UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA – IM/UFRJ

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

Jadir de Oliveira Balthar

Reflexões sobre o Ensino da Matemática Financeira no Ensino Básico: Um Olhar Piagetiano

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT, do Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro-UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre, no Mestrado Profissional em Rede Nacional em Matemática.
Orientador: Nei Carlos dos Santos Rocha

Rio de Janeiro
2014

Jadir de Oliveira Balthar

Reflexões sobre o Ensino da Matemática Financeira no Ensino Básico: Um Olhar Piagetiano

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

____
Prof. Dr. Nei Carlos dos Santos Rocha
Instituto de Matemática – UFRJ
Orientador/ Presidente da Banca Examinadora

____
Prof[a]. Dra. Ângela Biazutti
Instituto de Matemática - UFRJ

____
Prof[a]. Dra. Lilian Nasser
Instituto de Matemática – UFRJ

Rio de Janeiro
2014

B197r Balthar, Jadir de Oliveira.

Reflexões sobre o ensino da matemática financeira no ensino básico: um olhar Piagetiano / Jadir de Oliveira Balthar. -- Rio de Janeiro, 2014.

65 f.

Orientador: Nei Carlos dos Santos Rocha,

Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Matemática, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT,2013.

Referências: f. 64 - 65

1. Matemática financeira 2. Educação financeira. 3. Matemática - Estudo e ensino I. Rocha, Nei Carlos dos Santos (Orient.) II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. III. Título.

Agradecimentos

Aos professores do IM-UFRJ que participam do PROFMAT, em especial aos professores Nei Carlos e Walcy Santos, pelo incentivo e orientação precisa ao longo desta caminhada.

RESUMO

Neste trabalho será apresentada uma proposta de incorporação mais consistente de conteúdos de Matemática Financeira ao currículo da Educação Básica, uma vez que se trata de assunto de inegável relevância no cotidiano de todos os cidadãos. Seguindo uma linha piagetiana de construção do conhecimento, as estruturas de conhecimento serão progressivamente elaboradas, sempre com foco nas situações reais com as quais o aluno pode se deparar em sua vida social, inclusive fazendo uso rotineiro das ferramentas tecnológicas atualmente disponíveis.

Palavras-chave: matemática financeira, educação financeira, Piaget, construtivismo, tecnologia.

ABSTRACT

In this work we intend to present a new proposal of a more consistent inclusion of the contents of Financial Mathematics in Elementary and High School, bearing in mind that there is an irrefutable urgency of this mathematical subject in everyday life of all citizens. By following Piagetian ideas and perspectives, the structures underlying knowledge acquisition will be progressively used to promote a fully understanding of financial elements, by means of real situations that students will inevitably face in his/her social life, and making use of technological tools currently available to deal with them.

Keywords: financial mathematics, financial education, Piaget, constructivism, technology.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

Provavelmente nenhum tópico de Matemática tenha tamanha imanência à vida dos cidadãos e tamanho impacto na gestão de suas vidas do que a Matemática Financeira. Trata-se, a bem da verdade, de um conhecimento seminal para uma boa condução do indivíduo em sociedade no terreno da Economia. A prova desse fato é que, na última edição de 22 de abril de 2014 do jornal *O Dia*, lemos o seguinte cenário econômico: "*Nove milhões de brasileiros não conseguiram pagar as dívidas nos três primeiros meses do ano. Gente que nunca aprendeu a lidar com o dinheiro e gasta sem pensar. Essa educação financeira deve começar cedo, na escola, mas uma pesquisa mostra que não é isso que acontece.*"

É evidente que não há exercício pleno da cidadania quando o sujeito não tem condições de gerenciar suas finanças adequadamente.

Somado a isso, com o crescimento econômico do país nos últimos anos, houve um formidável aumento no mercado de consumo. A inserção de enorme massa de novos consumidores provocou um crescimento vertiginoso na oferta de crédito, nas mais variadas modalidades: financiamentos imobiliários, *leasing*, consórcios e créditos ("cheque especial") passaram a fazer parte da vida de muitas pessoas. Por outro lado, é bastante evidente a dificuldade que existe para tomar decisões diante de tantas alternativas, por falta de uma formação matemática mais sólida. Há, então, um claro contraste entre esta situação e o que estabelece a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional em seu artigo 22 [1]:

"A educação básica tem por finalidades desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores."

Nossa primeira inquietação diante do tema proposto para a dissertação com perspectiva na Educação Matemática é: A que se deve isso? Cremos que o atraso nas discussões de elementos financeiros já no Ensino Fundamental tem um papel fundamental no cenário de flagelo econômico das classes menos favorecidas e menos escolarizadas, pois devemos ter em mente que nem todos os alunos do Ensino Fundamental acedem ao Ensino Médio, instância na qual é tratada (quando de fato o é) a Matemática Financeira totalmente algebrizada e calcada, no mais das vezes, em fórmulas que pouco iluminam taxonomias importantes das finanças.

Nossa segunda inquietação é de ordem pragmática: Como reparar essa lacuna? A partir de uma análise de situações típicas vividas por boa parte da população, nos foi possível constatar que elas podem ser facilmente abordadas usando conceitos matemáticos já disponíveis na grade curricular da Educação Básica, tais como razões e proporções, potências, noções embrionárias de funções e sequências numéricas, se se respeitam as fases do processo cognitivo de aquisição do conhecimento.

O presente trabalho pretende defender a tese de que tratar Matemática Financeira sem o apoio imediato de fórmulas e estruturas algebrizadas é um desafio possível de se vencer tendo em mente as estruturas de aquisição de conhecimento intuídas por Piaget, se as tomarmos como esquemas de evolução no tratamento da disciplina, independente da idade do estudante. É, portanto, objetivo do presente trabalho problematizar aspectos de significado de elementos das finanças, suas estruturas aritméticas, simbólicas e algébricas, sob a égide de suas três fases fundamentais da aquisição do conhecimento: o intuitivo, o operacional e o formal. O entendimento do processo de construção do conhecimento, tendo como base a epistemologia genética [2], norteou as escolhas feitas, levando a um desenvolvimento em espiral do conteúdo, distribuído ao longo das várias séries, tanto do Ensino Fundamental como do Ensino Médio, de modo a aproveitar os conteúdos já trabalhados e as estruturas desenvolvidas. Estamos conscientes de que leituras Vigotskianas e pós-piagetianas são possíveis, mas pretendemos essencialmente refletir sobre o conteúdo de Matemática Financeira de um ponto de vista essencialmente cognitivista.

Buscou-se também articular os conteúdos com as tecnologias disponíveis e amplamente usadas pelos alunos em outras atividades. Especificamente, recorreu-se, sempre que pertinente, ao uso de calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares gráficos, ferramentas que potencializam o aprendizado e possibilitam explorar situações mais compatíveis com a realidade, uma vez compreendidas as estruturas que norteiam os cálculos a serem trabalhados.

Capítulo 1 - Teoria Piagetiana de Aquisição do Conhecimento

Ao sugerirmos colocar a Matemática Financeira em posição de destaque no currículo, precisamos avaliar a pertinência desta proposta, sob diferentes aspectos. Em particular, é preciso avaliar a relevância social do assunto, suas conexões com outros itens do currículo e as condições de aprendizagem. Acreditamos que a relevância social, ainda que óbvia, já foi bem defendida na introdução, e as conexões que podem ser estabelecidas serão oportunamente discutidas nos próximos dois capítulos. Neste, nos ocuparemos de "visitar" algumas das principais teorias do conhecimento, identificando elementos centrais que atuam nos processos de ensino e aprendizagem.

Embora a proposta de educação financeira seja o fio condutor deste trabalho, almejamos também discutir algumas características típicas do atual ensino da Matemática, confrontando-as com alguns pressupostos teóricos dos processos de aprendizagem. Tais reflexões, para além de muitas outras questões pertinentes, contribuem no sentido da profissionalização do ofício de professor, evidenciando que não se trata de um "prático" que se limita a seguir manuais [3].

As diferentes correntes de pensamento apresentam concepções que, em muitos aspectos, chegam mesmo a ser opostas, o que se traduz em possibilidades pedagógicas radicalmente distintas. As controvérsias são muitas. Por exemplo, Bruner não aceita o conceito de "estágios", central na teoria piagetiana (e Piaget, por sua vez, alegou que Bruner estava sendo simplista...) [4]. Ainda de acordo com Wood [4], a importância conferida à linguagem e às interações sociais também coloca alguns dos pensadores mais influentes em lados opostos (esta é uma das diferenças marcantes entre as ideias de Piaget e Vigotski). Mas entendemos que, para os propósitos deste trabalho, não se justifica um exame exaustivo destas discordâncias. Mais proveitoso é observar elementos comuns, levando em consideração também nossas próprias experiências, e analisar como estes conceitos podem ser colocados em prática na sala de aula, na busca por uma otimização da aprendizagem.

Embora a teoria piagetiana seja muito ampla e complexa, comportando questões que não interessam aqui, ela será nosso ponto de partida. Não ignoramos as objeções feitas a alguns dos pontos centrais de sua teoria, mas acreditamos que ela oferece subsídios pertinentes na busca por compreender os processos envolvidos na construção do conhecimento. Em particular, a despeito de alguns estudos sugerirem evidências de que os “estágios de desenvolvimento” não sejam tão fixos e sequenciais, como postulou Piaget, a ideia central de que a inteligência surge da ação sobre o mundo permanece válida e é um dos conceitos que nortearam este trabalho (diga-se de passagem, este é um ponto de convergência entre as ideias de Bruner, Piaget e Vigotski) [4].

Antes de avançarmos na análise de conceitos da psicologia piagetiana que acreditamos serem úteis ao trabalho do professor, convém fazer uma observação preliminar importante: Piaget não teve a intenção, em momento algum, de criar uma teoria pedagógica. Mas, ao estudar sistematicamente os processos e estruturas envolvidos no desenvolvimento mental, sua psicologia oferece elementos que municiam a reflexão e a prática pedagógicas, de maneira que muitas concepções de ensino (por vezes opostas) se baseiam fortemente em conceitos piagetianos. Ele não se ocupou com diretrizes curriculares específicas, mas nos legou algumas ideias poderosas, como colocar o aluno no papel central do processo de aprendizagem, entendendo o ensino como um processo gerador de uma aprendizagem significativa, partindo sempre do conhecimento prévio do aluno, e concebendo o erro como possibilidade de aprendizagem. Estas ideias permearão toda a proposta que ora apresentamos.

1.1 Inteligência: Um Processo de Assimilação e Acomodação

Uma questão evidentemente decisiva em qualquer proposta de intervenção intencional com finalidade educativa é o entendimento do que vem a ser inteligência e de como ocorrem os processos mentais de construção do conhecimento. Vejamos, então, como Piaget aborda esta questão, a partir dos conceitos de assimilação e acomodação [2].

Diante de um novo problema, o aluno tenta assimilá-lo às suas estruturas cognitivas, conformando-o aos esquemas mentais disponíveis. No entanto, na medida em que tais estruturas se mostram incompatíveis ou insuficientes para lidar com o problema, é preciso proceder à acomodação, processo que consiste em reorganizar as estruturas para que o objeto possa ser assimilado. Em outras palavras, assimilação e acomodação são os processos complementares que permitem a adaptação do sujeito. E é precisamente assim que Piaget concebe a inteligência: capacidade de adaptação.

Para que tais conceitos fiquem mais claros no contexto da Matemática, analisemos uma situação particular, vivenciada no Ensino Médio. Em muitas situações, inclusive fora do ambiente escolar, os alunos operam com conjuntos, e o fazem com relativa facilidade. No entanto, estão em jogo sempre conjuntos finitos (ainda que a quantidade de elementos seja “grande”). Assim, algumas situações típicas trabalhadas no estudo de conjuntos e funções são assimiladas sem maiores dificuldades. Por exemplo, o fato de não ser possível estabelecer uma bijeção entre um conjunto finito e um subconjunto próprio dele. Diante desta questão, de imediato o aluno argumenta algo como “Não é possível, pois faltam elementos de um dos lados.” (ele fala em “lados” porque possivelmente está usando uma representação em diagrama).

Mas a situação se altera profundamente quando precisa trabalhar com conjuntos infinitos, (afinal, ele não traz experiências do mundo físico de coisas infinitas). Assim, soa como absurda a ideia de estabelecer uma bijeção entre os conjuntos N (naturais) e Z (inteiros), uma vez que ele já identifica N como um subconjunto próprio de Z. Mas, ao se deparar com a função *f: N→ Z* tal que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & se\ x\ é\ par \\ -\dfrac{(x+1)}{2}, & se\ x\ é\ ímpar \end{cases}$, suas convicções são abaladas, diante da evidência concreta de suas limitações. É, pois, necessário que suas estruturas se acomodem, para que este novo objeto possa ser assimilado.

Antes de prosseguirmos, façamos uma última reflexão, visto que raramente se faz uma discussão sobre cardinalidade de conjuntos infinitos na escola. Mas, tendo em mente as etapas do desenvolvimento mental, nos termos propostos por Piaget, os alunos do Ensino Médio já possuem as estruturas que permitem abordar questões como esta. Faz-se necessário, por outro lado, um planejamento cuidadoso. Se, por um lado, seria válido evidenciar características específicas de conjuntos infinitos (nem tanto o conteúdo em si, mas as reflexões que ele suscita), por outro lado seria negativo deixar passar a ideia, por insuficiência de informações, de que dois conjuntos infinitos (entre os quais se pode estabelecer uma bijeção) sempre possuem a mesma cardinalidade.

Como se trata de um conteúdo sofisticado, ajustá-lo às possibilidades atuais dos alunos exige uma ponderação meticulosa por parte do professor.

1.2 Os Estágios do Desenvolvimento Mental

Conforme já havíamos antecipado, Piaget [2] concebe o processo de desenvolvimento mental dividido em grandes períodos: “período sensório-motor”, “período pré-operatório”, “período das operações concretas” e “período das operações formais”. Embora existam referências a idades mais ou menos características de cada período, o próprio Piaget nos alerta de que estas faixas etárias não devem ser tomadas de forma rígida. O aspecto mais interessante da teoria piagetiana, e que seguiremos aqui, é considerar que o desenvolvimento mental em todos os indivíduos obedece a esta sequência, o que tem óbvias e sérias implicações pedagógicas. Uma vez que o entendimento deste “processo evolutivo” determinará em grande medida as escolhas que faremos, é adequado aqui relembrarmos rapidamente as características mais marcantes de cada estágio de desenvolvimento.

No período sensório-motor tem-se uma inteligência essencialmente prática, de modo que o conhecimento do mundo deriva da ação e da percepção sobre os objetos, sendo a característica marcante deste primeiro período a indiferenciação entre sujeito e objeto. Na ausência da linguagem, não há um pensamento representativo, de modo que o conhecimento é imediato e limitado no espaço e no tempo (o que a criança não vê, não existe). Com o tempo, os conjuntos de ações (esquemas) são aprimorados, permitindo ações sucessivamente mais complexas. São estas estruturas rudimentares iniciais que irão subsidiar o conhecimento simbólico do período seguinte.

O período pré-operatório é caracterizado pelo pensamento simbólico e pela intuição. É neste período que surge a linguagem e a criação de representações mentais. Com isso, os esquemas de ação desenvolvidos no período sensório-motor são agora internalizados, de maneira que a criança já consegue pensar sobre um objeto mesmo na sua ausência. Este é o período popularmente conhecimento como “idade dos porquês”, em que a criança acredita que tudo deve ter uma explicação. No entanto, se, por um lado, a criança rejeita a ideia de acaso, por outro lado, ao buscar explicações para a ocorrência de certos fenômenos, seu pensamento ainda não é “lógico” (por exemplo, a Lua existe para iluminar a Terra durante a noite).

Trata-se de um período de transição, pois a criança ainda não é capaz de realizar operações, no sentido piagetiano, uma vez que ainda não desenvolveu noções fundamentais como reversibilidade e conservação. É importante destacar que não há uma substituição da inteligência prática do período anterior, mas sim uma evolução, proporcionada pelo pensamento intuitivo e pela construção de imagens mentais.

No contexto da Matemática Financeira, entendemos que o primeiro contato da criança com o mundo das finanças deve explorar precisamente este pensamento intuitivo, quando ela percebe variações de preços ao longo do tempo, embora não seja ainda capaz de compreender as estruturas matemáticas envolvidas. Posteriormente, ela se torna apta a trabalhar com algumas situações fazendo uso da representação simbólica, quando explora variações em gráficos e diagramas.

No período das operações concretas a criança já se mostra capaz de fazer raciocínios razoavelmente elaborados; no entanto, ela ainda depende da presença física dos objetos para tal. Progressivamente consolidam-se conceitos de conservação, reversibilidade, inclusão de classes e seriação, o que possibilita o surgimento das operações propriamente ditas, e não apenas ações sobre o mundo físico. É somente neste período que conceitos matemáticos fundamentais, como o conceito de número e as operações aritméticas elementares, podem se desenvolver. Por exemplo, dispondo do conceito de reversibilidade, a ação de somar pode ser “desfeita” pela ação de subtrair.

Para tornar mais clara a dependência do concreto, analisemos mais uma situação. Manipulando números racionais, ela pode, por exemplo, se convencer de que entre dois racionais distintos quaisquer sempre existe outro número racional. No entanto, isto é bem diferente de concluir que entre dois racionais quaisquer existem *infinitos* outros racionais. Embora esta segunda afirmação possa ser vista como decorrência imediata da primeira, ela ainda não está ao alcance da criança, pois envolve um raciocínio abstrato cujas estruturas ainda estão por se formar. Dito de outro modo, apesar de perceber um padrão (no caso, a possibilidade de inserir um racional entre dois outros), a criança ainda não está apta a fazer certas generalizações nem a formalizar certos conceitos.

Neste período a criança já pode trabalhar com uma ampla variedade de problemas de Matemática Financeira (como cálculos de juros e descontos), mas ainda carecendo da capacidade de generalização que caracterizará o período posterior. Aqui é possível fazer um tratamento essencialmente aritmético, baseado em conceitos como o de proporcionalidade, sustentado pelas representações simbólicas desenvolvidas anteriormente (nos diagramas de setas, por exemplo, as setas são os símbolos cujos tamanhos relativos indicam os valores que se deseja representar). É também nessa fase que o aluno de Matemática Financeira entende a reversibilidade da equivalência de capitais para o valor presente. Por exemplo, no contexto de juros compostos, é o momento em que ela entende que a reversibilidade do valor no tempo trazido a tempos anteriores se dá não mais por meio da multiplicação pelo fator $(1+i)$, mas sim pela divisão pelo fator $(1+i)$.

Por fim, no período das operações formais ela passa a raciocinar de modo abstrato, de maneira que se desvincula da realidade próxima e é capaz de pensar não só sobre o real, mas também sobre o possível. São as operações lógico-matemáticas que moldam sua forma de pensar e compreender o mundo. É nesta fase que podemos esperar as primeiras provas e demonstrações razoavelmente rigorosas de proposições matemáticas. Aqui, por exemplo, o aluno é capaz de provar que a raiz quadrada de qualquer número natural ou é também natural ou é irracional, argumentando de modo coerente. Mas isso não significa que ele deixa de se apoiar no concreto. Inicialmente ele pode provar que a raiz quadrada de 2 é irracional e, em seguida, aplicar o raciocínio para obter um resultado geral.

Nesta última etapa do desenvolvimento, além de obter resultados mais gerais envolvendo assuntos tipicamente trabalhados na educação básica, como as fórmulas de juros simples e compostos, pode-se avançar para outros campos da Matemática Financeira sem maiores dificuldades e também estabelecer conexões interessantes com outras áreas do conhecimento matemático, como funções. Buscaremos isso no capítulo em que analisamos uma proposta de tratamento para o Ensino Médio.

Esta concepção de desenvolvimento mental nos leva a algumas considerações importantes sobre a prática pedagógica, que serão determinantes nas escolhas que faremos posteriormente.

- As mudanças de estágios não ocorrem necessariamente na mesma idade para todas as crianças e características de dois ou mais estágios podem coexistir, conforme a situação. Aqui Piaget inclusive reconhece que o meio social e a experiência pessoal podem acelerar ou retardar o surgimento de certas noções (como as de conservação). No entanto, Piaget afirma que a **sequência** é a mesma para todos.

A proposta que apresentamos, bem como qualquer outra que envolva o segundo segmento do Ensino Fundamental e o Ensino Médio, trata de crianças e adolescentes no final do período das operações concretas e início do período das operações formais. No entanto, a primeira observação acima nos adverte para o risco envolvido ao considerar as possibilidades de cada criança num determinado momento. Enquanto algumas crianças no 6º ano já se encontram “prontas” para a formalização típica do último período, outras podem encontrar dificuldades mesmo nas operações concretas, embora se mostrem capazes de executar ações. As operações, diferentemente das ações, são construções mentais, criações com o intuito de compreender o mundo. Enquanto as ações são tão somente movimentos intencionais, dirigidos a um objeto, para lhe dar sentido, as operações são sistemas estruturados de ações internalizadas. É assim que, para tornar possível uma operação, a criança precisa desenvolver certos conceitos. Por isso Piaget afirma de forma contundente que, embora sejam aparentemente capazes de contar os elementos de um conjunto, crianças pequenas não possuem o conceito de número, pois tal conceito envolve propriedades como a conservação, ainda não desenvolvidas. Da mesma forma, sem a noção de reversibilidade, o ensino do algoritmo da adição é vazio de significado. Identificar o que está ou não ao alcance do aluno tem, obviamente, implicações sérias na prática da sala de aula, e em diversas ocasiões ao longo do texto retomaremos estas ideias.

- Quando um adulto aprende algo novo, o processo de construção do conhecimento segue a mesma sequência observada no desenvolvimento mental da criança.

Esta observação nos dá pistas importantes sobre como conduzir a prática docente quando trabalhamos com “classes adultas” (situação tipicamente encontrada em escolas noturnas). Não se trata, de modo algum, de infantilizar o aluno e o ensino a ele oferecido. Trata-se, sim, de entender que, a despeito da idade, este aluno precisa ter o suporte do concreto, com a ação precedendo o pensamento.

- As estruturas de um estágio constituem as bases a partir das quais emergirão as estruturas do estágio seguinte. Mesmo as estruturas do período sensório-motor são vistas como extensão das estruturas orgânicas inatas. No entanto, não observamos diretamente tais estruturas, mas sim as condutas pelas quais tais estruturas se manifestam.

Esta observação nos alerta para a necessidade de valorizarmos as construções realizadas em cada etapa, não só como fim em si mesmas, mas sobretudo como meio, sem o qual não atingiremos as discussões mais elevadas planejadas para as etapas subsequentes. Não é de outro modo que concebemos a construção de esquemas e representações gráficas de situações particulares nas primeiras séries do segundo segmento do ensino fundamental: ao atuar no "concreto", a criança desenvolve as estruturas que permitirão a formalização de conceitos mais adiante. Um "esquema" nada mais é que uma sucessão de ações, que podem ser repetidas em situações semelhantes. Neste ponto precisamos situar mais adequadamente o conceito de estrutura e sua importância na teoria piagetiana.

1.3 Estruturalismo Construtivista

Piaget [5] concebe a construção do conhecimento como progressiva e ininterrupta, em que cada inovação só se torna possível mediante as precedentes e estabelece quatro fatores para o desenvolvimento mental:

- o crescimento orgânico e a maturação;
- as interações sociais;
- o exercício e a experiência;
- a equilibração.

É assim que vê a evolução como um todo, em seus aspectos orgânico, psicológico e social, de sorte que quando obtemos uma estrutura que nos é útil, ela tende a manter-se estável. Visto o processo epistemológico por este prisma, uma questão que se impõe é a identificação das estruturas subjacentes ao comportamento. Mais ainda, é preciso compreender como um sistema de estruturas dá lugar a outro, mais avançado, conferindo um caráter dinâmico a estas estruturas, que vão das mais simples às mais complexas, umas construídas sobre as outras. Aqui Piaget claramente se inspira na Matemática e na Lógica, ao entender que uma estrutura é aberta tanto em seus inícios quanto em seus fins (os axiomas em seus inícios e a inexistência de uma "superestrutura" que encerre definitivamente o ciclo evolutivo).

Este modo de pensar as estruturas inerentes ao pensamento motiva reflexões relevantes para a prática pedagógica. Um ponto particularmente polêmico (talvez mais por desconhecimento do que por qualquer fator intrínseco) é o que aqui chamamos de "relativização do erro". Eventualmente, uma resposta errada pode sinalizar apenas que as estruturas disponíveis não estão aptas a lidar com o problema, mas podem, por outro lado, indicar a presença de uma "lógica" de pensamento que precisa ser valorizada. Observemos que a estrutura é uma "forma de equilíbrio", mais ou menos estável. O desequilíbrio (provocado, por exemplo, pela ação educacional) é que propicia a evolução, em que uma nova estrutura sucede a precedente, sendo mais ampla e mais estável.

Em Matemática, de todos os conteúdos trabalhados ordinariamente na Educação Básica, talvez nenhum outro nos forneça mais exemplos de "erros aproveitáveis" do que a Análise Combinatória. Mas deve-se frisar que existe toda uma gradação entre as falhas nos raciocínios empregados e que só o juízo criterioso do professor pode caracterizá-los adequadamente, de maneira a estabelecer o modo e os propósitos das intervenções necessárias.

1.4 Conceitos e Procedimentos

Outro aspecto fundamental em nossa discussão é a construção dos conceitos. Em suas pesquisas, Piaget concluiu, por exemplo, que é possível a uma criança contar de 1 a 5 sem nem mesmo ter desenvolvido ainda o conceito de número! Mas como isso é possível? Embora esta situação em particular não constitua uma preocupação específica deste trabalho, ela serve para ilustrar em uma questão às vezes mal compreendida: a diferença entre o conhecimento conceitual e o conhecimento procedimental. Se optarmos por priorizar procedimentos (e esta é uma realidade atual do ensino da Matemática no país que resta evidente a todos aqueles que lidam com a Educação

Básica em seu cotidiano), correremos o risco de, em contextos bem mais sutis, nos depararmos com o mesmo problema.

Talvez o exemplo mais evidente para nós professores de Matemática, e que se presta à discussão que ora fazemos, sejam os procedimentos para resolução de equações. A confusão que as crianças fazem, criando regras como “quando troca de lado, troca o sinal”, além de não entenderem o que significa escrever, ao final da resolução, algo como “$x = 2$”, deixa claro que conceitos-chave não foram adequadamente compreendidos. De posse de procedimentos que são, muitas vezes, na melhor das hipóteses, só parcialmente corretos, elas ora acertam, ora erram. Quando erram, não dispõem das condições necessárias para identificar o erro. E o mais grave: como eventualmente acertam, estes procedimentos equivocados acabam sendo internalizados e repetidos daí em diante [4].

Ainda sobre esta questão central envolvendo conceitos e procedimentos, vejamos mais um exemplo que joga luz sobre algumas das questões que vimos tratando até aqui. No estudo de polígonos, feito tipicamente no 7º ou 8º ano do Ensino Fundamental, encontramos materiais didáticos que, sem maiores discussões, apresentam uma fórmula para o cálculo do número de diagonais (a saber, $D = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$) e, em seguida, nas atividades, situam o estudo em uma esfera no mínimo questionável. Dois exemplos, retirados de livros em circulação no mercado nacional, são os seguintes:

1º) Quantas diagonais possui o heptadecágono?

2º) Existe polígono em que o número de diagonais seja o quádruplo do número de lados?

Não se trata de sugerir que questões como estas não sejam abordadas. Mas é importante ter em mente que elas são, na melhor das hipóteses, “aritmética aplicada” ou “álgebra aplicada”. Não são questões de geometria propriamente dita. Não deveriam, portanto, ocupar o espaço que costumam ocupar. Mas há outras questões igualmente sérias que merecem nossa atenção.

Em uma abordagem como a relatada acima, ignora-se claramente o processo de construção do conhecimento, nos termos colocados por Piaget. Em linha com os postulados da psicologia genética, entendemos que muito antes de chegar à fórmula deveria haver uma longa e cuidadosa exploração do “concreto”. Neste contexto, o “concreto” pode ser uma exploração prática de diversos polígonos simples (“simples” aqui quer dizer “número relativamente pequeno de lados”). Um caminho natural para, provavelmente, a maior parte dos alunos seria desenhar todas as diagonais e contá-las, uma a uma. Mas, à medida que o número de lados vai aumentando, os alunos perceberão a dificuldade de permanecer com este procedimento, pois se torna penoso e muito suscetível a erros.

Neste momento, precisarão elaborar esquemas mentais, ainda dependentes do concreto, que permitam uma resolução satisfatória. Em algum momento, intuirão um procedimento que, em essência, equivale à fórmula. Mas, como bem nos ensinou Piaget, procedendo desta forma, o aluno estará de fato (re)construindo o conhecimento, apropriando-se dele num evidente processo de adaptação inteligente.

1.5 Interação e Comunicação na Sala de Aula

Afastamo-nos de Piaget quando consideramos a importância das relações interpessoais na construção e aquisição do conhecimento. Embora ele não as ignore em sua teoria, tampouco confere a elas a importância dada por outros estudiosos, como Vigotski. Aproximar-se desta proposta “sócio-interacionista” reflete não só uma posição pessoal, mas também uma conformação à legislação educacional brasileira, nos termos dos Parâmetros Curriculares Nacionais [6].

Uma contribuição fundamental de Vigotski é o conceito de zona de desenvolvimento proximal [4]. Basicamente, distingue-se aquilo que o aprendiz (criança ou não) é capaz de realizar sozinho e aquilo que é capaz de realizar mediante auxílio de outra pessoa mais experiente. Este conceito possui implicações significativas, pois duas pessoas podem estar em um mesmo nível de desempenho (sem auxílio) e, no entanto, diferirem enormemente as possibilidades de aprendizado. Em outras palavras, nível atual de desempenho e capacidade para aprender (mediante a interação) são distintos e isso precisa ser cuidadosamente considerado pelo professor quando decide realizar alguma intervenção.

Se considerarmos que a interação cumpre papel importante nos processos de aprendizagem, somos inevitavelmente levados a considerar questões relacionadas à comunicação, especialmente a comunicação entre professor e aluno. Muitas explicações foram sugeridas para as dificuldades de comunicação na sala de aula e não é do nosso interesse ir fundo nesta questão. Desejamos tão somente realçar a questão e destacar alguns cuidados a serem tomados quando nos dirigimos aos nossos alunos.

A fim de ilustrar a problemática envolvida, retornemos ao exemplo acima, das diagonais de polígonos convexos. Em uma das questões apresentadas, perguntava-se o número de diagonais de um heptadecágono. É de fato relevante exigir que o aluno decore os nomes de diversos polígonos em função da quantidade de lados? Ou estamos, talvez sem nem mesmo nos dar conta, introduzindo dificuldades que podem acabar por impedi-lo de atacar o problema? As dificuldades de comunicação que surgem em sala de aula são às vezes sutis, e imperceptíveis se não formos capazes de nos colocar no lugar do aluno. Neste exemplo, uma referência mais explícita ao número de lados ("Quantas diagonais possui o polígono com 17 lados?") não criaria um possível obstáculo desnecessário e o objetivo da atividade não sofreria qualquer prejuízo. Observemos a sutileza do problema, uma vez que seria possível contra-argumentar que "heptadecágono" também constitui uma referência explícita. É necessária, por assim dizer, certa "sensibilidade comunicativa", de maneira a estabelecer um diálogo que respeite as condições do aluno e promova a aprendizagem.

As considerações feitas neste capítulo constituem a base psicopedagógica sobre a qual, nos próximos dois capítulos, construímos uma proposta de educação financeira que seja acessível aos alunos desde o segundo segmento do Ensino Fundamental.

Capítulo 2 - A Matemática Financeira do Ensino Fundamental

Neste capítulo discutiremos uma proposta de currículo de Matemática Financeira para o segundo segmento do Ensino Fundamental. Este segmento impõe desafios consideráveis, pois é período de profundas transformações no aluno. Tipicamente, é quando ele inicia a transição do concreto para o abstrato, conforme discutido anteriormente. Não obstante, é possível incluir algumas questões relevantes já neste nível de ensino, mediante estratégia adequada que possibilite a construção de novas estruturas, num processo contínuo de assimilação e acomodação. Nos termos dos Parâmetros Curriculares Nacionais [6]:

"A aprendizagem de conceitos se dá por aproximações sucessivas. Para aprender sobre digestão, subtração ou qualquer outro objeto de conhecimento, o aluno precisa adquirir informações, vivenciar situações em que esses conceitos estejam em jogo, para poder construir generalizações parciais que, ao longo de suas experiências, possibilitarão atingir conceitualizações cada vez mais abrangentes; estas o levarão à compreensão de princípios, ou seja, conceitos de maior nível de abstração, como o princípio da igualdade na matemática, o princípio da conservação nas ciências, etc." (página 75)

Tradicionalmente, a educação financeira não é sistematicamente trabalhada na Educação Básica. No Ensino Fundamental, em essência há somente o estudo de porcentagens, mas não necessariamente num contexto de finanças, e o de juros simples, realizados no 6º e no 7º anos. Depois, o assunto é completamente abandonado, sendo apenas ocasionalmente mencionado em problemas que envolvam outros conceitos. No entanto, as estatísticas mostram que parte considerável dos alunos que terminam esta etapa de escolaridade não ingressa imediatamente no Ensino Médio; interrompem os estudos e ingressam precariamente no mercado de trabalho. Este contexto social fornece argumento evidente de que a Matemática Financeira precisa estar presente no currículo do Ensino Fundamental de modo mais abrangente, em conformidade com as orientações presentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais [6]:

“A escola, ao tomar para si o objetivo de formar cidadãos capazes de atuar com competência e dignidade na sociedade, buscará eleger, como objeto de ensino, conteúdos que estejam em consonância com as questões sociais que marcam cada momento histórico, cuja aprendizagem e assimilação são as consideradas essenciais para que os alunos possam exercer seus direitos e deveres.” (página 43)

O que faremos a seguir não tem a pretensão de ser nem um plano de curso, muito menos um plano de aula. Ao contrário, o objetivo é analisar como conceitos importantes da Matemática Financeira, necessários ao pleno exercício da cidadania, nos termos da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, podem ser naturalmente inseridos no currículo sem exigir um esforço adicional considerável, respeitando as etapas de construção do conhecimento na visão piagetiana e aproveitando diversos outros conceitos já tradicionalmente presentes na grade curricular, conferindo-lhes maior significado ao atrelá-los à resolução de problemas reais com os quais os alunos se deparam no cotidiano.

Ao iniciar o segundo segmento do Ensino Fundamental, espera-se que o aluno já conheça as operações aritméticas elementares e já saiba operar com números racionais, tanto na forma decimal como na forma fracionária, de modo que os cálculos de porcentagem típicos do 6º ano não devem apresentar maiores dificuldades. Posto isto, voltamos nossa atenção às possibilidades que se abrem para o estudo da Matemática Financeira nesta etapa de escolaridade. Nesta etapa, é razoável admitir que o aluno se encontre no “período operatório concreto”, de modo que uma experimentação inicial é imprescindível.

A turma pode ser estimulada a levar para a aula referências às porcentagens que existem no seu cotidiano (folhetos promocionais, anúncios em jornais e revistas, etc.). Ou seja, antes de partir para operações concretas, atuamos no nível “pré-operatório”, em que o aluno manipula os objetos e começa a dar significado aos entes matemáticos, ainda com forte apelo intuitivo. Diversos problemas simples podem ser formulados com base nestes materiais, explorando especialmente representações gráficas.

Conforme dito acima, o que se nota é que o estudo de porcentagem no 6º ano se dá em um contexto restrito, somente como uma parte do estudo de números racionais. Embora possamos alegar, com justiça, falta de tempo para uma abordagem mais ampla e significativa, precisamos ter um olhar crítico para o currículo, o que nos leva a fazer alguns questionamentos. A fim de exemplificar este ponto de vista, destacamos a inadequação do estudo de expressões numéricas, nos termos em que aparece em diversos livros didáticos. Cobrar de um aluno no 6º ano que seja capaz de resolver uma expressão com mais de uma dezena de operações e totalmente desprovida de significado toma um tempo considerável, que poderia ser usado em outros estudos mais relevantes, e contribui para a desagradável sensação de que "Matemática não serve pra nada". É baseado neste ponto de vista que acreditamos que é possível (e necessário) avançar no tema da educação financeira neste segmento.

2.1 O Conceito de Juro

Devido ao histórico de taxas de juros elevadas, observa-se um entendimento equivocado por parte de muitas pessoas, que acreditam que a cobrança de juros é indevida e deveria até mesmo ser proibida. Atividades que permitam entender o juro como "aluguel do dinheiro" é algo já acessível nesta idade, mas devem se situar no campo das operações intuitivas e concretas. Como a ideia de que uma pessoa deve pagar para ter o direito a usar algo que não lhe pertence é relativamente natural e socialmente aceita, o conceito de juro pode ser adequadamente compreendido, possibilitando fazer a discussão realmente pertinente: o quanto se deve cobrar por este "aluguel".

Em uma segunda etapa, problemas mais desafiadores podem ser propostos. Uma situação típica pode ser resumida no seguinte exemplo:

Um comerciante aumentou os preços dos seus produtos em 25%. Como as vendas caíram bastante, ele resolveu voltar aos preços antigos. Qual deve ser o percentual de desconto sobre o preço atual para retornar ao preço antigo?

Esta questão foi apresentada a uma turma de 1º ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública estadual do Rio de Janeiro e quase todos responderam que o desconto deveria ser de 25%. Gostaríamos que um aluno de Ensino Médio fosse capaz de fazer algo como:

$$P \times 1{,}25 \times x = P$$
$$x = 80\%$$

E concluísse corretamente que o desconto deve ser de 20%. Mas já no 6º ano esta resposta pode ser dada. A turma pode ser dividida em alguns grupos, e a questão pode ser apresentada, fornecendo valores diferentes para cada grupo:

Um comerciante aumentou o preço de um de seus produtos, que custava R$400,00, em 25%.

Qual será o novo preço do produto?

Como as vendas caíram bastante, ele resolveu voltar ao preço antigo. Qual deve ser o percentual de desconto sobre o preço atual para retornar ao preço antigo?

O enunciado do problema foi propositalmente alterado porque o aluno que se encontra no período das operações concretas precisa conhecer os valores envolvidos para manipulá-los adequadamente. De acordo com a teoria piagetiana, soluções como a que apresentamos acima não devem ser esperadas nesta etapa, pois já requerem estruturas mais amplas, características do período seguinte.

Como o problema foi proposto com valores diferentes, não causará estranheza quando os grupos apresentarem valores diferentes para a primeira questão. Mas a segunda questão certamente os surpreenderá e é importante deixar que eles discutam livremente sobre ela. Conforme discutido no capítulo anterior, como este resultado não era esperado, para que possa ser assimilado, será preciso acomodar as estruturas cognitivas. Neste processo adaptativo é importante que o aluno "generalize", intuindo que o valor inicial é irrelevante. Nos termos dos Parâmetros Curriculares Nacionais [6]:

"Para tanto, é necessário que, no processo de ensino e aprendizagem, sejam exploradas: a aprendizagem de metodologias capazes de priorizar a construção de estratégias de verificação e comprovação de hipóteses na construção do conhecimento, a construção de argumentação capaz de controlar os resultados desse processo, o desenvolvimento do espírito crítico capaz de favorecer a criatividade, a compreensão dos limites e alcances lógicos das explicações propostas." (página 44)

Normalmente os livros apresentam as porcentagens em forma decimal. No entanto, não é usual abordar problemas como "Para acrescentar 10% a uma quantidade, basta multiplicá-la por quanto?". Esta é uma habilidade importante, pois permite um uso mais rápido de dispositivos como calculadoras. Uma abordagem geral, em que o aluno faz $Q + x\%\ de\ Q = Q \times \left(1 + \frac{x}{100}\right)$, não é possível aqui, pois o aluno ainda não tomou contato com a Álgebra (e este contato só pode ser proveitoso no período das operações formais). Então, é preciso explorar situações numéricas, direcionando o aluno através da observação de padrões. Neste sentido, atividades como a seguinte podem ser apresentadas:

Uma pessoa está avaliando alternativas para investir um capital que recebeu de herança. Ajude-a completando a Tabela 1:

Tabela 1

Valor Inicial	Taxa de juros	Valor do Juro	Valor do Juro ÷ Valor Inicial	Montante Final	Montante Final ÷ Valor Inicial
R$10.000,00	30%				
R$10.000,00	25%				
R$10.000,00	20%				
R$10.000,00	13%				
R$10.000,00	7,5%				

OBS: Montante é o capital final gerado, pelo acréscimo dos juros ao capital inicial.

Agora, observando atentamente os valores que aparecem na Tabela 1, responda as seguintes questões:
Que relação você observa entre os valores da segunda e da quarta colunas?
Que relação você observa entre os valores da segunda e da sexta colunas?
Se a taxa de juros fosse de 17%, que valor aparecia na sexta coluna?
Os valores que aparecem na última coluna dependem do capital inicial?

A opção por dispor os dados em tabelas é porque elas oferecem um apelo visual que permite ao aluno conjecturar antes mesmo de efetuar as operações concretas. Em outras palavras, recorremos às estruturas pré-operatórias como substrato para as operações concretas que desejamos realizar. Ao completarem a Tabela 1, os alunos terão a Tabela 2 abaixo:

Tabela 2

Valor Inicial	Taxa de juros	Valor do Juro	Valor do Juro ÷ Valor Inicial	Montante Final	Montante Final ÷ Valor Inicial
R$10.000,00	30%	R$3.000,00	0,30	R$13.000,00	1,30
R$10.000,00	25%	R$2.500,00	0,25	R$12.500,00	1,25
R$10.000,00	20%	R$2.000,00	0,20	R$12.000,00	1,20
R$10.000,00	13%	R$1.300,00	0,13	R$11.300,00	1,13
R$10.000,00	7,5%	R$750,00	0,075	R$10.750,00	1,075

Na primeira questão os alunos devem perceber que apenas escreveram a porcentagem em forma decimal. Já na segunda questão é provável que eles percebam o padrão, mas não consigam explicar adequadamente o surgimento do 1, exigindo a intervenção do professor. Uma vez que o padrão tenha sido percebido, conseguirão responder a terceira questão sem maiores dificuldades. Por outro lado, a última questão pode demandar uma atividade complementar, escrevendo outra tabela com capital inicial diferente, para que os alunos se convençam de que o fator não depende do capital inicial, ainda que uma justificativa formal não esteja acessível neste momento.

2.2 Diferenciando Juros Simples e Juros Compostos

Tipicamente, a Matemática Financeira é retomada no 7º ano, quando é feita uma abordagem do regime de juros simples, seguindo o estudo sistemático de proporções. Um aspecto que nos parece decisivo é evitar que o aluno tenha a falsa impressão de que precisa decorar uma fórmula e que, sem ela, ele não será capaz de resolver problemas. Na verdade, a fórmula deve surgir naturalmente, como consequência da aplicação do conceito de proporcionalidade. Aqui já é possível explorar mais profundamente representações gráficas, que serão de inestimável valor quando o aluno precisar trabalhar situações mais complexas, como descontos e séries de pagamentos, no Ensino Médio. A fim de exemplificar este ponto de vista, consideremos o seguinte problema:

Uma pessoa contrai uma dívida de R$ 1.000,00*, sobre a qual serão cobrados juros de* 5*% ao mês. Calcule quanto a pessoa irá pagar de juros:*
a) Após 1 *mês.*

b) Após 2 *meses.*

c) Após 3 *meses.*

d) Após 4 *meses.*

Em seguida, faça uma representação esquemática, usando o gráfico apresentado na Figura 1:

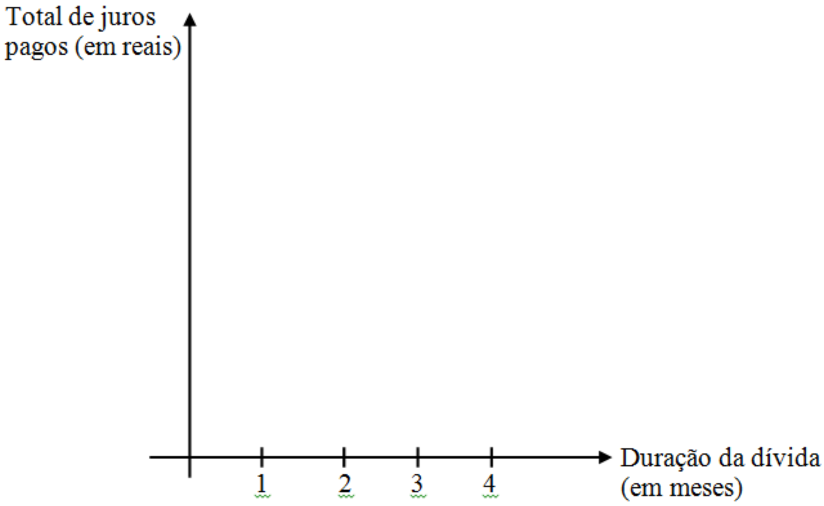

Figura 1

Como é possível que este seja o primeiro contato dos alunos com este tipo de representação, um cuidado especial deve ser tomado. Não devemos esperar que o aluno seja capaz de realizar uma atividade como esta sozinho. Até porque “faça uma representação esquemática” não é uma orientação clara e precisa para ele. Neste sentido, o professor atua na zona de desenvolvimento proximal do aluno, auxiliando-o a identificar os elementos-chave e mobilizar os conhecimentos necessários, para que apresente ao final da atividade um gráfico como o seguinte (Figura 2):

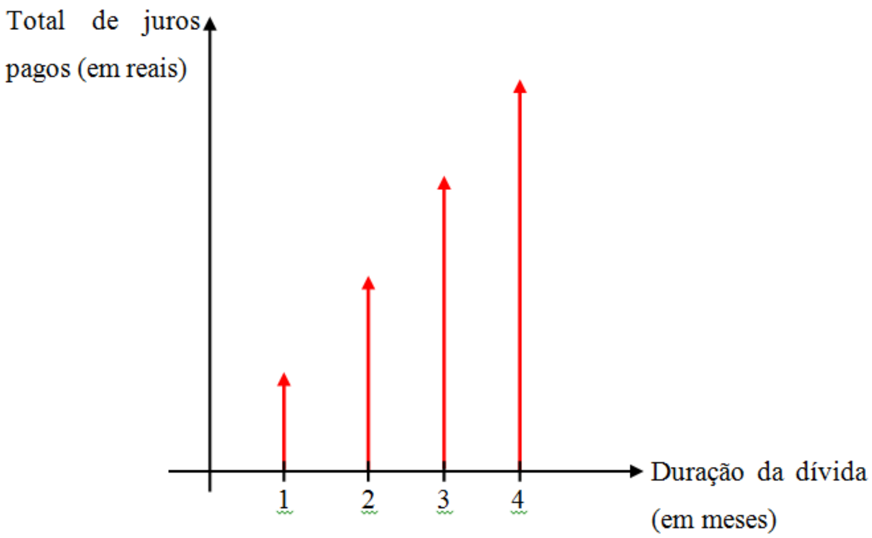

Figura 2

Na discussão sobre o tamanho de cada seta o aluno está usando o conceito de proporcionalidade e isso permitirá que ele possa dar o passo seguinte, obtendo naturalmente a fórmula $J = C \times i \times t$; ou seja, compreendendo que $C \times i$ é o juro de um período e que basta multiplicar este valor pela quantidade de períodos. Neste ponto os alunos já são capazes de expressar taxas percentuais na forma decimal, de modo que não vemos vantagem no uso da expressão com o formato $J = \dfrac{C \times i \times t}{100}$, comumente adotada em diversos livros didáticos. Ao contrário, devemos estimular o aluno a se habituar à representação decimal, que facilitará o uso de dispositivos como calculadoras.

O uso de diagramas de setas constitui uma ferramenta cognitivamente poderosa, uma vez que atua no nível das representações simbólicas, facilitando a sedimentação de conceitos e ideias, anterior a qualquer tentativa de abstração e generalização [13]. Observe-se ainda que tais representações esquemáticas devem ser rotineiramente exploradas, mesmo em etapas mais avançadas, pois favorecem a análise, afastando o aluno de erros comuns (como os que serão explorados adiante em problemas de descontos).

Após explorar diferentes situações envolvendo juros simples, é preciso conceituar os juros compostos. Não há razão para separar o estudo dos dois regimes em séries distintas. A naturalidade com que usamos o conceito de proporcionalidade desde tenra idade faz com que o regime de juros simples seja facilmente compreendido pelas crianças, situação bem diferente da que se observa com os juros compostos. Acima de tudo, há o risco de o aluno interromper os estudos e se tornar incapaz até mesmo de entender situações simples, como a evolução da dívida do cartão de crédito. Evidentemente, não será possível fazer um estudo aprofundado do regime de juros compostos no Ensino Fundamental, mas as ideias centrais podem ser introduzidas, partindo de situações simples, mas relevantes, como esta:

Uma pessoa deixa de pagar a fatura do seu cartão de crédito, no valor de R$ 1.000,00. *Quando isso ocorre, a operadora do cartão cobra juros de* 10% *ao mês. Com estas informações, complete a Tabela 3 e depois coloque os valores no gráfico ilustrado na Figura 3.*

Tabela 3

Quantidade de meses de atraso	Valor da Dívida	Juro Acumulado
1		
2		
3		
4		
5		

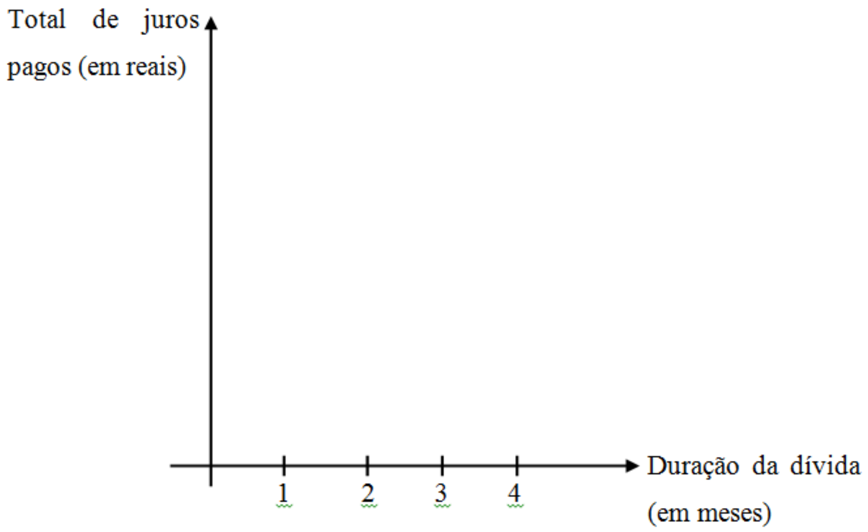

Figura 3

Comparando este gráfico (Figura 3) com o da atividade anterior (Figura 2), você notou alguma diferença?

Preenchendo a tabela e construindo o gráfico, o aluno terá a Tabela 4 e a Figura 4:

Tabela 4

Quantidade de meses de atraso	Valor da Dívida	Juro Acumulado
1	R$1.100,00	R$100,00
2	R$1.210,00	R$210,00
3	R$1.331,00	R$331,00
4	R$1.464,10	R$464,10
5	R$1.610,51	R$610,51

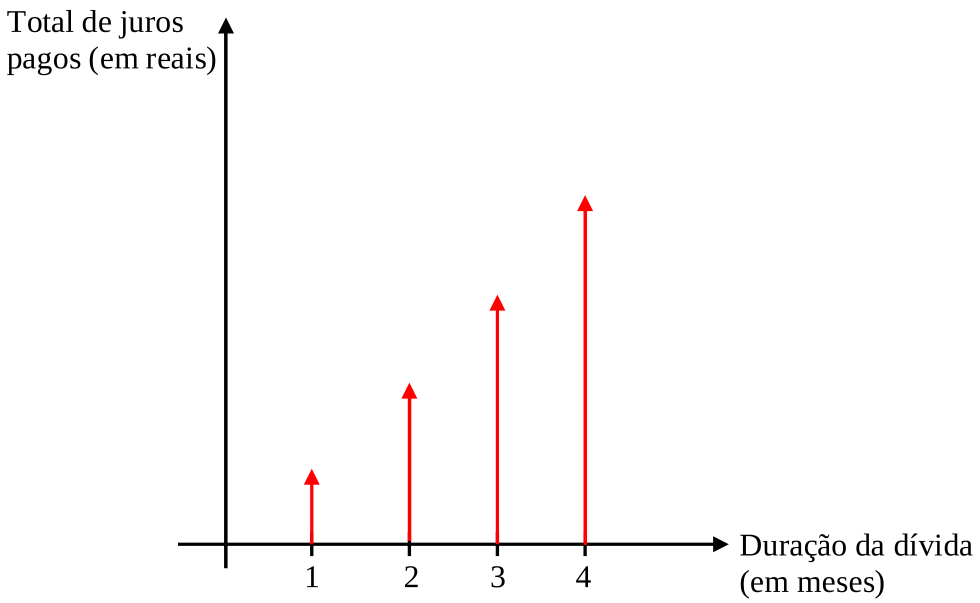

Figura 4

Desejamos que o aluno conclua algo como “No regime de juros compostos, o montante cresce cada vez mais rápido.”. Em um contexto mais avançado, poderíamos dizer que $\lim_{n\to\infty}\frac{(1+i\times n)}{(1+i)^n}=0$ (neste limite, o numerador é o fator que multiplica o capital inicial após um tempo t no regime de juros simples e o denominador é o fator no regime de juros compostos). Ou seja, as representações simbólicas características do período pré-operatório permitem que o aluno especule sobre resultados cujas justificativas formais ainda não estejam ao seu alcance, de modo que, conforme dito anteriormente, as estruturas de um estágio constituem as bases a partir das quais emergirão as estruturas do estágio seguinte.

Este é um momento em que a tecnologia pode ser nossa aliada no processo de ensino-aprendizagem [7]. Ao retirar do aluno a tarefa por vezes enfadonha de realizar cálculos aritméticos em grande quantidade, ela nos permite focar nos conceitos envolvidos, tornando a atividade mais significativa e atraente. Especificamente em situações como esta, calculadoras simples, como as que hoje estão disponíveis em celulares, são suficientes para a consecução de tais objetivos.

Por outro lado, como os juros compostos aparecem na vida das pessoas quase sempre em situações que envolvem dívidas e obrigações, cria-se a sensação de que eles são “errados”, “injustos”, “moralmente inaceitáveis”, etc. Compete ao professor evidenciar a superioridade técnica em relação aos juros simples (no sentido de que no regime de juros compostos a equivalência de capitais pode ser apurada em qualquer data, enquanto no regime de juros simples a mudança da “data focal” pode levar a conclusões distintas), justificando seu uso mais difundido.

2.3 Diferenciando Taxas Nominais e Taxas Efetivas

Outro aspecto da Matemática Financeira que não pode ser ignorado, se desejarmos de fato preparar nosso aluno para as situações do mundo real, é a diferença entre taxas nominais e taxas efetivas [8]. Mais do que uma questão puramente matemática, o que está em jogo aqui é a “comunicação matemática”. Quando um banco anuncia, por exemplo, que trabalha com uma taxa nominal de 30% ao ano, capitalizada mensalmente, podemos até mesmo questionar a idoneidade de tal anúncio, pois é ardil para cobrar taxas efetivamente maiores. A fim de ilustrar, consideremos a seguinte situação:

Um banco realiza um empréstimo no valor de R$1.000,00. Para este tipo de operação, o banco cobra uma taxa nominal anual de 30%, capitalizada mensalmente. Nestas condições, qual é a taxa efetiva anual cobrada?

A construção de uma tabela, registrando mês a mês a evolução da dívida e a posterior comparação com o valor que seria obtido aplicando a taxa nominal de 30% ajudarão o aluno a perceber os propósitos deste tipo prática. Ao final, seria gerada uma tabela como a seguinte (Tabela 5):

Tabela 5

Valor Inicial	R$1.000,00
Valor após 1 mês:	R$1.025,00
Valor após 2 meses:	R$1.050,625
Valor após 3 meses:	R$1.076,891
Valor após 4 meses:	R$1.103,813
Valor após 5 meses:	R$1.131,408
Valor após 6 meses:	R$1.159,693
Valor após 7 meses:	R$1.188,686
Valor após 8 meses:	R$1.218,403
Valor após 9 meses:	R$1.248,863
Valor após 10 meses:	R$1.280,085
Valor após 11 meses:	R$1.312,087
Valor após 12 meses:	R$1.344,889

Que permitiria concluir que a taxa efetiva anual é de quase 35% (portanto, superior ao valor nominal anunciado, acarretando maiores encargos financeiros ao tomador do empréstimo).

Embora esta situação possa ser abordada sem dificuldade apenas com o uso de uma calculadora simples, constitui também excelente oportunidade para introduzir as planilhas eletrônicas. Neste caso, uma discussão importante é sobre a quantidade de casas decimais e as aproximações que o software realiza. O aluno que utilizou a calculadora e fez aproximações até a segunda casa decimal após cada cálculo irá obter um valor final diferente daquele apresentado na planilha, mesmo que as células da planilha estejam formatadas de modo a mostrar somente duas casas decimais. Nem todos os alunos percebem o que ocorreu e esta é uma situação interessante de ser analisada, discutindo com o aluno estratégias e procedimentos que minimizem a propagação de erros.

2.4 Compreendendo o Conceito de Inflação e Perdas Financeiras

Um último aspecto do cotidiano financeiro que precisa ser abordado ainda no Ensino Fundamental é o conceito de inflação e suas implicações na vida das pessoas. Inicialmente, é preciso fazer uma exploração ao nível pré-operatório, em que o aluno apenas intua a inflação como um processo que faz com que o dinheiro perca poder de compra. Nesta etapa, pode ser interessante uma pesquisa sobre o histórico das taxas de inflação no Brasil, com destaque para as taxas elevadas do final da década de 1980 e início da década de 1990. Mesmo sem “matematizar” a questão, o aluno precisa compreender o caráter corrosivo da inflação sobre os salários, o que explica a cobrança feita sobre os governantes em suas políticas de controle inflacionário.

Em seguida, trabalhando com problemas concretos, é possível aritmetizar a discussão. A fim de ilustrar, consideremos a seguinte situação:

Um trabalhador tinha salário de R$ 1.000,00. *No período de um ano, a inflação foi de 25%.*
a) Qual foi a perda de poder aquisitivo de seu salário?
b) Qual deve ser o percentual de reajuste no salário de modo a obter um aumento real de 10%?

Estas questões não são simples e o aluno ainda não dispõe de estruturas mentais adequadas para lidar com elas. Ao recorrer ao pensamento intuitivo, ele tende a responder 25% e 35%, respectivamente. Para tornar acessível o conceito de poder aquisitivo, o professor pode eleger algum produto como referência. Por exemplo, ao assumir que a unidade de algo custava inicialmente R$10,00, o aluno terá:

- Quantidade que podia ser comprada inicialmente: 1000 ÷ 10 = 100.
- Novo valor da mercadoria: 10 + 25% de 10 = 12,50.
- Quantidade que pode ser comprada ao final do período: 1000 ÷ 12,50 = 80.
- Redução do poder de compra: 20%.

Neste ponto o aluno se depara com a equivalência de operações, no sentido piagetiano: uma inflação de 25% é equivalente a uma redução salarial de 20%. Na questão seguinte, o aluno conclui que o aumento real deve ser tal que ele consiga comprar 110 unidades (aumento de 10% sobre as 100 unidades que ele comprava inicialmente). Como agora cada unidade custa R$12,50, o salário deveria alcançar R$1.375,00, o que corresponde a um aumento de 37,5% sobre o salário de R$1.000,00.

Este mesmo problema será retomado mais adiante, com algumas modificações, quando estivermos analisando o contexto possível das operações formais. Mas já aqui é possível fazer variações que levem à compreensão de que as respostas obtidas não dependem do salário inicial nem do valor escolhido como referência monetária.

2.5 Considerações Finais

Para finalizar, façamos um breve comentário sobre as duas últimas séries do Ensino Fundamental. Normalmente, não há nenhum tópico de Matemática Financeira nestas séries. Mas acreditamos que seja possível alterar esta realidade, mediante uma seleção criteriosa dos conteúdos. Neste cenário, alguns tópicos que aqui serão tratados no capítulo referente ao Ensino Médio já podem ser antecipados. Por exemplo, no 9º ano podem-se retomar os juros simples no estudo da função afim (neste regime de capitalização, é afim a função que relaciona montante e tempo). E no estudo de potências podem-se retomar os juros compostos.

Na presente proposta optou-se por um razoável letramento da educação financeira no contexto do Ensino Fundamental. Diversos outros tópicos serão abordados na proposta para o Ensino Médio. Mas entendemos que tal proposta, estando em linha com o projeto político-pedagógico da instituição, o qual respeita e valoriza o contexto social no qual a escola se insere, deve ser adaptada/ampliada, de acordo com as oportunidades e demandas específicas da comunidade escolar.

Capítulo 3 - A Matemática Financeira do Ensino Médio

Neste capítulo discutiremos uma proposta para abordagem de tópicos de Matemática Financeira no Ensino Médio, delineada a partir das seguintes premissas:

- ⇨ Nesta etapa de escolaridade normalmente os alunos já atingiram um nível de abstração que permite extrapolar situações concretas e obter resultados gerais.
- ⇨ Alguns conceitos elementares de Matemática Financeira já foram trabalhados no Ensino Fundamental.
- ⇨ Conceitos matemáticos fundamentais (como funções e progressões) já são familiares.
- ⇨ A crescente disponibilidade de recursos tecnológicos é tal que os alunos utilizam equipamentos como calculadoras e computadores rotineiramente.

Embora algumas questões já tenham sido analisadas anteriormente, vamos tecer algumas considerações sobre os pressupostos acima destacados, de modo a reiterar nosso ponto de vista. Segundo Piaget [2], entre os 12 e os 15 anos, aproximadamente, a criança alcança o período operatório-abstrato, atingindo o ápice do seu desenvolvimento intelectual. Este período se caracteriza pelo raciocínio lógico-matemático e é quando a criança fica livre das referências ao concreto. Retomando a discussão feita no primeiro capítulo, entendemos a inteligência como uma adaptação a novas situações e seguiremos na linha epistemológica construtivista, tal como apresentamos na proposta do capítulo anterior. Tomaremos como ponto de partida as estruturas criadas no Ensino Fundamental, de modo que partiremos sempre que possível de situações-problema concretas, para só em um segundo momento propor generalizações. Em linha com o paradigma pedagógico contido nos Parâmetros Curriculares Nacionais, a resolução de problemas é o fio condutor para o desenvolvimento do conteúdo, a fim de que o aluno seja estimulado a buscar regularidades, elaborar conjecturas e desenvolver a capacidade de argumentação, dentre outras habilidades fundamentais no processo de formação do conhecimento matemático.

Quanto aos conteúdos conceituais desenvolvidos no Ensino Fundamental, assumiremos que os alunos já saibam calcular porcentagens e mesmo efetuar algumas estimativas mentalmente (estas habilidades serão retomadas oportunamente). Suporemos também um entendimento elementar do regime de juros compostos, além de alguma habilidade em manipulações algébricas e uso de fórmulas.

Esta nova etapa de abordagem do conteúdo, em um momento em que o aluno já está razoavelmente familiarizado com o conceito de função, permite aprofundar algumas questões já tratadas anteriormente, estabelecendo conexões importantes. A título de exemplo, analisar a expressão de uma função e concluir que ela é monótona estritamente crescente permitirá que o aluno possa fazer estimativas adequadas em situações como a determinação da taxa de juros cobrada em uma compra a prazo, quando são conhecidas as demais variáveis (valor à vista, valor de cada parcela e quantidade de parcelas).

Por outro lado, retomar a Matemática Financeira logo após o estudo de sequências possibilita que diversas relações importantes sejam obtidas naturalmente, como aplicação direta dos conceitos de progressões geométricas.

Ademais, tal abordagem em espiral vai ao encontro do que preconizam os Parâmetros Curriculares Nacionais [6]:

"Os conteúdos são organizados em função da necessidade de receberem um tratamento didático que propicie um avanço contínuo na ampliação de conhecimentos, tanto em extensão quanto em profundidade, pois o processo de aprendizagem dos alunos requer que os mesmos conteúdos sejam tratados de diferentes maneiras e em diferentes momentos da escolaridade, de forma a serem "revisitados", em função das possibilidades de compreensão que se alteram pela contínua construção de conhecimentos e em função da complexidade conceitual de determinados conteúdos." (página 80)

Por fim, o uso de dispositivos como calculadoras e computadores (em especial, planilhas eletrônicas e ambientes gráficos) propiciará trabalhar com "valores reais", evitando situações artificiais [7]. Outrossim, constitui momento formidável para que o aluno, imerso nesta "era digital", expanda sua visão acerca das possibilidades de uso de tais tecnologias, não se limitando, como costumeiramente observamos, a redes sociais e programas de bate-papo.

3.1 Retomando Conceitos

Feitas estas considerações iniciais, passamos agora à discussão propriamente dita de curso de Matemática Financeira no Ensino Médio. Propomos que esta retomada da Matemática Financeira envolva uma etapa inicial com exploração do concreto e observação da realidade social, pois, de acordo com Piaget, quando aprendemos algo novo, a construção do conhecimento segue a mesma sequência característica do desenvolvimento mental da criança. Assim, a formalização a que se deseja chegar deve ser precedida de atividades que explorem o raciocínio pré-operatório e operatório concreto.

Uma primeira atividade que julgamos pertinente é solicitar que os alunos tragam para a aula recortes de jornais e revistas (inclusive de meios digitais) em que apareçam conceitos fundamentais da Matemática Financeira. Caso os materiais não permitam explorar todas as possibilidades planejadas pelo professor, seu próprio material pode servir de complemento onde for pertinente.

Gráficos (de barras, por exemplo) que mostrem a variação de preço de algum bem permitem diversas considerações. A título de exemplo, colocamos estes gráficos fictícios (Figura 5 e Figura 6), feitos no Microsoft Excel [9]:

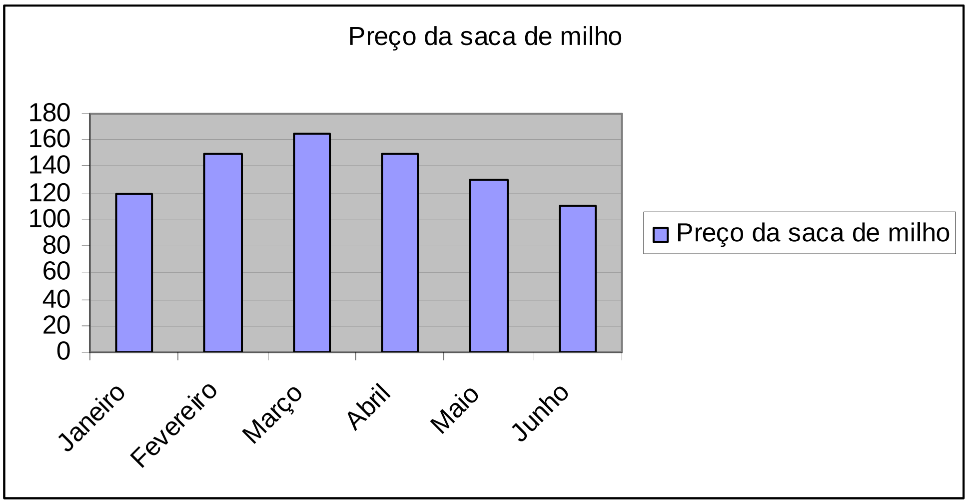

Figura 5

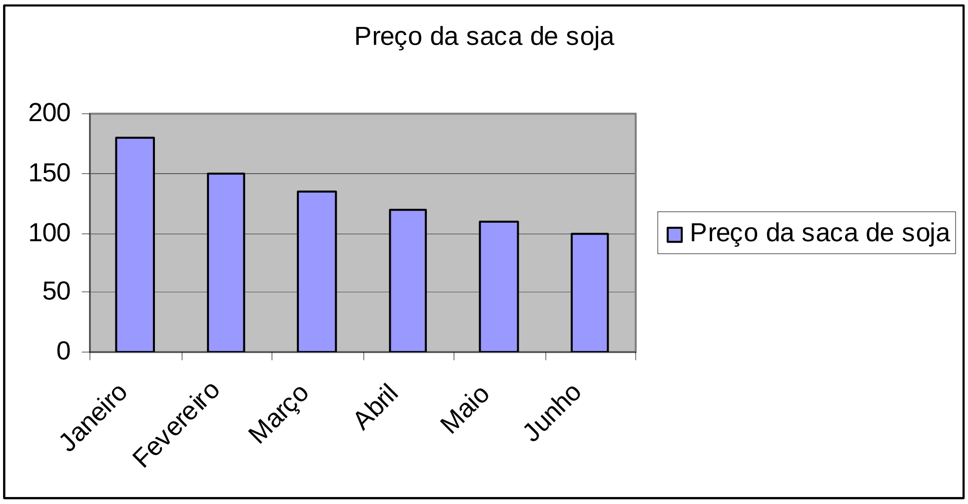

Figura 6

Nos gráficos, os valores não estão bem definidos (por exemplo, no gráfico da Figura 5 o valor de março está ligeiramente acima de 160, mas não há como afirmar com certeza que o valor é 165). Assim, a primeira atividade pode ser explorar a capacidade dos alunos de fazer estimativas.

Feitas as estimativas para os valores fornecidos nos gráficos, retoma-se o cálculo de porcentagens, já explorado no Ensino Fundamental. Tal como propusemos anteriormente, aqui já é possível introduzir o uso de tecnologias; no caso, calculadoras. Embora ainda existam dúvidas sobre como inserir certos recursos didáticos na sala de aula, a resolução de problemas que exigem análises e estimativas é ocasião clara em que a calculadora se apresenta como aliada importante, deixando o aluno livre para executar as atividades intelectuais mais relevantes.

Tradicionalmente, os alunos estão habituados a registrar valores em uma tabela e, a partir dela, construir o gráfico correspondente. Porém, é preciso que adquiram a habilidade de fazer também o caminho inverso, principalmente quando as informações contidas no gráfico devem ser usadas para obter outras, necessárias à análise que se deseja fazer. De posse do gráfico, os alunos criam a Tabela 6 em que registram os valores do gráfico e geram outros. Por exemplo, podem fazer um diagrama de setas com as variações mensais. No caso do primeiro gráfico, teríamos algo como apresentado na Figura 7:

Tabela 6

Mês	Valor	Variação em relação ao mês anterior
Janeiro	120	
Fevereiro	150	25%
Março	165	10%
Abril	150	-9%
Maio	130	-13%
Junho	110	-15%

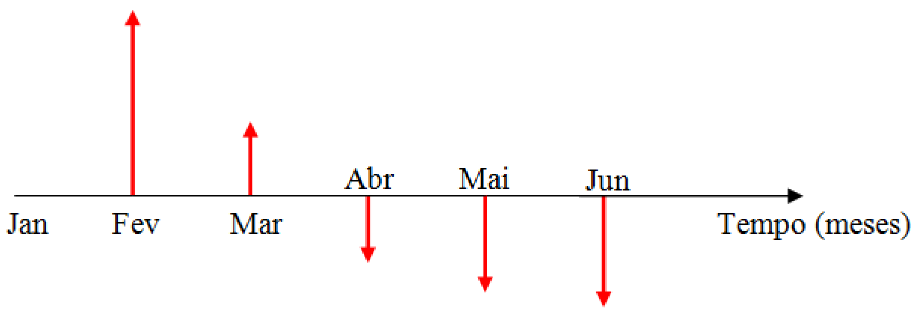

Figura 7

Além da variação mensal, pode-se pedir que os alunos determinem a variação percentual de todo o período em questão. Isso é especialmente válido para que o aluno perceba o “efeito multiplicativo” das variações (o que vai evitar que ele mais adiante acredite que dois aumentos sucessivos de 20% equivalem a um único aumento de 40%).

Outras considerações, que envolvam conceitos não matemáticos, podem ser feitas, de modo a estimular a participação da turma e o desenvolvimento do pensamento crítico. Por exemplo, o que justificaria o aumento do preço nos três primeiros meses do ano e a queda nos meses subsequentes? Esta é uma abordagem essencialmente interdisciplinar, pois os alunos poderão concluir que a variação no preço tem relação com os períodos de colheita, estabelecendo conexões com Geografia e Ciências. Ocorre, então, a transversalidade preconizada nos parâmetros curriculares. A compreensão de fenômenos como a sazonalidade fornece subsídios para um consumo mais consciente, no que concerne tanto aos impactos econômicos como ecológicos.

Visto que o objetivo desta etapa inicial é retomar conceitos já trabalhados anteriormente, a extensão da mesma variará conforme a resposta da turma, confrontada com os objetivos gerais definidos pelo professor. Neste ponto, faz-se necessária uma observação importante: no que segue, iremos considerar sempre o regime de juros compostos, por dois motivos: (*i*) é o regime de capitalização mais usado nas situações reais com as quais o aluno irá se deparar em seu cotidiano, e (*ii*) o estudo de juros simples já foi explorado de modo satisfatório no Ensino Fundamental, apoiado no conceito de proporcionalidade.

Todavia, a retomada de situações que envolvam juros simples, como os juros de mora (taxa percentual que é cobrada quando ocorre o atraso no pagamento de um título, como a conta de energia elétrica), é apropriada em diferentes ocasiões, notadamente quando do uso de softwares gráficos, em que os efeitos da capitalização exponencial, comparada à capitalização linear, podem ser amplamente explorados.

Finalizando esta etapa inicial, é oportuno aprofundar as questões relativas aos diagramas de setas. Essencialmente, há duas situações distintas que precisam ser contempladas: a construção do diagrama e as interpretações de um diagrama dado. Com este propósito, consideremos a seguinte situação:

Um produto pode ser comprado em cinco parcelas mensais de R$* 100,00 *cada, ou em três parcelas de R$ 160,00 *cada. Em ambos os casos, a primeira parcela deve ser paga* 30 *dias após a compra. Elabore diagramas de setas que representem a situação. Em* *seguida, discuta com seus colegas qual das opções de pagamento parece ser mais vantajosa para o comprador.*

Os alunos que já estejam razoavelmente familiarizados com os diagramas não devem ter dificuldades na primeira parte da atividade e devem apresentar algo como os gráficos da Figura 8 e da Figura 9.

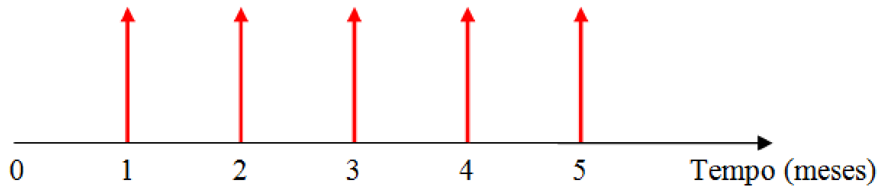

Figura 8

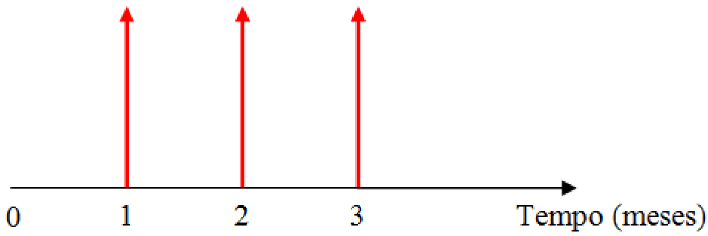

Figura 9

No entanto, a segunda parte da atividade se configura num desafio de maior nível cognitivo, sendo capaz de promover discussões e reflexões que contribuirão na formação de estruturas mentais necessárias para se atingir os objetivos gerais. Neste momento do trabalho, é preciso um cuidado especial, diante da impossibilidade de uma resposta precisa. A rigor, seria necessário determinar qual taxa de juros torna estes dois fluxos de caixa equivalentes e, em seguida, compará-la com a taxa disponível para o comprador do produto. Mas tal discussão ainda está bem além do que os alunos podem fazer com as ferramentas que possuem. O mais interessante aqui é que os alunos percebam como o fator tempo influencia nas análises de alternativas financeiras e também quebrar a "tradição" de trabalhar em sala de aula somente problemas "fechados", em que todas as informações necessárias estão disponíveis no enunciado. É de se esperar, por exemplo, que algum aluno apresente um argumento como o seguinte:

Na primeira alternativa eu tenho que desembolsar mais dinheiro que na segunda, mas em um prazo maior. Então, enquanto a parcela não vence, posso deixar o dinheiro no banco, ganhando juros que talvez compensem o valor nominal maior.

Mais adiante, quando do uso de planilhas eletrônicas, este problema pode ser retomado, de forma que os alunos possam fazer explorações, buscando a solução por tentativas, até obter a taxa de juros que iguale os dois fluxos. Esta é precisamente a solução da equação

$$\frac{100}{(1+i)}+\frac{100}{(1+i)^2}+\frac{100}{(1+i)^3}+\frac{100}{(1+i)^4}+\frac{100}{(1+i)^5}=\frac{160}{(1+i)}+\frac{160}{(1+i)^2}+\frac{160}{(1+i)^3}.$$

Como se trata de uma equação polinomial de quarto grau, pode ser oportuno fazer uma discussão sobre a importância que a busca por fórmulas fechadas para a resolução de equações polinomiais teve no desenvolvimento da Matemática. Embora não seja possível se aprofundar na questão, os alunos podem pelos menos tomar ciência de que hoje está devidamente provado que tal procedimento não é possível para equações de grau maior que 4, o que justifica o uso dos métodos iterativos. Esta postura é pertinente na medida em que os alunos não costumam ter clareza sobre a adequação de resoluções por tentativas. Outra questão, bem mais sutil, é o fato de a equação possuir solução única. Aqui, pode-se buscar uma justificativa no próprio problema que originou a equação, uma vez que taxas de juros diferentes produzem montantes diferentes em um mesmo período de tempo e, evidentemente, estamos assumindo que i é um real positivo (no caso, aproximadamente 4,3%).

3.2 Formalizando Conceitos – Uso da Álgebra

Uma vez que tenham sido revisitados os conceitos elementares, estamos em condições de avançar, já nos valendo da maior familiaridade do aluno com a Álgebra elementar e com o raciocínio abstrato. Introduz-se então o conceito de “fator de capitalização” [8]. Em essência, este conceito já havia sido explorado no Ensino Fundamental, ao trabalhar com porcentagens. Não obstante, é natural que alguns alunos não percebam tão facilmente que, por exemplo, para acrescentar 20% a uma quantia, basta que ela seja multiplicada por 1,2. Assim, o que propomos nesta etapa é uma formalização deste conceito, nos seguintes termos: se uma quantia sofre um acréscimo de x %, o novo valor é obtido multiplicando o valor inicial pelo fator $\left(1+\frac{x}{100}\right)$. Alguns exemplos numéricos, já conhecidos dos alunos, podem ser propostos, preparando o terreno para que eles mesmos concluam que, sendo Q a quantia inicial, então:

$$Q + x\%\ de\ Q \ = \ Q + \frac{x}{100} \times Q \ = \ Q \times \left(1+\frac{x}{100}\right)$$

No desenvolvimento acima, exploramos o conceito de fatoração, cuja importância quase nunca é percebida pelos alunos, em parte devido ao tratamento quase sempre estéril que damos a ele no Ensino Fundamental. Observando alguns planos de curso e livros didáticos, nota-se que o estudo de fatoração e produtos notáveis, típico do 8º ano do Ensino Fundamental, tem perdido importância, o que pode ser entendido como uma natural dificuldade em conciliá-lo com as atuais diretrizes curriculares. Portanto, situações como esta acima servem para evidenciar sua importância e precisam ser valorizadas.

Neste ponto, algumas atividades de cálculo mental já podem ser propostas, retomando conceitos já amplamente discutidos no Ensino Fundamental. Este trabalho com números é importante na medida em que os alunos devem desenvolver capacidade de estimativa, tornando-se capazes de lidar com valores aproximados, conforme a situação e as ferramentas disponíveis. Exemplificamos com duas situações-problema:

Situação 1:

João foi promovido na empresa em que trabalha. Com isso, seu salário, que atualmente é de R$ 1.100,00, *sofrerá um reajuste de* 27%. *O novo salário estará próximo de qual dos valores abaixo?*

a) R$ 1.200,00

b) R$ 1.300,00

c) R$ 1.400,00

d) R$ 1.450,00

Diante da possibilidade de uso de uma calculadora, ou mesmo de efetuar o cálculo com lápis e papel, é lícito nos questionarmos sobre o real valor deste tipo de atividade. Mas o objetivo, ao lidar com este tipo de problema, é que o aluno se torne apto a avaliar a ordem de grandeza de resultados de cálculos e medidas. Em outras palavras, é preciso reconhecer que em muitas situações é suficiente ter, pelo menos em um primeiro momento, apenas uma noção razoável dos valores envolvidos, e não o valor exato. Em uma atividade assim estamos mais interessados no processo do que no resultado final e, ao evidenciarmos a importância de se expressar de forma clara e correta, o aluno deve ser estimulado a expor oralmente sua estratégia de resolução. Espera-se que os alunos raciocinem mais ou menos da seguinte maneira:

1º) iniciar calculando mentalmente 10% de 1.100;

2º) aproximar o percentual de aumento para 30%, obtendo 330 reais de aumento;

3º) concluir que a resposta correta deve ser um valor ligeiramente menor que R$1.430,00; ou seja, concluir que o novo salário é de aproximadamente R$1.400,00.

Situação 2:

Um aluguel que custava R$* 650,00 *passou a custar R$ 750,00*. O percentual de aumento está mais próximo de qual dos valores abaixo?*

a) 10%

b) 15%

c) 20%

d) 25%

Ao propormos um problema, precisamos ter clareza quanto ao desafio que ele representa para o aluno. Do ponto de vista cognitivo, há uma dificuldade maior nesta segunda situação, comparada à anterior. No primeiro problema o aluno conhecia o percentual de reajuste e o valor sobre o qual este percentual iria incidir. Assim, ele podia fazer ajustes sucessivos, refinando os valores obtidos sem maiores dificuldades. Aqui, no entanto, ele conhece apenas os valores inicial e final (e não esperamos, ainda, que ele faça $i = \frac{750}{650} - 1$ ou algo equivalente). Será necessário, portanto, estabelecer uma estratégia de resolução, prever resultados, validar a estratégia e argumentar. Podemos considerar que o problema foi atacado com eficiência se o aluno for capaz de formular uma proposta de resolução semelhante à seguinte:

1º) calcular 10% de 650, observando que com este percentual o novo valor seria de R$ 715,00;

2º) observar que 20% de aumento levaria o novo valor ao patamar de R$ 780,00;

3º) perceber que 750 é um valor próximo da média aritmética de 715 e 780, concluindo que o percentual de reajuste deve ser algo próximo a 15%.

O conceito de fator de capitalização é o germe da conhecida fórmula para o montante no regime de juros compostos. Portanto, os alunos estão em condições de intuir a fórmula para o montante no regime de juros compostos. Mas, antes de obter a fórmula para o caso de taxas constantes, convém trabalhar alguma situação em que as taxas são variáveis, como a situação-problema colocada a seguir:

A fim de avaliar a evolução do poder de compra de seu salário, um trabalhador fez um levantamento dos reajustes recebidos nos últimos 5 *anos, conforme a Tabela 7. De posse destas informações, ele agora deseja saber qual foi o reajuste total do período.*

Tabela 7

Ano	Percentual de Reajuste
2009	7%
2010	9%
2011	6%
2012	9%
2013	8%

Aplicando sucessivamente o fator de capitalização, ele obtém:

- ⇨ Salário "inicial" (antes do aumento de 2009): *S*.
- ⇨ Salário após o aumento de 2009: $S\times\left(1+\frac{7}{100}\right)$.
- ⇨ Salário após o aumento de 2010: $S\times\left(1+\frac{7}{100}\right)\times\left(1+\frac{9}{100}\right)$.
- ⇨ Salário após o aumento de 2011: $S\times\left(1+\frac{7}{100}\right)\times\left(1+\frac{9}{100}\right)\times\left(1+\frac{6}{100}\right)$.
- ⇨ Salário após o aumento de 2012:

$$S\times\left(1+\frac{7}{100}\right)\times\left(1+\frac{9}{100}\right)\times\left(1+\frac{6}{100}\right)\times\left(1+\frac{9}{100}\right).$$

⇨ Salário após o aumento de 2013:

$$S\times\left(1+\frac{7}{100}\right)\times\left(1+\frac{9}{100}\right)\times\left(1+\frac{6}{100}\right)\times\left(1+\frac{9}{100}\right)\times\left(1+\frac{8}{100}\right).$$

Efetuando os cálculos indicados, ele obtém $1{,}455\times S$, aproximadamente. Portanto, o aumento total no período em questão foi de 45,5% (mais uma vez, aproveitemos a oportunidade para reforçar o efeito multiplicativo dos acréscimos sucessivos).

Observemos que o ponto de partida foi o caso geral, com taxas diferentes. Do ponto de vista da construção do pensamento, esta sequência é mais indicada que aquela que vemos em muitos livros, que iniciam já com o caso particular em que a taxa é constante. Procedendo assim, preparamos os alunos cognitivamente tanto para entender *intuitivamente* o contexto hoje avançado de finanças em que as taxas de juros são variáveis aleatórias (e, portanto, não constantes no tempo), quanto para o tratamento teórico-algébrico da situação em que a taxa é constante. Este último caso surge naturalmente e pode ser explorado a partir de um problema típico como o seguinte:

Uma pessoa contraiu uma dívida no valor de R$ 1.000,00*, sobre a qual incidirão juros de* 2% *ao mês.*

a) Qual será o montante da dívida após 1 *mês?*
b) E após 2 *meses?*
c) E após 3 *meses?*
d) Para obter o valor da dívida em um determinado mês, basta multiplicar o valor da dívida no mês anterior por quanto?
e) Usando a resposta do item anterior, qual seria a expressão para a dívida após um período de n *meses?*

Os três primeiros itens envolvem procedimentos simples, que os alunos já devem saber executar. Mas o quarto item exige um cuidado especial, pois é a partir dele que os alunos chegarão à fórmula do montante, no item seguinte.

O último item é, sem dúvida, o mais interessante e “perigoso”, pois nele, essencialmente, o aluno vai usar o Princípio de Indução Finita. Talvez já tenha sido feita uma discussão adequada quando da obtenção das fórmulas de progressões. Sendo este o caso, um tratamento mais rigoroso não deve criar dificuldades. Caso contrário, é conveniente discutir um pouco mais detidamente a validade do raciocínio empregado. Nesta etapa da escolaridade, o aluno é capaz de especular acerca de muitas situações, percebendo padrões numéricos, por exemplo. Mas ainda não costuma fazer uma distinção clara entre padrões observados em algumas situações particulares e demonstrações, em que ele de fato generaliza um resultado para o qual talvez tenha sido guiado por sua intuição.

3.3 Usando o Computador: Ambientes Gráficos e Planilhas

Este é um momento oportuno para explorar os recursos computacionais disponíveis. O computador, enquanto recurso pedagógico, não deve ser visto como um fim em si mesmo, de modo que as atividades envolvendo seu uso fiquem desconectadas das atividades “tradicionais” [7]. Ao contrário, seu uso deve ser requerido sempre que o professor entender que há ali uma oportunidade de potencializar a aprendizagem. Especificamente neste momento, há duas possibilidades interessantes, distintas porém complementares: o uso de planilhas eletrônicas e o uso de ambientes gráficos.

Ambientes gráficos, como o Graphmatica [10], permitem explorar aspectos importantes de funções, que não são tão simples de serem observados usando somente papel e lápis. No caso da fórmula de juros compostos, $M = C \times (1+i)^t$, supondo que o capital inicial seja uma constante, podem ser exploradas duas situações distintas: *M* em função de *i* e *M* em função de *t*. Diversas questões podem ser propostas:

- ⇨ Que tipo de função relaciona *M* e *t*?
- ⇨ A função que relaciona *M* e *t* é crescente ou decrescente? Em que situações?
- ⇨ Qual a condição para que a função que relaciona *M* e *i* seja crescente em todo seu domínio?

Para que o uso do computador se justifique, as questões propostas devem ser suficientemente desafiadoras, de modo que os alunos não se sintam em condições de respondê-las rapidamente sem seu uso, mas que tenham nele de fato um aliado útil, que possa ser usado para validar as hipóteses formuladas.

Ao fazer uso de recursos computacionais, características importantes das funções podem ser exploradas, articulando diferentes formas de representação, o que permite uma abordagem não apenas quantitativa, mas, sobretudo, qualitativa [7]. Por exemplo, quando do estudo da função exponencial, é provável que características como a monotonicidade tenham sido abordadas (com uma terminologia apropriada ao segmento). Mas outros aspectos da função exponencial, como a taxa de variação, embrião do conceito de derivada, talvez não tenham sido suficientemente explorados. Aqui esta discussão pode ser facilmente retomada, uma vez que os alunos disponham dos gráficos, objetivando inicialmente apenas intuir algo como "a função cresce cada vez mais rápido". Além disso, ao traçarem diferentes gráficos em um mesmo sistema de coordenadas, eles podem apreciar o efeito causado por uma pequena variação na taxa de juros. No gráfico da Figura 10 plotamos as funções $y = 100 \times (1 + 0{,}01)^x$ e $y = 100 \times (1 + 0{,}015)^x$. A análise dos gráficos da Figura 10 leva ao entendimento de que neste tipo de situação não só a taxa de juros é relevante, mas também o período da operação.

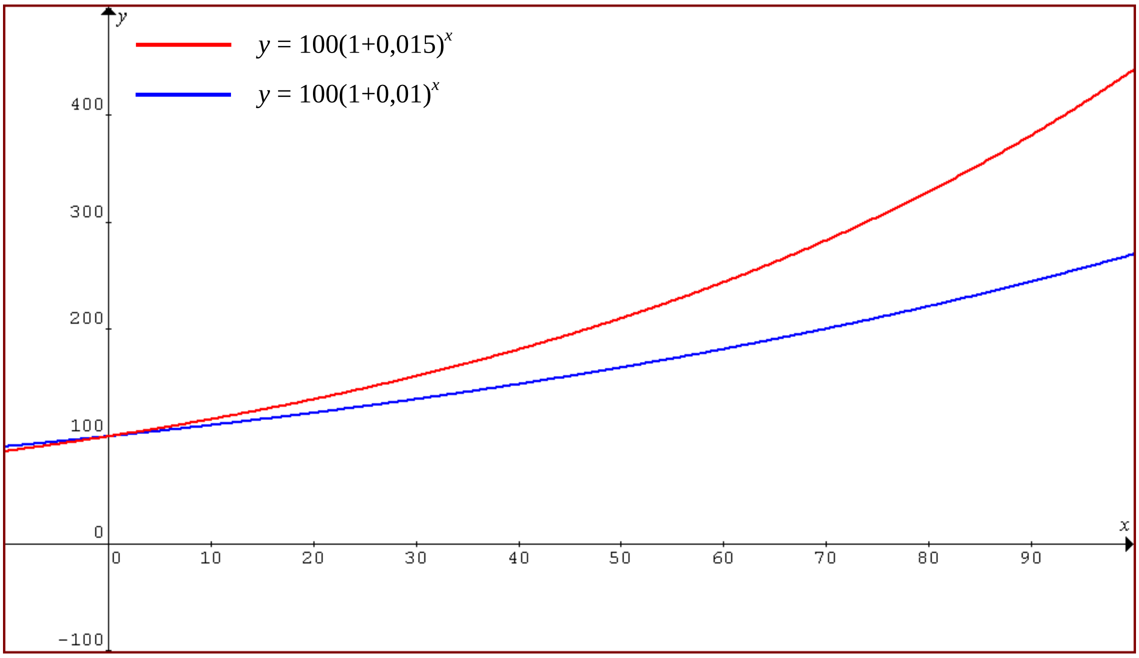

Figura 10

Neste momento pode-se retomar também a diferenciação entre os regimes de capitalização, com o ambiente gráfico consistindo em um aliado importante para evidenciar aspectos relevantes, como o fato de o regime de juros simples gerar montantes maiores que o regime de juros compostos para períodos inferiores a uma unidade de tempo. Na Figura 11 se encontram os gráficos que fornecem o montante nos dois regimes (para um valor inicial de uma unidade monetária e taxa de 100% por período):

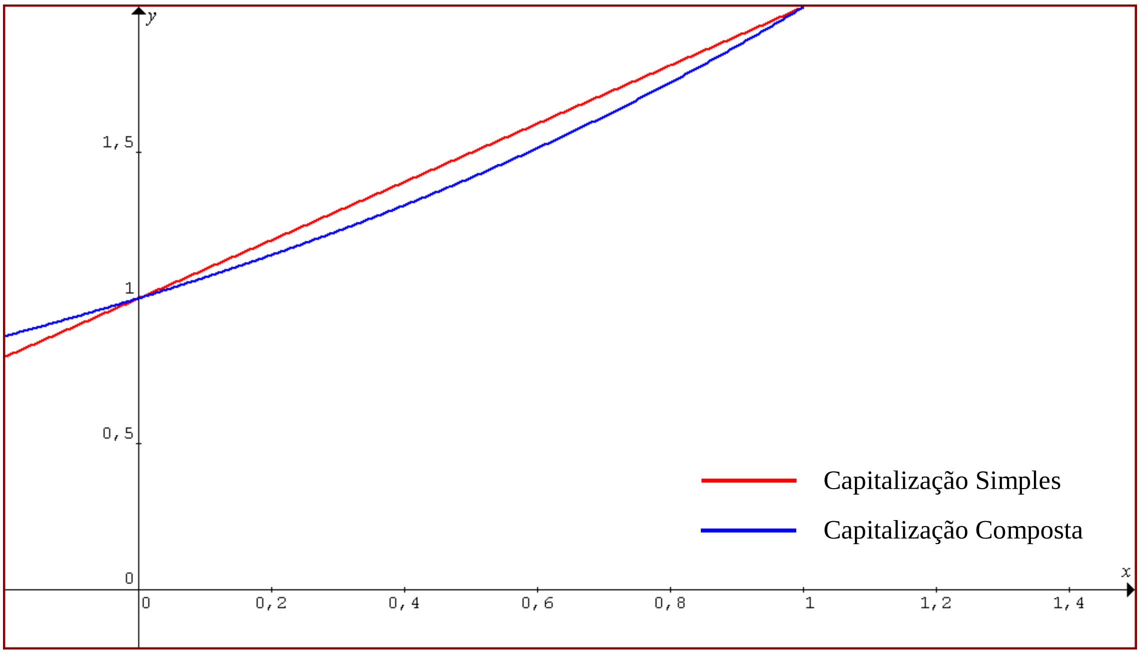

Figura 11

Um aspecto importante no uso de ambientes gráficos é a seleção adequada da janela de visualização. Como os valores são próximos, se as escalas dos eixos não forem selecionadas adequadamente, pode não ser possível visualizar o que se deseja.

Outra ferramenta que oferece aplicações pedagógicas interessantes são as planilhas eletrônicas, como o Microsoft Excel [9]. Embora estas planilhas disponibilizem funções específicas para Matemática Financeira, pedagogicamente vale a pena postergar seu uso por um tempo, a fim de explorar também as dificuldades que surgem, mesmo quando dispomos de recursos computacionais poderosos. No caso da fórmula de juros compostos especificamente, há uma situação que merece atenção: quando é desconhecido o tempo. Para nortear a discussão, vejamos um exemplo:

Maria investiu R$* 10.000,00 *em um fundo de investimentos e deseja fazer o resgate do seu capital quando ele atingir o montante de R$ 20.000,00*. Se ela supuser uma taxa de juros de aproximadamente* 1*% ao mês, deve considerar que o dinheiro não será resgatado por pelo menos quanto tempo?*

Ao substituírem os dados do problema na fórmula, os alunos terão a seguinte equação:

$$20.000 = 10.000 \times (1 + 0{,}01)^n$$

E após uma manipulação elementar obterão $1{,}01^n = 2$. Neste momento, é razoável esperar que alguns alunos finalizem a resolução por tentativas, assumindo que a solução deve ser um número natural. Mas mesmo dispondo de uma calculadora perceberão este processo como ineficiente, oferecendo oportunidade de intervenção do professor. Por outro lado, é provável também que alguns se lembrem das técnicas de resolução de equações exponenciais e terão então a ideia de recorrer aos logaritmos. Mas mesmo este procedimento pode levar a algumas dificuldades. Pode, por exemplo, ocorrer o seguinte:

$$1{,}01^n = 2$$

$$\log 1{,}01^n = \log 2$$

$$n \cdot \log 1{,}01 = \log 2$$

$$n \cdot 0{,}004 = 0{,}301$$

$$n = 75{,}25$$

No entanto, $1{,}01^{75} \cong 2{,}11$ e $1{,}01^{70} \cong 2{,}01$, de modo que 70 meses é a resposta mais adequada. Qual foi, então, a falha do procedimento? Como os valores usados foram obtidos pelos próprios alunos usando calculadoras, é de se esperar que eles percebam que o problema reside no uso de aproximações. Porém, reconhecer a necessidade de usar valores aproximados implica em reconhecer a importância de saber a natureza dos números com os quais opera. A ocasião permite retomar a discussão sobre conjuntos numéricos, uma vez que a extensão dos racionais para os reais, feita em algum momento do Ensino Fundamental, costuma se dar sem maiores justificativas.

Especificamente: log 2 e log 1,01 são números irracionais e na resolução acima fizemos uma aproximação por racionais. Mas como um aluno de Ensino Médio poderia justificar a afirmação “O logaritmo de 2 na base 10 é um número irracional.”? Embora seja um ponto delicado, não há razão para ser evitado. De alguma forma, será preciso estabelecer a continuidade da função logarítmica. De posse desta informação, o aluno pode concluir que log 2 é irracional usando uma prova por contradição. Em muitas ocasiões, premidos pelo tempo, omitimos até mesmo demonstrações de resultados importantes e que estão ao alcance dos alunos. Sobre este ponto, destacamos as recomendações do Professor Elon Lages Lima [11]:

“Provar o óbvio transmite a falsa impressão de que a Matemática é inútil. Por outro lado, usar argumentos elegantes e convincentes para demonstrar resultados inesperados é uma maneira de exibir sua força e sua beleza. As demonstrações, quando objetivas e bem apresentadas, contribuem para desenvolver o raciocínio, o espírito crítico, a maturidade e ajudam a entender o encadeamento lógico das proposições matemáticas.” (página 32)

De modo geral, sabemos que definir se um determinado número real é ou não racional não é uma questão simples. Mas alguns casos particulares simples são acessíveis a um aluno do Ensino Médio e o coloca em contato com técnicas importantes para atacar problemas matemáticos mais complexos.

3.4 Aprofundando a Discussão Sobre Inflação

A inserção no mundo social, preconizada pela LDB, enseja ainda uma discussão mais detida sobre inflação e outras questões, a ela relacionadas. Iniciamos a discussão com o seguinte fragmento do PCN [6], quando discute a seleção de conteúdos:

“O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência.” (página 43)

Além da óbvia contextualização, esta abordagem é essencialmente interdisciplinar, uma vez que conceitos básicos de Economia são tradicionalmente trabalhados em Geografia. Ao trilhar este caminho interdisciplinar, o professor favorece o desenvolvimento de importantes competências, como “desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real” [6].

Compreender o conceito de inflação, ainda que de forma rudimentar, é imprescindível para que o futuro cidadão possa se posicionar adequadamente perante questões que afetam diretamente sua vida. Por exemplo, rotineiramente vemos notícias, na mídia de massa, relacionando o controle da inflação com alterações nas taxas de juros. Que associação entre estas variáveis pode ser estabelecida por um cidadão com formação básica? Mais importante ainda: o poder público poderia dispor de outros instrumentos para combater a inflação? Quais seriam? Levar o aluno a compreender que há uma gama de alternativas possíveis e que as escolhas feitas refletem necessariamente posicionamentos político-ideológicos é um dever do qual a escola não pode se eximir.

Uma situação-problema que pode ser usada para desencadear a discussão pode ser resumida no seguinte problema:

Em um período em que a inflação foi de 20%, qual deve ser o percentual de aumento no salário de um trabalhador de modo que ele tenha um aumento real de 5%?

Sobre esta situação, que já havia sido explorada no Ensino Fundamental, convém fazer algumas considerações. Assumindo os pressupostos da teoria piagetiana, nossa abordagem inicial atuou no nível das operações concretas. Agora é preciso avançar no sentido das operações formais, de modo a obter resultados gerais. Uma diferença importante entre os enunciados é que aqui não fornecemos o valor inicial do salário, de modo que o aluno chegará, como resultado imediato da sua resolução, à conclusão de que a resposta do problema é independente desta variável.

É natural, e o professor não deve desencorajar esta conduta, que o aluno chegue à resposta correta tomando valores particulares. É com este procedimento que o aluno perceberá um padrão e, então, será capaz de generalizar, seguindo um procedimento como o seguinte:

⇨ Indicando por S o salário inicial, se não houvesse inflação, o novo salário, de modo a garantir um aumento real de 5%, seria $S + 5\%\ de\ S = 1{,}05S$.

- ⇨ Como a inflação corrói o poder de compra, precisamos aplicar outro reajuste, apenas de modo a "anular" o efeito da inflação. Com isso, o novo salário passa a ser $1{,}05S + 20\%\ de\ 1{,}05S = 1{,}2 \cdot 1{,}05S = 1{,}26S = S + 26\%\ de\ S$.

Embora a ênfase em manipulações algébricas já não mereça o destaque que teve no passado, isso não deve ser confundido com menosprezo à capacidade de se exprimir em linguagem matemática. Novamente temos oportunidade de retomar conceitos anteriores (no caso, "expressões algébricas"), ao solicitar que os alunos generalizem a situação: qual deve ser o percentual x de aumento sobre o salário para que haja um aumento real de y % em um período em que a inflação foi de z %? Compreender e valorizar o poder da Álgebra faz parte da formação do aluno do Ensino Médio, uma vez que tal habilidade está intimamente relacionada à sua capacidade de resolver problemas, descrever modelos e definir estratégias de intervenção no mundo real. Ao final, o aluno deve concluir que $1+\frac{x}{100}=\left(1+\frac{y}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{z}{100}\right)$, passando a dispor de uma relação geral que pode ser aplicada em qualquer situação equivalente.

Por fim, uma nota sobre a "ordem de grandeza" da inflação. Pessoas de mais idade, que viveram a época da "hiperinflação", tendem a achar que a inflação nos patamares atuais não afeta muito drasticamente suas vidas. Evidentemente, esta percepção equivocada precisa ser desconstruída. Eis, então, outra ocasião em que os recursos computacionais podem ser utilizados, com gráficos que expressem a inflação acumulada, destacando o efeito do tempo.

Uma problematização pertinente e atual é a disputa judicial sobre a correção do FGTS. Os gráficos da Figura 12 mostram o que ocorre em um período de 15 anos em que um capital no valor de R$ 100,00 é atualizado a taxas de 3% ao ano e 6% ao ano (valores aproximados das taxas de correção do FGTS e da caderneta de poupança):

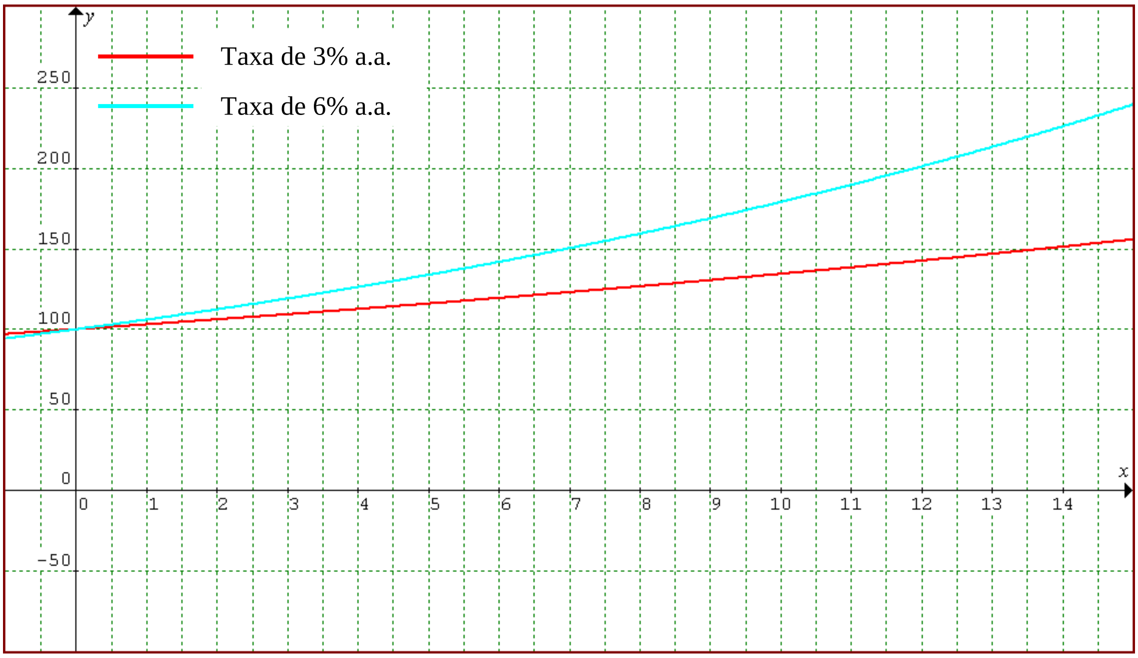

Figura 12

Após um período de 15 anos, a correção a uma taxa anual de 3% produz um montante de aproximadamente R$ 156,00 enquanto a correção a 6% produz um montante de aproximadamente R$ 240,00. Ou seja, se tomarmos o rendimento da caderneta de poupança como uma referência aceitável, há uma perda de aproximadamente 35%. Simplesmente alterando a janela de visualização, os alunos compreenderão facilmente o motivo da disputa: a diferença ultrapassa os 100% em 30 anos!

Cabe aqui uma ressalva: é bastante provável que muitos alunos não saibam exatamente o que é o FGTS. Se nossa proposta de educação é fundamentalmente voltada para a formação do cidadão, um trabalho de pesquisa complementar (“Quando foi criado o FGTS?”, “Quais são suas finalidades?”, “Sob que argumentos se apoiam os critérios de correção?”) pode ser associado.

3.5 O Desafio Cognitivo de Operar com Descontos

Até o momento nos ocupamos basicamente de problemas que envolvem aumentos, visto que constituem grande parte das situações com as quais lidamos no cotidiano (nossos salários são reajustados, as dívidas contraídas crescem etc.). Do ponto de vista da aprendizagem, os descontos consistem em uma situação diferente, pois o percentual de desconto anunciado normalmente não coincide com a taxa de juros efetivamente cobrada. Ocorre que em grande parte das situações é utilizado o chamado "desconto por fora", em que o desconto incide sobre o valor nominal, acarretando maiores encargos financeiros. É natural, então, que o aluno cometa algumas falhas ao tentar aplicar aqui os conceitos desenvolvidos anteriormente. A título de ilustração, a seguinte questão foi aplicada a um grupo de alunos de 1º ano do Ensino Médio:

Uma pessoa possui uma dívida, que vence daqui a 60 *dias, no valor de R$* 2.500,00, *mas pode quitá-la hoje, mediante o pagamento de R$* 2.250,00. *Qual é a taxa de juros que está embutida nesta operação?*

A maior parte dos alunos apresentou respostas como:

"Foi cobrada uma taxa de juros de 10%."

O raciocínio utilizado é evidente: como o valor previsto inicialmente era de R$ 2.500,00, os alunos o utilizaram para dar a resposta ($R\$250,00 = 10\%\ de\ R\$2.500,00$). Este é um erro comum e pode induzir a tomadas de decisão equivocadas, de modo que a dinâmica dos descontos precisa ser bem compreendida pelos alunos. Mais uma vez optamos pelos diagramas de setas, tirando proveito dos esquemas mentais e representações simbólicas já familiares aos alunos (ver a Figura 13).

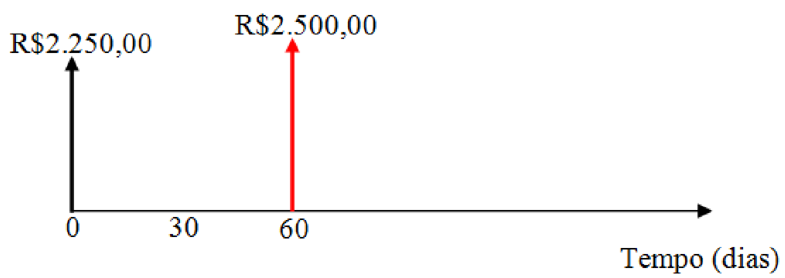

Figura 13

Embora desejemos uma resolução algébrica, novamente recorremos a Piaget, pois são estas estruturas simbólicas, características do período pré-operatório, que permitirão surgir as estruturas algébricas típicas do período formal. Seguindo-se a uma discussão adequada, mediada pelo professor, os alunos devem concluir que o valor atual da dívida é de R$2.250,00 e é sobre ele que serão cobrados juros, de maneira que:

$$2.250 + x\% \; de \; 2.250 = 2.500$$

$$x \cong 11{,}11\%$$

Esta relação entre valor presente e valor futuro já vem sendo de alguma forma explorada desde o Ensino Fundamental, dentro do princípio de trabalhar os conceitos por aproximações sucessivas, e convém agora estabelecer uma notação adequada para ela, seguindo a tradição:

$$VF = VP \times (1 + i) \qquad (1)$$

(Onde *VF* é o valor futuro, *VP* é o valor presente e *i* é a taxa de juros do período.)

Introduzir uma notação conveniente neste ponto permite que os alunos se familiarizem com seu uso, evitando que a notação se transforme em obstáculo ao aprendizado quando forem abordadas as séries de pagamentos. Porém, é necessário também enfatizar que a taxa de juros se refere a um período de tempo (no caso do exemplo, 2 meses), abrindo caminho para a discussão do conceito de taxas equivalentes.

Mais do que simplesmente serem capazes de calcular a taxa efetiva a partir do desconto, os alunos precisam desenvolver a capacidade de mobilizar este conteúdo para fazer uma leitura adequada de situações cotidianas, percebendo como as expressões matemáticas se articulam com a linguagem materna. Uma situação real que motiva a participação ativa dos alunos é a discussão sobre os anúncios de promoções veiculados pelo comércio. Ao serem questionados sobre o real significado de uma propaganda que anuncia um desconto de 70%, os alunos são levados a refletir, formular hipóteses e argumentar. Ao assumirem a hipótese de que o comerciante não aceita obter prejuízo na venda, ainda que concedendo desconto, eles acabam por concluir que tal comunicação não passa de uma estratégia publicitária simplória e este entendimento fortalece o desenvolvimento de uma "consciência de consumo", tema transversal que estabelece uma conexão entre a Matemática e outros saberes escolares.

3.6 Taxas Equivalentes

O fato de trabalharmos com variações exponenciais, quando lidamos com juros compostos, dificulta a avaliação de taxas referenciadas em períodos diferentes. Por exemplo, dificilmente uma pessoa sem formação mínima em Matemática Financeira desconfiaria que uma taxa de 10% ao mês equivale a uma taxa de mais de 200% ao ano. Ainda que entendam que se trata de "juros sobre juros", a maior parte das pessoas tende a fazer $12 \times 10\%$ e apenas especula que a taxa real deve ser *um pouco maior* que 120%. Embora o entendimento de que no regime de juros compostos o montante "cresce cada vez mais rápido" envolva implicitamente o conceito de derivada, estando, portanto, fora do escopo do Ensino Médio, esta característica pode ser explorada usando gráficos, conforme mencionado anteriormente. Retomar este conceito é pertinente aqui, uma vez que seu entendimento fornece o ferramental teórico necessário para que o aluno compreenda a importância de se evitar dívidas com prazos excessivamente longos (as tais "prestações que cabem no seu bolso"). Para destacar este efeito, propomos a seguinte atividade:

Uma pessoa investe R$ 1.000,00 *em uma aplicação que oferece juros de* 3% *ao mês. Com o auxílio de uma calculadora ou planilha, responda as seguintes questões:*

a) Que montante esta pessoa terá ao final de 24 *meses?*

b) Qual foi o rendimento percentual da aplicação neste período? Era este o valor que você esperava obter?

c) Sem efetuar qualquer cálculo, que montante você esperaria obter se a aplicação durasse 3 *anos?*

d) Agora efetue os cálculos para uma aplicação de 3 *anos e compare com sua resposta anterior. Sua estimativa foi boa?*

O primeiro item é tão somente uma aplicação imediata da fórmula de juros compostos e não deve oferecer dificuldades. No segundo item, já habituados a lidar com juros compostos, dificilmente os alunos esperarão obter 72% como resposta. Mas também é igualmente provável que não esperem um valor superior a 100%. No entanto, diante dos valores que eles mesmos encontraram, serão inevitavelmente instados a interpretar e argumentar matematicamente. Ao final da reflexão, com a pertinente intervenção do professor, devem concluir que $(1+i) = (1+i_m)^{24}$, onde i é a taxa total dos dois anos e i_m é a taxa mensal. Os dois últimos itens permitem intuir alguma generalização, trabalhando também com períodos de tempo que não sejam múltiplos.

Como este é um problema com implicações práticas relevantes e que envolve cálculos penosos, novamente o professor deve ficar à vontade para explorar livremente os recursos computacionais disponíveis, trabalhando situações que se relacionem com a realidade da turma.

3.7 Séries de Pagamento

Neste ponto acreditamos que os alunos já estão em condições de trabalhar com séries de pagamentos constantes. Embora este item tradicionalmente não faça parte dos currículos de Ensino Médio, veremos que sua inclusão não exige nenhum conhecimento matemático adicional. Adicionalmente, oferece a oportunidade de retomar conceitos matemáticos fundamentais de forma contextualizada, visto que esta situação está entre as mais comuns nas operações financeiras cotidianas. A partir de um problema simples (do ponto de vista dos cálculos envolvidos), conduzimos os alunos a obterem uma fórmula muito útil e também proporcionar uma discussão importante:

Determinado bem pode ser comprado à vista por R$* 250,00 *ou em duas prestações mensais consecutivas de R$ 135,00, *com a primeira parcela vencendo* 30 *dias após a compra. Qual é a taxa de juros mensal cobrada na compra a prazo? Qual das opções de pagamento você considera mais interessante?*

Ao discutir uma estratégia de resolução, o professor evidencia a importância de saber se expressar usando diferentes representações quando recorre a um diagrama de setas, como o da Figura 14.

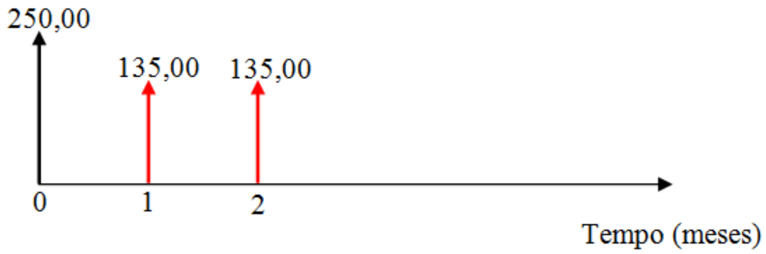

Figura 14

Dadas as discussões precedentes, os alunos já compreendem que, a priori, não faz sentido comparar valores em momentos diferentes. Então, para que tal comparação possa ser feita, iremos colocar todos os valores no mesmo instante de tempo. Usando a fórmula (1), colocamos todos os valores na “data zero” (momento da possível compra à vista):

- ⇨ Primeira parcela: $\dfrac{135}{(1+i)}$.
- ⇨ Segunda parcela: $\dfrac{135}{(1+i)^2}$.

Ou seja, pagar duas parcelas de R$135,00, uma daqui a 30 dias e outra daqui a 60 dias, equivale a pagar $\dfrac{135}{(1+i)}+\dfrac{135}{(1+i)^2}$ hoje, onde i é a taxa de juros mensal cobrada na operação. Isso nos leva a:

$$250=\frac{135}{(1+i)}+\frac{135}{(1+i)^2}$$

Resolvendo a equação acima (a turma pode ser orientada a resolver a equação trabalhando com $(1+i)$ como incógnita), os alunos irão obter $i=5{,}3\%$, aproximadamente.

Antes de passar à discussão mais detalhada da equação e sua consequente generalização para n parcelas, vale a pena discutir junto à turma a segunda questão do problema. Como é provável que os alunos não estejam familiarizados com as taxas de juros usuais no mercado, é natural que eles se sintam incapazes de responder a esta questão. Se o acesso à internet for viável, pode-se solicitar uma pesquisa rápida sobre taxas de rendimento de poupança e outros investimentos. Se isso não for possível, uma pesquisa extra-classe pode ser solicitada, de modo a discutir as conclusões dos alunos na aula seguinte. O mais importante é que eles percebam que a resposta não depende exclusivamente do valor de *i*, mas de uma comparação entre ele e outros valores (até porque alguns alunos podem argumentar que “sempre é melhor pagar à vista”).

A fim de generalizar a situação proposta anteriormente, uma questão que pode ser proposta neste ponto é a seguinte: se em vez de duas parcelas, fossem três, você esperaria encontrar que tipo de equação? É provável que alguns sejam capazes de responder corretamente (equação polinomial de terceiro grau). Mas, então, como lidar com situações reais, em que o número de parcelas é normalmente superior a 2?

Novamente recorremos ao diagrama (Figura 15):

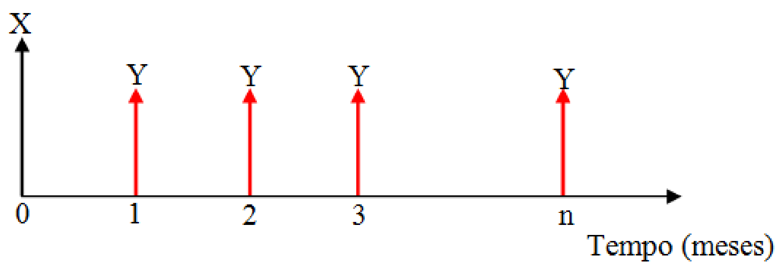

Figura 15

Solicitando aos alunos que escrevam uma equação relacionando *X* e *Y*, seguindo o mesmo raciocínio do problema inicial, obtém-se:

$$X = \frac{Y}{(1+i)} + \frac{Y}{(1+i)^2} + \frac{Y}{(1+i)^3} + \dots + \frac{Y}{(1+i)^n}$$

Como os próprios alunos demonstram desconforto com a presença das reticências no segundo membro da igualdade acima, eles são naturalmente desafiados a reescrever a equação de outra forma, mobilizando outros conceitos matemáticos. Não deve haver maior dificuldade para que concluam que o segundo membro é a soma dos termos de uma progressão geométrica, de primeiro termo $\frac{Y}{(1+i)}$ e razão $\frac{1}{(1+i)}$, sendo *X* a soma deles. Então, aplicando a fórmula da soma dos termos da P.G., tem-se:

$$S_n = \frac{a_1 \times (q^n - 1)}{q - 1} \;\; => \;\; X = \frac{\frac{Y}{(1+i)} \times \left(\left(\frac{1}{1+i} \right)^n - 1 \right)}{\frac{1}{(1+i)} - 1} \;\; =>$$

$$X = Y \times \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] \qquad (2)$$

Nesta abordagem, em que privilegiamos os conhecimentos prévios dos alunos, num processo contínuo de assimilação e acomodação, entendemos a inteligência como capacidade de se adaptar a novas situações, oferecendo uma interação desafiadora entre o sujeito e o meio. Apesar de termos em vista a importância de saber se expressar matematicamente, o mais importante aqui é que os alunos compreendam os conceitos-chave envolvidos, a despeito de alguma dificuldade na manipulação algébrica.

Mesmo que tenham obtido a fórmula (2) sozinhos, é normal que os alunos não se sintam seguros para fazer análises a partir dela, devido à presença de mais de duas incógnitas. Situações como esta promovem a iniciativa e a confiança, valores atitudinais que não se dissociam dos conteúdos conceituais e procedimentais [6]. Há diversas possibilidades, com exigências cognitivas variadas, que podem ser exploradas para que os alunos possam perceber as dificuldades envolvidas. As situações mais simples (sobre as quais não faremos maiores considerações) são:

1) Conhecidos o número de parcelas, o valor à vista e a taxa de juros, determinar o valor de cada prestação.
2) Conhecidos o número de parcelas, o valor de cada prestação e a taxa de juros, determinar o valor à vista.

Uma terceira situação, já bem mais desafiadora, é quando o número de parcelas é desconhecido (sendo conhecidos o valor presente, o valor de cada prestação e a taxa de juros), que pode ser exemplificada com a seguinte situação-problema:

Um bem que custa R$* 1.000,00 *à vista pode ser adquirido em parcelas mensais de R$ 100,00. *Considerando que são cobrados juros de* 1,5*% ao mês, quantas parcelas devem ser pagas a fim de quitar a dívida?*

Uma resolução que pode ser apresentada pelos alunos é a seguinte:

$$1000 = 100 \times \frac{1-\left(\frac{1}{1+0{,}015}\right)^n}{0{,}015} \;\; => \;\; \left(\frac{1}{1+0{,}015}\right)^n = 0{,}85 \;\; => \;\; \log\left(\frac{1}{1+0{,}015}\right)^n = \log 0{,}85 \;\; =>$$

$$-n \cdot \log(1{,}015) = \log 0{,}85 \;\; => \;\; n = \frac{0{,}0706}{0{,}0065} = 10{,}8 \cong 11$$

Mesmo dispondo de uma calculadora científica (de onde obtiveram os valores log1,015 e log0,85), eles não hesitarão em apontar esta situação como sendo mais difícil do que as duas anteriores.

Mas o grande desafio é a quarta situação, quando o valor desconhecido é exatamente a taxa de juros.

Um bem que custa R$ 1.000,00 *à vista pode ser adquirido em* 12 *parcelas mensais de R$* 100,00. *Qual é a taxa de juros cobrada na compra parcelada?*

Ao tentar aplicar a fórmula, eles irão se deparar com a seguinte equação:

$$1.000 = 100 \times \frac{1-\left(\frac{1}{(1+i)}\right)^{12}}{i}$$

É conveniente deixar que a turma pense um pouco a respeito da possível resolução desta equação, pois em algum momento eles perceberão que uma resolução algébrica é inviável, pois implicaria resolver uma equação polinomial de grau 12. Neste ponto, diversas questões podem ser levantadas, para reflexão:

1) É possível que existam diferentes soluções? Ou a solução deve ser única? Por quê?

2) Com o auxílio de um software gráfico como o Graphmatica [10], plote a equação $X = 100 \times \frac{1-\left(\frac{1}{(1+i)}\right)^{12}}{i}$. Como você interpreta o gráfico gerado?

3) Verifique que a relação entre X e i é uma função e, mais ainda, é uma função decrescente.

Evidentemente, conforme discutido anteriormente, tais questionamentos não têm a intenção de conduzir a uma justificativa rigorosa de que a função (cujo domínio, claro, é R_+) é decrescente. Mas como a expressão da função já não é tão simples quanto outras tipicamente trabalhadas no Ensino Médio, tal conclusão não é óbvia, de maneira que esta constatação, através da construção de diferentes gráficos, é importante para que o aluno se sinta à vontade para afirmar que a solução é única e elabore uma estratégia para encontrar tal solução.

Uma vez que a relação entre X e i é uma função decrescente, os alunos podem ser desafiados a encontrar a solução por tentativas. Mas por onde começar? Qual seria uma boa tentativa inicial? Talvez algum aluno argumente mais ou menos o seguinte:

"No total, irei pagar R$ 1.200,00, *ou seja,* 20% *a mais do que o valor à vista. Dividindo este valor por* 12, *que é o número de parcelas, encontro* 1,66%. *Sei que este não é o valor correto, pois estamos num regime de juros compostos, mas vou usá-lo para começar."*

Então, ele obtém $100 \times \dfrac{1-\left(\dfrac{1}{(1+0{,}0166)}\right)^{12}}{0{,}0166} = 1.080$. Como já sabemos que a função é decrescente, precisamos aumentar o valor de i. Após algumas tentativas, os alunos devem encontrar algo em torno de 2,9% como resposta.

3.8 Retomando o Uso do Computador: Planilhas Eletrônicas

Uma vez que os alunos tenham compreendido a dificuldade envolvida em situações como as duas últimas abordadas acima, é chegada a hora de explorar novamente as possibilidades oferecidas pelos recursos computacionais disponíveis. Usando o software Microsoft Excel [9] (versão em português), trabalhamos as funções NPER e TAXA:

- ⇨ Função NPER: esta função retorna o número de pagamentos, para uma série constante de pagamentos. Seus parâmetros são a taxa de juros, o valor de cada parcela e o valor à vista. No entanto, o valor da parcela deve ser precedido pelo sinal de menos. A Figura 16 ilustra o exemplo feito acima.

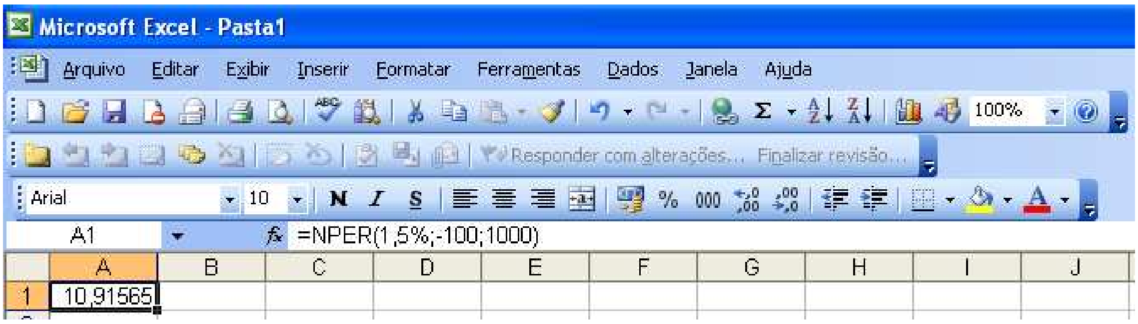

Figura 16

⇨ Função TAXA: esta função retorna a taxa de juros para uma série de pagamentos constantes. Seus parâmetros são o número de parcelas, o valor de cada parcela e o valor à vista. Novamente, o valor da parcela deve ser precedido pelo sinal de menos. A Figura 17 ilustra a situação feita anteriormente.

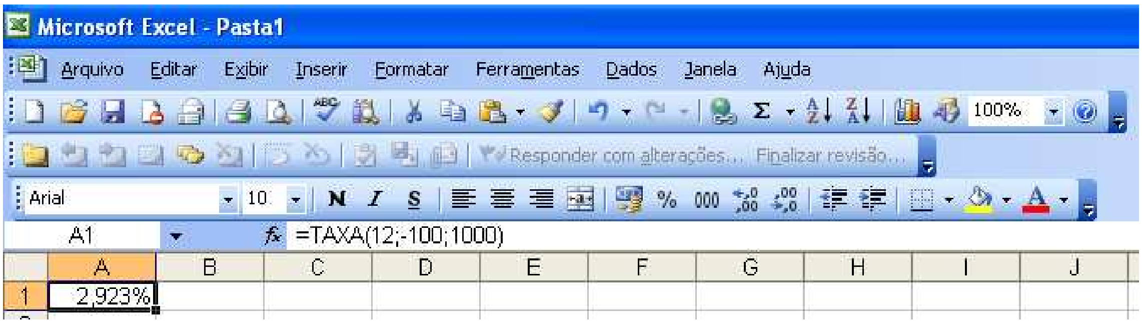

Figura 17

Quando apresentamos uma ferramenta como esta, que fornece a resposta sem exigir nada do usuário (a não ser conhecer a sintaxe da função), é comum algum aluno questionar as razões de ser necessário um estudo prolongado do assunto, em vez de simplesmente apresentar a ferramenta e ensinar a usá-la. Cabe, então, propor novas situações, em que a ferramenta seja útil, e até mesmo indispensável, mas que exijam um tratamento prévio do aluno, em que ele precise aplicar os conceitos construídos, como a seguinte:

Como você poderia usar a planilha eletrônica para calcular a taxa de juros em uma situação em que o intervalo de tempo até o pagamento da primeira parcela não coincide com os intervalos de tempo entre as parcelas?

3.9 Considerações Finais

Optamos por não incluir Sistemas de Amortização nesta proposta devido à reconhecida falta de tempo, queixa frequente de todos nós professores de Matemática da Educação Básica. Não obstante, observamos que as estruturas matemáticas necessárias para trabalhar com os Sistemas de Amortização já foram discutidas no estudo das séries de pagamentos (quando usamos a Tabela Price, embora sem nomeá-la). Quanto ao "sistema de amortizações constantes", entendemos que ele pode ser facilmente abordado com o uso de planilhas eletrônicas, a partir da construção de tabelas como em [12], bastando para isso entender o tipo de regime de quitação da dívida.

No entanto, esta situação merece alguns comentários adicionais. Embora existam exigências legais de uma base curricular comum, existe também certa flexibilidade curricular, que comporta as preferências de cada professor e escola. Sendo assim, é possível conciliar a inserção de novos tópicos (desde que entendidos como relevantes na formação do estudante/cidadão), fazendo escolhas criteriosas. Sobre isso, os Parâmetros Curriculares Nacionais [6] explicitam:

"Não configuram, portanto, um modelo curricular homogêneo e impositivo, que se sobreporia à competência político-executiva dos Estados e Municípios, à diversidade sociocultural das diferentes regiões do País ou à autonomia de professores e equipes pedagógicas." (página 13)

É precisamente este o nosso entendimento, quando confrontamos a relevância da Matemática Financeira com outros conteúdos tradicionais do Ensino Médio. A preocupação com a seleção de conteúdos é tão evidente que o PCN chega mesmo a listar conteúdos tradicionais que entende que precisam ser relativizados ou mesmo suprimidos do currículo (funções modulares, por exemplo), dando ao professor o direito e o dever de refletir sobre sua prática pedagógica, selecionando e adequando os conteúdos ao contexto sócio-cultural de seus alunos.

Considerações Finais

Após elaboração e contemplação das ideias propostas no presente trabalho, vemos que não são poucos os desafios dos professores de Ensinos Fundamental e Médio no tratamento da Matemática Financeira, mas estamos persuadidos de que os esquemas Piagetianos podem nos ajudar sobremaneira a construir solidamente uma conscientização e um letramento financeiros necessários a uma boa condução econômica do indivíduo em sociedade. Promover ainda que seja um conhecimento de Matemática Financeira calcado nos processos mentais intuitivos e operacionais já trará grande legado aos nossos alunos, caso estes não tenham infelizmente acesso à fase de formalização desse saber. Isso não é de todo grave, se levarmos em conta que os desafios atuais da Matemática Financeira, relacionados à incorporação inevitável de estruturas estocásticas (probabilísticas) nas taxas de juros e na evolução de preços de ativos financeiros, são contemplados apenas por matemáticos e estatísticos com sólida bagagem teórica em equações diferenciais estocásticas, teoria da medida e teoria de operadores, só para citar alguns. No entanto, mesmo em instâncias de grande sofisticação teórica, subjazem as ideias fundamentais a serem discutidas e problematizadas na Educação Básica e estas, assim entendemos, não podem ser negligenciadas ou adiadas sob pena de amputar cognitivamente nossos alunos de uma capacidade de tradução econômica do mundo. O quadro abaixo resume algumas das questões fundamentais da Matemática Financeira básica, associadas às etapas de aquisição de conhecimento, nos termos propostos no trabalho.

Tabela 8

Estágio	Conteúdos	Atividades
Pré-Operatório	1. A Matemática Financeira na Sociedade. 2. Taxonomia de Finanças (juros, montante, taxas de juros, descontos, inflação, perda e ganho financeiros). 3. Dinâmica de Valores no Tempo.	Pesquisar sobre finanças em mídias (jornais, notícias, internet, etc). Analisar matérias de jornais e revistas para discussão de significado dos termos usuais da Matemática Financeira. Representar valores monetários com o uso de Diagramas de Setas.
Operatório Concreto	1. Juros Simples 2. Juros Compostos 3. Descontos 4. Inflação 5. Taxas Nominais e Efetivas 6. Taxas Equivalentes 7. Juros de Mora	Efetuar o cálculo de juros (nos dois regimes de capitalização) gerados para valores específicos de taxa e capital inicial. Calcular descontos e determinar a taxa de juros real cobrada, usando diagramas de setas e reversibilidade das operações. Diferenciar taxas nominais e efetivas, calculando uma a partir da outra, para valores específicos (cálculos aritméticos). Determinar a equivalência de duas taxas referenciadas em prazos distintos. Aplicar juros simples para o cálculo de juros de mora em problemas concretos, como atrasos em contas domésticas.
Operatório Formal	1. Juros Simples 2. Juros Compostos 3. Descontos 4. Inflação 5. Taxas Nominais e Efetivas 6. Taxas Equivalentes 7. Juros de Mora	Generalizar e formalizar os conceitos de juros simples e compostos, com o uso da Álgebra. Relacionar algebricamente taxa de desconto e taxa real de juros. Obter expressões gerais para converter taxas nominais em taxas efetivas e aplicá-las na resolução de problemas. Relacionar taxa de inflação e variação percentual no poder aquisitivo. Compreender a equivalência de taxas, obtendo relações gerais envolvendo taxas referenciadas em unidades de tempo distintas.

Esperamos que este trabalho tenha lançado luz sobre algumas questões fundamentais no atual cenário da Educação Matemática. Não obstante, a busca por melhorias nos processos de ensino e aprendizagem é uma constante, objeto de atenção não só dos profissionais de educação, mas também das autoridades. Assim, havendo os avanços desejados, outros aspectos da Matemática Financeira podem vir a ser abordados na escola, trazendo à baila aspectos intuitivos de finanças estocásticas, como dissemos há pouco, pois em diversas situações, o cidadão precisa tomar decisões sem a certeza do que ocorrerá futuramente. Nestes casos, é preciso estimar as probabilidades de ocorrência de certos eventos e entender estruturalmente seu significado dentro do diálogo com as finanças. A título de exemplo viável de ser problematizado em sala de aula (embora seu tratamento exija maior estofo teórico), suponha que uma pessoa possa alocar seu dinheiro em um investimento pré-fixado com taxa nominal de 10% ao ano ou em um investimento pós-fixado que rende a inflação do período mais uma taxa real de juros de 4%. Como ela deve tomar a decisão? Naturalmente, o aluno responderia que isso depende da inflação. O problema é que a inflação futura é desconhecida. Assim, é preciso trabalhar com diferentes cenários. Obviamente, não se trata de introduzir ferramentas matemáticas sofisticadas nesse momento, mas tão somente de conscientizar para o problema de que o cálculo determinístico, típico das abordagens atuais, não pode mais sustentar o tratamento teórico do problema posto. Como o conceito estatístico de esperança pode ser abordado de forma elementar sem muitas dificuldades, esta é mais uma enriquecedora conexão e diálogo entre conteúdos possibilitados pela Matemática Financeira.

Por fim, fica o desejo de ver uma proposta como esta sendo efetivamente implementada e amalgamada com as vivências específicas dos alunos e do professor nesse campo teórico de extrema relevância na Educação. Tal implementação ainda não foi realizada de nossa parte, devido às exigências de cumprimento de currículos impostos por outras instâncias do sistema educacional e por estar fora de nosso escopo, mas esperamos, a partir das contribuições pretendidas com a presente dissertação, abrir uma nova frente de pesquisa nesse campo para o futuro.

Referências Bibliográficas

[1] Brasil, Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Lei 9394/1996.

[2] PIAGET, Jean, INHELDER, Barbel. *The Psychology of the Child*. New York: Basic Books, 1969.

[3] PERRENOUD, Philippe. *A prática reflexiva no ofício de professor*. Porto Alegre: Artmed, 2002.

[4] WOOD, David. *Como as crianças pensam e aprendem*. São Paulo: Martins Fontes, 1996.

[5] PIAGET, Jean. *O Estruturalismo*. São Paulo: Difel, 1979.

[6] Brasil, Secretaria da Educação Básica. Parâmetros Curriculares Nacionais. MEC/SEF, 1998.

[7] GIRALDO, Victor, SILVANI, Paulo Antônio, MATTOS, Francisco Roberto Pinto. *Recursos Computacionais no Ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[8] ASSAF NETO, Alexandre. *Matemática Financeira e suas Aplicações*. 9ª Edição, São Paulo: Editora Atlas, 2006.

[9] Microsoft Excel 2010. Microsoft Corporation.

[10] Graphmatica versão 2.2 para Windows. KSoft, Inc.

[11] LIMA, Elon Lages, CARVALHO, Paulo Cezar Pinto, WAGNER, Eduardo, MORGADO, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio – Volume 1*. 9ª Edição, Coleção do Professor da Matemática. Rio de Janeiro: Editora Sociedade Brasileira da Matemática, 2006.

[12] LIMA, Elon Lages, CARVALHO, Paulo Cezar Pinto, WAGNER, Eduardo, MORGADO, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio – Volume 2*. 9ª Edição, Coleção do Professor da Matemática. Rio de Janeiro: Editora Sociedade Brasileira da Matemática, 2006.

[13] NOVAES, Rosa Cordelia Novellino. “Uma abordagem visual para o ensino de matemática financeira no Ensino Médio”. Dissertação de Mestrado em Ensino da Matemática. Instituto de Matemática. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Orientadora: Lilian Nasser, Novembro de 2009.