac{17}{2\sqrt{10}}$$

30. O eixo das ordenadas tem equação $x = 0$, portanto, pela proposição 6 temos

$$a = \frac{A-Bi}{2} = \frac{1-0i}{2} = \frac{1}{2} \text{ e } \beta = 0$$

Pela proposição 14:

$$d = \frac{|\bar{\alpha}z_0 + \alpha z_0 + \beta|}{2\sqrt{\alpha\bar{\alpha}}} = \frac{\left| \left(\frac{1}{2}\right)(-2-3i) + \left(\frac{1}{2}\right)(-2+3i) - 0 \right|}{2\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}} = \frac{|-2|}{1} = 2$$

31. Usando a proposição 6 temos que $a = \frac{A-Bi}{2} = \frac{a-bi}{2}$ e $\beta = \sqrt{a^2 + b^2}$

Pela proposição 14:

$$\begin{aligned} d &= \frac{|\bar{\alpha}z_0 + \alpha z_0 + \beta|}{2\sqrt{\alpha\bar{\alpha}}} = \frac{\left| \left(\frac{a+bi}{2}\right)(0-0i) + \left(\frac{a-bi}{2}\right)(0+0i) + \sqrt{a^2+b^2} \right|}{2\sqrt{\left(\frac{a-bi}{2}\right)\left(\frac{a+bi}{2}\right)}} \\ &= \frac{|\sqrt{a^2+b^2}|}{2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}} = \frac{|\sqrt{a^2+b^2}|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1 \end{aligned}$$

32. Neste exercício precisamos calcular a distância do ponto A até a reta que passa pelos pontos B e C . Considerando B, C como lugares geométricos dos complexos

z_1, z_2 respectivamente, pela proposição 8 temos $\gamma = \bar{z}_2 - \bar{z}_1 = (6 - 8i)$ e $\beta = z_1 \bar{z}_2 - z_2 \bar{z}_1 = 0$ e $\bar{\gamma} \bar{z} - \gamma z + \beta = 0$, assim $r: (6 + 8i)\bar{z} - (6 - 8i)z = 0$

Pela proposição 14:

$$d = \frac{|\bar{\alpha} \bar{z}_0 + \alpha z_0 + \beta|}{2\sqrt{\alpha \bar{\alpha}}} = \frac{|(6 + 8i)(-3 - 0i) + [-(6 - 8i)](-3 + 0i) + 0|}{2\sqrt{(6 - 8i)[-(6 + 8i)]}}$$

$$d = \frac{|-18 - 24i + 18 - 24i|}{2\sqrt{-36 - 48i + 48i + 64i^2}} = \frac{|-48i|}{2 \cdot 10i} = \frac{48i}{20i} = \frac{12}{5}$$

33. Para resolver este problema utilizaremos a proposição 15 ou então a proposição 16:

Sejam A, B, C, D, E, F , lugares geométricos dos números complexos $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3$ respectivamente.

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \Rightarrow \frac{(4 + i) - (1 - i)}{(2 + 2i) - (1 - i)} = \frac{(10 + 5i) - (1 - i)}{(4 + 8i) - (1 - i)}$$

$$\Rightarrow \frac{3 + 2i}{1 + 3i} = \frac{9 + 6i}{3 + 9i} \Rightarrow \frac{3 + 2i}{1 + 3i} = \frac{3}{3} \left(\frac{3 + 2i}{1 + 3i} \right) \Rightarrow \frac{3 + 2i}{1 + 3i} = \left(\frac{3 + 2i}{1 + 3i} \right)$$

Pela proposição 15, $\Delta z_1, z_2, z_3 \sim \Delta w_1, w_2, w_3$.

34. Determine o valor de x para que os triângulos ΔABC e ΔDEF sejam semelhantes. $A(7, -2), B(10, -2), C(9, -1), D(-7, -2), E(-13, -2), F(x, 0)$. Para resolver este problema utilizaremos a proposição 15:

Sejam A, B, C, D, E, F , lugares geométricos dos números complexos $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3$ respectivamente.

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \Rightarrow \frac{(10 - 2i) - (7 - 2i)}{(9 - 1i) - (7 - 2i)} = \frac{(-13 - 2i) - (-7 - 2i)}{(x + 0i) - (-7 - 2i)}$$

$$\Rightarrow \frac{3 + 0i}{2 + i} = \frac{-6 + 0i}{(x + 7) + 2i} \Rightarrow 3x + 21 + 6i = -12 - 6i$$

Observe que trata-se de um caso de $\Delta z_1, z_2, z_3 \sim \Delta \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3$.

Resolvendo: $3x + 21 = -12 \Rightarrow 3x = -33 \Rightarrow x = -11$.

35. Sejam A, B, C , lugares geométricos dos números complexos z_1, z_2, z_3 , respectivamente e pela sentença 02 da proposição 17 temos

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$$

$$|(0 + 0i) - (1 + 0i)| = \left| (1 + 0i) - \left(\frac{5}{10} + \frac{\sqrt{75}}{10}i \right) \right| = \left| \left(\frac{5}{10} + \frac{\sqrt{75}}{10}i \right) - (0 + 0i) \right|$$

$$|-1| = \left| \frac{5}{10} - \frac{\sqrt{75}}{10}i \right| = \left| \frac{5}{10} + \frac{\sqrt{75}}{10}i \right|$$

$$\sqrt{(-1)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{10}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{75}}{10}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{10}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{75}}{10}\right)^2}$$

$$\sqrt{1} = \sqrt{\frac{25 + 75}{100}} = \sqrt{\frac{25 + 75}{100}}$$

$$1 = 1 = 1$$

Portanto o triângulo é equilátero.

36. Pelo corolário do Teorema 5 temos:

$$\text{Área}(A_1A_2A_3) = \frac{1}{2} \text{Im}(\bar{z}_1z_2 + \bar{z}_2z_3 + \bar{z}_3z_1)$$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} \text{Im}[(2 - 3i) \cdot (1 + 5i) + (1 - 5i) \cdot 0 + 0 \cdot (2 + 3i)]$$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} \text{Im}(17 + 7i) = \frac{7}{2}$$

37. Pelo teorema 6:

$$\text{Área}(A_1A_2 \dots A_n) = \frac{1}{2} \text{Im}(\bar{z}_1z_2 + \bar{z}_2z_3 + \dots + \bar{z}_{n-1}z_n + \bar{z}_nz_1)$$

$$\text{Área}(ABCD) = \frac{1}{2} \text{Im}(\bar{z}_1z_2 + \bar{z}_2z_3 + \bar{z}_3z_4 + \bar{z}_4z_1)$$

$$\text{Área}(ABCD) = \frac{1}{2} \text{Im}[0 \cdot (4 - 2i) + (4 + 2i)(6 + 8i) + (6 - 8i)(0 + 4i) + (0 - 4i) \cdot 0]$$

$$\text{Área}(ABCD) = \frac{1}{2} \text{Im}(40 + 68i) = 34$$

38. Pelo teorema 6:

$$\text{Área}(A_1A_2 \dots A_n) = \frac{1}{2} \text{Im}(\bar{z}_1z_2 + \bar{z}_2z_3 + \dots + \bar{z}_{n-1}z_n + \bar{z}_nz_1)$$

$$\text{Área}(ABCDE) = \frac{1}{2} \text{Im}(\bar{z}_1z_2 + \bar{z}_2z_3 + \bar{z}_3z_4 + \bar{z}_4z_5 + \bar{z}_5z_1)$$

$$\text{Área}(ABCDE) = \frac{1}{2} \text{Im}[(2 - i) \cdot 2 + 2 \cdot (-4i) + 4i(-2 + i) + (-2 - i) \cdot 4i + (-4i)(2 + i)]$$

$$\text{Área}(ABCDE) = \frac{1}{2} \text{Im}(8 - 34i) = -17$$

Como a figura está negativamente orientada, então sua área será 17 unidades quadradas.

39. Pelo corolário do Teorema 5 temos:

$$\text{Área}(A_1A_2A_3) = \frac{1}{2} \text{Im}(\bar{z}_1z_2 + \bar{z}_2z_3 + \bar{z}_3z_1)$$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} \text{Im}[(1 - 4i) \cdot (4 + i) + (4 - i)(0 + yi) + (0 - yi)(1 + 4i)] = \pm 6$$

Se o triângulo for negativamente orientado, consideramos a área em módulo.

Assim,

$$\frac{1}{2} \text{Im}[(5y + 8) + (-15 + 3y)i] = \pm 6$$

$$\frac{-15 + 3y}{2} = 6 \Rightarrow y = 9 \quad \text{ou} \quad \frac{-15 + 3y}{2} = -6 \Rightarrow y = 1$$

40. Considerando A, B, C lugares geométricos dos números complexos z_1, z_2, z_3 e pela proposição 18 temos

$$z_b = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

a)

$$z_b = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = \frac{(2 + 4i) + (6 + 3i) + (7 - 13i)}{3} = \frac{15 - 6i}{3} \Rightarrow (5, -2)$$

b)

$$z_b = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = \frac{(1 - 3i) + (-4 + 7i) + (-6 + 8i)}{3} = \frac{-9 + 12i}{3} \Rightarrow (-3, 4)$$

c)

$$z_b = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = \frac{(3 - 10i) + (-1 + 8i) + (7 - 4i)}{3} = \frac{9 - 6i}{3} \Rightarrow (3, -2)$$

41. Inicialmente determinamos o raio:

$$d(C, P) = |z - \gamma| = |(3 + 3i) - (2 - i)| = |1 + 4i| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

Utilizando a proposição 21:

$$\begin{aligned} (\bar{z} - \bar{\gamma})(z - \gamma) &= r^2 \Rightarrow [\bar{z} - (2 + i)][z - (2 - i)] = (\sqrt{17})^2 \\ &\Rightarrow z\bar{z} - (2 - i)\bar{z} - (2 + i)z + 4 - 2i + 2i - i^2 - 17 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z\bar{z} - (2+i)z - (2-i)\bar{z} - 12 = 0$$

42. Pela proposição 21 temos que $z\bar{z} + z\frac{m-ni}{2} + \bar{z}\frac{m+ni}{2} + p = 0$, onde a equação de uma circunferência no plano cartesiano é $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$.

$$\begin{aligned} z\bar{z} + z\frac{m-ni}{2} + \bar{z}\frac{m+ni}{2} + p = 0 &\Rightarrow z\bar{z} + z\frac{-2+2i}{2} + \bar{z}\frac{-2-2i}{2} - 7 = 0 \\ &\Rightarrow z\bar{z} + (-1+i)z + (-1-i)\bar{z} - 7 = 0 \end{aligned}$$

43. Inicialmente dividimos a equação por 2.

$$\begin{aligned} 2z\bar{z} - (-2-i)z - (-2+i)\bar{z} - 2 = 0 &\Rightarrow z\bar{z} - \left(\frac{-2-i}{2}\right)z - \left(\frac{-2+i}{2}\right)\bar{z} - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Pela proposição 21, $r = \sqrt{\alpha\bar{\alpha} - \beta}$ e $\gamma = -\bar{\alpha}$ é o centro da circunferência $z\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + \beta = 0$:

$$\gamma = -\bar{\alpha} = -\left(\frac{-2-i}{2}\right) = 1 + \frac{i}{2} \Rightarrow C\left(1, \frac{1}{2}\right)$$

$$r = \sqrt{\alpha\bar{\alpha} - \beta} = \sqrt{\left(\frac{-2-i}{2}\right) \cdot \left(\frac{-2+i}{2}\right) + 1} = \sqrt{\frac{5}{4} + 1} = \frac{3}{2}$$

44. Para determinar a equação da circunferência inicialmente determinamos o centro desta e o raio. Para determinar o centro basta lembrar que as diagonais de um quadrado formam um ângulo $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Seja $O(x+yi)$, $A(3,3)$, $B(4,2)$ lugares geométricos dos complexos o, z, w . Pelo corolário da proposição 3:

$$\arg \theta = \frac{z-o}{w-o} = \frac{(3+3i) - (x+yi)}{(4+2i) - (x+yi)} = \frac{(3-x) + (3-y)i}{(4-x) + (2-y)i}$$

Como o ângulo, medido no sentido positivamente orientado pode ser $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$, então $\operatorname{tg} \theta = \pm i$. Logo

$$\frac{(3-x) + (3-y)i}{(4-x) + (2-y)i} = \pm i$$

$$\frac{(3-x) + (3-y)i}{(4-x) + (2-y)i} = +i \Rightarrow (x+yi) = (3+2i) \Rightarrow C(3,2)$$

$$\frac{(3-x) + (3-y)i}{(4-x) + (2-y)i} = -i \Rightarrow (x+yi) = (4+3i) \Rightarrow C(4,3)$$

O raio será a distância entre qualquer um dos centros e um dos vértices do triângulo.

$$d(O, A) = |o - a| = |(4+3i) - (3+3i)|\sqrt{1^2} = 1$$

Pela proposição 21:

$$(\bar{z} - \bar{\gamma})(z - \gamma) = r^2 \Rightarrow [\bar{z} - (3 - 2i)][z - (3 + 2i)] = 1$$

ou

$$(\bar{z} - \bar{\gamma})(z - \gamma) = r^2 \Rightarrow [\bar{z} - (4 - 3i)][z - (4 + 3i)] = 1$$

45. Considerando C como lugar geométrico do complexo γ e utilizando a proposição 21:

$$\varepsilon: (\bar{z} - \bar{\gamma})(z - \gamma) = r^2 \Rightarrow [\bar{z} - (2 - i)][z - (2 + i)] = 3^2$$

$$\Rightarrow z\bar{z} - (2 - i)z - (2 + i)\bar{z} - 4 = 0$$

$$\sigma: (\bar{z} - \bar{\gamma})(z - \gamma) = r^2 \Rightarrow [\bar{z} - (7 - i)][z - (7 + i)] = 2^2$$

$$\Rightarrow z\bar{z} - (7 - i)z - (7 + i)\bar{z} + 46 = 0$$

Usando a proposição 22:

$$\cos \theta = \left| \frac{\beta_1 + \beta_2 - (\alpha_1 \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_1 \alpha_2)}{2r_1 r_2} \right|$$

$$\cos \theta = \left| \frac{-4 + 46 - [(2 - i)(7 + i) + (2 + i)(7 - i)]}{2 \cdot 3 \cdot 2} \right|$$

$$\cos \theta = \left| \frac{42 - (14 + 2i - 7i - i^2 + 14 - 2i + 7i - i^2)}{12} \right| = \left| \frac{42 - 30}{12} \right| = 1$$

Logo $\cos \theta = 1 \Rightarrow \theta = 0$.

46. Inicialmente calculamos o raio de ε e σ . Usando a proposição 21,

$r = \sqrt{\alpha \bar{\alpha} - \beta}$ é o raio da circunferência $z\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha} \bar{z} + \beta = 0$:

$$r_\varepsilon = \sqrt{\alpha \bar{\alpha} - \beta} = \sqrt{(2 - i) \cdot (2 + i) + 4} = \sqrt{5 + 4} = 3$$

$$r_\sigma = \sqrt{\alpha \bar{\alpha} - \beta} = \sqrt{(3 + i) \cdot (3 - i) - 2} = \sqrt{10 - 2} = \sqrt{8}$$

Usando a proposição 22:

$$\cos \theta = \left| \frac{\beta_1 + \beta_2 - (\alpha_1 \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_1 \alpha_2)}{2r_1 r_2} \right|$$

$$\cos \theta = \left| \frac{-4 + 2 - [(2 - i)(3 - i) + (2 + i)(3 + i)]}{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{8}} \right|$$

$$\cos \theta = \left| \frac{-2 - (6 - 2i - 3i + i^2 + 6 + 2i + 3i + i^2)}{6\sqrt{8}} \right| = \left| \frac{-2 - 10}{6\sqrt{8}} \right| = \frac{12}{6\sqrt{8}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$.

47. Este problema possui duas soluções. Podemos obter o ponto D rotacionando o ponto B em $+90^\circ$ ou em -90° . Considere A, B, C, D lugares geométricos dos complexos a, b, c, d . Pela proposição 5 $d = a + (b - a) \cdot z$, onde $z = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$.

Se $\theta = 90^\circ$, então

$$\begin{aligned} d &= (1 + 2i) + [(2 + 5i) - (1 + 2i)] \cdot (\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ) \\ &= (1 + 2i) + (1 + 3i) \cdot i \\ &= (1 + 2i) + (-3 + i) = (-2 + 3i) \Rightarrow D(-2, 3). \end{aligned}$$

E o ponto C : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow B - A = C - D \Rightarrow C = B - A + D = (-1, 6)$

Se $\theta = -90^\circ$, então

$$\begin{aligned} d &= (1 + 2i) + [(2 + 5i) - (1 + 2i)] \cdot [\cos(-90^\circ) + i \operatorname{sen}(-90^\circ)] \\ &= (1 + 2i) + (1 + 3i) \cdot (-i) = (1 + 2i) + (3 - i) = (4 + i) \Rightarrow D(4, 1). \end{aligned}$$

E o ponto C : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow B - A = C - D \Rightarrow C = B - A + D = (5, 4)$

48. Para resolver este problema, considere o ponto F como origem do plano complexo, $Re(z)$ o eixo FC e $Im(z)$ o eixo FB (Figura 55: Alinhamento dos três pontos.).

Considere ainda a, bi, c, e, k, n coordenadas Complexas dos pontos A, B, C, E, K, N , com $a, i, c, e, k, n \in \mathbb{R}$.

Pela proposição 5, as coordenadas de A serão obtidas rotacionando o ponto C através do ponto B por um ângulo $\theta = \frac{\pi}{2}$ e as de N serão obtidas rotacionando o ponto K através do ponto B por um ângulo $\theta = -\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} a &= b + (c - b) \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right) = (1 - i)b + ci \\ n &= b + (k - b) \left[\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = (1 + i)b + ki \end{aligned}$$

Usando a teoria do item 3.1.2 as coordenadas do ponto E serão obtidas determinado o ponto médio do segmento AN :

$$e = \frac{[(1 - i)b + ci] + [(1 + i)b + ki]}{2} = b + \frac{(c - k)i}{2}$$

Portanto o ponto E está situado na reta FB .

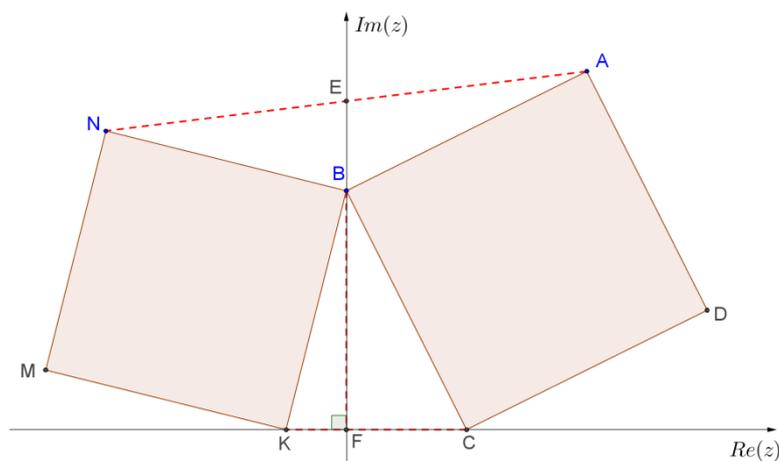


Figura 55: Alinhamento dos três pontos.

49. Denote por letra minúscula as coordenada no plano cartesiano de um ponto denotado por letra maiúscula. Pelo item 3.1.2 e pela proposição 5, as coordenadas de M determinando o ponto médio entre B' e B e as coordenadas de B' serão obtidas rotacionando o ponto B através do ponto A por um ângulo $\theta = -\frac{\pi}{2}$:

$$b' = a + (b - a) \left[\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = a - (b - a)i$$

$$m = \frac{b + [a - (b - a)i]}{2} = \frac{(a + b) + (a - b)i}{2}$$

e de modo análogo, temos

$$n = \frac{(b + c) + (b - c)i}{2}, o = \frac{(c + d) + (c - d)i}{2}, p = \frac{(a + d) + (d - a)i}{2}$$

Pelo teorema 4,

$$\begin{aligned} \arg \theta &= \frac{o - m}{p - n} = \frac{\frac{(c + d) + (c - d)i}{2} - \frac{(a + b) + (a - b)i}{2}}{\frac{(a + d) + (d - a)i}{2} - \frac{(b + c) + (b - c)i}{2}} \\ &= \frac{c + d - a - b + (c - d - a + b)i}{a + d - b - c + (d - a - b + c)i} = -i \end{aligned}$$

Portanto $MO \perp NP$.

E pela propriedade **f** o item 2.1.7

$$\frac{|o - m|}{|p - n|} = \left| \frac{o - m}{p - n} \right| = |-i| = 1$$

Portanto $d(O, M) = d(N, P)$.

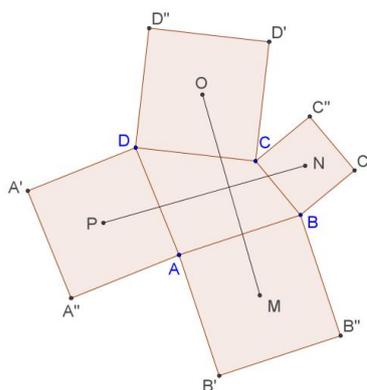


Figura 56: Esquema para resolução do exercício 49.

50. Temos que se um triângulo é equilátero então pelo item (4) da proposição 17:

$$\begin{aligned} \frac{w-z}{s-w} = \frac{s-z}{z-w} &\Rightarrow wz - w^2 - z^2 + wz = s^2 - sz - sw + wz \\ &\Rightarrow wz + sz + sw = w^2 + z^2 + s^2 \end{aligned}$$

51. Considere o hexágono regular de centro O , sua coordenada complexa será representada por o . O triângulo Δozw é equilátero, logo, pela proposição 17 item (5)

$$z^2 + w^2 + o^2 = zw + wo + zo \Rightarrow o^2 - (z+w)o + (z^2 + w^2 - zw) = 0$$

Utilizando o teorema de Pitágoras:

$$o = \frac{(w+z) \pm (w-z)\sqrt{3}i}{2}$$

Outra maneira de resolver é rotacionar z em relação a w por um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ para de terminar o' e rotacionar z em relação a w por um ângulo de $-\frac{\pi}{3}$ para de terminar o'' (Proposição 5).

52. Para demonstrar as duas relações considere, sem perda de generalidade, o triângulo ABC tal que A esteja situado na origem, B esteja situado sobre o eixo $Re(z)$ com afixo x e C seja representado pelo complexo z .

a)

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A} &= x^2 + |z|^2 - 2 \cdot x \cdot |z| \cdot \cos(\arg z) \\ &= x^2 + |z|^2 - 2 \cdot |x| \cdot |z| \cdot \frac{Re(z)}{|z|} \quad (\text{item 2.3}) \\ &= x^2 + |z|^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{z + \bar{z}}{2} \quad (\text{item 2.1.6 i}) \\ &= x^2 + z\bar{z} - x \cdot (z + \bar{z}) \\ &= z\bar{z} + x^2 - xz - x\bar{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (z - x)(\bar{z} - x) \\
&= |z - x|^2 \text{ (item 2.1.7 b)} \\
&= a^2
\end{aligned}$$

b)

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{|z - x|}{\frac{\text{Im}(z)}{|z|}} = \frac{|z||z - x|}{\text{Im}(z)} = \frac{|z|}{\frac{\text{Im}(z)}{|z - x|}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}}$$

Rotacionando o triângulo de modo que C fique situado sobre o eixo $Re(z)$ obtemos de modo análogo que

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$

53. Para solucionar a questão, considere a reta s coincidente com o eixo $Re(z)$ do plano complexo. Marcamos o ponto B na origem do sistema. Assim B está sobre s e possui coordenadas complexas $b = 0$. Sobre as retas r e t marcamos os pontos A e C respectivamente. As coordenadas complexas de A e C são, respectivamente, $a = (m + 3i)$ e $b = (n - i)$.

Como o triângulo ABC é equilátero, utilizando a proposição 5, podemos obter a através da rotação de b em relação a c por um ângulo $\theta = 60^\circ$.

assim,

$$a = c + (b - c)(\cos 60^\circ + i \text{sen } 60^\circ)$$

$$a = b \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Substituindo a e b temos:

$$m + 3i = (n - i) \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Manipulando algebricamente:

$$n = \frac{7\sqrt{3}}{2} \text{ e } m = \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

Para determinar o lado:

$$d(A, B) = |a - b| = \left| \frac{7\sqrt{3}}{2} - i \right| = \frac{2\sqrt{39}}{3}$$

54. Considere que o ponto de encontro das diagonais do paralelogramo situa-se na origem do plano complexo. Considere ainda que as coordenadas de A, B, C, D

possuem, respectivamente, as coordenadas complexas $-z, -w, z, w$, pois A e C são simétricos em relação a origem, e o mesmo ocorre com B e D .

Como o triângulo ΔBCE é equilátero, então podemos obter a coordenada complexa de E rotacionando o ponto B por um ângulo $\theta = 60^\circ$ em torno de C . O mesmo pode ser feito em relação ao triângulo ΔCDF , onde obtemos a coordenada complexa de F rotacionando o ponto D por um ângulo $\theta = -60^\circ$ em torno de C .

Sejam e e f as coordenadas complexas dos pontos E e F , assim, pela proposição 5,

$$e = z + (-w - z) \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \right) = \frac{(1 - \sqrt{3}i)z - (1 + \sqrt{3}i)w}{2}$$

$$f = z + (w - z) \left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \right) = \frac{(1 + \sqrt{3}i)z + (1 - \sqrt{3}i)w}{2}$$

Para mostrar que o triângulo AEF é equilátero, vamos rotacionar o ponto E por um $\theta = 60^\circ$ em torno de A de modo a obter o ponto E' . Se a coordenada complexa $e' = f$ então o triângulo é equilátero:

$$e' = -z + \left[\frac{(1 - \sqrt{3}i)z - (1 + \sqrt{3}i)w}{2} + z \right] \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \right)$$

$$e' = -z + \left[\frac{6z + 2w + 2\sqrt{3}iz - 2\sqrt{3}iw}{4} \right] = \frac{(1 + \sqrt{3}i)z + (1 - \sqrt{3}i)w}{2} = f$$

55. Considere os pontos A e B como lugares geométricos dos números complexos z e w , respectivamente. Considerando que o ponto de encontro das diagonais do paralelogramo $ABCD$ está situado na origem do plano complexo, então os pontos C e D são lugares geométricos dos complexos $-z$ e $-w$, respectivamente.

Sejam E, F, G, H lugares geométricos dos complexos e, f, g, h . Como E está situado no centro do quadrado, então $d(E, A) = d(E, B)$ e $EA \perp EB$. Portanto podemos obter o número complexo z por uma rotação de 90° o complexo w em torno do complexo e :

$$z = e + (w - e)i \Rightarrow z = e + wi - ei \Rightarrow e = \frac{z - wi}{1 - i}$$

E de modo análogo temos que

$$f = \frac{w + zi}{1 - i}, \quad g = \frac{-z + wi}{1 - i}, \quad h = \frac{-w - zi}{1 - i}$$

Para demonstrar que $EFGH$ é um quadrado basta verificar que medida dos quatro lados são iguais e que um dos ângulos é reto.

$$\begin{aligned} d(EF) &= |f - e| = |(w + zi) - (z - wi)| = \sqrt{(w - z)^2 + (z + w)^2} \\ &= \sqrt{2w^2 + 2z^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(FG) &= |g - f| = |(-z + wi) - (w + zi)| = \sqrt{(-z - w)^2 + (w - z)^2} \\ &= \sqrt{2w^2 + 2z^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(GH) &= |h - g| = |(-w - zi) - (-z + wi)| = \sqrt{(-w + z)^2 + (-z - w)^2} \\ &= \sqrt{2w^2 + 2z^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(HE) &= |e - h| = |(z - wi) - (-w - zi)| = \sqrt{(z + w)^2 + (-w + z)^2} \\ &= \sqrt{2w^2 + 2z^2} \end{aligned}$$

Como os quatro lados são iguais, resta demonstrar que um dos ângulos é reto:

$$\begin{aligned} \widehat{HEF} = \widehat{hef} &= \arg \frac{f - e}{h - e} = \arg \frac{\frac{w + zi}{1 - i} - \frac{z - wi}{1 - i}}{\frac{-w - zi}{1 - i} - \frac{z - wi}{1 - i}} = \arg \frac{w - z - zi - wi}{-w - z - zi + wi} \\ &= \arg \frac{(wi - zi - z - w)i}{-w - z - zi + wi} = \arg i = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Portanto $EFGH$ é um quadrado.

56. Seja $\Delta z_1 z_2 z_3$ o triângulo qualquer e sejam $\Delta w_1 z_3 z_2$, $\Delta z_3 w_2 z_1$ e $\Delta z_2 z_1 w_3$ os triângulos equiláteros construídos sobre o lado do triângulo $\Delta z_1 z_2 z_3$, com a mesma orientação do triângulo $\Delta 1 \omega^2$, com $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. Considere ainda $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ os baricentros desses triângulos.

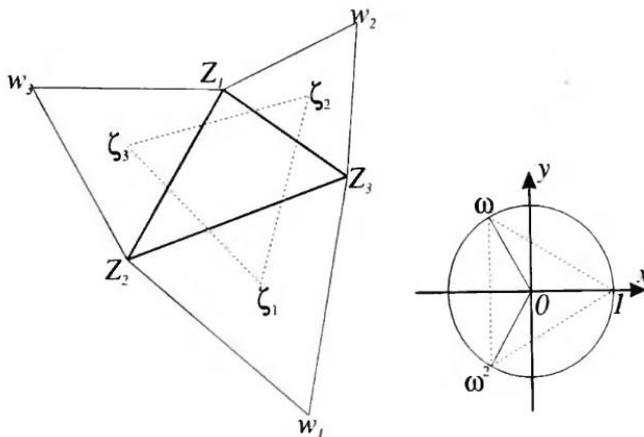


Figura 57: Teorema de Napoleão

Pela proposição 17 item 6:

$$w_1 + \omega z_3 + \omega^2 z_2 = 0 \quad z_3 + \omega w_2 + \omega^2 z_1 = 0 \quad z_2 + \omega z_1 + \omega^2 w_3 = 0$$

Para demonstrar que o triângulo $\Delta\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ é equilátero calculamos:

$$\begin{aligned} \zeta_1 + \omega\zeta_2 + \omega^2\zeta_3 &= \frac{w_1 + z_3 + z_2}{3} + \omega \frac{z_3 + w_2 + z_1}{3} + \omega^2 \frac{z_2 + z_1 + w_3}{3} = \\ &= \frac{1}{3} \{(w_1 + \omega z_3 + \omega^2 z_2) + (z_3 + \omega w_2 + \omega^2 z_1) + (z_2 + \omega z_1 + \omega^2 w_3)\} = 0 \end{aligned}$$

Portanto o triângulo $\Delta\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ é equilátero.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os números complexos são ensinados dando importância às operações algébricas e pouca ou nenhuma ênfase às suas aplicações geométricas. Esta maneira de ensinar induz o aluno a acreditar que os números complexos estão desvinculados de outras aplicações, servindo somente para manipulações algébricas.

No desenvolvimento deste trabalho pudemos perceber que números complexos podem ser ensinados de maneira diferente da usual, ou seja, através de aplicações geométricas. Deste modo o educando percebe que o assunto é dinâmico e interessante, propiciando uma aprendizagem mais significativa.

Outro ponto importante do uso de aplicações geométricas é a possibilidade de utilizar o software GeoGebra durante as aulas, facilitando a visualização dos resultados e tornando os conteúdos mais fáceis de serem assimilados. Sendo assim, o professor promove a interdisciplinaridade.

Este trabalho apresenta algumas ideias para o ensino do conjunto dos números complexos por meio de aplicações geométricas, mas não esgota o assunto, pois a sua utilização e aplicabilidade na geometria é bastante ampla.

REFERÊNCIAS

- [1] AMORIM, J.; SEIMETZ, R.; SCHIMITT, T., Trigonometria e Números Complexos, Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2006, pp. 65-81.
- [2] ANDREESCU, T.; ANDRICA, D., Números complexos de A a... Z, 1ª ed., Tradução: Caio Richer. Fortaleza: Vestseller, 2013.
- [3] BARBOSA, J. L. M., Geometria Euclidiana Plana, 10ª ed., Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [4] CARMO, M. P.; MORGADO A. C.; WAGNER, E., Trigonometria e números complexos, 3ª ed., Rio de Janeiro: SBM, 2005, pp. 107-136, 137-147.
- [5] CARVALHO, J. B. P., “A História dos Números Complexos,” In: CARMO, M. P.; C., MORGADO A.; WAGNER, E. *Trigonometria e Números Complexos.*, 3ª ed., Rio de Janeiro, SBM, 2005, pp. 149-156.
- [6] A. ALVAREZ, Diretor, *Dimensions...une promenade mathématique....* [Filme]. França: Creatide Commons, 2008.
- [7] DOLCE, O; POMPEO, J. N., Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana, 8ª ed., vol. 9, São Paulo: Atual, 2005.
- [8] EVES, H., Introdução à História da Matemática, 5ª ed., Campinas: UNICAMP, 2011.
- [9] FEITOSA, L. F., Aplicações dos Números Complexos na Geometria Plana, 74 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). João Pessoa: Universidade Federal da Paraíba, 2013. Disponível em <http://bit.profmatsbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/267/2011_00115_LAERCIO_FRANCISCO_FEITOSA.pdf?sequence=1>. Acesso em 19/05/2014.
- [10] FERREIRA, J., A Construção dos Números, 2ª ed., Ri de Janeiro: SBM, 2011, pp. 123-134.
- [11] FILHO, B. B.; SILVA, C. X., Matemática: Aula por Aula, vol. Único, São Paulo:

- FTD, 2000, pp. 556-576.
- [12] GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JR, J. R., Matemática Completa, vol. Único, São Paulo: FTD, 2002, pp. 249-266.
- [13] IEZZI, G., Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Analítica, 4ª ed., vol. 7º, São Paulo: Atual, 1993.
- [14] JUNIOR, U. P., A HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS: das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand, 94 f. Dissertação (Programa de Pós-graduação em Ensino da Matemática). Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2009. Disponível em <<http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/12%20Ulicio%20Pinto.pdf>> Acesso em 19/05/2014.
- [15] LIMA, E. L., Exame de textos: Análise de livros de matemática para o ensino médio, Rio de Janeiro: VITAE, IMPA, SBM, 2001, pp. 42-43, 75-76, 103, 436-137, 161, 215-217, 263-264., 306-308, 341, 375-376, 403, 452-453.
- [16] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C., A Matemática do Ensino Médio, 6ª ed., vol. 3, Rio de Janeiro: SBM, 2006, pp. 160-197.
- [17] MARTINS, A.; GASPAR, A.; ANDRADE, C.; BRUNO M. J., Os números Complexos, 2001. Disponível em <<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm25/argand.htm>>. Acesso em 19/05/2014.
- [18] MILIES, C. P., “A Emergência dos Números Complexos,” *Revista do Professor de Matemática (RPM)*. N° 24, pp. 5-15, Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo, 1993.
- [19] Nomes e Datas em Estatística, Disponível em <<http://www.alea.pt/html/nomesEdatas/swf/biografias.asp?art=11>>. Acesso em 19/05/2014.
- [20] PCNs, Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica. 141p. Brasília, 2002. Disponível em <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. Acesso em

16/06/2014.

- [21] Rafael Bombelli, Brasil ESCOLA. Disponível em <<http://www.brasilecola.com/biografia/rafael-bombelli.htm>>. Acesso em 19/05/2014.
- [22] SÁNCHEZ, J. A. P.; CARNEIRO, J. P. Q., “Ilha do tesouro. Dois problemas e duas soluções,” *Revista do Professor de Matemática - RPM*, n. 47, p. 127, Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo, 2009.
- [23] Somatemática, Disponível em <<http://www.somatemática.com.br/biograf/euler.php>>. Acesso em 19/05/2014.
- [24] STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P., *Introdução à Álgebra Linear*, São Paulo: Pearson Education do Brasil, 1997, pp. 01-12; 51-59.
- [25] Wikipedia.org, Disponível em <<http://pt.wikipedia.org/wiki/>>. Acesso em 19/05/2014.
- [26] YAGLOM, I M, *Números Complejos y sus aplicaciones a la Geometría*, 3^a ed., Tradução: Carlos Daniel Navarro Hernández e Juan Enrique Palomino Pérez. Moscou: KRASAND, 2011.