

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL**

ANTÔNIO CÉZARE DE ARAÚJO GIANANTE

**ALGORITMO CORDIC NO CÁLCULO
DE FUNÇÕES ELEMENTARES**

**CAMPO GRANDE - MS
JULHO DE 2014**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL**

ANTÔNIO CÉZARE DE ARAÚJO GIANANTE

**ALGORITMO CORDIC NO CÁLCULO
DE FUNÇÕES ELEMENTARES**

ORIENTADOR: Prof. Dr. CLAUDEMIR ANIZ

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática – INMA/UFMS, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre.

**CAMPO GRANDE – MS
JULHO DE 2014**

ALGORITMO CORDIC NO CÁLCULO DE FUNÇÕES ELEMENTARES

ANTÔNIO CÉZARE DE ARAÚJO GIANANTE

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Matemática, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela Banca Examinadora:

Prof. Dr. Claudemir Aniz – UFMS

Profa. Dr. Luiz Antônio Ribeiro de Santana – UFPR

Profa. Dra. Rúbia Mara de Oliveira Santos – UFMS

CAMPO GRANDE – MS

JULHO DE 2014

AGRADECIMENTOS

À minha esposa e filhos, não há palavras para descrever a gratidão que sinto para com eles. Posso apenas dizer muito obrigado e esperar que o tempo me permita mostrar-lhes quão importantes são para mim. Ao meu orientador, sem o qual a realização deste trabalho literalmente não seria possível. Sua rapidez de compreensão de um assunto que não nos era conhecido e paciência em me direcionar foram cruciais para que eu pudesse desenvolver as capacidades necessárias para trilhar o caminho com minhas próprias pernas, ainda que inúmeras vezes ele me tenha dado o ombro para apoiar. Aos colegas de curso, uma longa caminhada torna-se mais prazerosa com agradáveis companhias. A Deus, por tudo.

RESUMO

A maioria dos acadêmicos e professores de ciências exatas acredita que as séries de potências são as ferramentas matemáticas utilizadas pelos computadores para a estimativa no cálculo de funções. Mas devido à reduzida memória destas, as mesmas tornam-se onerosas, sendo necessário a busca de outras opções, dentre as quais a mais utilizada é o algoritmo denominado CORDIC (**CO**ordinate **R**otation **DI**gital **C**omputer), que se baseia em rotações e suas propriedades em diferentes sistemas de coordenadas. O trabalho aborda o funcionamento básico deste algoritmo, descreve exemplos numéricos para algumas das funções elementares e detalha a fundamentação teórica para cada caso. Em um primeiro momento apresenta-se o conceito da rotação circular e o seu uso como base de funcionamento do CORDIC. Em seguida são desenvolvidas as ideias de rotações hiperbólicas e lineares, necessárias à execução dos outros dois tipos de iteração do algoritmo. Em cada tipo de iteração, o problema da convergência da série necessária à aproximação é abordado. Por fim, resume-se os três casos em um conjunto único de iterações e apresenta-se uma tabela de funções calculadas com o uso do CORDIC.

Palavras-chave: CORDIC, calculadoras, rotações, funções trigonométricas, funções hiperbólicas.

ABSTRACT

Most scholars and teachers of math and science believe that power series are the most used mathematical tools by computers to estimate the calculation of functions. But due to their reduced memory of these, these tools become onerous, requiring the pursuit of other options, among which the most used algorithm is the so-called CORDIC (**CO**ordinate **R**otation **D**igital **C**omputer), which is based on rotations and their properties in different coordinate systems. The paper discusses the basic operation of this algorithm, describes numerical examples for some of the most common functions and details the theoretical basis for each case. Firstly the concept of circular rotation is presented, as well as its use as the basis for functioning of the CORDIC. Then the ideas of hyperbolic and linear rotations, necessary for the implementation of the other two types of algorithm iteration, are developed. In each type of iteration, the problem of convergence of the series required in the approximation is discussed. Finally, one summarizes the three cases in a single set of iterations and presents a table of functions calculated using the CORDIC.

Keywords: CORDIC, calculators, rotations, trigonometric functions, hyperbolic functions.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
2	CORDIC CIRCULAR: A ORIGEM DO CORDIC	4
2.1	Noção Geral do CORDIC.....	4
2.2	Rotação e Pseudo Rotação Circular.....	5
2.3	O CORDIC no Cálculo das Funções Seno e Cosseno.....	7
2.4	Sequência Recursiva do CORDIC Circular Rotação.....	14
2.5	Teorema Chave para a Convergência do CORDIC.....	16
2.6	Convergência do CORDIC Circular.....	17
2.7	O CORDIC no Cálculo da Função Arco Tangente.....	22
2.8	A Iteração CORDIC Convencional.....	27
3	CORDIC HIPERBÓLICO	30
3.1	Funções Hiperbólicas.....	30
3.2	Rotação e Pseudo Rotação Hiperbólica.....	34
3.3	O CORDIC no Cálculo da função Exponencial.....	36
3.4	Sequência Recursiva do CORDIC Hiperbólico.....	43
3.5	Convergência do CORDIC Hiperbólico.....	45
3.6	O CORDIC no Cálculo da Raiz Quadrada e do Logaritmo.....	49
4	CORDIC LINEAR	56
4.1	Ângulo Linear.....	56
4.2	Rotação Linear.....	57
4.3	O CORDIC no cálculo do Produto.....	58
4.4	Sequência Recursiva do CORDIC Linear.....	61
4.5	Convergência do CORDIC Linear.....	62

4.6 O CORDIC no cálculo do Quociente.....	64
5 O CORDIC UNIFICADO	66
5.1 Iteração CORDIC Generalizada.....	66
5.2 Tabelas de Funções do CORDIC.....	68
6 CONCLUSÃO	70
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	72

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Rotação circular de um vetor.....	4
Figura 2.2: Pseudorotação do vetor P_0 em um ângulo θ	6
Figura 2.3: Micro rotações circulares de um Vetor.....	7
Figura 2.4: Pseudorotações de P_0 até o vetor P_3^* no modo Rotação.....	10
Figura 2.5: Rotação circular do vetor P_0 em um ângulo $-\theta$	22
Figura 2.6: Pseudo rotações de P_0 até P_3^* no modo Vetoração.	22
Figura 2.7: Ângulo β_n do vetor P_{k+1}^* com o eixo x	23
Figura 3.1: Setor e ângulo hiperbólicos.....	30
Figura 3.2: Funções hiperbólicas.....	31
Figura 3.3: Rotação do vetor P_1 em um ângulo hiperbólico θ	34
Figura 3.4: Pseudo rotação hiperbólica, de um ângulo θ , para o vetor P_1	36
Figura 3.5: pseudorotações hiperbólicas e seus respectivos vetores e ângulos.....	37
Figura 3.6: Rotação hiperbólica do vetor P_0 em um ângulo $-\theta$	50
Figura 3.7: Micro rotações de P_1 até P_4 no modo Vetoração.....	50
Figura 3.8: Ângulo β_n do vetor P_{n+1}^* com o eixo x	51
Figura 4.1: Setores circulares e lineares associados a seus respectivos ângulos.....	56
Figura 4.2: Ângulo linear para o caso $x_0 \neq 1$	57
Figura 4.3: Rotação linear de um vetor.....	57
Figura 4.4: Visualização das rotações de P_0 até o vetor P_3 na Rotação Linear.....	59

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1: Erro absoluto da aproximação dos ângulos circulares para potência de base 2.....	8
Tabela 2.2: Aproximações para o ângulo de 1 rad através das micro rotações.....	11
Tabela 2.3: Aproximações de α_i	13
Tabela 3.1: Aproximações para $\theta = 0,549$	38
Tabela 3.2: Comparação dos termos da sequência $\theta_k = \operatorname{tgh}^{-1} 2^{-k}$	38
Tabela 3.3: Comparação dos termos da sequência $\theta_k = \operatorname{tgh}^{-1} 2^{-k}$ (após as repetições).....	39
Tabela 3.4: Aproximações para $\theta = 0,549$ com repetição de termos.....	40
Tabela 3.5: α_n em função do sinal de y_n no modo Vetoração Hiperbólico.....	52
Tabela 3.6: Análise da condição do CORDIC Vetoração para $\ln(39)$	53
Tabela 3.7: Vetoração Hiperbólico para o cálculo de $\ln(3,9)$	53
Tabela 4.1: Aproximações do ângulo rotacionado no caso Rotação Linear.....	60
Tabela 4.2: Cálculo de α_n em função do sinal de y_n na Vetoração Linear.....	64
Tabela 5.1: Valores de $\lambda(n)$ nas equações 5.1.....	67
Tabela 5.2: Funções computáveis pelo CORDIC.....	67
Tabela 5.3: Funções calculadas pelo CORDIC Circular.....	68
Tabela 5.4: Funções calculadas pelo CORDIC Linear.....	69
Tabela 5.5: Funções calculadas pelo CORDIC Hiperbólico.....	69

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Segundo Nikolay Lobachevsky (1792 – 1856): “Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.”. Ainda assim, uma crítica recorrente no ensino médio é a ausência de ligação entre teoria e prática, especialmente com relação à matemática. Pegue-se o exemplo dos polinômios. O tratamento puramente algébrico distancia o aluno que não considere interessante esta abordagem. Cabe ao professor mostrar uma aplicação que ajude a justificar a necessidade de se dominar o assunto.

Com o intuito de mostrar a utilidade desse conteúdo, uma ideia é abordar a Série de Taylor, tida por muitos professores como a ferramenta empregada na aproximação de funções nas máquinas de calcular, especialmente para seno, cosseno e logaritmo. Ao pesquisar sobre o assunto, entretanto, descobri que elas não são usadas nas calculadoras portáteis, mas sim outro processo completamente diferente e igualmente interessante: o algoritmo CORDIC (COrdinate Rotation Digital Computer). Isto não significa que as séries de potências não sejam aplicadas e não possam ser dadas como exemplo prático. Elas têm utilidade inquestionável na aproximação de várias funções, inclusive as menos elementares. Apenas não servem para os computadores de baixa memória.

Resolvido o problema do exemplo de aplicação de polinômios, surge o da forma de processamento das calculadoras. As séries de potência, como o próprio nome indica, dependem das operações com potência, que se tornam mais complexas conforme os valores das bases e/ou os expoentes também assumam valores maiores e/ou irracionais. Ainda que uma calculadora possa realizar tais cálculos, deseja-se que a mesma os faça o mais rápido possível e do modo mais simples, de forma a reduzir dificuldades desnecessárias, como programas complicados, e superar limitações técnicas, como pouca memória de cálculo.

CAP. 1 – INTRODUÇÃO

Em termos de rapidez e simplicidade, os melhores comandos (operações) de serem feitos em um computador são (não necessariamente nesta ordem):

- 1- adição e subtração de números;
- 2- estabelecer relação de ordem entre os números (maior e menor);
- 3- armazenamento e leitura de valores na memória;
- 4- multiplicação por potências de base 2 com expoente inteiro.

Justificando este último comando, multiplicar por 2^n em uma base binária, com n natural, faz com que a vírgula do “número decimal binário” desloque-se n casas para a direita, ao passo que dividir por 2^n desloca a mesma no sentido contrário, como as multiplicações por potências de base dez no sistema decimal.

Portanto, um processo que realize apenas tais comandos aparenta ter mais vantagens computacionais em relação a outros dependentes de operações que ainda devem ser definidas em função dessas mais elementares, o que de fato ocorre. Tendo por norte tais vantagens operacionais, o método CORDIC foi desenvolvido em 1959 por Jack Volder [9], inicialmente pela necessidade de calcular funções trigonométricas em tempo real e sem o uso de muita memória, para ser usado no computador de navegação do bombardeiro B-58, substituindo o *resolver* analógico (um tipo de transformador elétrico rotativo para medir graus de rotação). O CORDIC acaba se tornando muito mais rápido que as séries de potências (nos casos de baixa capacidade de cálculos) por englobar apenas os comandos anteriormente mencionados.

Segundo Volder [9], neste método “uma nova técnica de computação é empregada, a qual é especialmente adequada para resolver as relações trigonométricas envolvidas na rotação de coordenadas no plano e na conversão de coordenadas retangulares para coordenadas polares. (...) as operações trigonométricas na computação pelo CORDIC podem ser funcionalmente descritas como o equivalente digital de um *resolver* analógico”. Ainda conforme Volder [10], “a mudança principal era no tempo real de cálculo que as complicadas equações de navegação requeriam para a determinação da posição atual (do B-58) em uma terra esférica”. O CORDIC foi inicialmente desenvolvido na base binária. Não obstante, ele pode ser usado para qualquer base. Hoje em dia se usa a base decimal em muitos casos. A base dois será utilizada por questões de simplicidade.

CAP. 1 – INTRODUÇÃO

No capítulo 2 o CORDIC Circular é apresentado. São comentados os casos das funções seno, cosseno e tangente inversa para ilustrar os dois modos de operação do algoritmo. Fundamenta-se o teorema de convergência e a convergência das séries utilizadas no caso circular, e discute-se a precisão.

O capítulo 3 aborda o CORDIC do tipo Hiperbólico, exemplificado pelo cálculo das funções exponencial e raiz quadrada. É discutido o problema da convergência para este tipo e as alterações necessárias. Comenta-se a precisão e a sequência recursiva para o caso hiperbólico é apresentada. A convergência da sequência é demonstrada. Os exemplos abordam também algumas formas de se estender o raio de convergência.

O capítulo 4 trata do CORDIC tipo Linear. São detalhados o produto e o quociente através desta variação do algoritmo, desenvolvendo também a precisão e convergência do mesmo.

O algoritmo unificado é apresentado no capítulo 5, que reúne os três modos de operação do CORDIC. Tabelas resumindo as funções mais imediatas obtidas pelo algoritmo são apresentadas.

Este trabalho tem por objetivo geral apresentar o método CORDIC, conhecer o mecanismo necessário para o cálculo das funções obtidas por uma calculadora científica de bolso e fundamentar teoricamente o funcionamento do algoritmo.

Como objetivo específico, procura-se construir exemplos numéricos para ilustrar o maior número possível de casos de funções elementares encontradas nas calculadoras portáteis para melhor compreender os princípios e a eficácia do processo.

CAPÍTULO 2

CORDIC CIRCULAR: A ORIGEM DO CORDIC

Neste capítulo é dada uma noção geral do algoritmo para que se possa entender a ideia do método. São definidas as rotações e pseudo rotações circulares. Adentra-se no processo usado para o cálculo das funções seno e cosseno, seguido de um exemplo numérico para uma melhor compreensão e que também serve de ponto de partida para a discussão da precisão do algoritmo para tal caso. Apresenta-se a iteração CORDIC da forma inicialmente concebida, bem como o teorema de convergência e as convergências das séries utilizadas pelo CORDIC circular, além de se fundamentar a precisão do mesmo. Finaliza-se com a abordagem do cálculo da função arco tangente, bem como um exemplo numérico para a mesma. Ao final, os dois processos são resumidos em um só grupo de equações de iteração.

2.1 – Noção Geral do CORDIC

O CORDIC possui dois modos de computação:

- modo *Rotação*, também chamado *Z – reduction*, onde as coordenadas de um vetor e um ângulo de rotação são dados e são calculadas as coordenadas do novo vetor após a rotação do ângulo dado;

- modo *Vetoração ou Vetorização*, também chamado *Y – reduction*, onde as coordenadas de um vetor são dadas e sua norma e seu argumento são calculados.

De acordo com Dawid e Meyr [3] “em ambos os modos o algoritmo pode ser imaginado como uma sequência iterativa de adições/subtrações e operações de deslocamentos, que representam rotações através de ângulos de rotações pré fixados (algumas vezes chamadas *micro rotações*) mas com a direção de rotação variável. (...) Entretanto, a iteração CORDIC não é uma rotação perfeita, uma vez que envolveria multiplicações com seno e cosseno. O vetor rotacionado é também escalonado com o uso de um *fator de correção de escala* necessário”.

Por esse motivo chamaremos essa rotação antes de ser escalonada de *pseudo rotação*. É importante notar que as micro rotações não são necessariamente menores que o ângulo total rotacionado. Recebem esse nome pela ideia de serem uma decomposição do ângulo original, e não a rotação pretendida. Conforme Volder [9] “em essência, a técnica básica de computação usada em ambos os modos (...) é uma sequência passo a passo de pseudo rotações que resultam em uma rotação completa através do ângulo dado (Rotação) ou resulta em um argumento angular final zero (Vetoração)”.

Cabe ainda ressaltar, conforme Muller [6], que “O CORDIC não é o caminho mais rápido para realizar multiplicações ou para computar logaritmos e exponenciais mas, uma vez que o mesmo algoritmo permite a computação de muitas funções usando operações básicas muito simples, ele é atrativo para implementações de hardware” (no sentido de ser vantajoso por exigir pouco custo operacional versus quantidade de funções calculadas). Por tal motivo, “O CORDIC foi implementado em muitas calculadoras de bolso desde a HP 35, e em coprocessadores aritméticos tal como o INTEL 8087”.

Simplificadamente, pode-se observar que o CORDIC se baseia, em ambos os modos, na rotação e/ou deslocamento de um ponto (ou vetor) arbitrariamente escolhido para o ponto que se deseja atingir em um dado sistema de coordenadas, através de uma trajetória circular (método originalmente desenvolvido por Volder), linear ou hiperbólica (expansão realizada por Walther [11]), dependendo da função a ser calculada [6]. Entende-se aqui por trajetória a posição descrita pelo ponto P que representa o vetor no plano cartesiano. Pode-se associar a cada caso um conjunto de coordenadas, que serão denominadas *coordenadas circulares*, *coordenadas hiperbólicas* e *coordenadas lineares* e serão detalhadas à medida que o algoritmo for explicado. Tais casos serão chamados respectivamente de *iterações do tipo circular*, *tipo hiperbólica* e *tipo linear*. A rotação é feita por ângulos cada vez menores, de modo que se pode aumentar a precisão com que se aproxima do ângulo total tanto quanto se queira.

2.2 – Rotação e Pseudo Rotação Circular

Em um sistema cartesiano no plano, a rotação em um ângulo $\theta > 0$, anti-horário, de um vetor representado pelo ponto de coordenadas $P_0 = (x_0, y_0)$ gera um vetor $P = (x, y)$, conforme na figura 2.1.

2.2 – Rotação e Pseudo Rotação Circular

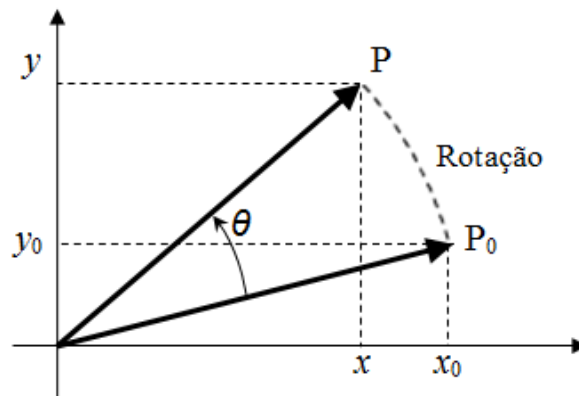


Figura 2.1: Rotação circular de um vetor

As coordenadas de $P = (x, y)$ são:

$$\begin{cases} x = x_0 \cdot \cos \theta - y_0 \cdot \text{sen } \theta \\ y = x_0 \cdot \text{sen } \theta + y_0 \cdot \cos \theta \end{cases} \quad (2.1)$$

Se $\theta > 0$, para $-\theta$ a rotação é no sentido horário. Neste caso, basta usar a paridade das funções seno e cosseno, ficando as equações (2.1) da forma:

$$\begin{cases} x = x_0 \cdot \cos \theta + y_0 \cdot \text{sen } \theta \\ y = -x_0 \cdot \text{sen } \theta + y_0 \cdot \cos \theta \end{cases}$$

Sem perda de generalidade, será inicialmente analisado o caso $\theta \geq 0$ para definir a pseudo rotação circular, uma vez que a paridade da função gera o caso $-\theta$, onde $\theta > 0$.

Chamando $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, pode-se escrever (2.1) da forma:

$$P = M_\theta \cdot P_0 \quad (2.2)$$

Se $\cos \theta \neq 0$, é possível fazer $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \cos \theta \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\text{tg } \theta \\ \text{tg } \theta & 1 \end{pmatrix}$, de forma que:

$$P = \cos \theta \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\text{tg } \theta \\ \text{tg } \theta & 1 \end{pmatrix} \cdot P_0 \quad (2.3)$$

que é equivalente a:

$$\begin{cases} x = \cos \theta \cdot [x_0 - y_0 \cdot \text{tg } \theta] \\ y = \cos \theta \cdot [x_0 \cdot \text{tg } \theta + y_0] \end{cases} \quad (2.4)$$

Desconsiderando o termo $\cos \theta$:

$$\begin{cases} x^* = x_0 - y_0 \cdot \text{tg } \theta \\ y^* = x_0 \cdot \text{tg } \theta + y_0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Analogamente a (2.2), define-se $M_{\theta}^* = \begin{pmatrix} 1 & -\text{tg } \theta \\ \text{tg } \theta & 1 \end{pmatrix}$, obtendo-se:

$$P^* = \begin{pmatrix} 1 & -\text{tg } \theta \\ \text{tg } \theta & 1 \end{pmatrix} \cdot P_0 \Leftrightarrow P^* = M_{\theta}^* \cdot P_0 \quad (2.6)$$

As equações (2.5) e sua equivalente (2.6) são chamadas uma *pseudo rotação* do vetor P_0 . Recebem este nome porque o vetor $P^* = (x^*, y^*)$ tem um aumento em sua magnitude de $\frac{1}{\cos \theta}$ em relação ao vetor P_0 , não sendo uma rotação exata, conforme observado das equações (2.3) e (2.4) e ilustrado na figura 2.2.

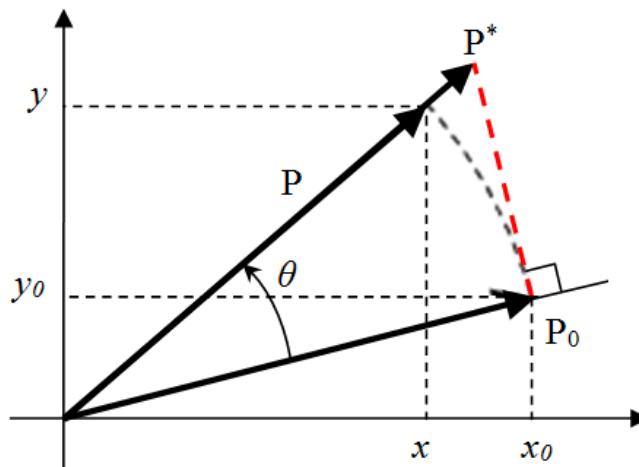


Figura 2.2: Pseudorotação do vetor P_0 em um ângulo θ

2.3 – O CORDIC no Cálculo das Funções Seno e Cosseno

As funções seno e cosseno de um ângulo são obtidas no modo chamado Rotação no CORDIC tipo circular. Este tipo utiliza o círculo trigonométrico, daí seu nome. Partindo-se do ponto $P_0 = (1, 0)$ e rotacionando-o de $\theta > 0$, tem-se que $P = (\cos \theta, \text{sen } \theta)$. Tal rotação só pode ser feita se forem conhecidos $\cos \theta$ e $\text{sen } \theta$, o que é, na verdade, o objetivo final. O algoritmo CORDIC quebra essa rotação em ângulos “menores” $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ (as micro rotações), que são direcionadas para que sua soma convirja para o ângulo θ desejado. Essas

2.3 – O CORDIC no Cálculo das Funções Seno e Cosseno

rotações parciais geram sobre um círculo trigonométrico pontos cada vez mais próximos do ponto desejado (figura 2.3). O número de micro rotações depende da precisão desejada, que está ligada à convergência do algoritmo, e será discutida mais adiante nesta mesma seção.

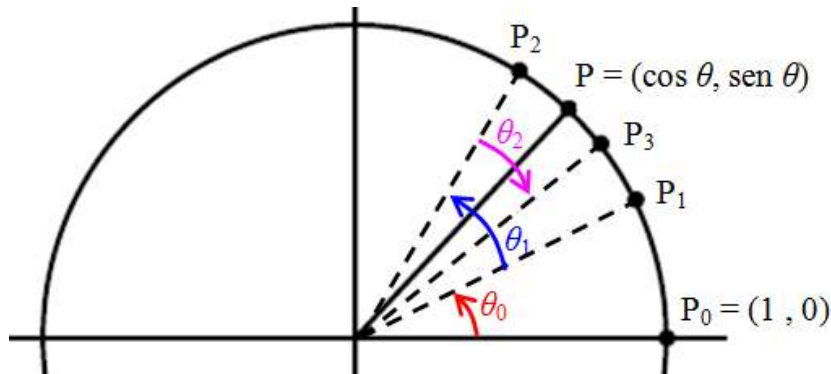


Figura 2.3: Micro rotações circulares de um Vetor.

Tais micro rotações são especialmente escolhidas de forma que $\text{tg } \theta_n = 2^{-n}$. Desse modo, reduz-se a operação do produto pela tangente a um produto por um número de base 2, transformando-se em uma simples operação de deslocamento da vírgula. Como vantagem adicional, para ângulos suficientemente pequenos, pode-se fazer a aproximação $\text{tg}^{-1} \theta \approx \theta$ e as micro rotações podem ser implementadas usando ângulos mais práticos para o computador operar, conforme na tabela 2.1.

θ_i	$\text{tg}^{-1} (2^{-i})$	θ_i calculado	$\theta_i \approx 2^{-n}$	Erro absoluto
θ_0	$\text{tg}^{-1} (1)$	$\frac{\pi}{4} \approx 0,785398163$	≈ 1	0,214601837
θ_1	$\text{tg}^{-1} (2^{-1})$	$\approx 0,463647609$	$\approx (2^{-1})$	0,036352391
θ_2	$\text{tg}^{-1} (2^{-2})$	$\approx 0,244978663$	$\approx (2^{-2})$	0,005021337
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
θ_{10}	$\text{tg}^{-1} (2^{-10})$	$\approx 0,000976562$	$\approx (2^{-10})$	0,0000000003

Tabela 2.1: Erro absoluto da aproximação dos ângulos circulares para potência de base 2.

Seja x_T o valor teórico de uma medida e x_C o valor calculado. O erro absoluto entre x_C e x_T é definido como $e = |x_T - x_C|$. Observe que, a partir de θ_{10} , o erro absoluto de aproximar o

ângulo calculado para uma potência de 2 é da ordem de $3 \cdot 10^{-10}$, com imprecisão na décima casa decimal, quantidade utilizada pela maioria das calculadoras de bolso. A aproximação de θ_n para uma potência de 2 depende do critério do programador. Obviamente, quanto maior o valor de n , melhor a aproximação. Neste trabalho a aproximação será considerada em θ_5 apenas para efeitos de simplificação de contas. Isto não significa que necessariamente este é o valor de n a partir do qual essa aproximação é introduzida. Independente do n a partir do qual se faz tal aproximação, estes ângulos são pré-computados e armazenados em uma tabela de busca, chamada tabela LUT (sigla do inglês Look Up Table).

De acordo com (2.3), para θ_n qualquer tem-se:

$$M_{\theta_n} = \cos \theta_n \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\text{tg } \theta_n \\ \text{tg } \theta_n & 1 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Desde que se escolha $\text{tg } \theta_n = 2^{-n}$ para que as multiplicações sejam feitas do modo comentado na seção 2.1, nota-se que:

$$M_{\theta_n} = \cos \theta_n \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2^{-n} \\ 2^{-n} & 1 \end{pmatrix}$$

Cada passo que ocorre corresponde uma rotação. Portanto, se o algoritmo rodar $n + 1$ passos, observa-se que $\theta \approx \pm \theta_0 \pm \theta_1 \pm \dots \pm \theta_n$ e tem-se genericamente de (2.3) e das propriedades de multiplicação de matrizes:

$$P_{n+1} = \cos \theta_n \cdots \cos \theta_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\text{tg } (\pm \theta_n) \\ \text{tg } (\pm \theta_n) & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & -\text{tg } (\pm \theta_0) \\ \text{tg } (\pm \theta_0) & 1 \end{pmatrix} \cdot P_0$$

Que, por (2.6), pode ser escrita na forma: $P_{n+1} = K_n \cdot M_{\pm \theta_n}^* \cdots M_{\pm \theta_0}^* \cdot P_0$ (2.8)

Como as rotações são direcionadas de forma que P_{n+1} convirja para P, espera-se que:

$$P = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \text{sen } \theta \end{pmatrix} \approx P_{n+1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_n \\ \text{sen } \alpha_n \end{pmatrix} = K_n \cdot P_{n+1}^* \quad (2.9)$$

$$K_n = \cos \theta_n \cdots \cos \theta_0 = \prod_{i=0}^n \cos \theta_i; \quad P_{n+1}^* = M_{\pm \theta_n}^* \cdots M_{\pm \theta_0}^* \cdot P_0 \quad \text{e} \quad \alpha_n = \sum_{i=0}^n \pm \theta_i$$

2.3 – O CORDIC no Cálculo das Funções Seno e Cosseno

K_n é chamado Fator de Correção de Escala (FCE).

Note que:

- O sinal de K_n independe do sinal de θ_n , uma vez que $\cos(x)$ é uma função par.
- α_n é o ângulo total rotacionado através das micro rotações.
- O sinal de θ_{i+1} depende da comparação de α_i com θ , e é escolhido de forma que α_n se aproxime de θ .

Apesar de intuitivo, é preciso mostrar que realmente α_n tende a θ , garantindo a convergência. Além disso, é necessário também comprovar que $\cos \theta \approx \cos \alpha_n$ e $\sin \theta \approx \sin \alpha_n$. A prova dessa convergência será apresentada nas seções 2.5 e 2.6. Por fim, (2.9) mostra que o algoritmo trabalha, na verdade, com as pseudo rotações. O valor de K_n é uma constante que pode ser armazenada no hardware, sendo utilizada apenas ao final do processo. Isto elimina várias multiplicações, ficando apenas as multiplicações matriciais. Entretanto, uma vez que o algoritmo vai se aproximando do ângulo desejado por uma sequência de ângulos θ_i do tipo 2^{-i} , vê-se que as operações envolvidas são todas as comentadas como mais fáceis de computar por uma máquina, otimizando o tempo, simplificando o programa e necessitando de menos memória. A única multiplicação “verdadeira” realizada é a do fator K_n . Como todos os ângulos θ_i são conhecidos, K_n é um valor pré-calculado e armazenado, não necessitando ser calculado toda vez que for necessário. A figura 2.4 ilustra as três primeiras pseudorotações partindo-se do vetor inicial P_0 . Após $n+1$ pseudorotações, tem-se P_{n+1}^* . O ponto P é obtido fazendo $P \approx K_n \cdot P_{n+1}^*$, conforme visto em (2.9).

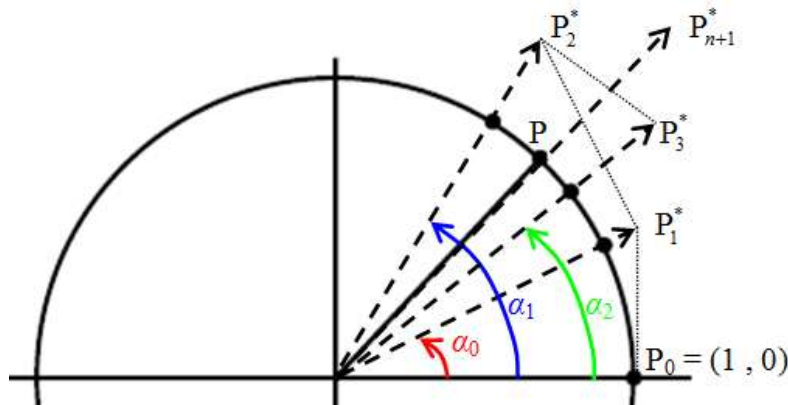


Figura 2.4: Pseudorotações de P_0 até o vetor P_3^* no modo Rotação.

CAP. 2 – CORDIC CIRCULAR: A ORIGEM DO CORDIC

Um exemplo numérico elucidada melhor esse processo. As contas serão feitas no sistema decimal, ainda que o computador opere no sistema binário. Deste modo, os números utilizados nos exemplos, quando trabalhados pela máquina, serão na base binária.

Exemplo 2.1: Suponha que se quer calcular $\text{sen } 1$. Fazendo a aproximação do ângulo desejado:

1º iteração: Para primeira aproximação

$$\alpha_0 = \theta_0 = \text{tg}^{-1}(1) \approx 0,785398$$

2º iteração: Como $\alpha_0 < 1$, o algoritmo adiciona θ_1 , obtendo a segunda aproximação para o ângulo rotacionado:

$$\alpha_1 = \theta_0 + \theta_1 \approx 0,785398 + 0,463648 \approx 1,249046$$

3º iteração: Como $\alpha_1 > 1$, o algoritmo subtrai θ_2 , obtendo:

$$\alpha_2 = \theta_0 + \theta_1 - \theta_2 \approx 1,249046 - 0,244979 \approx 1,004067.$$

E assim sucessivamente. A tabela 2.2 resume o processo:

iteração	n	θ_n	α_n
1ª	0	0,785398(+)	0,785398
2ª	1	0,463648(+)	1,249046
3ª	2	0,244979(-)	1,004067
4ª	3	0,124355(-)	0,879712
5ª	4	0,062419(+)	0,942131

Tabela 2.2: Aproximações para o ângulo de 1 rad através das micro rotações.

Ao mesmo tempo, enquanto se aproxima o ângulo, os valores de $\text{sen } \alpha_n$ e $\text{cos } \alpha_n$ se aproximam de $\text{sen } 1$ e $\text{cos } 1$. Dessa forma, de acordo com (2.9), na terceira iteração se teria:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha_2 \\ \text{sen } \alpha_2 \end{pmatrix} = K_2 \cdot M_{-\theta_2}^* \cdot M_{\theta_1}^* \cdot M_{\theta_0}^* \cdot P_0 = K_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.3 – O CORDIC no Cálculo das Funções Seno e Cosseno

Com $K_2 = \cos \theta_2 \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_0$. Calculando, obtêm-se:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha_2 \\ \text{sen } \alpha_2 \end{pmatrix} = 0,613572 \cdot \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{11}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,536876 \\ 0,843662 \end{pmatrix}$$

De modo que $\cos \alpha_2 \approx 0,536876$ e $\text{sen } \alpha_2 \approx 0,843662$. Em uma calculadora científica, tem-se que $\cos 1 = 0,540302$ e $\text{sen } 1 = 0,841471$, com imprecisão na sexta casa.

Supondo os resultados obtidos em uma calculadora científica como corretos, estes serão considerados como os valores teóricos x_T . Os valores obtidos pelo método CORDIC são os valores calculados x_C . O erro absoluto encontrado é:

$$e_{\cos 1} = |0,540302 - 0,536876| = 0,003426 ; e_{\text{sen } 1} = |0,841471 - 0,843662| = 0,002191.$$

A exatidão anteriormente obtida é, inicialmente, mais coincidência que precisão. De fato, ao se calcular o quarto passo no exemplo 2.1, vê-se que $\alpha_3 \approx 0,879712$, valor um pouco distante de 1 radiano. Sendo assim, na quarta iteração tem-se:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha_3 \\ \text{sen } \alpha_3 \end{pmatrix} = K_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha_3 \\ \text{sen } \alpha_3 \end{pmatrix} = 0,608834 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{11}{8} \end{pmatrix} = 0,608834 \cdot \begin{pmatrix} \frac{67}{64} \\ \frac{81}{64} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,637373 \\ 0,770556 \end{pmatrix}$$

De onde se vê que:

$$e_{\cos 1} = |0,540302 - 0,637373| = 0,097071 ; e_{\text{sen } 1} = |0,841471 - 0,770556| = 0,070915$$

CAP. 2 – CORDIC CIRCULAR: A ORIGEM DO CORDIC

Já no quinto passo $\alpha_4 \approx 0,942192$, ficando novamente mais próximo de 1 radiano. A tabela 2.3 mostra os valores de α_i do sexto até o décimo passo, usando as aproximações como potências de 2 para os ângulos a partir de θ_5 .

α_5	$0,942192 + \frac{1}{32}$	0,973442
α_6	$0,973442 + \frac{1}{64}$	0,989067
α_7	$0,989067 + \frac{1}{128}$	0,9968795
α_8	$0,9968795 + \frac{1}{256}$	1,00078575
α_9	$1,00078575 - \frac{1}{512}$	0,998832625

Tabela 2.3: Aproximações de α_i

Observa-se que a variação torna-se menor conforme aumenta o número de passos, como é de se esperar em uma função aproximadora. Ao mesmo tempo, a precisão na estimativa dos valores de seno e cosseno do arco aumenta. Para determinar o número de iterações necessário para a precisão desejada, é preciso utilizar o seguinte teorema, demonstrado na seção 2.6:

Teorema 1 (teorema da precisão): Utilizando o método CORDIC tem-se, para $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{cases} |\cos \theta - \cos \alpha_{n+1}| < \frac{1}{2^n} \\ |\sen \theta - \sen \alpha_{n+1}| < \frac{1}{2^n} \end{cases}$$

Então, para $n + 1 = 40$, $n = 39$ e $\frac{1}{2^{39}} \approx 1,819 \cdot 10^{-12}$, o que fornece a precisão de dez casas, utilizada pela maioria das calculadoras. Assim, com n fixo em 39, K_n passa a ser uma constante, ficando seu valor $K_{39} = \cos(\theta_{39}) \cdots \cos(\theta_0) \approx 0,607252935$. Ela é implementada no programa diretamente assim como os ângulos, que já são conhecidos. Além deste artifício para poupar memória, vê-se que nem todos os ângulos precisam ser armazenados na tabela LUT. Ao

2.4 – Sequência Recursiva do CORDIC Circular Rotação

se fazer $\theta_n \approx 2^{-n}$, tais ângulos podem ser lançados direto no algoritmo. Nesse exemplo, usou-se os ângulos calculados de θ_0 a θ_4 e fez-se $\theta_i \approx 2^{-i}$, para $5 \leq i \leq n$, diminuindo a memória necessária para a armazenagem de todos os ângulos.

2.4 – Sequência Recursiva do CORDIC Circular Rotação

Usando (2.4) para uma micro rotação anti-horária θ_n , tal que $\text{tg } \theta_n = 2^{-n}$, obtém-se:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \cos \theta_n \cdot [x_n - y_n \cdot 2^{-n}] \\ y_{n+1} = \cos \theta_n \cdot [x_n \cdot 2^{-n} + y_n] \end{cases}$$

ou, analogamente, no caso do ângulo $-\theta_n$ (rotação anti-horária):

$$\begin{cases} x_{n+1} = \cos \theta_n \cdot [x_n + y_n \cdot 2^{-n}] \\ y_{n+1} = \cos \theta_n \cdot [-x_n \cdot 2^{-n} + y_n] \end{cases}$$

Introduzindo-se um operador binário d_n tal que $d_n = 1$ se a rotação é anti-horária, e $d_n = -1$ caso contrário, as equações anteriores podem ser reescritas como:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \cos \theta_n \cdot [x_n - d_n \cdot y_n \cdot 2^{-n}] \\ y_{n+1} = \cos \theta_n \cdot [y_n + d_n \cdot x_n \cdot 2^{-n}] \end{cases} \quad (2.10)$$

Além disso, conforme visto na seção 2.3, temos que $\alpha_n = \sum_{i=0}^n \pm \theta_i$ é o ângulo total rotacionado,

que pode ser reescrito da forma:

$$\alpha_n = \sum_{i=0}^n d_i \cdot \theta_i \quad (2.11)$$

Observou-se que, antes de cada nova micro rotação θ_n , α_n é comparado com θ para determinar se a nova micro rotação será horária ou anti-horária e essa direção de rotação definirá o valor de d_n em (2.10), garantindo a convergência do algoritmo. A forma de comparação de α_n com θ depende do modo de operação do CORDIC. No modo Rotação, ela é direta, pois se conhece o

valor de θ . Mostrar-se-á nas seções 2.7 e 2.8 que no modo Vetoração a comparação é indireta, uma vez que θ não é conhecido.

Essa comparação com θ é feita no próprio algoritmo, introduzindo-se uma nova variável z , que, para qualquer sinal de θ_n e observando apenas que este sinal é definido pelo operador d_n , está associada ao ângulo micro rotacionado da seguinte forma:

$$z_{n+1} = z_n - d_n \cdot \theta_n \quad (2.12)$$

Deste modo, se $z_i \geq 0$, o próximo ângulo, θ_{i+1} , é subtraído. Senão, é somado. Fazendo assim, o próprio sinal de z_i direciona para onde o vetor será rotacionado a cada nova rotação, servindo como a variável de controle da convergência do algoritmo. Ou seja, no modo Rotação:

$$d_n = \text{sign}(z_n) = \begin{cases} 1, & \text{se } z_n \geq 0 \\ -1, & \text{se } z_n < 0 \end{cases}$$

Nos casos em que $\text{tg}\theta_n = 2^{-n}$, reescreve-se (2.12) como: $z_{n+1} = z_n - d_n \cdot \text{tg}^{-1} 2^{-n}$ (2.13)

De acordo com o observado em (2.9), o algoritmo realiza as pseudo rotações a cada ângulo θ_i , completando a operação ao final com o FCE (K_n). As equações das pseudorotações são dadas, a partir de (2.10), por:

$$\begin{cases} x_{n+1}^* = x_n^* - d_n \cdot y_n^* \cdot 2^{-n} \\ y_{n+1}^* = y_n^* + d_n \cdot x_n^* \cdot 2^{-n} \end{cases}$$

Que, juntamente com (2.13), formam as *equações convencionais da iteração CORDIC*:

$$\begin{cases} x_{n+1}^* = x_n^* - d_n \cdot y_n^* \cdot 2^{-n} \\ y_{n+1}^* = y_n^* + d_n \cdot x_n^* \cdot 2^{-n} \\ z_{n+1}^* = z_n^* - d_n \cdot \text{tg}^{-1}(2^{-n}) \end{cases} \quad (2.14)$$

O asterisco foi introduzido na variável z para destacar que estamos lidando com a pseudorotação. Como exemplo, para o cálculo de seno e cosseno de um ângulo θ os valores iniciais são:

2.5 – Teorema Chave para a Convergência do CORDIC

$$x_0^* = K_n; y_0^* = 0 \text{ e } z_0^* = \theta.$$

As provas da convergência de z_{n+1}^* e de que $x_{n+1}^* \approx \cos(\alpha_{n+1})$ e $y_{n+1}^* \approx \sin(\alpha_{n+1})$ são demonstradas na seção 2.6.

2.5 – Teorema Chave para a Convergência do CORDIC

Segundo Edwards e Underwood [4], as propriedades de convergência das sequências originadas do algoritmo CORDIC dependem do seguinte teorema.

Teorema 2 (Teorema de Convergência): Sejam $\theta_0 \geq \theta_1 \geq \dots \geq \theta_n > 0$, termos de uma sequência decrescente de números positivos que satisfazem:

$$\theta_k \leq \theta_n + \sum_{j=k+1}^n \theta_j, \text{ para } 0 \leq k < n. \quad (i)$$

E seja r um número que satisfaz: $|r| \leq \theta_n + \sum_{j=0}^n \theta_j \quad (ii)$

Definindo a sequência $s_0 = 0$ e $s_{k+1} = s_k + \delta_k \cdot \theta_k$, $k = 0, 1, \dots, n$, onde:

$$\delta_k = \text{sgn}(r - s_k) = \begin{cases} 1, & r \geq s_k \\ -1, & r < s_k \end{cases}$$

Então: $|r - s_k| \leq \theta_n + \sum_{j=k}^n \theta_j$, para $0 \leq k \leq n$. Em particular, $|r - s_{n+1}| \leq \theta_n$. (iii)

Demonstração: A prova é feita por indução sobre k .

1. Para $k = 0$, tem-se imediatamente que: $|r - s_0| = |r| \leq \theta_n + \sum_{j=0}^n \theta_j$

2. Assumindo o teorema válido para k , e considerando que $|r - s_{k+1}| = |r - s_k - \delta_k \cdot \theta_k|$:

Se $r - s_k \geq 0$, então $\delta_k = 1$ e vem que $|r - s_k - \delta_k \cdot \theta_k| = |r - s_k| - \theta_k$.

Por outro lado, se $r - s_k < 0$, então $\delta_k = -1$ e:

$$|r - s_k - \delta_k \cdot \theta_k| = |r - s_k + \theta_k| = |s_k - r - \theta_k| = |r - s_k| - \theta_k.$$

Assim, em qualquer caso, tem-se que $|r - s_k - \delta_k \cdot \theta_k| = |r - s_k| - \theta_k$.

Da primeira inequação da hipótese nota-se que:

$$-\left(\theta_n + \sum_{j=k+1}^n \theta_j\right) \leq -\theta_k \leq |r - s_k| - \theta_k$$

Pela hipótese de indução,

$$|r - s_k| \leq \theta_n + \sum_{j=k}^n \theta_j \Leftrightarrow |r - s_k| - \theta_k \leq \left(\theta_n + \sum_{j=k}^n \theta_j\right) - \theta_k = \left(\theta_n + \sum_{j=k+1}^n \theta_j\right)$$

Combinando essas duas inequações: $|r - s_{k+1}| = |r - s_k| - \theta_k \leq \theta_n + \sum_{j=k+1}^n \theta_j$

Que mostra que o teorema é válido para $k + 1$. Finalmente:

$$-\theta_n \leq |r - s_n| - \theta_n \leq 2\theta_n - \theta_n = \theta_n, \text{ e, assim:}$$

$$|r - s_{n+1}| = |r - s_n| - \theta_n \leq \theta_n, \text{ o que completa a prova.} \quad \blacksquare$$

2.6 – Convergência do CORDIC Circular

Esta seção foi desenvolvida com base no artigo de Edwards e Underwood [4]. Para provar que a sequência do CORDIC converge, o Teorema do Valor Médio será necessário.

2.6 – Convergência do CORDIC Circular

Teorema do Valor Médio (TVM): Se f é uma função contínua em um intervalo $[a,b]$ e é derivável em (a, b) , existe $c \in (a, b)$, tal que : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

O teorema 3 estabelece que a sequência $\theta_k = \text{tg}^{-1} 2^{-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$, satisfaz o Teorema de Convergência.

Teorema 3: Para $n > 3$, a sequência $\theta_k = \text{tg}^{-1} 2^{-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$, satisfaz as hipóteses do Teorema de Convergência para todo $|r| \leq \frac{\pi}{2}$.

Demonstração: A sequência dada é uma sequência decrescente de números positivos.

Aplicando o TVM à função $f(x) = \text{tg}^{-1} x$:
$$\frac{\text{tg}^{-1}b - \text{tg}^{-1}a}{b-a} = \frac{1}{1+c^2} \quad (2.15)$$

Sejam $a = 2^{-(j+1)}$ e $b = 2^{-j}$. Então $b - a = 2^{-(j+1)}$ e, como $c > a$, pode-se fazer:

$$\frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+a^2} = \frac{1}{1+2^{-2j-2}} = \frac{2^{2j+2}}{1+2^{2j+2}}$$

Portanto, dos resultados anteriores:

$$\theta_j - \theta_{j+1} = (b-a) \cdot \frac{1}{1+c^2} \leq \frac{1}{2^{j+1}} \cdot \frac{2^{2j+2}}{1+2^{2j+2}} = \frac{2^{j+1}}{1+2^{2j+2}} \quad (2.16)$$

Como $c < b$:
$$\frac{1}{1+c^2} > \frac{1}{1+b^2} = \frac{1}{1+2^{-2j}} = \frac{2^{2j}}{1+2^{2j}} \quad (2.17)$$

Fazendo, agora, $a = 0$ e $b = 2^{-j}$ em (2.15) e usando (2.17), tem-se:

$$\frac{\theta_j - 0}{b-0} = \frac{1}{1+c^2} \Leftrightarrow \theta_j = b \cdot \frac{1}{1+c^2} \geq \frac{1}{2^j} \cdot \frac{2^{2j}}{1+2^{2j}} = \frac{2^j}{1+2^{2j}} \quad (2.18)$$

CAP. 2 – CORDIC CIRCULAR: A ORIGEM DO CORDIC

Usando a série telescópica para θ_j , pode-se combinar as inequações:

$$\theta_k - \theta_n = (\theta_k - \theta_{k+1}) + (\theta_{k+1} - \theta_{k+2}) + \cdots + (\theta_{n-1} - \theta_n)$$

$$\theta_k - \theta_n = \sum_{j=k}^{n-1} (\theta_j - \theta_{j+1}) \stackrel{(2.16)}{\leq} \sum_{j=k}^{n-1} \frac{2^{j+1}}{1 + 2^{2j+2}} = \sum_{j=k+1}^n \frac{2^j}{1 + 2^{2j}} \stackrel{(2.18)}{\leq} \sum_{j=k+1}^n \theta_j$$

Que leva a concluir que: $\theta_k \leq \theta_n + \sum_{j=k+1}^n \theta_j$, para $0 \leq k < n$

E, uma vez que: $\sum_{j=0}^3 \text{tg}^{-1} 2^{-j} \approx 0,7850 + 0,46365 + 0,24498 + 0,12435 \approx 1,618 > \frac{\pi}{2}$,

fica claro que: $|r| \leq \frac{\pi}{2} < \sum_{j=0}^3 \text{tg}^{-1} 2^{-j} < \theta_n + \sum_{j=0}^n \theta_j$ ■

Agora é preciso provar que as sequências para x_k^* e y_k^* convergem para o seno e o cosseno do ângulo desejado.

1) Primeiro, deve-se mostrar que a sequência s_k converge para θ . Definindo-a como:

$$s_k = \theta - z_k^* = \sum_{j=0}^{k-1} \delta_j \theta_j, \text{ vê-se que } s_0 = \theta - z_0^* = 0 \text{ e que } s_{k+1} = \sum_{j=0}^k \delta_j \theta_j = s_k + \delta_k \theta_k.$$

Lembrando que, no modo rotação, $d_n = \text{sgn}(z_n^*)$, para $r = \theta$, tem-se:

$$\delta_k = \text{sgn}(r - s_k) = \text{sgn}(\theta - s_k) = \text{sgn}(z_k^*) = d_k$$

Portanto, esta sequência s_k satisfaz o Teorema de Convergência e:

$$|r - s_{n+1}| \leq \theta_n \Leftrightarrow |\theta - s_{n+1}| \leq \theta_n = \text{tg}^{-1} 2^{-n} \leq \frac{1}{2^n}$$

2.6 – Convergência do CORDIC Circular

2) Para provar que as sequências para x_k^* e y_k^* retornam $x_{n+1}^* = \cos(s_{n+1})$ e $y_{n+1}^* = \text{sen}(s_{n+1})$, precisa-se do seguinte lema:

Lema 1: Para as sequências s_k definidas como anteriormente em (1), e lembrando que $\delta_k = d_k$:

$$\cos(s_{k+1}) = \cos(\theta_k) \cdot [\cos(s_k) - d_k \cdot \text{sen}(s_k) \cdot 2^{-k}] \quad ; \quad \text{sen}(s_{k+1}) = \cos(\theta_k) \cdot [\text{sen}(s_k) + d_k \cdot \text{sen}(s_k) \cdot 2^{-k}]$$

Demonstração: A prova é baseada nas identidades trigonométricas elementares. Para a primeira fórmula, tem-se:

$$\begin{aligned} \cos(s_{k+1}) &= \cos(s_k + d_k \cdot \theta_k) \\ &= \cos(s_k) \cdot \cos(d_k \cdot \theta_k) - \text{sen}(s_k) \cdot \text{sen}(d_k \cdot \theta_k) \\ &= \cos(s_k) \cdot \cos(\theta_k) - d_k \cdot \text{sen}(s_k) \cdot \text{sen}(\theta_k) \\ &= \cos(\theta_k) \cdot [\cos(s_k) - d_k \cdot \text{sen}(s_k) \cdot \text{tg}(\theta_k)] \\ &= \cos(\theta_k) \cdot [\cos(s_k) - d_k \cdot \text{sen}(s_k) \cdot 2^{-k}] \end{aligned}$$

Para a segunda fórmula:

$$\begin{aligned} \text{sen}(s_{k+1}) &= \text{sen}(s_k + d_k \cdot \theta_k) \\ &= \text{sen}(s_k) \cdot \cos(d_k \cdot \theta_k) + \cos(s_k) \cdot \text{sen}(d_k \cdot \theta_k) \\ &= \text{sen}(s_k) \cdot \cos(\theta_k) + d_k \cdot \cos(s_k) \cdot \text{sen}(\theta_k) \\ &= \cos(\theta_k) \cdot [\text{sen}(s_k) + d_k \cdot \cos(s_k) \cdot \text{tg}(\theta_k)] \\ &= \cos(\theta_k) \cdot [\text{sen}(s_k) + d_k \cdot \cos(s_k) \cdot 2^{-k}] \end{aligned} \quad \blacksquare$$

3) Agora, definindo:

$$w_0 = \frac{1}{K}; \quad w_1 = \frac{\cos \theta_0}{K}; \quad \dots; \quad w_k = \frac{\cos \theta_0 \cdot \cos \theta_1 \cdots \cos \theta_{k-1}}{K}; \quad \dots; \quad w_{n+1} = \frac{\cos \theta_0 \cdot \cos \theta_1 \cdots \cos \theta_n}{K}$$

E considerando as sequências:

$$C_k = \frac{\cos(s_k)}{w_k}, \quad \text{com } C_0 = \frac{\cos(s_0)}{w_0} = K \quad \text{e} \quad S_k = \frac{\text{sen}(s_k)}{w_k}, \quad \text{com } S_0 = \frac{\text{sen}(s_0)}{w_0} = 0$$

Com o lema 1, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 C_{k+1} &= \frac{\cos(s_{k+1})}{w_{k+1}} = \frac{\cos(\theta_k) \cdot [\cos(s_k) - d_k \text{sen}(s_k) \cdot 2^{-k}]}{w_{k+1}} \\
 &= \frac{K}{\cos \theta_0 \cdot \cos \theta_1 \cdots \cos \theta_{k-1}} \cdot [\cos(s_k) - d_k \text{sen}(s_k) \cdot 2^{-k}] \\
 &= \frac{\cos(s_k)}{w_k} - \frac{d_k \text{sen}(s_k) \cdot 2^{-k}}{w_k} \\
 C_{k+1} &= C_k - d_k \cdot S_k \cdot 2^{-k}
 \end{aligned}$$

Do mesmo modo:

$$\begin{aligned}
 S_{k+1} &= \frac{\text{sen}(s_{k+1})}{w_{k+1}} = \frac{\cos(\theta_k) \cdot [\text{sen}(s_k) + d_k \cos(s_k) \cdot 2^{-k}]}{w_{k+1}} \\
 &= \frac{K}{\cos \theta_0 \cdot \cos \theta_1 \cdots \cos \theta_{k-1}} \cdot [\text{sen}(s_k) + d_k \cos(s_k) \cdot 2^{-k}] \\
 &= \frac{\text{sen}(s_k)}{w_k} + \frac{d_k \cos(s_k) \cdot 2^{-k}}{w_k} \\
 S_{k+1} &= S_k + d_k \cdot C_k \cdot 2^{-k}
 \end{aligned}$$

Isto é, as equações para C_k e S_k são exatamente aquelas para x_k^* e y_k^* no algoritmo CORDIC.

Como $w_{n+1} = 1$, vem que:

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= C_{n+1} = \frac{\cos(s_{n+1})}{w_{n+1}} = \cos(s_{n+1}) \\
 y_{n+1} &= S_{n+1} = \frac{\text{sen}(s_{n+1})}{w_{n+1}} = \text{sen}(s_{n+1})
 \end{aligned}$$

4) Finalmente, pode-se demonstrar o teorema 1 (teorema de precisão), usado na seção (2.3):

Demonstração: O Teorema do Valor Médio aplicado à função cosseno diz que existe um c entre θ e s_{n+1} tal que:

$$\frac{\cos \theta - \cos(s_{n+1})}{\theta - s_{n+1}} = -\text{sen } c$$

2.7 – O CORDIC no Cálculo da Função Arco Tangente

Portanto, a inequação $|\theta - s_{n+1}| \leq 2^{-n}$ fornece um limite para o erro da computação do cosseno:

$$|\cos \theta - x_{n+1}^*| = |\cos \theta - \cos(s_{n+1})| = |-\text{sen } c| |\theta - s_{n+1}| \leq |\theta - s_{n+1}| \leq 2^{-n}$$

Analogamente: $|\text{sen } \theta - y_{n+1}^*| = |\text{sen } \theta - \text{sen}(s_{n+1})| \leq 2^{-n}$ ■

2.7 – O CORDIC no Cálculo da Função Arco Tangente

A função arco tangente de um ângulo é obtida no modo Vetoração no CORDIC Circular. O princípio de funcionamento é o mesmo do modo Rotação, com a diferença de que, neste caso, se faz o análogo a rotacionar o vetor conhecido $P_0 = (\cos \theta, \text{sen } \theta)$ para o vetor $P = (1, 0)$. Genericamente, em um sistema cartesiano no plano, a rotação em um ângulo $-\theta$, de um vetor qualquer de coordenadas $P_0 = (x_0, y_0)$ e que tem um ângulo $\theta > 0$ com o eixo das abscissas, gera o vetor $P = (x, y)$, conforme a figura 2.5, de modo que:

$$x = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \quad y = 0 \quad (2.19)$$

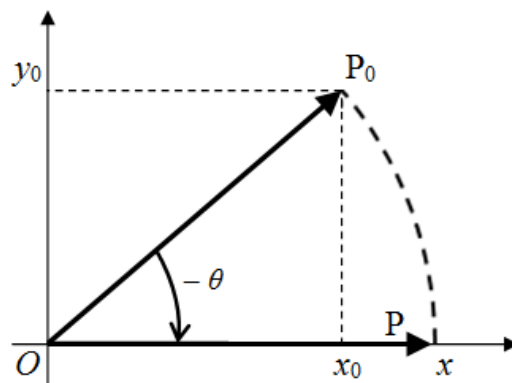


Figura 2.5: Rotação circular do vetor P_0 em um ângulo $-\theta$

Assim, ao impor que a rotação do vetor termine sobre o eixo x , no final temos um vetor cuja abscissa é igual ao seu módulo. Analogamente ao modo Rotação, o ângulo $-\theta$ é obtido através de micro rotações. Além disso, os vetores também são primeiramente pseudo rotacionados, como mostra a figura 2.6.

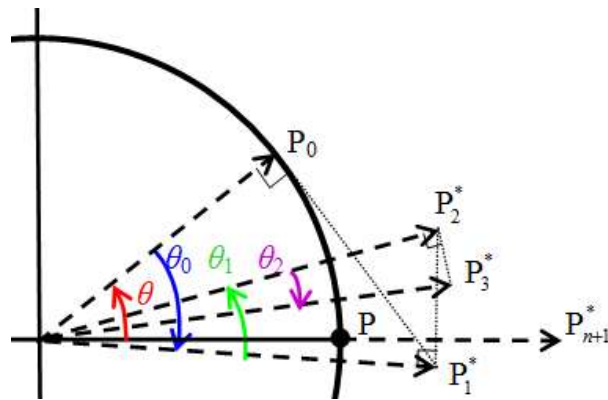


Figura 2.6: Pseudo rotações de P_0 até P_3^* no modo Vetoração. Obtém-se P fazendo-se $P \approx K_n \cdot P_{n+1}^*$.

Como se tem uma rotação genérica de um vetor, por (2.8):

$$P_{n+1} = K_n \cdot M_{\pm\theta_n}^* \cdots M_{\pm\theta_0}^* \cdot P_0 = K_n \cdot P_{n+1}^*$$

Tendo em vista ser o mesmo processo que o do modo Rotação, conclui-se através do mesmo raciocínio lá utilizado que, de acordo com (2.9):

$$P = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} R \cdot \cos \beta_n \\ R \cdot \sin \beta_n \end{pmatrix} = K_n \cdot P_{n+1}^*, \text{ com } R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

Onde β_n é o ângulo que o vetor P_{n+1}^* faz com o eixo x , mostrado na figura 2.7.

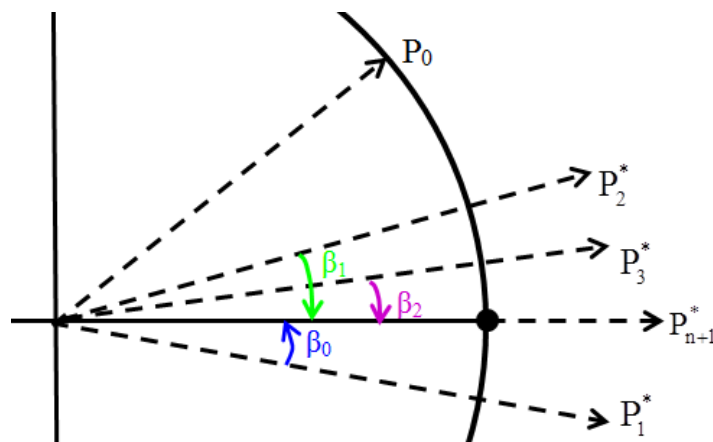


Figura 2.7: Ângulo β_n do vetor P_{n+1}^* com o eixo x .

No modo rotação, β_n era o próprio ângulo α_n , que tendia a θ . Neste modo, vê-se que:

2.7 – O CORDIC no Cálculo da Função Arco Tangente

$$\beta_n = \theta \pm \theta_0 \pm \theta_1 \pm \theta_2 \pm \theta_3 \pm \dots \pm \theta_n.$$

Inicialmente, parece que $\beta_n = \theta - \alpha_n$. Mas, de (2.11), $\alpha_n = \sum_{i=0}^n d_i \theta_i$. E, uma vez que a rotação total ocorre no sentido horário, α_n tende a “ $-\theta$ ”. Percebe-se assim que $\beta_n = \theta + \alpha_n$. Contudo, isso não altera a prova da convergência, que é a mesma do modo Rotação, nem o fato de que β_n tende a 0.

Na verdade, o ângulo θ não é conhecido, sendo um dos objetivos da utilização deste modo. Portanto, não podemos usar β_n para o cálculo de x_{n+1}^* e y_{n+1}^* . Para contornar tal dificuldade, ao invés de se levar em conta o ângulo β_n feito com o eixo x , considerar-se-á o ângulo rotacionado pelo vetor a partir de sua posição inicial. Analisando simplifcamente, percebe-se que este é exatamente o processo que permitiu que o algoritmo funcionasse no modo rotação, pois seria o equivalente a deslocar o eixo x para a posição do vetor inicial P_0 , tornando-o a posição do vetor final após a rotação. Desta forma será novamente analisada a soma α_k das micro rotações, com a diferença de que será o simétrico do caso rotação, uma vez que aqui a rotação total é horária, considerando-se o exemplo a partir do primeiro quadrante.

Como θ não é conhecido, não se pode comparar seu valor com o de α_n para decidir o sinal de cada nova micro rotação, tal como no modo Rotação. Não obstante, percebe-se que a coordenada y_n^* está ligada ao valor de α_n . Caso $|\alpha_n| \geq \theta$, P_{n+1} cai no quarto quadrante, ficando y_{n+1}^* negativo. Caso contrário, P_{n+1} recai sobre o primeiro quadrante e y_{n+1}^* será positivo. Logo, convém analisar o sinal de y_{n+1}^* para decidir o sinal de θ_{n+1} na nova iteração e garantir a convergência do processo. Explicitando numericamente:

Exemplo 2.2: suponha que se quer determinar $\text{tg}^{-1}(1,4)$. Para efeitos de compreensão do algoritmo, considere já conhecido que o ângulo entre P_0 e o eixo x é $\theta = \text{tg}^{-1}(1,4) = 0,950547$ (note que $\theta < \frac{\pi}{2}$). Faz-se, então, a aproximação do ângulo desejado:

1ª iteração – Tomando inicialmente $\theta_0 = \text{tg}^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} = 0,785398$, tem-se:

$$\alpha_0 = -\theta_0 = -0,785398$$

Ao mesmo tempo, na primeira pseudo rotação:

$$P^*_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,4 \\ 0,4 \end{pmatrix}$$

2ª iteração – Note que:

- $-\alpha_0 < \theta$, o que indica que P^*_1 está no primeiro quadrante após a rotação;
- $y^*_1 > 0$, também indicando que P^*_1 está no primeiro quadrante.

A primeira comparação depende do valor de θ , que não é conhecido realmente. Deste modo, a segunda comparação é a mais conveniente. Como $y^*_1 > 0$, a próxima micro rotação deve ser horária. Deste modo:

$$\text{Fazendo } \theta_1 = \text{tg}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0,463648:$$

$$\alpha_1 = -\theta_0 - \theta_1 = -0,785398 - 0,463648 = -1,249046$$

Ao mesmo tempo, na segunda pseudo rotação:

$$P^*_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,4 \\ 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,6 \\ -0,8 \end{pmatrix}$$

3ª iteração – Note novamente que:

- $-\alpha_1 > \theta \Rightarrow P^*_2$ está no quarto quadrante;
- $y^*_2 < 0 \Rightarrow P^*_2$ está no quarto quadrante.

Dadas as considerações na 2ª iteração, interessa apenas o sinal da ordenada do vetor. Uma vez que $y^*_2 < 0$, a próxima micro rotação deve ser anti-horária. Como $\theta_2 = \text{tg}^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 0,244979$:

2.7 – O CORDIC no Cálculo da Função Arco Tangente

$$\alpha_2 = -\theta_0 - \theta_1 + \theta_2 = -1,249046 + 0,244979 = -1,004067$$

Ficando, na terceira pseudo rotação:

$$P^*_3 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,6 \\ -0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,8 \\ -0,15 \end{pmatrix}$$

Procedendo deste modo tem-se a aproximação para P^*_{n+1} e se obtém P fazendo $P \approx K_n \cdot P^*_{n+1}$.

Sendo assim, na terceira iteração:

$$P \approx K_2 \cdot \begin{pmatrix} 2,8 \\ -0,15 \end{pmatrix} = 0,608834 \cdot \begin{pmatrix} 2,8 \\ -0,15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,7047 \\ -0,0913 \end{pmatrix}$$

Observando que: $\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{1,4^2 + 1^2} \approx 1,7205$ e $\theta = \text{tg}^{-1}(1,4) \approx -\alpha_2 = 1,004067$

Para efeito de comparação, prosseguindo até a sétima iteração, ter-se-ia (a análise detalhada do sinal de y^*_{n+1} foi omitida):

$$(y^*_3 < 0 \Rightarrow \theta_3 > 0) \quad (y^*_4 > 0 \Rightarrow \theta_4 < 0) \quad (y^*_5 > 0 \Rightarrow \theta_5 < 0) \quad (y^*_6 < 0 \Rightarrow \theta_6 > 0)$$

$$P^*_7 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{64} \\ \frac{1}{64} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{32} \\ -\frac{1}{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,8 \\ -0,15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,833005 \\ -0,020398 \end{pmatrix}$$

De modo que:

$$P \approx K_6 \cdot \begin{pmatrix} 2,833005 \\ -0,020398 \end{pmatrix} = 0,607278 \cdot \begin{pmatrix} 2,833005 \\ -0,020398 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,720422 \\ -0,012387 \end{pmatrix}$$

E, também: $\text{tg}^{-1}(1,4) \approx -\alpha_6 = -(-\theta_0 - \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 + \theta_6) = 0,957686$

Atente para alguns pontos importantes:

- Comparou-se cada ângulo de rotação α_i com θ para determinar se P_{i+1} está no primeiro ou no quarto quadrante. Entretanto, não há lógica em se fazer isso para determinar $\theta = \text{tg}^{-1}x$, pois θ já deveria ser conhecido. Fez-se isso inicialmente para depois notar que é equivalente a comparar o sinal de y_i^* , de forma que $\alpha_i > \theta \Leftrightarrow y_i < 0$. Assim, no modo Vetoração $d_n = \text{sign}(-y_n^*)$. Tal mudança elimina a necessidade de se conhecer θ previamente.
- α_n tende ao simétrico do ângulo inicial θ que o vetor P_0 faz com o eixo x .

Como o raciocínio é o mesmo, as equações de iteração para os dois modos são as mesmas, mudando apenas na escolha do sinal de d_n e dos valores iniciais para x_0 , y_0 e z_0 . A seção 2.8 resume os dois casos.

2.8 – A Iteração CORDIC Convencional

Conforme visto em (2.14), o algoritmo de Volder é baseado na iteração:

$$\begin{cases} x_{n+1}^* = x_n^* - d_n \cdot y_n^* \cdot 2^{-n} \\ y_{n+1}^* = y_n^* + d_n \cdot x_n^* \cdot 2^{-n} \\ z_{n+1}^* = z_n^* - d_n \cdot \text{tg}^{-1}(2^{-n}) \end{cases}$$

Essas equações foram obtidas, por questões de simplicidade, a partir da rotação do vetor $P_0 = (1, 0)$, para se chegar ao cálculo do seno e do cosseno de um ângulo. Mas, de acordo com Muller [6], podem ser utilizadas para qualquer vetor $P_0 = (x_0, y_0)$. A única restrição ocorre com relação ao ângulo rotacionado, que deve estar dentro da região de convergência. A escolha das coordenadas de P_0 e do ângulo inicial, junto com o modo de iteração do algoritmo, determina o resultado final obtido. Em ambos os modos z_{n+1}^* é a variável associada diretamente ao ângulo rotacionado pelo vetor a partir do vetor de partida. A escolha de z_0 e d_n definem o modo utilizado. No modo Rotação, $d_n = \text{sign}(z_n^*)$ e $z_0^* = \theta$. No modo Vetoração, $d_n = \text{sign}(-y_n^*)$ e $z_0^* = 0$. Genericamente, de acordo com [6]:

Para $d_n = \text{sign}(z_n)$, $z_0 = \theta$ e desde que $|z_0| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \arctg 2^{-i} = 1,7432866204723400035\dots$, então:

2.8 – A Iteração CORDIC convencional

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x_n^* \\ y_n^* \\ z_n^* \end{pmatrix} = K \cdot \begin{pmatrix} x_0 \cdot \cos z_0 - y_0 \cdot \text{sen } z_0 \\ x_0 \cdot \text{sen } z_0 + y_0 \cdot \cos z_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Onde o fator de escala K é tal que $K = \prod_{i=0}^{\infty} \sqrt{1 + 2^{-2i}} = 1,646760258121\dots$

A coordenada z tende a zero, o que leva esse modo a também ser chamado de *Z-reduction*.

Conforme (2.9), $K_n = \prod_{i=0}^n \cos \theta_i$. Além disso: $\cos \theta = \sqrt{\frac{1}{\sec^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta}}$

Para ângulos θ_i tais que $\text{tg} \theta_i = 2^{-i}$ temos: $\cos \theta_i = \frac{1}{\sqrt{1 + 2^{-2i}}}$

De modo que $K_n = \prod_{i=0}^n \frac{1}{\sqrt{1 + 2^{-2i}}}$ e, portanto, $K = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{K_n} \right)$.

Como exemplo, com $|\theta| \leq \theta_{\text{máx}} = \sum_{i=0}^{\infty} \arctg 2^{-i}$, para o cálculo de seno e cosseno de θ , faz-se:

$$x_0 = K^{-1} = 0,6072529350088812561694\dots \quad y_0 = 0 \quad z_0 = \theta$$

Então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x_n^* \\ y_n^* \\ z_n^* \end{pmatrix} = K \cdot \begin{pmatrix} K^{-1} \cdot \cos z_0 - 0 \cdot \text{sen } z_0 \\ K^{-1} \cdot \text{sen } z_0 + 0 \cdot \cos z_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos z_0 \\ \text{sen } z_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por outro lado, partindo de (2.20), tomando inicialmente $z_0 = -\theta$, com θ o ângulo entre o vetor e o eixo x , e lembrando que $d_n = \text{sign}(z_n)$, Observa-se que:

$$\begin{aligned} x_n^* &\rightarrow K \cdot [x_0 \cdot \cos(-\theta) - y_0 \cdot \text{sen}(-\theta)] = K \cdot [x_0 \cdot \cos(\theta) + y_0 \cdot \text{sen}(\theta)] \\ &= K \left(x_0 \cdot \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} + y_0 \cdot \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \right) \end{aligned}$$

$$x_n^* \rightarrow K \cdot \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} y_n^* &\rightarrow K \cdot [x_0 \cdot \text{sen}(-\theta) + y_0 \cdot \text{cos}(-\theta)] = K \cdot [-x_0 \cdot \text{sen}(\theta) + y_0 \cdot \text{cos}(\theta)] \\ &= K \cdot \left[-x_0 \cdot \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} + y_0 \cdot \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \right] \\ y_n^* &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$z_n^* \rightarrow 0 \quad (2.23)$$

Uma vez que $z_{n+1}^* = z_n^* - d_n \cdot \text{tg}^{-1} 2^{-n} \Leftrightarrow z_{n+1}^* = z_0 - \alpha_n$, se $z_{n+1}^* \rightarrow 0$, com $z_0 = -\theta$ então:

$$z_{n+1}^* = z_0 - \alpha_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow \alpha_n \rightarrow -\theta.$$

Como z_0 não é realmente conhecido, não se pode obter d_n a partir do sinal de z_n^* , mas sim do sinal de y_n^* . Sendo assim, z_0 é substituído em (2.20) por α_n , uma vez que $\alpha_n \rightarrow -\theta$, chegando às equações de (2.21) a (2.23). Por último, toma-se, na realidade, $z_0 = 0$, de forma que:

$$z_{n+1}^* = -\alpha_n \Rightarrow z_{n+1}^* \rightarrow -(-\theta) = \theta. \text{ Mais genericamente, } z_n^* \rightarrow z_0 + \text{tg}^{-1} \left(\frac{y_0}{x_0} \right).$$

Portanto, para o cálculo do arcotangente de $\theta = \frac{y_0}{x_0}$, faz-se $x_0 = x_0, y_0 = y_0$ e $z_0 = 0$, resultando:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x_n^* \\ y_n^* \\ z_n^* \end{pmatrix} = K \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \\ 0 \\ \text{tg}^{-1} \left(\frac{y_0}{x_0} \right) \end{pmatrix}$$

Note que agora a coordenada y tende a zero, o que leva esse modo a também ser chamado de *Y-reduction*.

CAPÍTULO 3

CORDIC HIPERBÓLICO

Neste capítulo aborda-se a extensão do CORDIC Circular para o Hiperbólico. Após uma breve explanação sobre ângulo hiperbólico, funções hiperbólicas e algumas de suas propriedades, define-se a rotação e a pseudo rotação hiperbólicas. É abordado o cálculo da função exponencial, seguido de um exemplo numérico onde se pontua uma mudança fundamental na série hiperbólica para garantir a convergência. Comenta-se a precisão e a sequência recursiva para o caso hiperbólico é apresentada. A solução do problema da convergência é fundamentada. A convergência da sequência e a precisão são demonstradas. Os casos da raiz quadrada e do logaritmo são discutidos e exemplificados, abordando-se nos exemplos formas de se estender o raio de convergência.

3.1 – Funções Hiperbólicas

Para maior detalhamento dos assuntos desta seção, consulte o artigo de Sonia Carvalho [2].

O ângulo em um círculo de raio R é definido, em radianos, como a razão entre o comprimento do arco (subentendido por ele) e o raio R . A área do setor circular correspondente ao ângulo θ vale $A_{sc} = \frac{R^2 \cdot \theta}{2}$ unidades de área. Pode-se definir o ângulo a partir da área do seu setor circular. Deste modo, diz-se que um ângulo mede θ radianos se a área do setor associado a ele tem área $A_{sc} = \frac{R^2 \cdot \theta}{2}$. Especificamente, para o círculo de raio 1, um ângulo mede θ radianos se a área do setor circular correspondente mede $\theta/2$ unidades de área. Seja agora a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$. O ponto P a ela pertencente define um setor AOP e um ângulo $A\hat{O}P$. Analogamente ao ângulo circular, define-se que o ângulo hiperbólico $A\hat{O}P$ mede θ se a área do setor hiperbólico AOP vale $\theta/2$ unidades de área (figura 3.1). Note que o ângulo hiperbólico

CAP. 3 – CORDIC HIPERBÓLICO

não é igual ao ângulo circular, como é fácil perceber ao se comparar o setor circular com o setor hiperbólico correspondente.

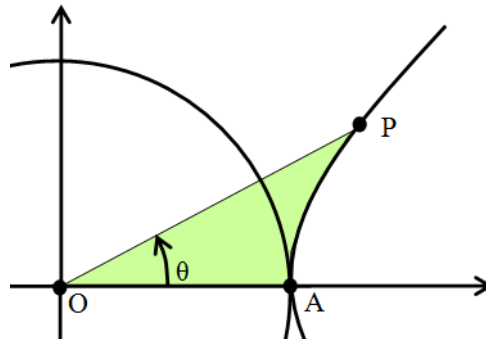


Figura 3.1: Setor e ângulo hiperbólicos.

Adotar-se-á a seguinte convenção:

- se o ponto P está acima do eixo das abscissas, o ângulo que ele define terá medida positiva.
- se o ponto P está abaixo do eixo das abscissas, o ângulo que ele define terá medida negativa.

Assim, um ângulo hiperbólico, tendo medida $\pm \frac{1}{2} \cdot A_{OAP}$, assumirá valores entre $-\infty$ e $+\infty$.

Reitera-se que estas medidas não são as mesmas caso tais ângulos fossem medidos no círculo.

Neste caso, os valores estariam, correspondentemente, entre $-\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{4}$.

As funções hiperbólicas são definidas analogamente às funções trigonométricas circulares. Seja M um ponto sobre a curva $x^2 - y^2 = 1$ tal que o setor OAM tenha área $\theta/2$. O ângulo \widehat{AOM} tem medida θ . Seja AR a reta tangente à curva em A (figura 3.2). Defina-se:

$$\cosh \theta = ON \quad \sinh \theta = MN \quad \operatorname{tgh} \theta = AR$$

Como $OAR \sim OMN$, vem que:

$$\frac{AR}{1} = \frac{MN}{ON} \Leftrightarrow \operatorname{tgh} \theta = \frac{\sinh \theta}{\cosh \theta} \quad (3.1)$$

Pode-se definir as funções $\operatorname{coth} \theta$, $\operatorname{sech} \theta$ e $\operatorname{cosech} \theta$ analogamente às funções circulares. Para o ponto M, tem-se que:

$$x^2 - y^2 = ON^2 - MN^2 = 1 \Leftrightarrow \cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1. \quad (3.2)$$

3.1 – Funções Hiperbólicas

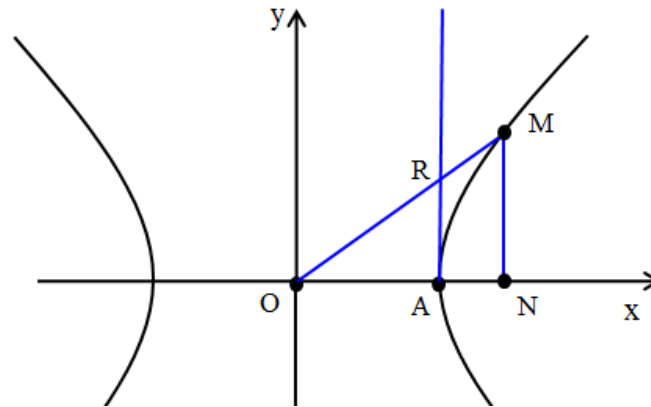


Figura 3.2: Funções hiperbólicas.

De onde vem que:

$$1 - \operatorname{tgh}^2 \theta = \operatorname{sech}^2 \theta \quad \text{e} \quad \operatorname{cotgh}^2 \theta - 1 = \operatorname{cosech}^2 \theta$$

As igualdades abaixo são válidas:

$$\cosh \theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh \theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} \quad (3.3)$$

Das relações entre as funções hiperbólicas, chega-se a:

$$\operatorname{tgh} \theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{e^\theta + e^{-\theta}} = \frac{e^{2\theta} - 1}{e^{2\theta} + 1} \quad \operatorname{cotgh} \theta = \frac{1}{\operatorname{tgh} \theta} \quad \operatorname{sech} \theta = \frac{2}{e^\theta - e^{-\theta}} \quad \cosh \theta = \frac{2}{e^\theta + e^{-\theta}}$$

As funções hiperbólicas não são periódicas e seus limites, como pode ser observado, são diferentes, reforçando que são funções semelhantes às trigonométricas apenas na ideia de sua construção. Sua paridade é igual à de suas correspondentes trigonométricas.

Tais funções apresentam propriedades semelhantes às das funções trigonométricas, dentre as quais, além de 3.2, as mais importantes para o CORDIC são:

$$\begin{aligned} \cosh(x \pm y) &= \cosh(x) \cosh(y) \pm \sinh(x) \cdot \sinh(y) \\ \sinh(x \pm y) &= \sinh(x) \cosh(y) \pm \cosh(x) \cdot \sinh(y) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Outro resultado importante para o CORDIC Hiperbólico depende do teorema seguinte:

Teorema 4: $\frac{1}{2} \cdot \text{tgh}(\theta) \leq \text{tgh}\left(\frac{\theta}{2}\right)$, para $\theta \geq 0$.

Demonstração:

$$\frac{1}{2} \cdot \text{tgh}(\theta) \leq \text{tgh}\left(\frac{\theta}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2\theta} - 1}{e^{2\theta} + 1} \leq \frac{e^{\theta} - 1}{e^{\theta} + 1} \Leftrightarrow (e^{2\theta} - 1)(e^{\theta} + 1) \leq 2(e^{\theta} - 1)(e^{2\theta} + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{3\theta} + e^{2\theta} - e^{\theta} - 1 \leq 2e^{3\theta} - 2e^{2\theta} + 2e^{\theta} - 2 \Leftrightarrow e^{3\theta} - 3e^{2\theta} + 3e^{\theta} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow (e^{\theta} - 1)^3 \geq 0.$$

Como $\theta \geq 0$, $(e^{\theta} - 1) \geq 0$. Logo, $\frac{1}{2} \cdot \text{tgh}(\theta) \leq \text{tgh}\left(\frac{\theta}{2}\right)$. ■

Corolário 1: Se x_0 é fixo e tal que $x_0 \leq \text{tgh}(2x_0)$, então $\frac{x_0}{2} \leq \text{tgh}(x_0)$.

Demonstração:

$$x_0 \leq \text{tgh}(2x_0) \Rightarrow \frac{x_0}{2} \leq \frac{1}{2} \cdot \text{tgh}(2x_0). \text{ Do teorema anterior: } \frac{x_0}{2} \leq \frac{1}{2} \cdot \text{tgh}(2x_0) \leq \text{tgh}(x_0) \quad \blacksquare$$

Teorema 5: Se $x = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, então $\frac{1}{2^n} \leq \text{tgh}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$

Demonstração: A prova é feita por indução.

Seja $P(n): \frac{1}{2^n} \leq \text{tgh}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$

i) Para $n = 1$: $\frac{1}{2} \leq \text{tgh}(1) \approx 0.762$. Logo, $P(1)$ é válida.

ii) Deve-se agora provar que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$:

3.2 – Rotação e Pseudo Rotação Hiperbólica

$$\frac{1}{2^n} \leq \operatorname{tgh}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right). \text{ Do corolário (C.1): } \frac{1}{2^{n+1}} \leq \operatorname{tgh}\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

Logo, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ e $P(n)$ é válida $\forall n \in \mathbb{N}^*$. ■

Corolário 2: $\operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

Este é o resultado procurado. A demonstração é imediata aplicando a função tangente hiperbólica inversa no teorema 5. Por fim, pode-se mostrar que:

$$\sinh(x) + \cosh(x) = e^x \quad \text{e} \quad \ln(u) = 2 \cdot \operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{u-1}{u+1}\right), \text{ para } u > 0 \quad (3.5)$$

3.2 – Rotação e Pseudo Rotação Hiperbólica

Em um sistema cartesiano no plano, a rotação hiperbólica em um ângulo $\theta > 0$, anti-horário, é entendida como o deslocamento do vetor de modo que sua extremidade percorra um ângulo hiperbólico θ em relação à posição inicial, permanecendo sua extremidade sobre a hipérbole. É importante notar que a rotação hiperbólica não tem o mesmo significado que a rotação circular, de modo que somente esta conserva a ideia de uma rotação no sentido correto da palavra. Partindo de um vetor representado pelo ponto $P_1 = (x_1, y_1) = (\cosh \theta_1, \sinh \theta_1)$, gera-se um vetor $P = (x, y)$ conforme na figura 3.3:

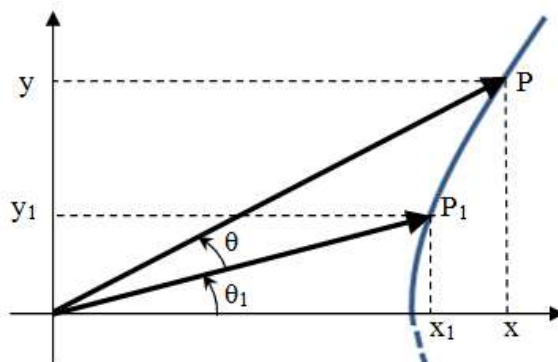


Figura 3.3: Rotação do vetor P_1 em um ângulo hiperbólico θ .

Das definições das funções hiperbólicas e de suas propriedades, vem que:

$$\begin{aligned} x &= \cosh(\theta + \theta_1) = \cosh \theta \cdot \cosh \theta_1 + \sinh \theta \cdot \sinh \theta_1 \\ y &= \sinh(\theta + \theta_1) = \sinh \theta \cdot \cosh \theta_1 + \sinh \theta_1 \cdot \cosh \theta \end{aligned}$$

De modo que as coordenadas de P são:

$$\begin{cases} x = x_1 \cdot \cosh \theta + y_1 \cdot \sinh \theta \\ y = x_1 \cdot \sinh \theta + y_1 \cdot \cosh \theta \end{cases} \quad (3.6)$$

Se $\theta > 0$, para $-\theta < 0$, a rotação é no sentido horário e usa-se a paridade das funções seno e cosseno hiperbólicos, ficando as equações (3.6) da forma:

$$\begin{cases} x = x_1 \cdot \cosh \theta - y_1 \cdot \sinh \theta \\ y = -x_1 \cdot \sinh \theta + y_1 \cdot \cosh \theta \end{cases}$$

Sem perda de generalidade, será observado inicialmente o caso $\theta \geq 0$ para definir a pseudo rotação hiperbólica, uma vez que a paridade das funções define o caso $-\theta < 0$.

Chamando $Mh_\theta = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix}$, pode-se escrever (3.6) da forma: $P = Mh_\theta \cdot P_1$ (3.7)

Além disso, Mh_θ pode ser reescrita como: $Mh_\theta = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} = \cosh \theta \cdot \begin{pmatrix} 1 & \text{tgh } \theta \\ \text{tgh } \theta & 1 \end{pmatrix}$

de forma que: $P = \cosh \theta \cdot \begin{pmatrix} 1 & \text{tgh } \theta \\ \text{tgh } \theta & 1 \end{pmatrix} \cdot P_1$ (3.8)

que é equivalente a: $\begin{cases} x = \cosh \theta \cdot [x_1 + y_1 \cdot \text{tgh } \theta] \\ y = \cosh \theta \cdot [y_1 \cdot \text{tgh } \theta + x_1] \end{cases}$ (3.9)

Desconsiderando o termo $\cosh \theta$, obtém-se: $\begin{cases} x^* = x_1 + y_1 \cdot \text{tgh } \theta \\ y^* = y_1 \cdot \text{tgh } \theta + x_1 \end{cases}$ (3.10)

3.3 – O CORDIC no Cálculo da Função Exponencial

Analogamente a (3.8), faz-se $Mh_{\theta}^* = \begin{pmatrix} 1 & \operatorname{tgh} \theta \\ \operatorname{tgh} \theta & 1 \end{pmatrix}$, ficando (3.10) reescrita da forma:

$$P^* = \begin{pmatrix} 1 & \operatorname{tgh} \theta \\ \operatorname{tgh} \theta & 1 \end{pmatrix} \cdot P_1 \Leftrightarrow P^* = Mh_{\theta}^* \cdot P_1 \quad (3.11)$$

As equações (3.10) e sua equivalente (3.11) são uma *pseudo rotação hiperbólica* do vetor P_0 (figura 3.4). O vetor $P^* = (x^*, y^*)$ tem um decréscimo em sua magnitude de $\frac{1}{\cosh \theta}$ em relação ao vetor P_1 , não sendo uma rotação exata, conforme observado das equações (3.9) e (3.10).

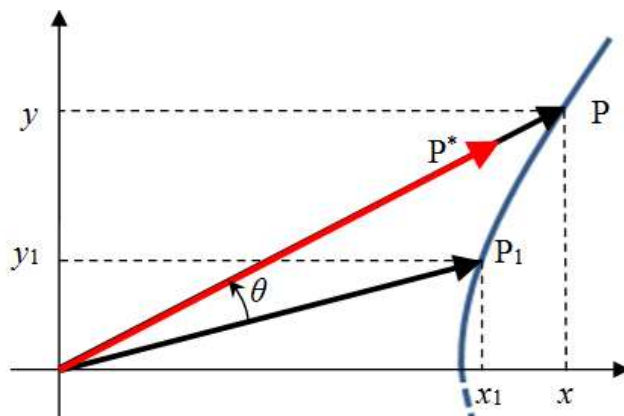


Figura 3.4: Pseudo rotação hiperbólica, de um ângulo θ , para o vetor P_1

3.3 – O CORDIC no Cálculo da Função Exponencial

Pela semelhança entre as funções hiperbólicas e trigonométricas, é natural tentar no CORDIC a substituição de $\operatorname{tg}^{-1} 2^{-n}$ por $\operatorname{tgh}^{-1} 2^{-n}$, esperando que uma ligeira modificação do algoritmo permita usá-lo para o cálculo destas novas funções. Ainda que Volder tenha sugerido tal possibilidade, de acordo [6], foi John Walther [11] quem encontrou a modificação correta em 1971, obtendo a iteração generalizada na forma hiperbólica e também na forma denominada linear, o que permitiu o cálculo de várias funções. Na seção 3.2, chegou-se às equações para a rotação hiperbólica através das mesmas manipulações utilizadas para se obter as equações da rotação circular. Entretanto, a analogia não é completa. Para os ângulos da forma $\theta = \operatorname{tgh}^{-1} 2^{-n}$, a condição de convergência para a sequência não se verifica, sendo necessárias algumas modificações, o que não impede de acompanhar o processo realizado. Sendo assim, primeiramente será apresentada a ideia geral para, depois, detalhar tais ajustes.

Considere o cálculo da função exponencial. As equações (3.5) destacam a relação entre esta e as funções hiperbólicas, motivo pelo qual se depende, na realidade, dos valores de $\sinh \theta$ e $\cosh \theta$, que são obtidos no modo Rotação Hiperbólico. Observando que $\operatorname{tgh}^{-1} 2^0$ não existe, inicia-se a sequência por $\operatorname{tgh}^{-1} 2^{-1}$. Partindo-se, para coincidir a notação, do ponto $P_1 = (1, 0)$ e rotacionando-o de $\theta > 0$, tem-se que $P = (\cosh \theta, \sinh \theta)$. Tal rotação só pode ser feita se forem conhecidos $\cosh \theta$ e $\sinh \theta$, o que é, como na Rotação Circular, o objetivo final. Aqui também o CORDIC realiza a rotação através de micro rotações, o número destas depende mais uma vez da precisão desejada e são realizadas primeiro as pseudo rotações (figura 3.5).

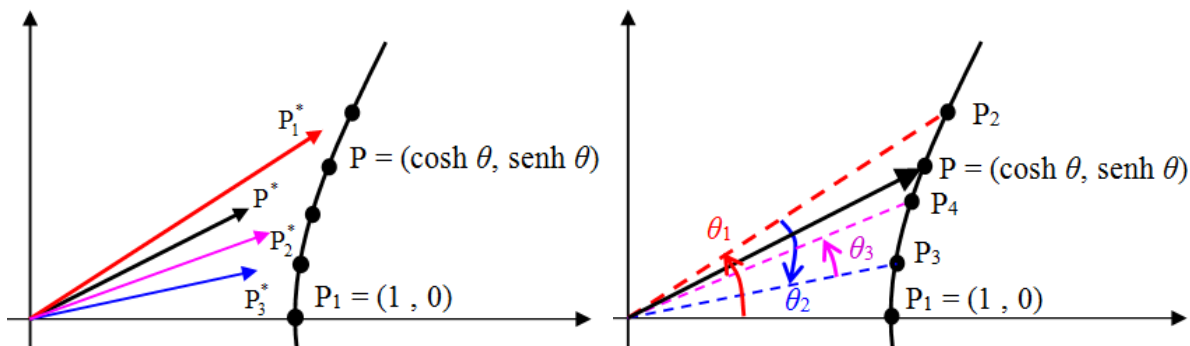


Figura 3.5: Pseudorotações hiperbólicas e seus respectivos vetores e ângulos.

Por um raciocínio análogo ao da seção 2.3, a partir de (3.9) e (3.11), também se espera que:

$$P = \begin{pmatrix} \cosh \theta \\ \sinh \theta \end{pmatrix} \approx P_{n'+1} = \begin{pmatrix} \cosh \alpha_n \\ \sinh \alpha_n \end{pmatrix} = K_n' \cdot P_{n'+1}^* \quad (3.12)$$

$$K_n' = \cosh \theta_n \cdots \cosh \theta_1 = \prod_{i=1}^{n'} \cosh \theta_i ; P_{n'+1}^* = Mh_{\pm \theta_n}^* \cdots Mh_{\pm \theta_1}^* \cdot P_1 \quad \text{e} \quad \alpha_n = \sum_{i=1}^{n'} \pm \theta_i$$

Na verdade, K_n' e $P_{n'+1}^*$ precisam de correções, uma vez que a sequência $\operatorname{tgh}^{-1} 2^{-n'}$ não converge. Esclarecendo numericamente:

Exemplo 3.1: Obter o valor de $e^{0,549}$. Tentar-se-á aproximar $\theta = 0,549$ para o ângulo hiperbólico por meio da soma dos termos de $\pm \theta_k = \operatorname{tgh}^{-1} 2^{-k}$. A cada resultado o subtotal é comparado com o valor desejado, definindo o sinal do próximo termo. O subtotal α_k é soma dos termos de θ_1 até θ_k com o sinal necessário para tentar a aproximação. Os resultados são mostrados na tabela 3.1.

3.3 – O CORDIC no Cálculo da Função Exponencial

k'	$\theta_{k'}$	$\alpha_{k'}$		k'	$\theta_{k'}$	$\alpha_{k'}$
1	0,54930614(+)	0,54930614		13	0,00012207(+)	0,54452168
2	0,25541281(-)	0,29389333		14	0,00006104(+)	0,54458271
3	0,12565721(+)	0,41955055		15	0,00003052(+)	0,54461323
4	0,06258157(+)	0,48213212		16	0,00001526(+)	0,54462849
5	0,03126018(+)	0,51339230		17	0,00000763(+)	0,54463612
6	0,01562627(+)	0,52901857		18	0,00000381(+)	0,54463994
7	0,00781266(+)	0,53683123		19	0,00000191(+)	0,54464184
8	0,00390627(+)	0,54073750		20	0,00000095(+)	0,54464280
9	0,00195313(+)	0,54269062		21	0,00000048(+)	0,54464327
10	0,00097656(+)	0,54366719		22	0,00000024(+)	0,54464351
11	0,00048828(+)	0,54415547		23	0,00000012(+)	0,54464363
12	0,00024414(+)	0,54439961		24	0,00000006(+)	0,54464369

Tabela 3.1: Aproximações para $\theta = 0,549$

Os argumentos ficam cada vez menores, enquanto α_k não se aproxima o suficiente do valor desejado. Tal fato ocorre porque o valor de θ_2 é maior que a soma de todos os outros termos consecutivos a ele (θ_3 a θ_{24}) por mais que o valor do último termo da sequência, não

obedecendo à condição de convergência de que $\theta_k - \sum_{j=k'+1}^{n'} \theta_j \leq \theta_{n'}$. Com isso, ao subtrair θ_2 , o

subtotal em $k' = 2$ ficou mais longe do ângulo desejado do que os termos restantes podem cobrir. A tabela 3.2 analisa os primeiros dezoito argumentos da série e a respectiva soma

$\gamma_{k'} = \sum_{i=k'+1}^{n'} \theta_i$ para uma comparação de quais não obedecem a tal condição:

k'	$\theta_{k'}$	$\gamma_{k'}$	$\theta_{k'} - \gamma_{k'}$		k'	$\theta_{k'}$	$\gamma_{k'}$	$\theta_{k'} - \gamma_{k'}$
1	0,54930614	0,50615941	0,04314673		10	0,00097656	0,00097275	0,00000381
2	0,25541281	0,25074660	0,00466621		11	0,00048828	0,00048447	0,00000381
3	0,12565721	0,12508939	0,00056782		12	0,00024414	0,00024033	0,00000381
4	0,06258157	0,06250782	0,00007375		13	0,00012207	0,00011826	0,00000381
5	0,03126018	0,03124764	0,00001254		14	0,00006104	0,00005722	0,00000382
6	0,01562627	0,01562137	0,0000049		15	0,00003052	0,00002670	0,00000382
7	0,00781266	0,00780871	0,00000395		16	0,00001526	0,00001144	0,00000382
8	0,00390627	0,00390244	0,00000383		17	0,00000763	0,00000381	0,00000382
9	0,00195313	0,00194931	0,00000382		18	0,00000381		

Tabela 3.2: Comparação dos termos da sequência $\theta_k = \text{tgh}^{-1} 2^{-k}$.

CAP. 3 – CORDIC HIPERBÓLICO

Vê-se que cada argumento excede a soma dos termos restantes por mais que o último termo 0,0000381 (a igualdade nos casos para k' de 10 a 13 ocorre apenas por causa da aproximação feita na oitava casa). O fato de alguns argumentos não possuírem a propriedade necessária de cobertura de seu valor pela soma dos termos restantes faz com que o algoritmo possa não conseguir aproximar certos ângulos com precisão suficiente para permitir o cálculo de valores confiáveis para $\cosh \theta$ e $\sinh \theta$.

A solução encontrada foi realizar entradas duplas para alguns argumentos da série. Com essa duplicação, cada argumento será excedido pela soma dos restantes, satisfazendo a condição de convergência do teorema. Na tabela 3.3, alguns termos foram repetidos e é novamente feita a soma $\gamma_{k'}$. Note que $\theta_{k'} = \text{tg}^{-1} 2^{-k}$.

k'	k	$\theta_{k'}$	$\gamma_{k'}$		k'	k	$\theta_{k'}$	$\gamma_{k'}$
1	1	0,54930614	0,57712204		13	11	0,00048828	0,00105286
2	2	0,25541281	0,32170922		14	*11	0,00048828	0,00056458
3	3	0,12565721	0,19605201		15	12	0,00024414	0,00032043
4	4	0,06258157	0,13347044		16	13	0,00012207	0,00019836
5	*4	0,06258157	0,07088887		17	14	0,00006104	0,00013733
6	5	0,03126018	0,03962869		18	*14	0,00006104	0,00007629
7	6	0,01562627	0,02400242		19	15	0,00003052	0,00004578
8	7	0,00781266	0,01618976		20	16	0,00001526	0,00003052
9	*7	0,00781266	0,00837710		21	*16	0,00001526	0,00001526
10	8	0,00390627	0,00447083		22	17	0,00000763	0,00000763
11	9	0,00195313	0,00251770		23	18	0,00000381	0,00000381
12	10	0,00097656	0,00154114		24	*18	0,00000381	

Tabela 3.3: Comparação dos termos da sequência $\theta_{k'} = \text{tgh}^{-1} 2^{-k}$ (após as repetições).

Assim, cada argumento que estiver entre $\pm (0,54930614 + 0,57712204)$ pode ser aproximado para menos de 0,00000381, o último termo da tabela. Repare que, com a repetição, tem-se de novo 24 iterações. Realizando uma nova tentativa, pode-se agora aproximar $\theta = 0,549$ com sucesso:

3.3 – O CORDIC no Cálculo da Função Exponencial

k'	k	$\theta_{k'}$	$\alpha_{k'}$		k'	k	$\theta_{k'}$	$\alpha_{k'}$
1	1	0,54930614(+)	0,54930614		13	11	0,00048828(-)	0,54911683
2	2	0,25541281(-)	0,29389333		14	*11	0,00048828(-)	0,54862855
3	3	0,12565721(+)	0,41955055		15	12	0,00024414(+)	0,54887269
4	4	0,06258157(+)	0,48213212		16	13	0,00012207(+)	0,54899476
5	*4	0,06258157(+)	0,54471369		17	14	0,00006104(+)	0,54905580
6	5	0,03126018(+)	0,57597387		18	*14	0,00006104(-)	0,54899476
7	6	0,01562627(-)	0,56034760		19	15	0,00003052(+)	0,54902528
8	7	0,00781266(-)	0,55253494		20	16	0,00001526(-)	0,54901002
9	*7	0,00781266(-)	0,54472228		21	*16	0,00001526(-)	0,54899476
10	8	0,00390627(+)	0,54862855		22	17	0,00000763(+)	0,54900239
11	9	0,00195313(+)	0,55058168		23	18	0,00000381(-)	0,54899858
12	10	0,00097656(-)	0,54960511		24	*18	0,00000381(+)	0,54900239

Tabela 3.4: Aproximações para $\theta = 0,549$ com repetição de termos

Não ficou claro nas fontes pesquisadas qual o critério utilizado para determinar quais entradas devesseser repetidas. Eklund [5] observou que os passos que precisam ser repetidos dependem da escolha do n . Por exemplo, se $n' = 13$, então $k' = 13$ e $k' = 4$ precisam ser repetidos enquanto que, se $n' = 14$, $k' = 14$, $k' = 5$ e $k' = 2$ precisam ser repetidos a fim de satisfazer a condição do Teorema de Convergência. O exemplo 3.1, extraído do artigo de Parris [7], ilustra um desses casos para $n' = 18$. Para contornar o problema da escolha dos termos, Eklund propôs que se repetissem todos eles a partir do segundo. Já Walther [11] afirmou que apenas certos passos fixos da iteração, e, portanto, o θ_k correspondente, precisam ser repetidos.

Uma vez que o argumento pode agora ser aproximado, os valores de $\sinh \theta$ e $\cosh \theta$ também convergem para valores confiáveis. Portanto, de acordo com (3.12), na quinta iteração do exemplo 3.1, onde ocorre a repetição do argumento θ_4 , e lembrando que $\tanh(-\theta) = -\tanh(\theta)$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cosh \alpha_5 \\ \sinh \alpha_5 \end{pmatrix} &= K'_5 \cdot Mh_{\theta_4}^* \cdot Mh_{\theta_4}^* \cdot Mh_{\theta_3}^* \cdot Mh_{-\theta_2}^* \cdot Mh_{\theta_1}^* \cdot P_1 = \\ &= K'_5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,152061 \\ 0,572053 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

CAP. 3 – CORDIC HIPERBÓLICO

Com $K'_5 = \cosh \theta_4 \cosh \theta_4 \cosh \theta_3 \cosh \theta_2 \cosh \theta_1 = 1,206711$

Logo, $\cosh \alpha_5 \approx 1,152061$ e $\sinh \alpha_5 \approx 0,572053$. Em uma calculadora científica, tem-se que $\cosh 0,549 = 1,154524$ e $\sinh 0,549 = 0,576997$, com imprecisão na sexta casa.

Para se obter o valor de $e^{0,549}$, basta fazer:

$$e^{0,549} = \sinh 0,549 + \cosh 0,549 \approx 1,152061 + 0,572053 \approx 1,724114.$$

Com a calculadora, $e^{0,549} = 1,731521$, com imprecisão na sexta casa. Ainda que pareça muito preciso, lembre que tal fato é mais coincidência que exatidão. Há a necessidade de se iterar mais termos para garantir a precisão realmente na sexta casa. Como há o problema de se repetir alguns argumentos, as séries têm uma discrepância entre a posição do termo e o argumento utilizado. É preciso primeiro fazer a correção da notação antes de se enunciar o teorema da precisão.

Eklund trabalha com a repetição de todos os termos a partir do segundo para contornar o problema da escolha das iterações a serem repetidas. Em termos computacionais, isso gera problemas de custo operacional, uma vez que tal algoritmo é usado quando se deseja economizar memória e realizar o menor número de operações possíveis. Walther afirmou que a repetição dos termos θ_{3i+1} na série garantiria a convergência, onde inicialmente $i = 1$ e depois i assume o valor obtido para $3i + 1$. Como a sequência de Walther refaz apenas algumas iterações, aparenta ser mais vantajosa. Deste modo, apenas os termos de índice 3, 13, 40, ..., i , $3i+1$, ... precisam ser repetidos na sequência para que ocorra a convergência. Independente da repetição adotada, deve-se renumerar os termos para que a nova sequência se adapte ao formato da condição de convergência do teorema. Para o caso de Eklund, tem-se que:

$$(\theta_1, \theta_2, \theta_2, \theta_3, \theta_3, \dots, \theta_n, \theta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$$

Seja a função teto, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, definida como: $\lceil x \rceil = \min \{ n \in \mathbb{Z} \mid x \leq n \}$

Define-se a função:

$$\lambda(k') = \left\lceil \frac{k'+1}{2} \right\rceil \quad (3.13)$$

3.3 – O CORDIC no Cálculo da Função Exponencial

Tem-se, então, que $\varepsilon_{k'} = \theta_{\lambda(k')}$

Na sequência de Walther:

$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_4, \dots, \theta_n, \theta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$$

Define-se, para este caso, a função:

$$\lambda(k') = k' - j, \quad j \text{ o maior inteiro tal que } 3^{j+1} + 2j - 1 \leq 2k' \quad (3.14)$$

Note que:

$\lambda(4) = 4 - 0 = 4$, $\lambda(5) = 5 - 1 = 4$, $\lambda(14) = 14 - 1 = 13$, $\lambda(15) = 15 - 3 = 13$ e assim por diante.

A sequência $\varepsilon_{n'}$ pode também ser renumerada da forma $\varepsilon_{k'} = \theta_{\lambda(k')}$.

Em ambos os casos e desde que $\lambda(k' - 1) = \lambda(k')$, a sequência $\varepsilon_{k'} = \theta_{\lambda(k')}$ satisfaz o critério de convergência, fato que é demonstrado na seção 3.5.

Corrigindo, então, $K_{n'}$ e $P_{n'+1}^*$ em (3.12), chega-se a:

$$K_{n'} = \prod_{k=1}^{n'} \sqrt{1 - 2^{-2\lambda(k')}}; \quad P_{n'+1}^* = Mh_{\pm\theta_{\lambda(n')}}^* \cdots Mh_{\pm\theta_{\lambda(1)}}^* . P_1 \quad (3.15)$$

Voltando ao problema do número de iterações necessárias, por analogia ao caso Circular, chega-se ao teorema 6, também demonstrado na seção 3.5.

Teorema 6 (teorema de precisão): Utilizando o método CORDIC, tem-se que, para θ no intervalo de validade das sequências mencionadas:

$$\begin{cases} |\cosh \theta - \cosh \alpha_{n'}| < \frac{1}{2^{\lambda(n')-2}} \\ |\sinh \theta - \sinh \alpha_{n'}| < \frac{1}{2^{\lambda(n')-2}} \end{cases}$$

CAP. 3 – CORDIC HIPERBÓLICO

Tal precisão está condicionada à convergência da sequência usada no tipo Hiperbólico, que, por sua vez, está sujeita à entrada dupla de alguns de seus termos. A função $\lambda(n')$ considera essa repetição e é da forma (3.13) ou (3.14).

De acordo com a repetição proposta por Walther, para $n' = 43$, $\lambda(43) = 40$, de forma que $\frac{1}{2^{38}} \approx 3,638 \cdot 10^{-12}$, o que fornece a precisão de dez casas. Deste modo, com n' fixo, por exemplo, em 43, $K'_{n'}$ passa a ser uma constante. Sabendo que os termos repetidos são θ_4 , θ_{13} e θ_{40} , o valor $K'_{n'}$ fica:

$$K'_{43} = \cosh(\theta_{40}) \cdot \cosh(\theta_{40}) \cdots \cosh(\theta_1) \approx 1,207497069$$

Pela proposta de Eklund, ter-se-ia para $\lambda(n') = 40$ que $n' = 79$, sendo que:

$$K'_{79} = \cosh(\theta_{40}) \cdot \cosh(\theta_{40}) \cdots \cosh(\theta_2) \cdot \cosh(\theta_2) \cdot \cosh(\theta_1) \approx 1,257448788$$

3.4 – Sequência Recursiva do CORDIC Hiperbólico

Por meio de um raciocínio análogo ao caso Circular, chega-se às iterações hiperbólicas:

$$\begin{cases} x_{n'+1}^* = x_{n'}^* + d_{n'} \cdot y_{n'}^* \cdot 2^{-\lambda(n')} \\ y_{n'+1}^* = y_{n'}^* + d_{n'} \cdot x_{n'}^* \cdot 2^{-\lambda(n')} \\ z_{n'+1}^* = z_{n'}^* - d_{n'} \cdot \operatorname{tgh}^{-1}(2^{-\lambda(n')}) \end{cases} \quad (3.16)$$

Com $\lambda(n')$ conforme (3.13) ou (3.14). No modo Rotação, $d_{n'} = \operatorname{sign}(z_{n'}^*)$, que leva a:

$$\begin{cases} x_{n'} \rightarrow K'(x_1 \cosh z_1 + y_1 \cdot \sinh z_1) \\ y_{n'} \rightarrow K'(x_1 \sinh z_1 + y_1 \cdot \cosh z_1) \\ z_{n'} \rightarrow 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Para o modo Vetoração, onde $d_{n'} = \operatorname{sign}(-y_{n'}^*)$, as equações (3.16) nos levam a:

3.4 – Sequência Recursiva do CORDIC Hiperbólico

$$\begin{cases} x_{n'} \rightarrow K' \cdot \sqrt{x_1^2 - y_1^2} \\ y_{n'} \rightarrow 0 \\ z_{n'} \rightarrow z_1 + \operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{y_1}{x_1}\right) \end{cases} \quad (3.18)$$

De modo análogo ao caso Circular, K' é o FCE hiperbólico e, lembrando (3.15), é dado por:

$$K' = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{K_{n'}} \right) = \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 - 2^{-2\lambda(k)}} = 0,82815936096... \text{ . Mais especificamente, tem-se:}$$

$$\text{Modo Rotação:} \quad x_1 = \frac{1}{K'} = 1,207497067763... \quad y_1 = 0 \quad z_1 = \theta$$

$$x_{n'} \rightarrow \cosh \theta \quad y_{n'} \rightarrow \sinh \theta \quad z_{n'} \rightarrow 0$$

De onde se obtém as outras relações hiperbólicas e, por (3.5), também a função exponencial.

$$\text{Modo Vetoração:} \quad x_1 \quad y_1 \quad z_1 = 0$$

$$x_{n'} \rightarrow K' \cdot \sqrt{x_1^2 - y_1^2} \quad y_{n'} \rightarrow 0 \quad z_{n'} \rightarrow \operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{y_1}{x_1}\right)$$

Notando que: $\sqrt{u} = \sqrt{\left(u + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(u - \frac{1}{4}\right)^2}$, e lembrando as equações (3.5), pode-se obter:

$$\ln(u): \text{ fazendo } x_1 = u + 1 \quad \text{e} \quad y_1 = u - 1 \quad (3.19)$$

$$\sqrt{u}: \text{ fazendo } x_1 = u + \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad y_1 = u - \frac{1}{4}$$

3.5 – Convergência do CORDIC Hiperbólico

Deve-se adaptar o Teorema de Convergência para os índices hiperbólicos.

Teorema 7 (Teorema de Convergência): Sejam $\theta_1 \geq \theta_2 \geq \dots \geq \theta_n > 0$, termos de uma sequência decrescente de números positivos que satisfazem:

$$\theta_k \leq \theta_n + \sum_{j=k+1}^n \theta_j, \text{ para } 1 \leq k < n. \quad (i)$$

E seja r um número que satisfaz: $|r| \leq \theta_n + \sum_{j=1}^n \theta_j$ (ii)

Definindo a sequência $s_1 = 0$ e $s_{k+1} = s_k + \delta_k \theta_k$, $k = 1, \dots, n$, onde:

$$\delta_k = \text{sgn}(r - s_k) = \begin{cases} 1, & r \geq s_k \\ -1, & r < s_k \end{cases}$$

Então: $|r - s_k| \leq \theta_n + \sum_{j=k}^n \theta_j$, para $1 \leq k \leq n$. Em particular, $|r - s_{n+1}| \leq \theta_n$. (iii)

A sequência $\theta_k = \text{tgh}^{-1} 2^{-k} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+2^{-k}}{1-2^{-k}} \right)$, para $k \geq 1$, não satisfaz a inequação (i) do

Teorema de Convergência.

Eklund [5] mostrou que a repetição de todos os termos, a partir do segundo, garantiria a convergência. A prova é feita por indução.

Seja S_k a afirmação:

(1) S_k : $\theta_{n-k} \leq \theta_n + 2 \cdot \sum_{j=n-k+1}^n \theta_j$ é verdadeira para $k = 1, 2, \dots, n-1$, desde que $n \geq 2$.

i) Se $k = 1$, então se quer mostrar que $\theta_{n-1} \leq \theta_n + 2 \cdot \theta_n = 3 \cdot \theta_n$. Isto é equivalente a:

3.5 – Convergência do CORDIC Hiperbólico

$$0 \leq 3.\theta_n - \theta_{n-1} = \frac{1}{2} \ln \left[\left(\frac{1+2^{-n}}{1-2^{-n}} \right)^3 \cdot \left(\frac{1-2^{-(n-1)}}{1+2^{-(n-1)}} \right) \right], \text{ que é equivalente a:}$$

$$(1+2^{-n})^3 \cdot (1-2^{-(n-1)}) \geq (1-2^{-n})^3 \cdot (1+2^{-(n-1)}).$$

Desenvolvendo, obtém-se:

$$\begin{aligned} -2^{3n} + 3.2^{3n-1} - 3.2^n + 2^{n-1} &\geq 2^{3n} - 3.2^{3n-1} + 3.2^n - 2^{n-1} \\ -2.2^{3n-1} + 3.2^{3n-1} - 3.2.2^{n-1} + 2^{n-1} &\geq 2.2^{3n-1} - 3.2^{3n-1} + 3.2.2^{n-1} - 2^{n-1} \\ 2^{3n-1} - 5.2^{n-1} &\geq -2^{3n-1} + 5.2^{n-1} \Leftrightarrow 2.2^{3n-1} \geq 10.2^{n-1} \end{aligned}$$

Por indução finita, tem-se, para $n \geq 2$:

i) P(2):

$$2.2^5 \geq 10.2^1 \Leftrightarrow 64 \geq 20$$

ii) P(n) \Rightarrow P(n+1)

Supondo $2.2^{3n-1} \geq 10.2^{n-1}$ verdadeira.

É fácil verificar que $14.2^{3n-1} \geq 10.2^{n-1}$, para todo $n \geq 2$. Assim:

$$\begin{aligned} 2.2^{3n-1} + 14.2^{3n-1} &\geq 10.2^{n-1} + 10.2^{n-1} \\ 16.2^{3n-1} &\geq 20.2^{n-1} \Leftrightarrow 2.2^3 \cdot 2^{3n-1} \geq 2.10.2^{n-1} \Leftrightarrow 2.2^{3(n+1)-1} \geq 10.2^{(n+1)-1} \end{aligned}$$

Deste modo, P(n) \Rightarrow P(n+1) e, portanto, P(n) é válida para todo $n \geq 2$.

Logo, $\theta_{n-1} \leq \theta_n + 2.\theta_n = 3.\theta_n$ é verdadeira desde que $n \geq 2$.

ii) $S_k \Rightarrow S_{k+1}$. Trocando k por $k + 1$ em (1):

$$0 \leq \theta_n + 2 \cdot \sum_{j=n-k}^n \theta_j - \theta_{n-k-1} = \left(\theta_n + 2 \cdot \sum_{j=n-k+1}^n \theta_j - \theta_{n-k} \right) + (3 \cdot \theta_{n-k} - \theta_{n-k-1})$$

Da hipótese de indução: $\left(\theta_n + 2 \cdot \sum_{j=n-k+1}^n \theta_j - \theta_{n-k} \right) \geq 0$

Além disso:

$$3 \cdot \theta_{n-k} - \theta_{n-k-1} = \frac{1}{2} \ln \left[\left(\frac{1+2^{-(n-k)}}{1-2^{-(n-k)}} \right)^3 \cdot \left(\frac{1-2^{-(n-k-1)}}{1+2^{-(n-k-1)}} \right) \right] \text{ que é equivalente a:}$$

$(1 + 2^{-(n-k)})^3 \cdot (1 - 2^{-(n-k-1)}) \geq (1 - 2^{-(n-k)}) \cdot (1 + 2^{-(n-k-1)})$, cuja prova é similar ao caso para S_1 .

Portanto, S_k é verdadeira para todo $k = 1, 2, \dots, n - 1$, desde que $n \geq 2$. ■

Considerando a nova sequência $\varepsilon_{n'} = \theta_{\lambda(n')}$ como discutida em (3.13), nota-se que:

$$\varepsilon_{k'} - \sum_{j=k+1}^{n'} \varepsilon_j \leq \varepsilon_{n'}, \text{ para } 1 \leq k' < n'$$

Provado o critério de convergência da sequência, deve-se também provar a convergência das sequências para x_k^* e y_k^* hiperbólicos.

Primeiro, prova-se a convergência da sequência usada, s_k , para θ .

1) Seja a sequência definida como: $s_k = \theta - z_k^* = \sum_{j=1}^{k-1} \delta_j \theta_{\lambda(j)}$

Com $s_1 = \theta - z_1^* = 0$ e $s_{k+1} = \sum_{j=1}^k \delta_j \theta_{\lambda(j)} = s_k + \delta_k \theta_{\lambda(k)}$

Lembrando que no modo rotação $d_{n'} = \text{sgn}(z_{n'}^*)$, para $r = \theta$ tem-se que:

3.5 – Convergência do CORDIC Hiperbólico

$$\delta_k = \text{sgn}(r - s_k) = \text{sgn}(\theta - s_k) = \text{sgn}(z_k^*) = d_k$$

Portanto, esta sequência s_k satisfaz o Teorema de Convergência e:

$$|r - s_{n'+1}| \leq s_{n'} \Leftrightarrow |\theta - s_{n'+1}| \leq s_{n'} = \text{tgh}^{-1} 2^{-\lambda(n')} \quad (3.20)$$

Queremos encontrar um valor limite para $|r - s_{n'+1}|$. Do corolário (C.2), tem-se que:

$$\text{tgh}^{-1}\left(\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^{n-1}}. \text{ Retornando em (3.20):}$$

$$|\theta - s_{n'+1}| \leq \text{tgh}^{-1} 2^{-\lambda(n')} \leq \frac{1}{2^{\lambda(n')-1}} \Leftrightarrow |\theta - s_{n'+1}| \leq \frac{1}{2^{\lambda(n')-1}} \quad (3.21)$$

Mostrando que $s_{n'+1}$ converge para θ . ■

2) Para provar que as sequências para x_k e y_k retornam $x_{n'+1} \approx \cosh(s_{n'+1})$ e $y_{n'+1} \approx \sinh(s_{n'+1})$, procede-se exatamente da mesma forma que no caso circular (seção 2.6). ■

3) Os resultados (1) e (2) anteriores podem ser usados para provar o teorema 6 e determinar um limite superior para o algoritmo.

Igualmente ao caso circular, o Teorema do Valor Médio aplicado à função cosseno hiperbólico diz que existe um c entre θ e $s_{n'+1}$ tal que:

$$\frac{\cosh \theta - \cosh(s_{n'+1})}{\theta - s_{n'+1}} = \sinh c$$

De modo que (3.21) pode fornecer um limite para o erro computacional do cosseno:

$$|\cosh \theta - x_{n'+1}| = |\cosh \theta - \cosh(s_{n'+1})| = |\sinh c| |\theta - s_{n'+1}| \leq |\sinh c| \cdot 2^{-\lambda(n')-1} \quad (3.22)$$

CAP. 3 – CORDIC HIPERBÓLICO

Uma vez que, para Eklund, o intervalo de validade do algoritmo ocorre para $|\theta| \leq 1$:

$$|\cosh \theta - x_{n'+1}| \leq |\sinh 1| \cdot 2^{-\lambda(n'+1)} \approx 1,175201 \cdot 2^{-\lambda(n'+1)} \leq 2 \cdot 2^{-\lambda(n'+1)} \Rightarrow |\cosh \theta - x_{n'+1}| \leq 2^{-(\lambda(n')-2)}$$

Similarmente, $|\sinh \theta - x_{n'+1}| \leq 2^{-(\lambda(n')-2)}$, confirmando o teorema 6. ■

Agora, de acordo com Walther [11], pode ser mostrado que:

$$\theta_k - \sum_{j=k+1}^{n-1} \theta_j - \theta_{3k+1} < \theta_{n-1} \quad (3.23)$$

Neste caso, a sequência $\text{tgh}^{-1} 2^{-n'}$, obtida de $\text{tgh}^{-1} 2^{-n}$ pela repetição dos termos $i = 4, 13, \dots, k, 3k + 1, \dots$, satisfaz a condição de convergência. Todas as fontes consultadas apenas citam Walther sem a correspondente demonstração. Mesmo assim, por simplicidade, doravante apenas ela será adotada.

Os passos anteriormente feitos com a sequência de Eklund para a demonstração da convergência de x_k^* e y_k^* são válidos para a sequência de Walther, inclusive os do teorema de precisão. Sendo assim, uma vez que Walther [11] afirma que o raio de convergência é $|\theta| \leq 1,13$, pode-se retornar em (3.22):

$$|\cosh \theta - x_{n'+1}| \leq |\sinh 1,13| \cdot 2^{-\lambda(n'+1)} \approx 1,386 \cdot 2^{-\lambda(n'+1)} \leq 2 \cdot 2^{-\lambda(n'+1)} \Rightarrow |\cosh \theta - x_{n'+1}| \leq 2^{-(\lambda(n')-2)}$$

Do mesmo modo: $|\sinh \theta - x_{n'+1}| \leq 2^{-(\lambda(n')-2)}$, corroborando também o teorema 6. ■

3.6 – O CORDIC no Cálculo da Raiz Quadrada e do Logaritmo

As funções raiz quadrada e logaritmo são obtidas no modo Vetoração do CORDIC Hiperbólico. O processo é semelhante ao caso circular. Genericamente, em um sistema cartesiano no plano, a rotação em um ângulo hiperbólico $-\theta$, de um vetor de coordenadas $P_1 = (x_1, y_1)$ e que tem

3.6 – O CORDIC no Cálculo da Raiz Quadrada e do Logaritmo

um ângulo $\theta > 0$ com o eixo x , gera o vetor $P = (x, y)$, conforme a figura 3.6:

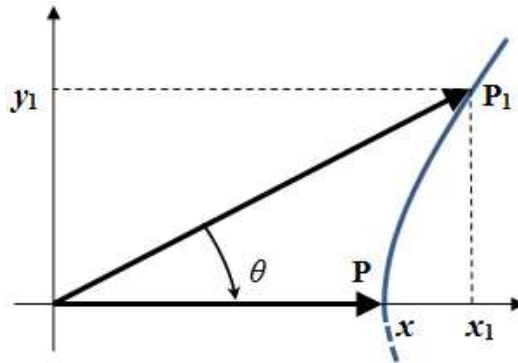


Figura 3.6: Rotação hiperbólica do vetor P_1 em um ângulo $-\theta$

Uma vez que as coordenadas dos vetores obedecem à hipérbole $x^2 - y^2 = R^2$, vem que:

$$x = \sqrt{x_1^2 - y_1^2} \quad y = 0$$

Semelhante ao caso Circular, os vetores também são micro rotacionados, conforme a figura 3.7:

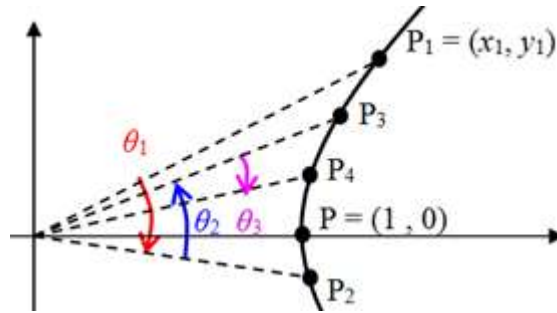


Figura 3.7: Micro rotações de P_1 até P_4 no modo Vetoração.

Considerando ocorrerem as repetições necessárias à convergência, mais uma vez a analogia com o modo Circular leva a:

$$P = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \approx P_{n'+1} = \begin{pmatrix} R \cdot \cosh \beta_{n'} \\ R \cdot \sinh \beta_{n'} \end{pmatrix} = K_{n'} \cdot P_{n'+1}^* \quad \text{com } R = \sqrt{x_1^2 - y_1^2} \quad (3.24)$$

Sendo que $\beta_{n'} = \theta - |\alpha_{n'}|$ é o ângulo hiperbólico do vetor $P_{n'+1}$ com o eixo x (figura 3.8), onde

$\alpha_{n'} = \sum_{i=1}^{n'} \pm \theta_i$ é o ângulo total de P_1 a $P_{n'+1}$. Além disso, $K_{n'}$ e $P_{n'+1}^*$ são como ditos em (3.15).

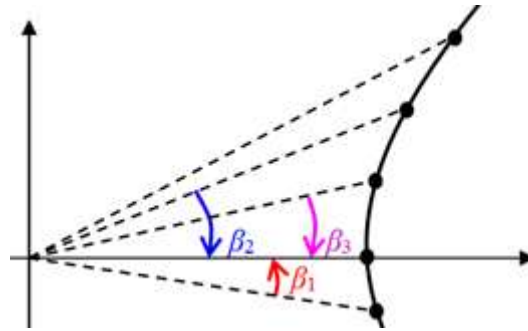


Figura 3.8: Ângulo β_n do vetor P_{n+1}^* com o eixo x .

Igualmente ao caso Circular, o sinal de $\theta_{\lambda(n+1)}$ é obtido pela análise do sinal de y_n .

Exemplo 3.2: Suponha que se quer determinar $\sqrt{39}$.

De acordo com (3.19), $\sqrt{u} = \sqrt{\left(u + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(u - \frac{1}{4}\right)^2}$. Portanto, pode-se fazer: $x_1 = 39,25$

e $y_1 = 38,75$. Porém há o problema do raio de convergência. Uma vez que $|\theta| \leq 1,13$, e como $z_n \rightarrow \theta \leq 1,13$, deve-se ter:

$$\operatorname{tgh} z_n \leq \operatorname{tgh} 1,13 \approx 0,8110192. \quad (3.25)$$

Conforme (3.18), $z_n \rightarrow \operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{y_1}{x_1}\right)$, para $z_1 = 0$. Deste modo, $\left(\frac{y_1}{x_1}\right) = \frac{38,75}{39,25} \approx 0,98726$, o que

mostra não ser possível realizar as iterações.

Pode-se contornar tal problema, por exemplo, tomando $39 = 0,39 \cdot 10^2$. Deste modo, vem que $\sqrt{39} = \sqrt{0,39 \cdot 10}$. Assim, deseja-se $\sqrt{0,39}$. Fazendo, agora, $x_1 = 0,64$ e $y_1 = 0,14$, nota-se que estes valores obedecem à condição (3.25). Soluções genéricas desse problema foram proposta em [5] e [11]. Como o processo de análise do sinal do ângulo rotacionado é igual ao caso Circular, passaremos diretamente para o modo como o algoritmo realmente opera, analisando o sinal de y_n para decidir o sinal da próxima micro rotação. A tabela 3.5 resume o processo do cálculo de α_n .

3.6 – O CORDIC no Cálculo da Raiz Quadrada e do Logaritmo

n'	$y_{n'}$	Sinal de $y_{n'}$	$\varepsilon_{n'} = \theta_{\lambda(n')}$	$\alpha_{n'}$
1	0,14	> 0	(-) 0,549306	- 0,549306
2	- 0,18	< 0	(+) 0,255413	- 0,293893
3	- 0,0375	< 0	(+) 0,125657	- 0,168236
4	0,028125	> 0	(-) 0,062582	- 0,230818
5	- 0,004395	< 0	(+) 0,062582	- 0,168236
6	0,02805	> 0	(-) 0,031260	- 0,199496

Tabela 3.5: $\alpha_{n'}$ em função do sinal de $y_{n'}$ no modo Vetoração Hiperbólica.

As pseudo rotações são explicitadas:

$$P_2^* = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,64 \\ 0,14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,57 \\ -0,18 \end{pmatrix}$$

$$P_3^* = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,57 \\ -0,18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,525 \\ -0,0375 \end{pmatrix}$$

$$P_4^* = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,525 \\ -0,0375 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,520313 \\ 0,028125 \end{pmatrix}$$

$$P_5^* = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,520313 \\ 0,028125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,518555 \\ -0,004395 \end{pmatrix}$$

$$P_6^* = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,518555 \\ -0,004395 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,518830 \\ 0,02805 \end{pmatrix}$$

$$P_7^* = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{32} \\ -\frac{1}{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,518830 \\ 0,02805 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,517953 \\ 0,011837 \end{pmatrix}$$

Portanto, na sexta iteração, tem-se: $P \approx K_6' \cdot P_7^*$, com $K_6' = \prod_{i=1}^6 \cosh \varepsilon_i \approx 1,207301$ e tal que $\varepsilon_{n'} = \operatorname{tgh}^{-1} 2^{-\lambda(n')}$. Assim:

$$P \approx K_6' \cdot P_7^* = 1,206711 \cdot \begin{pmatrix} 0,517953 \\ 0,011837 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,625325 \\ 0,014291 \end{pmatrix}$$

Sendo assim: $\sqrt{39} = \sqrt{0,39 \cdot 10} \approx 0,625325 \cdot 10 = 6,25325$

Finalmente, observa-se que, em uma calculadora comum: $\sqrt{39} \approx 6,244997998 \approx 6,24500$.

Exemplo 3.3: calcular $\ln(39)$.

Para o cálculo do logaritmo, de acordo com (3.5), $\ln(u) = 2.\text{tgh}^{-1}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)$. Observando a condição (3.25), a tabela 3.6 mostra duas tentativas para $x_1 = u + 1$ e $y_1 = u - 1$:

u	x_1	y_1	$\frac{y_1}{x_1} \leq 0,8110192$
39	40	38	0,95
3,9	4,9	2,9	0,5918

Tabela 3.6: Análise da condição do CORDIC Vetoração para $\ln(39)$

Deste modo, pode-se fazer:

$$\ln(3,9) = \ln(39 \cdot 10^{-1}) = \ln(39) - \ln(10) \Leftrightarrow \ln(39) = \ln(3,9) + 1 \cdot \ln(10).$$

Na verdade, essa é uma das assim chamadas *Identidades Pré-escaloadas* propostas por Walther para estender o domínio de convergência. No caso do logaritmo, tem-se que:

$$\ln(u) = \ln(u \cdot b^E) - E \cdot \ln(b), \text{ onde } b \text{ é a base utilizada.}$$

Como $\ln(b)$ é uma constante, pode ser calculada e armazenada. A tabela 3.7 condensa os cálculos:

n'	$y_{n'}$	Sinal de $y_{n'}$	$\varepsilon_{n'} = \theta_{\lambda(n')}$	$\alpha_{n'}$
1	2,9	> 0	(-) 0,549306	- 0,549306
2	0,45	> 0	(-) 0,255413	- 0,804719
3	- 0,4125	< 0	(+) 0,125657	- 0,679062
4	0,004688	> 0	(-) 0,062582	- 0,741644
5	- 0,200684	< 0	(+) 0,062582	- 0,679062
6	0,004669	> 0	(-) 0,031260	- 0,710322

Tabela 3.7: Vetoração Hiperbólica para o cálculo de $\ln(3,9)$.

3.6 – O CORDIC no Cálculo da Raiz Quadrada e do Logaritmo

Explicitando as pseudo rotações:

$$\begin{aligned} P_2^* &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4,9 \\ 2,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,45 \\ 0,45 \end{pmatrix} & P_3^* &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3,45 \\ 0,45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,3375 \\ -0,4125 \end{pmatrix} \\ P_4^* &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3,3375 \\ -0,4125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,285938 \\ 0,004688 \end{pmatrix} & P_5^* &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3,285938 \\ 0,004688 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,285645 \\ -0,200683 \end{pmatrix} \\ P_6^* &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3,285645 \\ -0,200683 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,273102 \\ 0,004670 \end{pmatrix} & P_7^* &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{32} \\ -\frac{1}{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3,273102 \\ 0,004670 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,272956 \\ -0,097614 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Portanto, na sexta iteração, teremos: $P \approx K_6' \cdot P_7^*$, onde $K_6' \approx 1,207301$. Assim:

$$P \approx K_6' \cdot P_7^* = 1,207301 \cdot \begin{pmatrix} 3,272956 \\ -0,097614 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,951443 \\ -0,117849 \end{pmatrix}$$

E tem-se que $\alpha_6 = -0,710322$, de modo que $\theta \approx 0,710322$. Então:

$$\ln(3,9) \approx 2 \cdot \operatorname{tgh}^{-1} \left(\frac{u-1}{u+1} \right) = 2 \cdot 0,710322 = 1,420644. \text{ Logo:}$$

$$\ln(39) = \ln(3,9) + 1 \cdot \ln(10) \approx 1,420644 + 2,302585 = 3,723229.$$

Em uma calculadora, obtém-se: $\ln(39) \approx 3,663562$. O erro absoluto é:

$$e_{\ln(39)} = |3,663562 - 3,723229| = 0,059667.$$

O domínio de convergência e sua extensão é outro problema encontrado no uso de funções aproximadoras, como pode ser visto nos dois exemplos desta seção. Uma vez que o objetivo deste trabalho é compreender o funcionamento básico do algoritmo, este assunto não será abordado. Consulte [11] para outras identidades que permitem a extensão do domínio para várias funções elementares.

CORDIC LINEAR

A extensão do algoritmo CORDIC para o cálculo de produtos e quocientes, denominado CORDIC Linear, é detalhada neste capítulo. Define-se ângulo e rotação linear. O caso do produto é analisado e, a partir de um exemplo, discute-se sua precisão. A sequência recursiva para o caso linear é apresentada. A convergência é demonstrada e o quociente é discutido e exemplificado.

4.1 – Ângulo Linear

Semelhante à definição de ângulo circular e ângulo hiperbólico, definimos ângulo linear em função da área do setor por ele compreendido. Deste modo, seja a reta de equação dada por $x = 1$. O ponto P a ela pertencente define um setor AOP e um ângulo AÔP. Definimos que o ângulo linear mede θ se a área do setor linear AOP vale $\theta/2$ unidades de área. Da mesma forma que o ângulo hiperbólico, percebe-se que o ângulo aqui definido não tem o mesmo significado que o ângulo circular, uma vez que as áreas envolvidas são diferentes. O ângulo linear é sempre maior ou igual ao ângulo circular, sendo igual apenas no caso em que $\theta = 0$, conforme se pode perceber na figura 4.1.

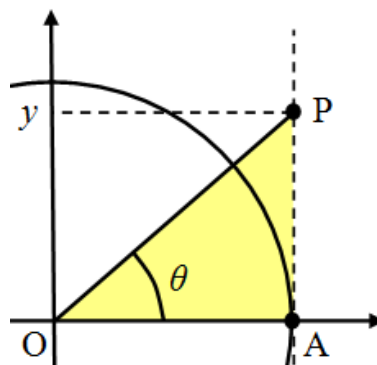


Figura 4.1: Setores circulares e lineares associados a seus respectivos ângulos.

Para medir o ângulo linear, precisa-se da área do setor linear associado. A mesma é dada por:

$$A_{AOP} = \frac{x.y}{2} \Rightarrow \frac{1.y}{2} = \frac{\theta}{2} \Rightarrow y = \theta \quad (4.1)$$

Portanto, o ângulo linear é dado por $\theta = y$ quando $x = 1$. Quando $x \neq 1$, por semelhança de triângulos (figura 4.2), tem-se que

$$y = y_0.x = x.\theta \Leftrightarrow \theta = \frac{y}{x}. \quad (4.2)$$

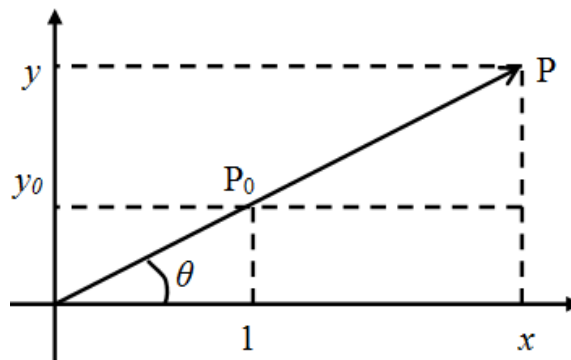


Figura 4.2: Ângulo linear para o caso $x_0 \neq 1$.

4.2 – Rotação Linear

Em um sistema cartesiano no plano, a rotação linear em um ângulo $\theta > 0$, na direção positiva do eixo y, é entendida como o deslocamento do vetor de modo que sua extremidade, permanecendo sobre a reta vertical, percorra um ângulo linear θ em relação à posição inicial. Se $\theta < 0$, o deslocamento ocorre na direção oposta. Partindo de um vetor representado pelo ponto de coordenadas $P_0 = (x_0, y_0)$, gera-se um vetor $P = (x, y)$ conforme na figura 4.3.

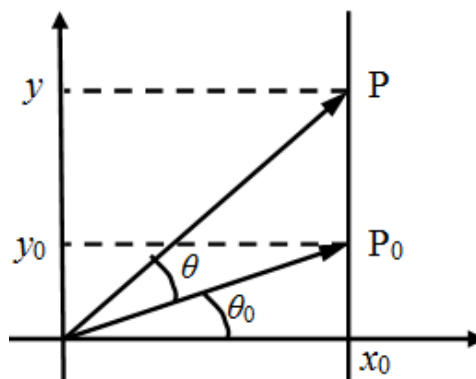


Figura 4.3: Rotação linear de um vetor

4.3 – O CORDIC no Cálculo do Produto

De 4.2, vem que:

$$y = x_0(\theta + \theta_0) \Rightarrow y = x_0.\theta + x_0.\theta_0. \text{ Como } \theta_0 = \frac{y_0}{x_0}, \text{ temos: } y = y_0 + x_0.\theta$$

Ficando as coordenadas do vetor rotacionado P:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + x_0.\theta \end{cases} \quad (4.3)$$

Que pode ser reescrita como:
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta & 1 \end{pmatrix}.P_0$$

Chamando $M\ell = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta & 1 \end{pmatrix}$, pode-se fazer:
$$P = M\ell.P_0 \quad (4.4)$$

Também aqui, a palavra rotação não tem o significado equivalente ao do caso circular. Em suma, o único caso que se trata de uma rotação, no sentido estrito da palavra, é o do sistema circular de coordenadas. Uma vez que se trabalha diretamente com o ângulo na matriz de rotação, não é necessário criar uma pseudo rotação, eliminando a necessidade de um FCE.

4.3 – O CORDIC no Cálculo do Produto

O produto é obtido no modo Rotação tipo Linear. Partindo-se do ponto $P_0 = (x_0, 0)$ e rotacionando-o linearmente de $\theta > 0$, tem-se que $P = (x_0, x_0.\theta)$. Vê-se que a variável y é igual ao produto $x_0.\theta$, onde θ é o valor do ângulo final do vetor P. Como θ é um valor conhecido, o algoritmo faz a rotação quebrando tal rotação em micro rotações. O valor do ângulo linear rotacionado é comparado com o valor do ângulo total e direciona a convergência. A ideia é mais simples, posto que não se envolve o uso de outra função, mas apenas os valores das próprias coordenadas.

De (4.4), para uma rotação linear genérica θ_n :
$$M\ell_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta_n & 1 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Desde que se escolha $\theta_n = 2^{-n}$, nota-se que: $M\ell_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^{-n} & 1 \end{pmatrix}$

E, analogamente aos modos Circular e Hiperbólico, se o algoritmo rodar $n+1$ passos, observa-se que $\theta \approx \pm \theta_0 \pm \theta_1 \dots \pm \theta_n$ e tem-se genericamente:

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm \theta_n & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm \theta_0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P_0$$

Que, por (4.4), pode ser escrita na forma: $P_{n+1} = M\ell_n \cdots M\ell_0 \cdot P_0$ (4.6)

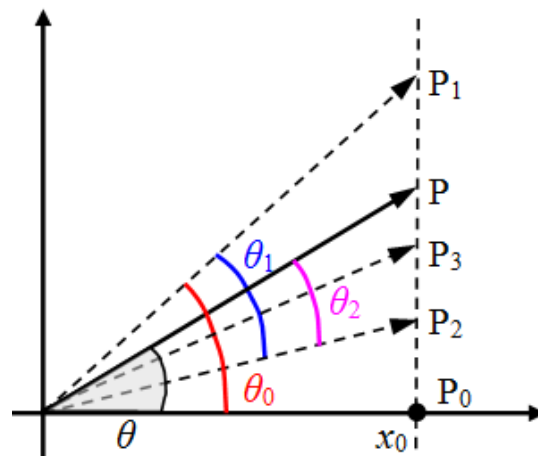


Figura 4.4: Visualização das rotações de P_0 até o vetor P_3 na Rotação Linear.

Finalmente, as rotações são direcionadas de forma que P_{n+1} convirja para P , de modo que:

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = P_{n+1} \quad (4.7)$$

Exemplo 4.1: Suponha que se quer o produto de 2 por 1,23. Faz-se $x_0 = 2$ e $\theta = 1,23$. A cada iteração, o ângulo rotacionado é comparado com o ângulo total decidindo o sinal da próxima micro rotação. O processo é análogo ao caso Circular, de modo que se pode resumir as iterações na tabela 4.1:

4.3 – O CORDIC no Cálculo do Produto

n	θ_n	α_n
0	1 (+)	1
1	0,5 (+)	1,5
2	0,25 (-)	1,25
3	0,125 (-)	1,125
4	0,0625 (+)	1,1875
5	0,03125 (+)	1,21875

Tabela 4.1: Aproximações do ângulo rotacionado no caso Rotação Linear

Ao mesmo tempo, enquanto se aproxima o ângulo, os valores de x e y também são aproximados. Dessa forma, de acordo com (4.6), na terceira iteração se teria:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \approx M\ell_2 \cdot M\ell_1 \cdot M\ell_0 P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculando, obtêm-se:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

Na sexta iteração:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{16} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2,4375 \end{pmatrix}$$

Como $2 \cdot 1,23 = 2,46$, o erro absoluto é dado por:

$$|2,46 - 2,4375| = 0,0225$$

Obviamente, não se deseja o valor aproximado para uma operação tão elementar. O número de iterações deve ser maior. Mais uma vez, interessa saber a precisão em função desse número de iterações. Deste modo, afirma-se o teorema a ser provado na seção (4.5):

Teorema 8 (teorema de precisão): Utilizando o método CORDIC, tem-se que, para $|\theta| \leq 2$ e $|x| \leq 2$:

$$|x \cdot \theta - x \cdot \alpha_{n+1}| \leq 2^{-n+1}$$

Assim, para $n+1 = 40$, o erro é dado por $\frac{1}{2^{38}} \approx 3,64 \cdot 10^{-12}$, fornecendo precisão na décima casa, como usado pelas calculadoras.

4.4 – Sequência Recursiva do CORDIC Linear

Walther [11] encontrou também a modificação nas equações do CORDIC que permitem a computação de multiplicações e divisões, chamadas em todas as referências encontradas de funções lineares:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - 0 \cdot d_n \cdot y_n \cdot 2^{-n} = x_n \\ y_{n+1} = y_n + d_n \cdot x_n \cdot 2^{-n} \\ z_{n+1} = z_n - d_n \cdot 2^{-n} \end{cases} \quad (4.8)$$

No modo Rotação ($d_n = \text{sign } z_n$), a iteração Linear produz:

$$\begin{cases} x_n = x_0 \\ y_n \rightarrow y_0 + x_0 \cdot \theta \\ z_n \rightarrow 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Para o modo Vetoração ($d_n = -\text{sign } y_n$), a iteração Linear fornece:

$$\begin{cases} x_n = x_0 \\ y_n \rightarrow 0 \\ z_n \rightarrow z_0 + \frac{y_0}{x_0} \end{cases} \quad (4.10)$$

4.5 – Convergência do CORDIC Linear

A iteração Linear corresponde à rotação linear do vetor inicial P_0 de um ângulo linear θ , aproximado do mesmo modo que as iterações circular e hiperbólica. A seção 4.5 demonstra a convergência das sequências para os dois modos.

Segundo Andraka [1], o modo Vetoração é mais interessante por produzir uma forma de realizar divisões. Pode-se observar mais uma vez que as rotações no tipo Linear não necessitam do Fator de Correção de Escala, uma vez que as iterações já fornecem as equações da forma completa, não alterando a norma do vetor rotacionado.

4.5 – Convergência do CORDIC Linear

O teorema 9 estabelece que a sequência $\theta_k = 2^{-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$, satisfaz o Teorema de Convergência.

Teorema 9: A sequência $\theta_k = 2^{-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$, satisfaz as hipóteses do Teorema de Convergência para todo $|r| \leq 2$.

Demonstração: A sequência dada é claramente uma sequência decrescente de números positivos. Pode-se fazer, então:

$S_n = 1 + 2^{-1} + \dots + 2^{-n}$, que é uma progressão geométrica de razão 2^{-1} . Assim, deve-se provar que:

$$\theta_k \leq \theta_n + \sum_{j=k+1}^n \theta_j, \text{ para } 0 \leq k < n.$$

Como:

$$\theta_n + \sum_{j=k+1}^n \theta_j = 2^{-n} + \sum_{j=k+1}^n 2^{-j} = 2^{-n} + \frac{2^{-k-1} \cdot (2^{-(n-k)} - 1)}{2^{-1} - 1} = 2^{-n} - 2^{-k} \cdot (2^{-n+k} - 1) = 2^{-k} = \theta_k$$

Portanto, a série obedece ao critério de convergência. Uma vez que a soma dessa PG tende a 2, para n tendendo a infinito, temos $|r| \leq 2$. ■

CAP. 4 – CORDIC LINEAR

Também se deve provar a convergência das sequências para x_k , y_k e z_k . Considerando que $x_k = x_0$, devemos provar apenas a sequência para y_k e z_k .

1) Primeiro, deve-se mostrar que a sequência s_k converge para θ . Definindo-a como:

$$s_k = \theta - z_k = \sum_{j=0}^{k-1} \delta_j \theta_j. \quad \text{Vê-se que } s_0 = \theta - z_0 = 0 \text{ e que } s_{k+1} = \sum_{j=0}^k \delta_j \theta_j = s_k + \delta_k \theta_k$$

Lembrando que, no modo rotação, $d_n = \text{sgn}(z_n)$, Para $r = \theta$, nós temos que:

$$\delta_k = \text{sgn}(r - s_k) = \text{sgn}(\theta - s_k) = \text{sgn}(z_k) = d_k$$

Portanto, esta sequência s_k satisfaz o Teorema de Convergência e:

$$|r - s_{n+1}| \leq \theta_n \Leftrightarrow |\theta - s_{n+1}| \leq \theta_n = \frac{1}{2^n} \quad \blacksquare$$

2) Agora quer-se provar que $y_{n+1} \rightarrow y_0 + x_0 \theta$ no modo Rotação, e que $z_{n+1} \rightarrow z_0 + \frac{y_0}{x_0}$ no modo Vetoração.

Como $y_{n+1} = y_n + d_n x_n 2^{-n}$, vemos que $y_{k+1} = y_0 + x_0 \sum_{i=0}^k d_i 2^{-i}$. Sendo $\alpha_k = \sum_{i=0}^k d_i 2^{-i}$, e

como a convergência da série $s_{k+1} = \sum_{j=0}^k \delta_j \theta_j$ para θ já é conhecida, então:

$$y_{k+1} \approx y_0 + x_0 \alpha_k \Rightarrow y_{n+1} \rightarrow y_0 + x_0 \theta$$

Já para $z_{n+1} = z_n - d_n 2^{-n}$, pode-se notar que $z_{k+1} = z_0 - \sum_{i=0}^k d_i 2^{-i}$

Tomando $z_0 = 0$, vem que:

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{y_{k+1} - \sum_{i=0}^k d_i x_0 2^{-i}}{x_0} = \frac{y_{k+1}}{x_0} - \sum_{i=0}^k d_i 2^{-i} = \frac{y_{k+1}}{x_0} + z_{k+1} \Leftrightarrow \frac{y_0}{x_0} = \frac{y_{k+1}}{x_0} + z_{k+1}$$

4.6 – O CORDIC no Cálculo do Quociente

Como $y_{n+1} \rightarrow 0$ (modo Vetoração), então:

$$z_{k+1} \rightarrow \frac{y_0}{x_0}. \text{ Portanto, para } z_0 \neq 0, z_{k+1} \rightarrow z_0 + \frac{y_0}{x_0}. \quad \blacksquare$$

3) A precisão no produto pode ser obtida notando que, para $z_0 = \theta$, $y_0 = 0$ e $|x_0| \leq 2$:

$$\text{i) } z_{k+1} = z_0 - \sum_{i=0}^k d_i \cdot 2^{-i} \text{ e } y_{k+1} = y_0 + x_0 \cdot \sum_{i=0}^k d_i \cdot 2^{-i}, \text{ então: } y_{k+1} = y_0 + x_0 \cdot (z_0 - z_{k+1})$$

$$\text{ii) } |y_{n+1} - x_0 \cdot \theta| = |y_{n+1} - x_0 \cdot z_0| = |y_0 + x_0 \cdot (z_0 - z_{n+1}) - x_0 \cdot z_0| \leq |0 - z_{n+1} \cdot x_0| = |z_{n+1}| \cdot |x_0|$$

$$|z_{n+1}| \cdot |x_0| = |\theta - s_{n+1}| \cdot |x_0| \leq \frac{1}{2^n} \cdot 2 = 2^{-n+1}, \text{ confirmando o teorema 8.} \quad \blacksquare$$

4.6 – O CORDIC no Cálculo do Quociente

Para realizar uma divisão, usa-se o modo Vetoração Linear. Desde que $\left| \frac{y_0}{x_0} \right| \leq 2$, o algoritmo converge para o resultado desejado.

Exemplo 4.2: Obter o quociente entre 7 e 5. Fazendo $x_0 = 5$ e $y_0 = 7$. Lembrando que α_n converge para o simétrico do argumento do vetor no modo Vetoração, procura-se por este resultado. A tabela 4.2 sintetiza os cálculos:

n	y_n	Sinal de y_n	θ_n	α_n	z_n
0	7	> 0	1 (-)	-1	0
1	2	> 0	0,5 (-)	-1,5	1
2	-0,5	< 0	0,25 (+)	-1,25	1,5
3	0,75	> 0	0,125 (-)	-1,375	1,25
4	0,125	> 0	0,0625 (-)	-1,4375	1,375
5	-0,1875	< 0	0,03125 (+)	-1,40625	1,4375

Tabela 4.2: Cálculo de α_n em função do sinal de y_n na Vetoração Linear.

Uma vez que $\frac{7}{5} = 1,4$ observa-se que o erro absoluto até $n = 5$ é de:

$$e_{7/5} = |1,4 - 1,40625| = 0,00625.$$

Assim como no produto, não se tem vantagem em aproximar com poucas iterações. Para que haja um cálculo mais confiável, deve-se realizar uma quantidade maior de iterações. Como observado em (4.10) e provado na seção 4.5, item 2, tem-se que $z_{k+1} \rightarrow \frac{y_0}{x_0}$, com $z_{k+1} \geq \frac{y_0}{x_0}$.

Assim:

$$\left| \frac{y_0}{x_0} \right| \leq |z_{n+1}| = |\theta - s_{n+1}| \leq \frac{1}{2^n}.$$

De modo que, para $n = 40$, $\frac{1}{2^{39}} \approx 1,819 \cdot 10^{-12}$ gerando precisão na décima casa.

CAPÍTULO 5

O CORDIC UNIFICADO

Aqui os três tipos do CORDIC são agrupados em um único conjunto de equações de iteração. O algoritmo unificado é apresentado e as funções obtidas a partir dele são resumidas em tabelas. Uma variação do algoritmo para o cálculo de seno e cosseno inversos é acrescentada à tabela do caso Circular.

5.1 – Iteração CORDIC Generalizada

Conforme visto em cada caso, o CORDIC mostrou-se muito versátil no cálculo das funções elementares. Outra vantagem de seu uso é o fato de Walther [11], com a aplicação de propriedades que relacionam os números complexos com as funções hiperbólicas, ter conseguido resumir os três modos em apenas um conjunto de iterações, denominada *Iteração CORDIC Generalizada*:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - m \cdot d_n \cdot y_n \cdot 2^{-\lambda(n)} \\ y_{n+1} = y_n + d_n \cdot x_n \cdot 2^{-\lambda(n)} \\ z_{n+1} = z_n - d_n \cdot w_{\lambda(n)} \end{cases} \quad (5.1)$$

Onde os valores de d_n , m , w_n e $\lambda(n)$ determinam o tipo de iteração que ocorrerá. Os valores de m podem ser $+1$, 0 ou -1 e estão associados ao tipo de coordenadas utilizadas. Respectivamente, temos os tipos Circular, Linear e Hiperbólico. As tabelas 5.1 e 5.2 abaixo resumem os resultados obtidos para cada combinação de valores.

m	Tipo	$\lambda(n)$
1	Circular	n
-1	Hiperbólico	$n - j,$ j o maior inteiro tal que $3^{j+1} + 2j - 1 \leq 2n$
0	Linear	n

Tabela 5.1: Valores de $\lambda(n)$ nas equações 5.1

Tipo	m	w_n	Modo Rotação $d_n = \text{sign}(z_n)$	Modo Vetoração $d_n = \text{sign}(-y_n)$
Circular	1	$\text{tg}^{-1} 2^{-n}$	$x_n \rightarrow K.(x_0.\cos z_0 - y_0.\text{sen } z_0)$ $y_n \rightarrow K.(x_0 \text{ sen } z_0 + y_0 \cos z_0)$ $z_n \rightarrow 0$	$x_n \rightarrow K. \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ $y_n \rightarrow 0$ $z_n \rightarrow z_0 + \text{tg}^{-1} \left(\frac{y_0}{x_0} \right)$
Hiperbólico	-1	$\text{tgh}^{-1} 2^{-n}$	$x_n \rightarrow K'.(x_1.\cosh z_1 + y_1.\text{senh } z_1)$ $y_n \rightarrow K'.(x_1 \text{ senh } z_1 + y_1 \cosh z_1)$ $z_n \rightarrow 0$	$x_n \rightarrow K'. \sqrt{x_1^2 - y_1^2}$ $y_n \rightarrow 0$ $z_n \rightarrow z_1 + \text{tgh}^{-1} \left(\frac{y_1}{x_1} \right)$
Linear	0	2^{-n}	$x_n \rightarrow x_0$ $y_n \rightarrow y_0 + x_0.z_0$ $z_n \rightarrow 0$	$x_n \rightarrow x_0$ $y_n \rightarrow 0$ $z_n \rightarrow z_0 + \frac{y_0}{x_0}$

Tabela 5.2: Funções computáveis pelo CORDIC.

As operações necessárias à transformação entre números complexos e funções hiperbólicas não são realmente difíceis. Mas, considerando o objetivo do trabalho e para não correr o risco de torná-lo carregado de informações, tais passagens não foram apresentadas. Ainda assim, para aqueles que desejem se aprofundar no assunto, a referência [11] oferece uma leitura fácil, desde que se conheçam os princípios de funcionamento do algoritmo e o teorema de convergência.

5.2 – Tabelas de Funções do CORDIC

Não obstante as funções já exemplificadas para a aplicação do CORDIC, seu uso pode ser estendido ainda mais. De acordo com Andraka [1], uma pequena adaptação permite ainda o cálculo das funções trigonométricas circulares inversas. Tal adaptação é mostrada na tabela 5.3. Além disso, transformações entre coordenadas polares e retangulares também são obtidas. As tabelas de 5.3 a 5.5 resumem as funções e resultados mais imediatos do algoritmo CORDIC para cada tipo de iteração, inclusive casos não abordados nos exemplos.

Tipo	Modo	Função	Entrada	Saída	
Circular	Rotação	$\text{sen } \theta$ $\text{cos } \theta$ $\text{tg } \theta$ $\text{sec } \theta$ $\text{cosec } \theta$ $\text{cotg } \theta$	$x_0 = \frac{1}{K}$ $y_0 = 0$ $z_0 = \theta$	$x_n \rightarrow \text{cos } \theta$ $y_n \rightarrow \text{sen } \theta$ $z_n \rightarrow 0$	
		Transformação: Polar – Retangular	$x_0 = \frac{R}{K}$ $y_0 = 0$ $z_0 = \theta$	$x_n \rightarrow R.\text{cos } \theta$ $y_n \rightarrow R.\text{sen } \theta$ $z_n \rightarrow 0$	
	Vetoração	$\text{tg}^{-1} \theta$	x_0 y_0 $z_0 = 0$	$x_n \rightarrow K.\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ $y_n \rightarrow 0$ $z_n \rightarrow \text{tg}^{-1} \left(\frac{y_0}{x_0} \right)$	
		Transformação: Retangular – Polar			
		$d_n = \text{sign}(-y_n)$ $d_n = 1, y_n < \theta$ $d_n = -1, y_n > \theta$	$\text{sen}^{-1} \theta$ $\text{cos}^{-1} \theta = \left \text{sen}^{-1} \theta - \frac{\pi}{2} \right $	x_0 y_0 $z_0 = 0$	$x_n \rightarrow \sqrt{(K.x_0)^2 + y_0^2}$ $y_n \rightarrow c$ $z_n \rightarrow \text{sen}^{-1} \left(\frac{c}{K.x_0} \right)$

Tabela 5.3: Funções calculadas pelo CORDIC Circular

CAP. 5 – O CORDIC UNIFICADO

Linear	Rotação	produto	x_0 $y_0 = 0$ $z_0 = \theta$	$x_n \rightarrow x_0$ $y_n \rightarrow x_0 \cdot z_0$ $z_n \rightarrow 0$
	Vetoração	quociente	x_0 y_0 $z_0 = 0$	$x_n \rightarrow x_0$ $y_n \rightarrow 0$ $z_n \rightarrow \frac{y_0}{x_0}$

Tabela 5.4: Funções calculadas pelo CORDIC Linear

Hiperbólico	Rotação	$\sinh \theta$ $\cosh \theta$ $e^x = \sinh \theta + \cosh \theta$ $\operatorname{tgh} \theta$ $\operatorname{sech} \theta$ $\operatorname{cosech} \theta$ $\operatorname{cotgh} \theta$	$x_0 = \frac{1}{K'}$ $y_0 = 0$ $z_0 = \theta$	$x_n \rightarrow \cosh \theta$ $y_n \rightarrow \sinh \theta$ $z_n \rightarrow 0$
	Vetoração	$\operatorname{tgh}^{-1} \theta$ $\ln(u) = 2 \cdot \operatorname{tgh}^{-1} \left(\frac{u-1}{u+1} \right)$ $\sqrt{u} = \sqrt{\left(u + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(u - \frac{1}{4}\right)^2}$	x_0 y_0 $z_0 = 0$	$x_n \rightarrow K' \cdot \sqrt{x_1^2 - y_1^2}$ $y_n \rightarrow 0$ $z_n \rightarrow \operatorname{tgh}^{-1} \left(\frac{y_1}{x_1} \right)$

Tabela 5.5: Funções calculadas pelo CORDIC Hiperbólico

CAPÍTULO 6

CONCLUSÃO

Esta dissertação teve como foco o algoritmo CORDIC e o seu funcionamento. Conforme o trabalho foi se desenvolvendo, percebeu-se dois pontos principais: a simplicidade da ideia junto com o seu poder de cálculo e, contrastando, a dificuldade gerada pelas condições de convergência, que restringem a aplicação e o domínio de validade.

Considerando-se os objetivos gerais, tais restrições não impediram a apresentação do processo nem o entendimento de seu funcionamento, uma vez que os conceitos de rotação e pseudo rotação são bastante intuitivos, fato que contribuiu à assimilação do mecanismo responsável pelo método. Mesmo nos casos das rotações hiperbólicas e lineares, que não são rotações propriamente ditas, não houve maiores dificuldades de compreensão. Quanto à fundamentação teórica, as dificuldades surgidas para garantir a convergência, em especial para o caso hiperbólico, mostraram-se mais um incentivo que um empecilho na realização do trabalho. Ter uma dimensão da dificuldade enfrentada pelos cientistas que contornaram esse obstáculo e perceber sua presença de espírito nas sugestões que resolveram o problema tornou-se uma atividade árdua, porém recompensadora, como se pode esperar de todo assunto interessante gerado pela matemática.

Quanto aos objetivos específicos, pode-se dizer que foi a partir dos exemplos numéricos que se desenhou toda a estrutura da dissertação. Procurar usá-los para aprender como se obtém as aproximações das funções abordadas facilitou o entendimento dos mecanismos de cálculo envolvidos e, principalmente, dos problemas de convergência do algoritmo. Sua presença neste trabalho não pode ser considerada meramente ilustrativa, mas sim uma ajuda essencial à completa compreensão do algoritmo e de todas as suas particularidades, inclusive o da precisão desejada, que necessitou de uma adaptação de notação devido à solução da convergência hiperbólica.

CAP. 6 –CONCLUSÃO

Cite-se, entretanto, que vários pontos ficaram em aberto. Dentre todos, destacam-se o caso do CORDIC unificado (que envolve o uso de números complexos com funções hiperbólicas), as adaptações possíveis de serem feitas com o algoritmo (como no caso do cálculo das funções arco seno e arco cosseno) e o problema da extensão do domínio de convergência. Levando-se em conta que este método vem sendo cada vez mais utilizado, em especial nas engenharias e na computação, trabalhos futuros que ajudem a compreender todos os seus desdobramentos possíveis podem se mostrar uma ótima ferramenta de pesquisa não só para alunos de cursos de graduação nestas áreas, mas também para estudantes do ensino médio que procuram aprofundar seus conhecimentos e possam ser levados a seguirem nestas carreiras, notadamente reconhecidas como de grande importância ao desenvolvimento tecnológico.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ANDRAKA, R. **A survey of CORDIC algoritms for FPGA based computers**, ACM/SIGDA, p. 191 – 200, February 1998.
- [2] CARVALHO, S. P. **As Funções Hiperbólicas**. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/comed/2005/b2005/funchiper.pdf>.
- [3] DAWID, H., MEYR; H. CORDIC algorithms and architectures. In: PARHI, K. K.; NISHITANI, T. **Digital Signal Processing for Multimedia Systems**. New York: Marcel Dekker, 1999. p. 623 – 655.
- [4] EDWARDS, B. H.; UNDERWOOD, J. M. **How do Calculators Calculate Trigonometric Functions?** Educational Resources Information Center (ERIC), document ED461519.
- [5] EKLUND, Neil. CORDIC: Elementary Function Computation Using Recursive Sequences. **Electronic Proceedings of the Eleventh Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics**. p. 330 – 333. New Orleans, 2001. Também disponível em: <http://archives.math.utk.edu/ICTCM/VOL11/C027/paper.pdf>
- [6] MULLER, J. M. The CORDIC Algorithm. In: _____. **Elementary Functions: Algorithms and Implementation**. Boston: Birkhäuser, 2006. p. 133 – 140.
- [7] PARRIS, Richard. **Elementary Functions and Calculators**. Phillips Exeter Academy. Disponível em: <http://math.exeter.edu/rparris/peanut/cordic.pdf>
- [8] SULTAN, Alan. CORDIC: How Hand Calculators Calculate. **College Mathematics Journal**, p. 87 – 92. 17 dez. 2008.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[9] VOLDER, J. E. The CORDIC Trigonometric Computing Technique. **IRE Transactions on Electronic Computers**, vol. EC-8, p. 330 – 334, September 1959.

[10] VOLDER, J. E. The Birth of CORDIC. **Journal of VLSI Signal Processing Systems**, vol. 25, p. 101 – 105, June 2000.

[11] WALTHER, J. S. A Unified Algorithm for Elementary Functions. **Spring Joint Computer Conference**, p. 379 – 385, April 1971.