Universidade Federal do Piauí

Centro de Ciências da Natureza

Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT

Aplicações e resoluções de problemas como metodologia para o ensino de Sistemas Lineares

Luziano Barbosa de Miranda

Teresina - 2014

Luziano Barbosa de Miranda

Dissertação de Mestrado:

Aplicações e resoluções de problemas como metodologia para o ensino de Sistemas Lineares.

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientadora:
Prof. Dra. Liane Mendes Feitosa Soares

Teresina – 2014

FICHA CATALOGRÁFICA

Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castelo Branco
Serviço de Processamento Técnico

SXXXa Miranda, Luziano Barbosa de
Aplicações e resoluções de problemas como Metodologia para o ensino de Sistemas Lineares
Luziano Barbosa de Miranda. – 2014/xxf.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2014.
Orientação: Prof. Dra. Liane Mendes Feitosa Soares
1. Sistemas Lineares. I. Título

XXX 512.5

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus por estar vivo tendo a oportunidade de participar do curso de Mestrado em Matemática.

Agradeço aos meus pais, Luiz Barbosa de Miranda e Osima Rodriguês Bacelar Miranda que me incentivaram na busca do conhecimento.

Agradeço a minha família: Antônia Andrade da Silva Miranda, Emanoel Ívizi, Tyson Andrade Miranda, Vilson Andrade Miranda e Lucielle Andrade Miranda que de uma forma indireta contribuíram para a conclusão do mestrado.

Agradeço aos meus irmãos e sobrinhos pela preocupação que tiveram comigo durante o curso, pois, o deslocamento FLORIANO – TERESINA é bastante cansativo.

Agradeço a todos os meus colegas de curso pelas contribuições na resolução de problemas.

Agradeço a todos os professores e em especial a minha orientadora Doutora Liane Mendes Feitosa.

Agradeço a Universidade Federal do Piauí por acreditar e fazer essa grande parceria com o PROFMAT.

Agradeço a CAPES, ao CNPq e a SEDUC – PI pelo apoio financeiro.

"É uma tolice responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida. É triste trabalhar para um fim que não se deseja. Estas coisas tolas e triste fazem-se muitas vezes, mas cabe ao professor evitar que elas ocorram nas suas aulas".

George Polya

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar os conteúdos de sistemas lineares aos professores de Matemática do Ensino Médio, dando ênfase às situações problemas e aplicações que relacionam os conteúdos com as situações práticas do dia a dia ou com as aplicações, como uma opção de metodologia de ensino. Dessa forma pode-se despertar a curiosidade dos alunos possibilitando aos mesmos uma oportunidade para discussão e exploração dos conteúdos a partir da resolução de problemas. Para tanto, apresentaremos exemplos de aplicações do método para resoluções de problemas desenvolvidos por George Polya.

Palavra – chave: Sistemas Lineares; Aplicações; Resolução de Problemas.

Abstract

This work aims to present the contents of linear systems to teachers of mathematics at the High School level, giving emphasis to situation-problem that relate the formal content with practical situation of everyday life or with applications, as a possibility of teaching method. Thus one can arise student's curiosity enabling them an opportunity for discursion and exploration of the formal content through problem solving. For this aim, it will be presented examples of applications of the method for solving problems developed by George Polya.

Key words: Linear Systems; Applications; Problem Solving.

Sumário

Introdução

De acordo com os PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS: ensino médio – Parte III, MEC, Brasília, 2000 [4], em determinados países e principalmente no Brasil, há uma cultura bastante generalizada de que matemática é difícil, ciência de poucos e pior do que tudo isto: muitos acreditam que se pode viver sem ela. É comum se ouvir de alunos das últimas séries do Ensino Fundamental e também do Ensino Médio: "detesto Matemática." Talvez o formalismo e o rigor da própria Matemática contribuam para isso, bem como os próprios professores contribuem para tal aversão. Todos os profissionais atuantes nesta área devem trabalhar no sentido de eliminar o enigma de que a Matemática é uma ciência para poucos, apenas para os "gênios", pelo contrário, todos podem e devem aprender suficientemente para suprir suas necessidades.

O Governo Federal e o Governo Estadual aplicam testes, tais como, Prova Brasil, SAEB, etc, os quais indicam baixo rendimento dos alunos na área de Matemática. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais 1997 a Matemática tem sido apontada como a disciplina que contribui significativamente para a elevação das taxas de retenção. George Polya (1887 – 1985), no prefácio da segunda edição do seu clássico livro "A arte de resolver problemas", aponta os professores como os grandes responsáveis por esta aversão e indiferença pela Matemática.

> A Matemática tem a duvidosa honra de ser a matéria menos apreciada do curso. Os futuros professores passam pelas escolas elementares a aprender a detestar Matemática. Depois voltam escola elementar para ensinar uma nova geração a detestá-la (POLYA, 1986, p. viii).

De acordo com os PCNs – a, (2000, p. 40), os alunos devem perceber a Matemática como um sistema de códigos e regras com as quais é possível modelar a realidade e interpretá-la. A Matemática deve também ser vista como ciência, assim suas definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outras e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas.

Segundo Polya (1997, p.2), aprender Matemática no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados, a aquisição do conhecimento matemático está vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático, esse domínio passa por um processo lento e trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas. O aluno desenvolve sua inteligência usando-a: ele aprende a resolver problemas resolvendo-os.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais [4], resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado. Resolver um problema é encontrar um caminho onde nenhum outro é conhecido de antemão. Resolver problemas é a realização específica da inteligência, e a inteligência é um dom específico do homem. Se a educação não contribui para o desenvolvimento da inteligência, ela está obviamente incompleta. Entretanto, a inteligência é essencialmente a habilidade para resolver problemas: problemas do cotidiano, problemas pessoais, problemas sociais, problemas científicos, quebra cabeças e toda sorte de problemas. O aluno desenvolve sua inteligência usando-a: ele aprende a resolver problemas resolvendo-os (POLYA, 1997, p. 2).

Dessa forma apresentaremos esse conteúdo sempre procurando associar teoria com situações problemas ou aplicações que à prática, permitindo assim que o aluno não veja os conteúdos de Matemática de forma dissociada da prática. Conforme observa F. B. Abbott (ABBOTT,2011) [1], a resolução de problemas pode efetivamente contribuir para o ensino de Matemática no Ensino Médio. Por outro lado, M. A. Saldanha e M. Y. Noguti (SALDANHA e NOGUTI, 2012) [5], no trabalho "Resolução de problemas: uma metodologia alternativa para o ensino e a aprendizagem de Matemática nas escolas do CASE", mostra que o método de Polya pode ser utilizado de modo eficaz no ambiente escolar do Ensino Médio.

No primeiro capítulo apresentamos um pouco da história dos sistemas lineares e de resolução de problemas. Além disso, mostramos o método de resolução de problemas desenvolvido por Polya. No segundo capítulo estudamos sistemas lineares. Apresentamos exemplos, conceitos, definições e situações problemas que são aplicações interessantes dos sistemas lineares.

Capítulo 1

Elementos Históricos e Metodologia

1.1 Uma visão histórica: Sistemas Lineares

De acordo com texto publicado na Internet [7], na matemática ocidental antiga são poucas as aparições de sistemas de equações lineares. No Oriente, contudo, o assunto mereceu atenção bem maior. Com seu gosto especial por diagramas, os chineses representavam os sistemas lineares por meio de seus coeficientes escritos com barras de bambu sobre os quadrados de um tabuleiro. Assim acabaram descobrindo o método de resolução por eliminação – que consiste em anular coeficientes por meio de operações elementares. Exemplos desse procedimento encontram-se nos Nove Capítulos Sobre Aritmética [10], um texto que data provavelmente do século III a. C.. Mas, foi só em 1683, num trabalho do jabonês Seki Kowa, que a ideia de determinante (como polinômio que se associa a um quadrado de números) veio a ser fortalecido. Kowa, considerado o maior matemático do século XVII, chegou a essa noção através do estudo de sistemas lineares, sistematizando o velho procedimento chinês (para o caso de duas equações apenas).

1.2 Uma visão histórica: Resolução de problemas

Os problemas ocuparam um lugar central nos currículos desde a antiguidade, mas a resolução de problemas não. Só recentemente apareceram educadores matemáticos aceitando a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas merece especial atenção. Os problemas nos currículos remontam, pelo menos, tão longe como os antigos egípcios, chineses e gregos. Por exemplo, o Papiro de Ahmes, copiado pelo escriba Ahmes, cerca de 1650 a. C., de um documento mais antigo, é um manuscrito matemático egípcio que consiste numa coleção de problemas. Num dos problemas, é pedido ao aluno que efetue a soma de cinco termos de uma progressão geométrica, onde o primeiro termo e a razão são ambos 7 (Chase, 1979, PP. 59,136-137). No próprio papiro, só é dada uma forma abreviada do problema, com dois métodos de resolução e a resposta. O fato de o problema referir casas, gatos ratos, etc., para serem adicionados, sugere que era um problema recreativo.

Hoje já se verifica que a resolução de problemas tem cada vez mais sido usado como ferramenta auxiliar no processo de ensino aprendizagem de Matemática. Podemos citar um, como exemplo o reconhecimento nacional do feito realizado pelos alunos de uma Escola Pública de Cocal dos Alves-PI, que sob a orientação do professor de Matemática Antônio Cardoso do Amaral tem mostrado para o mundo que a resolução de problemas como metodologia de ensino de Matemática permite que eles possam aprender com menor dificuldade, com maior interesse e participação. Tem se verificado também que os alunos que resolvem problemas de Matemática têm um melhor aproveitamento nas outras disciplinas. “Conforme a reportagem do JORNAL NACIONAL [8]”.

1.3 Metodologia para a resolução de problemas

Neste trabalho apresentaremos a resolução de problemas como metodologia de ensino e como ponto de partida para o ensino da matemática. O problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento. Os professores, através da resolução de problemas, devem fazer conexões entre os diferentes ramos da matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos. O ensino está centrado no aluno, que constrói os conceitos matemáticos durante a resolução de um problema, sendo a seguir formalizados pelo professor. Assim, apresentaremos a seguir um método para a resolução de problemas muito conhecido que foi proposto por George Polya (POLYA, 1986). Ao final de cada tópico de Sistema Lineares apresentaremos uma seção com resolução de problemas e aplicações onde faremos uso do método de resolução de problemas de Polya.

Como resolver Um Problema? Segundo Polya, a resolução de um problema de matemática se divide em quatro etapas:

*COMPREENSÃO DO PROBLEMA;

*ESTABELECIMENTO DE UM PLANO;

*EXECUÇÃO DO PLANO; E

*RETROSPECTO OU VERIFICAÇÃO.

1ª ETAPA: Compreensão do Problema: É preciso compreender o problema.

* Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual e a condicionante?

* É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória?

* Trace uma figura. Adote uma notação adequada;

* Separe as diversas partes da condicionante, é possível anotá-las?

*EXEMPLO: Um número tem dois algarismos. O algarismo das unidades tem 5 unidades a mais que o algarismo das dezenas. O número considerado é o triplo da soma de seus algarismos. Determine esse número.

1ª ETAPA: A incógnita é x: algarismo das dezenas e y: algarismo das unidades. A condicionante é: $x + 5 = y$: $equação\ (I)\ e\ 10x + y = 3(x + y)$: $equação\ (II)$.

2ª ETAPA: Estabelecendo um plano: Encontre a conexão entre os dados e a incógnita. É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma conexão imediata. É preciso chegar afinal a um plano para a resolução.

*Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente?

*Conhece um problema correlato? Conhece um problema que lhe poderia ser útil?

*Conhece a incógnita. E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra incógnita semelhante.

*Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir um elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?

*É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições.

*Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver um problema correlato. É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema? Mantenha uma parte da condicionante, deixe outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como pode ela variar? É possível obter dos dados alguma coisa de útil? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita, ou outros dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si?

*Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levaram em conta todas as noções essenciais implicadas no problema?

2ª ETAPA: Substituir x por $y - 5$ ou y por $x + 5$ na equação (II) e resolver a mesma, ou ainda resolver o seguinte sistema $\begin{cases} x - y = -5 \\ 7x - 2y = 0 \end{cases}$ que corresponde as equações (I) e (II).

3ª ETAPA: Execução do plano: Execute o seu plano.

* Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo.

* É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?

Executando o plano encontramos $x = 2 \; e \; y = 7$. O número é 27.

4ª ETAPA: Retrospectiva

Examine a solução obtida.

*É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento?

*É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isso num relance?

*É possível utilizar o resultado ou o método em algum outro problema?

Procedendo dessa forma pretendemos:

*Fazer o aluno pensar produtivamente.

*Desenvolver o raciocínio do aluno.

*Preparar o aluno para enfrentar situações novas.

*Dar oportunidade aos alunos de se desenvolverem com aplicações da matemática.

*Tornar as aulas de matemática mais interessantes e desafiadoras.

*Equipar o aluno com estratégias e procedimentos que auxiliam na análise e na solução de situações onde se procura um ou mais elementos desconhecidos.

Examinando a solução: CORRETA, pois $2 + 5 = 7 \; e \; 27 = 3(2 + 7)$.

Capítulo 2

Sistemas Lineares

2.1 Introdução

Um problema fundamental que normalmente é encontrado na descrição matemática de fenômenos físicos e de muitas outras áreas do conhecimento é o da solução simultânea de conjunto de equações. Traduzindo para a linguagem matemática, tais fenômenos passam a ser descritos por um conjunto de m equações em que se deseja determinar a solução de n variáveis de interesse, normalmente chamadas de incógnitas.

O primeiro registro histórico associado a formulação de um problema através de um conjunto ou sistema de equações algébricas lineares foi relatado em um livro chinês – Chiu-chang Suan-shu (Nove Capítulos Sobre Aritmética [10] – escrito aproximadamente 250 anos a. C.. No capítulo VIII desse livro aparece a proposição do seguinte problema:

Problema da colheita:

> Três fardos de uma boa colheita, dois fardos de uma colheita medíocre e um fardo de uma colheita ruim foram vendidos por 39 dou. Dois fardos da boa colheita, três fardos da colheita medíocre e um fardo da colheita ruim foram vendidos por 34 dou. Um fardo da boa colheita, dois fardos da colheita medíocre e três fardos da colheita ruim foram vendidos por 26 dou. Qual o preço recebido pela venda de cada fardo associado a co lheita boa, a colheita medíocre e a colheita ruim?

Na época, os chineses formalizaram esse procedimento empregando pedaços de bambus de diferentes cores para preparar os coeficientes das equações, dispostos de forma organizada em um quadro onde as colunas representavam a qualidade de cada colheita e o total vendido de todas as colheitas. A solução do problema era então obtida por uma sequência ordenada de manipulações nas linhas que compunham o quadro. Séculos se passaram até que os sistemas de equações algébricas lineares fossem redescobertos na Europa, ganhando formas de arranjos numéricos ordenados por linhas e colunas, como são atualmente representados. Para o problema originalmente formulado pelos chineses, tem-se na forma atual a seguinte representação:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

Onde as incógnitas x, y e z representam, respectivamente, o preço recebido pela venda do fardo associado à boa colheita, à colheita medíocre e a colheita ruim.

Segundo a Editar Código-Fonte [10]: a solução deste tipo de problema foi sistematizada pelo matemático alemão Gauss (Carl Friedrich Gauss, nascido em 1777 e falecido em 1855), tornando-se conhecido como método de eliminação de Gauss ou Método do Escalonamento.

Vamos considerar outro exemplo prático para mostrar o quanto são frequentes, em nosso dia a dia, os sistemas de equações. Os mais comuns são os sistemas lineares do 1º grau que ilustraremos com o seguinte exemplo problema:

Caixa de supermercado

Antes de assumir o caixa num supermercado, Cloravina recebe de seu gerente uma sacola contendo moedas, onde está indicado que existem 250 moedas no valor de R$ 40,00. Ao abrir a sacola ela percebe que existem moedas de 25 centavos e de 10 centavos. Quantas moedas de cada espécie Cloravina recebeu de seu gerente?

Tal problema pode ser representado pelo sistema de equações do 1º grau:

$$\begin{cases} x + y = 250 \\ 0{,}25x + 0{,}10y = 40 \end{cases}$$

Onde x e y são, respectivamente, as quantidades de moedas de 25 centavos e de 10 centavos. Para um estudo geral de sistemas lineares, necessitamos de algumas noções preliminares.

2.2 Conceitos e definições

Definição: De acordo com Manoel Paiva V.2 página 126 [6], chama-se equação linear nas incógnitas $x_1, x_2, \ldots x_n$, toda equação sob a forma: $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ em que $a_1, a_2, \ldots a_n, b$ são constantes reais.

Observações:

i) As constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são chamadas de coeficientes enquanto a constante b é denominada de termo independente.

ii) Se $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$, denominaremos como equação homogênes.

iii) Uma solução de uma equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ é uma sequência de n números reais $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tais que $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n = b$. O conjunto de todas as soluções de uma equação é chamado seu conjunto solução ou, as vezes, a solução geral da equação.

Definição: Um sistema de equações lineares, ou simplesmente sistema linear $m \times n$ é um conjunto de m equações com n incógnitas da forma:

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{23}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Lembrando a definição de produto de matrizes, notamos que o sistema linear S pode ser escrito na forma matricial:

$$S: \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

A matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ é chamada matriz principal do sistema e é formada pelos coeficientes de **S.**

O sistema S também pode ser representado pela matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$ denominada matriz ampliada ou matriz completa do sistema **S.**

Observações:

Quando construímos a matriz aumentada, as incógnitas devem estar escritas na mesma ordem em cada equação e as constantes que não multiplicam incógnitas (termos independentes) devem estar à direita.

Definição: Dado um sistema de equações lineares

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{23}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Dizemos que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ é solução desse sistema quando $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ é solução de cada uma das equações do sistema.

Sistemas Equivalentes:

Considere o sistema linear a seguir:

$$S_1 = \begin{cases} x + y + z = -2 \\ 2x + 4y + 5z = 8 \\ -x + 9y + 8z = 50 \end{cases}$$

Resolver esse sistema linear demanda alguns cálculos. Consideremos agora o sistema linear S_2 a seguir.

$$S_2 = \begin{cases} x + y + z = -2 \\ 2y + 3z = 12 \\ -6z = -12 \end{cases}$$

Qual seria mais rápido e fácil de ser resolvido: o sistema linear S_1 ou o sistema linear S_2? Com certeza seria o sistema linear S_2, pois vemos facilmente $z = 2, y = 3 \ e \ x = -7$ que é a solução dos sistema linear.

Veja que a solução de S_2 também é a solução de S_1. Em geral os sistemas lineares não são de resoluções imediatas (muitas vezes podem ser muito trabalhosos, considere, por exemplo, um problema que tenha 200 equações e 200 incógnitas). A ideia de se trabalhar com sistemas lineares equivalentes consiste em transformar um dado sistema linear em outro sistema linear equivalente e de aspecto mais simples de ser resolvido. É do que trataremos a partir de agora.

Operações elementares:

De acordo com a coleção A Matemática do Ensino Médio de Elon Leges Lima volume 3 página 135 [2]. Dado um sistema linear **S**, denominamos operações elementares sobre as equações de **S** as seguintes operações:

1ª Trocar de lugares entre si duas equações;

2ª Multiplicar uma equação por um número real não nulo; e

3ª Somar a uma equação uma outra equação do sistema previamente multiplicada por um número real não nulo.

Justificativas:

Consideramos o sistema linear S: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

1ª trocando de lugares as duas equações, obtemos o sistema linear $S_1: \begin{cases} a_2x + b_2y = c_2 \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$, evidentemente S e S_1 possuem o mesmo conjunto solução.

2ª Se multiplicarmos a mesma a primeira equação de S por k, $k \neq 0$, obtemos o sistema S_2: $\begin{cases} ka_1x + kb_1y = kc_1 \\ \quad a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

Se um par ordenado de números reais (α, β) é solução do sistema S, temos que (α, β) também é solução do sistema S_2 e, reciprocamente, (α, β) é solução do sistema S_2, temos que (α, β) também é solução do sistema S, porque

$$a_1\alpha + b_1\beta = c_1 \Leftrightarrow ka_1\alpha + kb_1\beta = kc_1 \ \ (\forall k \neq 0)$$

Logo, S_2 e S têm o mesmo conjunto solução.

3ª Agora vamos somar à segunda equação de S a primeira multiplicada pelo número real k, obtendo o sistema linear

$$S_3: \begin{cases} \qquad a_1x \quad + \quad b_1y \quad = \quad c_1 \\ (ka_1 + a_2)x + (kb_1 + b_2)y = kc_1 + c_2 \end{cases}$$

Se um par ordenado de números reais (α, β) é solução do sistema S, temos que (α, β) também é solução do sistema S_3 e, reciprocamente, (α, β) é solução do sistema S_3, temos que (α, β) também é solução do sistema S, pois:

Sendo (α,β) solução de S, temos em S que $a_1\alpha + b_1\beta = c_1$, daí substituindo em S_3 temos que $(ka_1 + a_2)\alpha + (kb_1 + b_2)\beta = k(a_1\alpha + b_1\beta) + c_2 \Rightarrow ka_1\alpha + a_2\alpha + kb_1\beta + b_2\beta = ka_1\alpha + b_1\beta + c_2 \Rightarrow a_2\alpha + b_2\beta = c_{2.}$ Logo S_3 e S tem o mesmo conjunto solução.

Definição: Dizemos que dois sistemas lineares são equivalentes, quando um deles pode ser obtido a partir do outro por meio de um número finito de aplicações das operações elementares. Podemos dizer ainda que dois sistemas lineares S_1 e S_2 são ditos equivalentes se, e somente se, admitem o mesmo conjunto solução.

Exemplo: Os sistemas lineares

$$S_1: \begin{cases} 3x + 6y = 42 \\ 2x - 4y = 12 \end{cases} \; e \; S_2: \begin{cases} x + 2y = 14 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$$

São equivalentes porque admitem a mesma solução, a saber $x = 10$ e $y = 2$.

Observe que se multiplicarmos a 1ª linha do sistema S_1 por $\frac{1}{3}$ e a 2ª linha por $\frac{1}{2}$ teremos o sistema linear S_2.

Classificação de um Sistema Linear

De acordo com A coleção A Matemática do Ensino Médio de Elon Leges Lima volume 3 página 109 [2], um sistema linear é classificado de acordo com o número de soluções. Desta forma um sistema linear pode ser:

i) sistema possível e determinado, ou seja, admite uma única solução SPD;

ii) sistema possível e indeterminado, ou seja, admite mais de uma solução SPI;

iii) sistema impossível, ou seja, não admite solução alguma SI.

Interpretação geométrica de uma equação linear 2 × 2

Consideremos a equação linear $ax_1 + bx_2 = m$. Sabemos que o conjunto solução da equação é formada pelos pares de números reais (α,β) tais que $a\alpha + b\beta = m$. Mas existem infinitos pares com essa característica, pois basta tomarmos $\alpha = \frac{m-b\beta}{a}$, onde α depende de β. Observe que a equação $\alpha = \frac{m-b\beta}{a}$, na dependência de β, representa uma função afim cuja representação gráfica é uma reta. Assim, podemos relacionar o conjunto solução de um sistema linear com duas equações e duas incógnitas com a posição relativa entre duas retas como veremos a seguir.

Interpretação geométrica dos sistemas lineares 2×2

Uma maneira de interpretarmos o conjunto solução de um sistema linear 2×2 é relacionar as suas soluções com o número de pontos na interseção de retas (no caso de sistemas lineares com duas variáveis) ou na forma como planos podem se intersectar quando for sistemas lineares com três variáveis. Os pares ordenados de números reais que são soluções de uma equação linear com duas incógnitas determinam, no plano, uma reta. A intersecção das duas retas das equações do sistema determinam sua solução, se existir.

Vejamos a representação gráfica dos três sistemas resolvidos:

$$1)\ \begin{cases} 3x - y = 10 \quad reta\ passando\ por\ (4,2)\ e\ (2,-4), \ldots \\ 2x + 5y = 1 \quad reta\ passando\ por\ (-2,1)\ e\ (3,-1), \ldots \end{cases}$$

Observe que a primeira equação do sistema acima pode ser escrita como: $y = 3x - 10$ que descreve uma reta que passa pelos pontos $(4,-2)\ e\ (2,-4)$ enquanto a segunda equação descreve a reta $y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$ que descreve uma reta passando pelos pontos $(-2,1)\ e\ (3,-1)$.

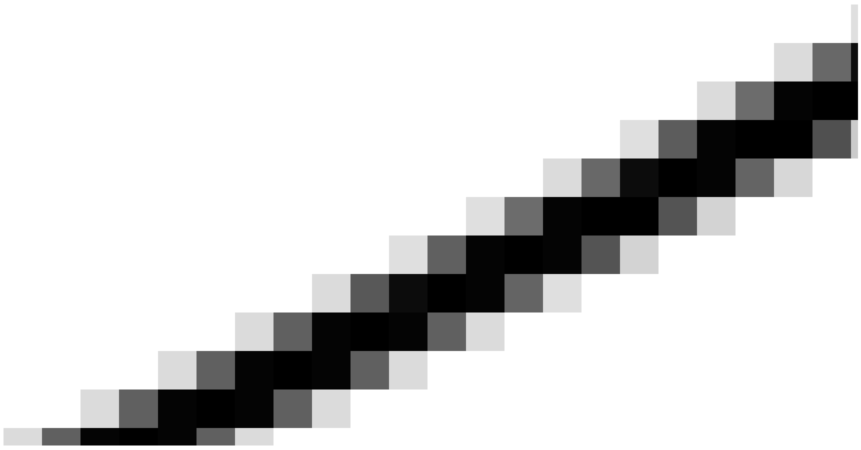
Figura 1

As retas concorrentes indicam que existe um único par ordenado que é a solução do sistema (sistema possível e determinado).

$$2)\ \begin{cases} x - 2y = 5 \ \ reta\ passando\ por\ (1,-2)\ e\ (-1,-3), \ldots \\ 2x - 4y = 2 \qquad reta\ passando\ por\ (1,0)\ e\ (3,1), \ldots \end{cases}$$

Observe que a primeira equação do sistema acima pode ser escrita como: $y = \frac{x-5}{2}$ que descreve uma reta que passa pelos pontos $(1,-2)\ e\ (-1,-3)$ enquanto a segunda equação descreve a reta $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ que descreve uma reta passando pelos pontos $(1,0)\ e\ (3,1)$.

Figura 2



As retas paralelas e distintas indicam que não existe par ordenado que seja solução do sistema (sistema impossível).

$$3)\ \begin{cases} 2x - 6y = 8 \ \ reta\ passando\ por\ (4,0)\ e\ (1,-1), \dots \\ 3x - 9y = 12\ \ reta\ passando\ por\ (4,0)\ e\ (1,-1), \dots \end{cases}$$

Observe que a primeira equação do sistema acima pode ser escrita como: $y = \frac{x-4}{3}$ que descreve uma reta que passa pelos pontos $(4,0)\ e\ (1,-1)$ enquanto a segunda equação descreve a reta $y = \frac{x}{3} - \frac{4}{3}$ que passa pelos pontos $(4,0)\ e\ (1,-1)$.

Figura 3

As retas coincidentes indicam que existem infinitos pares ordenados que são soluções do sistema (sistema possível e indeterminado). Assim, podemos classificar um sistema linear $2\ por\ 2$ de acordo com o número de pontos na interseção entre duas retas da seguinte forma:

i) Se a interseção entre as retas for um ponto, isto é, as retas são concorrentes, teremos que o sistema é possível e determinado, ou seja, admite uma única solução;

ii) Se a interseção entre as retas for mais de um ponto, isto é, as retas são coincidentes, teremos que o sistema é possível e indeterminado, ou seja, admite mais de uma solução;

iii) Se a interseção entre as retas for um conjunto vazio de pontos, isto é, as retas são paralelas, teremos que o sistema é impossível, ou seja, não admite nenhuma solução;

Interpretação geométrica dos sistemas lineares 3×3

De modo análogo podemos interpretar a solução de um sistema linear 3×3 com a interseção de três planos.

i) Se o sistema é possível e determinado, encontramos um trio-ordenado (x, y, z) que satisfaz as três equações. A interpretação geométrica é que os três planos têm em comum um único ponto. Não há outra posição relativa, cujo sistema seja possível e determinado.

ii) Se o sistema é possível e indeterminado, encontramos infinitos trios-ordenados (x, y, z) que satisfazem as três equações. A interpretação geométrica é que todos os planos concorrem em uma reta.

iii) Se o sistema é impossível, não é possível encontrar nenhum trio-ordenado (x, y, z) que satisfaça as três equações ao mesmo tempo. Uma das possibilidades é ter dois planos paralelos e um oblíquo. Dessa forma os planos se interseccionam por pares formando retas, mas elas são paralelas não concorrem, por isso nenhum ponto dessas retas pode ser comum aos três planos ao mesmo tempo.

Sistemas Lineares homogêneos

Um sistema linear onde os termos independentes em todas as equações são iguais a zero é denominado sistema homogêneo. Por exemplo, os sistemas S_1 e S_2 são sistemas lineares homogêneos.

$$S_1 : \begin{cases} 7x - 3y = 0 \\ 4x + 5y = 0 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} 3x + y = 0 \\ 2x - 7y = 0 \\ 12x + 6y = 0 \end{cases}$$

Figura 4

Convém notar que um sistema linear homogêneo $n \times n$ $(n \geq 2)$ é sempre possível, pois admite pelo menos a solução $(0,0,\ldots,0)$ denominada de solução trivial, nula ou imprópria. (observe que todas as retas, na representação gráfica, passam pela origem do sistema).

Resolução de um sistema linear

Resolver um sistema linear significa obter o conjunto solução do sistema. Dentre os vários métodos existentes para a resolução de um sistema, veremos inicialmente o método de resolução por escalonamento.

O método por escalonamento é considerado por muitos como sendo um processo longo e trabalhoso, o qual exige muita concentração e dedicação por parte dos alunos, bem como paciência e planejamento dos professores. No entanto, todos concordam que o método por escalonamento é o único que é capaz de resolver qualquer sistema linear, diferentemente de outros métodos considerados mais simples, os quais terão a oportunidade de serem discutidos posteriormente.

Sistemas escalonados

Definição: De acordo com a coleção A Matemática do Ensino Médio de Elon Leges Lima volume 3 página 133 [2], Um sistema linear ou matriz associada ao sistema

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{23}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

É dito escalonado se, e somente se:

i) Todas as equações apresentam as incógnitas numa mesma ordem;

ii) em cada equação existe pelo menos um coeficiente, de alguma incógnita, não nulo; e

iii) existe uma ordem para as equações, tal que o numero de coeficientes nulos que precedem o primeiro não nulo de cada equação aumenta de uma equação para a outra.

Exemplo: O sistema $\begin{cases} x + y + 3z = 1 \\ 0x + y - z = 4 \\ 0x + 0y + 2z = 5 \end{cases}$ $cuja\ matriz\ ampliada$ é $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ está na forma escalonada.

Há apenas dois tipos de sistemas escalonados a considerar, conforme veremos a seguir:

1º Tipo: o numero de equações é igual ao numero de incógnitas.

Observe o sistema escalonado

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 3 & (I) \\ 0x + 5y - 2z = 1 & (II) \\ 0x + 0y + 3z = 6 & (III) \end{cases}$$

Para resolver este tipo de sistema , basta determinar o valor de z pela equação (III): $3z = 6 \Longrightarrow z = 2$.

Portanto, substituindo $z = 2$ na equação (II) encontramos o valor de $y = 1$ e, substituindo os valores determinados para y e z na equação (I), teremos $x = -\frac{1}{3}$ e o conjunto solução é $S = \left\{-\frac{1}{3}, 1{,}2\right\}$.

Propriedade: Todo sistema linear escalonado do primeiro tipo é possível e determinado.

2º Tipo: o número de equações é menor que o número de incógnitas.

Observe o sistema escalonado

$$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ y \quad - \quad z \quad = 2 \end{cases}$$

Para resolver tal sistema, podemos tornar as incógnitas que não aparecem no começo de nenhuma das equações (chamadas variáveis livres) e transpô-las para o segundo membro.

Desta forma teremos $\begin{cases} x - y = 4 - z \\ \quad y = 2 + z \end{cases}$ Somando membro a membro, obtemos $x = 6$. E ainda $y = z + 2$, logo, o conjunto solução é $\{6, z + 2, z\}$, assim o sistema é possível e indeterminado.

Propriedade: Todo sistema linear do 2º tipo é possível e indeterminado.

A ideia principal do método do escalonamento é a seguinte: Dado um sistema linear S_1 determinar, a partir de $S_{1,}$ um sistema S_2 equivalente a S_1, tal que a solução do sistema seja trivial.

Você deve estar se perguntando agora como se faz para escalonar um sistema linear S. Vamos agora estudar uma técnica para transformar um sistema linear S em um sistema escalonado. Essa técnica é fundamentada nas operações elementares sobre as equações de um sistema linear vistas anteriormente. Além disso, é importante lembrar aqui a ideia de matrizes equivalentes.

Dizemos que duas matrizes são equivalentes quando uma pode ser obtida a partir da outra, por meio de um número finito de aplicações das seguintes operações (denominadas operações elementares sobre as linhas de uma matriz):

1ª trocar de lugares entre si duas linhas;

2ª multiplicar uma linha por um número real não nulo; e

3ª somar a uma linha outra linha da matriz previamente multiplicada por um número real.

Note que a semelhança que há entre estas operações e as operações elementares sobre as equações de um sistema linear, é fácil concluir que as matrizes completas associadas a sistemas equivalentes são matrizes equivalentes. Assim, quando queremos resolver um sistema linear pelo método de escalonamento, podemos trabalhar com matrizes completa do sistema, realizando sobre linhas da matriz as operações que faríamos sobre as equações do sistema. Esse procedimento será utilizado daqui em diante.

A título de exemplo, vamos agora apresentar uma solução para os dois problemas iniciais:

Primeiro: o da colheita (página 15)

O sistema linear formado é

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

Usando as técnicas de escalonamento na matriz completa associada ao sistema teremos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 3 & 2 & 1 & 39 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 0 & -1 & -5 & -18 \\ 0 & -4 & -8 & -39 \end{pmatrix} \sim$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 0 & -1 & -5 & -18 \\ 0 & 0 & 12 & 33 \end{pmatrix}$ Daí segue-se que $12z = 33 \Longrightarrow z = \frac{33}{12} = 2{,}75$. Daí segue que $y = 4{,}25\ e\ x = 9{,}25$.

Assim o fardo de uma boa colheita custará R$ 2,75, o fardo de uma colheita medíocre custará R$ 4,25 e um fardo de uma colheita ruim custará R$ 9,25. Observe que é fácil verificar o resultado, bastando para isso substituir x, y e z pelos valores nas equações do sistema. De quais outras formas poderíamos ter resolvido?

Segundo: o do caixa de supermercado (página 16):

O sistema linear formado é

$$\begin{cases} x \quad + \quad y \quad = \quad 250 \\ 0{,}25x + 0{,}10y \ = \ 40 \end{cases}$$

Usando as técnicas de escalonamento na matriz completa associada ao sistema teremos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 250 \\ 0{,}25 & 0{,}10 & 40 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 250 \\ 0 & 0{,}6 & 90 \end{pmatrix}$$

Daí segue-se que $0{,}6y = 90 \Longrightarrow y = 150$ e, conseqüentemente, $x = 100$.

Assim se tem 100 moedas de 25 centavos e 150 moedas de 10 centavos.

É possível verificar o resultado?

Há outra forma para se obter essa mesma solução? SIM.

2.3 Aplicações e Resoluções de Problemas

Aplicação 1: para produção de um litro de creme são usados suco de fruta, leite e mel. Sabe-se que a quantidade de leite é o dobro da quantidade de suco de fruta, e a quantidade de mel é a nona parte da quantidade dos outros dois juntos. Ana, uma garota curiosa, resolveu fazer um litro de creme seguindo a receita com os ingredientes citados. A questão é: qual é a quantidade de suco de fruta que Ana irá precisar?

Uma solução

Compreensão do problema

Qual é a incógnita? A quantidade de suco de fruta que Ana irá precisar. Existe uma relação de um sistema linear com o problema?
O que se pode observar no problema?
Quais são os dados?

Estabelecimento de um plano

Já viu esse problema antes?
Conhece um problema que lhe poderia ser útil?
Muito bem, primeiro observe que para ser feito um litro de creme serão necessário usar os três ingredientes e, além disso, existe uma relação entre eles. Essa relação pode ser estabelecida através de equações lineares, mais precisamente três equações e três incógnitas. Mas um conjunto de equações forma como nós já vimos um sistema linear. Então, um plano é pensar e proceder com auxílio de sistema linear na obtenção da solução do problema.

Execução do plano

Dessa forma, pondo o plano em execução, sejam S-(a quantidade de suco de frutas, em mL), L-(a quantidade de leite, em mL) e M-(a quantidade de mel, em mL). Lembrando que um litro corresponde a 1000 mL podemos então formar o seguinte sistema linear.

$$\begin{cases} -2S + L = 0 \\ -S - L + 9M = 0 \\ S + L + M = 1000 \end{cases}$$

Usando a matriz completa do sistema linear (observe aqui uma aplicação de matriz) e escalonando, teremos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 1 & 1 & -9 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & 0 & 10 & 1000 \\ 0 & 3 & -18 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & 3 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 1000 \end{pmatrix}$$

Daí , segue-se que $M = 100\,mL,\ 3L = 18 \cdot 100 \Longrightarrow L = 600\,mL\ e\ S + 600 + 100 = 1000 \Longrightarrow S = 300\,mL$.

Assim podemos concluir que Ana deverá usar exatamente 100 mL de mel, 300 mL de suco de frutas e 600 mL de leite.

Retrospecto

É possível verificar o resultado? Basta substituirmos as incógnitas nas equações pelos devidos valores encontrados e efetuar as operações indicadas.

É possível estabelecer um outro plano para resolver o problema?

Aplicações 2: Carlos e sua irmã Andrea foram com seu cachorro Bidu à farmácia de seu avô. Lá encontraram uma velha balança com defeito que só indicava corretamente pesos (massa) superiores a 60 Kg. Assim eles se pesaram dois a dois e obtiveram as seguintes marcas:

*Carlos e o cachorro Bidu pesaram juntos 87 Kg;

*Carlos e Andrea pesarem juntos 123 Kg; e

*Andrea e o cachorro Bidu pesaram juntos 66 Kg.

Quantos quilogramas pesa cada um deles?

Uma solução:

Compreensão do problema

Qual é a incógnita?

O peso de cada um deles.

Qual é a condicionante?

A pesagem seja feita dois a dois.

Estabelecimento de um plano

Conhece um problema correlato?

Conhece um problema que poderia ser útil?

Uma observação que deve ser feita é que o problema apresenta um formato semelhante à aplicação 1. Mas de que forma? Primeiro perceba que as informações se relacionam duas a duas, isto é, os pesos dos personagens são apresentados de forma a se relacionarem dois a dois. Além disso, essas relações podem ser estabelecidas por meio de equações lineares formando assim um sistema linear. Assim um plano é formar um sistema linear e resolvê-lo.

Execução do plano

Dessa forma sendo c o peso de Carlos, a o peso de Andrea e b o peso do cachorro Bidu podemos escrever o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} c+b=87 \\ c+a=123 \\ a+b=66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+0c=66 \\ a+0b+c=123 \\ 0a+b+c=87 \end{cases}$$

Escrevendo a matriz completa para escalonarmos, teremos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 66 \\ 1 & 0 & 1 & 123 \\ 0 & 1 & 1 & 87 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 66 \\ 0 & 1 & -1 & -57 \\ 0 & 1 & 1 & 87 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 66 \\ 0 & 1 & -1 & -57 \\ 0 & 0 & 2 & 144 \end{pmatrix}$$

Daí, tomando a última linha teremos a equação $2c = 144 \Longrightarrow c = 72$. Assim tem-se que: Carlos pesa 72 Kg, Andrea pesa 51 Kg e o cachorro Bidu pesa 15 Kg.

Retrospecto

É possível conferir o resultado? Verifique!

Esse seria o único caminho para chegarmos a solução do problema?

Possivelmente não. Mas veja que uma vez montado o sistema linear fica fácil, usando o escalonamento, chegar ao resultado. (tente outro caminho)

Que variações poder ser feitas nesse problema?

Aplicação 3: Um clube promoveu um show de música popular brasileira ao qual compareceram 200 pessoas, entre sócios e não-sócios. No total, o valor arrecadado foi de R$ 1400,00 e todas as pessoas pagaram ingresso. Sabendo que o preço do ingresso foi R$ 10,00 e que cada sócio pagou metade desse valor, qual foi o número de sócios presentes ao show?

Uma solução:

Compreensão do problema

Qual é a incógnita?

Qual é a condicionante?

É possível satisfazer a condicionante?

A incógnita é o número de sócios presentes.

A condicionante é que o não-sócio irá pagar R$ 10,00 e o sócio pagará metade desse valor.

Estabelecimento de um Plano

Já viu esse problema antes?

Conhece um problema que lhe possa ser útil?

Há alguma relação com algum problema resolvido anteriormente?

Observe que mais uma vez temos as informações dadas relacionando-se relacionando duas a duas de modo que essas relações podem ser expressas por meio de equações lineares formando um sistema linear como nas aplicações anteriores, só que desta vez, envolvendo apenas duas incógnitas. Assim um plano é resolver o sistema linear formado.

Execução do plano

Sejam x e y os números de sócios e não-socios, respectivamente. Daí, podemos formar o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + y = 200 \\ 5x + 10y = 1400 \end{cases}$$

Escrevendo a matriz completa associada ao sistema linear, teremos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 200 \\ 5 & 10 & 1400 \end{pmatrix}$$

Escalonando teremos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 200 \\ 1 & 2 & 280 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 80 \end{pmatrix}$$

Daí, podemos obter o valor de y na segundo linha: $y = 80$ e substituindo y na primeira linha, temos $x + 80 = 200 \Longrightarrow x = 120$. Como o número de sócios e representado por x e os não-sócios por y segue que estavam presentes ao show 120 sócios.

Retrospecto

É possível verificar o resultado?

É possível verificar o argumento?

É possível chegar ao resultado usando um caminho diferente?

Se não fosse dado o número de pessoas que compareceram ao show seria possível chegarmos a uma solução?

Quais outras variações poderíamos fazer?

Aplicação 4: (modelo econômico de Leontief (Wassily Wassilyovthc Leontief, nasceu em 5 de agosto de 1905 – faleceu em 5 de fevereiro de 1999)).

Três proprietários de casas – um pedreiro, um eletricista e um hidráulico – pretendem fazer consertos em suas casas. Eles concordam trabalhar um total de 10 dias cada de acordo com a tabela a seguir:

Tabela 1

	Trabalho executado pelo		
	Pedreiro	Eletricista	Hidráulico
pedreiro	2	1	6
eletricista	4	5	1
hidráulico	4	4	3

Para efeito de imposto, eles devem declarar e pagar um ao outro um salário diário razoável, mesmo para o trabalho que cada um faz em sua própria casa. Seus salários diários normais são cerca de R$ 100,00, mas eles concordam em ajustar seus respectivos salários diários de tal modo que saiam empatados, ou seja, de tal modo que o total pago por cada um é igual ao total recebido.

Uma solução:

Compreensão do Problema

Qual é a incógnita?

Qual é a condicionante?

É possível satisfazer a condicionante?

Esta é uma situação bastante comum em pequenas cidades do interior como também em muitas favelas das grandes cidades. Nosso principal problema é o de determinar “preços” para estes trabalhos de tal modo que o gasto total de cada proprietário seja igual ao total recebido em salário.

Estabelecimento de um plano

Já viu esse problema antes?

Conhece um problema correlato?

Num primeiro momento, esse problema não parece relacionar-se com os problemas resolvidos até agora, mas vejam que o gasto total e o total recebido se relacionam de modo a formarem equações lineares e mais uma vez poderemos aplicar o que se aprendeu sobre sistemas lineares. Eis um plano: usar sistemas lineares.

Execução do plano

Assim podemos proceder da seguinte forma:

$$P = salário\ diário\ do\ pedreiro$$
$$E = salário\ diário\ do\ eletricista$$
$$H = salário\ diário\ do\ hidráulico$$

Para satisfazer a condição de "equilíbrio" de que saiam empatadas, devemos exigir que:

$$\boldsymbol{Total\ de\ gastos = total\ recebido}$$

para cada um dos proprietários pelo período de 10 dias. Por exemplo, o pedreiro paga um total de $2P + E + 6H$ pelos consertos em sua própria casa e recebe um total de $10P$ pelos consertos que faz nas três casas. Igualando estas expressões temos a primeira das três equações seguintes:

$$2P + E + 6H = 10P$$
$$4P + 5E + H = 10E$$
$$4P + 4E + 3H = 10H$$

As duas outras equações são as equações de equilíbrio para o eletricista e o hidráulico.

Observe que temos aqui um sistema linear com três equações e três incógnitas. Para obtermos os preços iremos resolver o sistema assim formado usando a eliminação de Gauss.

Dividindo estas equações por 10 e reescrevendo-as em formato matricial, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ E \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ E \\ H \end{pmatrix}$$

Subtraindo o lado esquerdo do lado direito na equação matricial anterior, podemos reescreva-la como um sistema homogêneo (no formato matricial).

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}1 & -0{,}6 \\ -0{,}4 & 0{,}5 & -0{,}1 \\ -0{,}4 & -0{,}4 & 0{,}7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P \\ E \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daí, temos:

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}1 & -0{,}6 & 0 \\ -0{,}4 & 0{,}5 & -0{,}1 & 0 \\ -0{,}4 & -0{,}4 & 0{,}7 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -0{,}125 & -0{,}75 & 0 \\ 0 & 0{,}45 & -0{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Desta forma, obtemos:

$0{,}45E - 0{,}4H = 0 \Longrightarrow E = \frac{8}{9}H.$ Usando a primeira equação $P - 0{,}125E - 0{,}75H = 0$, teremos: $P = \frac{3}{4}H + \frac{1}{8}E \Longrightarrow P = \frac{31}{36}H.$ Assim, a solução desse sistema homogêneo é: $\begin{pmatrix} P \\ E \\ H \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 31 \\ 32 \\ 36 \end{pmatrix}$.

Onde K é uma constante arbitrária. Esta constante é um fator de escala, que os proprietários podem escolher de acordo com sua conveniência. Por exemplo, se eles colocarem K=3, de modo que os correspondentes salários, a saber, R$ 93,00, R$ 96,00 e R$ 108,00 são aproximadamente R$ 100,00.

Retrospecto

É possível verificar o resultado?

É possível utilizar resultado ou método em algum problema?

Que variações podem ser feitas?

Se fosse feita a seguinte variação: Três vizinhos têm hortas nos fundos de suas casas. O vizinho A cultiva tomates, o vizinho B cultiva milho e o vizinho C cultiva alface. Eles concordaram em dividir a colheita entre eles como segue: **A** recebe $\frac{1}{2}$ dos tomates, $\frac{1}{3}$ do milho e $\frac{1}{4}$ da alface; **B** recebe $\frac{1}{3}$ dos tomates, $\frac{1}{3}$ do milho e $\frac{1}{4}$ da alface; **C** recebe $\frac{1}{6}$ dos tomates, $\frac{1}{3}$ do milho e $\frac{1}{2}$ da alface. Que preços os vizinhos devem dar às suas respectivas colheitas para satisfazer a condição de equilíbrio de uma economia fechada se a colheita de menor preço deve ter um preço de R$ 100,00.

Poderíamos proceder de forma semelhante?

Tente encontrar uma solução com essa nova variação.

PESQUISA

1º MOMENTO: foi aplicada uma avaliação para 77 alunos das 7ª A, 7ª B e 7ª C juntos (anexo 1) após um mês letivo de aulas demonstrativas expositivas e obtemos uma média de 5,15.

2º MOMENTO: depois passamos mais um mês letivo dando aulas demonstrativas expositivas, porem, exigindo muito empenho dos alunos na resolução de problemas no aprendizado de sistemas lineares. A valorização na resolução dos problemas pelos alunos foi feita através de pontos e qualitativo que foram dados, porém sem influenciar na média final.

3º MOMENTO: Fizemos uma 2ª avaliação (anexo 2) e obtivemos uma média de 6,53 o que mostrou um aumento considerável na média, tendo em vista que nossos alunos são do município e vivem, as vezes, em situações precárias.

Considerações Finais

É lamentável quando um aluno diz a um professor que de nada interessa os conteúdos de Matemática que lhes são apresentados, pois não consegue ver uma situação pratica imediata que precise de tal conhecimento. É ainda mais doloroso quando o professor não consegue lançar mão de algo que o aluno possa perceber a relação entre os conteúdos e a situação do seu dia a dia ou algo próximo. Sabemos que é muito difícil elaborar situações problemas ou identificar aplicações de determinados conteúdos à situação do cotidiano, mas o que temos percebido em sala de aula vale a pena nos esforçar para apresentar os conteúdos de Matemática de forma mais concreta.

O seres humanos sempre se deparam com situações novas em que devem agir com criatividade, independência e espírito explorador. É possível através de situação problema desenvolver no aluno desde cedo este tipo de iniciativa. Bons problemas podem tornar as aulas de Matemática mais interessantes e desafiadoras, pois proporcionam um maior envolvimento no processo de resolução aguçando a criatividade e colaborando com o desenvolvimento de estratégias que possam ser aplicadas em diferentes situações.

Quando fazemos a apresentação de um determinado conteúdo de Matemática fazendo-se inicialmente uma abordagem preliminar, por exemplo, apresentando uma situação problema envolvendo algo que diz respeito a realidade próxima dos alunos para que eles possam apresentar suas idéias, sugestões, etc., tem-se aí conseguido com que os alunos participem das aulas interagindo com o professor e com os colegas de classe. Percebe-se então a importância da resolução de problema e das aplicações como metodologia para o ensino da Matemática. É muito mais interessante se fazer algo quando se é motivado por algum objetivo. Assim acreditamos que este trabalho possa dar ao professor de matemática mais uma opção para desenvolver suas atividades em sala de aula contribuindo, dessa forma, com o sucesso do ensino-aprendizagem da Matemática.

Referências Bibliográficas

[1] ABBOTT, E. B. – Estudo de casos sobre estratégia de resoluções de problemas de Matemática no Ensino Médio, UFRS, 201

[2] ELON LAGES LIMA, PAULO CEZAR PINTO CARVALHO, EDUARDO WAGNER E AUGUSTO CÉSAR MORGADO VOLUME 3 da SBM, TÍTULO: A MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO, edição: 2006, 2005, 2004, 2001, 1999 e 1998.

[3] POLYA, G – A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático / G. Polya; tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo, - Rio de Janeiro: interciência, 1995.

[4] PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS: ensino médio – Parte III. MEC, Brasília, 2000.

[5] SALDANHA, M. de A., NOGUTI, M. y. TITULO: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA METODOLOGIA ALTERNATIVA PARA O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA NAS ESCOLAS DO CASE III EIEMAT – Escola de inverno de Educação Matemática – 1º Encontro Nacional PIBID – Matemática, 2012. Disponível em HTTP://w3.ufsm.br/eiemat/Anais/RE - Saldanha - Mayara. Pdf

[6] MANOEL PAIVA, COLEÇÃO COM 3 VOLUMES (ENSINO MÉDIO)

[7] PUBLICAÇÕES NA INTERNET.

[8] JORNAL NACIONAL.

[9] Editar Código – Fonte.

[10] Nove Capítulos Sobre Aritmética.

ANEXO I

PRIMEIRA AVALIAÇÃO:

01. Qual é o valor de x no sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$? A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

02. No sistema $\begin{cases} 3x+y=4 \\ y=2x-1 \end{cases}$ y vale: A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

03. A solução do sistema $\begin{cases} x-2y=1 \\ x=3y \end{cases}$ é: A) (1,1) B) (0,1) C) (2,1) D) (1,3) E) (3,1)

04. No sistema $\begin{cases} 2x+3y=3 \\ x+2y=1 \end{cases}, x+y\ vale$: A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

05. Quando resolvemos o sistema $\begin{cases} 3x+y=7 \\ x+y=3 \end{cases}$, encontramos: $A)\ x=0\ e\ y=1$

$x=1\ e\ y=1$ $C)\ x=1\ e\ y=2$ $D)\ x=2\ e\ y=1$ $E)\ x=3\ e\ y=2$

06. Quando o par ordenado (2,1) é solução do sistema $\begin{cases} ax+2y=4 \\ 3x-y=5 \end{cases}$, o valor de a será?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Todas estão erradas

07. Se $\begin{cases} x-y=9 \\ x=2y+8 \end{cases}$, então: $A) y=1$ $B) y=2$ $C) y=3$ $D) y=4$ $E) y=5$

08. Qual é o par ordenado solução do sistema $\begin{cases} 2x+y=11 \\ x+y=7 \end{cases}$? $A)$ (2,1)

$B)$ (3,1) $C)$ (3,2) $D)$ (4,2) $E)$ (4,3)

09. Para quais valores de m e k a equação $(m-1)x=k-2$ é possível e determinada? $A)\ m \neq 1\ e\ k \in \mathbb{R}$ $B)\ m=1\ e\ k \in \mathbb{R}$

$C)\ m \neq 1\ e\ k=2$ $D)\ m=2\ e\ k \neq 1$ $E)\ Todas\ estão\ errada$

10. Num quintal onde se cria porcos e galinhas há 14 cabeças e 36 pés. Quantas galinhas existem?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

ANEXO 2

SEGUNDA AVALIAÇÃO:

01. Para que valor de x a expressão $\frac{1+x}{x-1}$ não representa uma fração algébrica ?

$A)\ x = 1$ $B)\ x = 2$ $C)\ x = 3$ $D)\ x = 4$ $E)\ x = 5$

02. Qual é a raiz da equação $3x - 10 = 15 - 2x$? $A)1$ $B)2$ $C)3$ $D)4$ $E)5$

03. Resolvendo a equação $\frac{4}{x} + \frac{1}{2} = 1$, encontramos: $A)2$ $B)4$ $C)6$ $D)8$ $E)10$

04. Se $a + b \neq 0$, qual é o valor de x na equação $ax + 1 = 4 - bx$? $A)\ x = \frac{1}{a+b}$

$B)\ x = \frac{2}{a+b}$ $C)\ x = \frac{3}{a+b}$ $D)\ x = \frac{4}{a+b}$ $E)\ x = \frac{5}{a+b}$

05. No sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$, x vale: $A)\ 2$ $B)\ 3$ $C)\ 4$ $D)\ 5$ $E)\ 6$

06. Se $\begin{cases} x - y = 9 \\ x = 2y + 8 \end{cases}$, então: $A) y = 1$ $B) y = 2$ $C) y = 3$ $D) y = 4$ $E) y = 5$

07. Qual é o par ordenado solução do sistema $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ x + y = 7 \end{cases}$? $A)\ (2,1)$

$B)\ (3,1)$ $C)\ (3,2)$ $D)\ (4,2)$ $E)\ (4,3)$

08. Para quais valores de m e k a equação $(m - 1)x = k - 2$ é possível e determinada?
$A)\ m = 1\ e\ k \in \mathbb{R}$ $B)\ m = 1\ e\ k > 2$ $C)\ m = 1\ e\ k \neq 2$ $D)\ m \neq 1\ e\ k \in \mathbb{R}$ $E)\ m < 1\ e\ k = 2$

09. A equação $(m - 1)x = k - 2$ é possível e indeterminada quando? $A)\ m \neq 1$
$B)\ m > 0\ e\ k \in \mathbb{R}$ $C)\ m = 1\ e\ k = 2$ $D)\ m > 1\ e\ k \neq 2$ $E)\ m < 1\ e\ k = 2$

10. Quais são os valores de m e k para os quais a equação $(m - 1)x = k - 2$ é impossível?
$A) m \neq 1\ e\ k \in \mathbb{R}$ $B)\ m = 1\ e\ k \neq 2$ $C)\ m = 1\ e\ k = 2$ $D) m > 1\ e\ k \neq 2$ $E)\ m < 1\ e\ k = 2$