UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

RAMIRO RODRIGUES BARBOSA

UMA ABORDAGEM DIDÁTICA PARA O ENSINO DO MDC NA EDUCAÇÃO BÁSICA.

BELÉM – PARÁ
2014

RAMIRO RODRIGUES BARBOSA

UMA ABORDAGEM DIDÁTICA PARA O ENSINO DO MDC NA EDUCAÇÃO BÁSICA.

Monografia apresentada à Universidade Federal do Pará - UFPA, como instrumento parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Orientador: Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias.

BELÉM – PARÁ
2014

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Barbosa, Ramiro Rodrigues, 1976-
Uma abordagem didática para o ensino do mdc na educação básica / Ramiro Rodrigues Barbosa. - 2014.

Orientador: Valcir João da Cunha Farias.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática (Mestrado Profissional), Belém, 2014.

1. Matemática (Ensino fundamental). 2. Teoria dos números. 3. Máximo divisor comum. 4. Educação básica-Matemática. I. Título.

CDD 22. ed. 510.7

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

RAMIRO RODRIGUES BARBOSA

UMA ABORDAGEM DIDÁTICA PARA O ENSINO DO MDC NA EDUCAÇÃO BÁSICA.

Dissertação Apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Pública Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática e ofertado pelo instituto de Matemática da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do Titulo de Mestre em Matemática.

Aprovado em: 29 de AGOSTO 2014.

Banca examinadora

Prof. Dr. VALCIR JOÃO DA CUNHA FARIAS (Orientador)
PPGME – UFPA

Prof. Dr. ARTHUR DA COSTA ALMEIDA
UFPA – Campos Castanhal

Prof. Dr. ANDERSON DAVID DE SOUZA CAMPELO
Faculdade Ipiranga

Oferecemos o presente trabalho a todos que de forma direta ou indiretamente contribuíram para sua elaboração, especial aos nossos familiares por seu apoio neste importante momento de nossa carreira profissional.

Agradecemos ao Criador, por sua gloria eterna em nossa jornada de vida.

A nossos pais, por serem exemplo e alicerce em nossas vidas, formações e por terem sempre acreditado em nós.

A nossos familiares, por compartilharem dos bons e maus momentos, oferecendo-nos força para seguir.

A Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), por oportunizar o PROFMAT, programa que nos proporcionou imensurável avanço intelectual.

Aos nossos queridos amigos e colegas de turma, pois sem a ajuda dos mesmos a trajetória desse mestrado ficaria muito mais difícil.

Ao nosso orientador Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias, pela dedicação, compreensão e contribuição exponencial para a realização deste trabalho.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo oferecer à comunidade da educação básica uma sequência didática diferenciada para o ensino do m.d.c (máximo divisor comum) e do m.m.c (mínimo múltiplo comum) apresentando uma metodologia objetiva mesclando as teorias usadas no ensino fundamental e as aplicadas nas teorias dos números, como Crivo De Eratóstenes (Eratóstenes, matemático grego 276 a.C – 194 a.C), Contagem de divisores naturais de um número natural, e intercalando aos conteúdos um pouco de Historia da Matemática, números perfeitos e números amigos, utilizando-se dessas poderosa ferramentas para realizar um estudo das propriedades dos números primos, das propriedades da fatoração numérica e com isso possibilitar aos professores da educação básica mais uma opção de material didático para um futuro plano de ensino ou plano de aula nos referidos assuntos.

Palavras-Chaves: Ensino Fundamental, Teorias dos Números, Educação Básica.

ABSTRACT

This work aims to provide the community with basic education differentiated instructional sequence for teaching GCD (Greatest Common Divisor) and MMC (Least Common multiple) presenting an objective methodology merging the theories used in elementary school and applied theories numbers like sieve of Eratosthenes (Eratosthenes, 276 BC Greek mathematician – 194 BC), Count of natural divisors of a natural number, and merging the content into a little of the History of Mathematics, PERFECT NUMBERS AND FRINDS, using these powerful tools of conduct a study of the properties of prime numbers, the factorization of the numerical properties and thereby enabling basic education teachers have more option of teaching materials for future syllabus or lesson plan in such matters.

Key Words: Elementary Education, Theory of Numbers, Basic Education.

SUMÁRIO

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Vamos posicionar em relação à Educação no Brasil. De acordo com a nossa Carta Magna (Constituição Federal) [11], no seu Art. 6° ela é um direito social, portanto um direito constitucional de controle difuso em outras palavras, um direito no qual todos têm indistintamente. Entre os vários artigos e incisos dispostos na Constituição de 1988 temos o Art. 214 que estabelece a criação da LDB (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional), sendo um marco para criação dos PCNs (Planos Nacionais de Educação) [10].

> Art. 6º São direitos sociais a educação, a saúde, a alimentação, o trabalho, a moradia, o lazer, a segurança, a previdência social, a proteção à maternidade e à infância, a assistência aos desamparados, na forma desta Constituição.
>
> Art. 214. A lei estabelecerá o plano nacional de educação, de duração decenal, com o objetivo de articular o sistema nacional de educação em regime de colaboração e definir diretrizes, objetivos, metas e estratégias de implementações para assegurar a manutenção e desenvolvimento do ensino em seus diversos níveis, etapas e modalidades por meio de ações integradas dos poderes públicos das diferentes esferas federativas que conduzam a:
>
> I - erradicação do analfabetismo;
>
> II - universalização do atendimento escolar;
>
> III - melhoria da qualidade do ensino;
>
> IV - formação para o trabalho;
>
> V - promoção humanística, científica e tecnológica do País.
>
> VI - estabelecimento de meta de aplicação de recursos públicos em educação como proporção do produto interno bruto. (cf 88)

Ao analisarmos os PCNs em relação à área de Matemática aplicado em especial no Ensino Fundamental, temos a nítida certeza que não se trata de um instrumento rígido de caráter meramente instrumental ou técnico-cienticifista, dos quais lhe fogem as vinculações das vivências diárias. Sob este ponto de vista, os PCNs, diz que:

> Os Parâmetros Curriculares Nacionais indicam como objetivos do ensino fundamental que os alunos sejam capazes de:
> Utilizar as diferentes linguagens — verbal, matemática, gráfica, plástica e corporal como meio para produzir, expressar e comunicar suas idéias, interpretar e usufruir das produções culturais, em contextos públicos e privados, atendendo a diferentes intenções e situações de comunicação.
> (MEC/SEF, 1997,p.6) [9]
>
> **ENSINO FUNDAMENTAL**
>
> Matemática comporta um amplo campo de relações, regularidades e coerências que despertam a curiosidade e instigam a capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, favorecendo a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico. Faz parte da vida de todas as pessoas nas experiências mais simples como contar, comparar e operar sobre quantidades. Nos cálculos relativos a salários, pagamentos e consumo, na organização de atividades como agricultura e pesca, a Matemática se apresenta como um conhecimento de muita aplicabilidade. Também é um instrumental importante para diferentes áreas do conhecimento, por ser utilizados em estudos tanto ligados às ciências da natureza como às ciências sociais e por estar presente na composição musical, na coreografia, na arte e nos esportes. Essa potencialidade do conhecimento matemático deve ser explorada, da forma mais ampla possível, no ensino fundamental. Para tanto, é importante que a Matemática desempenhe, equilibrada e indissociavelmente, seu papel na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio dedutivo do aluno, na sua aplicação a problemas, situações da vida cotidiana e atividades do mundo do trabalho e no apoio à construção de conhecimentos em outras áreas curriculares.(MEC/SEF, 1997, p.20)

O nosso Estado do Pará corrobora com o pensamento dos PCNs ao editar Política de Educação Básica, através de sua proposta curricular e assim reafirmando os compromissos enumerados no carta máxima.

> A Secretaria de Estado de Educação entrega à sociedade um documento que é resultado de um processo coletivo, democrático e participativo, resultante de debates e de tomadas de decisões. A “Política de Educação Básica do Estado do Pará” também representa a edificação de uma nova práxis pedagógica materializada e os anseios dos sujeitos comprometidos com o ensino público estadual, definindo os novos rumos de nosso Estado, sob a perspectiva de um projeto educacional democrático e de qualidade Pará Todos. (Proposta Curricular 2008, p.9)

Para que todos os fins listados acima sejam efetivados temos um único e primordial canal de transporte desses eventuais conhecimentos e saberes, estamos falando do educando, o professor aquele que esta na porta do processo e como tal tem que compreender as magnitudes dos problemas de matemática em seus vários aspectos, levando os alunos as mais vastas reflexões. E dentro dessa filosofia que o presente trabalho trás em tela uma abordagem didática para o ensino do MDC e MMC, sabe-se que o cálculo do Máximo divisor comum entre dois números, o estudo da determinação dos números primos menores que um inteiro dado e as demonstrações de que há gama de números primos já são discutidos desde Grécia por seus teóricos tais evidencias estão registrados em alguns livros como “os elementos” escritos por Euclides por volta de 300 a.c, essas teorias se perpetuaram até os dias de hoje. Tais estudos fazem parte da teoria dos números aplicados por várias vertentes do ensino da matemática atual como na criptografia entre outros, porém na educação básica os conteúdos são desfragmentados e desvinculados dos momentos históricos que lhes deram origem. Por fim podemos redirecionar o propósito deste trabalho de conclusão de curso ao resgate desses momentos em uma abordagem dinâmica, para efetivar esses, fins usaremos vários exemplos práticos do cotidiano para ilustrar as mais variáveis aplicações do Máximo divisor comum e do Mínimo múltiplo comum.

CAPÍTULO 2

NÚMEROS NATURAIS E SEUS DIVISORES

Nesse capítulo será abordado o assunto: A origem dos números naturais, mostrando sua evolução sem muita formalidade, visando o posicionamento do aluno, acerca dos naturais. Também serão vistas as operações e propriedades dos números naturais N, assim como uma breve explanação sobre os divisores de número natural de uma forma contextualizada, para melhor abstração do aluno na leitura de mundo. Por fim, abordaremos diversos problemas acerca dos naturais e seus divisores.

2.1. Introdução aos Números Naturais

Os números naturais formam um dos conceitos mais antigos concebidos pelo ser humano. Entretanto, a sua evolução de uma noção intuitiva para um conceito mais elaborado foi muito lenta. Só no final do século 19, quando os fundamentos de toda a matemática foram questionados e intensamente repensados, é que a noção de número passou a ser baseada em conceitos da teoria dos conjuntos, considerados mais primitivos, introdução vista em Hefez [1].

O conjunto dos números naturais é representado pela letra maiúscula N e estes números são construídos com os algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, que também são conhecidos como algarismos indo-arábicos. No século VII, os árabes invadiram a Índia, difundindo o seu sistema numérico.

Embora o zero não seja um número natural no sentido que tenha sido proveniente de objetos de contagens naturais, iremos considerá-lo como um número natural uma vez que ele tem as mesmas propriedades algébricas que os números naturais. Na verdade, o zero foi criado pelos hindus na montagem do sistema posicional de numeração para suprir a deficiência de algo nulo.

No século XIX, uma definição o conjunto teórico dos números naturais foi desenvolvida. Com esta definição, era mais conveniente incluir o zero (correspondente ao conjunto vazio) como um número natural. Esta convenção é seguida pelos teorizadores de conjuntos, logicistas, e cientistas da computação.

2.2. Operações com números naturais

Na sequência, vamos abordar as duas principais operações possíveis no conjunto dos números naturais: ***Adição*** e ***Multiplicação***.

2.2.1. Adição de números naturais

A operação de adição esta ligada a idéia de unir, acrescentar, juntar.

Acompanhe a situação:

1. (Giovanni Júnior, José Ruy, 2009, p.33) Sugere a seguinte situação para representar a ideia de adição: Uma loja do comércio de Belém oferece uma TV por 1 350 reais para pagamento à vista. A compra pode, ainda, ser a prazo, financiada em 12 prestações iguais, mas, nesse caso, o preço sofre um acréscimo de 650 reais. Qual o preço da TV quando compramos a prazo?

Para resolver essa situação, devemos fazer: ***1 350 + 650***.

$$\begin{array}{rl} 1\,3\,5\,0 & \longrightarrow \text{parcela} \\ +\quad 6\,5\,0 & \longrightarrow \text{parcela} \\ \hline 2\,0\,0\,0 & \longrightarrow \text{soma ou total (resulatdo da operação)} \end{array}$$

O preço da TV é 2 000 reais, quando comprada a prazo.

2. Na feira de degustação de pratos regionais da culinária paraense, encontramos uma tabela dos pratos com seus respectivos preços, veja:

TABELA DE PREÇOS	
Maniçoba	R$ 18,00
Vatapá	R$ 14,00
Pato no tucupi	R$ 16,00
Tacacá	R$ 10,00

Um turista da cidade de Santarém, visitou a feira e comprou um prato de *Maniçoba*, um de *Pato no tucupi* e um *Tacacá*. Quanto esse turista pagou pela compra?

Para resolver essa situação, devemos fazer: ***18 + 16 + 10***.

$$\begin{array}{rl} 18 & \longrightarrow \text{parcela} \\ +\,16 & \longrightarrow \text{parcela} \\ +\,10 & \longrightarrow \text{parcela} \\ \hline 44 & \longrightarrow \text{soma ou total (resultado da operação)} \end{array}$$

O turista pagou **R$** 44,00, pela compra.

2.2.2. Propriedades da Adição

Propriedade 1. Em uma adição de dois números naturais, a ordem das parcelas não altera a soma. Então, se ***a*** e ***b*** são números quaisquer, temos ***a + b = b + a***. Essa propriedade é chamada **propriedade *comutativa* da adição.**

Exemplo 2.1. Considere a adição: 20 + 35 = 55.
Trocando-se a ordem das parcelas, a soma obtida também é 55,ou seja:

$$\underbrace{20 + 35}_{55} = \underbrace{35 + 10}_{55}$$

Propriedade 2. Em uma adição de três ou mais números naturais quaisquer, Podemos associar as parcelas de modos diferentes. Então, se ***a***, ***b*** e ***c*** são números naturais quaisquer, temos ***(a + b) + c = a + (b + c)***. Essa propriedade é chamada **propriedade *associativa* da adição**.

Exemplo 2.2: Sejam os números naturais 12, 20 e 25. Vamos determinar a soma desses valores, associando os números de dois modos diferentes:

$$12 + 20 + 25 = \qquad\qquad 12 + \underbrace{20 + 25}_{} =$$

$$= 32 + 25 = 57 \qquad\qquad = 12 + 45 = 57$$

Então, (12 + 20) + 25 = 12 + (20 + 25).

Propriedade 3. Em uma adição natural com zero, a soma é sempre igual a esse número natural. Então, se ***a*** é um número natural qualquer, temos ***a + 0*** = ***0 + a*** = ***a***. Nessas condições, o número zero é chamado ***elemento neutro da adição***.

Exemplo 2.3. Sejam os números 18 e 0. Vamos determinar a soma desses números de duas maneiras, trocando a ordem das parcelas:

18 + 0 = 18   0 + 18 = 18

Então, o número zero não altera a adição, sendo o elemento neutro.

Propriedade 4. A adição de dois ou mais números naturais, o resultado sempre será um número natural. Então, se a e b são dois números naturais quaisquer, temos a + b = c. Nessas condições, c também é natural. Essa propriedade é chamada **propriedade de *fechamento* da adição**.

Exemplo 2.4. Condirede a soma: 12 + 20 = 32, onde:

12 é um número natural

20 é um número natural

32 é um número natural

2.2.3. Subtração de números naturais

A subtração é uma operação empregada em situações nas quais há ideia de tirar, reduzir, completar ou comprar quantidades. Veja a situação abaixo:

1. Uma fábrica de brinquedos artesanais de miriti, localizada no município de Abaetetuba, produziu 525 unidades para serem vendidas em Belém, mas no transporte para a capital, quebraram 120 unidades. Quantos brinquedos perfeitos chegaram a capital?

Para resolver esse problema, devemos fazer 500 – 120.

$$\begin{array}{rcl} 5\ 2\ 5 & \longrightarrow & \text{minuendo} \\ -\ \ 1\ 2\ 0 & \longrightarrow & \text{subtraendo} \\ \hline 4\ 0\ 5 & \longrightarrow & \text{diferença ou resto (resultado da operação)} \end{array}$$

Chegaram 405 brinquedos perfeitos a capital Belém.

2.2.4. Multiplicação de números naturais

A multiplicação é uma operação que está associada às idéias de **adição de parcelas iguais, formação retangular, proporção e combinações**.

Acompanhe a situação:

1. Ao ir ao supermercado “Preço bom”, dona Claudete percebeu que uma bandeja de manga era composta de 5 fileiras. Cada fileira tinha 6 mangas, quantas mangas tem a bandeja?

Podemos resolver esse problema usando uma adição de 5 **parcelas iguais** a 6, o que corresponde a uma **multiplicação**.

$$\underbrace{6 + 6 + 6 + 6 + 6}_{\text{parcelas}} = 30$$

Então: o tabuleiro tem $\underbrace{5 \times 6}_{\text{fatores}} = \underbrace{30}_{\text{produto}}$ mangas.

2. Ricardo comprou uma bicicleta para dar a seu pai como presente de aniversário. Ele vai pagar essa bicicleta em 10 parcelas iguais de 60 reais. Qual será o valor total que Ricardo pagará pela bicicleta?

Veja a soluçao:

$$\underbrace{60 \times 60 \times 60 \times 60 \times 60 \times 60 \times 60 \times 60 \times 60 \times 60}_{\text{parcelas}} = 600$$

Então: 10 x 60 = 600. Logo, Ricardo pagará 600 reais pela bicicleta.

2.2.5. Propriedades da Multiplicação

Propriedade 1. Em uma multiplicação de dois números naturais, a ordem dos fatores não altera o produto. Essa propriedade é chamada **propriedade *comutativa* da multiplicação**.

Exemplo 2.5. Veja a multiplicação de 12 com 3:

a) 12 x 3 = 3 x 12 = 36 b) 15 x 8 = 8 x 15 = 120

Propriedade 2. Em uma multiplicação de três ou mais números naturais quaisquer, podemos associar os fatores de modos diferentes sem alterar o produto. Essa propriedade é chamada **propriedade *associativa* da multiplicação**.

Exemplo 2.6. Considere os números naturais 2, 5 e 9. Determine o seu produto associando os números de formas diferentes:

$$\underbrace{(2 \times 5)} \times 9 = 90 \qquad 2 \times \underbrace{(5 \times 9)} = 90$$

$$= 10 \times 9 = 90 \qquad = 2 \times 45 = 90$$

Propriedade 3. Em uma multiplicação de um número natural qualquer por 1, o produto é sempre igual a esse número natural. Nessas condições, o número 1 é chamado ***elemento neutro da multiplicação***.

Exemplo 2.7. Observe a multiplicação dos números naturais 1 e 35:

1 x 35 = 35 35 x 1 = 35

Você observou que, quando o número 1 é um dos fatores, ele não influi no resultado da multiplicação.

Propriedade 4. Para multiplicar um número natural por uma soma de duas mais parcelas, multiplicamos o número pelas parcelas e, a seguir, aducionamos os resultados.

5 x (12 + 8) = (5 x 12) + (5 x 8)

Essa propriedade é chamada **propriedade *distributiva* da multiplicação** em relação à adição.

Exemplo 2.8. Veja como calcular o produto 4 x (17 + 3).

4 x (17 + 3) =

= (4 x 17) + (4 x 3) = 68 + 12 = 80

Essa propriedade pode ser estendida para a multiplicação de um número por uma diferença indicada. Veja o exemplo:

5 x (30 – 15) = (5 x 30) – (5 x 15) = 150 – 75 = 75

Propriedade 5. O produto de dois ou mais números naturais, o resultado sempre será um número natural. Então, se a e b são dois números naturais quaisquer, temos a x b = c. Nessas condições, c também é natural. Essa propriedade é chamada **propriedade de *fechamento* da multiplicação**.

2.3. Fatores ou Divisores de um Número Natural

A abordagem e as notações apresentadas a seguir é de uso comum em um curso de Aritmética, no nível superior, mas como poderemos observar, poderia ser apresentada ao aluno do ensino fundamental, na seguinte forma por extenso: *Divisores de um número natural são todos os números naturais que ao dividirem tal número, resultarão em uma divisão exata, isto é, com resto igual a zero.*

Definição 2.1. Um número a divide b, ambos números naturais, representado por $a|b$, se existe um número $c \in \mathbf{N}$ tal que $b = a \cdot c$. Também é dito que a é um divisor de b ou que b é um *múltiplo* de a.

Desse modo também se define "a não divide b" denotado por $a \nmid b$, com $a, b \in$ N, quando não existe um número natural c de forma que $b = a \cdot c$.

Note que pela definição, se $a|b$, então $a \leq b$. O número 1 divide qualquer número natural, ou seja, $1|n$, para qualquer $n \in \mathbf{N}$, pois tomando a partir de ***definição 2.1***, temos que $c = n$, então, $n = 1 \cdot n$, do mesmo modo que $n|n$. Feito isso, notamos que 1 é divisor de todos os números naturais, e possui um único divisor, que é ele mesmo.

Agora vamos modelar as definições, nos exemplos a seguir:

Exemplo 2.9. Considere o número 12 e dizemos que 1, 2, 3, 4, 6 e 12 são os divisores de 12, pois a divisão de 12 por cada um deles é sempre exata (resto 0).

Podemos indicar os divisores de 12 assim:

D(12): 1, 2, 3, 4, 6, 12

Exemplo 2.10. Dona Ana fez 10 doces de bacuri e vai distribuí-los igualmente em caixas. Faça o levantamento de todas as possibilidades que ela tem de distribuir os doces, indique as divisões correspondentes e escreva os divisores de 10.

Podemos resolver esse problema, encontrando os divisores de 10, veja:

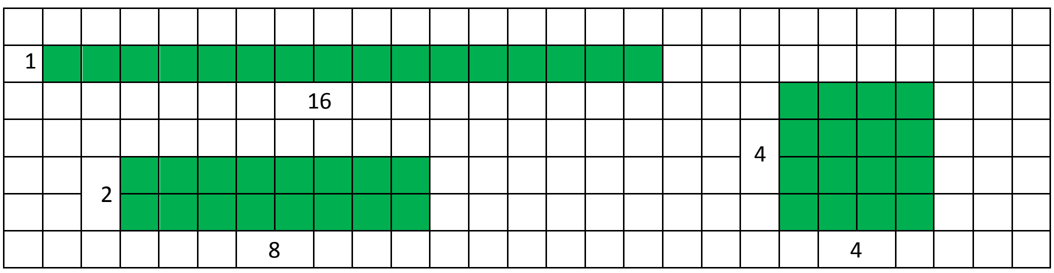
1 caixa com 10 (10:1 = 10), 2 caixas com 5 (10:2 = 5), 5 caixas com 2 (10:5 = 2) e 10 caixas com 1 (10:10 = 1), logo os divisores de 10 são:

D(10): 1, 2, 5 e 10

Observação: **Obtenção dos divisores pelo processo geométrico**.

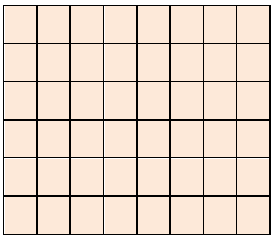
Vamos achar os divisores de 16 ou fatores de 16 pelo processo geométrico.

Em Dante [8], vimos o seguinte processo: Desenhamos todas as regiões retangulares cuja área seja 16 e cujas medidas dos lados sejam números naturais. Essas medidas são os divisores de 16 ou os fatores de 16.



Logo os divisores de 16 são: D(16): 1, 2, 4, 8, 16

Exemplo 2.11. Exemplo visto em Dante [8]: Pela figura abaixo podemos descobrir dois dos divisores de um número natural. Escreva qual é esse número natural e quais são os dois divisores. Depois descubra os demais divisores e escreva em ordem crescente.



Podemos resolver esse problema, encontrando o número de quadrados da figura que é o número pedido.

Então, o número é 48 e os divisores são 6 e 8 (6 x 8), e os demais divisores são:

D(48): 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48

VOCÊ SABIA?
Um número é chamado de **perfeito** quando a soma de seus divisores, excluindo ele mesmo, é igual ao próprio número. O número 6, por exemplo, é perfeito, pois seus divisores são 1, 2, 3 e 6 e, excluindo o 6, temos: $1 + 2 + 3 = 6$

2.4. *Problemas didáticos para sala de aula*

Os problemas didáticos relacionados aos *números naturais e seus divisores* tem o objetivo de orientar para o ensino histórico e aplicativo dos números naturais para os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental.

Não devemos esquecer que o conhecimento acadêmico e conhecimento escolar têm suas características próprias e se diferem pelas diversidades em cada tempo de abstração e contexto.

Portanto, não será apresentado aqui a Matemática com demonstrações e minúcias que o rigor exige para resolver um dado problema, mas sim situações mais leves com atividades que permitam o amadurecimento de conceitos e técnicas de cálculo.

Problemas Propostos

1. Problema visto em Dante [8], que pede: Indique qual a ideia da adição está envolvida em cada situação e responda às questões.

(a) Marcelo tinha 123 reais e ganhou de sua tia uma nora de 50 reais. Com quanto ela ficou?

(b) A coleção de Marta tem 60 adesivos e a de Ana tem 50 adesivos. Reunindo as duas coleções, quantos adesivos temos?

(c) Pedro já caminhou 1450 metros. Se caminhar outros 500 metros, vai completar um percurso de quantos metros?

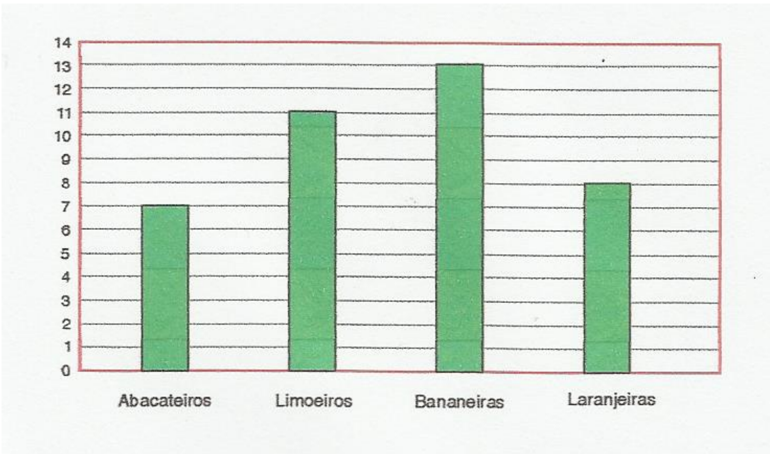
2. Problema visto em Dante [8], que pede: A tabela mostra quantos pontos marcou cada time numa partida de basquete.

Ache o total de pontos de cada time. Depois, responda em seu caderno:

Qual foi o vencedor da partida e por qual placar?

	1º tempo	2º tempo
Time de Ouro	51 pontos	47 pontos
Time de prata	54 pontos	46 pontos

3. [Saresp, Banco de Questões] O gráfico abaixo mostra a quantidade de árvores de sítio:



(a) Quantas árvores estão plantadas nesse sítio?

(b) Qual é o tipo de árvore mais plantada? Quantas?

(c) Qual é a diferença entre o número de limoeiros e o de laranjeiras plantadas?

4. Lúcia saiu para fazer compras com 2 notas de R$ 100,00 na carteira. Gastou no supermercado R$ 142,00, na padaria R$ 6,00 e no açougue R$ 32,00. Com quanto Lúcia ficou após essas compras? Problema visto em Andrini [5].

5. Em um estacionamento os carros ficam em disposição retangular com 12 linhas e 13 colunas. No momento em que houver 68 carros estacionados ainda haverá vagas para quantos carros? Problema visto em Dante [8].

6. Determine os naturais que são

(a) divisores de 36;
(b) divisores de 42;
(c) divisores de 36 e também de 42.

7. Miriam tem 90 fotos para colar em seu álbum. Sabendo que cada página deve conter a mesma quantidade de fotos. Responda às questões abaixo.

(a) Se o álbum tiver 15 páginas, quantas fotos ela poderá colar em cada página?

(b) Ela poderá colar 4 fotos em cada página? Justifique sua resposta.

8. ...É fácil saber quando um ano é bissexto (fevereiro com 29 dias). É só verificar se o ano é dado por um número divisível por 4 ou, no caso dos anos terminados em 00, se o número é divisível por 400.

Assinale entre as datas indicadas qual coincide com ano bissexto. Justifique sua resposta com cálculos. Problema visto em Bianchini [6]

(a) 1792 – Execução de Tiradentes

(b) 1930 – Revolução de 30

(c) 1876 – Invenção do telefone por Alexandre Graham Bell

(d) 1992 – Olimpíadas de Barcelona

CAPÍTULO 3

NÚMEROS PRIMOS

Neste capítulo será proposto um estudo didático sobre os números primos para o 6º ano do Ensino Básico, nesse caso justificado pela necessidade de uma abordagem histórica dos números primos e na aplicação desses números na fatoração dos números naturais.

Continuando o capítulo, será feito um estudo das aplicações dos números primos no processo de obtenção da raiz quadrada de um número natural. Abordaremos também, o crivo de Eratóstenes, para descobrimos todos os primos menores do que um número dado. Por fim, abordaremos diversos problemas acerca dos números primos.

3.1. Introdução aos números primos

Na formação do conjunto dos números Naturais existe um tipo de numeral que possui a propriedade de ser *divisível somente por um e por ele mesmo*, recebendo a denominação de *número primo* (palavra que vem do latim *primus*, que significa primeiro). A descoberta dos números primos é imprescindível na Matemática, pois eles intitulam o princípio central na teoria dos números, consistindo no Teorema Fundamental da Aritmética. Esse Teorema satisfaz uma condição interessante no conjunto dos números naturais, ele afirma que: *todo número inteiro natural, sendo maior do que 1, pode ser escrito como um produto de números primos*, enfatizando a hipótese que o número 1 não pode ser considerado primo, pois ele tem apenas um divisor e não pode ser escrito na forma de produto de números primos.

O número **2** é o único número *primo par*, já que todos os demais números pares possuem ao menos 3 divisores, dentre eles a *unidade, o próprio número e o número 2*.

A partir dos números primos é que formamos os números maiores do que 1 que não são primos.

Veja: 2 é primo e 3 é primo. Com eles formamos o 6 (2 x 3), o 12 (2 x 2 x 3), o 18 (2 x 3 x 3), etc.

Exemplo 3.1. Observe os divisores de alguns números naturais:

(a) os divisores de 9 são: 1, 3 e 9

(b) os divisores de 3 são: 1 e 3

(c) os divisores de 24 são: 1, 2, 3, 4, 6, 12 e 24

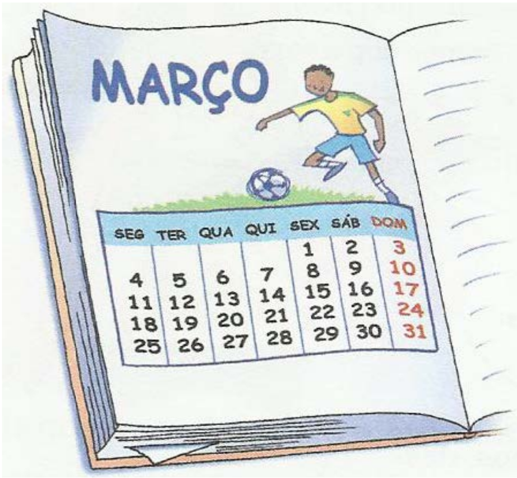
(d) os divisores de 7 são: 1 e 7

Entre os números 9, 3, 24 e 7, podemos afirmar que:

3 e 7 são ***primos***, pois são maiores do que 1 e só têm 2 divisores;

9 e 24 são números ***compostos***, pois têm mais do que dois divisores.

Exemplo 3.2. Observe a folha de calendário do mês de março de 2014.



(a) Há alguma segunda-feira representada por um número primo?

Observando o calendário, notamos que só existe uma segunda-feira representada por um número primo, que é dia 11.

(b) Quantos fins de semana (sábado e domingo) existem nesse mês cujos dois dias são representados por números primos?

Observando o calendário, notamos que apenas o primeiro fim de semana está representado por números primos.

(c) Qual dia da semana desse mês é representado pela maior quantidade de números primos?

Observando o calendário, notamos que o domingo é o dia com a maior quantidade de números primos.

Saiba um pouco mais sobre os números primos.

Os matemáticos já provaram, por exemplo, que há infinitos números primos. No entanto, não encontramos um padrão geral para a formação dessa sequência.

A partir de 1951, computadores vêm procurando determinar números primos cada vez maiores. Existem sites especializados na busca desses números.

Como curiosidade, Michael Shafer, estudante de engenharia química em Michigan, EUA, descobriu um número primo com 6 320 430 algarismos. Shafer usou 200 mil computadores durante dois anos. Ele participava do projeto GIMPS, juntamente com 60 mil voluntários no mundo, com o objetivo de compartilhar máquinas para achar números primos maiores.

Qual é o interesse de encontrar esses números enormes? Por exemplo, para proteger os computadores contra hackers.

Os números primos são usados na criptografia, ciência que estuda as formas de se enviar uma mensagem em código. Na computação, a criptografia consiste em técnicas e processos que permitem armazenar e trocar informações de forma que somente as pessoas autorizadas tenham acesso a elas.

GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search) é um grupo que busca grandes números primos, utilizando uma fórmula matemática chamada fórmula de Mersenne.

O mistério dos *números primos* passou a ser considerado o maior problema matemático de todos os tempos. Em meados do século XIX, o alemão ***Bernhard Riemann*** formulou uma hipótese: *é possível uma harmonia entre esses números primos, à semelhança da harmonia musical*. A partir de então, as mentes mais ambiciosas da matemática embarcaram nessa procura que parece não ter fim. Atualmente, estipulou-se o prêmio de um milhão de dólares para quem provar a hipótese. (www. Youtube.com/Vídeo: *A história dos números primos*)

VOCÊ SABIA?

O matemático *Christian Goldbach*, em 1742, conjecturou que "todo número par maior do que 4 é igual à soma de dois números primos". Por exemplo, 8 = 3 + 5; 12 = 5 + 7; 30 = 13 + 17; 46 = 17 + 29; etc.

3.2. *CRIVO DE ERATÓSTENES*

Embora não exista uma regra para descobrir todos os primos, é possível encontrar todos os primos menores que um dado número. Uma maneira de encontrar é através de um processo chamado de ***crivo*** que elimina sistematicamente os números compostos deixando passar pelo crivo apenas os números primos. Vamos apresentar o crivo desenvolvido por **Eratóstenes** (matemático grego 276 a.C – 194 a.C), o terceiro bibliotecário chefe da Biblioteca de Alexandria.

Eratóstenes, matemático grego (276 a.C – 194 a.C.).

O **Crivo de Eratóstenes** é um método bastante prático para encontrar os primos de *2* até um *valor limite*, que pode ser feito a mão e é fácil de implementar.

Acompanhe a seguinte situação no exemplo a seguir:

Exemplo 3.3. Quais são os números primos até 100?

1º) Construa um quadrado com os números naturais de 2 até 100.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

2º) Risque os múltiplos de 2 maiores do que ele.

3º) Risque os múltiplos de 3 maiores do que ele.

4º) Risque também os múltiplos de 5 e os de 7 maiores do que eles.

Os números que não foram riscados são os números primos até 100.

Logo, os números primos menores do que 100 são:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 15, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 e 97

PROBLEMA 3.1. Lembra-se do crivo de Erastóstenes que você montou no exemplo 3.3? Use-o para responder às questões:

a) Quantos são os números primos menores do que 50?

b) Uma vila teve casas numeradas de 30 a 50. Quantas foram numeradas com números primos?

3.3. Decomposição de um número natural em fatores primos

Todo número natural não-primo maior do que 1 pode ser escrito na forma de multiplicação indicada, que é chamada ***forma fatorada completa***, em que todos os fatores são números primos.

Veja, por exemplo, o número o número 36 escrito como produto de dois ou mais números naturais. São algumas fatorações do número 36.

$$36 = 6 \times 6$$
$$36 = 2 \times 18$$
$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$
$$36 = 2 \times 2 \times 9$$

De todas as fatorações do número 36, há uma em que todos os fatores são números primos: $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$. Ela é a ***decomposição*** *do número 36 em fatores primos ou a* ***fatoração completa*** *do número 36*.

Para chegar à forma fatorada completa de um número natural, fazemos uma *decomposição em fatores primos*, que consiste em:

- dividir inicialmente o número dado por seu menor divisor primo;
- dividir o quociente por seu menor divisor primo;
- repetir esse procedimento até obter o quociente 1.

Acompanhe, por exemplo, a decomposição do número 40 em fatores primos (*fatoração sucessiva*):

$$\begin{array}{r|l} 40 & 2 \longrightarrow \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

2 é o menor divisor primo de 40, temos que $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$

Usando potências, teremos: $40 = 2^3 \times 5$

Do ponto de vista da estrutura multiplicativa dos naturais, os números primos são os mais simples e ao mesmo tempo são suficientes para gerar todos os números naturais, conforme exemplo acima, podemos citar o **Teorema Fundamental da Aritmética**, que diz: *Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.* Teorema visto em Hefez [1].

PROBLEMA 3.2. Decomponha em produtos de primos os seguintes números: 4, 6, 8, 28, 36, 84, 320 e 2 597.

Sugestão: Para o número 2 597, note que se esse número é composto há certamente um número primo p < 51 que o divide, pois 51^2 > 2 597 (Critério de parada do crivo de Eratóstenes).

PROBLEMA 3.3. Faça a fatoração completa dos números abaixo, usando a fatoração sucessiva.

a) 40

b) 54

d) 72

3.4. Contagem de divisores naturais de um número natural

Sabemos que os divisores positivos de um número natural n são todos os números naturais, p , $p>0$, tais que n dividido por p deixa resto zero.

Em outras palavras, dizemos que p é um divisor positivo de um número natural n se:

(i) $p > 0$
(ii) e se o resto da divisão de n por p for zero.

Com isso, se p for um divisor natural de um número natural n, então existe um número natural m tal que $n = p.m$
Indicamos esse fato por $p \mid n$ (Lemos p divide n).
Simbolicamente, $p \mid n$, se $n = p.m$, com $m \in N$.

Como, então, determinar a quantidade de divisores de um número natural não nulo?

Vamos ver um exemplo simples, antes de generalizarmos a contagem dos divisores de um número.

Exemplo 3.4. Quais os divisores naturais do 1?

Resposta: Apenas o 1.

Exemplo 3.5. Quais os divisores naturais do 2?

Resposta: São 1 e 2.

Exemplo 3.6. Quais os divisores naturais do 4?

Resposta: São 1, 2 e 4

Exemplo 3.7. Quais os divisores naturais do 12?

Resposta: São 1, 2, 3, 4, 6 e 12

Exemplo 3.8. Formas fatoradas de:

- $12 = 2^2 \cdot 3$
- $15 = 3^1 \cdot 5$
- $15 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1$
- $27 = 3^3$
- $27 = 2^0 \cdot 3^3$

Mas como faríamos para contar a quantidade de divisores naturais de um número, se ele não fosse tão pequeno como nos exemplos mostrados?

Podemos utilizar para isto o ***Princípio Fundamental da Contagem***.

Vejamos, então, como determinar a quantidade de divisores de um número natural, por exemplo 120, utilizando o ***Princípio Fundamental da Contagem***.

Inicialmente, fatorando o número 120, encontramos que $120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ veja:

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \boxed{\mathbf{2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1}} \end{array}$$

Todos os divisores naturais do120 serão da forma $2^{x} \cdot 3^{y} \cdot 5^{z}$, onde:

x = 0 ou 1 ou 2 ou 3;
y = 0 ou 1;
z = 0 ou 1.

Deste modo, há **4** possibilidades para o valor de **x**; **2** possibilidades para o valor de **y** e **2** possibilidades para o valor de **z**.

Pelo ***Princípio Fundamental da Contagem*** ou ***Princípio Multiplicativo***, o número total de possibilidades de escolhermos, simultaneamente, um valor para **x**, um valor para **y** e um para **z** será dado pelo produto **4 · 2 · 2 = 16**.

Portanto, o número 120 possui 16 divisores naturais.

O raciocínio acima, pode ser genericamente resumido da seguinte forma:

Dado um número natural n, $n > 1$, cuja forma fatorada seja $n = 2^{x}.\, 3^{y}.5^{z}\ldots$, com $x, y, z, .. \in N$, a quantidade de divisores de n será igual a $(x+1).(y+1).(z+1)\ldots$

Agora, querendo descobrir quantos divisores *naturais pares* o 120 possui, basta utilizar o procedimento citado, sem adicionar 1 ao expoente do fator 2.

Assim, o 120 possui $3.(1+1).(1+1) = 12$ divisores pares, a saber: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 20, 24, 30, 40, 60, 120.

Esse raciocínio pode ser assim resumido:

Dado um número natural n, $n > 1$, cuja forma fatorada seja $n = 2^{x}.\, 3^{y}.5^{z}\ldots$, com $x, y, z, .. \in N$, a quantidade de divisores naturais pares de n será igual a $x.(y+1).(z+1)\ldots$

A quantidade de divisores *ímpares* de um número natural n é obtida subtraindo a quantidade de divisores pares da quantidade total de divisores naturais de n.

No caso particular de 120, temos 16 – 12 = 4 divisores ímpares, a saber 1, 3, 5, 15.

PROBLEMA 3.4. Calcule e responda:

a) Quantos são os divisores de 225?

b) Quantos e quais são os divisores de 121?

c) Quantos e quais são os divisores de 128?

PROBLEMA 3.5. Determine o número de divisores positivos de 1800.

3.5. CÁLCULO DA RAIZ QUADRADA: Uma importante aplicação da decomposição de um número natural em fatores primos.

Os exemplos a seguir mostram como usar a decomposição em fatores primos no cálculo da raiz quadrada de um número natural.

a) $\sqrt{144} = ?$
Processo prático

$$\begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{144} = \sqrt{2^2 . 2^2 . 3^2} = 2.2.3 = 12$$

Logo, $\sqrt{144} = 12$, pois 12 . 12 = 144 ou $12^2 = 144$

b) $\sqrt{1089} = ?$
Processo prático

$$\begin{array}{r|l} 1089 & 3 \\ 363 & 3 \\ 121 & 11 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{1089} = \sqrt{3^2 \,.\, 11^2} = 3 \,.\, 11 = 33$$

Logo, $\sqrt{1089} = 33$, pois 33 . 33 = 1089 ou $33^2 = 1089$

c) $\sqrt{392} = ?$

Processo prático

392	2
196	2
98	2
49	7
7	7
1	

Não é possível agrupar todos os fatores primos de 392 dois a dois, com fatores iguais, pois sobra um fator 2.

Isso significa que $\sqrt{392}$ não é raiz quadrada exata, ou seja, não existe número natural que elevado ao quadrado dê 392.

PROBLEMA 3.6. Use a decomposição em fatores primos e calcule as raízes quadradas exatas.

a) $\sqrt{64}$ b) $\sqrt{225}$ c) $\sqrt{361}$ d) $\sqrt{6561}$ e) $\sqrt{15625}$


Use uma calculadora para conferir suas respostas.

NÚMEROS PERFEITOS E NÚMEROS AMIGOS

Os antigos pitagóricos, discípulos do matemático e filósofo Pitágoras (582 a.C – 497 a.C), acreditavam que tudo podia ser explicado por meio de números. Apreciavam charadas e atribuíam qualidades aos números, classificando-os, por exemplo, em ***perfeitos*** e ***amigos***.

Números perfeitos: Os gregos chamavam de ***número perfeito*** o número cuja soma dos divisores próprios (não inclui o próprio número) dele é igual ao próprio número. O 6 é o primeiro número perfeito, pois

D(6): 1, 2, 3 e 6; 1 + 2 + 3 = 6.

Números amigos: Os pitagóricos diziam que dois números são amigos ou “amigáveis” quando cada um é igual à soma dos divisores próprios do outro. Um par de números amigos é formado pelos números 220 e 284. Observe:

D(220) : 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 e ~~220~~;
1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284

D(284) : 1, 2, 4, 71, 142 e ~~284~~;
1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220

“Pitágoras, segundo informações, dizia que um amigo é alguém que é outro eu, tal como 220 e 284”

Fonte: *Bernard H. Gundlad. Trad. Hygino h.Domingues. Números e numerias – Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula. São Paulo, Atual, 1992.*

3.6. *Problemas Propostos*

1. As idades dos irmãos - As idades de dois irmãos somam a idade do pai deles: 45 anos. Se as idades dos irmãos forem multiplicadas, o número que se obtém é o da idade do Brasil no ano 2000. Qual é a idade do irmão mais velho? Problema visto em Iezzi [4].

Em 2000 o Brasil completou 500 anos. Logo, o produto das idades é 500.

Podemos resolver esse problema, analisando as multiplicações de resultado 500:

1 x 500 2 x 250 4 x 125 5 x 100 10 x 50 20 x 25

Como a soma das idades é 45 anos, elas só podem ser 20 e 25 anos. Então, o mais velho tem 25 anos.

2**.** Num colégio há duas classes de 6º ano, uma delas com 5 alunos a mais do que a outra. Multiplicando o número de alunos das duas classes, o resultado dá 300. Quantos alunos tem cada classe? Problema visto em Iezzi [4].

Analisando as multiplicações de resultado 300, temos:

1 x 300 2 x 150 3 x 100 4 x 75 5 x 60 10 x 30 12 x 25 15 x 20

Como a das classes tem 5 alunos a mais do que a outra e o produto é 300, elas só podem ter 15 e 20 alunos.

3. Troque ideias com um colega e responda:

(a) Qual é o número natural cuja fatoração completa é 3×5^2?

(b) $2^2 \times 7 \times 11$ é a decomposição em fatores primos de que número?

(c) Que número decomposto em fatores primos é igual a $2^3 \times 5 \times 7^2$?

(d) Quais são os números primos que aparecem na fatoração completa de 720?

4. Um terreno de forma quadrada tem área de 1 764 m^2. Qual é o seu perímetro? (Sugetão: Use a raiz quadrada)

5. A professora de Matemática pediu aos alunos da classe que formassem grupos para fazer um trabalho. Todos os grupos deviam ter o mesmo número de alunos; era preciso formar mais de um grupo, e ninguém poderia ficar sozinho. Como a classe tem 36 alunos, poderiam ser formados, por exemplo, 4 grupos com 9 alunos (4 x 9 = 36). Existem outras possibilidades de formação desses grupos. Quais são elas?

6. A soma de dois números primos é 40. A diferença entre eles é 6. Quais são esses números?

7. A fatoração completa do número 1200 é $2^{\mathbf{a}} \times 3^{\mathbf{b}} \times 5^{\mathbf{c}}$. Qual o valor de a + b + c?

8. Quando você decompõe 240 em fatores primos, obtém $2^{\mathbf{x}} \times 3 \times 5$. Quanto vale x?

9. Ao decompor 1620 em fatores primos, você obtém $2^2 \times n \times 5$. Qual é o fator que você deve colocar no lugar de *n* para que a forma fatorada represente o número 1620?

10. A = 2 x 3 x 11 e B = $2^2 \times 3^2 \times 5$ são as decomposições de dois números naturais. Calcule A + B.

CAPÍTULO 4

MÁXIMO DIVISOR COMUM (MDC)

4.1. Introdução ao estudo do MDC

Neste capítulo será mostrado que o ensino do MDC (máximo divisor comum) ocorre em um período da vida da criança (6º ano) no qual ela já possui várias experiências no seu dia a dia que utilizam o raciocínio da divisão de dois ou mais números naturais em partes iguais, atitudes estas, que envolvem o conceito básico de MDC.

Tendo isso em vista, muitas vezes o ensino deste conceito ocorre primeiramente com um caráter estritamente matemático, e em seguida vem como uma ferramenta para a resolução de problemas do segmento escolar do aluno.

Mas o ensino abordado desta maneira leva o aluno a não compreender a aplicação do MDC em situações-problema, uma vez que não foi feita uma reflexão prévia, sem a utilização do conceito matemático, de forma que os próprios alunos construíssem um raciocínio sobre como procederiam, sem a utilização das definições e algoritmos.

Para tanto, vamos introduzir o conceito do MDC com uma situação contextualizada, que irá levar o aluno a resolver o problema por um raciocínio próprio, construindo o seu próprio procedimento.

De modo geral, os objetivos deste capítulo sobre MDC são:

- Determinar o ***maior divisor comum (MDC)*** de dois ou mais números naturais.
- Entender os dois principais métodos para determinar o MDC entre dois ou mais números naturais.

Acompanhe a situação a seguir:

Roberval tem 12 selos e 30 figurinhas repetidas. Ele quer reparti-los igualmente entre um grupo de amigos de modo que não sobrem selos nem figurinhas. Qual é o número máximo de amigos que o grupo pode ter para que isso seja possível?

Os 12 selos podem ser distribuídos entre:

$$\underbrace{\text{1, 2, 3, 4, 6 ou 12 amigos}}_{\text{divisores de 12}}$$

Assim, D(12): 1, 2, 3, 4, 6, 12.

As 30 figurinhas podem ser distribuídas entre:

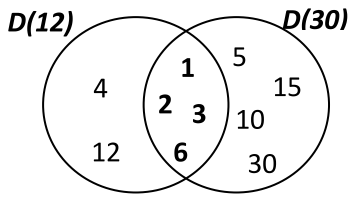
$$\underbrace{\text{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 ou 30 amigos}}_{\text{divisores de 30}}$$

Assim, D(30): 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.

Então, os selos e as figurinhas podem ser distribuídos, ao mesmo tempo, entre:

$$\text{1, }\underbrace{\text{2, 3 ou 6 amigos}}_{\text{divisores comuns (dc) de 12}}$$

Assim, ***dc*** (12, 30): 1, 2, 3, 6.



O número máximo de amigos que o grupo pode ter é 6 (***máximo divisor comum*** de 12 e 30).

Indicamos assim: ***mdc (12, 30) = 6***.

Então, Roberval deve repartir os selos e as figurinhas para um grupo de 6 amigos.

Para tanto, podemos definir o ***máximo divisor comum (MDC)*** como sendo, o maior divisor comum de dois ou mais números naturais.

Em Hefez [1] encontramos a seguinte definição de máximo divisor comum.

Definição 4.1 (MDC)**.** Diremos que ***d*** *é um máximo divisor comum (mdc) de* ***a*** *e* ***b*** *se possuir as seguintes propriedades:*

(i) d *é um divisor comum* de ***a*** e de ***b***.

(ii) d *é divisível por todo divisor comum de* ***a*** *e* ***b****.*

4.2. Propriedades básicas do MDC

Sejam a e b $\in$ N. Então:

(i) mdc (0, a) = a

(ii) mdc (1, a) = 1

(iii) mdc (a, a) = a

(iv) se a|b, então mdc (a, b) = a

4.3. Cálculo do MDC

4.3.1. Decomposição em fatores primos

Um modo de calcular o **m.d.c**. de dois ou mais números é utilizar a decomposição desses números em fatores primos.

- *decompomos os números em fatores primos*;
- *o m.d.c. é o produto dos fatores primos comuns*.

Exemplo 4.1. Determine o MDC dos números em cada item abaixo:

(a) mdc(35, 21)

35, 21	3	
35, 7	5	
7, 7	7	← único fator comum
1, 1		

mdc(35, 21) = 7

(b) mdc(165, 90)

165, 90	2	
165, 45	3	
55, 15	3	3 . 5 = 15
55, 5	5	
11, 1	11	
1, 1		

mdc(165, 90) = 15

(c) mdc(15, 28)

15, 28	2	
15, 14	2	
15, 7	3	mdc(15, 28) = 1
5, 7	5	
1, 7	7	
1, 1		

Como não há fator primo comum, o mdc é 1, que é divisor de todos os números naturais.

Observação 1*:** Quando dois ou mais números apresentam o máximo divisor comum igual a 1, eles são chamados ***primos entre si.

O MDC de dois ou mais números, quando fatorados, é o produto dos fatores comuns a eles, cada um elevado ao menor expoente.

Aplicando a decomposição em fatores primos, resolva os problemas a seguir:

PROBLEMA 4.1. Escreva:

(a) os divisores de 15, indicando por D(15), e os divisores de 9, indicando por D(9).

(b) os *divisores comuns* de 15 e 9, indicando por ***mdc***(15, 9).

(c) o *máximo divisor comum* de 15 e 9, indicando por ***mdc***(15, 9).

PROBLEMA 4.2. Usando o algoritmo da decomposição em fatores primos, determine:

(a) mdc (18, 25)

(b) mdc (14, 21)

(c) mdc (14, 16, 18)

(d) mdc (16, 21, 25)

Em que itens os números são primos entre si?

PROBLEMA 4.3. Tenho 84 balas de coco, 144 balas de chocolate e 60 balas de leite. Quero formar saquinhos de balas. Sem misturar sabores e sem que sobrem balas. Todos os saquinhos devem ter a mesma quantidade de balas, que deve ser a maior possível.

(a) Quantas balas devo colocar em cada saquinho?

(b) Quantos saquinhos devo formar?

4.3.2. Processo das divisões sucessivas (Algoritmo de Euclides)

Um importante processo para calcular o Máximo Divisor Comum entre dois números é o conhecido como Algoritmo de Euclides para determinação do MDC. Esse processo é um dos algoritmos mais antigos que se tem conhecimento (data de cerca de 300 anos A.C.) e pode ser encontrado no Livro VII da obra ***Os Elementos de Euclides***. Ainda nos dias de hoje, o Algoritmo de Euclides é uma das maneiras mais simples e eficientes de calcular MDC. O procedimento é conhecido como processo das divisões sucessivas, pois é a partir de sucessivas divisões que ele é executado, e baseia-se no seguinte resultado:

Sejam a e b números naturais que, para evitar aborrecimentos desnecessários, suporemos $a > b > 0$. Se **q** e **r** são, respectivamente, o ***quociente*** e o ***resto*** de a por b, então $mdc(a,b) = mdc(b,r)$.

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \hline r & q \end{array} \Longrightarrow mdc(a,b) = mdc(b,r)$$

Considere os exemplos a seguir

Exemplo 4.2. Calcular $mdc(32,12)$

***Resolução*:** Utilizando a divisão euclidiana, pois como foi visto anteriormente $mdc(32,12)$ é igual ao $mdc(12,r)$ em que r é o resto da divisão de 32 por 12, e repetindo sucessivamente a divisão euclidiana, temos:

$$32=12.2+8$$
$$12=8.1+4$$
$$8=4.2+0$$

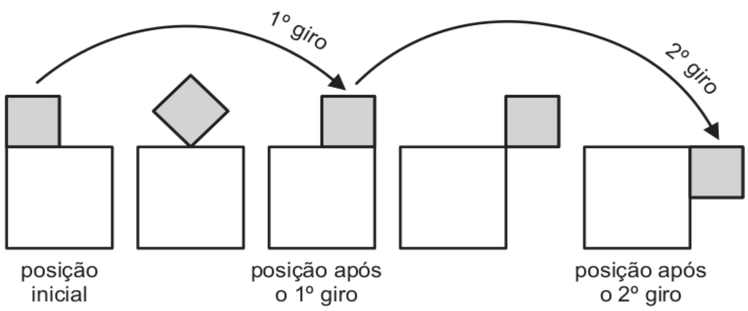
Assim, podemos afirmar que:

$mdc(32,12)=mdc(12,8)=mdc(8,4)=mdc(4,0)=4$ e, dessa forma, $mdc(32,12)=4.$

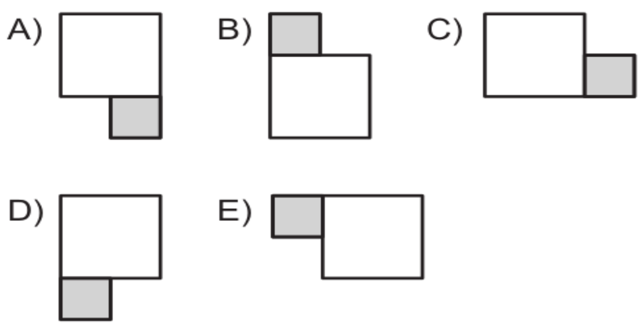
Nas questões da OBMEP, é muito comum a presença de questões que envolvem situações cíclicas, ou seja, que se repetem em um dado momento, questões essas que são naturalmente resolvidas a partir de uma divisão entre dois naturais; porém, frequentemente a solução está associada ao resto, e não ao quociente, daí a necessidade de interpretar tal resto.

Apresentamos a seguir um exemplo de uma questão, aplicada na OBMEP no ano de 2012 na primeira fase do Nível I (6o ano do Ensino Fundamental):

Exemplo 4.3. [OBMEP (2012), 1a Fase, Nível 1] *Um quadrado de lado 1 cm roda em torno de um quadrado de lado 2 cm, como na figura, partindo da posição inicial e completando um giro cada vez que um de seus lados fica apoiado em um lado do quadrado maior.*



Qual das figuras a seguir representa a posição dos dois quadrados após o 2012o giro?



Resolução: *Basta verificar que após oito giros sucessivos o quadrado menor retorna à sua posição inicial. Como 2012 = 8·251+4, após o 2012o giro o quadrado menos terá dado 251 voltas completas no quadrado maior e mais quatro giros, parando na posição que corresponde à alternativa* ***A****.*

Exemplo 4.4. *Usando o algoritmo de Euclides, determine mdc*(186*,*81)*.*

Resolução: Fazendo as divisões sucessivas:

$$\begin{aligned} 186 &= 81 \cdot 2+24 \\ 81 &= 24 \cdot 3+9 \\ 24 &= 9 \cdot 2+6 \\ 9 &= 6 \cdot 1+3 \\ 6 &= 3 \cdot 2+0 \end{aligned}$$

Nesse caso o último resto diferente de zero é 3, portanto *mdc*(186*,*81) = 3

Exemplo 4.5. *Uma questão vista em Iezzi* [4]:

Tenho 84 balas de coco, 144 balas de chocolate e 60 balas de leite. Quero formar pacotes de balas, sem misturar sabores. Todos os pacotes devem ter a mesma quantidade de balas e essa quantidade deve ser a maior possível. Quantas balas devo colocar em cada pacote? Quantos pacotes devo formar?

Resolução: Para determinar o número de balas que deve-se colocar em cada pacote, basta perceber que um divisor comum dos números 84, 144 e 60 garante que todos os pacotes tenham a mesma quantidade de balas, nesse caso para essa quantidade ser máxima, basta tomar o *mdc*(84*,* 144*,* 60), então, o *mdc*(84*,* 144);

$$\begin{aligned} 144 &= 84 \cdot 1+60 \\ 84 &= 60 \cdot 1+24 \\ 60 &= 24 \cdot 2+12 \\ 24 &= 12 \cdot 2+0 \end{aligned}$$

Logo o *mdc*(84*,* 144) = 12, agora calcula-se o *mdc*(12*,*60) = 12, pois 12|60, portanto podemos tomar que *mdc*(84*,* 144*,* 60) = 12. Deve-se tomar 12 balas em cada pacote.

Serão formados 12 pacotes com balas de chocolate, 7 pacotes de balas de coco e 5 pacotes de balas de leite.

Sugestão: Resolva o ***exemplo 4.5*** usando a decomposição simultânea dos números em fatores primos.

Observação 2: No Ensino Fundamental, o cálculo do *mdc* , quando visto, é efetuado usando a decomposição de números primos; quanto a definição de máximo divisor comum, basicamente utilizam a definição por conjuntos, e o cálculo para determinar o *mdc* é baseada na decomposição em números primos; tal exposição não explora diretamente a divisão dos números naturais, um conceito mais simples.

Como o máximo divisor comum já é assunto no Ensino Fundamental, muitas vezes presentes no 6º ano, é viável expor o *Algoritmo de Euclides* como apoio a uma forma alternativa para sua determinação, esta forma mais próxima da vista em textos de Aritmética.

Veja o exemplo a seguir:

Exemplo 4.6. *Usando o algoritmo da decomposição em fatores primos, determine mdc (80,60).*

Resolução: Fazendo as decomposições dos números 80 e 60 respectivamente:

$$\begin{array}{r|l} 80 & 2 \\ 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Como $80 = 2^4 \cdot 5$ e $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, o *mdc*(80,60) será o produto dos fatores primos comuns com o menor dos expoentes de cada fator primo comum, ou seja, *mdc*(80,60) $= 2^2 \cdot 5 = 20$.

Para fazermos uma comparação ente os métodos, vamos resolver aplicando o algoritmo de Euclides.

$$80 = 60 \cdot 1 + 20$$
$$60 = 20 \cdot 3 + 0$$

Portanto o *mdc*(80,60) = 20, observe que apenas bastou uma conta, para obter o resultado desejado, apenas usando a divisão euclidiana. Imagine agora a situação: usando o método da decomposição por números primos, encontrar o *mdc* de dois números grandes; isso resultará em muitas contas para os alunos realizarem, inclusive a dificuldade de saber se um número é ou não primo, um problema de alta complexidade. Desse modo o algoritmo de Euclides leva vantagem.

4.3.3. Números primos entre si

Dois ou mais números são **primos entre si** quando o máximo divisor comum desses números é **1**.

Veja o exemplo a seguir:

Exemplo 4.7. Mostre que os números 7 e 13 são primos entre si.

Resolução: Além do método da decomposição em fatores primos e do Algoritmo de Euclides, podemos usar uma outra alternativa, que em Hefez [1] é chamada de *Lema de Euclides*.

Lema de Euclides : *Dados* ***a, b, n*** $\in$ N *com* ***a < na < b****. Vale a seguinte igualdade:*

$$mdc(a, b) = mdc(a, b-na).$$

Pelo ***Lema de Euclides***, temos:

$mdc(7,13) = mdc(7, 13 - 7) = mdc(7,6) = mdc(6,7- 6) = \mathrm{mdc}(6,1) = 1.$

Portanto, se o mdc(7,13) = 1, logo 7 e 13 são primos entre si.

PROBLEMA 4.4. (PROFMAT-2012) Mostre que, para todo n $\in$ N, é irredutível a fração:
(Sugestão: Use o lema de Euclides)

$$\frac{21n+4}{14n+3}$$

Observação 3: Dados dois ou mais números naturais, **se um deles é divisor de todos os outros**, então **ele é o MDC** dos números dados.

Veja os exemplos a seguir:

Exemplo 4.8. Dentre os números 6, 18 e 30, o número 6 é divisor dos outros dois. Neste caso, 6 é o m.d.c.(6,18,30). Observe:

$$6 = 2 \times 3$$
$$18 = 2 \times 3^2$$
$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

Portanto ***mdc(6,18,30) = 6***

Exemplo 4.9. Na escola Começo, o ***6º ano A***, com ***15 alunos***, o ***6º B***, com ***30***, e o ***6º C***, com ***45***, organizaram uma competição que contou com a participação de todos os alunos. Cada turma formou suas equipes. Todas as equipes tinham o mesmo número de alunos e o maior número possível deles.

(a) Quantos alunos participaram de cada equipe?

Resolução: Para descobrimos a quantidade de alunos em cada equipe basta descobrir o MDC entre o número de alunos de cada turma:

$$mdc(15,30,45) = ?$$

Percebendo que 15 é divisor de 30 e 45, então, pela propriedade acima, ele é o mdc dos números dados.

Portanto, 15 alunos participaram de cada equipe.

(b) Qual é o número total de equipes?

Resolução: Para descobrirmos o número de equipes de cada turma, basta dividir o número de alunos de cada turma pelo ***mdc*** encontrado:

15 : 15 = 1; 30 : 15 = 2 e 45 : 15 = 3, então, 1 + 2 + 3 = 6 equipes foram formadas.

4.4. Problemas Propostos

1. Numa classe há 28 meninos e 21 meninas. A professora quer formar grupos só de meninas ou só de meninos, com a mesma quantidade de alunos e usando a maior quantidade possível.

(a) Quantos alunos terá cada um desses grupos?

(b) Quantos grupos de meninas podem ser formados?

(c) E quantos grupos de meninos?

2. Dois números decompostos em fatores primos são escritos da seguinte maneira: $2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 11$ e $3^2 \times 5^3 \times 7$. Qual é o máximo divisor comum entre esses números?

3. Um marceneiro possui duas ripas de madeira, uma com 4m e a outra com 6m. Ele deseja serrá-las em partes iguais de modo a obter o maior comprimento possível. Qual será esse comprimento?

4. Com três árvores de alturas, respectivamente 12m, 15m e 18m, pretende-se tirar tábuas iguais com maior comprimento possível. Qual será esse comprimento?

5. Considere o dispositivo de divisões sucessivas:

O valor de x é:

(A) 12

(B) 36

(C) 48

(D) 60

	1	3
x	y	12
z	0	

6. Alexandre é o irmão mais velho de Regina e Guilherme. Regina tem 12 anos e Guilherme, 10. As idades dos três irmãos são números primos entre si. Determine a idade de Alexandre sabendo que ela é um número múltiplo de 7 e menor que 25. Problema visto em Bianchini [6].

7. (Álvaro Andrini, 2012, 6º ano, p.41) O senhor Sebastião tem uma banca de frutas na feira. Nela há uma penca com 18 bananas e outra com 24 bananas. Ele quer dividir as duas em montes iguais. Qual é o maior número possível de bananas em cada monte? Problema visto em Andrini [5].

8. Quando o mdc de dois números é igual a 1, dizemos que eles são primo entre si.

Usando essa informação, verifique quais desses pares de números são primos entre si.

(A) 4 e 6
(B) 5 e 8
(C) 26 e 39
(D) 55 e 121
(E) 89 e 243

CAPÍTULO 5

MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM (MMC)

5.1. Introdução ao estudo do MMC

Neste capítulo será mostrado o ensino do MMC (mínimo múltiplo comum), abordando inicialmente a ideia de múltiplos de um número natural partindo de uma situação contextualizada, que irá levar o aluno do 6º ano a resolver o problema apenas fazendo o uso da multiplicação.

Na sequência, vamos mostrar a definição e o processo para obter o MMC entre dois ou mais números naturais.

5.2. Múltiplo de um número natural

Considere a seguinte situação:

Paulinho ganhou muitas figurinhas em um jogo com seus colegas.

Para saber quantas figurinhas ganhou, ele está contando de 3 em 3.

Observe que a sequência 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, ... que Paulinho utilizou para contar é a sequência dos números naturais divisíveis por 3 ou a *sequência dos múltiplos de 3*.

Indicamos essas sequências assim:

M(3): 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ...

Se contasse de 4 em 4, Paulinho obteria os *múltiplos* de 4 ou os números naturais divisíveis por 4. Veja a sequência dos múltiplos de 4:

M(4): 0, 4, 8, 12, 16, 20, ...

Como você viu nos casos acima, a sequência dos múltiplos de um número natural não tem fim, é infinita. Esse fato é indicado pelas reticências, colocadas no final.

Se um número é divisível por outro, diferente de zero, então dizemos que ele é *múltiplo* desse outro.

GENERALIZAÇÕES

Os múltiplos de 5 são obtidos fazendo $5 \cdot 0$, $5 \cdot 1$, $5 \cdot 2$, $5 \cdot 3$, e assim por diante.

Se ***n*** é um número natural qualquer, podemos indicar os múltiplos de 5 por $\boldsymbol{5 \cdot n}$, que é uma *generalização* ou uma *forma geral de indicar os múltiplos de 5.*

5.3. Mínimo múltiplo comum (MMC)

Acompanhe a situação a seguir:

Paulo está doente. O médico receitou-lhe um comprimido de 6 em 6 horas e uma colher de xarope de 4 em 4 horas. Seu pai deu-lhe um comprimido e uma colher de xarope à zero hora (meia-noite). Qual é o primeiro horário em que Paulo voltará a tomar comprimido e xarope ao mesmo tempo?

Uma maneira de resolver esse problema é escrever todos os horários e apontar aquele que dá a resposta desejada:

Horários para tomar comprimido: $\underbrace{0,\ 6,\ 12,\ 18,\ 24}_{\text{Múltiplos de 6, até 24}}$

Horários para tomar xarope: $\underbrace{0,\ 4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,}_{\text{Múltiplos de 4, até 24}}\ 24$

Horários em que coincidem os dois remédios: $\underbrace{0,\ 12,\ 24}_{\text{Múltiplos comum de 6 e 4, até 24}}$

Primeiro horário após zero hora: 12, que é *o mínimo múltiplo comum de 6 e 4.*

$$mmc(6, 4) = 12$$

Logo, o primeiro horário após zero hora em que Paulo voltará a tomar comprimido e xarope ao mesmo tempo será às 12 horas (meio-dia).

Para tanto, podemos definir o ***mínimo múltiplo comum (MMC)*** de dois ou mais números naturais não-nulos, como sendo, o menor de seus múltiplos comuns que seja diferente de zero.

Em Hefez [1] encontramos a seguinte definição de mínimo múltiplo comum.

Definição 5.1 (MMC)**.** Diremos que um número m *é um mínimo múltiplo comum (mmc) de* ***a*** *e* ***b*** *se possuir as seguintes propriedades:*

(i) m *é um múltiplo comum* de ***a*** e de ***b***.

(ii) *se* **c** *é um múltiplo comum de* ***a*** *e* ***b**,* então ***m|c***.

5.4. Cálculo do MMC

Vimos como calcular o mmc de dois ou mais números naturais conhecendo os múltiplos de cada um desses números. Existem, porém, outros processos que permitem calcular o mmc entre dois ou mais números naturais. Vamos ver dois desses processos.

5.4.1. Decompondo cada número separadamente

Esse processo consiste em decompor cada número em fatores primos.
Como exemplo, vamos determinar o mínimo múltiplo comum de 280 e 300.

Inicialmente, decompomos cada número em fatores primos:

$$\begin{array}{r|l} 280 & 2 \\ 140 & 2 \\ 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$ e $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$

Multiplicando os fatores primos comuns e não comuns e, entre os fatores com bases iguais, escolhendo aquele que apresente maior expoente, uma vez que procuramos o múltiplo de 280 e 300 ao mesmo tempo.

Então, mmc (280, 300) = $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 8 \cdot 3 \cdot 25 \cdot 7 = 4200$

5.4.2. Decomposição simultânea

Podemos calcular o mmc de dois ou mais números naturais decompondo-os simultaneamente em fatores primos.
Vamos determinar o mínimo múltiplo comum de 280 e 300.

Inicialmente, decompomos simultaneamente os números em fatores primos:

$$\begin{array}{r|l} 280,\ 300 & 2 \\ 140,\ 150 & 2 \\ 70,\ 75 & 2 \\ 35,\ 75 & 3 \\ 35,\ 25 & 5 \\ 7,\ 5 & 5 \\ 7,\ 1 & 7 \\ 1,\ 1 & \end{array}$$

Em seguida, basta efetuar a multiplicação dos fatores obtidos.

Então, mmc (280, 300) = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 4200$

5.5. *Relação entre MDC e MMC*

O mdc (***a, b***) multiplicado pelo mmc (***a, b***) é igual ao produto de ***a*** por ***b***, isto é:

$$\text{mdc}(a, b) \cdot \text{mmc}(a, b) = a \cdot b$$

Por exemplo:

$$\text{mdc}(12, 15) \cdot \text{mmc}(12, 15) = 12 \cdot 15 = 180$$

Esta relação é bastante útil para o caso de querermos encontrar o ***mmc*** e o ***mdc*** de dois números, pois basta encontrar um dele e utilizar a relação acima.

5.6. *Problemas Propostos*

1. Como podemos indicar:

(a) os múltiplos de 6?

(b) os múltiplos de 12?

(c) os múltiplos de 15?

2. Escreva as seguintes sequências:

(a) Múltiplos de 12

(b) M(23)

(c) M(16)

3. Um professor pediu a cada aluno que dissesse um múltiplo de 4 em ordem crescente. Assim, sem pular nenhum número, cada um dos 35 alunos da classe teve sua vez de falar. Qual foi a resposta que o décimo aluno deu? E o vigésimo?

4. Em uma sala de aula o número de alunos presentes é múltiplo de 8. Esse número á maior que 30 e menor que 40. Quantos alunos estão na sala?

5. Qual é o menor número que devemos subtrair de 90 para obtermos um múltiplo de 35?

6. Determine:

(a) os múltiplos de 3 menores que 10;

(b) os múltiplos de 7 maiores que 40;

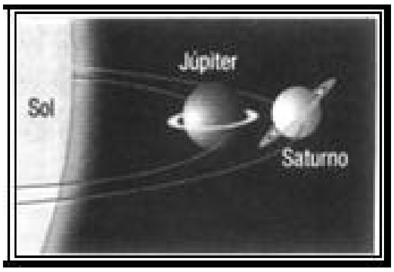
(c) os múltiplos de 5 maiores que 10 e menores que 40;

(d) os múltiplos de 7 compreendidos entre 20 e 60?

7. (Edwaldo Bianchini, 2006, 6º ano, p.123) De uma rodovia, parte um ônibus da empresa X a cada 20 minutos e um ônibus da empresa Y a cada 45 minutos. Supondo que esses dois ônibus partem juntos às 8 horas da manhã, depois de quantos minutos os ônibus das empresas partirão juntos novamente? Problema visto em Bianchini [6].

8. Os planetas Júpiter e Saturno completam uma volta em torno do Sol em aproximadamente 12 e 30 anos terrestres, respectivamente.

Supondo que em certo momento suas posições sejam as da figura, responda:



(a) Depois de quantos anos terrestres eles voltarão a ficar nessas posições?

(b) Quantas voltas cada um deve dar para que isso ocorra?

9. O senhor José Quintino toma:

- Um comprimido de 4 em 4 horas;
- Uma colher de xarope de 6 em 6 horas.

Às 10 horas da manhã ele tomou os dois remédios. A que horas ele voltará a tomar os dois remédios juntos?

10. Um pai e um filho são pescadores. Cada um tem um barco e vão ao mar no mesmo dia. O pai volta para casa a cada 20 dias e o filho a cada 15 dias. Em quantos dias se encontrarão em casa primeira vez?

11. Considere dois rolos de barbante, um com 96 m e outro com 150 m de comprimento. Pretende-se cortar todo o barbante dos dois rolos em pedaços de mesmo comprimento. O menor número de pedaços que poderá ser obtido é:

(a) 38
(b) 41
(c) 43
(d) 52
(e) 64

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho assumiu como objetivo propor possíveis transposições didáticas de alguns tópicos de Aritmética para o Ensino Básico (6º ano). Os temas escolhidos formam os números naturais e suas operações, divisores de um número natural, números primos, o estudo do mdc e mmc e suas aplicações. Para tal, repensou-se nos pré-requisitos necessários para o estudo desses tópicos, concluindo pela possibilidade de um estudo mais abrangente no processo de Ensino Aprendizagem.

Propomos uma abordagem mais abrangente sobre os naturais e seus divisores, com relação à forma tradicionalmente apresentada nos livros didáticos, observando a importância de um melhor conhecimento dos números naturais, partindo do fato histórico até o estudo dos seus divisores naturais através da sua decomposição.

Com este trabalho, podemos observar o notável estudo dos números primos, abordando o processo de reconhecimento de um primo, a decomposição de números naturais em fatores primos. Fizemos uma breve introdução para mostrar o Processo de Erastóstenes para determinar a quantidade de números primos menores do que um número dado e por fim uma aplicação dos primos na obtenção da raiz quadrada de número natural.

Este trabalho aponta ainda para a possibilidade de inserir o conceito do Teorema Fundamental da Aritmética de forma simples e vistas em aplicações, que são do domínio do Aluno do 6ºano do Ensino Fundamental.

O algoritmo de Euclides para determinar o máximo divisor comum de dois números é na maioria das vezes um método muito mais rápido e eficiente do que o método da decomposição em número primos, e quando a divisão euclidiana é bem conceituada e fixada, pode-se apresentar o método de Euclides abertamente e utilizado de forma consciente, não apenas como uma sequência sistematizada de passos.

Uma compreensão do significado do conceito de MDC e MMC leva naturalmente à solução de problemas envolvendo situações que abordam característica práticas do mdc e mmc.

Por fim, esta pesquisa constitui um levantamento de propostas de transposição didáticas, que ao longo do trabalho se mostraram promissoras na sua efetivação na série relacionada (6º ano).

Referências Bibliográficas

[1] HEFEZ, Abramo. *Elementos de Aritmética*. 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011. Coleção textos Universitários.

[2] HEFEZ, Abramo. *Iniciação à Aritmética*. Em HTTP://www. Obmep.org.br

[3] HYGINO H. Domingues. Fundamentos de *Aritmética. São Paulo: Atual, 1991.*

[4] IEZZI, Gelson, et al. *Matemática e Realidade:6º ano.* 6.ed. São Paulo, SP: Atual, 2009.

[5] ANDRINI, Álvaro, Praticando matemática: 6º ano. 3.ed. São Paulo, SP: Editora do Brasil, 2012.

[6] BIANCHINI, Edwaldo, Matemática: 6º ano. 6. Ed, São Paulo, SP: Moderna, 2006.

[7] GIOVANNI Júnior, José Ruy, A conquista da matemática, 6.ed, São Paulo: FTD, 2009.

[8] DANTE, Luiz Roberto, Tudo é matemática. 6º ano. 3. Ed,São Paulo, SP: Ática: 2009.

[9] Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática* /Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997.

[10] Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática* /Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1998.

[11] Brasil, Constituição (1988) – Brasília: Senado Federal, Subsecretaria de Edições Técnicas, 2004.