UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA/PROFMAT

FERNANDO ROBERTO BRAGA COLARES

APRENDENDO TRIGONOMETRIA COM GEOGEBRA

BELÉM
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA/PROFMAT

FERNANDO ROBERTO BRAGA COLARES

APRENDENDO TRIGONOMETRIA COM GEOGEBRA

Dissertação de Conclusão de Curso apresentado para obtenção do grau de Mestre em Matemática do programa de Pós-Graduação (PPGME-PROFMAT) da Universidade Federal do Pará.

Orientador: Prof. Dr. JUACI PICANÇO
Co-Orientadora: Profª.Msc. JOELMA MORBACH

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

FERNANDO ROBERTO BRAGA COLARES

APRENDENDO TRIGONOMETRIA COM GEOGEBRA

Dissertação de Conclusão de Curso apresentada para obtenção do grau de Mestre em Matemática do programa de Pós-Graduação (PPGME-PROFMAT) da Universidade Federal do Pará e avaliada pela seguinte banca examinadora:

Juaci Picanço da Silva

Profº. Dr. Juaci Picanço da Silva. (Orientador)

UFPa - Universidade Federal do Pará

Pedro Sá

Profº. Dr. Pedro Franco Sá.(Membro Externo)

UEPa - Universidade do Estado do Pará

Profª. Dra. Rúbia Gonçalves Nascimento.(Membro Interno)

UFPa - Universidade Federal do Pará

DATA DA AVALIAÇÃO: 30 / 05 / 2014

CONCEITO: Excelente

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Colares, Fernando Roberto Braga, 1980-
Aprendendo trigonometria com geogebra / Fernando Roberto Braga Colares. - 2014.

Orientador: Juaci Picanço da Silva;
Coorientadora: Joelma Morbach.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática (Mestrado Profissional), Belém, 2014.

1. Trigonometria. 2. Software educacional. 3. Ensino auxiliado por computador. 4. Sotware Geogebra. I. Título.

CDD 22. ed. 516.24

Dedico este trabalho a minha família, pelo apoio, compreensão e em especial a minha amada filha Sofia, que ela um dia compartilhe da minha paixão pela matemática.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela vida e pela saúde, sem Ele eu nada seria. Aos meus pais, Irene Zamith e Miguel Colares, por todo amor e dedicação ao longo dos anos de vida

A Susanne, minha companheira e amiga, pelas ideias e pela compreensão nos momentos de ausência. A minha filha amada que é minha inspiração. Ao meu irmão Fernando pela grande ajuda e apoio.

A família PROFMAT pelos diversos ensinamentos, debates e pelo apoio nestes dois anos de jornada. Aos amigos que de alguma forma me ajudaram na jornada.

Aos meus orientadores Prof Juaci Picanço e Profª Joelma Morbach pelas idéias, pelo incentivo e oportunidade. A Profª Rúbia pelos conselhos e paciência.

A todos os professores que com muita dedicação e paciência compartilharam seus conhecimentos. Ao grande professor e amigo Renato Lobato que durante dois anos dedicou muito tempo para ajudar a turma.

"A mente aberta a novas ideias jamais retorna ao tamanho original."

Albert Einstein.

RESUMO

Este trabalho apresenta o software GEOGEBRA como instrumento facilitador do processo de ensino e aprendizagem de trigonometria no ensino fundamental e médio. Inicialmente mostramos as janelas, os botões e as funções do software, posteriormente desenvolvemos atividades exploratórias experimentais que possibilitem o aluno descobrir ou redescobrir conceitos e teoremas matemáticos através de construções no GEOGEBRA. Neste estudo, também realizamos uma pesquisa com professores de matemática, em exercício da função, haja vista que posteriormente visamos disponibilizar para professores e alunos de escolas públicas o material que produzimos.

Palavras-chave:GEOGEBRA. Atividades exploratórias. Trigonometria

ABSTRACT

This work shows the GEOGEBRA software as a facilitator of the teaching and learning of trigonometry in elementary and secondary education. We present the software initially showing their windows, buttons and functions subsequently developed experimental exploratory activities that enable students to discover or rediscover concepts and mathematical theorems by constructions in GEOGEBRA. In this study we also conducted a survey of mathematics teachers, in exercise of the function, because later we aim to reproduce the material produced to be distributed among teachers and students in public schools.

Keyworks:GEOGEBRA. Exploratory activities. Trigonometry

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Considerações Iniciais

1.1 Introdução

Os constantes avanços da ciência em todas as áreas têm se espalhado pelos diversos locais com uma velocidade muito grande através da internet. Os livros e as demais formas de publicações impressas estão, de certa forma, sendo substituidas aos poucos. É visível que as bibliotecas escolares estão esvaziando, enquanto que os laboratórios de informática vêm sendo mais frequentados, os alunos atualmente leem livros e jornais em tablets e smartphones; temos ainda informações,segundo dados, de que todas as escolas estaduais estão equipadas com laboratórios de informática. As novas tecnologias, as quais a atual geração parece nascer conhecendo, vêm sendo uma grande aliada no ensino-aprendizagem, uma vez que ela desperta grande interesse e fascínio sobre os estudantes. Por outro lado para alguns professores estas novas tecnologias são motivos de certa inquietação por não se sentirem qualificados para usá-las .

Este trabalho visa estabelecer um elo entre alguns tópicos do conteúdo de trigonometria, abordado atualmente no ensino fundamental e médio, e a utilização do software GEOGEBRA, tendo como finalidade produzir e fornecer ao professor um material didático auto-explicativo e adequado para enriquecer as aulas e melhorar o ensino-aprendizagem de trigonometria, procura, ainda, fazer o aluno experimentar e descobrir propriedades matemáticas, reforçando, assim, a aprendizagem. Segundo Sá [11] (2009, P 14):

> "A prática metodológica do ensino de Matemática por atividades dá oportunidade ao aluno de construir sua aprendizagem, por meio da aquisição de conhecimentos e redescoberta de princípios."

Inicialmente mostraremos alguns resultados sobre uma pesquisa realizada com professores de matemática que atuam nas redes particulares e públicas, municipais e estaduais, de Belém-PA. A pesquisa foi utilizada como objeto investigativo com a finalidade de saber quantos entrevistados conhecem e sabem utilizar o software e foi também uma grande motivação para a produção deste trabalho. Apresentaremos também um breve apanhado histórico da trigonometria visando conhecer o surgimento deste importante ramo da matemática, um resumo teórico no qual sugerimos possíveis momentos para introduzir as atividades propostas que promovem uma aliança entre o uso da informática e o método pedagógico da descoberta ou redescoberta. As atividades são divididas em momentos de construção e debate entre os alunos; o professor deverá gerenciar o debate e encaminhar as conclusões. O trabalho contém ainda um breve manual do GEOGEBRA contando um pouco da história do software e mostrando as funções de seus botões e janelas.

1.2 Motivação

A motivação deste trabalho vem, incialmente, do relato de amigos e de colegas de trabalho que demonstram dificuldade de trabalhar com o software, bem como de alunos que superaram dificuldades de aprendizado utilizando o GEOGEBRA. Outro fator foi o curso de RECURSOS COMPUTACIONAIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA, ofertado pela Universidade Federal do Pará durante o mestrado PROFMAT, que foi ministrado pelo Prof. Dr. Juacir Picanço, com apoio da Prof. Msc. Joelma Morbach, no qual aprofundando o conhecimento sobre o GEOGEBRA e passamos a pensar em mais aplicações com os recursos oferecidos por ele.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivos Gerais

Produzir e distribuir para professores e alunos um material de apoio que facilite o ensino / aprendizagem de trigonometria utilizando o software GEOGEBRA; ensinar conceitos e teoremas de tópicos de trigonometria, abordados no ensino médio e fundamental, através de atividades experimentais em ambiente de geometria dinâmica.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Pesquisar situações de sala de aula nas quais possamos abordar atividades no GEOGEBRA para ensinar trigonometria.
- Facilitar o ensino de trigonometria.
- Facilitar a aprendizagem de trigonometria

- Tornar a trigonometria mais interessante para o aluno.
- Disseminar o uso do GEOGEBRA entre professores e alunos.
- Melhorar o desempenho dos alunos.
- Aumentar a frequência de utilização dos laboratórios de informática.

Capítulo 2

Pesquisa

A presente pesquisa, como dito anteriormente, foi um instrumento investigativo e também uma motivação para a criação deste trabalho, que entre outros visa disponibilizar material de consulta para os professores e atividades explorativas para alunos. A pesquisa foi realizada por meio da internet através do site www.survio.com, parte dos participantes são amigos de trabalho que foram convidados a participar da pesquisa recebendo o link, por isso em sua totalidade a forma de resposta foi o link direto (como mostra o gráfico central na figura 2.1). Obtivemos 207 visitantes dos quais 100 questionários foram analisados pelo SURVIO por estarem completos (na figura 2.1 observe gráfico à esquerda).

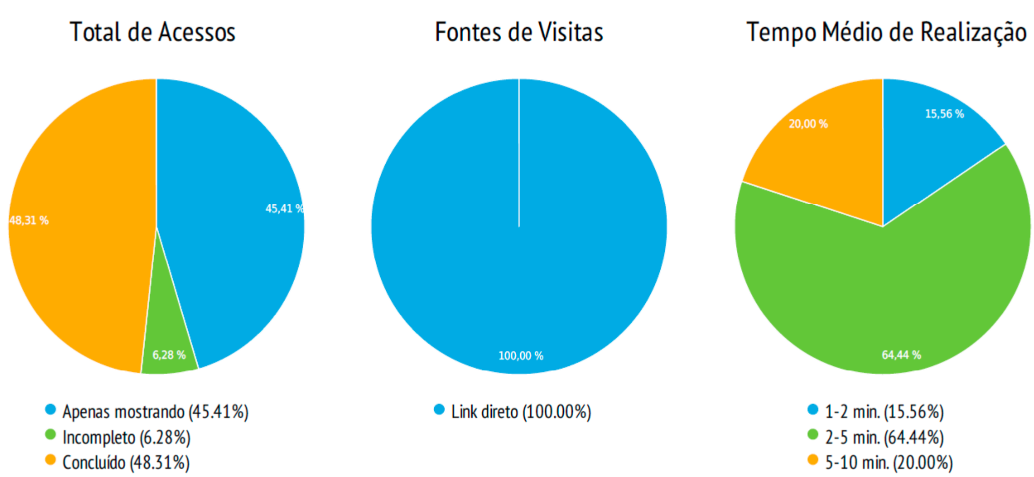


Figura 2.1: Total de Acessos

2.1 1ª Pergunta

A quanto tempo você trabalha como educador?

Resposta	Respostas	Ratio
menos de 1 ano	3	3.00%
1 a 3 anos	5	5.00%
4 a 6 anos	10	10.00%
7 a 9 anos	22	22.00%
mais de 10 anos	60	60.00%

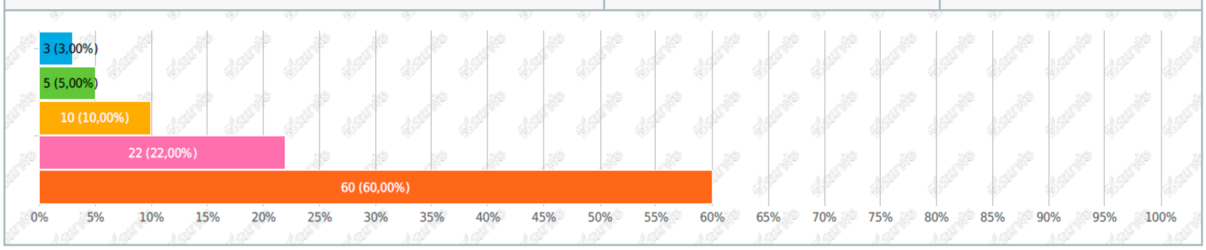


Figura 2.2: Primeira Pergunta

Note que grande parte dos profissionais consultados possuem mais de dez anos de profissão, daí, considerando o ano em que o GEOGEBRA foi criado, podemos prever que a maioria dos investigados não deve ter recebido nenhum tipo de treinamento durante a graduação.

2.2 2ª Pergunta

Você conhece o software geogebra?

Resposta	Respostas	Ratio
SIM	91	91.00%
NÃO	9	9.00%

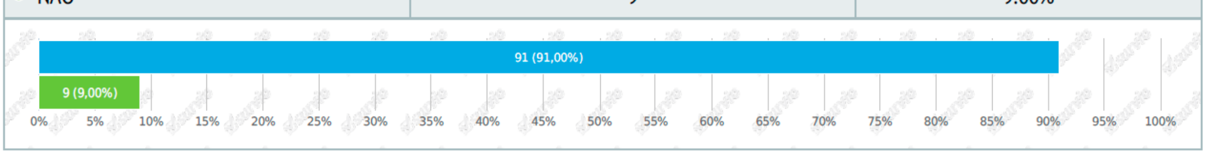


Figura 2.3: Segunda Pergunta

Observando o gráfico vemos que o software é bem conhecido entre os professores.

2.3 3ª Pergunta

Já utilizou este software em suas aulas?

Resposta	Respostas	Ratio
SIM	52	52.00%
NÃO	48	48.00%

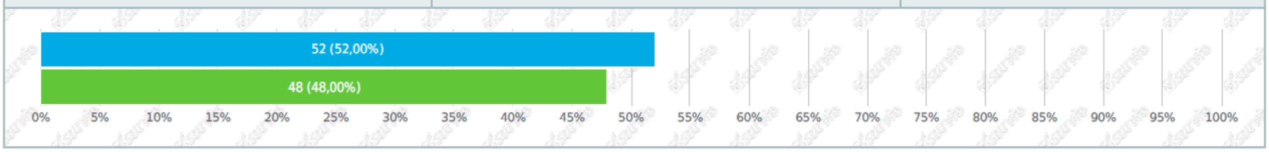


Figura 2.4: Terceira Pergunta

Veja que apesar de ser um software bem conhecido entre os consultados basicamente a metade não o utiliza nas aulas.

2.4 4ª Pergunta

O programa facilitou o processo de ensino do conteúdo?

Resposta	Respostas	Ratio
SIM	55	55.00%
NÃO	4	4.00%
NUNCA UTILIZEI O PROGRAMA	41	41.00%

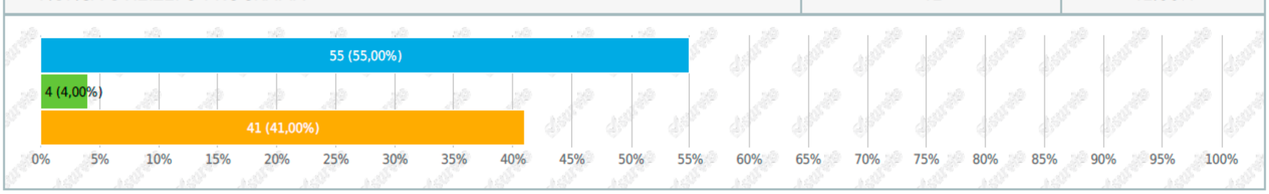


Figura 2.5: Quarta Pergunta

Com base no gráfico vemos que os professores que utilizam o GEOGEBRA consideram o programa um facilitador do ensino.

2.5 5ª Pergunta

A visualização do conteúdo através do software GEOGEBRA facilitou o aprendizado desse assunto mais do que em sala de aula, no quadro?

Resposta	Respostas	Ratio
SIM	55	55.00%
NÃO	2	2.00%
NUNCA USEI O PROGRAMA, MAS CERTAMENTE SIM!	43	43.00%

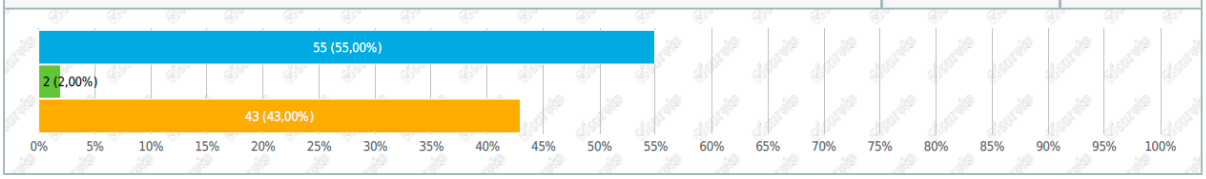


Figura 2.6: Quinta Pergunta

Observando o gráfico percebemos que o programa melhora a aprendizagem dos alunos.

2.6 6ª Pergunta

Como você considera sua habilidade no manuseio do software GEOGEBRA?

Resposta	Respostas	Ratio
EXCELENTE	11	11.00%
BOM	30	30.00%
REGULAR	36	36.00%
INSUFICIENTE	23	23.00%

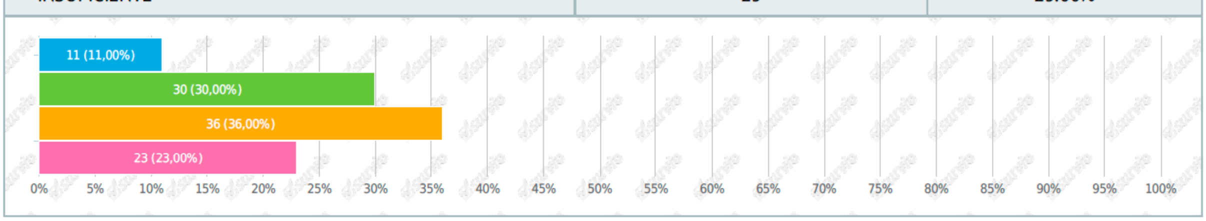


Figura 2.7: sexta Pergunta

2.7 7ª Pergunta

Quantas atividades, no software GEOGEBRA, você realizou com seus alunos nos últimos dois anos?

Resposta	Respostas	Ratio
NENHUMA	52	52.00%
UMA	2	2.00%
DUAS	7	7.00%
TRÊS	6	6.00%
MAIS DE TRÊS	33	33.00%

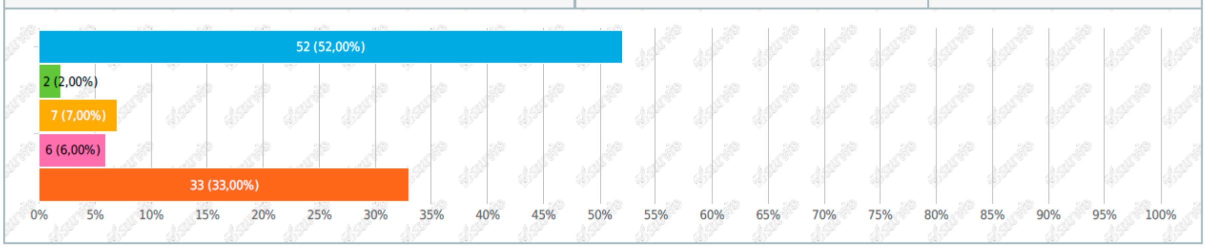


Figura 2.8: Sétima Pergunta

Através do gráfico anterior notamos que somente 23% consideram insuficientes seus conhecimentos porém mais da metade não realizou nenhuma atividade nos últimos dois anos como vemos no gráfico acima.

2.8 8ª Pergunta

Se a escola ofertasse um curso de utilização e aperfeiçoamento desse software GEOGEBRA você participaria?

Resposta	Respostas	Ratio
SIM	89	89.00%
NÃO	11	11.00%

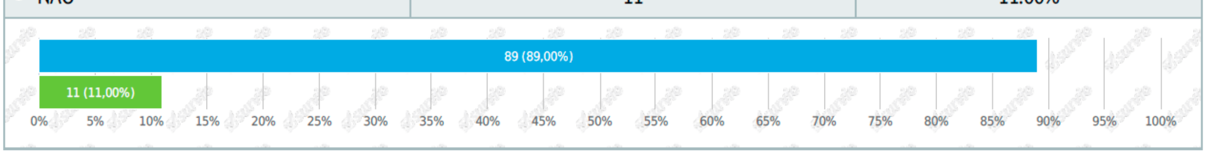


Figura 2.9: Oitava Pergunta

Veja que grande parte dos profissionais tem interesse em receber formação.

2.9 9ª Pergunta

Qual seria seu grau de satisfação (de 1 a 5) em receber da escola um material didático completo sobre esse software GEOGEBRA em sala de aula?

Resposta	Respostas	Ratio
1 - COMPLETAMENTE SATISFEITO	49	49.00%
2 - MUITO SATISFEITO	30	30.00%
3 - SATISFEITO	16	16.00%
4 - POUCO SATISFEITO	3	3.00%
5 - NADA SATISFEITO	2	2.00%

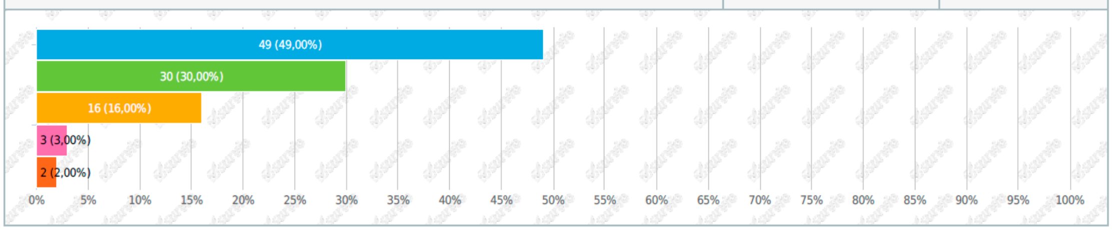


Figura 2.10: Nona Pergunta

2.10 Comentários

Fazendo uma análise geral da pesquisa, notamos que o software GEOGEBRA é muito conhecido entre os professores, porém, apesar de considerarem regular, bom ou excelente seu conhecimento não desenvolveram muitas atividades nos últimos dois anos, o que mostra uma certa insegurança; percebemos ainda que essa insegurança está ligada ao manuseio do software pois como mostra os gráficos 2.5 e 2.6 os professores reconhecem que o programa facilita o ensino e a aprendizagem.

Como vimos anteriormente, grande parte dos professores possui mais de dez anos de serviço, e uma vez que o GEOGEBRA foi criado no final de 2001 acreditamos que não devem ter recebido treinamento durante a graduação. Notamos ainda que quase que quase todos os professores têm interesse de receber formação para utilizar este software, o qual, atualmente, está presente em quase todos os laboratórios de informática das escolas, e também um material adequado para consulta e utilização em sala.

Capítulo 3

O GEOGEBRA

3.1 O Que é GEOGEBRA?

O GEOGEBRA é um software criado por Markus Hohenwarter no fim de 2001 com o objetivo principal de dinamizar o estudo e o ensino, de geometria e de álgebra facilitando investigações e verificações de conceitos e teoremas matemáticos. Devido sua característica possui grande finalidade pedagógica e é muito utilizado como tecnologia facilitadora da aprendizagem; o aplicativo é gratuito e possui portal no qual disponibiliza atividades e versões atualizadas para diferentes sistemas operacionais, atualmente se encontra na versão 4.4 disponibilizada também em português no portal.

3.2 Como Instalar o GEOGEBRA?

Acesse o site www.geogebra.org e baixe o instalador de acordo com o seu sistema operacional. Uma vez obtido o arquivo de instalação do GeoGebra, realize a instalação dele:

1. Execute o arquivo de instalação do GeoGebra, que você acabou de salvar em seu computador.
2. Selecione o idioma e clique no botão OK.
3. Clique em AVANÇAR.
4. Após a leitura dos termos do contrato de licença, marque a caixa de verificação Aceito os termos do Contrato de Licença e clique no botão AVANÇAR.

5. Continue clicando em AVANÇAR até que a instalação comece.

6. Aguarde a instalação.

7. Clique em AVANÇAR.

8. Clique em CONCLUÍDO.

3.3 Conhecendo o GEOGEBRA

Iniciando o GeoGebra você verá a janela inicial:

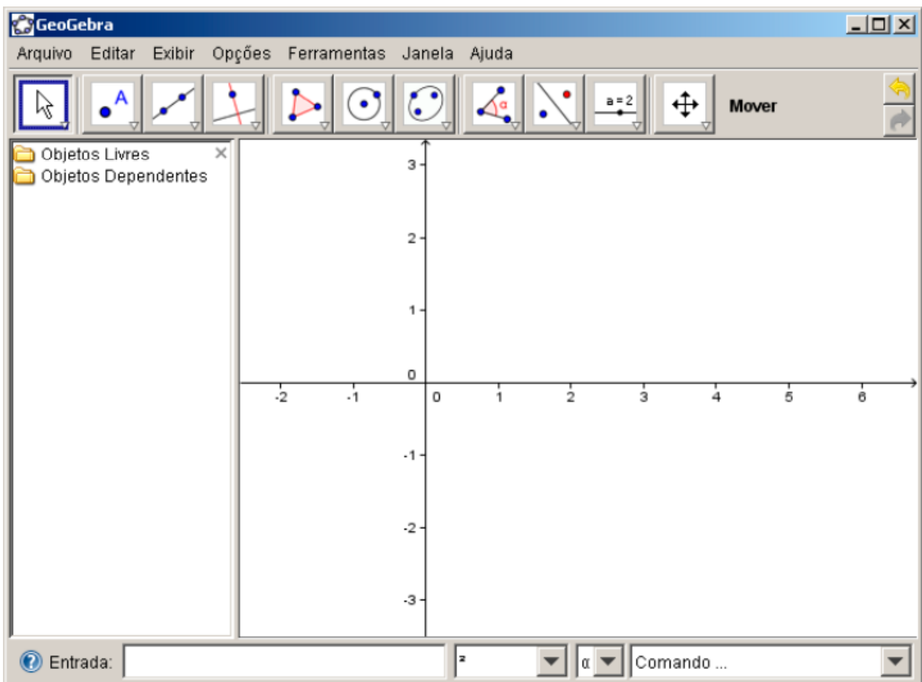


Figura 3.1: GeoGebra

Observe que a janela à esquerda é a janela de álgebra e a de geometria à direita, abaixo o campo de entrada e acima a barra de ferramentas:

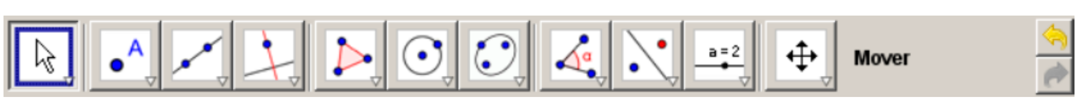


Figura 3.2: Barra de Ferramentas

Na barra de ferramentas, clicando no canto inferior direito de cada ícone abriremos uma janela que mostra algumas opções de botões. As janelas são:

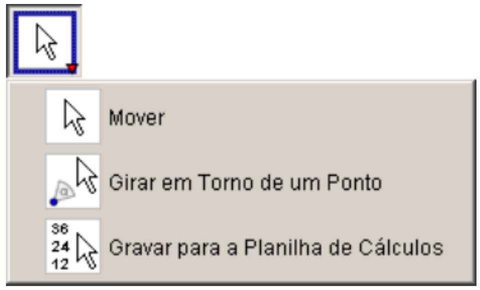


Figura 3.3: Janela 1

Acionando o botão  podemos mover qualquer objeto livre ou selecionar objetos.
Com o botão  podemos girar um objeto em torno de um ângulo.
O botão  copia dados para planilha de cálculos.

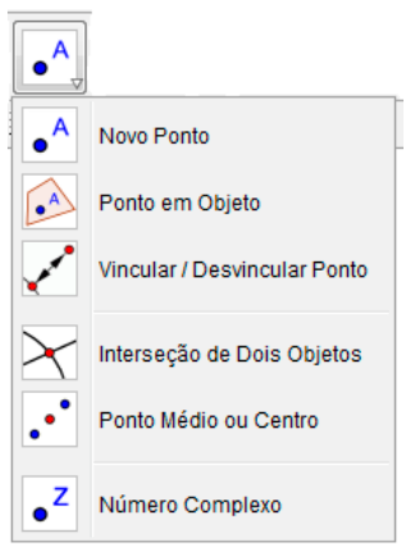
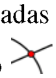


Figura 3.4: Janela 2

Utilizando o botão  podemos criar pontos clicando em qualquer lugar da janela de geometria enquanto o botão estiver acionado. Também podemos criar pontos através do campo de entrada digitando (x,y) as coordenadas e apertando enter.
O botão  permite marcar interseção de dois objetos clicando no primeiro objeto e posteriormente no segundo.

Acionando clicamos no primeiro ponto e posteriormente no segundo para obter o ponto médio, ou em um segmento para determinar o ponto médio, ou ainda para determinar o centro de uma secção cônica.

Figura 3.5: Janela 3

A partir de dois pontos, clique neste botão e nos pontos dados para construir a reta.

Dois pontos marcados determinam as extremidades de um segmento, observe que na janela algébrica aparecerá sua medida.

Marca-se a origem do segmento e digita-se a medida desejada para ele, em uma janela que se abre automaticamente.

Traça-se uma semi-reta a partir do primeiro ponto dado, passando pelo segundo.

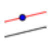
Cria-se dois pontos e traça-se o vetor com origem no primeiro ponto e ponto final no segundo.

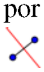
Construído um vetor, podemos construir um representante deste a partir de um ponto considerado. Para isso, marca-se um ponto (que será a origem do outro representante de v), seleciona-se esta ferramenta, clica-se sobre o vetor v já construído e, depois, sobre o ponto considerado.

Constrói-se uma reta e um ponto fora dela, clica-se na ferramenta e temos uma perpendicular à reta

Figura 3.6: Janela 4

passando por tal ponto. Isso vale para segmento e semi-reta também.

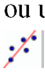
 Constrói-se uma reta e um ponto fora dela, clica-se na ferramenta e temos uma paralela à reta passando por tal ponto. Isso vale para segmento e semi-reta também.

 A partir de um segmento, clica-se nele e na ferramenta e ela vai criar uma perpendicular pelo ponto médio.

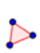
 Marcando-se três pontos A, B e C, constrói-se a bissetriz do ângulo ABC. Clicando-se sobre as duas linhas concorrentes, já traçadas, constrói-se as bissetrizes dos ângulos determinados pelas linhas.

 Podemos construí-las selecionando um cônica c e um ponto A (todas as tangentes a c por A são traçadas) ou selecionando uma linha e uma cônica.

 A reta polar ou diametral a uma cônica pode ser construída selecionando-se um ponto e uma cônica; ou uma linha ou vetor e uma cônica.

 A reta de regressão pode ser construida selecionando botão e selecionando um conjunto da pontos.

 Clica-se em um objeto, como ponto e ativa a ferramenta então podemos conhecer o lugar geométrico deste objeto.

 Clicando na janela de geometria cria-se os vértices, para fechar clique no primeiro vértice; na janela de algebra é fornecida a área.

 Crie os dois primeiros vértices, uma janela se abrirá automaticamente perguntando a quantidade de lados do polígono.

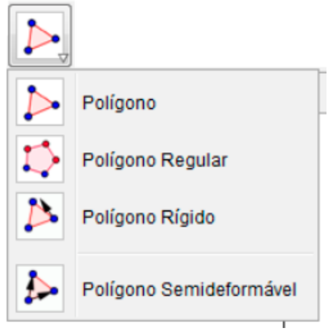


Figura 3.7: Janela 5

 Identico ao polígono com a diferença que neste caso não é possível modificar o polígono.

 Identico ao polígono com a diferença que neste caso não é possível modificar o primeiro vértice.

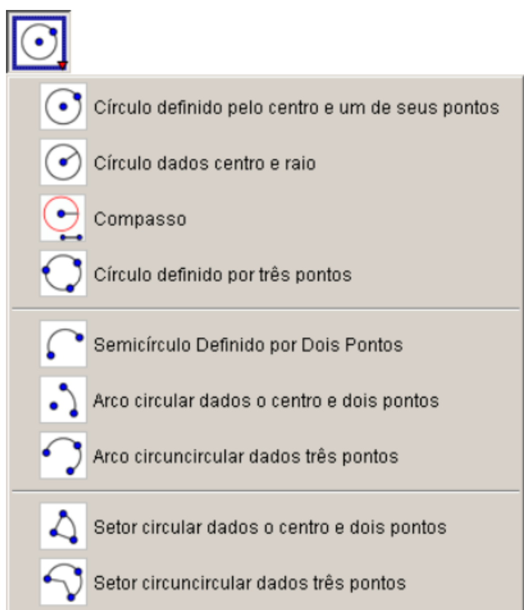
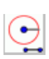
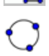


Figura 3.8: Janela 6

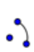
 O primeiro clique na janela de geometria produz o centro e o segundo um ponto da circunferência.

 Inicialmente definice o centro, uma janela abrirá automaticamente perguntando o raio.

 Os primeiros dois pontos definem a abertura do compasso e o terceiro o centro da circunferência.

 Crie três pontos na janela de geometria.

 Defina o ponto inicial e o final do semicirculo.

 O primeiro ponto define o centro e os demais início e fim do semicirculo; no final é indicado o compri-

mento do arco.

 Selecione os três pontos que define o arco; no final é indicado o comprimento do arco.

 Crie o centro e os pontos do setor ao final será indicado a área do setor.

 Neste caso os três pontos pertencem ao setor.

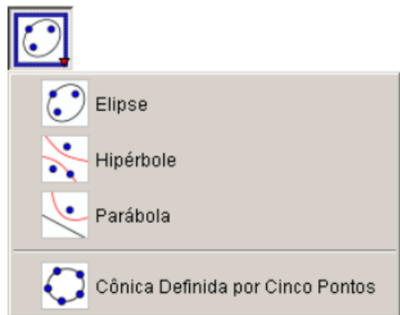
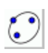
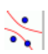


Figura 3.9: Janela 7

 Defina os focos e um ponto da elípse, na janela de algebra será indicada a equação da cônica.

 Defina os focos e um ponto da hipérbole, na janela de algebra será indicada a equação da cônica.

 Selecione o foco e depois a reta diretriz, na janela de algebra será indicada a equação da cônica.

 Crie os cinco pontos que pertencem a cônica o geogebra indicará a cônica associada qualquer que seja ela.

Figura 3.10: Janela 8

Com tal ferramenta podemos traçar ângulo entre três pontos; entre dois segmentos; entre duas retas (ou semi-retas); entre dois vetores ou ainda interiores de um polígono.

Marcando-se dois pontos e digitando-se a medida desejada para o ângulo, em uma janela que aparece automaticamente.

cm Essa ferramenta fornece, na janela algébrica a distância entre dois pontos; duas linhas ou entre um ponto e uma linha.

cm² Determina a área da figura selecionada.

Indica inclinação da reta.

{1,2} Aperte e arraste para selecionar objetos para uma lista.

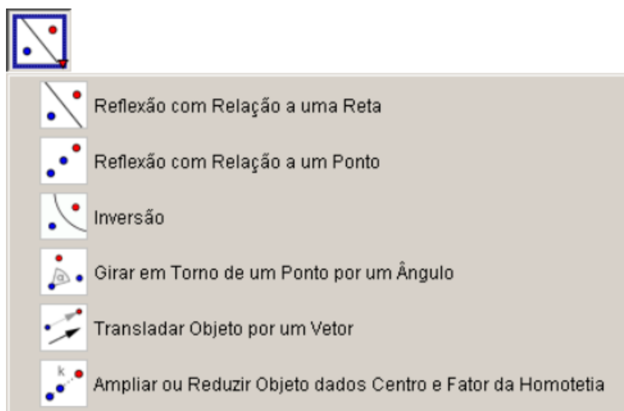


Figura 3.11: Janela 9

Com esta ferramenta faz-se reflexão de um objeto em relação a uma reta.

Reflete um ponto em relação a outro.

Faz reflexão em relação a um círculo.

Esta ferramenta gira um objeto em relação a um ponto.

Esta ferramenta translada objetos.

Crie o centro e depois na janela que se abrirá digite o fator de ampliação.

ABC Permite criar uma caixa de texto.

Para inserir imagens na janela.

Para realizar traços livres.

Figura 3.12: Janela 10

 Descrever uma função desenhando seu grafico.

 Conhecer relação entre dois objetos.

 Calcular probabilidades.

 Determina elementos da função como máximo, mínimo, raíz e etc...

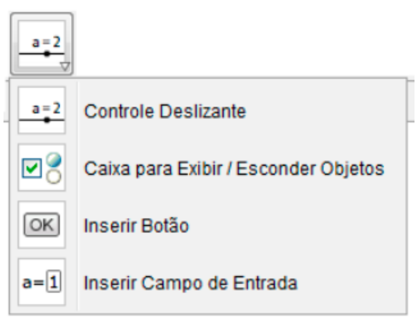


Figura 3.13: Janela 11

 Cria um controle que permite modificar valores de uma variável; clique na tela e na janela que abrirá automaticamente digite os valores máximo e mínimo bem como o incrementodo número.

 Cria um botão para esconder, ou exibir, objetos ou lista de objetos.

 Esta ferramenta posibilita a criação de um botão para ações programáveis.

 Possibilita a criação de um campo de entrada para um valor.

Figura 3.14: Janela 12

Botão que permite mover a janela de geometria.

Aumentar o zoom.

Diminuir o zoom.

Exibir ou esconder objetos.

Exibir ou esconder o nome (rótulo) do objeto.

Copia o estilo visual.

Apaga objetos.

3.4 Treinando

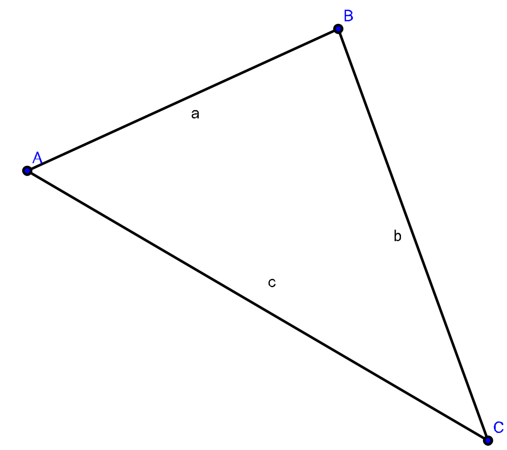
Realizaremos algumas atividades de construção para ilustrar as funções dos botões.
Trabalharemos inicialmente construindo polígonos, mostraremos duas formas de construir polígonos trabalhando com triângulos.

Atividade 3.1. *Objetivo: Familiarizar o aluno com os comandos NOVO PONTO e SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS e desenvolver habilidade de criar polígonos.*

Construção

1. *Na segunda janela acione o botão e na janela de geometria crie três pontos.*
2. *Na terceira janela clique no botão e ligue, dois a dois, os pontos criados no passo anterior.*

Você terá:



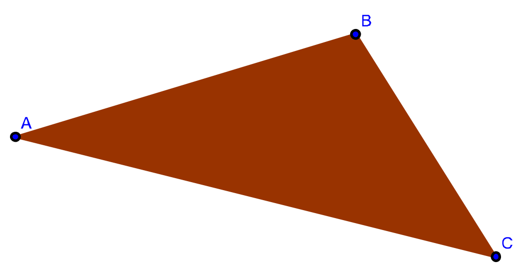
Atividade 3.2. *Objetivo: Familiarizar o aluno com o comando POLÍGONO.*

Construção

1. *Na quinta janela acione o botão*  *e na janela de geometria clique para criar os vértices.*

2. *Para que o polígono se feche clique no primeiro ponto.*

Você terá:



Perceba que no segundo modo o GEOGEBRA pinta a região interior do polígono e mostra na janela de algebra a área do polígono.

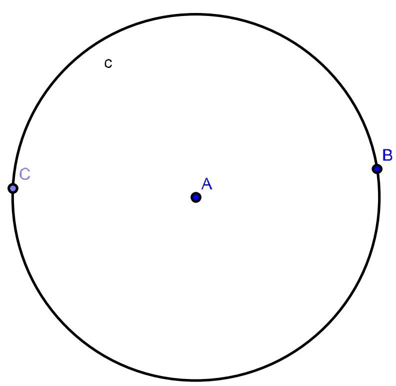
Construiremos agora circunferências e trabalharemos com animação de um ponto sobre a circunferência.

Atividade 3.3. *Objetivo: Apresentar o comando CIRCULO DADO CENTRO E UM DE SEUS PONTOS e desenvolver habilidade de animar objetos.*

Construção

1. *Na sexta janela acione o botão* .
2. *Na janela de geometria clique a primeira vez para criar o centro da circunferência e posteriormente em outro ponto que pertence a circunferência.*
3. *Na segunda janela clique no botão* A *e clique sobre a circunferência que você criou anteriormente.*
4. *Clique sobre o ponto com o botão direito do mouse.*
5. *Na janela que abrirá aperte em animar.*

Você verá que o ponto move-se somente sobre a circunferência criada:

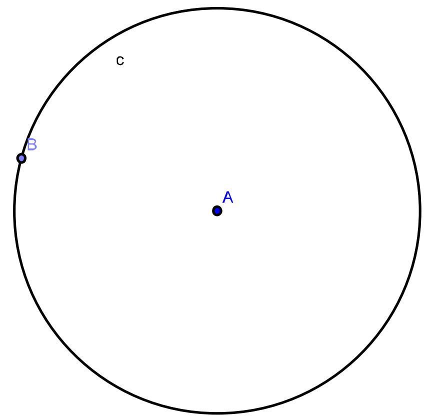


Atividade 3.4. *Objetivo: Apresentar o comando CIRCULO DADO CENTRO E O RAIO e desenvolver habilidade de animar objetos.*

Construção

1. *Abrindo a sexta janela acione o botão* *e na janela de geometria clique para criar o centro.*
2. *Na janela que abrirá digite o tamanho do raio.*
3. *Na segunda janela clique no botão* A *e clique sobre a circunferência que você criou anteriormente.*
4. *Clique sobre o ponto com o botão direito do mouse.*
5. *Na janela que abrirá acione animar.*

Você verá:



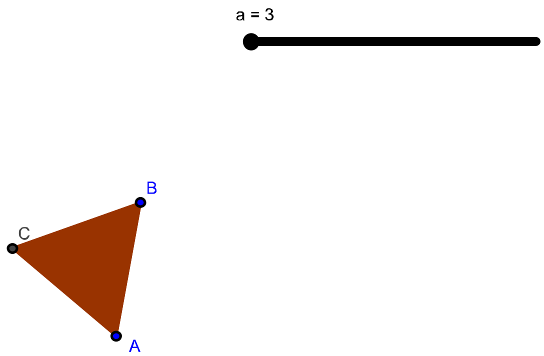
Note que o ponto que você cria sobre a circunferência possui uma coloração diferente pois ele está ligado a curva, ele se movimenta somente sobre a curva.

Atividade 3.5. *Objetivo: Desenvolver habilidade com a ferramenta CONTROLE DESLIZANTE.*

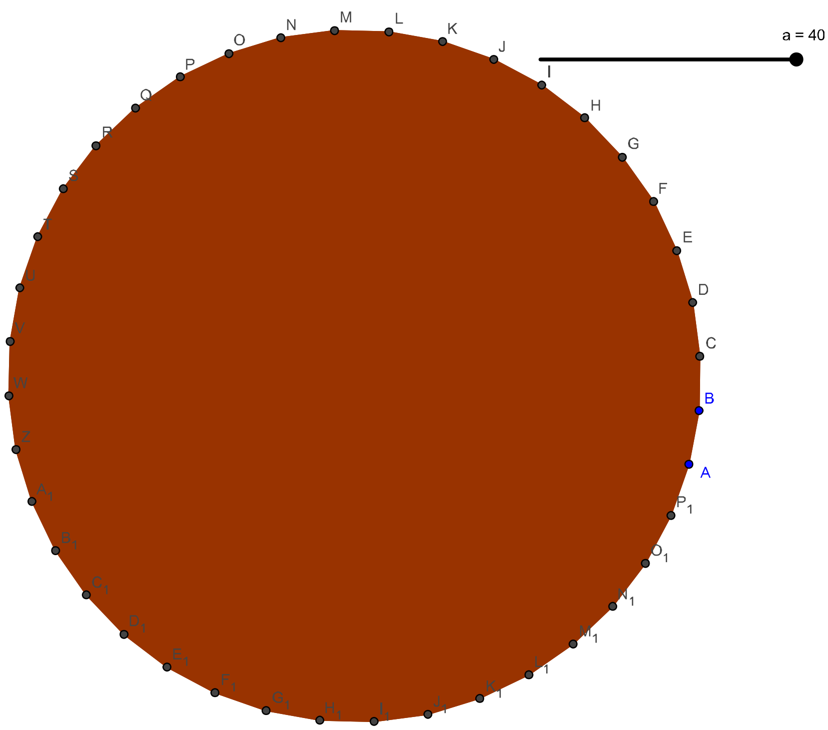
Construção

1. *Na décima primeira janela acione o botão* .
2. *Na janela de geometria clique e arraste para criar o controle.*
3. *Na janela que abrirá digite valor mínimo 3, para o máximo 40 e incremento 1.*
4. *Clique sobre o botão*  *localizado na quinta janela.*
5. *Crie os dois primeiros vértices.*
6. *Na janela que abrirá digite a letra do controle deslizante que você criou.*

Você verá inicialmente:



posteriormente movendo o controle teremos:



Observe que quanto mais lados o polígono possui mais ele se assemelha a uma circunferência

Capítulo 4

A Trigonometria

4.1 Histórico da Trigonometria

Os primeiros vestígios de trigonometria surgiram tanto no Egito quanto na Babilônia, a partir do cálculo de razões entre números e entre lados de triângulos semelhantes. No Egito, isto pode ser observado em papiros antigos que datam, aproximadamente, de 1650 a.C., e contém 84 problemas, dos quais quatro fazem menção ao seqt de um ângulo cujo conceito envolve a razão entre o afastamento horizontal e a elevação vertical do lado de uma pirâmide. Os egípcios também associavam comprimentos de sombras com as horas do dia estas idéias anunciavam a chegada das funções tangente e cotangente. Na babilônia havia grande interesse pela Astronomia, tanto por razões religiosas, quanto pelas conexões com o calendário e as épocas de plantio. É impossível estudar as fases da Lua, os pontos cardeais e as estações do ano sem usar triângulos, um sistema de unidades de medidas e uma escala.

Uma trigonometria primitiva também foi encontrada no Oriente. Na China, no reinado de Chóu-pei Suan-king, aproximadamente 1110 a.C., os triângulos retângulos eram frequentemente usados para medir distâncias, comprimentos e profundidades.

Na Grécia, os matemáticos helênicos fizeram uso da corda. Dados um círculo e um arco nesse círculo, a corda é a linha que subentende o arco. Uma bissetriz perpendicular da corda passa através do centro do círculo e bissecciona o ângulo. Uma metade da corda bisseccionada é o seno do ângulo bisseccionado, isto é, $cdr\theta = 2\text{sen}\,\frac{\theta}{2}$, e consequentemente a função seno é também conhecida como "meia corda". Devido a essa relação, muitas das identidades trigonométricas e teoremas conhecidos hoje também o eram aos matemáticos helênicos, mas na sua forma equivalente de corda.

A trigonometria na Grécia também teve contribuições de grandes nomes, como Aristarco de Samos, Hiparco de Nicéia, Menelau de Alexandria e Claudius Ptolomeu; um teorema central para o cálculo das cordas de Ptolomeu é ainda hoje conhecido como teorema de Ptolomeu e diz que a soma dos produtos dos

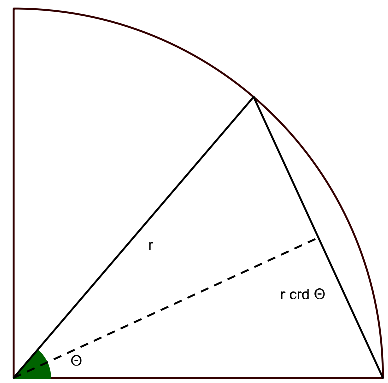


Figura 4.1: Corda

lados opostos de um quadrilátero cíclico é igual ao produto das diagonais. O teorema de Ptolomeu leva ao equivalente das quatro fórmulas de soma e diferença para senos e cossenos, conhecidas como fórmulas de Ptolomeu, apesar de que Ptolomeu na verdade usava cordas em vez de seno e cosseno. Ptolomeu ainda derivou o equivalente à fórmula da metade de um ângulo $\text{sen}^2(\frac{\theta}{2}) = \frac{1-\cos(\theta)}{2}$.

O próximo desenvolvimento da trigonometria foi realizado na Índia pelo matemático-astrônomo Aryabhata seus trabalhos foram posteriormente expandidos por outros matemáticos hindus. No século VI, Varahamihira usou as fórmulas:

$$\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1; \quad \text{sen}(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right); \quad \text{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

No século VII, Bhaskara produziu uma fórmula para calcular o seno de um ângulo agudo sem o uso de tabelas e ainda forneceu uma fórmula de aproximação para sin(x) com uma margem de erro relativa inferior a 1,9 %:

$$\text{sen}(x) \approx \frac{16x(\pi - x)}{5\pi^2 - 4x(\pi - x)}, \qquad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

Mais tarde, no século VII, Brahmagupta também contribuiu para o desenvolvimento da trigonometria,entre outras contribuições criou a Fórmula de interpolação de Brahmagupta para computar valores de seno.

Os trabalhos dos matemáticos hindus foram mais tarde traduzidos e expandidos no mundo islâmico por matemáticos árabes e persas. No século IX, al-Khwarizmi produziu tabelas precisas de senos e cossenos e a primeira tabela de tangentes. Ele também foi um pioneiro na trigonometria esférica.Pelo século X, na obra de Abu al-Wafa' al-Buzjani, matemáticos islâmicos estavam usando todas as seis funções rigonométricas, depois de descobrir as funções secante, cotangente e cossecante. Abu al-Wafa tinha tabelas em intervalos de $0.25°$, com precisão de 8 casas decimais e tabelas bastante precisas de valores de tangentes. Ele também desenvolveu a fórmula $\text{sen}(2x) = 2\text{sen}(x)\cos(x)$, no século X, Al-Battani foi responsável por estabelecer um número importante de relações trigonométricas como:

$$\text{tg}\,(x) = \frac{\text{sen}\,(x)}{\cos(x)}; \quad \sec(x) = \sqrt{1 + \text{tg}^{\,2}(x)}$$

A trigonometria ainda contou com contribuições na China durante a dinastia Tong e durante a dinastia Song e durante a Europa renascentista, quando Georg Joachim Rheticus, um aluno de Nicolau Copérnico, foi provavelmente o primeiro a definir as funções trigonométricas diretamente em termos de triângulos retângulos, ao invés de círculos, com tabelas para todas as seis funções trigonométricas. Esse trabalho foi concluído pelo aluno de Rheticus, Valentin Otho, em 1596.

4.2 Trigonometria no Triângulo Retângulo

A trigonometria no triângulo retângulo é estudada na 8ª série (9º ano) do ensino fundamental e no segundo ano do ensino médio, como preparação para o estudo das razões trigonométricas. Inicialmente realizam-se os estudos sobre as propriedades geométricas do triângulo retângulo para depois estudar as propriedades trigonométricas.

4.2.1 Propriedades Geométricas

As propriedades geométricas derivam basicamente de semelhança de triângulo, conforme mostraremos. Observe a figura:

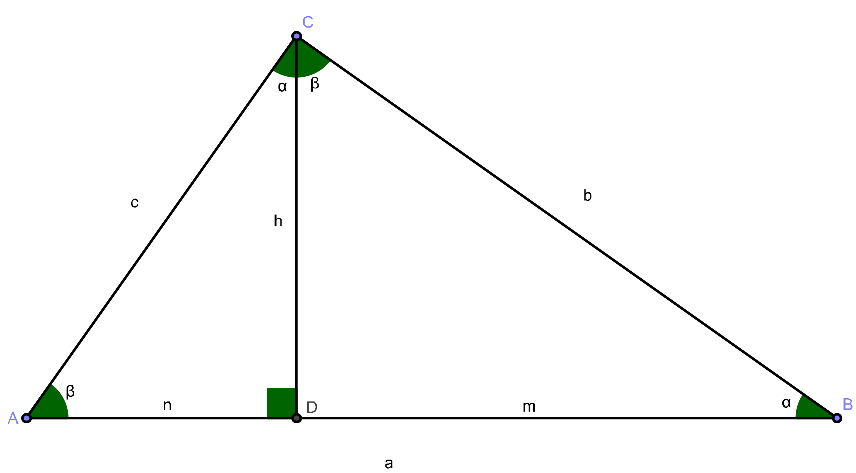


Figura 4.2: Triângulo Retângulo

observe que $\alpha \ \ e \ \ \beta$ são complementares daí vem que $\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle BCD$ pois apresentam ângulos congruentes dois a dois, assim segue:

Propriedade 1

Da semelhança de $\triangle ABC$ com $\triangle BCD$ vem que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{m} \Longrightarrow b^2 = ma \tag{4.1}$$

Da semelhança de $\triangle ABC$ com $\triangle ACD$ vem que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \Longrightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{n} \Longrightarrow c^2 = na \tag{4.2}$$

De 4.1 e 4.2 vemos que no triângulo retângulo o cateto é a média geométrica entre a hipotenusa e a projeção do cateto sobre a hipotenusa.

Propriedade 2

Da semelhança de $\triangle ABC$ com $\triangle ACD$ vem que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{h} \Longrightarrow ah = bc \tag{4.3}$$

ou seja, o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a hipotenusa.

Propriedade 3

Da semelhança de $\triangle BCD$ com $\triangle ACD$ vem que

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} \Longrightarrow \frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Longrightarrow ah = bc \tag{4.4}$$

A altura relativa à hipotenusa é a media geométrica das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

Propriedade 4

Observe que somando membro a membro as equações 4.1 e 4.2 teremos:

$$b^2 + c^2 = am + an \Longrightarrow b^2 + c^2 = a(m+n)$$

note ainda que $a = m + n$, substituindo na equação acima temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{4.5}$$

que é o conhecido teorema de Pitágoras.

Neste momento podemos apresentar o teorema de Pitágoras para o aluno através da atividade.

Atividade 4.1. *Objetivo: Descobrir o teorema de Pitágoras.*

Construção

1. *Acionando o botão*  *crie uma semicircunferência clicando em dois pontos na janela de visualização.*
2. *Com a ferramenta*  *selecionada crie um ponto sobre a semicircunferência criada no item 1.*
3. *Selecionando a ferramenta*  *ligue os três pontos, dois a dois, formando um triângulo retângulo.*
4. *Clicando com o botão direito do mouse sobre a semicircunferência aperte no botão*  *para esconder a semicircunferência.*
5. *Com a ferramenta*  *selecionada movimente os pontos.*

Questionário para o Aluno

- *O triângulo criado é retângulo sempre?*
- *Movimentando os pontos complete a tabela, onde a é o maior lado (hipotenusa), b e c os demais (catetos).*

a	b	c	c^2	b^2	a^2	$b^2 + c^2$

- *Comparando as duas últimas colunas o que você percebeu?*
- *Discuta com os colegas e compare os resultados.*
- *Como podemos escrever o descobrimos?*

Atividade 4.2. *Objetivo: Descobrir relações para triângulos não retângulos.*

Construção

1. *Com a ferramenta*  *selecionada crie três pontos.*
2. *Selecionando a ferramenta*  *ligue os três pontos, dois a dois, formando um triângulo.*
3. *Com a ferramenta*  *selecionada movimente os pontos.*

Questionário para o Aluno

- *Movimentando os pontos complete a tabela, onde a é o maior lado, com os valores para três triângulos acutângulo e três obtusângulo.*

Triângulo	a	b	c	c^2	b^2	a^2	b^2+c^2
Acutângulo							
Acutângulo							
Acutângulo							
Obtusângulo							
Obtusângulo							
Obtusângulo							

- *Comparando as duas ultimas colunas o que você percebeu?*
- *Discuta com os colegas e compare os resultados.*
- *Como vamos escrever o que você descobriu?*

Neste momento, ao final das duas atividades, deveremos instigar o aluno a concluir que $a^2 = b^2 + c^2$ se, e somente se o triângulo é retângulo.

Atividade 4.3. *Objetivo: Descobrir propriedade de áreas de figuras construídas sobre os lados do triângulo retângulo.*

Construção

1. *Acionando a ferramenta*  *clique sobre o ponto (0,0) e posteriormente sobre um ponto qualquer no eixo y.*
2. *Ainda com a ferramenta*  *selecionada clique sobre o ponto que você criou no eixo y e em seguida em um ponto qualquer do eixo x.*

3. *Utilizando a mesma ferramenta feche o triângulo clicando sobre o ponto do eixo x e sobre o primeiro ponto criado o ponto (0,0).*

4. *Com o botão*  *clique sobre a janela de visualização e crie um número inteiro, o qual nomearemos v, com valor mínimo 3 e máximo 12.*

5. *Selecionando o botão*  *clique sobre o ponto A (0,0) e depois sobre o ponto B (ponto sobre o eixo y), posteriormente na janela que abrirá perguntando a quantidade de lados digite v.*

6. *Repita o procedimento anterior para os pontos B e C, e em seguida C e A.*

Questionário para o Aluno

- *Modificando o valor de "v"no controle deslizante complete a tabela observando a janela de álgebra.*

Valor de V	*pol1*	*pol2*	*pol3*	*pol1+pol3*
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				

- *Observe os valores da coluna 3 e da coluna 5. O que você descobriu?*
- *Modifique o tamanho do triângulo e observe.*
- *Discuta com os colegas e compare.*
- *Como podemos escrever o que você descobriu?*

4.2.2 Propriedades Trigonométricas

Para provar as propriedades trigonométricas no triângulo retângulo considere o ciclo trigonométrico (circunferência de raio unitário e centro no eixo cartesiano)de centro em um vértice do triângulo conforme a figura:

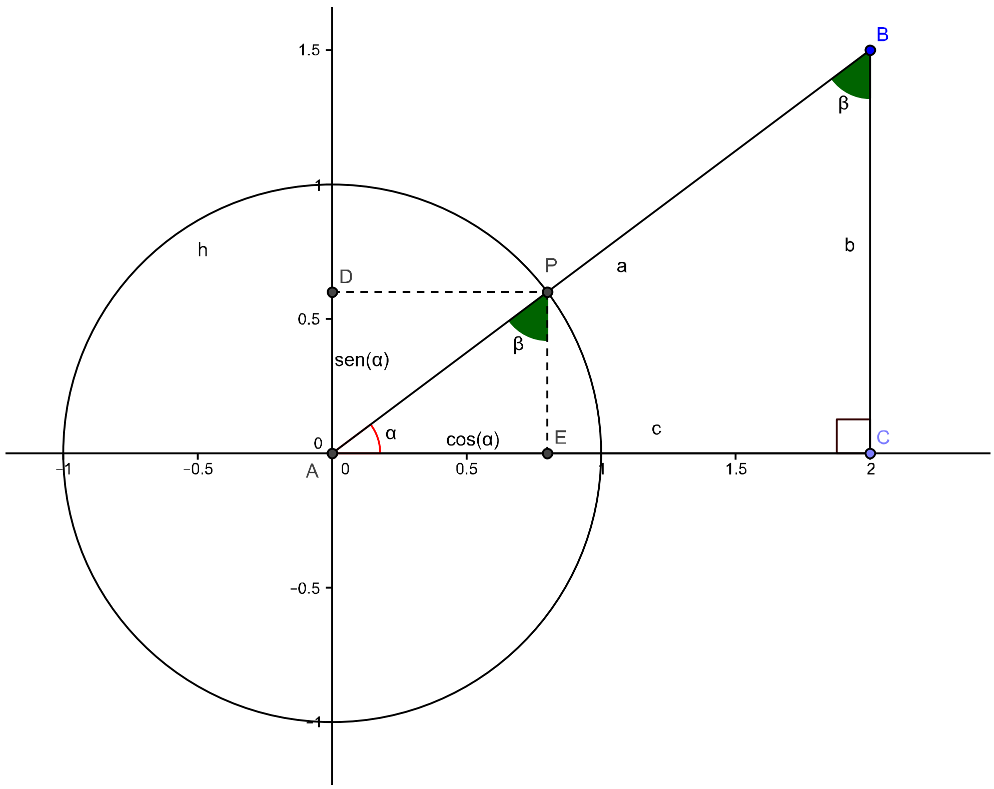


Figura 4.3: Trigonometria no Triângulo

Note que o $\triangle ABC$ é semelhante ao $\triangle APE$ pois apresentam os mesmos ângulos, da semelhança vem que:

$$\frac{\overline{PE}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Longrightarrow \frac{\text{sen}\,(\alpha)}{1} = \frac{b}{a} \Longrightarrow \text{sen}\,(\alpha) = \frac{b}{a} \tag{4.6}$$

Lembre-se que o ciclo trigonométrico é uma circunferência de raio unitário por isso $\overline{AP} = 1$ então temos ainda

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Longrightarrow \frac{\cos(\alpha)}{1} = \frac{c}{a} \Longrightarrow \cos(\alpha) = \frac{c}{a} \tag{4.7}$$

$$\frac{\overline{PE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Longrightarrow \frac{\text{sen}\,(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{b}{c} \Longrightarrow \text{tg}\,(\alpha) = \frac{b}{c} \tag{4.8}$$

é válido ressaltar que como vimos anteriormente que Al-Battani já havia chegado a relação $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ porem posteriormente provaremos a relação.

Assim generalizando a ideia desenvolvida em 4.6, 4.7 e 4.8 vemos que dado um triângulo retângulo qualquer de ângulos agudos α e β teremos:

$$\text{sen}\,(\alpha) = \cos(\beta) = \frac{\text{Cateto Oposto à }\ \alpha}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\cos(\alpha) = \text{sen}\,(\beta) = \frac{\text{Cateto Adjacente à }\ \alpha}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\text{tg}\,(\alpha) = \frac{1}{\text{tg}\,(\beta)} = \frac{\text{Cateto Oposto à }\ \alpha}{\text{Cateto Adjacente à }\ \alpha}$$

4.3 Trigonometria no Triângulo Qualquer

Abordaremos agora propriedades trigonométricas válidas para triângulos retângulos ou não.

4.3.1 Lei dos Cossenos

Em qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual a soma do quadrado dos dois outros, menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

Para demonstrar dividiremos para triângulos acutângulos (com ângulos menores que 90º) e obtusângulos (com um ângulos maior que 90º).

Demonstração

1º caso: considere um $\triangle ABC$ acutângulo.

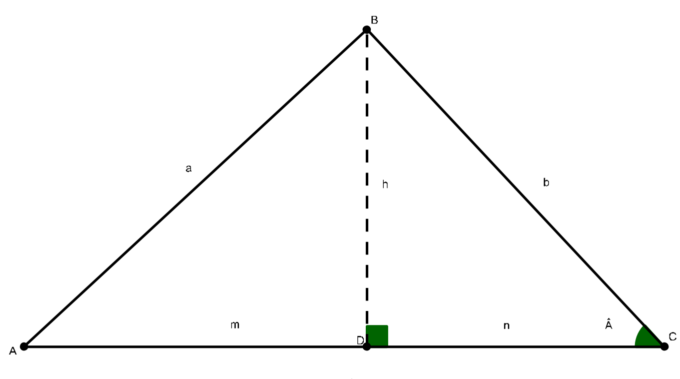


Figura 4.4: Triângulo Acutângulo

No $\triangle ABD$ que é retângulo, aplicando o Teorema de Pitágoras 4.5 temos:

$$a^2 = h^2 + m^2 \tag{4.9}$$

Do $\triangle BCD$ vem

$$h^2 = b^2 - n^2 \tag{4.10}$$

Substituindo 4.10 em 4.9 e usando o fato que $m = c - n$ vem que:

$$a^2 = b^2 - n^2 + (c - n)^2 \Longleftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2cn$$

como $n = b\cos(\hat{A})$ podemos escrever:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$$

Analogamente podemos mostrar

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\hat{B})$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\hat{C})$$

2º caso: considere um $\triangle ABC$ obtusângulo

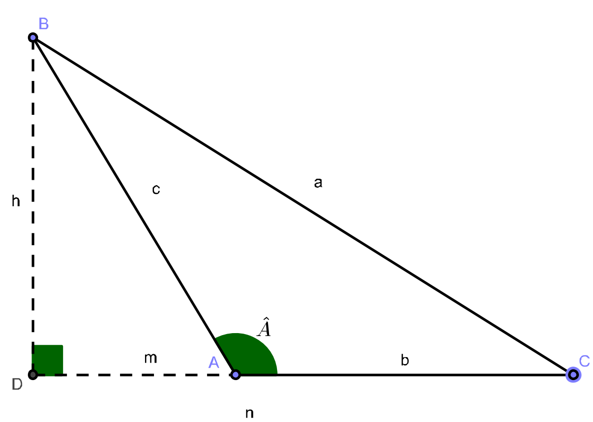


Figura 4.5: Triângulo Obtusângulo

No $\triangle BCD$ aplicando o Teorema de Pitágoras 4.5

$$a^2 = n^2 + h^2 \tag{4.11}$$

Por outro lado no $\triangle ABD$ aplicando Pitágoras temos:

$$c^2 = m^2 + h^2 \Longleftrightarrow h^2 = c^2 - m^2 \tag{4.12}$$

Subistituindo 4.12 em 4.11 e lembrando que $n = m + b$ vem que

$$a^2 = (m+b)^2 + c^2 - m^2 \Longleftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2mb$$

Do $\triangle ABD$ vem que $m = c\cos(180 - \hat{A})$ e como $\cos(180 - \hat{A}) = -\cos(\hat{A})$ escrevemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$$

Analogamente temos ainda

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\hat{B})$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\hat{C})$$

Observe que no caso do triângulo retângulo a lei dos cossenos se reduz ao Teorema de Pitágoras 4.5 ou uma variação.

4.3.2 Lei dos senos

Em qualquer triângulo a razão entre a medida do lado e o seno do ângulo oposto ao lado é constante e igual ao diâmetro da circunferência circunscrita.

Demonstração

Considere a figura

observe que $B\hat{A}C \equiv B\hat{A}'C \equiv \hat{A}$ pois ambos são ângulos inscritos na mesma circunferência e possuem o mesmo arco; assim como $\triangle BA'C$ é retângulo temos que

$$\text{sen}\,(\hat{A}) = \frac{a}{2R} \Longrightarrow 2R = \frac{a}{\text{sen}\,(\hat{A})}$$

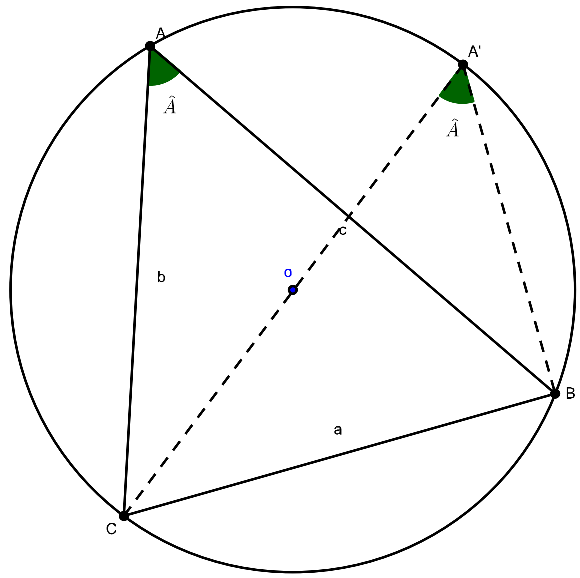


Figura 4.6: Lei dos senos

de modo análogo para os vértices B e C vem

$$\frac{a}{\text{sen}\,(\hat{A})} = \frac{b}{\text{sen}\,(\hat{B})} = \frac{c}{\text{sen}\,(\hat{C})} = 2R \tag{4.13}$$

4.4 Ciclo Trigonométrico

Definição 4.4.1. *Tomemos sobre o sistema de eixos cartesianos no plano uma circunferência de centro em* $(0,0)$ *e raio unitário* λ*, note que o comprimento da circunferência é igual a* 2π *. Assim considere a seguinte aplicação de* $\mathbb{R} \longrightarrow \lambda$ *isto é para cada valor real x associa um único ponto P pertencente a* λ *,* $x \longmapsto P$ *:*

1. *Se x=0 então P é o ponto* $(1,0) \in \lambda$*.*

2. *Se x>0 então a partir de* $(1,0)$ *caminhamos sobre* λ *no sentido anti-horário um comprimento x sendo P o final do percurso.*

3. *Se x<0 então a partir de* $(1,0)$ *caminhamos sobre* λ *no sentido horário um comprimento |x| sendo P o final do percurso.*

A circunferência λ *seguida da aplicação é chamada de ciclo trigonométrico.*

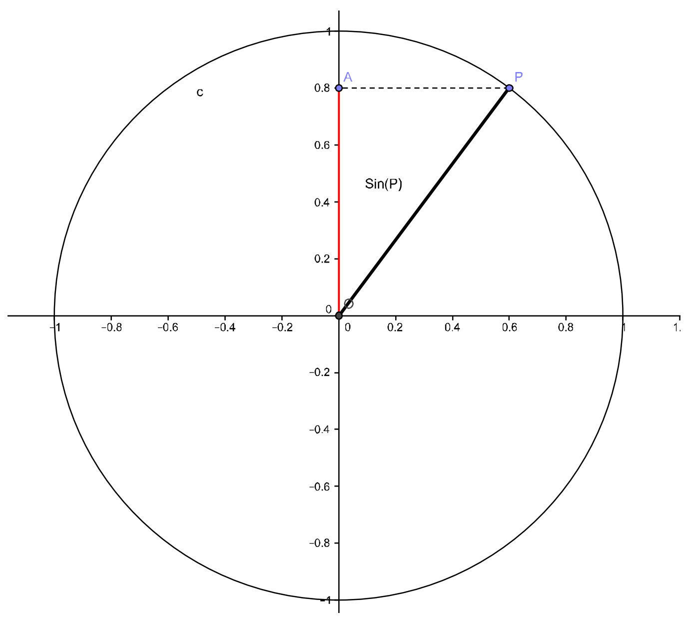
Note que se P é imagem de um ponto x_0 ele também é imagem de $x_0 + 2\pi, x_0 + 4\pi, ..., x_0 + 2k\pi$ com $k \in \mathbb{N}$.

4.5 Funções Trigonométricas

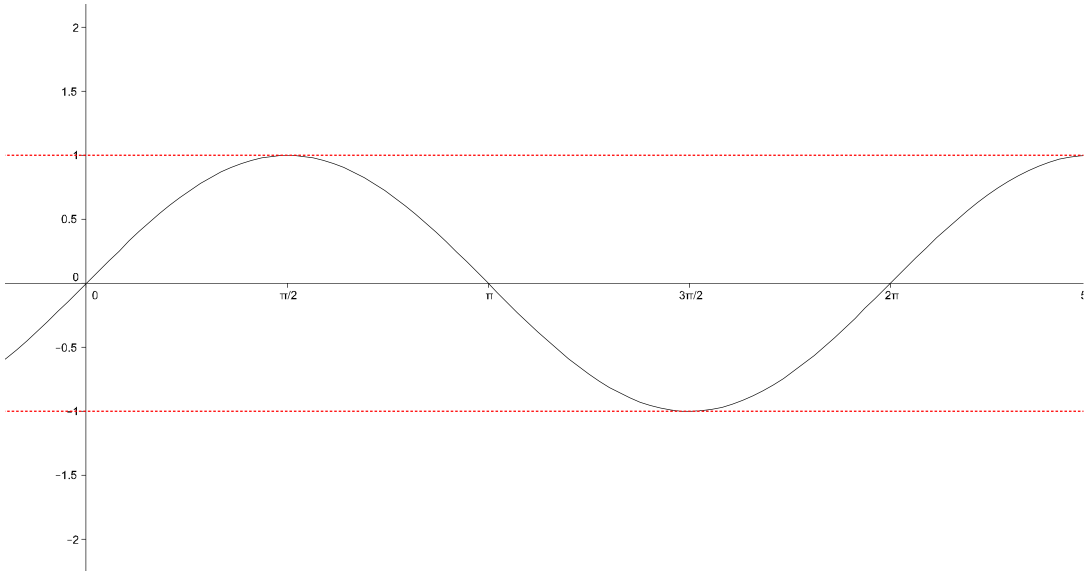
Definição 4.5.1. *Uma função* $f : A \longrightarrow B$ *é dita periódica se existe um real p>0 tal que* $f(x+p) = f(x)$ *para todo x pertencente aos reais.*

4.5.1 Função Seno

Definição 4.5.2. *Dado um número real x e P sua imagem no ciclo trigonométrico (4.4.1) denominamos por seno de P (e denotamos* $sin(P)$*) o valor da coordenada y do ponto P no eixo cartesiano.*



Denominamos de função Seno a função $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ *que para cada valor de P associa o número real que representa a coordenada y do ponto P no eixo cartesiano* $(sen\,(P))$



Note: A função seno é uma função periódica uma vez que existe $p > 0$ tal que $f(x + p) = f(x)$.

$$\text{sen}\,(x + p) = \text{sen}\,(x)\cos(p) + \text{sen}\,(p)\cos(x) = \text{sen}\,(x)$$

para que a igualdade ocorra basta $\cos(p) = 1$ e sen $(p) = 0$ o que ocorre quando $p = 2k\pi$ com $p \in \mathbb{N}$

Atividade 4.4. *Objetivo: Familiarizar o aluno com o gráfico da função seno.*

Construção

1. *Acionando o botão*  *marque o ponto (0,0) e posteriormente na janela que surgirá digite 1 para o valor do raio.*

2. *Com o botão*  *selecionado clique em um ponto sobre a circunferência que você criou no passo anterior.*

3. *Acionando o botão*  *crie um segmento partindo do centro da circunferência ao ponto criado no item anterior.*

4. *Selecione o botão*  *clique sobre o eixo X e posteriormente sobre o segmento criado no item acima.*

5. *Com o botão*  *selecionado clique no ponto (1,0) na janela de visualização.*

6. *Acionando a ferramenta*  *clique inicialmente no centro e posteriormente no ponto criado no item anterior e no ponto B.*

7. *No campo de entrada no fundo da janela digite* $(d, y(B))$*, onde B é o ponto criado no passo 2 e d o arco, e aperte enter.*

8. *Clique no ponto criado no passo 5 com o botão direito do mouse; na janela que abrirá acione o modo habilitar rastro.*

9. *Clique no ponto criado no passo 2 (ponto sobre a circunferência) com o botão direito do mouse; na janela que abrirá acione o botão animar.*

10. *Clique na janela de visualização com o botão direito do mouse, acione o campo janela de visualização. Posteriormente na aba eixo X marque distância e selecione* $\frac{\pi}{2}$.

Questionário do Aluno

- *O gráfico descrito pelo ponto criado no passo 5 possui como imagem todos os reais?*
- *Qual o máximo valor assumido pelo gráfico?*
- *Qual o mínimo valor assumido pelo gráfico?*
- *Quais os intervalos de crescimento e decrescimento da função?*
- *Qual o período da função?*

A função Seno mais completa seria da forma $f(x) = A + B\text{sen}\,(Cx + D)$; para este caso trabalharemos através do Geogebra.

Atividade 4.5. *Objetivo: Estudar os efeitos dos parâmetros na função seno.*
Construção

1. *Acionando o botão crie um número "a"com incremento de 0.1 variando de -3 a 3.*

2. *Acionando o botão crie um número "b"com incremento de 0.1 variando de -3 a 3.*

3. *Acionando o botão crie um número "c"com incremento de 0.5 variando de -3 a 3.*

4. *Acionando o botão crie um número "d"com incremento de* $\frac{\pi}{2}$ *variando de* -2π *a* 2π.

5. *No campo de entrada digite a+b*sen(c*x+d) e aperte enter.*

Questionário do Aluno

- *Mude os valores de "a"mantendo os demais constantes e complete a tabela.*

a	*PERÍODO*	*IMAGEM*

- *Mude os valores de "b"mantendo os demais constantes e complete a tabela.*

b	*PERÍODO*	*IMAGEM*

- *Mude os valores de "c"mantendo os demais constantes e complete a tabela.*

c	*PERÍODO*	*IMAGEM*

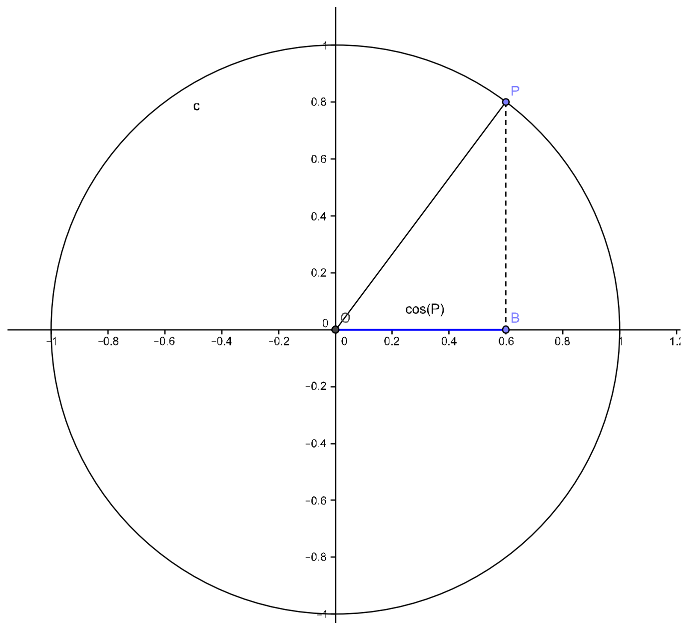
- *Mude os valores de "d"mantendo os demais constantes e observe o gráfico.*

d	*PERÍODO*	*IMAGEM*

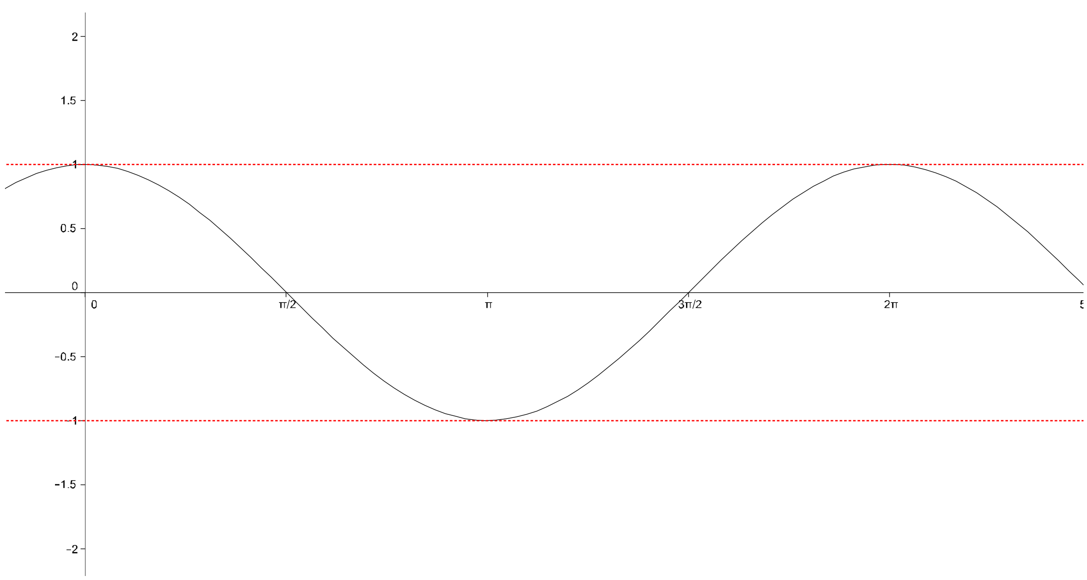
- *O que você percebeu em cada caso?*
- *Converse com os demais alunos e compare os resultados. Como podemos escrever os resultados?*

4.5.2 Função Cosseno

Definição 4.5.3. *Dado um número real x e P sua imagem no ciclo trigonométrico (4.4.1) denominamos por cosseno de P (e denotamos* $cos(P)$*) o valor da coordenada x do ponto P no eixo cartesiano.*



Denominamos de função Cosseno a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que para cada valor de P associa o número real que representa a coordenada x do ponto P no eixo cartesiano* $(\cos(P))$



Atividade 4.6. *Objetivo: Familiarizar o aluno com o gráfico da função cosseno.*

Construção

1. *Acionando o botão*  *marque o ponto (0,0) e posteriormente na janela que surgirá digite 1 para o valor do raio.*

2. *Com o botão*  *selecionado clique em um ponto sobre a circunferência que você criou no passo anterior.*

3. *Acionando o botão*  *crie um segmento partindo do centro da circunferência ao ponto criado no item anterior.*

4. *Selecione o botão*  *clique sobre o eixo X e posteriormente sobre o segmento criado no item acima.*

5. *Com o botão*  *selecionado clique no ponto (1,0) na janela de visualização.*

6. *Acionando a ferramenta*  *clique inicialmente no centro e posteriormente no ponto criado no item anterior e no ponto B.*

7. *No campo de entrada no fundo da janela digite* $(d, x(B))$*, onde B é o ponto criado no passo 2 e d o arco, e aperte enter.*

8. *Clique no ponto criado no passo 5 com o botão direito do mouse; na janela que abrirá acione o modo habilitar rastro.*

9. *Clique no ponto criado no passo 2 (ponto sobre a circunferência) com o botão direito do mouse; na janela que abrirá acione o botão animar.*

10. *Clique na janela de visualização com o botão direito do mouse, acione o campo janela de visualização. Posteriormente na aba eixo X marque distância e selecione* $\frac{\pi}{2}$.

Questionário do Aluno

- *O gráfico descrito pelo ponto criado no passo 5 possui como imagem todos os reais?*
- *Qual o máximo valor assumido pelo gráfico?*
- *Qual o mínimo valor assumido pelo gráfico?*
- *Quais os intervalos de crescimento e decrescimento da função?*
- *Qual o período da função?*

A função Cosseno mais completa seria da forma $f(x) = A + B\cos(Cx + D)$; para este caso trabalharemos através do Geogebra.

Atividade 4.7. *Objetivo: Estudar os efeitos dos parâmetros na função cosseno.*

Construção

1. *Acionando o botão a=2 crie um número "a"com incremento de 0.1 variando de -3 a 3.*
2. *Acionando o botão a=2 crie um número "b"com incremento de 0.1 variando de -3 a 3.*
3. *Acionando o botão a=2 crie um número "c"com incremento de 0.5 variando de -3 a 3.*
4. *Acionando o botão a=2 crie um número "d"com incremento de* $\frac{\pi}{2}$ *variando de* -2π *a* 2π.
5. *No campo de entrada digite a+b*cos(c*x+d) e aperte enter.*

Questionário do Aluno

- *Mude os valores de "a"mantendo os demais constantes e complete a tabela.*

a	*PERÍODO*	*IMAGEM*

- *Mude os valores de "b"mantendo os demais constantes e complete a tabela.*

b	*PERÍODO*	*IMAGEM*

- *Mude os valores de "c"mantendo os demais constantes e complete a tabela.*

c	*PERÍODO*	*IMAGEM*

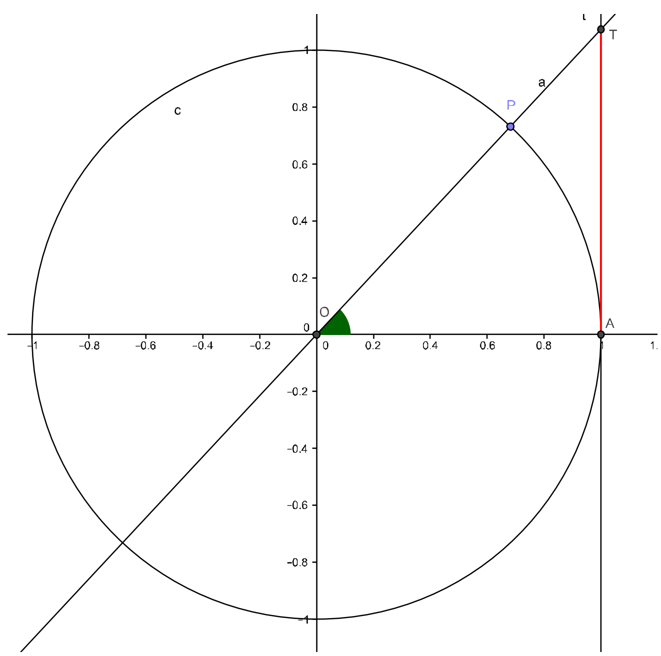
- *Mude os valores de "d"mantendo os demais constantes e observe o gráfico.*

d	*PERÍODO*	*IMAGEM*

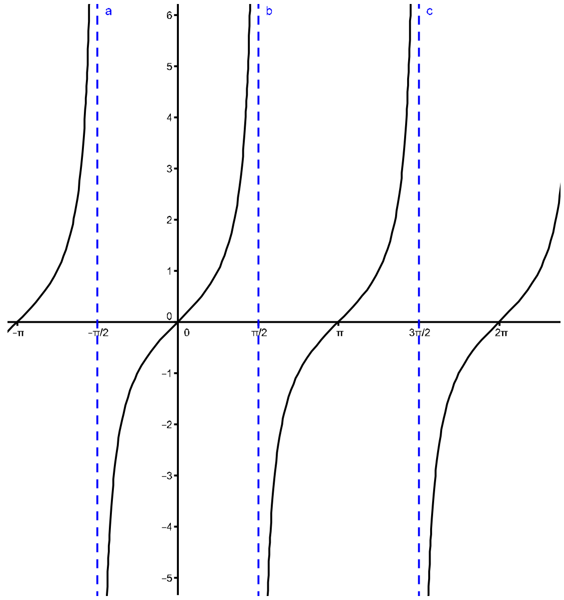
- *O que você percebeu em cada caso?*
- *Converse com os demais alunos e compare os resultados. Como podemos escrever os resultados?*

4.5.3 Função Tangente

Definição 4.5.4. *Dado um real x, com $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, sendo P sua imagem no ciclo. Considere a reta que contem o segmento $\overline{OP}$ e a reta t tangente ao ciclo no ponto A. Denominamos de tangente de x e representamos por $(tg\,(x))$ a medida do segmento $\overline{AT}$*



Denominamos de função tangente a função $f\,:\,\boldsymbol{R} - \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow \boldsymbol{R}$ que para cada valor de P associa o número real que representa a medida do segmento $\overline{AT}$ na reta tangente.

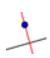


Atividade 4.8. *Objetivo: Familiarizar o aluno com o gráfico da função tangente.*

Construção

1. *Acionando o botão*  *marque o ponto (0,0) e posteriormente na janela que surgirá digite 1 para o valor do raio.*

2. *Com o botão*  *selecionado clique em um ponto sobre a circunferência que você criou no passo anterior.*

3. *Ative o botão*  *clique sobre o eixo X e posteriormente no ponto (1,0) para criar a reta tangente.*

4. *Acionando o botão*  *crie uma reta partindo do centro da circunferência ao ponto criado no item 2.*

5. *Selecione o botão*  *clique sobre o eixo X e posteriormente sobre a reta criada no item anterior.*

6. *Com o botão*  *clique sobre a reta tangente o posteriormente sobre a reta criada no item 4.*

7. *No campo de entrada no fundo da janela digite* $(\alpha, y(D))$*, onde D é o ponto criado no passo 6, e aperte enter.*

8. *Clique no ponto criado no passo cima com o botão direito do mouse; na janela que abrirá acione o modo habilitar rastro.*

9. *Clique no ponto criado no passo 2 (ponto sobre a circunferência) com o botão direito do mouse; na janela que abrirá acione o botão animar.*

10. *Clique na janela de visualização com o botão direito do mouse, acione o campo janela de visualização. Posteriormente na aba eixo X marque distância e selecione $\frac{\pi}{2}$.*

Questionário do Aluno

- *O gráfico descrito pelo ponto criado no passo 5 possui como imagem todos os reais?*
- *Qual o domínio da função?*
- *Quais os intervalos de crescimento e decrescimento da função?*
- *Qual o período da função?*

A função Tangente mais completa seria da forma $f(x) = A + B\text{tg}\,(Cx + D)$; para este caso trabalharemos através do Geogebra.

Atividade 4.9. *Objetivo: Estudar os efeitos dos parâmetros na função tangente.*
Construção

1. *Acionando o botão* *crie um número "a"com incremento de 0.1 variando de -3 a 3.*
2. *Acionando o botão* *crie um número "b"com incremento de 0.1 variando de -3 a 3.*
3. *Acionando o botão* *crie um número "c"com incremento de 0.5 variando de -3 a 3.*
4. *Acionando o botão* *crie um número "d"com incremento de $\frac{\pi}{2}$ variando de -2π a 2π.*
5. *No campo de entrada digite a+b*tan(c*x+d) e aperte enter.*

Questionário do Aluno

- *Mude os valores de "a"mantendo os demais constantes e complete a tabela.*

a	*PERÍODO*	*IMAGEM*	*DESCONTINUIDADE*

- *Mude os valores de "b"mantendo os demais constantes e complete a tabela.*

b	PERÍODO	IMAGEM	DESCONTINUIDADE

- *Mude os valores de "c"mantendo os demais constantes e complete a tabela.*

c	PERÍODO	IMAGEM	DESCONTINUIDADE

- *Mude os valores de "d"mantendo os demais constantes e observe o gráfico.*

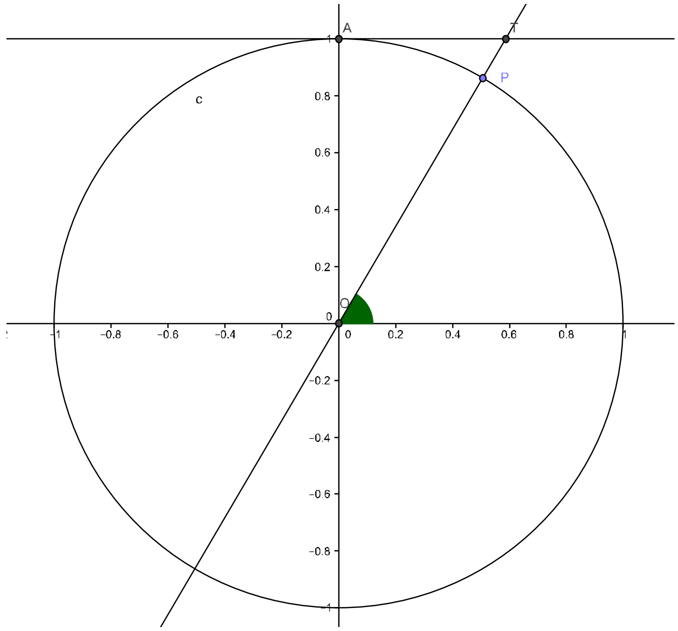
d	PERÍODO	IMAGEM	DESCONTINUIDADE

- *O que você percebeu em cada caso?*

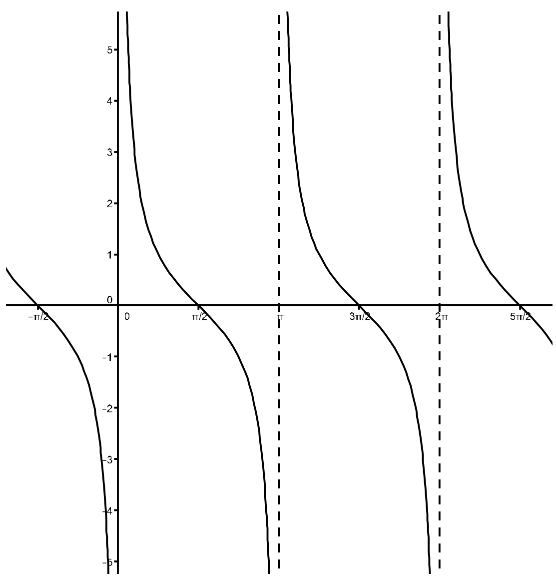
- *Converse com os demais alunos e compare os resultados. Como podemos escrever os resultados?*

4.5.4 Função Cotangente

Definição 4.5.5. *Dado um real x, com $x \neq k\pi$, sendo P sua imagem no ciclo. Considere a reta que contem o segmento $\overline{OP}$ e a reta t tangente ao ciclo no ponto A. Denominamos de cotangente de x e representamos por $(cotg\,(x))$ a medida do segmento $\overline{AT}$*



Denominamos de função cotangente a função $f : \boldsymbol{R} - k\pi \to \boldsymbol{R}$ *que para cada valor de P associa o número real que representa a medida do segmento* $\overline{AT}$ *na reta cotangente.*



Neste momento trabalharemos função cotangente através do Geogebra.

Atividade 4.10. *Objetivo: Familiarizar o aluno com o gráfico da função cotangente* ***Construção***

1. *Acionando o botão*  *marque o ponto (0,0) e posteriormente na janela que surgirá digite 1 para o valor do raio.*

2. *Com o botão selecionado clique em um ponto sobre a circunferência que você criou no passo anterior.*

3. *Ative o botão clique sobre o eixo y e posteriormente no ponto (0,1) para criar a reta cotangente.*

4. *Acionando o botão crie uma reta partindo do centro da circunferência ao ponto criado no item 2.*

5. *Selecione o botão clique sobre o eixo X e posteriormente sobre a reta criada no item anterior.*

6. *Com o botão clique sobre a reta tangente o posteriormente sobre a reta criada no item 4.*

7. *No campo de entrada no fundo da janela digite $(\alpha, x(D))$, onde D é o ponto criado no passo 6, e aperte enter.*

8. *Clique no ponto criado no passo cima com o botão direito do mouse; na janela que abrirá acione o modo habilitar rastro.*

9. *Clique no ponto criado no passo 2 (ponto sobre a circunferência) com o botão direito do mouse; na janela que abrirá acione o botão animar.*

10. *Clique na janela de visualização com o botão direito do mouse, acione o campo janela de visualização. Posteriormente na aba eixo X marque distância e selecione $\frac{\pi}{2}$.*

Questionário do Aluno

- *O gráfico descrito pelo ponto criado no passo 5 possui como imagem todos os reais?*
- *Qual o domínio da função?*
- *Quais os intervalos de crescimento e decrescimento da função?*
- *Qual o período da função?*

A função Cotangente mais completa seria da forma $f(x) = A + B\text{cotg}(Cx + D)$; para este caso trabalharemos através do Geogebra.

Atividade 4.11. *Objetivo: Estudar os efeitos dos parâmetros na função cotangente.*
Construção

1. *Acionando o botão $\frac{a=2}{\bullet}$ crie um número "a"com incremento de 0.1 variando de -3 a 3.*

2. *Acionando o botão $\frac{a=2}{\bullet}$ crie um número "b"com incremento de 0.1 variando de -3 a 3.*

3. *Acionando o botão crie um número "c"com incremento de 0.5 variando de -3 a 3.*

4. *Acionando o botão crie um número "d"com incremento de* $\frac{\pi}{2}$ *variando de* -2π *a* 2π.

5. *No campo de entrada digite a+b*cotan(c*x+d) e aperte enter.*

Questionário do Aluno

- *Mude os valores de "a"mantendo os demais constantes e complete a tabela.*

a	*PERÍODO*	*IMAGEM*	*DESCONTINUIDADE*

- *Mude os valores de "b"mantendo os demais constantes e complete a tabela.*

b	*PERÍODO*	*IMAGEM*	*DESCONTINUIDADE*

- *Mude os valores de "c"mantendo os demais constantes e complete a tabela.*

c	*PERÍODO*	*IMAGEM*	*DESCONTINUIDADE*

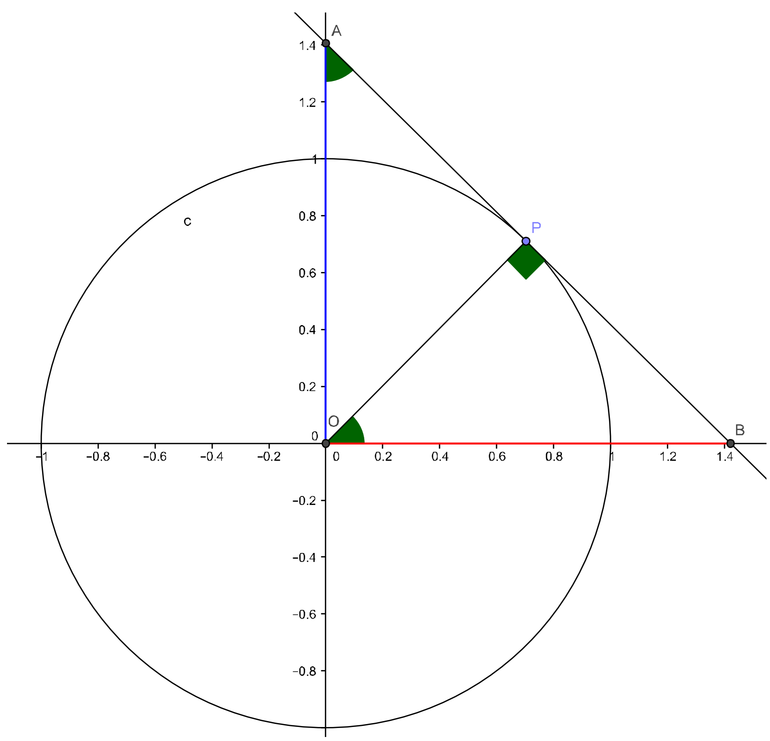
- *Mude os valores de "d"mantendo os demais constantes e observe o gráfico.*

d	PERÍODO	IMAGEM	DESCONTINUIDADE

- *O que você percebeu em cada caso?*
- *Converse com os demais alunos e compare os resultados. Como podemos escrever os resultados?*

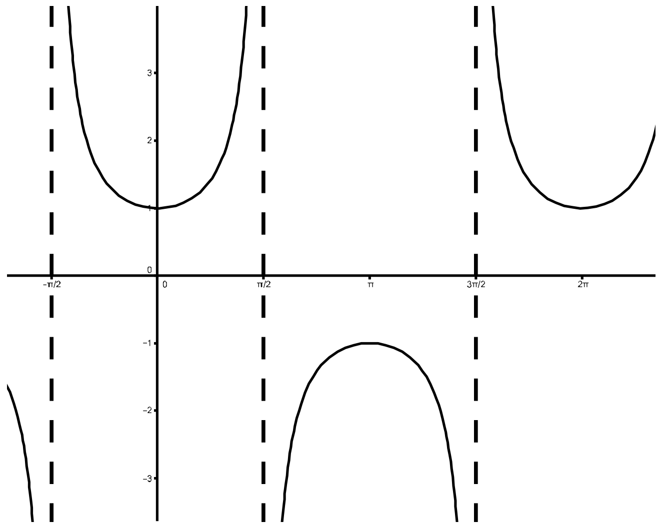
4.5.5 Função Secante e Função Cossecante

Para a definição de secante e cossecante os elementos serão representados no gráfico abaixo:

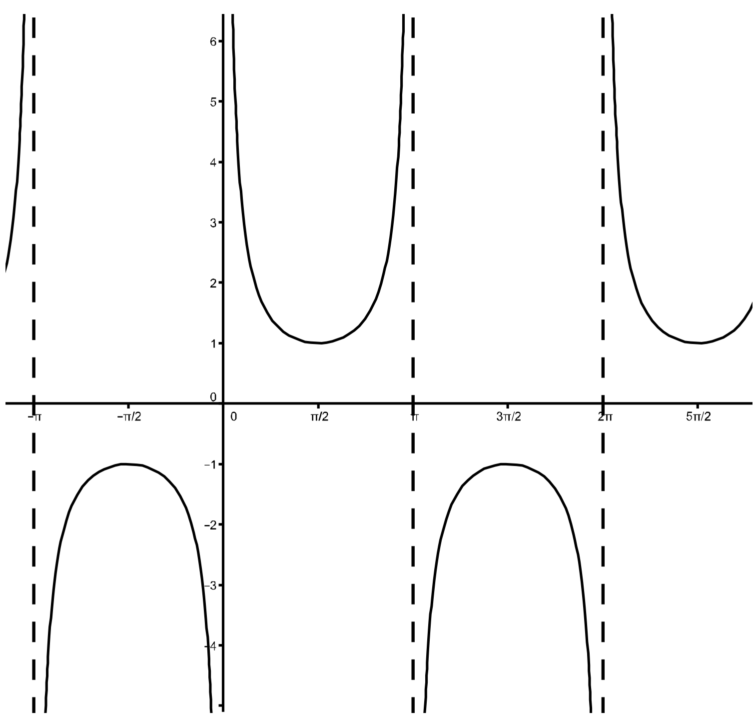


Definição 4.5.6 (Secante)**.** *Dado um real x, com* $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ *, sendo P sua imagem no ciclo. Considere a reta que contem o ponto P e é tangente ao ciclo trigonométrico, esta reta intercepta o eixo horizontal no bonto B gerando um segmento* $\overline{OB}$ *(de vermelho no gráfico). Denominamos de secante de x e representamos por* $(\sec(x))$ *a medida do segmento* $\overline{OB}$*.*

Denominamos de função secante a função $f : \boldsymbol{R} - \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow \boldsymbol{R}$ *que para cada valor de x associa o número* *real que representa a medida do segmento $\overline{OB}$ no eixo horizontal.*



Definição 4.5.7 (Cossecante)**.** *Dado um real x, com $x \neq k\pi$, sendo P sua imagem no ciclo. Considere a reta que contem o ponto P e é tangente ao ciclo trigonométrico, esta reta intercepta o eixo vertical no bonto A gerando um segmento $\overline{OA}$ (de azul no gráfico). Denominamos de cossecante de x e representamos por $(cossec\,(x))$ a medida do segmento $\overline{OA}$.*
Denominamos de função cossecante a função $f : \boldsymbol{R} - k\pi \rightarrow \boldsymbol{R}$ que para cada valor de x associa o número real que representa a medida do segmento $\overline{OA}$ no eixo vertical.



4.6 Relações Fundamentais

Teorema 4.1. *Para todo $x \in \mathbb{R}$ é válido a relação:*

$$sen\,(x)^2 + \cos(x)^2 = 1 \tag{4.14}$$

A demonstração do Teorema acima é de certa forma simples utilizando o ciclo e o Teorema de Pitágoras, sendo assim, utilizaremos o Geogebra para que o aluno verifique a relação e posteriormente possa demonstrá-la.

Atividade 4.12. *Objetivo: Descobrir a relação fundamental.*

Construção

1. *Acionando o botão*  *marque o ponto (0,0) e posteriormente na janela que surgirá digite 1 para o valor do raio.*
2. *Com o botão*  *selecionado clique em um ponto sobre a circunferência que você criou no passo anterior.*
3. *Acionando o botão*  *crie um segmento partindo do centro da circunferência ao ponto criado no item anterior.*
4. *Selecione o botão*  *clique sobre o eixo X e posteriormente sobre o segmento criado no item acima.*
5. *No campo de entrada no fundo da janela digite $x(B)^2$, onde B é o ponto criado no passo 2, e aperte enter.*
6. *No campo de entrada no fundo da janela digite $y(B)^2$, onde B é o ponto criado no passo 2, e aperte enter.*
7. *Clique no ponto criado no passo 2 (ponto sobre a circunferência) com o botão direito do mouse; na janela que abrirá acione o botão animar.*

Questionário do Aluno

- *Qual o maior e o menor valor assumido pelo número $x(B)^2$?*
- *Qual o maior e o menor valor assumido pelo número $y(B)^2$?*

- *Pare de animar o ponto e com o botão ativado mude o ponto b de lugar anotando a soma dos números criados. Qual o valor da soma nos casos?*
- *Converse com os demais alunos e compare os resultados. Como podemos escrever os resultados?*

Teorema 4.2. *Para todo $x \in \boldsymbol{R} - \frac{\pi}{2} + k\pi$ é válido a relação:*

$$tg\,(x) = \frac{sen\,(x)}{\cos(x)} \tag{4.15}$$

Demonstração

Considere o ciclo trigonométrico e x um valor qualquer do domínio da função tangente que representamos sem perda da generalidade na figura abaixo:

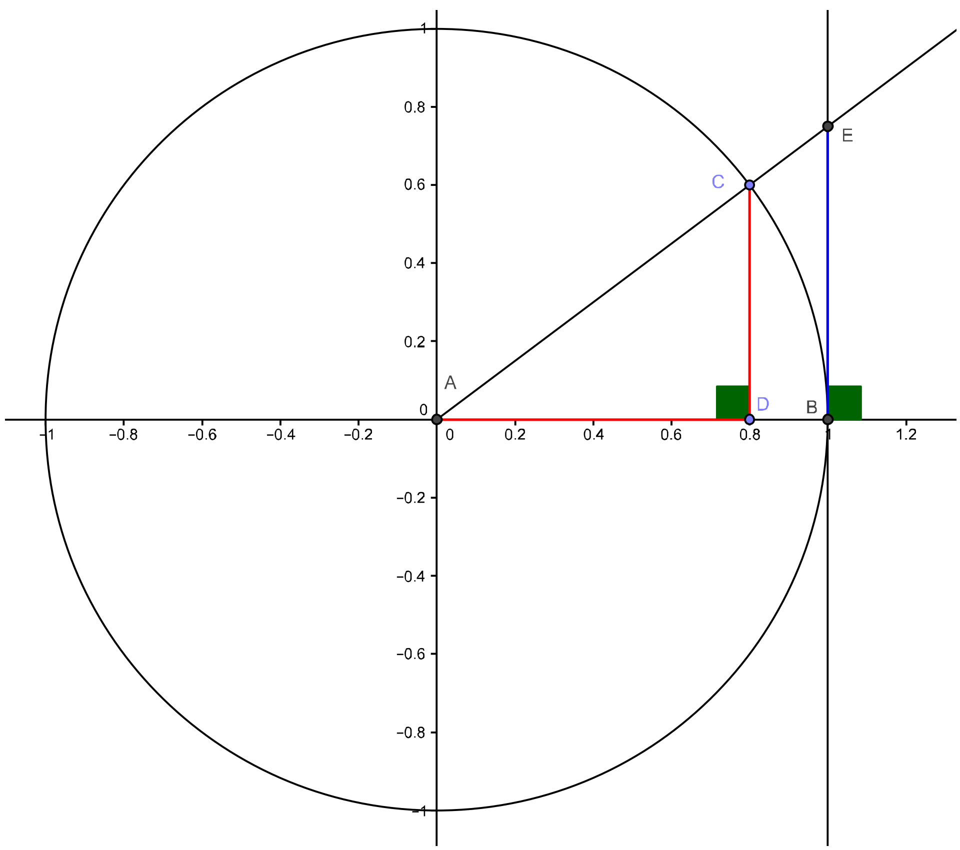


Figura 4.7: Relação Tangente

Observe que $\triangle ADC$ é semelhante ao $\triangle ABE$ de onde podemos escrever que:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{BE}} \Longrightarrow \frac{\cos(x)}{1} = \frac{\text{sen}\,(x)}{\text{tg}\,(x)} \Longrightarrow \text{tg}\,(x) = \frac{\text{sen}\,(x)}{\cos(x)}$$

Teorema 4.3. *Para todo $x \in \mathbb{R} - k\pi$ é válido a relação:*

$$cotg\,(x) = \frac{\cos(x)}{sen\,(x)} \tag{4.16}$$

Demonstração

Considere o ciclo trigonométrico e x um valor qualquer do domínio da função cotangente que representamos sem perda da generalidade na figura abaixo:

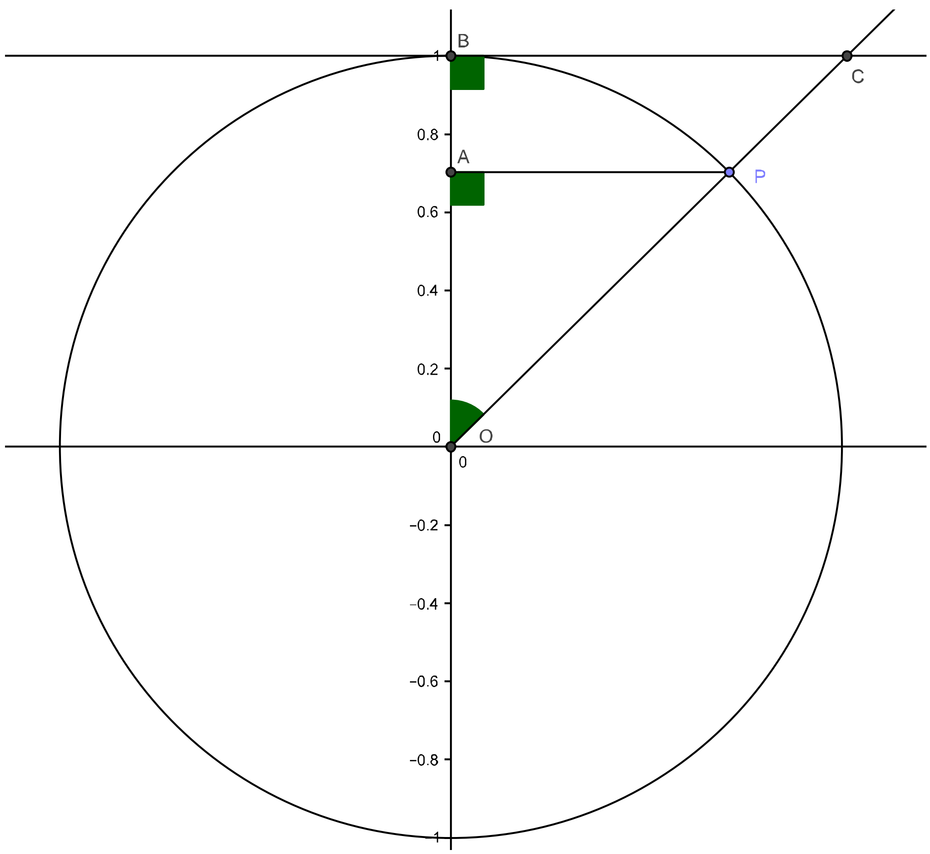


Figura 4.8: Relação Cotangente

Observe que $\triangle OAP$ é semelhante ao $\triangle OBC$ de onde podemos escrever que:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{BC}} \Longrightarrow \frac{\text{sen}\,(x)}{1} = \frac{\cos(x)}{\text{cotg}\,(x)} \Longrightarrow \text{cotg}\,(x) = \frac{\cos(x)}{\text{sen}\,(x)}$$

Teorema 4.4. *Para todo $x \in \mathbb{R} - \frac{\pi}{2} + k\pi$ é válido a relação:*

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \tag{4.17}$$

Teorema 4.5. *Para todo $x \in \mathbb{R} - k\pi$ é válido a relação:*

$$cossec\,(x) = \frac{1}{sen\,(x)} \tag{4.18}$$

Se dividirmos a relação fundamental 4.14 por sen (x) teremos:

$$1 + \text{cotg}\,(x) = \text{cossec}\,(x), x \neq k\pi$$

e se dividirmos a relação fundamental 4.14 por $\cos(x)$ teremos:

$$1 + \text{tg}\,(x) = \sec(x), x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

4.7 Transformações

Mostraremos algumas transformações úteis, entretanto, veremos apenas as que atualmente são estudadas no ensino médio e fundamental. Considere o ciclo trigonométrico 4.9, onde Q, R e S representam respectivamente $\alpha + \beta, \alpha$, e $-\beta$.

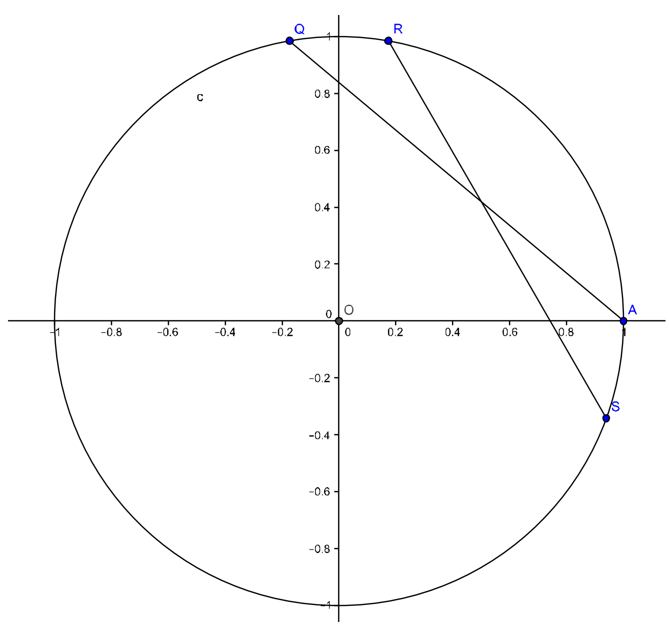


Figura 4.9: Transformações

Os segmentos $\overline{AQ}$ e $\overline{RS}$ são congruentes daí vem

$$d_{AQ} = d_{RS} \Rightarrow (\cos(\alpha+\beta)-1)^2 + (\text{sen}\,(\alpha+\beta)-0)^2 = (\cos(\alpha)-\cos(\beta))^2 + (\text{sen}\,(\alpha)+\text{sen}\,(\beta))^2$$

resolvendo as potências e simplificando teremos

$$2-2\cos(\alpha+\beta) = 2-2\cos(\alpha)\cos(\beta)+2\text{sen}\,(\alpha)\text{sen}\,(\beta) \Leftrightarrow \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta)-\text{sen}\,(\alpha)\text{sen}\,(\beta) \tag{4.19}$$

podemos mostrar ainda

$$\cos(\alpha+(-\beta)) = cos(\alpha)\cos(-\beta) - \text{sen}\,(\alpha)\text{sen}\,(-\beta) \Leftrightarrow \cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \text{sen}\,(\alpha)\text{sen}\,(\beta) \tag{4.20}$$

temos ainda que

$$\text{sen}\,(\alpha+\beta) = \text{sen}\,(\alpha)\cos(\beta) + \text{sen}\,(\beta)\cos(\alpha) \tag{4.21}$$

$$\text{sen}\,(\alpha-\beta) = \text{sen}\,(\alpha)\cos(\beta) - \text{sen}\,(\beta)\cos(\alpha) \tag{4.22}$$

$$\text{tg}\,(\alpha+\beta) = \frac{\text{tg}\,(\alpha)+\text{tg}\,(\beta)}{1-\text{tg}\,(\alpha)\text{tg}\,(\beta)} \tag{4.23}$$

$$\text{tg}\,(\alpha-\beta) = \frac{\text{tg}\,(\alpha)-\text{tg}\,(\beta)}{1+\text{tg}\,(\alpha)\text{tg}\,(\beta)} \tag{4.24}$$

4.8 Funções Inversas

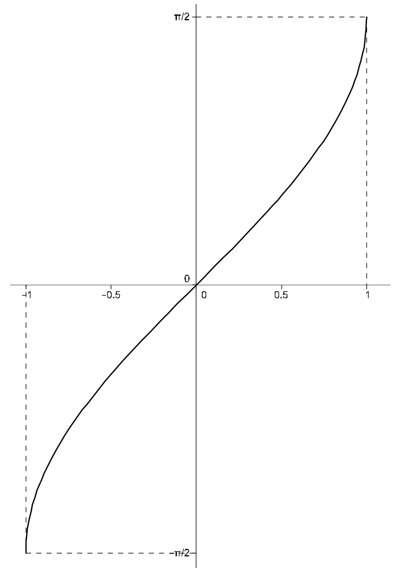
Mostraremos neste tópico as funções inversas arco-seno, arco-cosseno e arco-tangente. Perceba que as funções seno, cosseno e tangente, que você estudou anteriormente, não são funções bijetoras então trataremos as inversas para as funções com algumas restrições.

4.8.1 Arco-Seno

A função seno não é injetora e nem sobrejetora por isso para determinar a inversa (arco-seno) consideremos a função apenas no intervalo $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]$ ou seja $f : \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right] \to [-1,1]$; assim a função admite inversa (arco-seno)$f^-1(\text{arcsen}\,(x)) : [-1,1] \to \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]$.

$$\text{arcsen}\,(x) = y \Leftrightarrow \text{sen}\,(y) = x$$

Logo a representação gráfica da função sera:

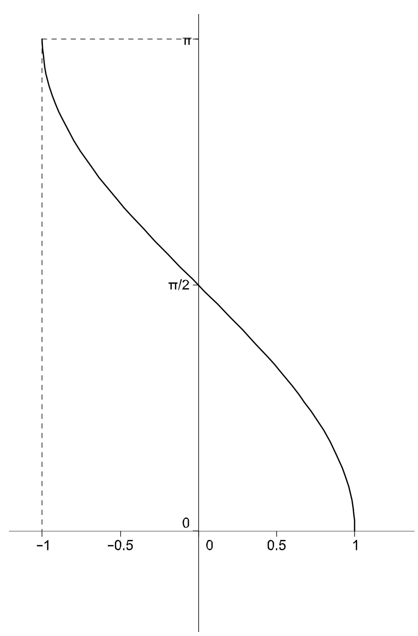


4.8.2 Arco-Cosseno

A função cosseno, assim como a função seno, não é injetora e nem sobrejetora portanto, iremos considerar a função no intervalo $[0, \pi]$ deste modo a função seria $g : [0, \pi] \to [-1, 1]$ de modo que a inversa $(\arccos(x))$ será $g^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$.

$$\arccos(x) = y \Leftrightarrow \cos(y) = x$$

Logo a representação gráfica da função sera:

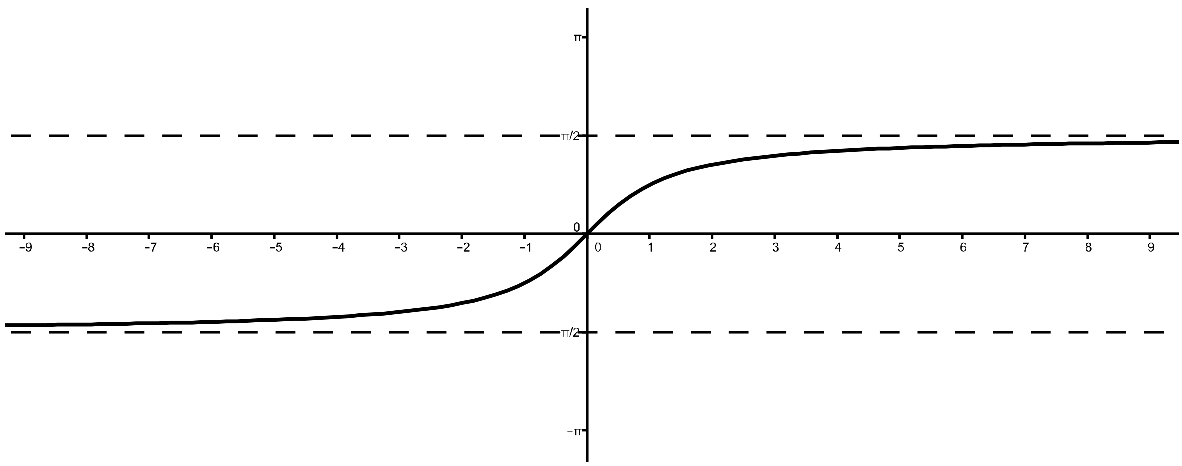


4.8.3 Arco-Tangente

A função tangente, como vimos anteriormente, é sobrejetora e para torná-la injetiva faremos a restrição de seu domínio considerando apenas o intervalo $\left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ de modo que a função seria $h : \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\rightarrow \boldsymbol{R}$, e sua inversa (arctg (x)) seria $h^{-}1 : \boldsymbol{R} \rightarrow \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

$$\text{arctg}\,(x) = y \Leftrightarrow x = \text{tg}\,(x)$$

Graficamente



Capítulo 5

Considerações Finais

5.1 Conclusão

O material com as atividades foi repassado para cinco professores a fim de testar o material. Devido o pouco tempo disponível para aplicação, não realizamos nenhum tipo de treinamento com os professores, mesmo assim, nas escolas onde o material foi utilizado os professores notaram maior participação dos alunos e ainda afirmaram que o Geogebra facilitou o ensino de trigonometria. Entre os alunos as atividades despertaram o interesse e ainda facilitaram o aprendizado, eles dizem que:

> "é mais fácil perceber quando podemos ver as coisas acontecendo "

Dois professores alegaram sentir um pouco de insegurança no início, por terem pouco conhecimento do software, mas dizem que não foi difícil.

> "estava com receio no início, mas treinando em casa percebi que dava pra realizar "

Acreditamos que devemos obter melhores resultados se realizarmos um treinamento inicial com os professores, sabemos que vários trabalhos mostram que o Geogebra facilita o processo de ensino aprendizagem, além de despertar o interesse do aluno, porém, por causa da pequena quantidade de dados, ainda não podemos afirmar que o material produzido é eficiente.

5.2 Sugestão de Trabalhos Futuros

Como sugestão, deixamos a continuidade deste trabalho produzindo um material em DVD interativo para o aluno e para o professor, ou ainda a criação de um site, disponibilizando este trabalho, além de outras atividades com Geogebra nos mais diversos tópicos para que alunos estudem em casa por meio de experimentos e atividades orientadas, e os professores possam consultar, e até mesmo baixar vídeo-aulas e atividades para realizar em sala, além de poder postar dúvidas, sugestões e trabalhos.

Referências Bibliográficas

[1] IEZZI, Gelson at all. **Fundamentos de Matemática Elementar** vol 3, Editora Atual, 2ª Edição, São Paulo, 1977-78.

[2] GUEDES, Paulo C. C. **Algumas Aplicações do Software Geogebra ao Ensino da Geometria Analítica**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)- Universidade Federal do Espirito Santo, Vitória, 2013.

[3] COSTA, Marcelo de M. **Uma Abordagem Introdutória de Cônicas Para o Ensino Médio Através do Geogebra**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)- Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

[4] PEREIRA, Thales de L. M. **O Uso do Geogebra em Uma Escola Pública: interações entre alunos e professor em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática)- Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2012.

[5] ZULATTO, Rúbia B. A. **Professores de Matemática Que Utilizam Software de Geometria Dinâmica: Suas Característica e perspesctivas** . Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

[6] DA COSTA, Nielce M. L. **A História da Trigonometria** . Artigo , disponível em: http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3 _ pdf/historia _ triogono.pdf ; Acessado em 02 de Fevereiro de 2014 às 19:00.

[7] PEDROSO, Hermes A. **História da Matemática**. Notas de Aula, disponível em: http://www.mat.ibilce.unesp.br/personal/hermes/apostila _ hist _ mat.pdf ; Acessado em 02 de Fevereiro de 2014 às 19:10.

[8] LIMA, Elon L.; CARVALHO, Paulo C.P.; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto C. **A Matemática do Ensino Médio** vol 2, SBM, 6ª Edição, Rio de Janeiro, 2006.

[9] MOYER, Robert E. e AYRES, Frank JR. **Trigonometria-Coleção Schaum**, Editora Bookman, 3ª Edição, 2003

[10] NÓBRIGA, Jorge Cássio C. ; DE ARAUJO, Luís Cláudio L. **Aprendendo Matemática com o Geogebra**, Editora Exato, 1ª Edição, São Paulo, 2010.

[11] Sá, Pedro F. **Atividades Para o Ensino de Matemática no Nível Fundamental**, EDUEPA, Belém, 2009.

[12] MENDES, Iran A. e Sá, Pedro F. **Matemática Por Atividades: Sugestões Para a Sala de Aula**, Flecha do Tempo, Natal, 2006.