

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL**

MAX DEYVIS LESSESKI DA SILVA

GEOMETRIA EUCLIDIANA: ENSINO E APLICAÇÕES

CAMPO GRANDE/MS

ABRIL de 2014

MAX DEYVIS LESSESKI DA SILVA

GEOMETRIA EUCLIDIANA: ENSINO E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Pólo Campo Grande, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre.

**ORIENTADORA: Prof^a. Dr^a. RÚBIA MARA DE OLIVEIRA SANTOS
INMA/UFMS**

**CAMPO GRANDE/MS
ABRIL DE 2014**

GEOMETRIA EUCLIDIANA: ENSINO E APLICAÇÕES

MAX DEYVIS LESSESKI DA SILVA

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Matemática, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela Banca Examinadora:

Prof^a. Dr^a. RÚBIA MARA DE OLIVEIRA SANTOS – INMA/UFMS

Prof. Dr. JAIR DA SILVA – INMA/UFMS

Prof. Dr. CELSO CORREIA DE SOUZA – UNIVERSIDADE AHANGUERA – UNIDERP.

CAMPO GRANDE – MS
ABRIL de 2014

AGRADECIMENTOS

“Tudo o que fizerem, seja em palavra seja em ação, façam-no em nome do Senhor Jesus, dando por meio dele graças a Deus Pai.” (Colossenses 3)

Quero agradecer a Deus pelo privilégio de sempre estar próximo de pessoas iluminadas, às quais facilitam nossa jornada, dando-nos força e ânimo. Seria injustiça não mencionar aos colegas de classe, da turma de 2012, que mesmo com tempestades, chegamos todos ao final do curso. Mas em especial, pela paciência e ajuda, a três colegas que muito contribuíram: Antônio Cezare De Araújo Giansante, Edgard José Dos Santos Arinos e Sílvio Rogério Alves Esquinca. Agradeço também a todos os professores e professoras que nos ministraram aulas, os quais jamais deixaram de nos apoiar, buscando sempre a melhor maneira de obtermos êxito. Mas em especial quero agradecer à minha orientadora, professora Dra Rúbia Mara de Oliveira Santos, à qual palavras não conseguirão exprimir o sentimento de admiração e gratidão legados a mim. Em memória agradeço ao meu pai, o qual mesmo não estando presente durante a execução deste trabalho, deixou-me um legado inestimável de superação, força e vontade. Também agradeço a benção concebida por Deus, que é meu filho Fernando. Por fim, não posso deixar de citar a pessoa mais maravilhosa que conheci em minha vida: minha amada esposa Lucia Higa, à qual sempre estive me apoiando, dando ânimo, carinho, amor, broncas, resumidamente: minha grande companheira.

RESUMO

Este trabalho trata essencialmente dos fundamentos da geometria euclidiana, apresentado seus principais axiomas. Aborda situações didáticas para uso no ensino como dinâmica diferenciada da geometria. Apresenta aplicações em construções rurais da isoperimetria, no qual é sugerido um modelo de curral que propicia economia na sua construção e facilidade no manejo. Por fim há uma contribuição ao ensino da geometria analítica, através da planilha analítica, que pode substituir o uso de determinantes para equacionar retas, verificar condição de alinhamento de três pontos e calcular a área de polígonos quando são conhecidas as coordenadas de seus vértices.

Palavras – Chave: Elementos, Isoperimetria, Planilha Analítica.

ABSTRACT

This work describes the euclidian geometry where the main axioms are presented. We present some cases applied to teaching such as dynamics differential geometry. Concepts of isoperimetry applied to rural buildings are presented. A stockyard model that optimizes the building process and facilitates cattle handling is described. Finally, we provide a contribution in the analytical geometry teaching by using an analytical worksheet. The analytical worksheet works as a substitute for determinants to equate straights, verify three points alignment conditions, and calculate polygons area whenever vertices coordinates are known.

Keywords: Elements, Isoperimetric, Analytical Worksheet.

NOTAÇÕES

A : ponto A .

r : reta r .

$r \parallel s$: reta r paralela à reta s .

$r \perp s$: reta r perpendicular à reta s .

AB : segmento AB , ou reta AB , dependendo do contexto.

\overline{AB} : medida do segmento AB .

\overrightarrow{AB} : semi-reta com origem em A e direção de B .

$\overline{AB} > \overline{AC}$: medida do segmento AB maior do que a medida do segmento AC .

$\overline{AB} < \overline{AC}$: medida do segmento AB menor do que a medida do segmento AC .

$\overline{AB} \geq \overline{AC}$: medida do segmento AB maior ou igual do que a medida do segmento AC .

$\overline{AB} \leq \overline{AC}$: medida do segmento AB menor ou igual do que a medida do segmento AC .

$A \Rightarrow B$: A implica em B .

$A \Leftrightarrow B$: A é equivalente a B .

$A * B * C$: pontos A , B e C são colineares e B está entre A e C .

\hat{A} : ângulo com vértice A ou medida do ângulo, dependendo do contexto.

\hat{BAC} , $\angle BAC$ ou $\sphericalangle BAC$: ângulo formado pelas semi-retas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} .

$A \doteq B$: A é igual a B, por definição.

ΔABC : triângulo com vértices nos pontos A, B e C.

$A \equiv B$: A é congruente a B.

$\Delta ABC \equiv \Delta DEF$: triângulo ABC é congruente ao triângulo DEF.

$A\Delta ABC$ ou $\text{Área}(ABC)$: medida da área do triângulo ABC.

$\text{Área}(ABCD)$: medida da área do quadrilátero ABCD.

$[A_1A_2 \dots A_n]$: polígono de n lados com vértices nos pontos A_1, A_2, \dots, A_n .

$|A|$: módulo do valor A.

$A(x_a, y_a)$: ponto A com abscissa x_a e ordenada y_a .

Δ_A : determinante analítico, resultado da planilha analítica.

\mathbb{Q} : conjunto dos números racionais.

\mathbb{R} : conjunto dos números reais.

\mathbb{R}^2 : plano cartesiano.

$[x]$: maior inteiro menor ou igual a x.

LISTA DE SIGLAS

SIGLA 1. AGRAER: Agência de Desenvolvimento Agrário e Extensão Rural.

SIGLA 2. EMBRAPA: Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária.

SIGLA 3. ENEM: Exame Nacional do Ensino Médio.

SIGLA 4. IBGE: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.

SIGLA 5. LDB: Lei de Diretrizes e Bases da Educação.

SIGLA 6. MMM: Movimento da Matemática Moderna.

SIGLA 7. PCNEM: Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio.

SIGLA 8. PCNs: Parâmetros Curriculares Nacionais.

SIGLA 9. SEDMS: Secretaria de Educação do Estado de Mato Grosso do Sul.

SIGLA 10. SENAR: Serviço Nacional de Aprendizagem Rural.

SIGLA 11. UFMS: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	01
1.1 Objetivos gerais dissertação.....	05
1.2 Objetivos específicos da dissertação.....	05
1.3 Organização do texto.....	06
2. ENSINO DA GEOMETRIA: LEGISLAÇÃO E EXEMPLOS.....	07
2.1 Conteúdos e legislação.....	07
2.2 Aspectos históricos da geometria.....	13
2.3 Sugestões didáticas para o ensino da geometria.....	16
2.4 O ensino da geometria em Mato Grosso do Sul.....	20
2.5 O ensino da geometria após o movimento da matemática moderna....	22
2.6 Considerações finais	25
3. FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA EUCLIDIANA.....	27
3.1 Breve histórico sobre Os Elementos de Euclides.....	27
3.2 Axiomas de incidência.....	36
3.3 Axiomas de ordem (na reta).....	38
3.4 Axioma da separação do plano.....	40
3.5 Axiomas da distância (régua).....	41
3.6 Axiomas dos ângulos (transferidor).....	43
3.7 Congruências.....	46
3.8 Retas paralelas.....	48
3.9 Áreas.....	50
3.10 Considerações finais.....	56

4. APLICAÇÕES GEOMÉTRICAS.....	58
4.1 A geometria por traz da construção de uma porteira.....	59
4.2 A Lenda da Rainha Dido de Cartago.....	62
4.3 Aplicações rurais do problema de isoperimetria.....	73
4.4 A planilha analítica.....	77
4.5 Considerações finais.....	86
5. CONCLUSÃO.....	87
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	89

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Planta baixa do galpão para criação de frangos caipiras.....	11
Figura 2. Vista panorâmica do galpão criação de frangos caipiras.....	12
Figura 3. Bebedouro para bovinos.....	13
Figura 4. Quadrilátero convexo.....	17
Figura 5. Trapézio isósceles.....	17
Figura 6. Triângulo equilátero.....	34
Figura 7. Reta determinada por dois pontos.....	36
Figura 8. Reta e um ponto fora dela.....	36
Figura 9. R e s interceptam no ponto P e nem são paralelas.....	37
Figura 10. Circulo determinado por três pontos.....	39
Figura 11. Continuidade da reta.....	39
Figura 12. Segmento de reta AB.....	39
Figura 13. Semi-reta \overrightarrow{AB}	39
Figura 14. Teorema de PASCH.....	40
Figura 15. Ângulo com vértice A.....	43
Figura 16. Ângulos $B\hat{A}D$ e $C\hat{A}D$ suplementares	43
Figura 17. O ângulo $B\hat{A}C$ é raso.....	43
Figura 18. \overrightarrow{OC} divide o ângulo $A\hat{O}B$	44
Figura 19. \overrightarrow{OC} é bissetriz de $A\hat{O}B$	44
Figura 20. R e s perpendiculares à m.....	45
Figura 21. $B\hat{A}C$ agudo e $D\hat{E}F$ obtuso.....	45
Figura 22. Triângulos congruentes.....	47

Figura 23. Reta t transversal as retas m e n.....	49
Figura 24. Região triangular.....	50
Figura 25. Região poligonal.....	51
Figura 26. Paralelogramo ABCD.....	52
Figura 27. Triângulo ABC.....	52
Figura 28. Trapézio ABCD.....	53
Figura 29. Polígono inscrito.....	55
Figura 30. Porteira de curral.....	59
Figura 31. Esboço de porteira.....	61
Figura 32. Fio obtido para delimitar o terreno.....	63
Figura 33. Problema de Dido.....	64
Figura 34. Polígono convexo hipotético de n lados.....	65
Figura 35. Polígono hipoteticamente máximo.....	65
Figura 36. Otimização de Herão.....	66
Figura 37. Polígono máximo.....	67
Figura 38. Polígono não regular.....	68
Figura 39. Quadrado e losango.....	69
Figura 40. Polígono.....	70
Figura 41. Polígono.....	70
Figura 42. Detalhe de lance de mangueiro – Embrapa – módulo 500.....	73
Figura 43. Polígono de n lados dividido em triângulos isósceles.....	74
Figura 44. Foto de carcaça com hematomas, à esquerda, e carcaças normais à direita.....	76
Figura 45. Foto de coxão duro com hematomas, à esquerda, e coxão duro normal à direita.....	76

Figura 46. Foto aérea de curral anti-stress e um polígono regular com 20 lados.....	77
Figura 47. Planilha com diagonal direita e diagonal esquerda.....	78
Figura 48. Triângulo ABC em orientação horária.....	81
Figura 49. Triângulo ABC em orientação anti horária.....	82
Figura 50. Quadrilátero convexo e quadrilátero côncavo.....	83

1. INTRODUÇÃO

Indubitavelmente a matemática é vista como uma disciplina difícil e complexa pela maioria dos alunos, e também por professores de outras áreas. Por vezes é considerado normal obter desempenhos abaixo da média esperada nesta disciplina. Entretanto, isso traz um reflexo negativo muito forte para nossa sociedade, pois atrapalha até mesmo a economia do país, ou região. Como exemplo, pode-se citar os prejuízos sofridos por pecuaristas na época da estação seca com a morte de animais por falta de alimentos, deixando evidente a falta de logística dos mesmos quanto à reserva de alimentos para suportar estiagens.

A matemática pode auxiliar os produtores, amenizando tais prejuízos. Alguns produtores o fazem por já terem habilidades diferenciadas, enquanto outros necessitam de ajuda, e esta ajuda pode ser concedida via escola, com formulações de casos aplicados e adequação de conteúdos.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) há os temas transversais para a área de matemática, dentre eles, têm-se os temas de relevância social, os quais devem ser aplicados a grupos específicos. Assim sendo, abordar-se-á neste trabalho a educação voltada para o homem do campo, em especial, as aplicações da geometria e seus impactos econômicos em pequenas propriedades rurais.

O intuito é fornecer parâmetros aos professores de matemática destas comunidades que permitam tornar a matemática mais atrativa e real aos alunos do campo, pois há um distanciamento entre as aplicações da matemática e a matemática vista nas escolas. Pesquisas comprovadas já apontam situações onde

os alunos sabem a matemática aplicada, mas não sabem abstrair e compreender as teorias vistas na escola. Uma leitura que aborda especificamente esta questão é o livro “Na vida dez, na escola zero” dos autores Terezinha Nunes Carraher, David William Carraher, e Analúcia Dias Schliemann [15].

Há um jargão popular no mundo dos negócios que diz: “*não tente redescobrir a roda*”, ou seja, use teorias e resultados já comprovados para ter sucesso. Assim sendo, aos professores de matemática recomenda-se utilizar técnicas de ensino já testadas e provadas, entre as quais o método da resolução de problemas, que é citado e sugerido nos PCNs. Por isso, será citado alguns problemas e situações de aplicação dos conteúdos abordados.

Por crença pessoal, serão abordados problemas reais e não problemas hipotéticos, facilmente encontrados em bons livros, mas que acabam por não aguçar o interesse dos alunos, podendo até mesmo gerar descrença na teoria por ser uma situação totalmente inaplicável no mundo real.

Uma leitura acerca da importância de problemas no ensino da matemática é “A arte de resolver problemas – um novo aspecto do método matemático” de G. Polya da Universidade Stanford [30].

A geometria é extremamente rica em exemplos e aplicações tangíveis ao dia-a-dia dos alunos, o seu estudo é previsto tanto no ensino fundamental como no ensino médio. Atualmente, é vista nas escolas a geometria euclidiana, a qual reproduz quase na totalidade os problemas simples do cotidiano. É importante conscientizar a existência de outras geometrias, para aguçar a curiosidade dos alunos. O foco principal será na geometria de Euclides. Tradicionalmente, divide-se

a geometria em: geometria plana, geometria espacial e geometria analítica plana. Assim, far-se-á uma abordagem prática de todas estas frentes da geometria.

Os conceitos de geometria aparecem naturalmente no campo. Propriedades geométricas são usadas de forma empírica por produtores inúmeras vezes. Desde a construção de uma cerca até a construção de um curral, podem-se explorar as propriedades geométricas com precisão. No capítulo 2, foi feito um levantamento sobre os conteúdos de geometria para o ensino médio previstos nos Parâmetros Curriculares Nacionais e no Referencial Curricular de Mato Grosso do Sul. Tendo como suporte tais referenciais apresentamos situações problemas, baseados na dinâmica do cotidiano rural. No capítulo 3 apresentamos o lado axiomático da geometria euclidiana, apresentando as reformulações dos axiomas de Euclides, propostos principalmente por Hilbert e Pacsh.

A pecuária nacional passa por um momento ímpar, pois com o alto grau de degradação das pastagens e a limitação da expansão das terras, torna-se necessário otimizar os resultados, com as terras já disponíveis. Assim, reduzir custos é uma prioridade. Para tanto apresentaremos no capítulo 4 o problema de Dido, o qual pode ser adaptado à construção de currais, cercando a maior área possível, com a mínima quantidade de materiais.

A busca por melhorias e aperfeiçoamento deve ser constante em nossas vidas. Assim, o termo otimização, deve ser incorporado ao nosso cotidiano, em todas as circunstâncias. Aperfeiçoar o tempo de estudos, de descanso, ou de trabalho ou otimizar resultados financeiros podem ser almejados e há ferramentas matemáticas que possibilitam tais melhorias. Logo é imprescindível à humanidade a matemática.

Por fim, apresenta-se uma ferramenta denominada Planilha Analítica, à qual substitui o uso de determinantes para o cálculo da área de polígonos, quando são conhecidas somente as coordenadas de seus vértices.

A planilha é usada nos cursos pré-vestibulares como regra prática, entretanto, não é apresentada nos livros didáticos, assim resolvi provar sua validade, formalizando sua definição. Conheci esta ferramenta nos finais da década de 90, ocasião em que frequentava o ensino médio, entretanto não encontrei sua demonstração. Posteriormente, já na faculdade, tentei demonstrá-la, sem muito êxito, quando fui aluno do professor MSc. Gilberto Antonio Tellaroli, na disciplina de Cálculo II, na UFMS. Ao analisar o problema, ele me disse que seria possível demonstrar usando indução finita.

Deixei este problema de lado, até reencontrá-lo em exercícios de vestibulares em 2012, quando decidi retomar o problema e concluí-lo. Apresentei a proposta a minha orientadora, Prof^a. Dr^a. Rúbia Mara de Oliveira Santos, que me orientou que seria necessária a construção de algumas definições e lemas para concluir a indução sugerida pelo Gilberto, e assim o fizemos, criando dois Teoremas, além de alguns Lemas e Corolários que podem ser vistos como uma contribuição para o ensino, por ser uma ferramenta alternativa ao uso de determinantes, dando agilidade ao cálculo de áreas de regiões poligonais, equacionamento de retas e verificação da condição de alinhamento de três pontos.

Os dois termos usados, planilha analítica e determinante analítico, não foram copiados de outras referências, o termo planilha é utilizado pela maneira de organizar as coordenadas dos pontos, que lembra uma tabela. Já, o determinante

analítico, para fazer referência à semelhança com o cálculo de determinantes de ordem 2 e 3.

1.1 Objetivos gerais

Propor aplicações rurais dos conteúdos de geometria, com o intuito de aguçar a curiosidade matemática de alunos de escolas agrícolas, na perspectiva de que quando houver a interação entre alunos e famílias, haja um melhor aproveitamento do trabalho dos produtores rurais, gerando economia e funcionalidade nas construções rurais, através do uso da isoperimetria, a ser apresentada por meio da Lenda de Dido.

Justificar a reformulação dos axiomas propostos por Euclides, apresentando os cinco grupos de axiomas que dão suporte à geometria Euclidiana.

Deixar como legado uma fonte de consulta a professores do ensino básico, tanto como referencial dos aspectos da legislação do ensino da geometria, como material de apoio a elaboração de aulas de geometria Euclidiana.

1.2 Objetivos específicos

Propor um modelo de curral anti-stress, que gere economia para os pequenos produtores rurais. Provar a validade de uma ferramenta alternativa ao uso de determinantes para o cálculo de áreas de regiões poligonais, em função de suas coordenadas analíticas, apresentando uma ferramenta não divulgada nos livros didáticos, denominada **Planilha Analítica**, à qual será definida, e enunciar dois

Teoremas e alguns Lemas e Corolários, que permitem também utilizá-la para equacionar retas e verificar a condição de alinhamento de três pontos.

1.3 Organização do texto

A organização do texto foi feita por capítulos, distribuídos por seções inerentes ao tema, iniciando-se pelo número do capítulo. As definições, proposições, lemas, teoremas, corolários e observações seguem numeração sequencial dentro do capítulo, independentemente do tipo de assertiva, para facilitar sua busca. Assim ao referirmos, definição 35 do capítulo 3, basta buscar o número 35, na sequência de afirmações do capítulo.

2. ENSINO DA GEOMETRIA: LEGISLAÇÃO E EXEMPLOS VOLTADOS ÀS ESCOLAS RURAIS.

Neste capítulo será apontado como decorre o ensino da geometria, tanto no Brasil, quanto em Mato Grosso do Sul, além de ser abordado o Movimento da Matemática Moderna que introduziu elementos axiomáticos ao ensino da geometria. Também serão apresentadas algumas situações didáticas, que podem enriquecer o trabalho do professor em sala de aula.

2.1 - Conteúdos e legislação.

A matemática é vista como um conteúdo complexo, quiçá pela sua distância entre a teoria e a prática. A educação no campo perpassa por diversas especificidades o que ocasiona maior dificuldade entre teorização e cotidiano, devido à linguagem simples do homem do campo e em alguns locais o difícil acesso as novas tecnologias. Segundo artigo de Clésio Acilino Antonio e Marizete Lucini as escolas rurais têm especificidades próprias, dentre elas, destaca-se o paradigma social de que pessoas do campo não estudam. Fator contraditório, pois se for analisado o ranking das escolas públicas de Campo Grande no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) de 2012, a escola agrícola Governador Arnaldo Estevão Figueiredo ocupa o 3º lugar.

De acordo com a LDB 9.394/96, os conteúdos escolares devem ter uma base nacional comum, isto significa que o conteúdo ministrado em todas as escolas deve ser o mesmo, entretanto, a abordagem e os exemplos tomados serão diferenciados, de acordo com a especificidade de cada comunidade em questão.

Art. 26. Os currículos da educação infantil, do ensino fundamental e do ensino médio devem ter base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos, (Redação dada pela Lei nº 12.796, de 2013).

Logo, os conteúdos a serem ministrados em escolas rurais, serão exatamente os mesmos de escolas da cidade, divergindo somente na abordagem e nos exemplos de aplicação. Fato garantido no artigo 28 [11]:

Art. 28. Na oferta de educação básica para a população rural, os sistemas de ensino promoverão as adaptações necessárias à sua adequação às peculiaridades da vida rural e de cada região, especialmente:

- I - conteúdos curriculares e metodologias apropriadas às reais necessidades e interesses dos alunos da zona rural;
- II - organização escolar própria, incluindo adequação do calendário escolar às fases do ciclo agrícola e às condições climáticas;
- III - adequação à natureza do trabalho na zona rural.

Ter o mesmo conteúdo das escolas urbanas, com a mesma carga horária e com os mesmos livros didáticos acaba gerando dificuldade na elaboração do plano de aula, faltando tempo ao professor para proporcionar um ensino mais dinamizado e integrado. Visto que o trabalho pedagógico com alunos da zona rural requer conhecimento prévio da realidade dos mesmos, rotinas, comercialização e entre outros fatos do dia-a-dia para a elaboração da interdisciplinaridade. Desta forma, é recomendável que o professor pesquise em informativos, revistas, livros ou artigos sobre a atividade rural mais predominante na região em que ministra suas aulas. Entidades como a EMBRAPA, AGRAER, SENAR, e SINDICATOS RURAIS possuem um amplo acervo disponível.

Em relação aos conteúdos a serem estudados, deve-se seguir os PCN'S (Parâmetros Curriculares Nacionais). De acordo com o PCNEM (livro dos

Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio) o ensino da matemática deve contemplar três grandes competências [10]:

- representação e comunicação, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento;
- investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências;
- contextualização das ciências no âmbito sociocultural, na forma de análise crítica das ideias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico.

A cada conteúdo a ser abordado, deve-se lembrar, que estas competências serão o objetivo final, ou seja, o aluno deverá tê-las como habilidade, e executá-las em sua plenitude.

Em relação específica à geometria, na página 119 do PCNEM, encontra-se:

A Geometria, ostensivamente presente nas formas naturais e construídas, é essencial à descrição, à representação, à medida e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços. No ensino médio, trata das formas planas e tridimensionais e suas representações em desenhos, planificações, modelos e objetos do mundo concreto. Para o desenvolvimento desse tema, são propostas quatro unidades temáticas: geometrias plana, espacial, métrica e analítica.

Para as escolas rurais é possível explorar tal princípio em diversos casos, como por exemplo, visitar um curral e solicitar a elaboração de uma maquete do mesmo, explorando tanto conceitos de proporcionalidade (Teorema de Tales) como noções de área.

Também, encontram-se as unidades temáticas da geometria, na página 125 do PCNEM, às quais descrevem quais são as habilidades e competências que se deve buscar nos alunos, são elas [10]:

- 1. Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.**
 - Identificar dados e relações geométricas relevantes na resolução de situações-problema.
 - Analisar e interpretar diferentes representações de figuras planas, como desenhos, mapas, plantas de edifícios etc.
 - Usar formas geométricas planas para representar ou visualizar partes do mundo real.
 - Utilizar as propriedades geométricas relativas aos conceitos de congruência e semelhança de figuras.
 - Fazer uso de escalas em representações planas.
- 2. Geometria espacial: elementos dos poliedros, sua classificação e representação; sólidos redondos; propriedades relativas à posição: intersecção, paralelismo e perpendicularismo; inscrição e circunscrição de sólidos.**
 - Usar formas geométricas espaciais para representar ou visualizar partes do mundo real, como peças mecânicas, embalagens e construções.
 - Interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos.
 - Utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade.
 - Compreender o significado de postulados ou axiomas e teoremas e reconhecer o valor de demonstrações para perceber a Matemática como ciência com forma específica para validar resultados.
- 3. Métrica: áreas e volumes; estimativa, valor exato e aproximado.**
 - Identificar e fazer uso de diferentes formas para realizar medidas e cálculos.
 - Utilizar propriedades geométricas para medir, quantificar e fazer estimativas de comprimentos, áreas e volumes em situações reais relativas, por exemplo, de recipientes, refrigeradores, veículos de carga, móveis, cômodos, espaços públicos.
 - Efetuar medições, reconhecendo, em cada situação, a necessária precisão de dados ou de resultados e estimando margens de erro.
- 4. Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.**

- Interpretar e fazer uso de modelos para a resolução de problemas geométricos.
- Reconhecer que uma mesma situação pode ser tratada com diferentes instrumentais matemáticos, de acordo com suas características.
- Associar situações e problemas geométricos a suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice-versa.
- Construir uma visão sistemática das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre eles.

Nota-se que nas quatro unidades temáticas supramencionadas, é possível estabelecer conexões com problemas do campo. Na unidade 1, pode-se explorar a planta baixa de construções rurais. Em [25] tem-se disponível um manual para a construção de um galpão para a criação de frangos caipiras. Na página 15 há uma planta baixa (figura 1).

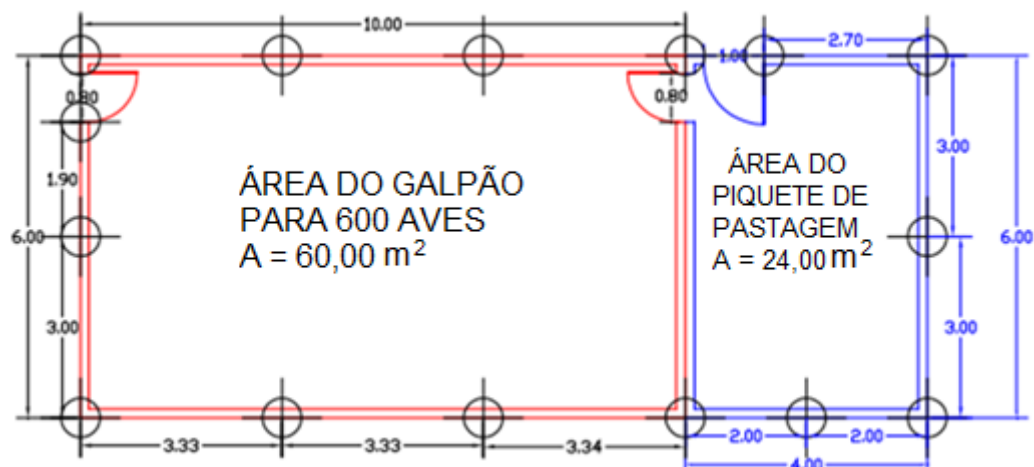


Figura 1: Planta baixa do galpão para criação de frangos caipiras.

A partir desta planta pode-se solicitar aos alunos que façam uma maquete, usando uma escala predeterminada, ou mesmo pedir a eles que façam uma planta que abrigue o triplo do número de frangos.

Fazendo-se uma representação da vista panorâmica do galpão (figura 2), torna-se fácil explorar tipos de poliedros, contemplando a unidade 2.

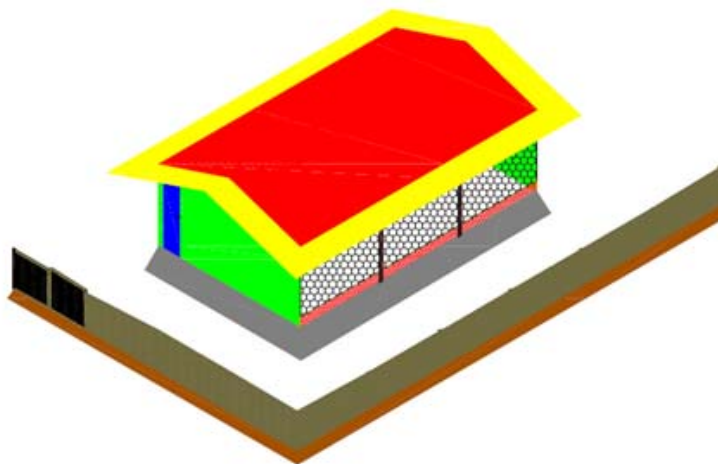


Figura 2: Vista panorâmica do Galpão para criação de frangos caipiras

Para a unidade 3, é possível explorar a importância da construção de um bom bebedouro para os bovinos, já que não é recomendado deixar os animais beberem água direto nos rios ou córregos, para evitar assoreamento, e nem mesmo utilizar-se de açudes, pois acumulam água suja, aumentando a incidência de doenças nos animais. Pode-se sugerir aos alunos que pesquisem quanto de água bebe uma vaca, e questionar quais devem ser as dimensões de um bebedouro cilíndrico, como o da figura 3, para suprir a necessidade de 30 vacas. Tendo a possibilidade de trabalhar tanto a noção de diâmetro, como a de altura, lembrando a altura será limitada, já que uma vaca não alcançaria um bebedouro com qualquer altura. Pode-se sugerir uma pesquisa que indique qual deve ser a altura máxima de um bebedouro.



Figura 3: Bebedouro para bovinos

Para a unidade 4, pode-se recorrer a softwares como o Geogebra, que é gratuito. Este software aborda a matemática dinâmica e foi desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário) e reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Além disso, ele é multiplataforma, podendo ser instalado em sistemas operacionais como Windows, Linux ou Mac OS. Há também a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si.

2.2 – Aspectos históricos da geometria.

Se for aberto um dicionário, encontrar-se-á como significado para a palavra geometria a seguinte informação: “No sentido lato geometria é o estudo qualitativo da forma e das dimensões, conducente em particular às noções de linha, superfície, comprimento, área, entre outras, e suas múltiplas relações. Já no sentido estrito é o estudo das propriedades dos entes geométricos que são invariantes para as operações de um grupo de transformações” [17].

A palavra geometria tem origem grega, deriva da palavra geometrein onde o prefixo “geo” significa “terra” e o sufixo “metrein” significa medição. Logo, geometria deriva de “medição da terra”. Segundo o historiador grego Heródoto (século V a.C.) a geometria tem sua origem na agrimensura (medição de terrenos). Nesta fase os conhecimentos geométricos eram empíricos, ou seja, usava-se o censo comum, não tendo organização estruturada como postulados e teoremas, ou como chamamos atualmente, a geometria ainda não era dedutiva. Havia apenas regras práticas para auferir medidas, seja de ângulos retos com cordas, ou de áreas de terras para plantações, ou mesmo construções arquitetônicas de extrema relevância como os templos babilônicos, ou as fascinantes pirâmides do Egito [6].

Em relação aos egípcios, têm-se como fontes principais do desenvolvimento matemático alcançado por eles em dois papiros: o papiro de Moscou (aproximadamente 1850 a.C.) e o papiro de *Rhind* (aproximadamente 1650 a.C.). Os dois papiros juntos contem cento e dez problemas matemáticos, todos com características numéricas e práticas, sendo vinte e seis abordando conceitos de geometria. No papiro de Rhind há um problema sobre como encontrar a área de um círculo, e curiosamente a solução dada é calcular a área de um quadrado cujo lado seja oito nonos do diâmetro do círculo, comparando-se com o cálculo atual o valor de π adotado é de 3,16. Também era conhecido por eles a fórmula para o cálculo da área de triângulos, retângulos, do volume do cilindro reto e do tronco de pirâmides de bases quadradas. [8]

Na Babilônia, os conhecimentos geométricos explorados também eram de mensuração prática, como regras de cálculo de áreas dos retângulos, triângulos retângulos, triângulos isósceles, trapézios retângulos, além de volumes de

paralelepípedos reto-retângulos, prismas retos com base trapezoidal, troncos de cone e tronco de pirâmide quadrangular regular. Para calcular o perímetro de um círculo usavam uma fórmula que equivale a usar π como sendo $3\frac{1}{8}$, ou seja, 3,125. Além de terem conhecimento que lados de triângulos retângulos isósceles eram proporcionais, sabiam que o ângulo inscrito em uma semicircunferência é reto [16].

A marca principal da geometria babilônica é seu caráter algébrico, pois os problemas mais difíceis do campo geométrico acabavam por levar a equações quadráticas, ou mesmo cúbicas. Talvez o fato mais surpreendente seja que já dominavam o Teorema de Pitágoras, pois fora descoberta uma tábua matemática gravada em uma pedra denominada de *Plimpton*, na qual há inúmeras ternas pitagóricas. Segundo os historiadores estes escritos devem ter sido gravados entre 1900 a.C. e 1600 a.C. [16].

Claro que o conhecimento produzido por Egípcios e Babilônicos fora extremamente importante para o desenvolvimento da geometria. Entretanto, segundo o livro de Carl Boyer [8] é com os geômetras gregos, essencialmente com o trabalho de Tales de Mileto, por volta de 600 a.C., tem-se o início da geometria dedutiva (demonstrativa).

Segundo (Brolezzi, 2002), tem-se que:

Mas é sem dúvida com os geômetras gregos, começando com Tales de Mileto (624-547a.c.), que a geometria é estabelecida como teoria dedutiva. O trabalho de sistematização em geometria iniciado por Tales é continuado nos séculos posteriores, nomeadamente pelos pitagóricos.

Não existem documentos matemáticos de produção pitagórica, nem é possível saber-se exatamente a quem atribuir as descobertas matemáticas dos pitagóricos na aritmética e na geometria.

Mais tarde, Platão interessa-se muito pela matemática, em especial pela geometria, evidenciando, ao longo do ensino, a necessidade de demonstrações rigorosas dedutivas, e não pela verificação experimental.

Esta concepção é exemplarmente desenvolvida pelo discípulo da escola platônica Euclides de Alexandria (325-285a.c.), no tratado Elementos publicado por volta de 300 a.c., em treze volumes ou livros.

A geometria denominada de Euclidiana surge assim em homenagem a Euclides; Nos seus treze livros, Euclides baseia-se nos seus precedentes gregos: os pitagóricos, Eudóxio, Taeteto. Mas Euclides mais do que expor as teorias destes mestres organiza as matérias de um modo sistemático a partir de princípios e definições, procedendo ao seu desenvolvimento por via dedutiva.

Atualmente, a geometria tem estrutura matemática, ou seja, possui definições, postulados, teoremas que a regem, tornando-a uma ciência sistematizada e com rigor de demonstrações para validar sua teoria.

2.3 – Sugestões didáticas para o ensino da geometria.

Indubitavelmente, fomentar o conhecimento dos alunos com fatos históricos aguça a criatividade, fazendo-os pensar e tomar decisões precisas. E qual será a importância de uma demonstração em matemática? Não basta saber calcular e pronto, para que ficar provando?

O exemplo deixará claro este motivo. Nas comunidades rurais é comum a necessidade de calcular áreas, especialmente em épocas de plantio, pois muitos são os pequenos produtores que precisam gradear suas terras para plantar, contratando um trator com arado. Decorre que o valor do aluguel é estipulado em função da área gradeada. Além de ser necessário o conhecimento da área para saber o quanto jogar de adubo, ou quanto de calcário, para corrigir a acidez do solo. Grandes propriedades rurais fazem a contratação dos serviços de um topógrafo, o

que nem sempre é viável ao pequeno produtor. Então, há uma maneira disseminada nas comunidades rurais, chamado “*maneira de cubicar terra de quatro cantos*”.

O termo “*cubicar terra*” quer dizer calcular a área, e “*quatro cantos*” quer dizer que é válida para quadriláteros. Na imensa maioria das vezes o quadrilátero em questão é convexo, e a regra diz: Some cada par de lados opostos, depois multiplique os dois valores obtidos e divida o resultado por quatro, que a terra estará “*cubicada*”. Considere então um quadrilátero convexo qualquer de vértices A, B, C e D dispostos de acordo com a figura 4.

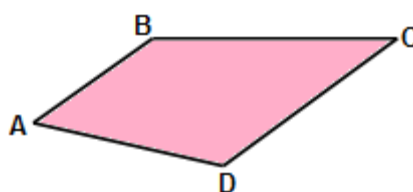


Figura 4: Quadrilátero convexo

Serão pares opostos os lados AB e CD, e AD e BC, logo a área será dada por $A = \frac{(AB+CD) \times (AD+BC)}{4}$, e daí vem o questionamento, esta fórmula é correta? Se o aluno verificar em um retângulo, verá que é verdadeira, mas em um trapézio valerá? Veja a figura 5 e o teste de sua validade:

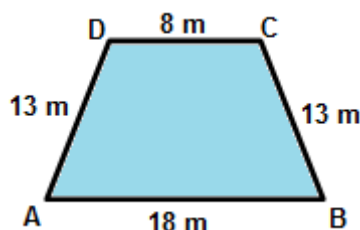


Figura 5: Trapézio isósceles

Pela fórmula “popular” a área seria: $A = \frac{(AB+CD) \times (AD+BC)}{4} \Rightarrow A = \frac{(18+8) \times (13+13)}{4} = 169m^2$. E, efetuando pelo método correto, chega-se a $A = 156 m^2$, gerando uma discrepância de 8,33% da área correta. Neste caso, o produtor não só pagaria 8,33% a mais pelos serviços do trator, como jogaria 8,33 % a mais de adubo e calcário de forma desnecessária. Logo, a resposta do porquê saber provar é simples, aprende-se a demonstrar teorias já comprovadas, para quando se deparar com um problema novo, ter um caminho por onde buscar uma solução verdadeira, pois os cálculos do problema de “cubicar” terra estão corretos, mas seu resultado pode ser falso.

Inúmeras são as pesquisas que comprovam a importância de se usar problemas para ensinar matemática. Mas quais problemas abordar? Problemas teóricos ou problemas práticos? Esta dúvida é extremamente relevante e, em particular, recomenda-se usar dos dois tipos. Os problemas práticos facilitam a visualização de problemas teóricos, facilitando até mesmo a compreensão das definições e propriedades [15].

Os professores devem cativar seus alunos a entender a linguagem e validações da matemática, fazendo-os realmente compreender que não basta usar processos práticos, que as demonstrações são cruciais para validar resultados. Instigá-los a conjecturar é uma ótima estratégia, e através da conjectura, provar a veracidade das informações, ou encontrar um contra-exemplo. Neste quesito, os recursos computacionais contribuem amplamente.

Apresentar-se-á algumas situações - problema, que podem contribuir para o processo de ensino-aprendizagem, especialmente se explorados com o recurso

computacional. Cabe salientar que tais problemas devem ser propostos para casa, para que os alunos interajam com as informações práticas, e na aula seguinte fazer a mediação teórica, usando os recursos didáticos adequados.

Problema 1 – Construção de triângulos. Sabe-se que não é possível construir um triângulo com lados medindo 5 cm, 7 cm e 18 cm. Mas os alunos sempre acham que isto é possível. Assim, para explorar a condição de existência de um triângulo, adquira algumas varetas (pode ser de bambu) todas medindo um valor fixo, a exemplo 30 cm. Recorte-as em três partes de tamanhos variados, e peça aos alunos que unam as pontas de tal forma a construir um triângulo. Coloque exemplos que darão certo e obviamente exemplos que não darão. A seguir indague-os, por que algumas vezes dá certo e outras não? Peça a eles que encontrem uma explicação. Após um tempo de reflexão dê a solução formal. As idéias ficarão mais claras, pois eles compreenderão de forma visual, conectando a álgebra envolvida na geometria com as aplicações práticas.

Problema 2: Área máxima de triângulos. Fixe uma medida para o perímetro de um triângulo. Por exemplo, 30 cm. Pegue então algumas varetas de 30 cm, e peça aos alunos que a recortem em três pedaços, com o auxílio da régua, tal que formem números inteiros (para simplificar os resultados) e tais que seja possível construir um triângulo. Após as construções, caso nenhum aluno tenha feito um triângulo equilátero, faça-o e calcule a área dos triângulos formados. Por fim, questione-os por qual motivo é o triângulo equilátero que possui a área máxima.

Problema 3: Área máxima de quadriláteros. Suponha que você queira fechar quarenta vacas para dormirem próximas de sua casa. Para tanto, deseja-se usar a mínima quantidade possível de arame, e para garantir que nenhuma fugirá, usará

cinco fios de arame. Quantos metros de arame deverão ser comprados? Para facilitar a construção o cercado deverá ter o formato quadrangular. Peça aos alunos pesquisarem qual deve ser a área necessária para cercar quarenta vacas. De acordo com instrução da Embrapa gado de corte, são recomendados $2,5 \text{ m}^2$ por animal. Assim o quadrilátero deverá ter 100 m^2 . Depois peça para que eles justifiquem por que dentre todos os quadriláteros possíveis, o quadrado terá a melhor área.

Problema 4: Volume máximo de um reservatório. Suponha que você precise construir um reservatório de água suficiente para sanar a sede de 50 vacas por três dias. A altura ideal do reservatório é de 60 cm, pois nesta altura as vacas alcançam o fundo do reservatório sem maiores dificuldades. Peça aos alunos que pesquisem quanto uma vaca bebe de água por dia, para saberem quantos litros deverá conter o reservatório. Depois solicite deles qual base será mais adequada ao reservatório, com o objetivo de realizar a máxima economia de material na construção. Sugira triângulos, quadriláteros, hexágonos. Finalmente, mostre que o círculo terá a máxima área, com o menor perímetro, gastando, portanto menos material.

2.4 – O ensino da Geometria em Mato Grosso do Sul.

No Estado de Mato Grosso do Sul há um referencial curricular para todas as escolas da rede estadual de ensino. Como a maioria das escolas públicas de ensino médio é de responsabilidade do Estado, far-se-á uma análise deste referencial, especificamente, na área de geometria. Há também no Estado um sistema *online* de planejamentos, onde o professor lança mensalmente os conteúdos a serem

trabalhados, seguindo preferencialmente a ordem pré-estabelecida no referencial, detalhados por bimestre. Segue a relação de conteúdos estabelecida e o respectivo bimestre, da área temática de geometria, conforme referencial de 2013 [35]:

PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO

▪ Geometria plana – 4º bimestre

- *Semelhanças de triângulos; relações métricas no triângulo retângulo; razões trigonométricas; seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo; ângulos notáveis (30° , 45° , 60°).*

SEGUNDO ANO DO ENSINO MÉDIO

▪ Geometria plana – 1º bimestre

- *Resolução de Triângulos*
 - ✓ *Lei dos senos; Lei dos cossenos; Área de um triângulo; Área de um triângulo em função de um lado e da altura relativa a esse lado; Área de um triângulo em função de dois lados e do ângulo correspondente entre eles.*
- *Sistema Trigonométrico*
 - ✓ *Arcos e ângulos; Funções e relações trigonométricas; Equações e inequações trigonométricas*

TERCEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO

▪ Geometria – 2º bimestre

- *Geometria Espacial*
 - ✓ *Postulados e teoremas; Paralelismo; Perpendicularidade*
- *Poliedros; Prismas; Pirâmides; Cilindros; Cones e Esfera*

▪ Geometria – 3º bimestre

- *Geometria Analítica*
 - ✓ *O ponto; A reta; A circunferência; As cônicas*

A carga horária semanal para trabalhar os conteúdos de matemática em 2014 é de apenas duas horas-aula por semana. Nota-se então que há uma grande tendência dos alunos não terem acesso a outros modelos de geometria, fixando ideias somente sobre geometria Euclidiana, além de dificultar a abordagem voltada à educação rural, uma vez que são utilizados basicamente os mesmos livros didáticos em todas as escolas. Cabe então ao professor se desdobrar de forma heróica no exíguo tempo disponível para planejamentos e assim contemplar a abordagem diferenciada e aplicações práticas inerentes ao meio rural.

2.5 – O ensino da geometria após o Movimento da Matemática Moderna.

O Movimento da Matemática Moderna (MMM) foi como se tornou conhecido o movimento internacional de reformulação no ensino da matemática escolar. Ocorrido entre final da década de 50 e início dos anos 60, comissões, grupos de estudo, seminários, congressos nacionais e internacionais sobre a educação matemática discutiram novas propostas para o ensino da matemática, tentando aproximar o ensino realizado na educação básica do ensino realizado na Universidade, buscando empregar a linguagem e estrutura da matemática empregada pelos matemáticos da época [38].

Segundo artigo da professora Maria Célia Leme da Silva o Movimento da Matemática Moderna, no Brasil, ganha força com a criação do GEEM - Grupo de Estudos do Ensino da Matemática, em 1961, na cidade de São Paulo. Este grupo tem um papel preponderante na introdução e divulgação do Movimento no Brasil. Participaram do grupo: professores universitários, professores do ensino secundário

e primário, autores de livros didáticos, todos com o objetivo de incentivar, coordenar, divulgar e atualizar o ensino da matemática. Neste artigo a professora faz uma análise dos livros de geometria de Benedito Castrucci, o qual possui publicações anteriores e posteriores ao MMM. Seu artigo traz:

“Nossa análise inicial sobre como Benedito Castrucci tratou a geometria nas propostas de modernização do ensino da matemática foi feita considerando como fonte de pesquisa seus livros didáticos. Em 1968, Castrucci publica o livro didático **Geometria curso moderno** em substituição ao anterior **Lições de Geometria elementar**, destinado aos alunos do ensino secundário, cujo prefácio, anuncia as mudanças propostas no livro em decorrência do MMM. Ao compararmos os dois livros de Castrucci, percebe-se a inclusão, na abordagem moderna, de dois capítulos iniciais: o primeiro, Noções de lógica e o segundo Elementos de teoria dos Conjuntos, antes do estudo da Geometria. É bastante evidente, também, a nova linguagem empregada pelo autor. Os teoremas, antes enunciados e demonstrados em linguagem natural, na versão moderna da Geometria, incorpora a simbologia utilizada na teoria dos Conjuntos. Em outras palavras, pode-se dizer que a nova obra e a anterior revestida de uma nova linguagem, sem, entretanto, uma mudança de abordagem de proposta pedagógica. Castrucci comenta no Prefácio que:

Há um movimento para a substituição do conteúdo geométrico no curso colegial e, talvez, no ginasial, por uma algebrização da Geometria, tratando-a como um capítulo de Álgebra Linear. Acreditamos que esta inovação preconizada por grandes matemáticos não possa ser feita imediatamente, pois a nosso ver seria, no momento, um passo ousado. (CASTRUCCI, 1968).

Nota-se uma clara tendência de cautela por parte de Castrucci em relação às modificações da geometria.

Já no cenário internacional, o referido artigo traz à tona uma análise da Primeira Conferência Inter-Americana sobre Educação Matemática, ocorrida em Bogotá na Colômbia, em dezembro de 1961. Nesse encontro, o professor Howard F. Fehr, em 1962, dos EUA, faz uma conferência com o título **Reforma do Ensino da Geometria**. Em sua fala, ele teceu considerações sobre o desenvolvimento da Geometria como campo matemático e, em seguida, discute o ensino da geometria. Segundo ele, durante as primeiras décadas do século XX, o movimento dedicado a

refinar a base axiomática da Geometria de Euclides surtiu pouco ou nenhum efeito sobre o ensino dessa matéria tanto no nível secundário quanto universitário. Essa situação de inércia mudou na década de 30 com o renascimento do interesse pelos axiomas de Hilbert como base apropriada para um programa de instrução na escola secundária.

Desde então Fehr aponta duas tendências ao ensino da geometria. A primeira, elaborada por G. D. Birkhoff, propunha uma modificação significativa dos axiomas de Euclides, seguindo a forma geral imposta por Hilbert, porém, conseguindo uma grande economia ao fazer uso das propriedades do conjunto dos números reais: a de ordem e a de completividade [24]

A segunda tendência discutida por Fehr é o estudo da geometria na escola secundária, iniciado na Alemanha, onde se aplicavam, de forma bastante generalizada, alguns aspectos do Programa de Erlangen, de Klein, que propõe o desenvolvimento da Geometria por meio das transformações geométricas. O grupo de transformações (rotações, reflexões e translações) é utilizado para caracterizar a Geometria Euclidiana, porém, precedida de um sistema de axiomas que conservam a congruência de triângulos da Geometria de Euclides [24].

Em relação às práticas pedagógicas do ensino da geometria, segundo as professoras Sani de Carvalho Rutz da Silva e Ana Cristina Schirlo da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, há três tendências metodológicas: Formalista Clássica, Formalista Moderna e Resolução de Problemas [34].

Seguindo a tendência Formalista Clássica o conteúdo geométrico apresenta um caráter formal, sendo trabalhado pela definição e com rigor lógico, sem tecer

relações com o mundo físico. Já em um ensino seguindo a tendência Formalista Moderna há grande realce no ensino de símbolos e uma acentuação nas noções de figuras geométricas. E por fim na tendência de Resolução de Problemas a geometria é vista como uma forma de expressão, isto é, como uma linguagem que é produzida e utilizada socialmente como representação do real e da multiplicidade de fenômenos propostos pela realidade, possibilitando ao aluno a apropriação do conhecimento geométrico para ser usado como instrumentos necessários ao exercício da cidadania [34].

2.6 – Considerações finais.

“Se você deseja obter bons resultados por um ano, plante uma lavoura. Se quer obter bons resultados por uma geração, plante uma árvore. Se deseja obter bons resultados para toda a eternidade, eduque uma criança! (Provérbio Chinês)”.

A geometria é uma das ferramentas da matemática mais utilizada nas zonas rurais, principalmente, por pequenos produtores, que necessitam fazer suas próprias construções, por questões de economia. O professor pode utilizar-se de metodologias interdisciplinares para que o estudo consiga se aproximar do cotidiano dos alunos. É de fundamental importância a conexão entre professor, aluno e realidade do campo. Quanto maior a aplicabilidade do estudo matemático, maior será a otimização financeira e aproveitamento do espaço e materiais, ampliando a renda do homem do campo, reduzindo assim as crescentes taxas de êxodo rural.

Segundo dados do IBGE, atualmente, 38% do que vai à mesa dos brasileiros origina-se em estabelecimentos rurais de economia familiar, ou seja, a mão de obra utilizada é composta, em sua maioria, por membros familiares. Curiosamente 85%

dos estabelecimentos registrados no Brasil são desta natureza e ocupam 30% da área agrícola brasileira, além de representar 77% da mão de obra agrícola do país (aproximadamente 14 milhões de pessoas). Decorre que frequentemente estes trabalhadores padecem por dificuldades, muitas vezes por não deter de um bom planejamento e conhecimento técnico sobre as atividades que exercem. Acreditando que a educação pode ajudar a melhorar o quadro da qualidade de vida destas pessoas, faremos um estudo sobre otimização das atividades mais comuns nestas propriedades, com o intuito de servir de dados para aplicabilidade nas escolas rurais [2].

Portanto, deve-se lembrar sempre em seguir os Parâmetros Curriculares Nacionais, os Parâmetros Curriculares Estaduais, exercendo de forma nobre a profissão de professor e ensinar coisas que mudarão a vida das pessoas para melhor, dando lhes oportunidades, e propiciando-lhes discernimento para a tomada de decisões coerentes, e nenhuma ciência o faz de maneira tão precisa quanto a matemática, porém, para a imensa maioria, a rainha das ciências só é vista, quanto aplicada a algum problema prático, em outras áreas do conhecimento, e por que não usar este fato a seu favor, passando de respeitados por entender matemática a admirados por fazê-la útil e tangível às pessoas.

3. FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA EUCLIDIANA

Neste capítulo serão estudados os axiomas que dão suporte para a geometria euclidiana na forma como ela é apresentada no ensino básico. Não será objetivo repetir as definições usuais da geometria plana apresentadas nos livros didáticos, mas sim, apresentar a origem das idéias matemáticas que dão suporte à construção da geometria euclidiana. Partir-se-á dos elementos primitivos, que são ponto, reta e plano, para definir ângulos, medidas e áreas. Será visto que os axiomas de Euclides foram reformulados, e os axiomas aqui apresentados, bem como definições são base para outras geometrias, denominadas de não-euclidianas.

3.1 Breve histórico sobre Os Elementos de Euclides

No ensino médio sempre se escutou que os axiomas da geometria plana foram criados por Euclides, e estavam todos enunciados em uma coleção de livros intitulada de “Os Elementos”, datada de mais de dois mil anos de existência, sendo, então, uma clara vantagem da matemática em relação à outras ciências, pois as teorias matemáticas não mudam, não possuem exceções, sendo uma ciência exata. Permanece-se nesta crença até concluir o ensino médio, porém, quando se inicia o curso de nível superior, descobre-se que a história não é bem essa e que, apesar de existir uma exatidão em matemática, ela possui sim exceções, assim como reformulações, quando necessárias, e alguns resultados que nem sempre é possível explicar, os quais se chamam conjecturas.

O conteúdo dos Elementos de Euclides sofreu sim modificações, e não foram poucas, entretanto como fora dito por Borsuk (1905 - 1982) e Szmielew (Foundations of geometry, 1960):

"Se o valor de um trabalho científico pode ser medido pelo tempo durante o qual ele mantém a sua importância, então os Elementos de Euclides são a obra científica mais válida de todos os tempos."

Há relatos históricos de que Os *Elementos* de Euclides ocupe o segundo lugar como a coletânea mais reproduzida no mundo ocidental, perdendo apenas para a Bíblia Sagrada. Os *Elementos* é uma obra admirada pelos matemáticos e filósofos de todos os países e de todos os tempos pela pureza do estilo geométrico e pela concisão luminosa da forma, modelo lógico para todas as ciências físicas pelo rigor das demonstrações e pela maneira como são postas as bases da geometria.

Segundo um texto do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, são raros os livros que têm sido tão editados, traduzidos e comentados como os *Elementos* de Euclides. Na antiga Grécia, esta obra foi comentada por Proclo (410 – 485 d.C), Herão (10 – 75 d.C) e Simplício (490 – 560 d.C); na Idade-Média foi traduzida em latim e árabe; após a descoberta da imprensa, fizeram-se dela numerosas edições em todas as línguas européias. A primeira destas edições foi a de Campano (1220 - 1296), em latim, publicada em 1482, edição usada por Pedro Nunes (1502 - 1578), que a citou numerosas vezes nas suas obras [24].

Ao todo são 13 livros que compõem Os *Elementos*. **Os livros de I a IV** tratam de **geometria plana elementar**. Partindo das mais elementares propriedades de retas e ângulos, conduzem à congruência de triângulos, à igualdade de áreas, ao teorema de Pitágoras (livro I, proposição 47) e ao seu recíproco (livro I, proposição 48), à construção de um quadrado de área igual à de um retângulo dado, à razão

áurea, ao círculo e aos polígonos regulares. Curiosamente, tanto o teorema de Pitágoras quanto à razão áurea são introduzidos como propriedades de áreas.

O **livro V** apresenta a **teoria das proporções** de Eudoxo (408 - 355 a.C.) na sua forma puramente geométrica. O **livro VI** trata sobre semelhança de **figuras planas**. Há uma retomada sobre o teorema de Pitágoras e à razão áurea (livro VI, proposições 31 e 30), mas agora como teoremas respeitantes a razões de grandezas. E na proposição 27 do livro VI tem-se o teorema que contém o primeiro problema de maximização que chegou até nós, com a prova de que o quadrado é de todos os retângulos de um dado perímetro, o que tem área máxima [31].

Já os livros de **VII a IX** tratam sobre **teoria dos números** tais como a divisibilidade de inteiros, a adição de séries geométricas, algumas propriedades dos números primos e a prova da irracionalidade do número $\sqrt{2}$. Aí, encontra-se tanto o algoritmo de Euclides, para achar o máximo divisor comum entre dois números, como o teorema de Euclides, segundo o qual existe uma infinidade de números primos (livro IX, proposição 20).

O **livro X**, o mais extenso de todos e muitas vezes considerado o mais difícil, contém a classificação geométrica de **irracionais quadráticos** e as suas raízes quadráticas. Os livros de XI a XIII tratam sobre **geometria espacial**, e conduzem, pela via dos ângulos poliédricos, aos volumes dos paralelepípedos, do prisma e da pirâmide, à esfera e concluem com a prova de que existem somente cinco poliedros de Platão (tetraedro de faces triangulares, hexaedro de faces quadrangulares, octaedro de faces triangulares, dodecaedro de faces pentagonais e icosaedro de faces triangulares).

Curiosamente, quase todos os livros começam com uma lista de definições sem qualquer comentário, e o livro I contém uma lista com 23 definições sobre os entes primitivos da geometria, algumas fogem do padrão atual, entretanto para efeito de curiosidade seguem elencadas:

- Um *ponto* é o que não tem partes.
- Uma *linha* é o que tem comprimento sem largura.
- As extremidades de uma linha são pontos.
- Uma *linha reta* é uma linha que assenta igualmente entre as suas extremidades.
- Uma *superfície* é o que tem apenas comprimento e largura.
- As extremidades de uma superfície são linhas.
- Uma *superfície plana* é uma superfície sobre a qual assenta toda a linha reta entre dois pontos quaisquer da superfície.
- Um *ângulo plano* é a inclinação recíproca de duas linhas que se tocam numa superfície plana e que não fazem parte da mesma linha reta.
- E quando as linhas que contêm o ângulo são linhas retas, o ângulo chama-se *retilíneo* (raso).
- Quando uma linha reta, incidindo com outra linha reta, fizer com esta dois ângulos adjacentes iguais, cada um desses ângulos é *reto*, e a linha reta incidente diz-se *perpendicular* à linha com a qual incide.
- Um *ângulo obtuso* é um ângulo maior que um ângulo reto.
- Um *ângulo agudo* é um ângulo menor que um ângulo reto.
- Uma *fronteira* é aquilo que é extremidade de alguma coisa.
- Uma *figura* é aquilo que está contido por uma ou mais fronteiras.

- Um *círculo* é uma figura plana fechada por uma só linha de forma que todas as linhas retas, que de um ponto existente no meio da figura se conduzem para a circunferência, são iguais entre si.
- E o referido ponto da definição anterior chama-se *centro* do círculo.
- O *diâmetro* do círculo é uma linha reta que passa pelo centro e termina, em ambas as direções, na circunferência e tal linha também bissecta o círculo.
- Um *semicírculo* é uma figura compreendida entre o diâmetro e a circunferência que é cortada pelo diâmetro. E o centro do semicírculo é o mesmo que o do círculo.
- Figuras retilíneas são as que são formadas por linhas retas, sendo as figuras triláteras as que são formadas por três linhas retas, as *quadriláteras* as que são formadas por quatro linhas retas, e as multiláteras as que são formadas por mais de quatro linhas retas.
- Das figuras triláteras, o triângulo equilátero é a que tem três lados iguais, o triângulo isósceles a que tem dois lados iguais e o triângulo escaleno a que tem os três lados desiguais.
- Das figuras triláteras, o triângulo retângulo é a que tem um ângulo reto, o triângulo obtusângulo é a que tem um ângulo obtuso e o triângulo acutângulo é a que tem todos os ângulos agudos.
- Das figuras quadriláteras, o *quadrado* é a que é simultaneamente equilátera e retângula; o oblongo é a que é retângula, mas não é equilátera; o rombo é uma figura equilátera, mas não retângula; e o rombóide é a que, tendo os lados e ângulos opostos iguais, não é nem equilátera nem retângula. E todas as outras figuras quadriláteras se chamam trapézios.

- Linhas retas paralelas são linhas retas que, estando na mesma superfície plana e sendo estendidas indefinidamente em ambas as direções, nunca se chegam a tocar.

A seguir aparecem os Postulados e as Noções Comuns ou Axiomas nesta ordem. Os **Postulados** são proposições geométricas específicas. "Postular" significa "pedir para aceitar". Assim, Euclides pede ao leitor para aceitar as cinco proposições geométricas que formula nos Postulados:

1. Dados dois pontos, há um segmento de reta que os une;
2. Um segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente para construir uma reta;
3. Dados um ponto qualquer e uma distância qualquer, pode-se construir um círculo de centro naquele ponto e com raio igual à distância dada;
4. Todos os ângulos retos são iguais;
5. Se uma linha reta cortar duas outras retas de modo que a soma dos dois ângulos internos de um mesmo lado seja menor do que dois retos, então essas duas retas, quando suficientemente prolongadas, cruzam-se do mesmo lado em que estão esses dois ângulos.

Resumidamente os três conceitos fundamentais, o de ponto, o de reta e o de círculo e cinco postulados a eles referentes, servem de base para toda a geometria euclidiana.

Os Elementos de Euclides têm uma importância excepcional na história da matemática. Já que não apresentam a geometria como um mero agrupamento de dados desconexos, mas sim como um sistema lógico. As definições, os postulados e

os teoremas aparecem agrupados em uma ordem lógica. Cada teorema resulta das definições, dos axiomas e dos teoremas anteriores, de acordo com uma demonstração rigorosa.

Euclides foi o primeiro a utilizar este método, chamado axiomático. Desta maneira, os seus Elementos constituem o primeiro e mais nobre exemplo de um sistema lógico, ideal que muitas outras ciências imitaram e continuam a imitar. Entretanto cabe ressaltar que ele se esforçou por axiomatizar a geometria com os meios de que dispunha na época. Assim sendo é natural compreender que o sistema que escolheu apresente algumas deficiências. Involuntariamente, em algumas das suas demonstrações admitiu resultados, muitas vezes intuitivos, sem demonstração [33].

Embora os Elementos de Euclides tenham alguns equívocos lógicos pelos padrões atuais, tais erros passaram despercebidos por mais de dois milênios. O movimento de crítica a eles iniciou-se com relevância no final do século XVII, com John Wallis (1616-1703), continuando um pouco difuso durante o século seguinte, com o abade jesuíta Saccheri (1667-1733) e os matemáticos Lambert (1728-1777) e Gauss (1777-1855) [33].

E de meados a final do século XIX que a crítica a Euclides se acentua, culminando tanto na proposta de geometrias alternativas por Bolyai (1802 - 1860), Lobachewski (1792 - 1856) e Riemann (1826 - 1866), quanto numa completa revisão dos fundamentos da geometria euclidiana por Pasch (1843 - 1930) e por Hilbert (1862 - 1943). Havendo ainda o surgimento de novas concepções sobre a classificação das geometrias por Félix Klein (1849 - 1925) [33].

Como exemplo, da crítica feita à Euclides, os professores Almir Rogério Silva Santos e Humberto Henrique de Barros Viglioni, trazem à tona uma análise da demonstração da proposição 1, do livro 1 dos elementos de Euclides, conforme descrição a seguir:

Proposição 1: Existe um triângulo equilátero com um lado igual a um segmento de reta dado.

Demonstração:

- Passo 1: Pelo Postulado 3, pode-se traçar um círculo com centro em uma extremidade do segmento de reta e raio igual a este segmento.
- Passo 2: Como no passo 1, pode-se traçar um outro círculo com centro na outra extremidade e mesmo raio.
- Passo 3: Tome um dos pontos de interseção dos dois círculos como o terceiro vértice do triângulo procurado (figura 6)

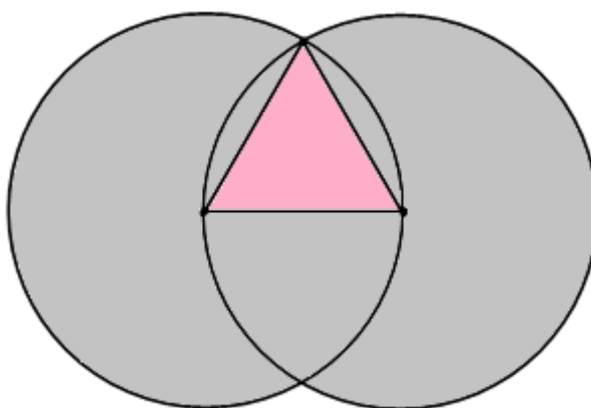


Figura 6: Triângulo equilátero

Fazendo-se uma rápida reflexão, nota-se que o passo 3, apesar de extremamente intuitivo, apresenta uma falha, pois não há nenhum postulado que garanta que existe o ponto de intersecção entre dois círculos dados. Como se está

estudando uma geometria axiomática e sólida, nada pode ficar sem explicação, por mais intuitivo que seja. Questionamentos desta natureza que incentivaram a reformulação dos axiomas de Euclides, em sua maioria feita por Pacsh e Hilbert. Assim apresenta-se a seguir tais axiomas revistos pelos padrões atuais da matemática, com os quais se constrói uma geometria sólida, com axiomas e teoremas, onde cada conclusão possua uma explicação lógica e que não existam lacunas como há nos axiomas de Euclides [33].

Primeiramente, cabe citar que é impossível definir todos os termos que serão utilizados, pois para definir um termo deve-se usar outro termo, e para definir esses termos deve-se usar outros termos, e assim por diante. Logo se não for permitido deixar alguns termos indefinidos, o processo será infinito. Assim, alguns termos, que são chamados de primitivos ou elementares, serão citados sem precisar defini-los.

São eles:

- *ponto*;
- *reta*;
- *pertencer a* (Exemplo: dois pontos pertencem a uma única reta);
- *está entre* (Exemplo: o ponto C está entre A e B);

O principal objeto de estudo da Geometria Euclidiana Plana é o plano, que é constituído de pontos e retas, os quais satisfazem a cinco grupos de axiomas. O primeiro grupo é constituído pelos axiomas de incidência. A seguir será apresentado os cinco grupos de axiomas, baseado-se nos trabalhos dos professores Almir Rogério Silva Santos e Humberto Henrique de Barros Viglioni [33] e do professor Sadao Massago [23].

3.2 Axiomas de Incidência

Axioma 1 (incidência). Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.

O Axioma 1 é amplamente conhecido como “determinação da reta”. Reescrito de maneira informal, seria “dois pontos distintos determinam uma única reta”. Considerando A e B tais pontos, indicaremos por AB para a reta determinada por eles.



Figura 7: Reta determinada por dois pontos

Axioma 2 (distinção da reta e do ponto). Toda reta possui pelo menos dois pontos distintos.

Este Axioma garante que a reta não pode ser um conjunto unitário formado de um único ponto (com o abuso da linguagem: “ponto é distinguido da reta”), nem o conjunto vazio.

Axioma 3 (distinção de reta e do plano). Existem pelo menos três pontos não colineares (figura 8).

Com este axioma garante-se que não existe uma reta que contenha todos os pontos do plano. Também é comumente enunciado, de maneira informal como “dada uma reta, existe pelo menos um ponto não pertencente a ela”.

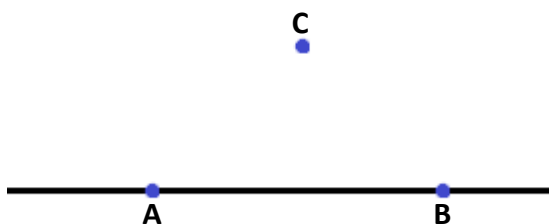


Figura 8: Reta e um ponto fora dela

Destes três axiomas é possível deduzir alguns fatos importantes:

- Toda reta possui pelo menos dois pontos.
- Não existe uma reta contendo todos os pontos.
- Existem pelo menos três pontos no plano.

Definição 4. Duas retas intersectam-se quando elas possuem um ponto em comum.

Se elas não possuem nenhum ponto em comum, estando no mesmo plano, elas são ditas paralelas (figura 9).

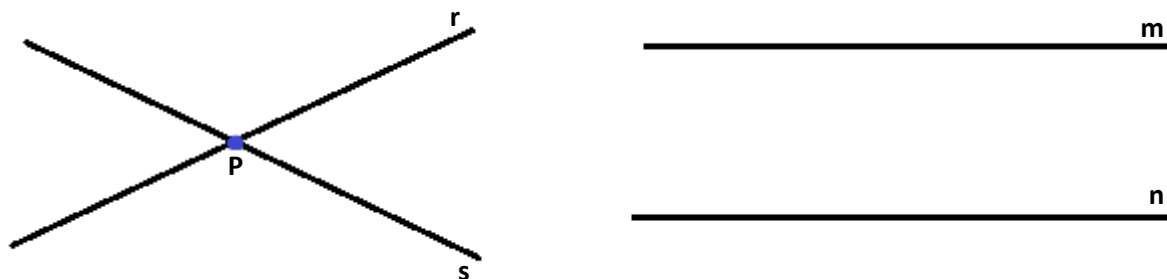


Figura 9: r e s intersectam no ponto P e as retas m e n são paralelas

Proposição 5. Duas retas distintas ou não intersectam-se ou intersectam-se em um único ponto.

Demonstração: Sejam m e n duas retas distintas. Se m e n possuem pelo menos dois pontos distintos em comum então, pelo Axioma de Incidência 1, m e n coincidem, que é uma contradição com o fato que m e n são retas distintas. Logo, m e n ou possuem um ponto em comum ou nenhum. ■

Portanto a Proposição 5 diz que se duas retas não são paralelas, então elas têm um ponto em comum.

Proposição 6. Para todo ponto P, existem pelo menos duas retas distintas passando por P.

Demonstração: Pelo Axioma de Incidência 3, existe um ponto Q distinto de P. Pelo Axioma de Incidência 1 existe uma única reta r que passa por P e Q. Pelo Axioma de

Incidência 3 existe um ponto R que não pertence a r. Novamente pelo Axioma de Incidência 1, existe uma reta s distinta de r que contém os pontos P e R. ■

Proposição 7. Para todo ponto P existe pelo menos uma reta r que não passa por P.

Demonstração: Pelo axioma 3, existem pelo menos três pontos P, Q e R não colineares, logo pelo axioma 1 os pontos Q e R determinam uma única reta r, e o ponto P fica fora dela, assim esta reta não passa por P. ■

3.3 Axiomas de Ordem (na Reta)

Os axiomas de incidência não garantem que existem infinitos pontos na reta. No entanto, colocar axioma para garantir somente a existência de infinitos pontos não força a ser reta, pois pode haver “saltos” entre os pontos da reta como no conjunto $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Para evitar que tenha saltos, será necessário garantir que tenha pontos entre dois pontos quaisquer. Além disso, uma reta é infinita, o que requer que tenha pontos fora do segmento. Os axiomas de ordem servem para este propósito.

Definição 8: Escreve-se $A * B * C$ para dizer que o ponto B está entre os pontos A e C.

Axioma 9 .Se $A * B * C$ então A, B e C são colineares, distintos e $C * B * A$.

O Axioma 9 é uma propriedade similar a reflexiva (simetria). O próximo axioma garante que está bem definida (não há ambiguidade).

Axioma 10. Dados três pontos colineares e distintos, um e apenas um esta entre outros dois.

Este axioma assegura que uma reta não é um círculo, onde não temos a noção bem clara de que um ponto está entre outros dois. (figura 10).

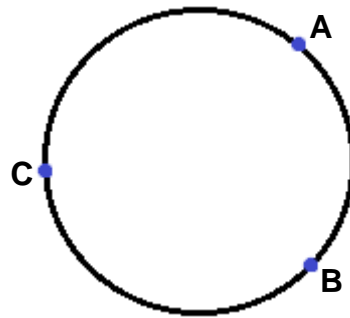


Figura 10: Círculo determinado por três pontos

Axioma 11. Dados dois pontos A e C , existem pontos B e D tais que $A * B * C$ e $A * C * D$ (figura 11).



Figura 11: Continuidade da reta

Este Axioma é necessário para garantir que não há saltos na reta, ou seja, a reta possui infinitos pontos continuamente.

Definição 12. Sejam dois pontos distintos A e B ; o segmento AB é o conjunto de todos os pontos entre A e B mais os pontos extremos A e B (figura 12).



Figura 12: Segmento de reta AB

Definição 13. A semi-reta com origem em A e contendo B é o conjunto dos pontos C tais que $A * B * C$ mais o segmento AB , sendo representada por \overrightarrow{AB} (figura 13).

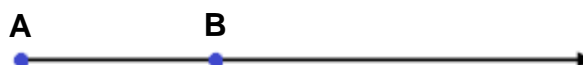


Figura 13: Semi-reta \overrightarrow{AB}

Os axiomas de ordem ainda não garantem que os pontos “fora do segmento” não podem estar no segmento. Somente garantir que “ponto fora do segmento não pode estar no segmento” ainda permite objetos indesejáveis como um segmento aberto ser considerado uma reta. Assim, é necessário garantir que “retas continuam indefinidamente”, dividindo o plano.

3.4 Axioma da Separação do Plano

Axioma 14 (separação do plano). Toda reta determina exatamente dois semi-planos (convexos), cuja intersecção é a própria reta.

Teorema 15. Se $A * B * C$ e $A * C * D$ então $B * C * D$ e $A * B * D$.

O teorema 15 garante que, dado dois pontos, os pontos que estão “entre” e os pontos que “estão fora” são distintos. Para provar o teorema, é necessário ter separação do plano. A geometria da reta (que não tem axioma da separação do plano) requer separação da reta (um ponto da reta separa a reta em duas semi retas) ou que o teorema seja adotado como axioma. Pela separação do plano, também pode-se provar o Teorema de Pasch (figura 14): A reta que corta um dos lados (fora do vértice) do triângulo corta algum lado que não seja ele próprio.

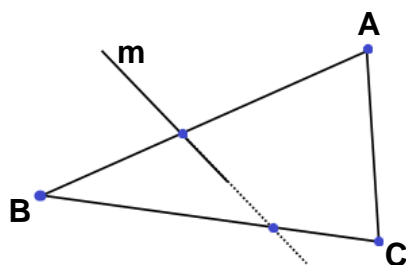


Figura 14: Teorema de Pasch

3.5 Axiomas da Distância (Régua)

O estudo axiomático da geometria euclidiana consiste em estabelecer as regras necessárias e suficientes para que o plano, retas e pontos formem exatamente o plano euclidiano como nós conhecemos. Claro que um estudo detalhado desta natureza não cabe no ensino médio, entretanto é importantíssimo para o professor ter esta noção de que a atual geometria possui uma explicação metodológica para todas suas definições, até mesmo para o simples fato de medir um segmento usando uma régua graduada.

Axioma 16 (existência da medida). Todo par de pontos é associado a um único número real não negativo denominado de distância. Este número é zero se e somente se as extremidades coincidem.

Definição 17. A medida do segmento é a distância entre seus extremos. Uma medida é associação do conjunto com os números reais não negativos. A medida do segmento AB é denotada como \overline{AB} .

Axioma 18 Os pontos de uma reta podem ser sempre colocados em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que o módulo da diferença entre estes números meça a distância entre os pontos correspondentes.

Fixada uma correspondência, o número que corresponde a um ponto da reta é denominado coordenada daquele ponto. Portanto, se a e b são as coordenadas dos pontos A e B , respectivamente, então o comprimento do segmento AB , denotado por \overline{AB} será: $\overline{AB} = |a - b|$.

Axioma 19. Se $A * B * C$ então $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.

Definição 20. O ponto médio C de um segmento AB é um ponto deste segmento tal que $\overline{AC} = \overline{CB}$.

Definição 21. Seja A um ponto e r um número real positivo. O círculo de centro A e raio r é o conjunto constituído por todos os pontos B do plano, tais que $\overline{AB} = r$.

Apesar dos axiomas de ordem e da separação dos planos ter garantido algum nível de continuidade, ainda não garantem a continuidade completa. Por exemplo, o plano racional $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ satisfaz os axiomas de incidência, ordem e separação do plano, mas um arco de círculo pode “atravessar a reta” sem ter intersecção. A garantia para que nenhuma curva continua atravesse a reta (continuidade total) é devido ao axioma de Dedekind que não foi apresentado aqui. O axioma da régua (além de permitir calcular a distância) transfere a propriedade de Dedekind do conjunto dos números reais para a reta, garantindo a continuidade. No entanto, quando trabalha com as propriedades de Dedekind, é natural construir distância em vez de adotar.

Teorema 22 (princípio da continuidade circular). Um arco circular que liga os pontos fora de um círculo intercepta o círculo em um único ponto.

Teorema 23 (princípio da continuidade elementar). Um segmento que liga os pontos dentro e ponto fora do círculo intercepta ao círculo em um único ponto.

Com este teorema justifica-se a construção feita por Euclides na figura 6, provando sua proposição 1.

3.6 Axiomas dos Ângulos (Transferidor)

Definição 24. Um ângulo com vértice A é um ponto A com duas semi-retas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} , chamadas os lados do ângulo (figura 15).

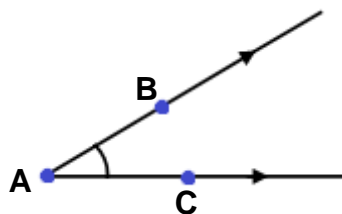


Figura 15: Ângulo com vértice A

Notação: \hat{A} , $B\hat{A}C$, $C\hat{A}B$, ou $\angle BAC$

Definição 25. Se dois ângulos $B\hat{A}D$ e $C\hat{A}D$ possuem um lado \overrightarrow{AD} em comum e os outros dois lados \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} são semi-retas distintas de uma mesma reta, os ângulos são ditos suplementares (figura 16).

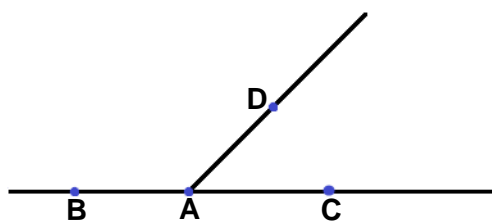


Figura 16: Ângulos $B\hat{A}D$ e $C\hat{A}D$ suplementares

Definição 26. Um ângulo é dito raso se os lados são semi-retas distintas de uma mesma reta. Dois ângulos suplementares formam um ângulo raso (figura 17).



Figura 17: O ângulo $B\hat{A}C$ é raso

Axioma 27 (existência do ângulo). Todo ângulo é associado a um único número real não negativo denominado de medidas do ângulo. Este número é zero se e somente se os lados do ângulo coincidem.

Definição 28. Uma semi-reta divide o semi-plano quando ela tem a origem na reta que determina o semi-plano e está contida no semi-plano.

Definição 29. A medida de um ângulo $A\hat{O}B$ será denotada pelo próprio ângulo. Assim, $A\hat{O}B$ poderá indicar o ângulo ou a medida deste ângulo, mas sempre estará claro no contexto se estaremos nos referindo ao ângulo ou a sua medida.

Axioma 30 (coerência). Se \overrightarrow{OC} divide o ângulo $A\hat{O}B$, temos $A\hat{O}B = A\hat{O}C + C\hat{O}B$ (figura 18).

Uma semi-reta divide o ângulo quando intercepta qualquer segmento que tem os extremos contidos em cada uma das semi-retas que determinam o ângulo.

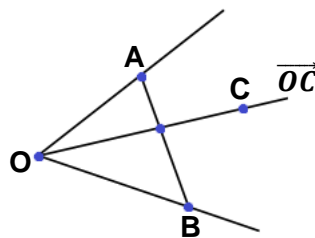


Figura 18: \overrightarrow{OC} divide o ângulo $A\hat{O}B$

Definição 31. Uma semi-reta \overrightarrow{OC} divide o ângulo $A\hat{O}B$ se o segmento AB intercepta \overrightarrow{OC} . Se uma semi-reta \overrightarrow{OC} divide o ângulo $A\hat{O}B$ de tal modo que $A\hat{O}C = C\hat{O}B$, dizemos que \overrightarrow{OC} é a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$ (figura 19).

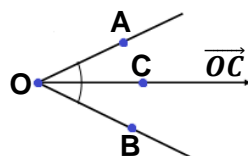


Figura 19: \overrightarrow{OC} é bissetriz de $A\hat{O}B$

Axioma 32 (axioma do transferidor). Dado um semi-plano, existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto das semi-retas de mesma origem que dividem o semi-plano e o conjunto dos números reais em $[0, 180]$ de forma que o valor absoluto da diferença entre os números seja a medida do ângulo entre as semi-retas correspondentes.

Definição 33. Um ângulo cuja medida é 90° é chamado ângulo reto. Se duas retas se intersectam formando um ângulo reto, dizemos que as retas são perpendiculares. Se a soma das medidas de dois ângulos é 90° , dizemos que os ângulos são complementares.

Teorema 34. Por qualquer ponto de uma reta passa uma única perpendicular a esta reta.

Demonstração: Suponha então que existam duas perpendiculares r e s a uma reta m passando pelo ponto A (figura 20). Assim, r e s formam um ângulo α em um dos semi-planos determinados por m . Mas como r e s formam ângulos retos com m , pelo axioma do transferidor, sua medida será 0° (diferença entre os valores). Segue então que r e s são coincidentes. ■

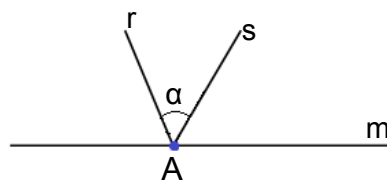


Figura 20: r e s perpendiculares à m

Definição 35. Um ângulo é agudo se mede menos de 90° e é obtuso se mede mais de 90° (figura 21).



Figura 21: $B\hat{A}C$ agudo e $D\hat{E}F$ obtuso

3.7 Congruências

Objetos matemáticos não podem ser transportados. É comum escuta-se a expressão transporte de ângulos para justificar que ângulos correspondentes formados por uma transversal que corta duas paralelas possuem medidas iguais. Na verdade é como se fosse feita uma comparação com uma cópia que tem a mesma medida (intuitivamente, um objeto matemático que foi “movido” é uma cópia). Precisa-se estar atento com a diferença entre coincidentes (igual) e congruentes (mesma medida). Usa-se o símbolo \equiv para denotar que dois objetos são congruentes.

Definição 36. Coincidentes: quando a representação é diferente, mas é o mesmo objeto. Por exemplo, $x + y = 0$ e $2x + 2y = 0$ representa a mesma reta na geometria analítica, sendo coincidentes como retas.

Definição 37. Congruentes: quando todas as características selecionadas (consideradas importantes) são iguais. No caso da geometria euclidiana, a medida do segmento e a medida do ângulo serão consideradas essenciais.

Definição 38. Equivalentes: quando algumas características em consideração no contexto são iguais. Por exemplo, as figuras geométricas com mesma área costumam ser chamados de equivalentes no estudo das áreas. E sólidos geométricos com mesmo volume também são chamados de equivalentes.

Definição 39. Dois segmentos são ditos congruentes quando têm a mesma medida e dois ângulos são ditos congruentes quando têm a mesma medida. Com o abuso da linguagem, quando não há ambiguidade, às vezes se diz que segmentos ou ângulos são iguais para designar os segmentos ou ângulos congruentes. É comum se

escutar que um triângulo equilátero possui lados e ângulos iguais, neste contexto, é bom ter mente que as medidas é que são iguais.

Definição 40. Dois triângulos são congruentes quando seus ângulos e lados (segmentos) são congruentes na ordem estabelecida.

A congruência de triângulos possui uma grande utilidade em problemas de geometria plana. O triângulo tem seis medidas consideradas essenciais, que são os três lados e os três ângulos internos, e o objetivo da congruência é garantir a igualdade somente com a comparação de três dessas medidas.

Axioma 41 (LAL). Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, tal que $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\hat{B} = \hat{E}$ e $\overline{BC} = \overline{EF}$, então os dois triângulos são congruentes (figura 22).

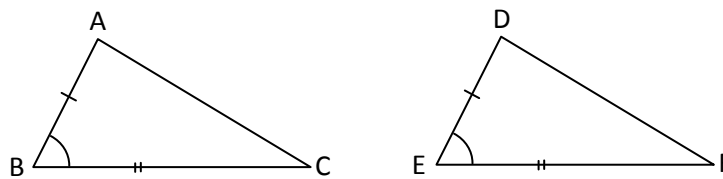


Figura 22: Triângulos congruentes

Em símbolos, escreve-se:

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF \xrightarrow{DEF.} \left(\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{D} \\ \hat{B} = \hat{E} \\ \hat{C} = \hat{F} \end{array} \wedge \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{DE} \\ \overline{BC} = \overline{EF} \\ \overline{AC} = \overline{DF} \end{array} \right).$$

Com os axiomas e definições vistas até aqui ainda não é possível obter os outros casos de congruência, pois precisa-se provar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é constante. Entretanto isto é possível somente com o axioma das paralelas. Sem o axioma das paralelas, mesmo no plano, a única conclusão que se chega é que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor ou igual a 180° . Este resultado é conhecido como Teorema de Saccheri-Legendre, e estudado na geometria euclidiana sem o postulado das paralelas.

Cabe ressaltar também que mesmo sem o critério de congruências, ainda é possível efetuar cálculos de comprimentos e de áreas através da integração. Tal geometria constitui a Geometria Diferencial. Para ter o critério de congruência usual, a geometria deverá apresentar medidas uniformes, o que permite calcular distâncias entre dois pontos a partir de segmentos poligonais alternativos, ou calcular a área a partir do seu contorno poligonal. Tal geometria apresentará curvaturas constantes (o que não explicaremos aqui), o que permite classificá-la em euclidiana, hiperbólica ou elíptica.

Todos os axiomas vistos até aqui também são aplicados em outros modelos de geometria, mas o que as difere é o postulado das paralelas, exatamente no seguinte questionamento: “dado um ponto fora da reta, existe uma reta paralela passando por ele?”. No caso de geometria elíptica, não existirá. No caso da euclidiana, existe uma única reta paralela. No caso da hiperbólica, existe mais de uma (usando isto, prova-se que têm infinitas) reta paralela.

3.8 Retas Paralelas

A geometria euclidiana difere da hiperbólica (e também da elíptica) exatamente na questão das paralelas. Duas retas no plano são ditas paralelas quando elas não têm pontos em comum.

Axioma 42 (existência e unicidade das paralelas). Dado uma reta e um ponto fora dela, existe uma única reta paralela a reta dada, passando pelo ponto dado.

O axioma acima é forma mais usada entre os axiomas equivalentes ao quinto postulado de Euclides.

Agora se tem todos os axiomas necessários para assegurar que o plano, retas e pontos formam o plano euclidiano. Assim, podem-se estudar as propriedades das figuras geométricas sem ter restrições.

Um dos resultados imediatos sobre retas paralelas é a igualdade dos ângulos alternos internos de uma reta que cruza as duas paralelas, e a soma dos ângulos internos de um triângulo.

Definição 43. Seja t uma reta transversal a duas retas m e n , com t interceptando m em E e n em B . Escolha pontos D e F em m tais que $D * E * F$, e pontos A e C em n tais que A e D estejam no mesmo semi-plano determinado por t e $A * B * C$. Por fim escolha os pontos G e H em t , tais que $B * E * G$ e $E * B * H$. Os ângulos $D\hat{E}G$ (I), $G\hat{E}F$ (II), $A\hat{B}H$ (III) e $C\hat{B}H$ (IV) serão chamados de externos, enquanto os ângulos $D\hat{E}B$ (V), $B\hat{E}F$ (VI), $A\hat{B}E$ (VII) e $E\hat{B}C$ (VIII) serão chamados de internos. Aos pares de ângulos (I, VII), (II, VIII), (V, III) e (VI, IV) chamaremos de ângulos correspondentes. Para os pares (V, VIII), (VI, VII) chamaremos alternos internos. Os pares (II, III), (I, IV) serão chamados de alternos externos. Já os pares (V, VII), (VI, VIII) serão denominados colaterais internos e por fim aos pares (I, III) e (II, IV) chamaremos de colaterais externos.

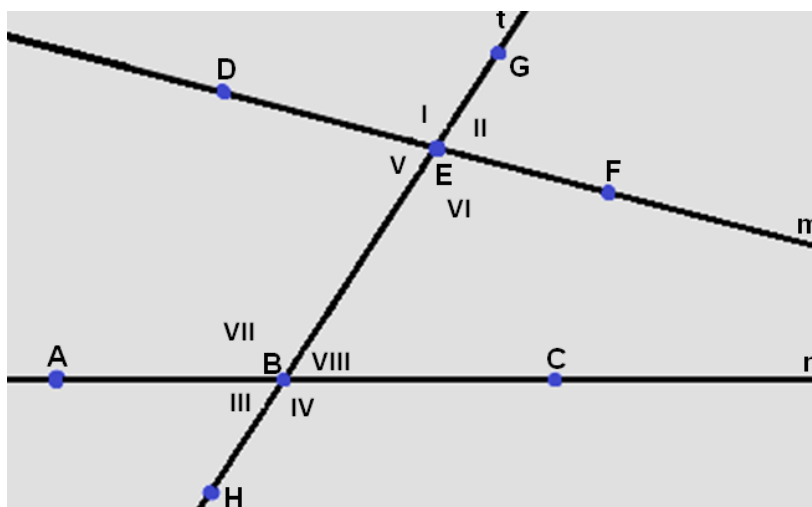


Figura 23: Reta t transversal à m e n

Teorema 44 (ângulos alternos internos). Quando uma reta intercepta outras duas retas (distintas), então são equivalentes:

1. As duas retas são paralelas
2. Ângulos correspondentes são iguais
3. Ângulos alternos internos são iguais
4. Ângulos colaterais internos são suplementares.

Teorema 45 (ângulos externos). As medidas dos ângulos externos de um triângulo é igual a soma das medidas de dois ângulos internos não adjacentes.

Corolário 46 (soma do ângulo interno). Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

No caso da geometria hiperbólica ou elíptica, a soma dos ângulos internos é variável e serve para obter a área do triângulo. Isto implica em caso de congruência AAA. Na geometria euclidiana, os triângulos com três ângulos congruentes não são necessariamente congruentes, serão semelhantes, pois as medidas de seus lados formarão uma proporção. Não será feito aqui um estudo sobre as definições de propriedades de polígonos, pois esta parte é comumente encontrada em livros de geometria plana, ou mesmo livros didáticos. Apresentar-se-á a seguir a construção axiomática do conceito de área.

3.9 Áreas

Definição 47. Uma região triangular é o conjunto de todos os pontos do plano formado por todos os segmentos cujas extremidades estão sobre os lados de um triângulo. O triângulo é a fronteira da região triangular e todos os outros pontos são pontos interiores. Por abuso de linguagem, comumente chama-se a região triangular de triângulo, conforme ilustração na figura 24.

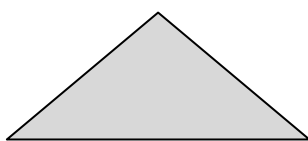


Figura 24: Região triangular

Definição 48. Uma *região poligonal* é uma figura plana que pode ser expressa como a união de um número finito de regiões triangulares (figura 25), de tal modo que duas a duas não tem pontos interiores em comum.

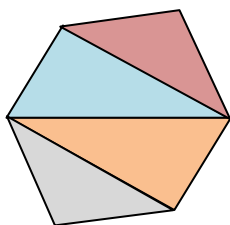


Figura 25: Região poligonal

A noção de área de regiões poligonais é introduzida na geometria por axiomas, os quais garantem a medida da área de qualquer região poligonal.

Axioma 49. A toda região poligonal corresponde um único número maior do que zero.

Axioma 50. Se uma região poligonal é a união de duas ou mais regiões poligonais, de modo que duas a duas não possuam pontos interiores em comum, então sua área é a soma das áreas daquelas regiões.

Axioma 51. Regiões triangulares limitadas por triângulos congruentes têm áreas iguais.

Axioma 52. Se $ABCD$ é um retângulo, então a sua área é dada pelo produto $\overline{AB} \times \overline{BC}$.

A partir destes 4 axiomas é possível determinar a área de diversas formas geométricas, conforme proposições a seguir.

Proposição 53. Seja $ABCD$ um paralelogramo (figura 26) com altura h relativa ao lado DC , então sua área é $h \times \overline{DC}$.

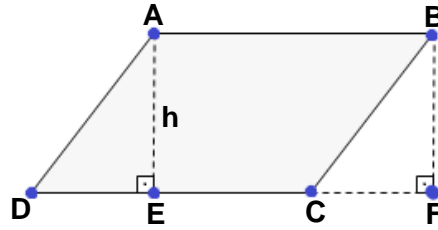


Figura 26: Paralelogramo ABCD

Demonstração. Trace, a partir dos pontos A e B, dois segmentos, AE e BF, perpendicular à reta que contém CD (figura 26). O quadrilátero ABFE é um retângulo cuja área é $\overline{AB} \times \overline{BF}$, a qual em termos de nossa notação, é exatamente $h \times \overline{DC}$, já que $EF = AB = CD$. Observe que pelo caso LAL de congruência de triângulos, tem-se que $\triangle ADE \cong \triangle BCF$. Portanto

$$\begin{aligned} \text{Área}(ABCD) &= \text{Área}(ABCE) + \text{Área}(ADE) \\ &= \text{Área}(ABCE) + \text{Área}(BCF) \\ &= \text{Área}(ABFE) = \overline{DC} \times h \blacksquare \end{aligned}$$

Proposição 54. Seja ABC um triângulo com altura h em relação ao lado BC. Então, sua área é $\frac{h \times \overline{BC}}{2}$ (figura 27).

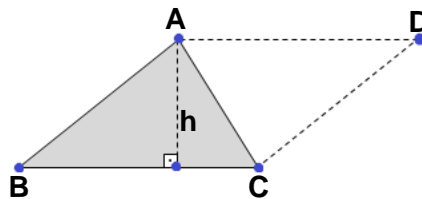


Figura 27: Triângulo ABC

Demonstração. Trace pelo vértice C uma reta paralela ao lado AB, pelo vértice A uma reta paralela ao lado BC. Estas duas retas se interceptam em um ponto D (figura 27). O polígono ABCD é um paralelogramo, e os dois triângulos ABC e CDB são congruentes, pelo caso LAL de congruência de triângulos. Como: $\text{Área}(ABCD) = \text{Área}(ABC) + \text{Área}(ACD)$ e $\text{Área}(ABC) = \text{Área}(ACD)$, então:

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} \text{Área}(ABDC) = \frac{h \times \overline{BC}}{2}. \blacksquare$$

Definição 55. Um trapézio é um quadrilátero com dois lados opostos paralelos. Os lados paralelos são chamados de bases.

Proposição 56. A área de um trapézio (figura 28) é metade do produto do comprimento de sua altura pela soma dos comprimentos de suas bases.

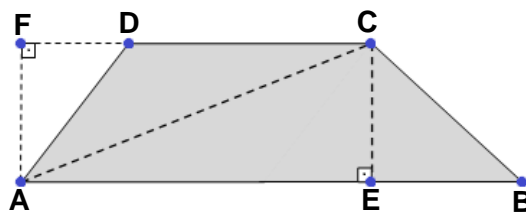


Figura 28: Trapézio ABCD

Demonstração. Seja ABCD um trapézio cujas bases são os lados AB e CD. Trace a diagonal AC para dividir o trapézio em dois triângulos. Trace as alturas CE, do triângulo ACB, e AF, do triângulo ACD. Então se tem que $AF = CE$, já que os lados AB e CD são paralelos. Como consequência:

$$\begin{aligned} \text{Área}(ABCD) &= \text{Área}(ACB) + \text{Área}(ACD) \\ &= \frac{1}{2} \overline{AB} \times \overline{CE} + \frac{1}{2} \overline{CD} \times \overline{AF} \\ &= \frac{1}{2} (\overline{AB} + \overline{CD}) \times \overline{CE} \blacksquare \end{aligned}$$

Definição 57. O comprimento de uma circunferência é o menor dos números maior do que o perímetro de qualquer polígono convexo nele inscrito.

Definição 58. A área da região limitada por um círculo é o menor dos números maior do que a área de qualquer polígono nele inscrito.

A área de um círculo é um número finito, já que a área de qualquer polígono nele circunscrito é maior do que a área de qualquer polígono inscrito. O teorema a seguir fornece a área do círculo em função da medida de seu raio e de seu comprimento.

Teorema 59. A área da região limitada por um círculo é igual à metade do produto do raio pelo comprimento do círculo.

Demonstração. Sejam C o perímetro do círculo de raio R e A a área da região por ele limitada. Se P é um polígono inscrito neste círculo, então faça

- $p(P) \doteq$ perímetro de P ;
- $A(P) \doteq$ área de P ;
- $L(p) \doteq$ comprimento do maior lado de P .

Nota: o símbolo \doteq significa igual por definição.

Tome $\varepsilon > 0$ arbitrário. Sejam três polígonos P_1 , P_2 e P_3 tais que:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } L(P_1) < \varepsilon; \\ \text{ii) } A - \varepsilon R < A(P_2); \\ \text{iii) } p - \varepsilon < p(P_3). \end{array} \right.$$

Note que a existência de P_2 e P_3 é garantida pela definição de perímetro e área do círculo.

Seja P o polígono contendo todos os vértices dos polígonos P_1 , P_2 e P_3 . Observe que ao aumentar um vértice a um polígono inscrito, a nova área não diminui e o perímetro também não diminui. Portanto, o polígono P também goza das propriedades i), ii) e iii) de (1).

A área do polígono P é a soma das áreas de todos os triângulos com vértices no centro do círculo e tendo como lado um dos lados do polígono P. Sejam OAB um destes triângulos e OC a altura relativa ao lado AB (figura 29).

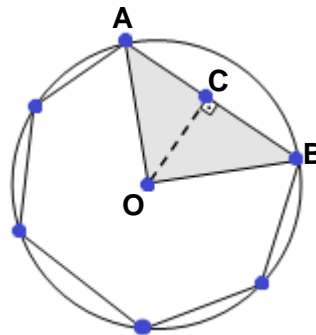


Figura 29: Polígono inscrito no círculo de centro O

$$\text{Área}(OAB) = \frac{1}{2} \overline{AB} \times \overline{OC}$$

Assim, como o $\triangle ABC$ é retângulo e a hipotenusa é maior que qualquer um dos catetos, segue da desigualdade triangular que:

$$\overline{OA} > \overline{OC} > \overline{OA} - \overline{AC}, \text{ o que implica que}$$

$$\frac{1}{2} \overline{AB} (\overline{OA} - \overline{AC}) < \frac{1}{2} \overline{AB} \times \overline{OC} = \text{Área}(OAB) < \frac{1}{2} \overline{AB} \times \overline{OA}$$

Mas como $\overline{OA} = R$ e $\overline{AC} < L(P) < \varepsilon$, concluímos que

$$\overline{OA} - \overline{AC} = R - \overline{AC} > R - \varepsilon.$$

Daí,

$$\frac{1}{2}\overline{AB}(R - \varepsilon) < \frac{1}{2}\overline{AB}(\overline{OA} - \overline{AC}) < \text{Área (OAB)} < \frac{1}{2}R \times \overline{AB}.$$

Como o triângulo OAB foi escolhido arbitrariamente, obtém-se uma desigualdade análoga para todos os outros triângulos. Somando todas elas, obtém-se:

$$\frac{1}{2}p(P)(R - \varepsilon) < A(P) < \frac{1}{2}p(P)R. \text{ Da desigualdade iii) e de } p(P) < C, \text{ obtemos}$$

$$\frac{1}{2}(p - \varepsilon)(R - \varepsilon) < \frac{1}{2}p(P)(R - \varepsilon) < A(P) < \frac{1}{2}p(P)R < \frac{1}{2}CR.$$

$$\text{Ou seja, } \frac{1}{2}CR - \frac{1}{2}(\varepsilon R + \varepsilon p - \varepsilon^2) < A(p) < \frac{1}{2}CR.$$

$$\text{Assim, } \left| A(P) - \frac{1}{2}CR \right| < \frac{1}{2}(\varepsilon R + \varepsilon p - \varepsilon^2). \text{ Então, de ii)}$$

$$\begin{aligned} \left| A - \frac{1}{2}CR \right| &\leq |A - A(P)| + \left| A(P) - \frac{1}{2}CR \right| \\ &< \varepsilon R + \frac{1}{2}(\varepsilon R + \varepsilon p - \varepsilon^2) \end{aligned}$$

Como o lado esquerdo independe de ε e $\varepsilon > 0$ foi tomado arbitrário, concluí-se que

$$A = \frac{1}{2}CR. \blacksquare$$

Corolário 60. A área de um disco de raio R é πR^2 .

3.10 Considerações Finais

Apesar da geometria ser intuitiva, sempre deve-se lembrar que ela tem estrutura matemática, ou seja possui definições, axiomas, teoremas que a regem. O simples fato de medir um segmento com uma régua, por mais intuitivo que seja,

necessita ser explicado e compreendido. Claro que um tratamento desta natureza não cabe a alunos da educação básica. Fazer uma demonstração da área do círculo, como aqui se fez não fará muito sentido a adolescentes, mas é fundamental para o professor ter estas ideias. Compreender a necessidade destes axiomas exige maturidade e reflexão.

Os axiomas reformulados de Euclides foram feitos para estruturar a geometria. Mesmo tendo na história grandes feitos e aplicações da geometria em construções sem estes conceitos, com a atual matemática é possível fazer melhor, e com uma velocidade fenomenal.

Alguns problemas que hoje parecem ser simples, já foram grandes desafios de gerações de outrora, a exemplo a quadratura do círculo com régua e compasso. Levou-se muito tempo para provar que era impossível de ser feito. Um belíssimo problema de geometria que ocupou várias mentes brilhantes por um vasto período de tempo. E a solução estava em justamente provar que o número π é um irracional transcendente. Quando o professor Castruci afirmou que havia um movimento para “algebrizar” a geometria, não estava equivocado. Na realidade, a geometria por vezes nos fornece uma visualização de resultados algébricos. Afinal tem-se a geometria analítica que é uma perfeita harmonia entre álgebra e geometria.

4. APLICAÇÕES GEOMÉTRICAS

Será visto aplicações da geometria em outras áreas do conhecimento. Iniciaremos com um problema simples que pode ser utilizado em sala de aula que são os aspectos geométricos envolvendo a construção de porteiros. Mesmo sendo uma construção simples, muitos alunos não sabem como fazê-la, e mostrar uma utilidade do conteúdo, por mais simples que pareça, pode mudar a vida do homem do campo.

Grandes empresas gastam milhares de reais em pesquisas para reduzir os custos de produção, na casa dos centavos, entretanto, quando são fabricados milhares de unidades fará muita diferença. Se os alunos perceberem estes detalhes, terá sido inserido um novo conceito sobre matemática em suas vidas, que é uma ciência feita para auxiliar a humanidade, e não fazê-las tirar notas baixas em provas. A educação deva assumir este papel de ser útil às pessoas, dando-lhes novas opções, por isso o uso de exemplos é tão crucial.

Será feito o uso de um problema histórico, conhecido como lenda da rainha Dido de Cartago, que na realidade é um problema de isoperimetria, e apesar de ter enunciado simples, não apresenta uma conclusão trivial. E por fim, apresentar-se-á um método pouco conhecido na comunidade acadêmica para o cálculo de áreas de polígonos em geometria analítica, conhecido popularmente como planilha analítica, que equivale ao uso de determinantes, e é amplamente conhecido nos cursos pré-vestibulares.

4.1 A geometria por traz da construção de uma porteira

Para fabricar uma porteira, intuitivamente se usa as propriedades de um paralelogramo, bem como o teorema de Pitágoras. Mas como situação didática é aconselhável pedir aos alunos problemas sem muitos detalhes, ou seja, incompletos para que eles busquem informações na família e tragam ideias diferentes. Analise o exemplo a seguir, no qual é solicitado um orçamento de tábuas para a fabricação de uma porteira para um curral:

Deseja-se fabricar uma porteira para um curral de vacinação do gado. Quantos metros lineares de tábua são necessários para fabricar tal porteira?

Pode-se questionar, mas quais são as dimensões desta porteira? Qual o modelo? Esse é o primeiro passo, diferentemente de casas, curral não tem normas tão rígidas para sua execução, e é nesta questão que produtores se deparam com problemas. Então o que fazer? Primeiro deve-se fazer um projeto, um esboço geométrico do que será feito. Por questões de praticidade, a maioria das porteiras é confeccionada no modelo conhecido como sanduíche (as tábuas são prensadas por parafusos), conforme modelo vendido em escala comercial na figura 30.



Figura 30: Porteira de curral

O modelo da foto (figura 30) é produzido em escala comercial, e é facilmente encontrada em lojas agropecuárias por um valor médio de R\$ 800,00. (Cotação e foto feita no dia 17/03/2014). As dimensões desta porteira são 3 m de comprimento, por 1,8 m de altura.

As tábuas verticais e as tábuas laterais possuem 15 cm de largura por 2,5 cm de espessura. As tábuas em diagonal (travessas) possuem 10 cm de largura e 2,5 cm de espessura e comprimento de 2,20 m. Nesta mesma loja é possível comprar as tábuas e fabricar a porteira, entretanto por questões comerciais, a madeira é vendida com tamanhos de 50 cm em 50 cm, logo para a altura de 1,8 m deve-se comprar 2 m e cortar 20 cm.

As tábuas de largura 15 cm são vendidas a R\$ 10,00 o metro, enquanto as travessas de 10 cm a R\$ 7,00. Logo, caso o cliente opte por fabricar a porteira irá comprar 5 tábuas de 3 m e 6 tábuas de 2 m com 15 cm de espessura, totalizando 27 m, e desembolsando R\$ 270,00, com as travessas terá de comprar duas tábuas com 4,5 m e cortar as quatro necessárias, desembolsando mais R\$ 63,00, totalizando R\$ 333,00 com a madeira.

Os parafusos custam R\$ 0,60 (parafuso francês, igual ao da porteira comercial) e são 43 ao todo, mais um par de dobradiças do tipo ferradura, à qual custa R\$ 60,00 o par.

Para custos com mão de obra, cobra-se o valor de uma arroba de boi, atualmente R\$ 115,00.

Logo, o custo total, comprando os materiais, será de R\$ 533,80. Uma diferença bruta de R\$ 266,20 de economia. Mas é possível aperfeiçoar estes resultados e economizar ainda mais.

Basta elaborar um projeto simples, e amenizar gastos em alguns pequenos detalhes. Veja o esboço da figura 31.

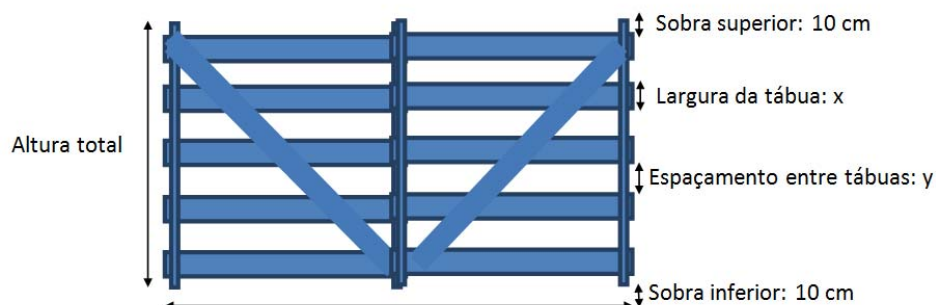


Figura 31: Esboço de porteira

Em vez de utilizar 1,8 m de altura total faça com 1,75 m, pois poderá comprar tábuas de 3,5 m e cortá-las ao meio. Na porteira comercial há uma sobra de 10 cm na parte superior, deixada propositalmente, para ser possível abrir o portão montado a cavalo, e por questões estéticas, é deixada a mesma sobra na parte inferior para dar harmonia à construção. Note que o valor de x será de 0,15 m, logo o espaçamento y entre as tábuas será de 20 cm.

Para as travessas, também é possível economizar, pois a porteira tem 3 m de comprimento, subtraindo os 45 cm de largura das tábuas sobra 2,55 m, como são dois vãos, existirá 1,275 m de medida para cada região. Para a altura, descontando as sobras de 20 cm (parte superior e inferior), restarão 1,55 m, e aplicando o teorema de Pitágoras, encontrar-se para o comprimento da travessa 2,007 m. Embora seja 0,007 m maior, ainda será possível usar uma tábua com 2 m, basta ajustar em 0,7 cm no encaixe inferior, resultando em uma economia de 1 m de madeira.

Dessa forma, haverá uma redução total de 1,5 m de tábuas de 15 cm, o que equivale a R\$ 15,00 de economia e mais R\$ 7,00 na tábua de 10 cm. Assim o preço

passa a ser R\$ 398,80. Uma redução de quase 5% sem muito esforço. Certamente se for utilizado materiais alternativos, como madeiras de reflorestamento tratadas em autoclave (técnica que aumenta a durabilidade de madeiras não nobres em períodos superiores à de madeiras de lei) estes custos reduzirão mais. Dessa forma, fica como sugestão ao professor, que solicite aos alunos que montem projetos mais econômicos e discuta os resultados com sua família, gerando uma interação entre escola e comunidade.

Também é possível explorar a construção da porteira em sala de aula, basta que se faça uma maquete com pedaços simples de madeiras, em uma escala a escolher, por exemplo, 1: 3. Solicite aos alunos que calculem a proporção e tragam o material, ao invés de parafusos podem-se usar pregos e ripas, e uma propriedade dos paralelogramos certamente será útil neste processo, dentre todos os paralelogramos o único que possui diagonais iguais é o retângulo.

Popularmente, chama-se esta propriedade de “medida do xis”. Carpinteiros experientes não usam esquadros na construção, medem as diagonais, quando estiverem com o mesmo tamanho, certamente a porteira estará no esquadro. Caso não seja observado este detalhe, a porteira jamais parará fechada, pois haverá uma distribuição não uniforme do peso, fazendo-a girar.

4.2 A Lenda da Rainha Dido de Cartago

O primeiro problema de isoperimetria registrado na história da matemática é encontrado na obra Eneida do poeta grego Publius Vergilius Maro, ou simplesmente Virgílio, como passou à história. Nesta obra, há uma lenda denominada Lenda de Dido.

Diz a lenda, na sua forma mais antiga, que Muto, o rei de Tiro, quando morreu, legou o reino aos seus dois filhos, Pigmalião e Elissa (o nome tírio de Dido). Embora Pigmalião fosse ainda uma criança, foi ele quem o povo escolheu para rei. Elissa se casou com Sicarbas, sacerdote de Hércules e segunda figura do Estado depois do rei. Na tentativa de roubar a enorme fortuna de seu cunhado, Pigmalião mandou matar Sicarbas, e Dido, horrorizada com o crime, decidiu fugir. Em segredo, carregou os barcos com os tesouros de Sicarbas e fugiu acompanhada por nobres tírios descontentes [22].

Seguiram rumo à África, onde os indígenas os receberam de forma amistosa. Dido pediu um pouco de terra para se estabelecer, tendo-lhe sido concedido que tomasse tanta terra quanto pudesse conter numa pele de boi. O que aparentemente parecia ser uma oferta ridícula provou ser um golpe de gênio: Dido mandou cortar uma pele de boi em tiras muito finas (figura 32) que depois de atadas formaram um longo fio com que delimitou um vasto território. Os indígenas obrigados a respeitar a promessa feita, concederam-lhe a terra assim delimitada, onde Dido ergueu a cidade de Cartago [22].



Figura 32: Fio obtido para delimitar o terreno

Embora seja uma lenda, pois há uma diferença cronológica entre a fundação de Cartago e o período narrado por Virgílio em aproximadamente 300 anos, este fato contribuiu muito para a evolução dos problemas matemáticos, e atualmente enunciamos o seguinte problema, chamado de **Problema de Dido**:

Dentre todas as curvas planas de comprimento L fixado, com ponto inicial e final numa reta dada, qual é a que juntamente com esta reta delimita a maior área possível (figura 33)?

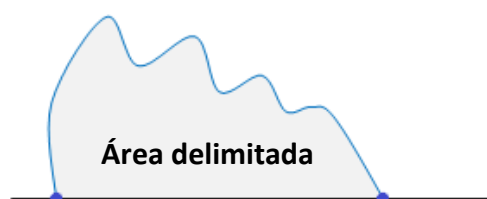


Figura 33: Problema de Dido

A solução para o problema de Dido é uma semicircunferência. A demonstração deste fato foi feita pelo matemático alemão Karl Theodor Wilhem Weierstrass, utilizando o cálculo como ferramenta. Por fugir dos objetivos deste texto, não apresentarei a abordagem feita pelo cálculo.

Será apresentado, a seguir, o trabalho do matemático da Grécia Antiga Zenodoro (140 a.C. – 200 a.C.), baseado em publicação do livro do professor Vladimir Mikhailovich Tikhomirov [37], intitulado de Stories about maxima and minima, volume I, de 1986, o qual traz uma demonstração que de que o polígono regular possui a área máxima, dentre todos os polígonos possíveis, com o mesmo perímetro, e mesmo número de lados.

Lema 1. Um polígono de n lados é convexo se e só se a medida de cada um dos seus ângulos internos é inferior a 180° .

Demonstração. Considere-se um polígono de n lados convexo, e suponha que exista um ângulo interno desse polígono cuja medida não é inferior a 180° . Se a medida for igual a 180° , então o polígono tem $(n - 1)$ lados, o que contradiz a hipótese. Se a medida for superior a 180° (figura 34), então o polígono não é convexo, o que também contradiz a hipótese. ■

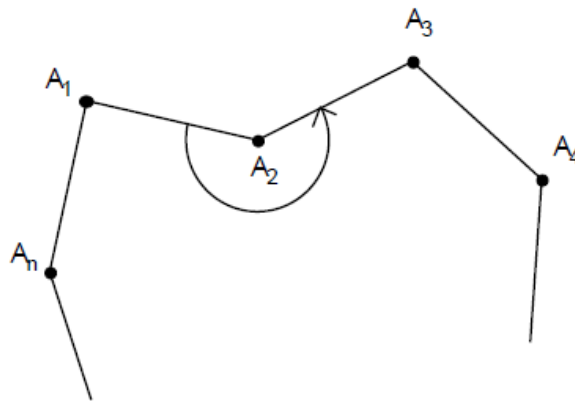


Figura 34: Polígono convexo hipotético de n lados

Lema 2. Um polígono máximo, de perímetro L , é convexo.

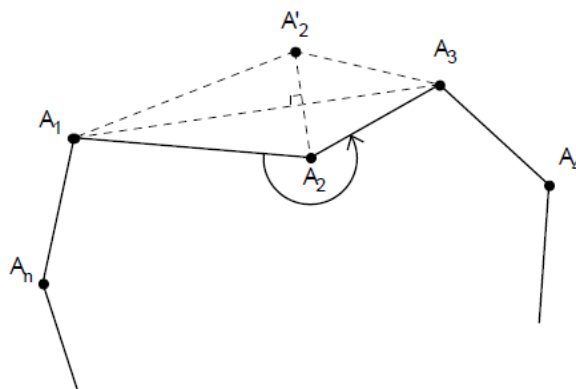


Figura 35: Polígono hipoteticamente máximo

Demonstração. Seja $[A_1A_2 \dots A_n]$ um polígono máximo de perímetro L . Suponha que $[A_1A_2 \dots A_n]$ não é convexo. Então existe um ângulo, digamos $\angle A_1A_2A_3$, cuja medida é superior a 180° . Considerando A'_2 o ponto obtido por reflexão ortogonal do vértice A_2 relativamente ao segmento $\overline{A_1A_3}$, obtém-se um polígono $[A_1A'_2A_3 \dots A_n]$ com área

maior e o mesmo perímetro L que o polígono $[A_1A_2A_3 \dots A_n]$, o que é um absurdo, pois $[A_1A_2 \dots A_n]$ é um polígono máximo de perímetro L . ■

Observação 3. O lema 2 não foi mencionado por Zenodoro, mas é aqui referido por ser fundamental para a demonstração dos resultados seguintes.

Proposição 4. (Herão) Sejam ℓ uma reta no plano e A, B dois pontos pertencentes a um dos semi-planos definidos por ℓ . Se S é o ponto de intersecção de $\overline{AB'}$ com ℓ , onde B' é obtido por reflexão ortogonal de B relativamente a ℓ , então S é o ponto da reta ℓ que minimiza a soma das distâncias de um ponto de ℓ aos pontos A e B .

A demonstração é encontrada em [22].

Proposição 5. Se S é o ponto da reta ℓ , nas condições da proposição 5 e α e β são as medidas dos ângulos definidos pela reta ℓ e \overline{AS} e \overline{SB} , respectivamente, então $\alpha = \beta$.

Demonstração. Seja I o ponto de intersecção de $\overline{BB'}$ com ℓ . Por um lado, os ângulos $\sphericalangle BSI$ e $\sphericalangle B'SI$ são congruentes. Por outro lado, como os ângulos $\sphericalangle S'SA$ e $\sphericalangle B'SI$ são opostos pelo vértice (figura 37), serão congruentes, ou seja, $\alpha = \beta$. ■

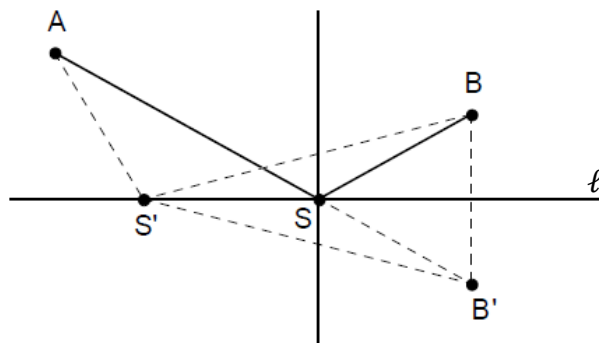


Figura 36: Otimização de Herão

Lema 6. Os lados de um polígono máximo, de perímetro L , têm todos, o mesmo comprimento.

Demonstração. Seja $[A_1A_2 \dots A_n]$ um polígono máximo de perímetro L , cujos lados não têm todos o mesmo comprimento. Considere $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{A_2A_3}$ dois lados adjacentes do polígono com comprimentos diferentes e ℓ a reta que passa em A_2 e é paralela a A_1A_3 (figura 36).

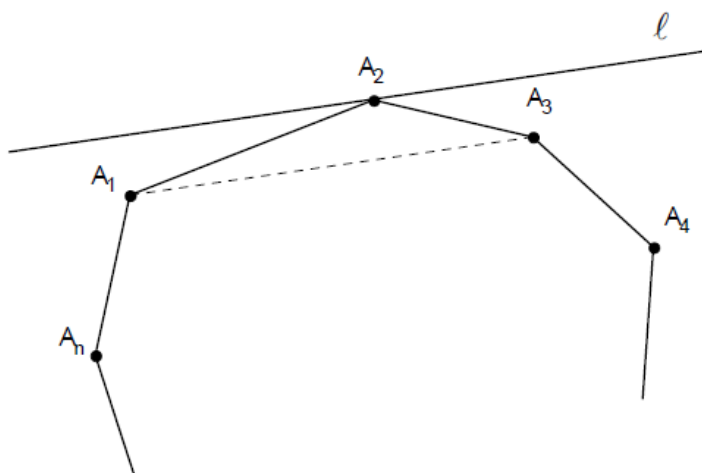


Figura 37: Polígono máximo

Seja S o ponto que se obtêm aplicando a proposição 4 à reta e aos pontos A_1 e A_3 , então $\overline{A_1S} + \overline{SA_3} < \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3}$ (i).

Pela proposição 5, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, logo os ângulos α e β , formados por $\overline{A_1S}$ e ℓ e $\overline{SA_3}$ e ℓ , respectivamente, tem a mesma medida. Como os ângulos $\sphericalangle SA_1A_3$ e $\sphericalangle SA_3A_1$ são alternos internos, então $\alpha = \beta$. Logo o triângulo A_1SA_3 é isósceles de base $\overline{A_1A_2}$ e, portanto, S e A_2 são pontos distintos. Além disso, os triângulos A_1SA_3 e $A_1A_2A_3$ têm a mesma base e a mesma altura logo possuem a mesma área. Agora construamos um triângulo $A_1A'_2A_3$ tal que $\overline{A_1A'_2} + \overline{A'_2A_3} < \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3}$. (ii).

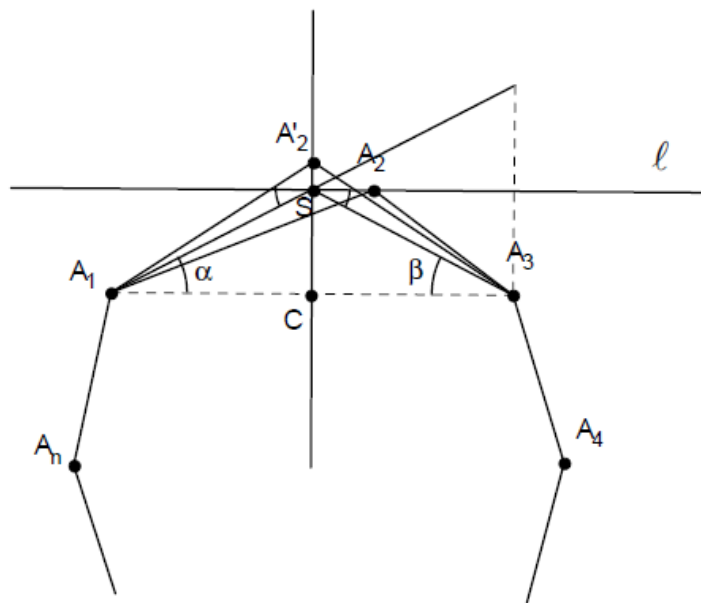


Figura 38: Polígono não regular

Como se indica na figura 38 A'_2 pertence à mediatriz do segmento $\overline{A_1A_3}$ e, pela desigualdade (ii), tem-se que $\overline{A_1A'_2} + \overline{A'_2A_3} > \overline{A_1S} + \overline{SA_3}$, já que A'_2 pertence à semi-reta oposta a \overline{SC} . Assim, a altura do $\Delta A_1A'_2A_3$ é maior do que a altura $\Delta A_1A_2A_3$ e, portanto, a área do $\Delta A_1A'_2A_3$ é maior do que a área do $\Delta A_1A_2A_3$. Conclui-se então que a área do polígono $[A_1A'_2 \dots A_n]$ é maior do que a do polígono $[A_1A_2 \dots A_n]$ e ambos tem perímetro L , o que é um absurdo pois $[A_1A_2 \dots A_n]$ é um polígono máximo de perímetro L , por hipótese. ■

Corolário 7. Um triângulo máximo é equilátero e um quadrilátero máximo é um quadrado.

Demonstração. É imediato, pelo Lema 6 que um triângulo máximo é equilátero e que um quadrilátero máximo é um losango. Agora note que na figura 39, o quadrado $A_1A'_2A'_3A_4$ tem área a^2 que é superior à área de qualquer outro losango. Portanto, um quadrilátero máximo é de fato um quadrado. ■

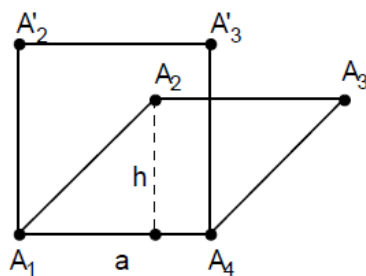


Figura 39: quadrado e losango com lados congruentes

Lema 8. Os ângulos de um polígono máximo de perímetro L têm todos a mesma medida.

Demonstração Suponhamos, por absurdo que $[A_1A_2 \dots A_n]$ seja um polígono máximo de perímetro L que não possui todos os ângulos internos com medidas iguais.

Considere dois ângulos adjacentes do polígono com medidas α e β , distintas, prova-se que existem dois ângulos não adjacentes com medidas também distintas. Sejam $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon \dots$ as medidas de ângulos sucessivos do polígono. Se $\gamma \neq \alpha$ ou $\delta \neq \beta$, fica provado o pretendido pois α e γ (ou β e δ) são medidas de ângulos não adjacentes. Se $\alpha = \gamma$ e $\alpha \neq \beta$, então a sucessão de ângulos é $\alpha, \beta, \alpha, \beta, \epsilon, \dots$ em que o primeiro e o quarto ângulo não são adjacentes e as suas medidas são diferentes, o que novamente prova a hipótese. Então existem os triângulos $\triangle DEF$ e $\triangle PQR$, com interiores disjuntos (figura 40) formados pelos vértices sucessivos do polígono, tais que a medida do ângulo em E é menor do que a medida do ângulo em Q . pelo Lema 6 tem-se $\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{PQ} = \overline{QR}$, logo os triângulos são isósceles e como a medida do ângulo em E é menor do que a do triângulo em Q , então $\overline{DF} < \overline{PR}$.

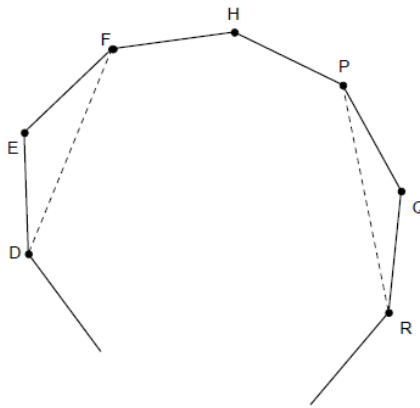


Figura 40: Polígono

Trace as retas EG e QT, perpendiculares a DF e PR, respectivamente, marque o ponto T' sobre EG de modo que os triângulos ET'P' e QTP sejam congruentes. Seja S o ponto que se obtém aplicando a proposição 4.1 à reta T'G e aos pontos P' e F. Então $\overline{P'S} + \overline{SF} < \overline{P'E} + \overline{EF}$ (ii). Como o ângulo $\sphericalangle P'ET'$ (igual à metade do ângulo em Q) tem medida maior do que a do ângulo $\sphericalangle FEG$ (igual à metade do ângulo em E), os pontos S e E são distintos (pois $P'\hat{S}T' = F\hat{S}G$) e S pertence a \overline{EG} .

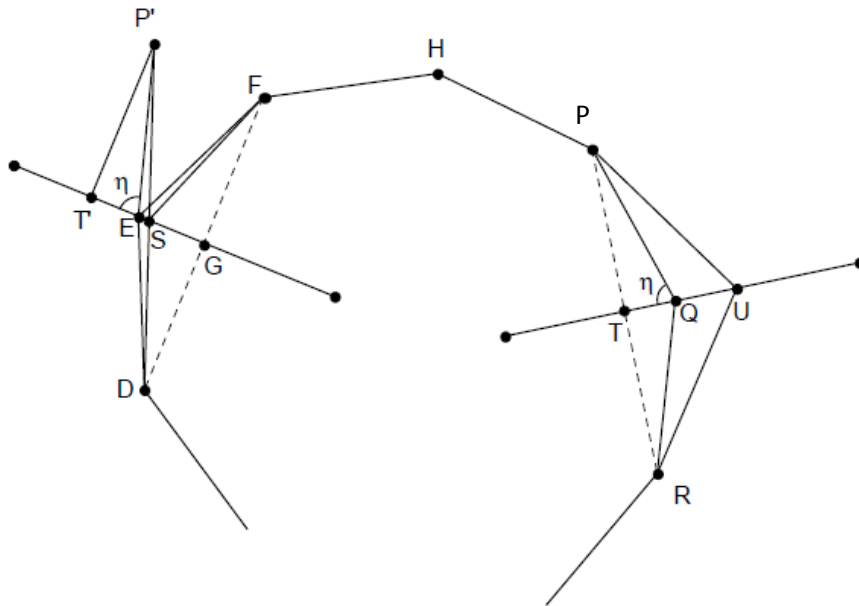


Figura 41: Polígono

Marque o ponto U no prolongamento de \overline{TQ} de tal forma que $\overline{TU} = \overline{T'S}$ e considere os triângulos DSF e PUR. Têm-se então $\overline{DS} + \overline{SF} + \overline{PU} + \overline{UR} = 2\overline{SF} + 2\overline{PU} = 2(\overline{SF} + \overline{SP'})$ e por (ii) vem $\overline{DS} + \overline{SF} + \overline{PU} + \overline{UR} < 2(\overline{EF} + \overline{EP'}) = \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{PQ} + \overline{QR}$, ou seja, os perímetros dos triângulos DSF e PUR é menor do que o perímetro dos triângulos originais DEF e PQR. Por outro lado, a área do triângulo P'ES é maior do que a área do triângulo ESF uma vez que $\overline{P'T'} = \frac{1}{2}\overline{PR}$, $\overline{FG} = \frac{1}{2}\overline{DF}$ e $\overline{DF} < \overline{PR}$. Então a soma das áreas dos triângulos DSF e PUR é maior do que a soma dos triângulos originais DEF e PQR. Logo o polígono [DSF...PUR...] tem menor perímetro e maior área do que o polígono original [DEF...PQR...].

Substituindo o ponto S por um ponto S' na reta EG de forma que o comprimento de [DS'F...PUR...] seja igual ao comprimento do polígono [DEF...PQR...], obtêm-se um polígono com o mesmo comprimento L que [DEF...PQR...] e com área maior do que a do polígono [DSF...PUR...], que certamente será maior do a área do polígono original [DEF...PQR...], donde recaímos em um absurdo, pois por hipótese o polígono original foi considerado de área máxima. ■

Teorema 9 (Zenodoro). Um polígono máximo de perímetro L é regular.

Demonstração. Decorre imediatamente dos Lemas 6 e 8. ■

Observação 10. Verificou-se que se um polígono máximo de comprimento L existe, então tem de ser regular. Mas será que existe um polígono máximo? Esta questão parece não ter interessado a Zenodoro, nem aos seus contemporâneos, pelo que se acredita que Zenodoro não se apercebeu da importância da existência de solução para o problema. Esta questão foi estudada posteriormente por Weierstrass, que

obteve uma demonstração para a existência de um polígono máximo de comprimento L . Na verdade, o conjunto dos $2n$ -uplos definidos pelos n vértices que representam um polígono de comprimento L constitui um conjunto compacto em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \dots \times \mathbb{R}^2$ e a função que representa a área de cada polígono está definida e é contínua nesse conjunto, pelo que o Teorema de Weierstrass garante a existência de um máximo para esta função.

Observação 11. Considere um polígono regular de perímetro L , delimitando uma área A . Facilmente conclui-se que $L = 2nR \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right)$ e $A = \frac{r}{2} L$, onde R e r são os raios das circunferências circunscrita e inscrita no polígono, respectivamente. Tem-se também $r = R \operatorname{cos} \left(\frac{\pi}{n} \right)$ e obtêm a seguinte relação entre a área e o comprimento de um polígono regular:

$$L^2 - 4n \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{n} \right) A = 0$$

Pelo Teorema 7, se L é o perímetro de um polígono de área A , então

$$L^2 - 4n \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{n} \right) A \geq 0 \text{ (iii)}$$

As desigualdades $\operatorname{tg} \alpha \geq \alpha$, válida para $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, e (iii), implicam que $L^2 - 4\pi A \geq 0$, para um polígono arbitrário e $n \geq 3$. A desigualdade (iii) chama-se **desigualdade isoperimétrica para polígonos**. Note que para uma circunferência tem-se a igualdade $L^2 - 4\pi A = 0$, onde L e A são seu comprimento e sua área, respectivamente.

4.3 Aplicações rurais do problema de isoperimetria

Uma aplicação para a isoperimetria é em construções de currais. Os currais são estruturas rurais destinadas ao manejo de bovinos, como vacinações, castrações, cirurgias, etc. Devem ser estruturas resistentes, pois nem todos os animais, quando acuados, são amigáveis. Assim, o custo de construção de um curral é elevado.

O curral tem seu preço estimado por lances, não pela sua área. Um lance (figura 42), é o espaçamento entre dois mourões, que pode ser feito de arame, cordoalha ou madeira. Como boa parte de nossos rebanhos são animais rústicos, usamos madeira nesta construção, o que encarece o curral. O número de animais que podem ser manejados no curral, varia de acordo com sua área, por recomendação da Embrapa Gado de Corte, (Embrapa, 1998), no qual se usa a relação de $2\text{m}^2/\text{animal}$.

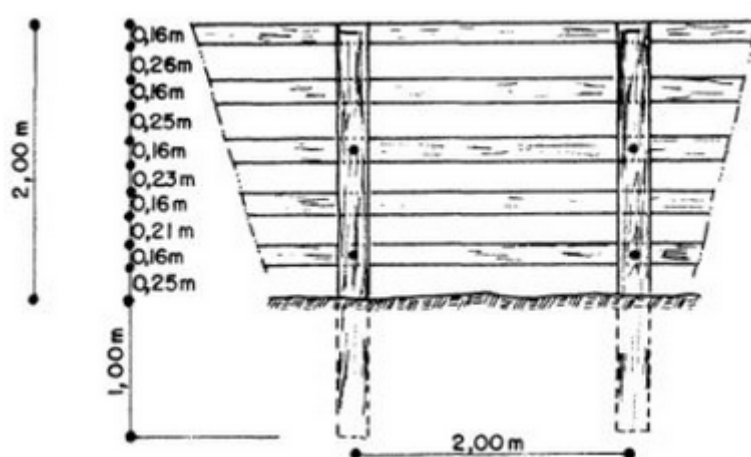


Figura 42: Detalhe de lance de mangueiro – Manual da Embrapa – Módulo 500.

As tábuas utilizadas são conhecidas como réguas, e possuem a medida padrão de 2m, baseada em cálculos de resistência a impactos que podem ser

proporcionados pelos animais arredios. Assim pode-se visualizar um curral como sendo um polígono de lados iguais a 2 m, onde os vértices representam os mourões. Deve-se projetar o curral para ser um polígono regular, pois, pelo teorema 9, o polígono que possui a área máxima é o regular.

A área do curral depende do número de animais, assim basta criar uma função, usando a relação de 2m^2 por animal, para determinar a área do curral. Esta função será $A(x) = 2 \cdot x$, onde x representa o número de animais.

O perímetro do curral determinará o seu custo, entretanto sabemos que cada lado do curral medirá 2m. Como não é conhecido o número n de lados do polígono, pode-se estabelecer que seu perímetro L , em função do número de lados, será $L = 2n$. Por outro lado, pode-se dividir o polígono regular em exatamente n triângulos isósceles, com ângulo central $\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, conforme figura 43.

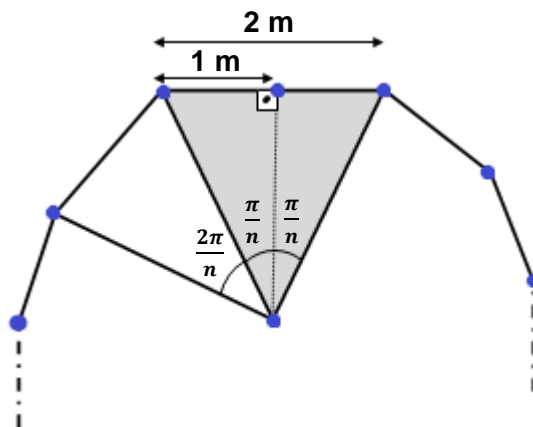


Figura 43: Polígono de n lados dividido em triângulos isósceles

Facilmente demonstra-se que a área de cada um destes triângulos isósceles pode ser expressa por $\cotg\left(\frac{\pi}{n}\right)$, logo, a área do polígono será $A = n \cdot \cotg\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Então o número máximo x de animais que podem ser colocados no curral, em função do

número n de mourões é $x = \left\lfloor \frac{n}{2} \cot g \left(\frac{\pi}{n} \right) \right\rfloor$, onde $[a]$ indica o maior inteiro menor ou igual a a .

O preço médio de um mourão de eucalipto tratado, com diâmetro de 20 cm, está orçado em R\$ 120,00. Uma régua para curral, com 2 m, está custando R\$ 22,00. O custo com mão de obra está em média, R\$ 115,00 por lance (Historicamente o valor cobrado é atrelado à arroba do boi). Cada lance exige 5 réguas, ou seja R\$ 110,00 com tábuas. É comum encontrarmos currais retangulares nas pequenas propriedades, suponha hipoteticamente, que uma pessoa faça um curral para 98 animais, ou seja, com 196 m^2 . Caso ela o faça quadrado, que é a melhor situação dentre os quadriláteros, necessitará de 30 mourões e 28 lances, desembolsando R\$ 9.480,00 com material e mão de obra, sem contar gastos com parafusos e tinta para proteger a construção. Se este produtor optasse por um polígono regular com 25 lados, teria uma área de aproximadamente $197,9 \text{ m}^2$, comportando os mesmos 96 animais, porém usando 25 lances e 25 mourões, reduzindo seu custo para R\$ 8.250,00, propiciando uma economia de R\$ 1.230,00, equivalente a quase 13% de redução.

Cabe ressaltar que um mangueiro na forma de um polígono com vários lados não apresentará cantos bruscos, pois quando é quadrangular um boi não consegue virar e acaba trombando na cerca, reduzindo sua vida útil. Quanto mais próximo do formato de um círculo, melhor será.

Machucaduras por pancada no curral ocasionam prejuízos à carcaça e reduzem seu valor comercial. Na figura 44 é feito um comparativo entre uma carcaça que sofreu hematomas no manejo e carcaças normais, analogamente, na figura 45 tem-se o coxão duro da carcaça machucada da figura 44 e um coxão duro normal.

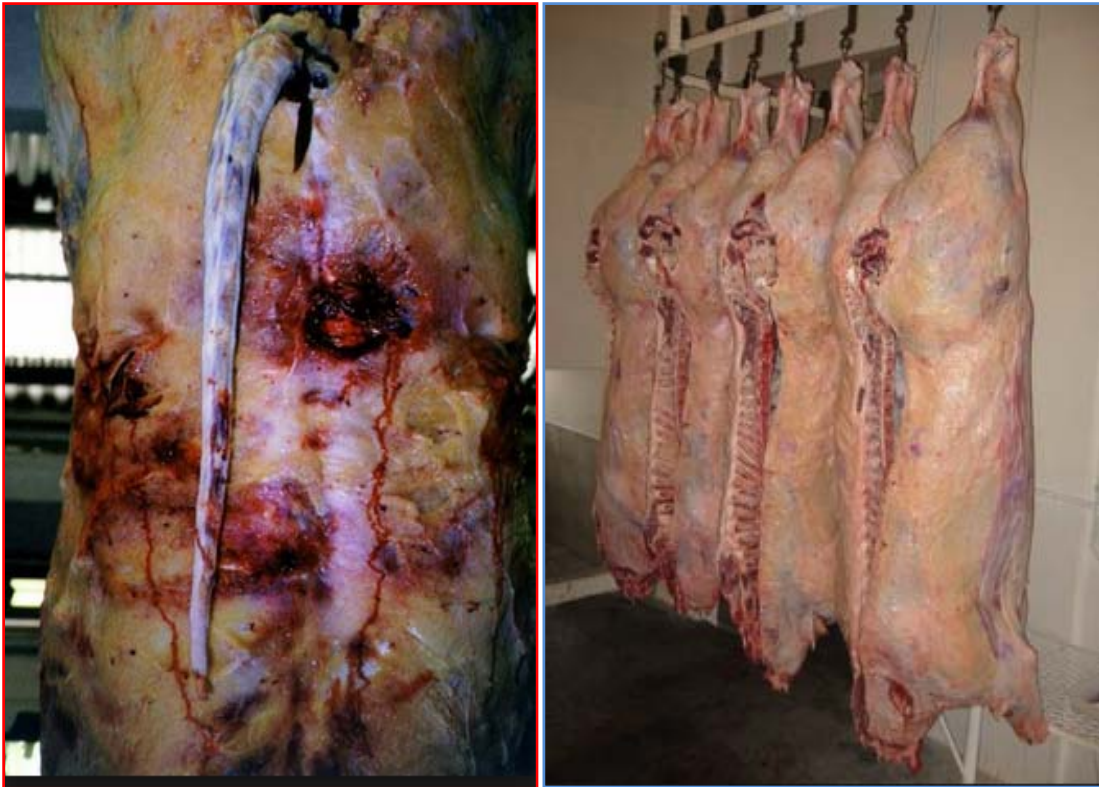


Imagem retirada do site <http://boiapasto.com.br/2013/07/o-papel-do-produtor-na-seguranca-alimentar/>

Figura 44: Foto de carcaça com hematomas, à esquerda, e carcaças normais à direita.



Imagem retirada do site <http://boiapasto.com.br/2013/07/o-papel-do-produtor-na-seguranca-alimentar/>

Figura 45: Foto de coxão duro com hematomas, à esquerda, e coxão duro normal à direita.

Os currais anti-stress possuem formatos circulares, conforme figura 46, geralmente são feitos de concreto, o que facilita construções deste modelo. Entretanto, um polígono regular com muitos lados, aproxima-se muito de um círculo, conforme comparativo da figura 46. Logo, pode-se concluir que um formato poligonal é uma ótima adequação ao pequeno produtor de um curral anti-stress.



Imagem disponível em <http://www.sistemavoisin.com.br/>

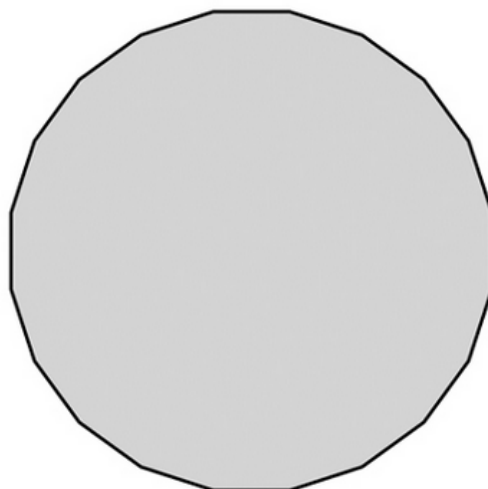


Imagem disponível em <http://aulete.uol.com.br/icosagono>

Figura 46: Foto aérea de curral anti-stress e um polígono regular com 20 lados.

4.4 A Planilha Analítica

Tradicionalmente, os cursinhos pré-vestibulares sabem cativar seus alunos, pois atuam diretamente com jovens que possuem uma ampla carga horária de estudos. Passar no vestibular é o objetivo de muitos jovens, por isso uma boa estratégia na hora de solucionar a prova é crucial. **O método a seguir dá agilidade ao cálculo de áreas de polígonos, quando são conhecidas suas coordenadas analíticas**, sendo uma bela aplicação do uso de determinantes como forma de encontrar a área de uma região poligonal. Félix Klein (1849 – 1925) contribuiu profundamente para o tema, mostrando que área de um triângulo com vértices nos pontos distintos $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$, $C(x_c, y_c)$ é dada por $A = \frac{1}{2} |\Delta|$, onde:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix}.$$

Curiosamente Félix Klein mostrou que a ordem dos pontos tomados muda o sinal da área, por isso o módulo. Mas, se os pontos seguirem um sentido anti-horário, o determinante sempre será positivo. Analogamente, se seguirem uma orientação horária, seu sinal será negativo. Este fato será demonstrado com uma abordagem diferente, usando definições e termos do ensino médio.

Definição 12. Dado um conjunto de n pontos do plano cartesiano (\mathbb{R}^2) representados por $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n)$. Chama-se de planilha analítica à representação da forma:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n & y_1 \end{vmatrix}.$$

- Nota-se que a planilha analítica coincide com uma tabela formada por 2 linhas e $n + 1$ colunas, onde a última coluna é a **repetição da primeira coluna**.
- A primeira linha é formada pelas abscissas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. A segunda linha é formada pelas ordenadas $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$.

Definição 13. Chamar-se-á de diagonal direita todo par da forma (x_i, y_{i+1}) , onde $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$, e o par (x_n, y_1) (figura 47, à esquerda), e de diagonal esquerda todo par da forma (x_{i+1}, y_i) , onde $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$, e o par (x_1, y_n) (figura 47, à direita).

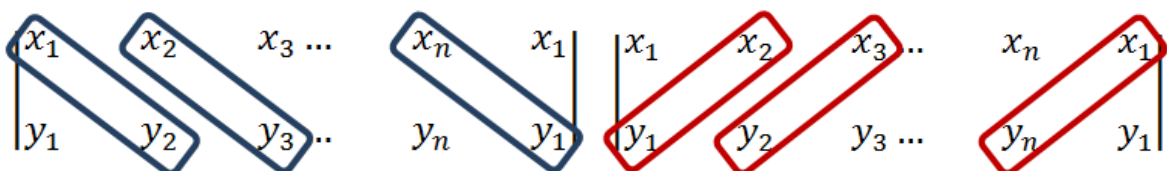


Figura 47: Planilha com diagonal direita e diagonal esquerda.

- Notemos que a planilha analítica possui n diagonais esquerdas e n diagonais direitas.

Definição 14. Chama-se de **determinante analítico** e representa-se por Δ_A à diferença entre o somatório do produto dos dois elementos de cada uma das n diagonais direitas e o somatório do produto dos dois elementos de cada uma das n diagonais esquerdas. Em símbolos temos:

$$\Delta_A = (x_1y_2 + x_2y_3 + \dots + x_{n-1}y_n + x_ny_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + \dots + x_ny_{n-1} + x_1y_n).$$

Lema 15. A área de um triângulo com vértices nos pontos de coordenadas $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ e $C(x_c, y_c)$ será dada por $A = \frac{|\Delta_A|}{2}$, onde $|\Delta_A|$ é o módulo do determinante analítico destes 3 pontos.

Demonstração. Substituindo estes pontos na planilha analítica, vem:

$$\begin{vmatrix} x_a & x_b & x_c & x_a \\ y_a & y_b & y_c & y_a \end{vmatrix}$$

✓ Logo o determinante analítico será dado por:

$$\Delta_A = (x_a y_b + x_b y_c + x_c y_a) - (x_b y_a + x_c y_b + x_a y_c)$$

✓ Assim a área do triângulo será dada por:

$$A = \frac{|(x_a y_b + x_b y_c + x_c y_a) - (x_b y_a + x_c y_b + x_a y_c)|}{2} \quad (i)$$

- Por outro lado, já foi provado na geometria analítica que a área de um triângulo pode ser expressa pela metade do módulo do determinante formado pelos pontos $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ e $C(x_c, y_c)$ e uma fila de 1, expressa da seguinte forma:

$$\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix}.$$

✓ Aplicando a Regra de Sarrus, e denominando de Δ este determinante, conclui-se que:

$$\Delta = (x_a y_b + x_b y_c + x_c y_a) - (x_b y_a + x_c y_b + x_a y_c) \quad (\text{ii})$$

- Note que o resultado obtido em (ii) coincide com o do determinante analítico, o que permite garantir que o resultado obtido em (i) é verdadeiro. ■

Corolário 16. Na demonstração do lema 15 foi provado que o determinante analítico da planilha analítica coincide o resultado do determinante formado pelos pontos $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ e $C(x_c, y_c)$ e uma fila de 1. Logo, pode-se afirmar que se o resultado do determinante analítico for zero, os pontos A, B e C serão colineares. Pode-se, então, utilizar a planilha analítica como condição para o alinhamento de três pontos, ou ainda, para encontrar a equação geral de retas e a lei de formação de funções afins quando são conhecidos apenas dois pontos.

Corolário 17. Sejam $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$ dois pontos distintos do plano cartesiano. Podemos escrever a equação da reta que passa por A e B, como dada pela relação:

$$(y_a - y_b)x + (x_b - x_a)y + (x_a \cdot y_b - x_b \cdot y_a) = 0.$$

Demonstração: Usando o corolário 16, tome um ponto $C(x, y)$ genérico da reta, logo os pontos A, B e C estarão alinhados, e a planilha analítica será:

$$\begin{vmatrix} x_a & x_b & x & x_a \\ y_a & y_b & y & y_a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_a \cdot y_b + x_b \cdot y + x \cdot y_a - x_b \cdot y_a - x \cdot y_b - x_a \cdot y = 0.$$

Reorganizando tem-se: $(y_a - y_b)x + (x_b - x_a)y + (x_a \cdot y_b - x_b \cdot y_a) = 0$. ■

Definição 18. Dada uma reta determinada pelos pontos A e B. Esta reta dividirá o plano em dois semi-planos, que serão chamados de semi-plano inferior e semi-plano superior. Um ponto fora da reta terá sua localização nos semi-planos se ocorrer uma das situações:

- 1) Considere a reta de equação geral $ax + by + c = 0$ com $b \neq 0$ e a real. Nessas condições o ponto $C(x_c, y_c)$ pertencerá ao semi-plano superior se, e somente se, $y_c > \frac{-(a \cdot x_c + c)}{b}$. Se $y_c < \frac{-(a \cdot x_c + c)}{b}$, pertencerá ao semi-plano inferior.
- 2) Considere a reta de equação geral $ax + by + c = 0$ na qual $b = 0$ e $a \neq 0$. Nessas condições o ponto $C(x_c, y_c)$ pertencerá ao semi-plano superior se, e somente, se $x_c < \frac{-c}{a}$. Se $x_c > \frac{-c}{a}$, o ponto pertencerá ao semi-plano inferior.

Definição 19. Dados três pontos distintos não colineares de coordenadas $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ e $C(x_c, y_c)$, no plano cartesiano e considerando, sem perda de generalidade, que $x_b > x_a$, ou que, caso $x_b = x_a$, então $y_b > y_a$. Nestas condições diz-se que estes pontos possuem orientação horária se o ponto C estiver no semi-plano inferior da reta determinada por A e B , conforme figura 48.

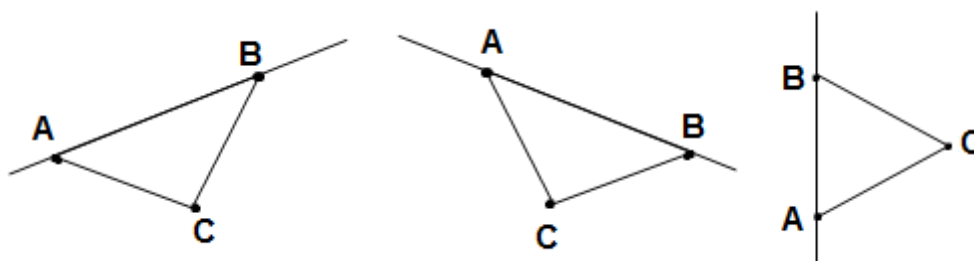


Figura 48: Triângulo ABC em orientação horária

Definição 20. Dados três pontos distintos e não colineares de coordenadas $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ e $C(x_c, y_c)$, no plano cartesiano e considerando, sem perda de generalidade, que $x_b > x_a$, ou que, caso $x_b = x_a$, então $y_b > y_a$. Nestas condições diz-se que estes pontos possuem orientação anti-horária se o ponto C estiver no semi-plano superior da reta determinada por A e B , conforme figura 49.

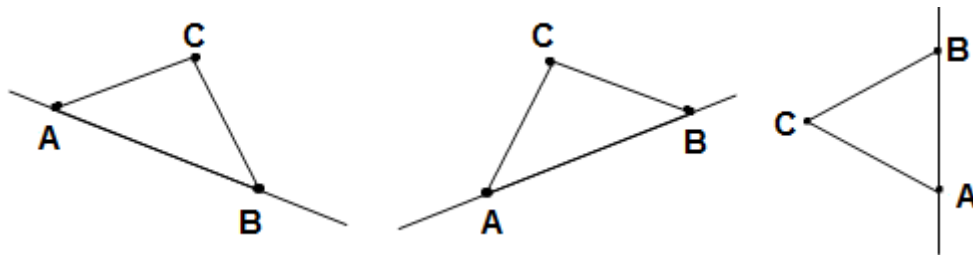


Figura 49: triângulo ABC em orientação anti-horária

Lema 21. Dado um triângulo ABC, se os pontos na sequência ABC tiverem

orientação anti-horária, então o determinante $\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix}$ será positivo.

Demonstração. Pela regra de Sarrus, tem-se que $\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = (x_a y_b + x_b y_c +$

$x_c y_a) - (x_b y_a + x_c y_b + x_a y_c)$. Do corolário 17, pode-se escrever a equação da reta

que passa por A e B como $(y_a - y_b)x + (x_b - x_a)y + (x_a \cdot y_b - x_b \cdot y_a) = 0$. Da

definição 20, tem-se que: se a orientação é anti-horária, então o ponto C está no

semi-plano da reta determinada por A e B. Como, por hipótese, $x_b > x_a$, então da

definição 20, temos que: $y_c > \frac{-(a \cdot x_c + c)}{b}$. Tomando-se $a = y_a - y_b$, $b = x_b - x_a$ e

$c = x_a \cdot y_b - x_b \cdot y_a$, e substituindo, virá que:

$$y_c > \frac{-((y_a - y_b) \cdot x_c + x_a \cdot y_b - x_b \cdot y_a)}{x_b - x_a} \Rightarrow y_c \cdot (x_b - x_a) > -((y_a - y_b) \cdot x_c + x_a \cdot y_b - x_b \cdot y_a).$$

Logo, efetuando-se as operações elementares e reorganizando, chega-se a:

$$(x_a y_b + x_b y_c + x_c y_a) - (x_b y_a + x_c y_b + x_a y_c) > 0. \blacksquare$$

Corolário 22. Dado um triângulo ABC, se os pontos na sequência ABC tiverem

orientação horária, então o determinante $\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix}$ será negativo.

Demonstração. Se ABC possui orientação horária, então BAC será anti-horário, trocando-se as coordenadas do ponto B pelo ponto A no lema 10, e multiplicando-se o resultado obtido por -1 , concluí-se a demonstração. ■

Teorema 23. Suponha que sejam tomados quatro pontos quaisquer do plano cartesiano de coordenadas $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$, $C(x_c, y_c)$ e $D(x_d, y_d)$, de tal forma que nunca três deles sejam colineares, ou seja, formem um quadrilátero no plano. Suponha-se ainda, sem perda de generalidade, que A seja consecutivo de B, B seja consecutivo de C, C seja consecutivo de D e D seja consecutivo de A. Conforme figura 50.

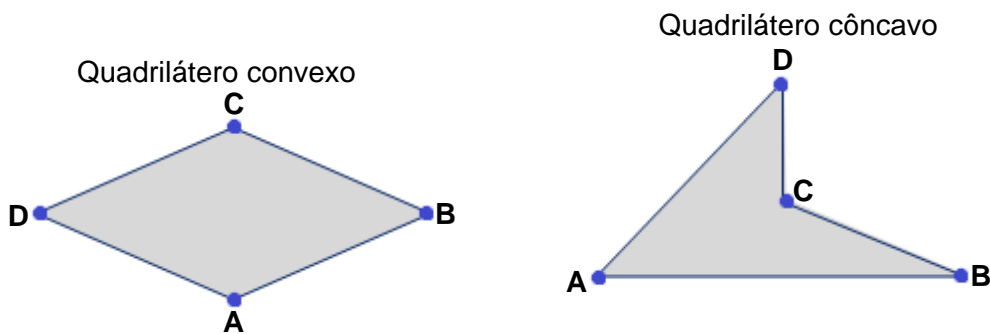


Figura 50: Quadrilátero convexo e quadrilátero côncavo

- ✓ Em ambos os casos pode-se calcular a área deste quadrilátero utilizando a planilha e o determinante analítico. Entretanto, deve-se seguir uma orientação anti-horária para os pontos A, B, C e D. Dessa forma a planilha será:

$$\begin{vmatrix} x_a & x_b & x_c & x_d & x_a \\ y_a & y_b & y_c & y_d & y_a \end{vmatrix}$$

Logo, o determinante analítico será:

$$\Delta_A = (x_a y_b + x_b y_c + x_c y_d + x_d y_a) - (x_b y_a + x_c y_b + x_d y_c + x_a y_d), \text{ e a área será:}$$

$$A = \frac{\Delta_A}{2}.$$

Demonstração. Em ambos os casos a área do quadrilátero ABCD pode ser expressa como a soma das áreas dos triângulos ABC e ACD. Perceba que nas duas situações da figura 50, a orientação ABC e ACD é anti-horária, assim, pela teoria convencional de geometria analítica tem-se que: $A_{ABCD} = A_{\Delta ABC} + A_{\Delta ACD}$.

$$\text{Logo, } A_{ABCD} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_c & y_c & 1 \\ x_d & y_d & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Efetuando os cálculos reduz-se a: } A_{ABCD} = \frac{|x_a y_b + x_b y_c + x_c y_a - x_a y_c - x_b y_a - x_c y_b|}{2} + \frac{|x_a y_c + x_c y_d + x_d y_a - x_a y_d - x_c y_a - x_d y_c|}{2}.$$

Como as orientações são anti-horárias, nos dois casos pode-se suprimir o módulo, já que são expressões positivas, donde se chega a:

$$A_{ABCD} = \frac{x_a y_b + x_b y_c + x_c y_d + x_d y_a - x_b y_a - x_c y_b - x_d y_c - x_a y_d}{2} = \frac{\Delta_A}{2}. \blacksquare$$

Teorema 24. Se R é uma região poligonal fechada delimitada por n ($n > 3$) vértices da forma $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, ..., $A_n(x_n, y_n)$ onde o vértice A_i é consecutivo de A_{i+1} , para $i = 1, 3, 4, \dots, n - 1$, e o vértice A_1 é consecutivo de A_n , e Δ_A é o determinante analítico destes n pontos e, supondo, sem perda de generalidade, que a sequência $A_1 A_2 \dots A_n$ forme uma orientação anti-horária, então a área da região R será dada por:

$$A = \frac{\Delta_A}{2}.$$

Demonstração. Será provado por indução sobre n. Para tanto, tem-se o caso base $n = 4$, provado no teorema 23. Suponha agora que a expressão seja válida para um

polígono com n lados, atendendo às condições da hipótese. Logo, a planilha analítica será: $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n & y_1 \end{vmatrix}$. Consequentemente, o determinante analítico será:

$\Delta_A = (x_1y_2 + x_2y_3 + \dots + x_{n-1}y_n + x_ny_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + \dots + x_ny_{n-1} + x_1y_n)$. Donde concluí-se que a área deste polígono será:

$$A = \frac{(x_1y_2 + x_2y_3 + \dots + x_{n-1}y_n + x_ny_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + \dots + x_ny_{n-1} + x_1y_n)}{2}.$$

Por hipótese de indução $A_1A_2 \dots A_n$ forma uma orientação anti-horária. Acrescentando-se, por construção, um novo vértice A_{n+1} , tal que, o novo polígono com $n + 1$ vértices, representado pela sequência $A_1A_2 \dots A_nA_{n+1}$ forme uma orientação anti-horária, então, pode-se separar a área do polígono $A_1A_2 \dots A_nA_{n+1}$ como o somatório das áreas de $A_1A_2 \dots A_n$ e do triângulo $A_1A_nA_{n+1}$, usando a definição 48 sobre áreas (capítulo 2), e escrever:

$$\begin{aligned} A_{A_1A_2 \dots A_{n+1}} &= A_{A_1A_2 \dots A_n} + A_{A_1A_nA_{n+1}} = \\ &= \frac{(x_1y_2 + x_2y_3 + \dots + x_{n-1}y_n + x_ny_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + \dots + x_ny_{n-1} + x_1y_n)}{2} \\ &\quad + \frac{(x_1y_n + x_ny_{n+1} + x_{n+1}y_1) - (x_ny_1 + x_{n+1}y_n + x_1y_{n+1})}{2} \\ &= \frac{(x_1y_2 + x_2y_3 + \dots + x_ny_{n+1} + x_{n+1}y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + \dots + x_{n+1}y_n + x_1y_{n+1})}{2}. \end{aligned}$$

O que conclui a hipótese de indução. ■

4.5 Considerações Finais

Apresentou-se um exemplo de aplicação das propriedades dos quadriláteros e do Teorema de Pitágoras, que é a construção de porteiras para currais. Um problema que pode ser usado no ensino fundamental, sem maiores dificuldades. Apesar de simples, tem uma importância crucial, que é despertar a curiosidade matemática dos alunos, fazendo-os buscar por soluções criativas que gerem impacto em suas vidas.

Resgatou-se a Lenda de Didio, problema que levou séculos para ser concluído com perfeição. Abordou-se a demonstração para o problema isoperimétrico feita por Zenodoro, à qual, mesmo incompleta, contribuiu muito à geometria euclidiana plana por apresentar riqueza de argumentações, sem usar o conceito abstrato do cálculo variacional.

Também, mostrou-se que a isoperimetria pode ser um bom aliado do produtor rural, reduzindo significativamente os custos de instalações rurais, e facilitando o manejo na pecuária, através do uso de currais anti-stress.

Por fim, apresentou-se um método alternativo para o cálculo de áreas de polígonos na geometria analítica que, embora baseado nos resultados de Félix Klein, traz uma proposta diferente, dificilmente encontrada em livros didáticos, método este que é utilizado em cursos pré-vestibulares como regra prática.

5. CONCLUSÃO

Inicialmente, abordou-se os aspectos da legislação do ensino da geometria, trazendo à tona tanto os conteúdos e habilidades almejadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, como no Referencial Curricular de Mato Grosso do Sul. Apresentou-se os artigos da LDB que aparam legalmente um trabalho diferenciado nas comunidades rurais. Mostrou-se a importância do uso de demonstrações na matemática, além de se ter sugerido algumas situações didáticas voltadas ao campo, que podem ser utilizadas pelos professores nas escolas rurais, possibilitando uma iteração entre escola e comunidade.

Elaborou-se um resumo sobre a história da geometria euclidiana, especialmente antes das reformulações dos axiomas de Euclides. Finalizamos o capítulo 2, com as modificações sofridas no ensino da geometria após o Movimento da Matemática Moderna, o qual ficou conhecido como “algebrização” da geometria. O problema apresentado sobre a “cubicação” de terras pode ser explorado com maior ênfase para justificar o uso de uma linguagem precisa na geometria, além de sacramentar a irrefutável importância de demonstrações na matemática.

No capítulo 3, iniciou-se com um levantamento histórico sobre os elementos de Euclides, e apontaram-se algumas de suas falhas, justificando a reformulação de seus axiomas, proposta por Hilbert e Pacsh que tornou a geometria estruturada, onde se podem explicar suas propriedades com precisão. Apresentaram-se os cinco grupos de axiomas reformulados da geometria Euclidiana que dão uma “completeza” à geometria, analogamente à construção axiomática do conjunto dos números reais.

No capítulo 4, mostrou-se um modelo de porteira de curral vendido em escala comercial, ao qual foram sugeridas algumas modificações para a redução de seu custo, e a fabricação pelo próprio produtor possibilitando em uma economia de até 50,15%. Na sequência retomou-se a lenda de Dido, e o problema isoperimétrico, para o qual se apresentou uma aplicação na construção de currais, e sugeriu-se um modelo poligonal, que além de reduzir os custos na sua construção, facilita o manejo do produtor. E com a relação $x = \left\lfloor \frac{n}{2} \cdot \cot g \left(\frac{\pi}{n} \right) \right\rfloor$, tem-se o número de animais x , que podem ser fechados no curral, em função do número de mourões n .

Resgatou-se uma ferramenta já utilizada em cursos pré-vestibulares, que pode substituir o uso de determinantes na geometria analítica. Foram criados alguns lemas para enunciá-la como teorema, e realizar sua prova.

Por fim, conclui-se, tendo atingido os objetivos propostos e deixado como legado contribuições para o ensino da geometria através de problemas geométricos levantados no meio rural, além de um modelo geométrico para currais, que pode ter impactos econômicos e funcionais aos produtores rurais, e uma ferramenta matemática para o cálculo de áreas poligonais: a planilha analítica, que além de dar agilidade aos cálculos, substitui de forma eficiente o uso de determinantes na geometria analítica, possibilitando o cálculo de áreas em função das coordenadas dos vértices de regiões poligonais, além de também ser uma alternativa para equacionar funções afins, retas e verificar condição de alinhamento de três pontos.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ALMEIDA, RA. (Org.). *A questão agrária em Mato Grosso do Sul: uma visão multidisciplinar*. Editora da UFMS. Campo Grande-MS. 2008.
- [2] ANTONIO, CA & LUCINI, M. *Ensinar e aprender na educação do campo: processos históricos e pedagógicos em relação*. cad. Cedes, Campinas, vol. 27, n. 72, p. 177-195, maio/ago. 2007. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/ccedes/v27n72/a05v2772>>.pdf. Acesso em: 10/01/2014.
- [3] ARROYO, MG. *Políticas de formação de educadores(as) do campo*. Caderno CEDES, vol. 27, n. 72. Unicamp.. Campinas. SP. 2007. 157-176p.
- [4] ARROYO, MG; CALDART, RS; MOLINA, MC; (orgs.). *Por uma educação do campo*. Petrópolis: Vozes, 2004.
- [5] ARROYO, MG; FERNANDES, BM. *A educação básica e o movimento social do campo*. Brasília, DF: Articulação Nacional Por uma Educação Básica do Campo, 1999. (Coleção por uma Educação Básica do Campo, nº 2).
- [6] ASGER, AABOE. *Episódios da História Antiga da Matemática*. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, Sociedade Brasileira de Matemática. Tradução: João Bosco Pitombeira de Carvalho. 1984.
- [7] BARBOSA, J L. *Geometria Euclidiana Plana*. SBM, Coleção do Professor de Matemática, 10ª edição.
- [8] BOYER, C. *História da Matemática*. Tradução Elza S. Gomide - 2º edição- São Paulo: Edgar Blucher, 1996.
- [9] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+) - Ciências da Natureza e suas Tecnologias*. Brasília: MEC, 2002.
- [10] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Brasília: MEC, 2000.
- [11] BRASIL. Senado Federal. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional: 1º 9394/96*. Brasília: 1996.
- [12] BROLEZZI, A C . *Princípio de Cavalieri e o Cálculo de Volumes*. In: Cristina Cerri. (Org.). Matemática. São Paulo: Fundação Vanzolini, 2002. 49-65p.
- [13] BROLEZZI, A. C. ; DRUCK, L de F. *Áreas, semelhanças , volumes e o método da exaustão*. In: Cristina Cerri. (Org.). Matemática. São Paulo: Fundação Vanzolini, 2002. 33-44p

- [14] CANÁRIO, C. BORRALHO, E P das N. MARQUES, S. *Os elementos de Euclides*. Disponível. 2000 em: <<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/euclides/elementoseuclides.htm>> Acesso em: 02/03/2014, 17:50
- [15] CARRAHER, T N. CARRAHER, D W. SCHLIEMANN A D. *Na Vida Dez na Escola Zero*. 4ª.Edição. São Paulo: Cortez, 1990.
- [16] EVES, H. *Introdução á História da Matemática*. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004
- [17] FERREIRA, A B de H. *Novo dicionário Aurélio da língua portuguesa*. 4. ed. Curitiba: Ed. Positivo, 2009
- [18] GUEDJ, DENIS. *O teorema do papagaio*. Trad. Eduardo Brandão. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.
- [19] IEZZI, G.; MURAKAMI, C. *Fundamentos da Matemática Elementar*, volumes 9 e 10. 8ª Edição.
- [20] LIMA, E L. *Áreas e Volumes*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 1985.
- [21] LIMA, E L. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias*. Rio de Janeiro: Fundamentos da Matemática Elementar - SBM, 1991.
- [22] MADEIRA, T M. Tese mestrado: Problema Isoperimétrico clássico. Universidade de Coimbra. 2005 Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10316/20971>> Acessado em: 15/03/2014, 19:00
- [23] MASSAGO, S. *Axiomas da Geometria Euclidiana* – disponível em <<http://www.dm.ufscar.br/profs/sadao/student.php?lang=pt> >. Acesso em: 12/03/2014, 17:00
- [24] MATOS, J. M.; LEME DA SILVA, M. C. *O Movimento da Matemática Moderna e diferentes propostas curriculares para o ensino de geometria no Brasil e em Portugal*. Bolema. Boletim de Educação Matemática (UNESP. Rio Claro. Impresso), v. 24, p. 171-196, 2011.
- [25] MAZETO, S. *Manual de orientações para construção de galpões para criação de frango tipo caipira*. Disponível em: <http://www.seder.mt.gov.br/arquivos/A_3617c36bccbc749e72f96f94908317e3_Manual_Orientador_Galpao_Frango_Tipo_Caipira.pdf>. Acesso em: 25/01/2014, 14:00
- [26] MENDES, IRAN ABREU. *O uso da história no ensino da matemática: reflexões teóricas e experiências*. Belém: EDUEPA, 2001.

- [27] MORGADO, A C. WAGNER, E. JORGE, M. *Geometria II: métrica plana*. Rio de Janeiro. Livraria Francisco Alves Editora. 2002
- [28] MÜLLER, M F B. *Debates sobre o ensino da matemática no começo do século XX*. Dissertação de mestrado. Campinas-SP, 2010
- [29] PAVANELO, R. *O Abandono do Ensino da Geometria no Brasil*. Zetetiké, n. 01, UNICAMP, Campinas, 1993
- [30] POLYA, G. *Mathematical Discovery: on understanding, learning in teaching problem solving*, John Wiley, 1981.
- [31] RAPADURA, N T. *Euclides – elementos da geometria*. São Paulo. Edição Cultural. Disponível em: <http://pensamentosnomadas.files.wordpress.com/2012/04/os-elementos-euclides.pdf>. Acessado em: 05/02/2014, 14:00
- [32] RIBEIRO, JPM. DOMITE, MCS. FERREIRA, R. *Etnomatemática: papel, valor e significado*. Ed. ZOUK. São Paulo, 2004. 185-202p.
- [33] SANTOS, A R S. VIGLIONE, H H DE B *Geometria euclidiana plana*. UFS. 2011 disponível em <<http://w3.impa.br/~arss/cursos/GEP/Geometria%20Euclidiana%20Plana.pdf>> Acesso em: 05/02/2014, 18:00
- [34] DA SILVA, SANI CARVALHO RUTZ . *Teoria de van Hiele: contribuições para a formação de professores de Matemática*. Revista Iberoamericana de Educación (Impresa), v. 63, p. 1-10, 2013.
- [35] SED, ESTADO DE MATO GRASSO DO SUL. *Referencial curricular da rede estadual de ensino de Mato Grasso do Sul – do ensino médio*. Campo Grande-MS. 2012
- [36] SOUZA, J M. *Os Elementos de Euclides*. 2004. Disponível em:<<http://www.prof2000.pt/users/miguel/histmat/cursoapm/elementos.htm> >. Acesso em: 05/03/2014.
- [37] TIKHOMIROV, V M. *Stories about maxima and minima*. Vol I. American Mathematical Society. 1986
- [38] VALENTE, W. *A elaboração de uma nova vulgata para a modernização do ensino da matemática: aprendendo com a história da Educação Matemática no Brasil*. Bolema 17. UNESP. Rio Claro: 2002.