



**UNIVERSIDADE
FEDERAL RURAL
DE PERNAMBUCO**

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROFMAT

**A SOMA DAS MEDIDAS DOS
ÂNGULOS INTERNOS DE UM
TRIÂNGULO HIPERBÓLICO E O 5º
POSTULADO DE EUCLIDES**

Carlos Alberto de Souza

Dissertação de Mestrado

RECIFE
27/08/2014

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Carlos Alberto de Souza

**A SOMA DAS MEDIDAS DOS ÂNGULOS INTERNOS DE
UM TRIÂNGULO HIPERBÓLICO E O 5º POSTULADO
DE EUCLIDES**

*Trabalho apresentado ao Programa de PROFMAT do DE-
PARTAMENTO DE MATEMÁTICA da UNIVERSIDADE
FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO como requisito
parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

Orientador: *Prof. Dr. Thiago Dias Oliveira Silva*

RECIFE
27/08/2014

A minha mãe, D. Iraci, mulher que não teve oportunidade de ir à escola, mas nos deu esta oportunidade, sempre nos incentivando e apoiando, sendo também força de inspiração e motivo de minha dedicação.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por ter me dado forças nos momentos difíceis e a perseverança para poder atingir este objetivo.

A minha mãe, por me educar mostrando com exemplos o modo correto de agir e fazer as coisas certas. Mulher que sempre esteve e, graças a Deus, ainda está disposta ouvir e dar uma palavra de carinho e apoio a quem a procura.

A Ana Rita, esposa dedicada que nunca deixou de me apoiar e incentivar.

Aos filhos Amanda, Bruna, Karla e Carlos Alberto, pessoas que sentiram minha ausência várias vezes por conta das atividades docentes, mas sempre foram e serão motivo de orgulho e inspiração.

A Maurício, Carlos Antônio e José Carlos, irmãos que estão sempre ao meu lado. Em especial, José Carlos, também pai e professor. Por admirá-lo nesta atividade, que segui a carreira docente.

Aos amigos e colegas de trabalho, em particular Eniva Valentim, Mércia Elizabete, Saulo Guimarães e Josenide Freitas, pois nos momentos mais difíceis de minha vida, eles foram muito compreensivos e, se hoje consegui, é porque eles acreditaram em mim.

A Carlos Bino, Anaxágoras Moraes, Ronaldo Bandim e Emerson Dantas, amigos que conquistei durante o curso no Profmat e que, nas horas de sufoco estavam lá, ajudando a diminuir as dificuldades.

Ao Dr. Dailton Braz, médico psiquiatra acima da média, responsável por resgatar a minha autoestima.

Agradeço também aos amigos do Jogadores Anônimos, por me ajudarem a entender que as mudanças devem acontecer de forma lenta e contínua e que, mesmo nas recaídas, nunca devemos perder a esperança.

Aos amigos do Encontro de Casais com Cristo, responsáveis pelo meu crescimento espiritual e, conseqüentemente, crescimento pessoal e profissional.

Não poderia deixar de agradecer a meu orientador, Prof. Dr. Thiago Dias, jovem de muita inteligência, capacidade e de uma paciência incrível. Em alguns momentos de depressão, quando pensei em desistir, ele me fez acreditar que seria capaz e conseguiria desenvolver esta dissertação.

"Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real."

—NIKOLAI IVANOVICH LOBACHEVSKY

Resumo

Desde o ensino fundamental o aluno aprende que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a π e, para este aluno, isso é uma verdade absoluta. Nem todos terão a oportunidade de verificar que este fato só é verdadeiro no plano euclidiano e que é uma consequência direta do 5º *postulado de Euclides*, o postulado das paralelas.

Neste trabalho, vamos mostrar que essa soma depende do plano no qual o triângulo está contido. Abordamos apenas a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo na *geometria hiperbólica*, para podermos compará-la com a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo euclidiano.

Iniciamos o trabalho com um rápido relato sobre esse postulado, o qual levou inúmeros matemáticos a cometerem erros na tentativa de demonstrá-lo. Mostramos que, mesmo não tendo sido valorizados quando Saccheri ainda estava vivo, seus estudos foram muito influentes para a descoberta das geometrias não euclidianas.

Para alcançarmos os objetivos do nosso trabalho, construímos uma base axiomática bem próxima da proposta por Hilbert e, juntamente com as propriedades existentes no *quadrilátero de Saccheri*, demonstramos que na geometria hiperbólica, *a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é menor do que π* .

No apêndice, apresentamos os modelos de Beltrami, de Klein e de Poincaré para a geometria hiperbólica, destacando o modelo de disco de Poincaré, pois o mesmo é parte integrante de um dos problemas propostos para os alunos do ensino médio, construir no Geogebra um triângulo hiperbólico e movimentar um de seus vértices verificando o que ocorre. Apresentamos também outro problema, no qual o aluno deve construir um triângulo euclidiano e também movimentar um de seus vértices, verificando que, neste caso, a soma permanece igual a π .

Palavras-chave: 5º Postulado de Euclides, Geometria Hiperbólica, Ângulo de Paralelismo

Abstract

Since elementary school the student learns that the sum of the measures of the internal angles of a triangle is equal to π and, for this student, this is an absolute truth. Not everyone will have the opportunity to verify that this fact is only true in the Euclidean plane and that is a direct consequence of *5th postulate of Euclides*, the parallel postulate.

In this work, we show that this sum depends on the plane in which the triangle is contained. We approach only the sum of the measures of the internal angles of a triangle in *hyperbolic geometry*, in order to compare it with the same sum on a Euclidean triangle.

We started working with a quick report on this postulate, which led many mathematicians make mistakes trying to prove it. We show that, even if not valued when Saccheri was still alive, his studies has very influence to the discovery of non-Euclidean geometries.

To achieve the objectives of our work, we built an axiomatic base very close to the proposed by Hilbert and, in association with the existing properties in the *Saccheri's quadrilateral*, we demonstrated that in hyperbolic geometry *the sum of the measures of the internal angles of a triangle is less than π* .

In the appendix, we present the models of Beltrami, Klein and Poincaré to the hyperbolic geometry, highlighting the Poincaré disk model, which is part of a proposed problems to the high school students, to construct in Geogebra a hyperbolic triangle and move one of its vertices by checking what happens. We also present another problem, which the student must construct a Euclidean triangle and also move of its vertices, finding that, in this case, the sum remains equal to π .

Keywords: 5th postulate of Euclides, Hyperbolic Geometry, Angle of Parallelism

Sumário

1	Breve História do 5º Postulado de Euclides	3
2	Geometria Neutra	9
2.1	Axiomas de Hilbert	9
2.2	Quadrilátero de Saccheri	31
3	Geometria Hiperbólica	45
3.1	Postulado de Lobachevsky	45
3.2	O Ângulo de Paralelismo	46
A	Modelos Planos da Geometria Hiperbólica	49
A.1	Modelo de Beltrami	49
A.2	Modelo de Klein	50
A.3	Modelos de Poincaré	51
A.3.1	O Modelo do Disco de Poincaré	51
A	Exercícios Desenvolvidos no Geogebra	57
A.1	Exercício 1 (Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo Euclidiano)	57
A.2	Exercício 2 (Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo Hiperbólico)	59

Lista de Figuras

2.1	Os pontos A , B e C são colineares, enquanto que os pontos A , B e D são não colineares.	10
2.2	Segmento \overline{AB} .	10
2.3	C é um ponto equidistante dos pontos A e B .	11
2.4	C é ponto médio do segmento \overline{AB} .	11
2.5	Os pontos A e B estão do mesmo lado em relação à reta r , enquanto que os pontos A e C estão em lados opostos em relação à r .	12
2.6	Semirreta AB .	12
2.7	Semirretas opostas AB e AC .	12
2.8	Ângulo $\angle BAC$.	13
2.9	O ponto D está no interior do ângulo $\angle BAC$, enquanto que o ponto E não está.	13
2.10	Os ângulos $\angle BAC$ e $\angle CAD$ são suplementares.	14
2.11	Os ângulos $\angle BAC$ e $\angle DAC$ são retos.	14
2.12	Os ângulos $\angle BAC$ e $\angle DAC$ são consecutivos.	15
2.13	Triângulo $\triangle ABC$.	15
2.14	$\angle DBC$ é ângulo externo do triângulo $\triangle ABC$.	15
2.15	Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes.	16
2.16	No triângulo $\triangle ABC$, o segmento \overline{AM} é a mediana relativa ao vértice A .	16
2.17	1º Caso de Congruência de Triângulos.	18
2.18	No exemplo, $AB = \pi$ e $AE = 4CD$.	18
2.19	Reta m , mediatriz do segmento \overline{AB} .	19
2.20	Ângulos opostos pelo vértice.	20
2.21	$\angle XCA$ é maior do que $\angle BAC$.	21
2.22	$\angle XCA$ é maior do que $\angle ABC$.	22
2.23	2º Caso de Congruência de Triângulos.	22
2.24	Para provarmos o 2º caso de congruência, construímos triângulo $\triangle ABD$, congruente ao triângulo $\triangle A'B'C'$.	23
2.25	O triângulo $\triangle ABC$ é isósceles.	24
2.26	3º Caso de Congruência de Triângulos.	25
2.27	O triângulo $\triangle ABD$ é congruente aos triângulos $\triangle A'B'C'$ e $\triangle ABC$.	26
2.28	4º Caso de Congruência de Triângulos	26
2.29	Para provarmos o 4º caso de congruência, também construímos o triângulo $\triangle ABD$, congruente ao triângulo $\triangle A'B'C'$	27
2.30	Se a reta r intersecta um lado do triângulo $\triangle ABC$, então deverá intersectar um dos outros dois lados.	27

2.31	O ponto D pertence ao segmento \overline{AB} e está no interior do ângulo $\angle CAB$.	29
2.32	Pontos D no interior de $\angle CAB$ e F , fora de $\angle CAB$	30
2.33	Semirreta AD intersectando o segmento \overline{BC} .	31
2.34	$ABCD$ é um quadrilátero de Saccheri.	32
2.35	No quadrilátero de Saccheri, as diagonais são iguais.	33
2.36	Num quadrilátero de Saccheri, a mediatriz de \overline{AD} também é perpendicular a \overline{BC} .	34
2.37	Num quadrilátero em que $\widehat{BAD} = \widehat{CDA} = 90$ e $AB \neq CD$, os ângulos superiores são desiguais.	35
2.38	α é agudo quando o ponto P está entre os pontos B e C e o segmento \overline{PQ} é menor do que o segmento \overline{CD} .	36
2.39	Quando C está entre B e P e $PQ > CD$, então α é agudo.	37
2.40	No caso em que C está entre B e P e $PQ < CD$, temos α obtuso.	38
2.41	Quadriláteros de Saccheri com ângulos agudos.	39
2.42	Os triângulos $\triangle ADG$ e $\triangle BDF$ são congruentes.	40
2.43	A soma dos ângulos internos do triângulo $\triangle ABC$ é igual a soma dos ângulos superiores do quadrilátero de Saccheri $BCHF$	41
2.44	Defeito do triângulo $\triangle ABC$ igual a soma dos defeitos dos triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle BCD$.	44
3.1	Retas a e b passando em P e paralelas a reta r	45
3.2	Se t_1 intersecta m e faz ângulo θ_1 com AB e t_2 faz ângulo $\theta_2 < \theta_1$ com AB , então t_2 intersecta m	46
3.3	O ângulo de paralelismo para A' e m' é o mesmo que para A e m .	47
3.4	Triângulo $\triangle ABC$ com soma dos ângulos internos menor do que π	48
A.1	Tractriz e pseudoesfera de Beltrami.	49
A.2	Triângulo e retas paralelas na pseudoesfera de Beltrami.	50
A.3	Modelo do disco de Klein.	50
A.4	Retas hiperbólicas paralelas à reta hiperbólica AB passando em P .	51
A.5	O ponto A não pertence ao disco D , enquanto que os pontos B e C pertencem.	52
A.6	Circunferência c ortogonal ao disco D .	52
A.7	H-reta AB como arco de c , circunferência ortogonal ao disco D .	53
A.8	H-reta como diâmetro do disco D .	53
A.9	H-semirreta AB .	53
A.10	H-segmento \overline{AB} .	54
A.11	H-ângulo α .	54
A.12	H-triângulo $\triangle ABC$.	55
A.1	Campo de entrada.	57
A.2	Ferramenta "Polígono".	58
A.3	Ferramenta "Ângulo".	58
A.4	Ferramenta "Mover".	58
A.5	Ferramenta "Círculo Dados Centro e um de seus Pontos".	59
A.6	Janela para escolher "Propriedades".	59

A.7	Janela para escolher "Estilo" e depois "Linha Tracejada".	60
A.8	Ferramenta "Novo Ponto".	60
A.9	Ferramenta "Reflexão em Relação a um Círculo (Inversão)".	60
A.10	Ferramenta "Mediatriz".	60
A.11	Ferramenta "Interseção de Dois Objetos".	61
A.12	Ferramenta "Arco circular Dados Centro e Dois Pontos".	61
A.13	Janela para selecionar a cor desejada.	61
A.14	Ferramenta "Reta Tangente".	62
A.15	Ferramenta "Ponto em Objeto".	62

Introdução

O livro *Os Elementos* de Euclides tem despertado muito interesse e discussão durante os mais de 2000 anos de sua existência, mas o 5º Postulado de Euclides, o Postulado das Paralelas, deve ser aquele que, sem sombra de dúvidas, tenha motivado mais discussões, levando grandes matemáticos a passar uma boa parte de suas vidas tentando descobrir se o mesmo era um postulado ou se tratava de um teorema que poderia ser demonstrado. Como consequência dessas discussões, novos tipos de geometria foram descobertos.

Neste trabalho, apresentamos um dos temas desses estudos: *A Soma das Medidas dos Ângulos Internos de um Triângulo*. Nosso objetivo é desenvolver um estudo para, através de postulados e teoremas, mostrar que essa soma depende do tipo de geometria em que o triângulo se encontra, mais especificamente, se ela é euclidiana ou não euclidiana.

Para que possamos levar esta discussão aos alunos do ensino médio, montamos dois problemas sobre o tema em questão, (com o uso de um software de Geometria Dinâmica - Geogebra), onde eles poderão verificar que essa soma depende do tipo de geometria em que o triângulo está inserido. Os problemas trabalhados encontram-se no apêndice deste trabalho.

No capítulo 1, faremos um breve relato sobre o livro *Os Elementos*, o que levou Euclides a escrevê-lo e como ele é dividido. Mais adiante falamos um pouco das discussões em torno do 5º Postulado de Euclides, o que motivaram matemáticos a se debruçarem durante anos para estudá-lo, quais suas conclusões e contribuições. Destacamos os trabalhos de Girolamo de Saccheri, János Bolyai, Carl Friedrich Gauss, Lobachevsky e Riemann, responsáveis pelo surgimento das Geometrias não Euclidianas. Destacamos também as contribuições de David Hilbert

ao propor um novo conjunto de axiomas para a Geometria Plana, os quais receberam o nome de Axiomas de Hilbert. Além desses, colocamos em destaque os trabalhos de Beltrami, Felix Klein e Henri Poincaré sobre um modelo plano para a Geometria Hiperbólica, com ênfase no modelo plano do disco de Poincaré, pois foi com base neste modelo que desenvolvemos um problema sobre o triângulo hiperbólico.

No capítulo 2, cujo título é Geometria Neutra, apresentamos um conjunto de postulados semelhantes aos propostos por Hilbert e o quadrilátero de Saccheri, com algumas proposições, resultados desses estudos, sendo esses suportes para as nossas demonstrações.

Falamos sobre a geometria hiperbólica no capítulo 3, mostramos o Postulado de Lobachevsky, que é a negação do Postulado das Paralelas. Daí demonstramos que, nessa geometria, *a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é menor do que π* .

Para finalizar, no apêndice, apresentamos alguns modelos planos para a Geometria Hiperbólica, como o modelo de Beltrami, o modelo de disco de Klein e os modelos de Poincaré, sendo o modelo de disco de Poincaré apresentado de forma mais detalhada, pois nele podemos representar qualquer elemento da Geometria Hiperbólica, sem perder suas características.

Gostaríamos de destacar que não é objetivo deste trabalho fazer demonstrações da consistência desses modelos.

Ainda no apêndice, mostramos dois problemas que desenvolvemos para serem aplicados em turmas do ensino médio, com o uso de um software de geometria dinâmica (Geogebra). Ambos versam sobre a construção de um triângulo e o ato de fazer mover um de seus vértices, sendo um sobre o triângulo euclidiano e o outro sobre o triângulo hiperbólico baseado nas propriedades existentes no modelo do disco de Poincaré. Enquanto o primeiro mostra que *a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a π* , o segundo mostra que, essa soma *é menor do que π* .

Breve História do 5º Postulado de Euclides

Este capítulo está fundamentado em [1], [3], [4], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [13], [17], [18] e [20].

Após a morte de Alexandre, o Grande, os generais de seu exército passaram a disputar o controle do império grego, porém, no ano de 306 a.C., a parte egípcia do império já estava sob o controle de Ptolomeu I. Foi Ptolomeu I o responsável de construir, em Alexandria, um instituto conhecido como Museu, tendo chamado um grupo de sábios para serem professores nesse instituto, dentre os quais estava Euclides.

Com a finalidade de organizar e dar uma base axiomática à matemática conhecida até o momento, no ano 300 a.C., Euclides escreveu o livro *Os elementos*. Sendo este um trabalho, não só de geometria, mas também de teoria dos números, é considerado até hoje a maior obra de matemática de todos os tempos.

Os Elementos é constituído por 13 volumes, assim divididos:

- Geometria Plana: Livros de I a IV e livro VI;
- Números Inteiros: Livros VII, VIII e IX;
- Razões e Grandezas: Livros V e X;
- Geometria Espacial: Livros XI, XII e XIII.

Para dar uma base axiomática à geometria, Euclides a organiza da seguinte forma:

Definições:

Euclides inicia sua obra apresentando *23 definições*, tais como, ângulo reto, linhas retas perpendiculares, circunferência, diâmetro, semicircunferência, triângulos, retas paralelas, etc.

Dentre as definições dadas por Euclides, destacamos:

1. Um ponto é o que não tem partes.
2. Uma linha é um comprimento sem largura.
3. Uma linha reta é uma linha que assenta igualmente os pontos sobre ela.

Além das *definições*, Euclides também apresenta em seu livro uma lista com cinco *noções comuns* e cinco *postulados*, sendo este conjunto fundamental para a consistência do sistema axiomático proposto em seu livro.

Noções Comuns:

1. Coisas iguais a uma mesma coisa, são iguais.
2. Se coisas iguais são somadas a coisas iguais, então os resultados são iguais.
3. Se coisas iguais são subtraídas de coisas iguais, então os restos são iguais.
4. Coisas que coincidem com outra coisa são iguais.
5. O todo é maior que qualquer parte.

Postulados:

1. Pode-se traçar uma única linha reta ligando dois pontos quaisquer.
2. Pode-se continuar, de maneira única, qualquer linha reta finita continuamente em uma linha reta.
3. Pode-se traçar uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio.

4. Todos os ângulos retos são iguais.
5. Se uma linha reta corta duas outras e forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas linhas retas se encontrarão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

Como o quinto postulado não era tão claro e direto como os outros quatro, sempre ficou uma dúvida se realmente era um postulado ou um teorema.

Entre os séculos VIII e IX a obra de Euclides foi traduzida para o árabe, fazendo com que essa discussão chegasse ao oriente, assim como a busca por uma demonstração.

Apenas no século XIX, começou a surgir uma compreensão correta desse postulado. Porém antes, na tentativa de demonstrá-lo, muitos matemáticos propuseram enunciados de melhor entendimento, equivalentes a ele, sendo o mais famoso o Postulado de Playfair, proposto por John Playfair (1748 - 1819), o qual popularizou-se no século XVIII e diz:

Por um ponto fora de uma reta, existe exatamente uma reta paralela à reta dada.

No começo do século XVIII, o padre jesuíta e matemático italiano Girolamo Saccheri (1667 - 1733) tentou, através dos seguintes argumentos, uma nova abordagem do quinto postulado, considerando que:

- Como no mundo real temos modelos do sistema proposto por Euclides, sabemos então que o 5º Postulado não possui contradições;
- Acreditamos que, a partir dos outros postulados, podemos provar o Postulado das Paralelas, porém ninguém ainda conseguiu;
- Suponhamos que o Postulado das Paralelas possa ser demonstrado, logo, ao substituí-lo por sua negação, chegaremos a uma contradição no sistema;
- Então, se usarmos a negação do Postulado das Paralelas como um postulado e encontrarmos uma contradição, estaremos mostrando que o Postulado das Paralelas pode ser

demonstrado a partir dos outros postulados, sem que, na realidade, tenha sido feita uma demonstração direta.

Deste modo, o Postulado de Playfair, seria dividido em duas partes, ou seja,

1. não existem retas paralelas ou
2. por um ponto fora de uma reta passam mais de uma reta paralela à reta dada.

Da primeira premissa, Saccheri concluiu que as linhas retas são finitas, contradizendo o segundo postulado de Euclides. Daí a rejeitou. Porém, esse resultado hoje em dia é aceito como base da *Geometria Elíptica*, na qual tanto o segundo como o quinto postulados são rejeitados.

A segunda premissa não foi tão fácil de refutar. Saccheri chegou a provar vários resultados, mas não conseguia chegar a tal contradição. Esses resultados foram publicados em 1733, no livro *Euclides Vindicatus* (traduzindo literalmente, Euclides Justificado), o qual foi esquecido por quase um século e, no século XIX, quatro matemáticos o redescobriram, sendo que três deles começaram a considerar a existência de uma geometria plana, na qual, por um ponto fora de uma reta, existem mais de uma reta paralela à reta dada.

Por volta de 1810, o matemático alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) explorou essa possibilidade, porém, para evitar polêmicas, preferiu não publicar seus resultados.

Em 1823, János Bolyai (1802 - 1860) escreveu para o seu pai, Farkas Bolyai (1775 - 1856), amigo de Gauss, dizendo:

Eu descobri coisas tão maravilhosas que me sinto aturdido ... do nada eu criei um estranho mundo novo.

O jovem Bolyai havia descoberto uma geometria não euclidiana. Ao ser informado dessa descoberta, Gauss prontamente respondeu-se com seu amigo, dizendo:

Eu considero este jovem geômetra Bolyai um gênio de primeira ordem.

Porém, János Bolyai não teve o merecido reconhecimento desse grande matemático após publicar seus resultados em 1832. Decepcionado pela falta de valorização de Gauss às suas teorias, não voltou a publicar outro trabalho e, assim, seus trabalhos só foram reconhecidos após a sua morte.

Neste mesmo período, o matemático russo Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792 - 1856) dedica grande parte de seu tempo ao estudo de tal geometria e, em 1829, publica esses estudos. Em sua homenagem, esta nova geometria viria a ser chamada de *Geometria de Lobachevsky*.

Os três chegaram a mesma conclusão:

Se o Postulado das Paralelas for substituído pela segunda parte de sua negação, o sistema que resulta não contém contradições.

Resolvendo, deste modo, todas as questões que duravam mais de 2000 anos em relação ao Postulado de Euclides, ou seja, o mesmo não poderia ser demonstrado a partir dos outros quatro postulados da geometria euclidiana.

O quarto matemático que seguiu os passos de Saccheri foi o alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866). Ele examinou a primeira parte da negação do Postulado das Paralelas, indagando:

Pode existir um sistema de geometria plana, no qual, por um ponto fora de uma reta, não passe nenhuma reta paralela à reta dada?

Para o seu estudo, Riemann considerou que uma reta poderia ser “estendida continuamente”, sem que, necessariamente, fosse infinita.

Foi Bernhard Riemann, através de sua tese de doutoramento, o responsável em demonstrar a possibilidade de existirem diversas geometrias, além da euclidiana. Nesse trabalho, quando desenvolveu a teoria geral das variedades, ele legitimou diferentes tipos de geometria, dentre

as quais se destacam as chamadas *Geometrias Riemannianas*.

No entanto, a aceitação da geometria não euclidiana só veio se estabelecer após a sua morte.

Sendo assim, em meados do século XIX, existiam três diferentes geometrias, aquelas descobertas por Lobachevsky e Riemann foram chamadas de Geometrias não Euclidianas, pois, em certo ponto, iam de encontro à geometria de Euclides. Todas são sistemas consistentes na Geometria Riemanniana, porém se diferem em relação ao paralelismo.

Essas novas geometrias são bem peculiares. Em regiões muito pequenas, elas se aproximam bastante da euclidiana, mas em grandes regiões, as duas são bem diferentes da euclidiana.

No nosso trabalho, abordaremos um dos resultados obtidos ao se negar o quinto postulado de Euclides, *a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo*.

Geometria Neutra

2.1 Axiomas de Hilbert

Neste capítulo, apresentamos um conjunto de axiomas semelhantes aqueles propostos por David Hilbert (1862 - 1943), conjunto este que nos fornece subsídios para termos uma geometria consistente, intitulada de Geometria Neutra, onde são válidos todos os resultados que não dependem do Postulado das Paralelas. Os estudos que apresentamos neste capítulo estão fundamentados em [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [14], [13], [17], [18], [20] e [21].

No século XIX a geometria conquistou um avanço jamais visto, porém foi Hilbert quem procurou dar-lhe um caráter puramente formal, que já existia na Álgebra e na Análise. A obra *Os Elementos* possuía uma estrutura dedutiva, no entanto continha hipóteses ocultas, definições sem sentido, como também falhas de lógica. Hilbert logo notou que nem tudo em Matemática poderia ser definido, daí estruturou o tratamento dado à Geometria propondo, em 1899 no seu livro *Grundlagen der Geometrie* (tradução: *Fundamentos da Geometria*), um conjunto com 21 premissas. O objetivo principal era dar à geometria euclidiana uma abordagem rigorosa e, deste modo, corrigir as falhas encontradas nos Elementos de Euclides. Em seu trabalho ele apresenta os axiomas em cinco grupos: 1. Axiomas de Incidência, 2. Axiomas de Ordem, 3. Axiomas de Congruência, 4. Axiomas de Continuidade, 5. Axioma das Paralelas. Em sua fundamentação, Hilbert tomou como base conceitos primitivos, que chamaremos de objetos não definidos e as relações entre estes, que daremos o nome de relações não definidas.

Objetos não Definidos:

1. Ponto;

2. Reta;

3. Plano.

Relações não Definidas:

1. Estar sobre;

2. Estar em;

3. Estar entre;

4. Ser congruente;

5. Ser paralelo;

6. Ser contínuo.

Objetos Definidos:

D1. Pontos Colineares: Se três pontos A , B e C pertencem a uma mesma reta r , então dizemos que A , B e C são pontos colineares, caso contrário, diremos que são não colineares.

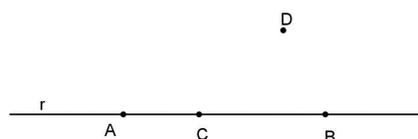


Figura 2.1 Os pontos A , B e C são colineares, enquanto que os pontos A , B e D são não colineares.

D2. Segmento de Reta: O conjunto constituído por dois pontos A e B e por todos os pontos que estão situados entre A e B chama-se segmento de reta \overline{AB} ou \overline{BA} . Os pontos A e B são denominados de extremidades ou extremos do segmento.



Figura 2.2 Segmento \overline{AB} .

- D3. Distância entre Dois Pontos:** A todo par de pontos do plano, corresponde um número real maior ou igual a zero, denominado distância entre esses pontos. Esse número é zero se, e só se, os pontos são iguais.
- D4. Medida de um Segmento de Reta:** Dados dois pontos A e B , definimos a medida do segmento \overline{AB} e denotamos por AB , como a distância entre os pontos A e B .
- D5. Congruência entre Segmentos de Reta:** Diremos que dois segmentos \overline{AB} e $\overline{A'B'}$ são congruentes, e escrevemos $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, quando $AB = A'B'$.
- D6. Pontos Equidistantes:** Dados três pontos A , B e C , tais que $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, então dizemos que o ponto C é equidistante dos pontos A e B .

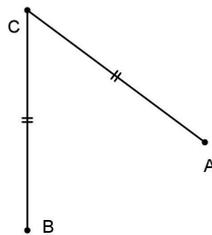


Figura 2.3 C é um ponto equidistante dos pontos A e B .

- D7. Ponto Médio:** Chamamos de ponto médio do segmento \overline{AB} um ponto C deste segmento, tal que $AC = BC$.

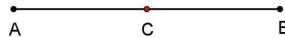


Figura 2.4 C é ponto médio do segmento \overline{AB} .

- D8. Semiplano:** Dados um plano Π e uma reta $r \subset \Pi$, existem dois subconjuntos disjuntos $H_1, H_2 \subset \Pi$ (chamados de semiplanos determinados por r), tais que $H_1 \cap r = H_2 \cap r = \emptyset$ e $H_1 \cup r \cup H_2 = \Pi$, com a condição de que dois pontos $A, B \in \Pi$ pertencem ao mesmo semiplano se, e somente se, $\overline{AB} \cap r = \emptyset$.
- D9. Estar do mesmo lado ou em lados opostos de uma reta:** Sejam $A, B \in \Pi$ e não incidentes a $r \subset \Pi$. Se A e B estão no mesmo semiplano determinado por r , então diremos que A e

B estão do mesmo lado em relação à r , caso contrário, diremos que A e B estão em lados opostos em relação à r .

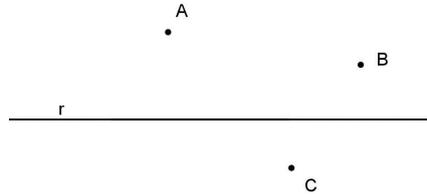


Figura 2.5 Os pontos A e B estão do mesmo lado em relação à reta r , enquanto que os pontos A e C estão em lados opostos em relação à r .

D10. Estar Entre: Dados três pontos distintos de uma mesma reta A , B e C , diremos que B está entre os pontos A e C se, e só se, a distância entre os pontos A e C é igual à soma da distância entre os pontos A e B com a distância entre os pontos B e C . Deste modo, $AB < AC$ e $BC < AC$.

D11. Semirreta: Dados $A, B \in \Pi$, tais que $A \neq B$, o conjunto constituído pelos pontos do segmento \overline{AB} e por todos os pontos C tais que B se encontra entre A e C , é chamado de semirreta de origem em A contendo o ponto B , e é representado por \overrightarrow{AB} . O ponto A é denominado origem da semirreta \overrightarrow{AB} .

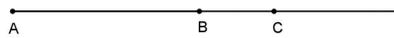


Figura 2.6 Semirreta AB .

D12. Semirretas Opostas: Dada a reta \overleftrightarrow{AB} e um ponto C da reta \overleftrightarrow{AB} , tal que A está entre B e C , dizemos que as semirretas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} são semirretas opostas.

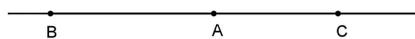


Figura 2.7 Semirretas opostas AB e AC .

D13. Ângulo: Dadas duas semirretas \vec{AB} e \vec{AC} , de mesma origem A , chamamos de ângulo BAC , e escrevemos $\angle BAC$, a figura formada pelas semirretas \vec{AB} e \vec{AC} , onde \vec{AB} e \vec{AC} são os lados do ângulo e o ponto A o vértice. Podemos também indicar o ângulo $\angle BAC$ como $\angle A$.

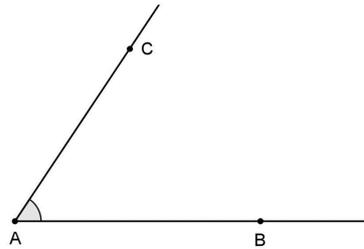


Figura 2.8 Ângulo $\angle BAC$.

D14. Interior de um Ângulo: Dizemos que o interior de um ângulo $\angle BAC$, e denotamos por $int \angle BAC$, é a região formada pelos pontos do plano que estão do mesmo lado de \vec{AB} em relação à \vec{AC} e, ao mesmo tempo, estão do mesmo lado de \vec{AC} em relação à \vec{AB} .

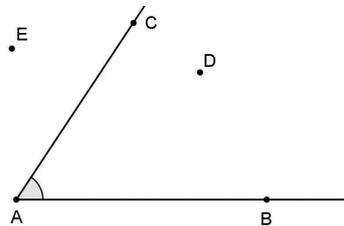


Figura 2.9 O ponto D está no interior do ângulo $\angle BAC$, enquanto que o ponto E não está.

D15. Medida de um Ângulo: A cada ângulo $\angle BAC$ associamos uma medida \widehat{BAC} , com $0 \leq \widehat{BAC} \leq \pi$, satisfazendo as seguintes condições:

1. Se $A, B \in r$ e H é um dos semiplanos definidos por r , então, para todo $0 \leq x \leq \pi$ existe uma única semirreta \vec{AP} contida em $H \cup r$ tal que $\widehat{PAB} = x$.
2. Se $\widehat{PAB} = 0$, então as semirretas \vec{AP} e \vec{AB} coincidem; se $\widehat{PAB} = \pi$, então as semirretas \vec{AP} e \vec{AB} são opostas;
3. Se $D \in int \angle BAC$ então $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} + \widehat{DAC}$.

D16. Congruência entre Ângulos: Dois ângulos $\angle BAC$ e $\angle B'A'C'$ são congruentes, e indicamos $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, quando eles têm medidas iguais.

D17. Ângulos Suplementares: Dois ângulos $\angle BAC$ e $\angle DAC$ são ditos suplementares quando \overrightarrow{AC} é lado comum e os lados não comuns, \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AD} são semirretas opostas.

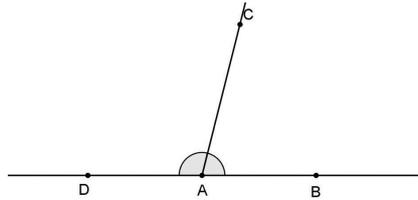


Figura 2.10 Os ângulos $\angle BAC$ e $\angle CAD$ são suplementares.

D18. Ângulo Reto: Um ângulo que é congruente ao seu ângulo suplementar é dito ângulo reto.

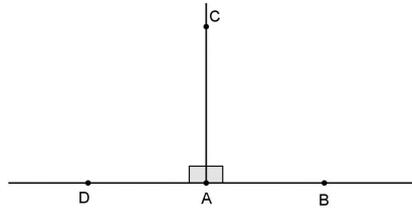


Figura 2.11 Os ângulos $\angle BAC$ e $\angle DAC$ são retos.

D19. Ângulos Obtuso e Agudo: Um ângulo que é maior do que o seu ângulo suplementar é chamado de ângulo obtuso, enquanto que o ângulo que é menor do que o seu ângulo suplementar é denominado ângulo agudo. Na figura 2.10, $\angle BAC$ é agudo, enquanto que $\angle CAD$ é obtuso.

D20. Ângulos Consecutivos: Dizemos que dois ângulos são consecutivos quando possuem o mesmo vértice e um lado comum.

D21. Ângulos Adjacentes: Quando dois ângulos consecutivos não possuem pontos internos comuns, dizemos que são adjacentes. Na figura 2.12, os ângulos consecutivos $\angle BAD$ e $\angle DAC$ são adjacentes.

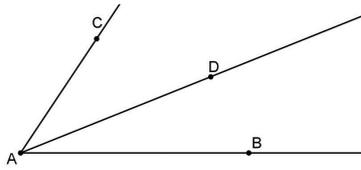


Figura 2.12 Os ângulos $\angle BAC$ e $\angle DAC$ são consecutivos.

D22. Retas Paralelas: Duas retas que estão no mesmo plano e não se intersectam são ditas retas paralelas.

D23. Triângulo: Dados três pontos não colineares A , B e C , definimos triângulo como sendo a região compreendida entre os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} , onde os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} são os lados do triângulo e os pontos A , B e C , os vértices.

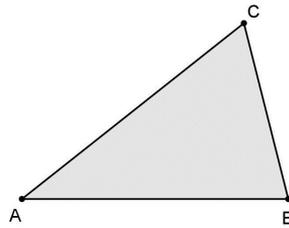


Figura 2.13 Triângulo $\triangle ABC$.

D24. Ângulo Externo de um Triângulo: Dado o triângulo $\triangle ABC$ e um ponto D pertencente à semirreta \overrightarrow{AB} , de modo que B está entre A e D , dizemos que o ângulo $\angle DBC$ é ângulo externo do triângulo $\triangle ABC$.

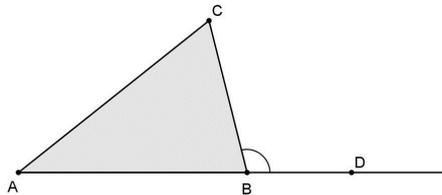


Figura 2.14 $\angle DBC$ é ângulo externo do triângulo $\triangle ABC$.

D25. Congruência entre Triângulos: Dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são ditos congruentes, neste caso escrevemos $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, quando $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$,

$\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ e $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$. Mais adiante, mostraremos os casos de congruência de triângulos.

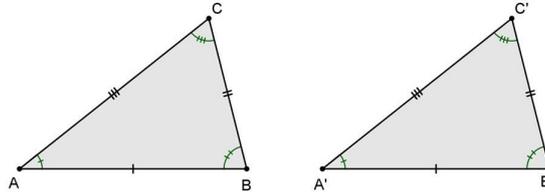


Figura 2.15 Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes.

D26. Mediana de um Triângulo: Dados o triângulo $\triangle BAC$ e o ponto médio M do lado \overline{BC} , chamamos de mediana relativa ao vértice A o segmento \overline{AM} .

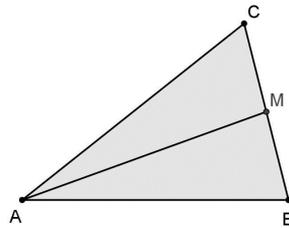


Figura 2.16 No triângulo $\triangle ABC$, o segmento \overline{AM} é a mediana relativa ao vértice A .

Axiomas de Incidência:

Os axiomas de incidência estabelecem relações entre os objetos não definidos (ponto, reta e plano).

- I1.** Dados dois pontos distintos de um plano, existe uma e apenas uma reta passando por ambos os pontos.
- I2.** Toda reta possui ao menos dois pontos.
- I3.** Existem ao menos três pontos não colineares em um mesmo plano.

Axiomas de Ordem:

Os axiomas de ordem definem o conceito "estar entre", estabelecendo uma ordenação entre os pontos de uma mesma reta.

- O1.** Se o ponto B está entre os pontos A e C , então A , B e C são três pontos distintos de uma reta.
- O2.** Dados os pontos B e D , existem pontos A , C e E incidentes à reta \overleftrightarrow{BD} , tais que B está entre A e D , C está entre B e D e D está entre B e E .
- O3.** Se A , B e C são três pontos distintos de uma mesma reta, então um, e um só dos pontos, está entre os outros dois.
- O4.** Para toda reta r e quaisquer três pontos A , B e C não incidentes a r .
- Se A e B estão do mesmo lado de r e B e C estão do mesmo lado de r , então A e C estão do mesmo lado de r .
- Se A e B estão em lados opostos de r e B e C estão em lados opostos de r , então A e C estão do mesmo lado de r .

“Ser congruente” é uma de nossas relações não definidas, sendo esta uma relação entre segmentos e entre ângulos. Neste trabalho apresentamos estas relações, nomeando-as em três grupos de axiomas.

Axiomas de Congruência de Segmentos:

- S1.** Se A e B são pontos distintos e se A' é um ponto qualquer, então, para cada semirreta r emanando de A' , existe um único ponto B' em r , tal que $B' \neq A'$ e $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$.
- S2.** Se $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ e $\overline{AB} \cong \overline{EF}$, então $\overline{CD} \cong \overline{EF}$. Além disso, todo segmento é congruente a si mesmo.
- S3.** Se o ponto B está entre os pontos A e C , B' está entre os pontos A' e C' , $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ e $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, então $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.

Axiomas de Congruência de Ângulos:

- A1.** Dado um ângulo qualquer $\angle BAC$ e dada uma semirreta qualquer $\overrightarrow{A'B'}$ emanando de um ponto A' , então existe uma única semirreta $\overrightarrow{A'C'}$, em um dos semiplanos definidos pela reta $\overleftrightarrow{A'B'}$, tal que $\angle B'A'C' \cong \angle BAC$.

A2. Se $\angle A \cong \angle B$ e $\angle A \cong \angle C$, então $\angle B \cong \angle C$. Além disso, todo ângulo é congruente a si mesmo.

Axioma de Congruência de Triângulos:

T1. (1º Caso de Congruência de Triângulos - LAL) Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, tais que $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ e $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, então os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes.

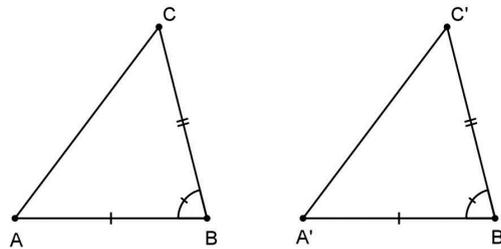


Figura 2.17 1º Caso de Congruência de Triângulos.

Axiomas de Continuidade:

Estes axiomas são necessários para que se possa corrigir algumas falhas lógicas nos *Elementos* de Euclides. Eles definem elemento de separação entre partes que são adjacentes.

N1. (Axioma da Arquimedes) Se \overline{AB} e \overline{CD} são dois segmentos quaisquer, existe um número natural n tal que, se o segmento \overline{CD} é produzido n vezes na semirreta \overrightarrow{AB} , emanando de A , então atinge-se um ponto E tal que $n\overline{CD} \cong \overline{AE}$ e B está entre A e E .

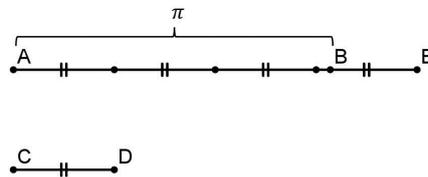


Figura 2.18 No exemplo, $AB = \pi$ e $AE = 4CD$.

De forma intuitiva, o axioma de Arquimedes nos diz que, ao escolher-se aleatoriamente uma unidade de comprimento para o segmento \overline{CD} , então qualquer outro segmento terá um comprimento finito em relação a \overline{CD} , isto é, o comprimento do segmento dado é, no máximo n vezes

o comprimento de \overline{CD} .

N2. (Axioma da Completude da Reta ou Axioma de Cantor) Se $\overline{A_n B_n}$, $n \in \mathbb{N}$, é uma coleção de segmentos encaixados, então existe pelo menos um ponto P pertencente a todos os segmentos da coleção.

O axioma da Completude da Reta nos garante a continuidade de uma reta, ou seja, dados um ponto A de uma reta r e um número real qualquer x , existem dois únicos pontos P e P' em r , tais que A está entre P e P' e, além disso, $AP = AP' = x$.

A seguir apresentamos algumas definições e proposições, resultados das aplicações dos axiomas apresentados. Tais definições e proposições são muito importantes para a fundamentação do nosso trabalho.

Definição 2.1. Um conjunto de pontos do plano constitui um lugar geométrico (L.G.) em relação a uma determinada propriedade P quando satisfaz às seguintes condições:

- a) Todo ponto que pertence ao lugar geométrico possui a propriedade P ;
- b) Todo ponto que possui a propriedade P pertence ao lugar geométrico.

Dentre os diversos lugares geométricos, destacamos a mediatriz.

Definição 2.2. O lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de dois pontos A e B dados é a mediatriz do segmento \overline{AB} .

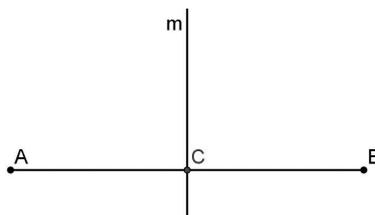


Figura 2.19 Reta m , mediatriz do segmento \overline{AB} .

Definição 2.3. Dadas as retas, \overleftrightarrow{AC} e \overleftrightarrow{BD} , se estas retas se intersectam no ponto O , de modo que o ponto O está entre A e C e, ao mesmo tempo, entre B e D , então são formados quatro ângulos: $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$ e $\angle DOA$, onde $\angle AOB$ e $\angle COD$ são ditos opostos pelo vértice (OPV), do mesmo modo $\angle BOC$ e $\angle DOA$.

Proposição 2.1. Ângulos opostos pelo vértice têm medidas iguais.

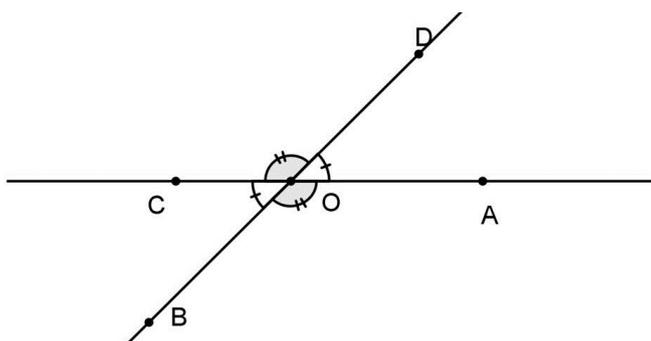


Figura 2.20 Ângulos opostos pelo vértice.

Demonstração. Sejam \overleftrightarrow{AC} e \overleftrightarrow{BD} duas retas distintas que se intersectam no ponto O , então, por *D17*, $\angle AOB$ e $\angle BOC$ são suplementares, do mesmo modo $\angle BOC$ e $\angle COD$, daí, por *D15*, item 3:

$$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = \pi$$

$$\widehat{BOC} + \widehat{COD} = \pi$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos:

$$\widehat{AOB} - \widehat{COD} = 0$$

Logo, $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$.

Usamos o mesmo artifício para provar que $\widehat{BOC} = \widehat{DOA}$. ■

De posse destes resultados podemos mostrar o seguinte:

Lema 2.1. (Teorema do Ângulo Externo) Em todo triângulo, a medida do ângulo externo é maior do que a medida de cada ângulo interno não adjacente a ele.

Demonstração. Nossa demonstração será em duas partes:

1. Provaremos que $\widehat{XCA} > \widehat{BAC}$.

Sejam $\triangle ABC$ um triângulo qualquer, M o ponto médio do lado \overline{AC} e X um ponto qualquer pertencente à semirreta \overrightarrow{BC} , de modo que C está entre B e X (figura 2.21). Sobre a semirreta \overrightarrow{BM} marcamos o ponto B' , tal que $BM = MB'$. Considerando os triângulos $\triangle ABM$ e $\triangle CB'M$ temos que:

- Por construção $AM = CM$;
- Por construção $BM = B'M$;
- $\widehat{AMB} = \widehat{CMB'}$ (ângulos OPV).

Portanto, por *T1 (caso LAL)*, temos $\triangle AMB \cong \triangle CMB'$ e, daí, $\widehat{B'CM} = \widehat{BAM}$. Logo,

$$\widehat{XCA} > \widehat{B'CA} = \widehat{B'CM} = \widehat{BAM} = \widehat{BAC}$$

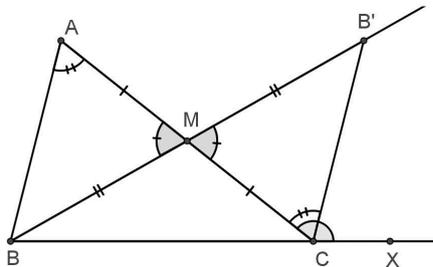


Figura 2.21 $\angle XCA$ é maior do que $\angle BAC$.

2. Provaremos que $\widehat{XCA} > \widehat{ABC}$.

Neste caso, consideremos N , ponto médio do lado \overline{BC} , X um ponto qualquer pertencente à semirreta \overrightarrow{BC} , de modo que C está entre B e X (figura 2.22). Sobre a semirreta \overrightarrow{AN} marcamos o ponto A' , de modo que $AN = NA'$. Seja D um ponto qualquer pertencente à $\overrightarrow{A'C}$, tal que C está entre A' e D . Comparando os triângulos $\triangle ABN$ e $\triangle CA'N$, temos:

- Por construção $BN = CN$;

- Por construção $AN = A'N$;
- $\widehat{ANB} = \widehat{CNA'}$ (ângulos *OPV*).

Daí, por *TI* (*caso LAL*), temos $\triangle ANB \cong \triangle CNA'$ e, portanto, $\widehat{A'CN} = \widehat{ABN}$, mas $\widehat{A'CN} = \widehat{XCD}$ (são *OPV*), deste modo,

$$\widehat{XCA} > \widehat{XCD} = \widehat{A'CN} = \widehat{ABN} = \widehat{ABC}$$

■

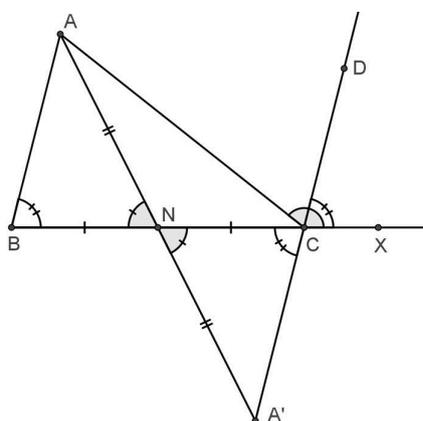


Figura 2.22 $\angle XCA$ é maior do que $\angle ABC$.

Proposição 2.2. (*2º caso de congruência - ALA*) Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, tais que $AB = A'B'$, $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ e $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, então os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes.

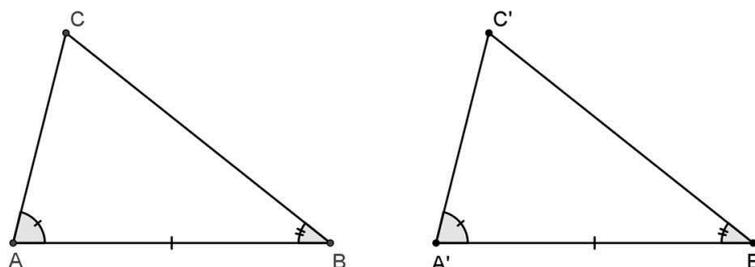


Figura 2.23 2º Caso de Congruência de Triângulos.

Demonstração. Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ dois triângulos, tais que $AB = A'B'$, $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ e $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$.

Seja D um ponto do lado \overline{AC} , tal que $AD = A'C'$. Consideremos, então, o triângulo $\triangle ABD$ e, comparando com o triângulo $\triangle A'B'C'$, temos $AD = A'C'$, $AB = A'B'$ e $\widehat{BAD} = \widehat{B'A'C'}$, deste modo, por *T1 (caso LAL)*, os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes, logo, como consequência, temos $\widehat{ABD} = \widehat{A'B'C'}$, mas, por hipótese, $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$, portanto, $\widehat{ABD} = \widehat{ABC}$. Consequentemente, por *A1*, os lados \overline{BD} e \overline{BC} coincidem. Segue que os pontos C e D também coincidem e, portanto, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ABD$ são congruentes, daí, temos que $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. ■

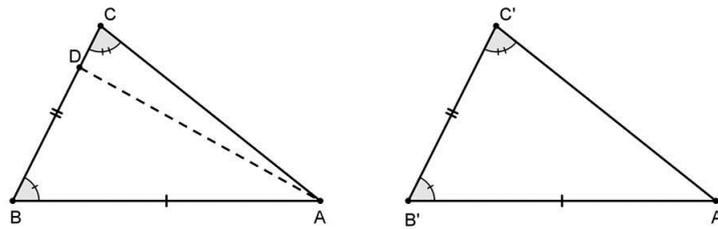


Figura 2.24 Para provarmos o 2º caso de congruência, construímos triângulo $\triangle ABD$, congruente ao triângulo $\triangle A'B'C'$.

Com esses dois casos de congruência (*LAL* e *ALA*), podemos demonstrar as próximas proposições, porém, antes, vamos definir triângulo isósceles.

Definição 2.4. Um triângulo é dito isósceles se tem dois lados congruentes, chamados laterais e o terceiro é chamado de base do triângulo.

Proposição 2.3. Em um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.

Demonstração. Seja $\triangle ABC$ um triângulo isósceles em que $AB = AC$. Devemos provar que $\widehat{ABC} = \widehat{BCA}$, deste modo, comparando $\triangle ABC$ com ele mesmo, fazendo corresponder os vértices da seguinte maneira:

$$A \leftrightarrow A$$

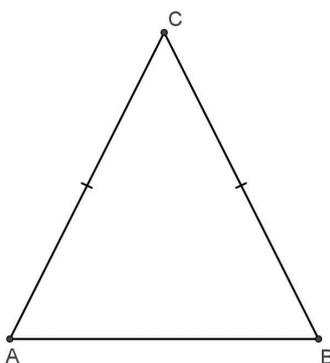


Figura 2.25 O triângulo $\triangle ABC$ é isósceles.

$$B \leftrightarrow C$$

$$C \leftrightarrow B$$

Temos, por hipótese, $AB = AC$ e $AC = AB$, como $\widehat{BAC} = \widehat{CAB}$, então, por *TI (caso LAL)*, segue-se que esta correspondência define uma congruência e, em consequência, $\widehat{ABC} = \widehat{BCA}$.

■

Proposição 2.4. *Se, em um triângulo $\triangle ABC$, tem-se dois ângulos congruentes, então o triângulo é isósceles.*

Demonstração. Seja $\triangle ABC$ um triângulo em que $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$, vamos mostrar que $AB = AC$. Mais uma vez vamos comparar o triângulo $\triangle ABC$ com ele mesmo. Fazendo corresponder os vértices do seguinte modo:

$$A \leftrightarrow A$$

$$B \leftrightarrow C$$

$$C \leftrightarrow B$$

Como, por hipótese, $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ e $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$ e $BC = CB$, segue-se, pela *proposição 2.2 (caso ALA)*, que esta correspondência define uma congruência e, em consequência $AB = BC$.

■

Proposição 2.5. (3º caso de congruência - LLL) Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, tais que $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ e $AC = A'C'$, então os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes.

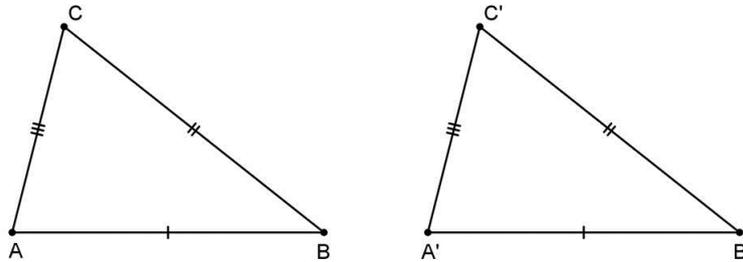


Figura 2.26 3º Caso de Congruência de Triângulos.

Demonstração. Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ dois triângulos, tais que $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ e $AC = A'C'$. Para provarmos que $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes, vamos, no triângulo $\triangle ABC$, construir um ponto D no semiplano oposto ao ponto C em relação ao lado \overline{AB} , de modo que $B'\hat{A}'C' = B\hat{A}D$ e $AD = A'C'$. Deste modo, temos:

- Por hipótese, $AB = A'B'$;
- Por construção, $AD = A'C'$ e $D\hat{A}B = C'\hat{A}'B'$

Portanto, $\triangle ABD \cong \triangle A'B'C'$.

Para provarmos que $\triangle ABD \cong \triangle ABC$, devemos traçar o segmento \overline{CD} , daí, temos que:

- $AD = A'C' = AC$;
- $BD = B'C' = BC$.

Então os triângulos $\triangle ADC$ e $\triangle BDC$ são isósceles, deste modo,

- $A\hat{D}C = A\hat{C}D$;
- $C\hat{D}B = D\hat{C}B$.

Daí, $A\hat{D}B = A\hat{C}B$. Porém, por *TI* (caso *LAL*), $\triangle ABD \cong \triangle ABC$ e, como $\triangle ABD \cong \triangle A'B'C'$, concluímos que $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. ■

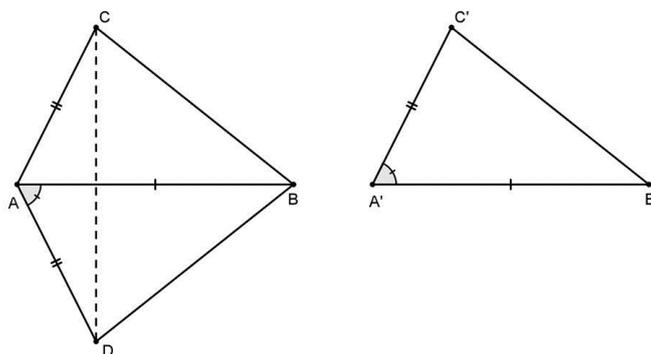


Figura 2.27 O triângulo $\triangle ABD$ é congruente aos triângulos $\triangle A'B'C'$ e $\triangle ABC$.

Proposição 2.6. (*4º caso de congruência - LAA_o*) Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, tais que $AB = A'B'$, $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ e $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$, então os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes.

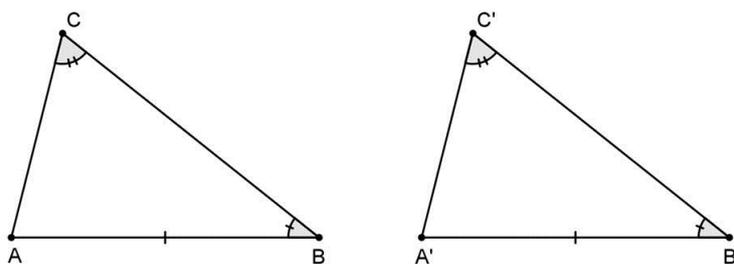


Figura 2.28 4º Caso de Congruência de Triângulos

Demonstração. Sejam os triângulos $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ de acordo com as hipóteses do teorema. Seja D um ponto da semirreta \overrightarrow{BC} tal que $BD = B'C'$. Como,

- Por hipótese, $AB = A'B'$ e $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$;
- Por construção, $BD = B'C'$.

Então, por *T1 (caso LAL)*, concluímos que $\triangle ABD \cong \triangle A'B'C'$ e, conseqüentemente, $\widehat{ADB} = \widehat{A'C'B'}$. Suponhamos que o ponto D está entre B e C , deste modo, relativamente ao triângulo $\triangle ADC$, o ângulo $\angle ADB$ é externo e o ângulo $\angle ACD$ é interno não adjacente, logo, pelo *Lema 2.1 (Teorema do Ângulo Externo)*, $\widehat{ADB} > \widehat{ACD} = \widehat{ACB}$. Mas, por hipótese, $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$, portanto $\widehat{ADB} > \widehat{A'C'B'}$, uma contradição, pois mostramos que $\widehat{ADB} = \widehat{A'C'B'}$. Se supusermos

que o ponto C está entre B e D , concluímos que $\widehat{ADB} < \widehat{A'C'B'}$, chegando novamente a uma contradição. Deste modo, $C = D$. Consequentemente, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes. ■

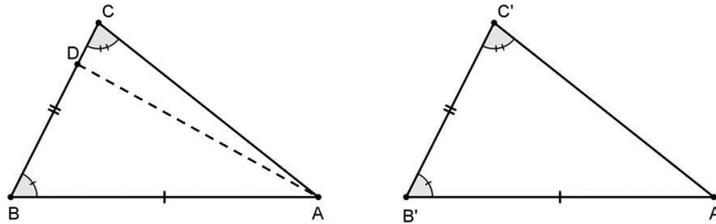


Figura 2.29 Para provarmos o 4º caso de congruência, também construímos o triângulo $\triangle ABD$, congruente ao triângulo $\triangle A'B'C'$

Analisando os resultados apresentados, podemos perceber a importância do 1º caso de congruência (LAL) nas demonstrações dos mesmos. A seguir mostramos o Teorema de Pasch, onde usamos o conceito de dois pontos estarem do mesmo lado em relação a uma reta dada, ou seja, pertencerem a um mesmo semiplano.

Proposição 2.7. (Teorema de Pasch) *Se $\triangle ABC$ é um triângulo qualquer e r é uma reta arbitrária que intersecta o lado \overline{AB} , num ponto entre A e B , então r também intersecta o lado \overline{AC} ou o lado \overline{BC} . Se C não é incidente a r , então pelo menos um dos lados em $\{\overline{AC}$ e $\overline{BC}\}$ r não intersecta.*

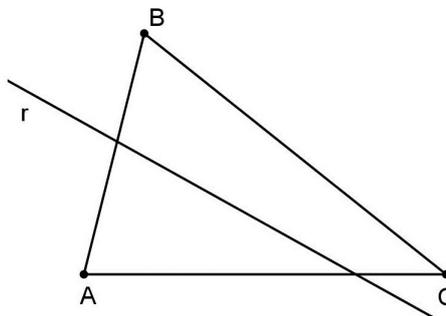


Figura 2.30 Se a reta r intersecta um lado do triângulo $\triangle ABC$, então deverá intersectar um dos outros dois lados.

Demonstração.

- (1) Supondo que r não passa em C , pois, se C é incidente a r , então o teorema está provado.
- (2) Por hipótese, A e B não estão em r e o segmento \overline{AB} encontra r , logo, por $D9$, A e B estão em lados opostos de r .
- (3) Da etapa (1), podemos concluir que C está no mesmo lado de r que o ponto A ou no mesmo lado de B em relação a r .
- (i) Se C está no mesmo lado que A com relação a r , então C está no lado oposto a B , o que implica que r encontra o lado \overline{BC} e não encontra o lado \overline{AC} .
- (ii) Do mesmo modo, se C está no mesmo lado que B com relação a r , então C está no lado oposto a A , portanto, r encontra o lado \overline{AC} , mas não o lado \overline{BC} .

■

Proposição 2.8. Considere um ângulo $\angle CAB$ e um ponto D sobre a reta \overleftrightarrow{BC} . Então D pertence ao interior de $\angle CAB$ se, e só se, D estiver entre B e C .

Demonstração. Dividiremos a demonstração em duas partes:

1. Hipótese: D pertence ao interior de $\angle CAB$.

Tese: D está entre B e C .

Se D pertence ao interior de $\angle CAB$, então, por $D14$, D está no mesmo lado de B em relação à reta \overleftrightarrow{AC} , logo a semirreta \overrightarrow{DB} não intersecta o lado \overrightarrow{AC} do ângulo $\angle CAB$. De modo análogo, D está no mesmo lado de C em relação à reta \overleftrightarrow{AB} , então a semirreta \overrightarrow{DC} não intersecta o lado \overrightarrow{AB} do ângulo $\angle CAB$. Portanto, D está entre B e C .

2. Hipótese: D está entre B e C .

Tese: D pertence ao interior de $\angle CAB$.

Se D está entre B e C , então, por $D10$, $BD < BC$, logo, \overline{BD} não intersecta o lado \overrightarrow{AC} , deste modo, por $D8$ e $D9$, D está no mesmo lado de B em relação a semirreta \overrightarrow{AC} . Usando os mesmos argumentos, concluímos que D está no mesmo lado de C em relação a semirreta \overrightarrow{AB} , deste modo, por $D14$, D pertence ao interior de $\angle CAB$.

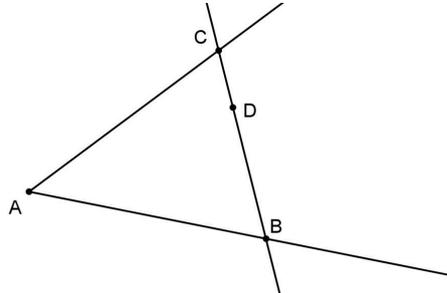


Figura 2.31 O ponto D pertence ao segmento \overline{AB} e está no interior do ângulo $\angle CAB$.

Proposição 2.9. Se D está no interior de $\angle CAB$, então:

1. também pertence ao interior de $\angle CAB$ qualquer ponto da semirreta \overrightarrow{AD} , exceto A ;
2. nenhum ponto da semirreta oposta a \overrightarrow{AD} está no interior de $\angle CAB$;
3. se A está entre os pontos C e E , então B pertence ao interior de $\angle DAE$

Demonstração. Consideremos as semirretas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} , lados de $\angle CAB$.

1. O ponto A é intersecção da semirreta \overrightarrow{AD} com os lados \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} de $\angle CAB$, logo não pertence ao interior de $\angle CAB$.

Seja P um ponto de \overrightarrow{AD} , de modo que P está entre os pontos A e D (o caso em que D está entre os pontos A e P é análogo). Como P está entre os pontos A e D , então, o segmento \overline{DP} não intersecta o lado \overrightarrow{AB} , logo, por $D8$ e $D9$, D e P estão do mesmo lado em relação a semirreta \overrightarrow{AB} . Mas, por $D14$, D e C estão do mesmo lado em relação a \overrightarrow{AB} , daí, concluímos que P e C estão do mesmo lado em relação a \overrightarrow{AB} . Usando o mesmo raciocínio, provamos que P e B estão do mesmo lado em relação a \overrightarrow{AC} . Portanto, P está no interior do ângulo $\angle BAC$.

2. Seja F um ponto pertencente a semirreta oposta a \overrightarrow{AD} , logo A está entre F e D , deste modo, por $D8$ e $D9$, o segmento \overline{DF} intersecta a reta \overleftrightarrow{AB} no ponto A . Portanto, D e F não estão do mesmo lado em relação a reta \overleftrightarrow{AB} . Com um raciocínio análogo provamos

que D e F estão em lados opostos em relação a reta \overleftrightarrow{AC} . Segue que, como D pertence ao interior do ângulo $\angle CAB$, então F não pertence.

3. Temos que mostrar que B e E estão do mesmo lado em relação a reta \overleftrightarrow{AD} , pois já vimos que D está do mesmo lado de B em relação a reta \overleftrightarrow{AC} , que contém E . Consideremos o triângulo $\triangle BCE$. Pela *proposição 2.7 (Teorema de Pasch)*, \overleftrightarrow{AD} intersecta \overline{BC} ou \overline{BE} . Se \overleftrightarrow{AD} intersecta \overline{BC} , então, por *D8* e *D9*, B e C estão em lados opostos em relação a \overleftrightarrow{AD} , logo, B e E estão do mesmo lado em relação a \overleftrightarrow{AD} e a prova estaria concluída.

Supondo por absurdo, que \overleftrightarrow{AD} intersecta o lado \overline{BE} no ponto X e, de acordo com o *item 1* desta proposição, X está no interior do ângulo $\angle BAC$, então E e X estão em lados opostos em relação a \overleftrightarrow{AB} , deste modo, o segmento \overline{EX} intersecta a reta \overleftrightarrow{AB} em um ponto Y , absurdo, pois teríamos \overleftrightarrow{BE} e \overleftrightarrow{AB} coincidentes, já que têm dois pontos comuns, B e Y . Portanto, os pontos B e E estão do mesmo lado em relação a reta \overleftrightarrow{AD} , daí concluímos que o ponto B está no interior do ângulo $\angle DAE$.

■

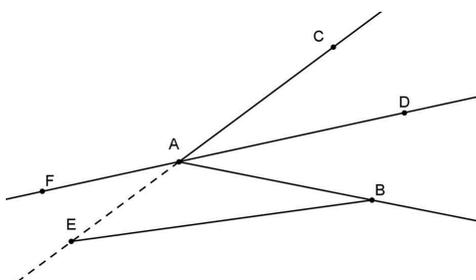


Figura 2.32 Pontos D no interior de $\angle CAB$ e F , fora de $\angle CAB$

Definição 2.5. A semirreta \overrightarrow{AD} está entre as semirretas \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{AB} , se \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} não são semirretas opostas e D pertence ao interior de $\angle CAB$.

Teorema 2.1. (Teorema da barra transversal) Se \overrightarrow{AD} está entre \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{AB} , então \overrightarrow{AD} intersecta o segmento \overline{BC} .

Demonstração. Se \overrightarrow{AD} está entre \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} , então pela *definição 2.5*, D pertence ao interior de $\angle BAC$. Consideremos um ponto E pertencente à semirreta oposta de \overrightarrow{AC} , de acordo com a

proposição 2.9, item 3, B está no interior do ângulo $\angle DAE$ e, em consequência, B e C estão em lados opostos em relação à reta \overleftrightarrow{AD} , sendo assim, o segmento \overline{BC} intersecta a reta \overleftrightarrow{AD} .

Supondo por absurdo que o ponto P , intersecção de \overline{BC} e \overleftrightarrow{AD} , pertença à semirreta oposta à \overleftrightarrow{AD} , deste modo, pela *proposição 2.9, item 2*, P não pertence ao interior de $\angle BAC$, absurdo, pois, pela *proposição 2.8*, se P pertence ao segmento \overline{BC} , então P pertence ao interior do ângulo $\angle BAC$. Portanto, a semirreta \overleftrightarrow{AD} intersecta o segmento \overline{BC} . ■

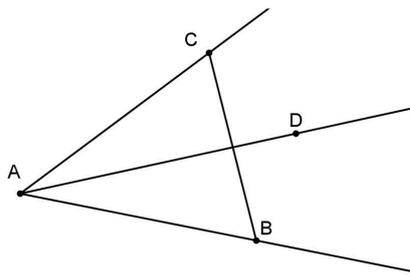


Figura 2.33 Semirreta \overleftrightarrow{AD} intersectando o segmento \overline{BC} .

2.2 Quadrilátero de Saccheri

Durante o século XVIII, a matemática na Itália pouco avançou. Apenas um padre jesuíta, Girolamo Saccheri, conseguiu chegar mais perto de uma grande descoberta. No ano de sua morte, ele publicou o livro *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclides com toda falha retirada), no qual tentou demonstrar o Postulado das Paralelas. Decidido a aplicar o método da Redução ao Absurdo, construiu um quadrilátero birretangular com dois lados opostos sendo perpendiculares à base e tendo medidas iguais, o qual recebeu o nome de *Quadrilátero de Saccheri*. Sem usar o Postulado das Paralelas, ele provou que os ângulos superiores do quadrilátero têm medidas iguais, considerando, deste modo, que existem três possibilidades para eles:

1. A hipótese do ângulo agudo;
2. A hipótese do ângulo reto;

3. A hipótese do ângulo obtuso.

A ideia de Saccheri era mostrar que as hipóteses 1 e 3 levavam a um absurdo e, deste modo, chegaria, de forma indireta, a conclusão que a hipótese 2 seria uma consequência necessária dos Postulados de Euclides, sem o das Paralelas.

Saccheri não teve grandes dificuldades para excluir a hipótese 3, pois considerava que uma reta é infinitamente longa. No entanto, da hipótese 1, ele obteve diversos resultados, porém, como acreditava que a geometria euclidiana era a única existente, deixou que estas ideias interferissem nesses resultados, ficando, deste modo, na obscuridade por quase um século.

Nesse capítulo apresentamos alguns resultados encontrados por Saccheri. Iniciamos definindo o quadrilátero de Saccheri, em seguida apresentamos algumas proposições que são de suma importância para calcularmos a soma das medidas dos ângulos internos nas geometrias euclidiana e não euclidianas.

Definição 2.6. Um quadrilátero $ABCD$ é dito ser um quadrilátero de Saccheri se $\widehat{DAB} = \widehat{ADC} = \pi/2$ e $AB = CD$.

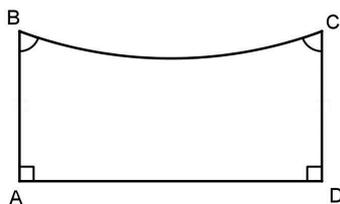


Figura 2.34 $ABCD$ é um quadrilátero de Saccheri.

Proposição 2.10. Se $ABCD$ é um quadrilátero de Saccheri, então:

1. $AC = BD$
2. $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$

Demonstração. Considerando o quadrilátero de Saccheri da Figura 2.35, temos que:

1. Por definição $\widehat{DAB} = \widehat{ADC} = \pi/2$ e $AB = CD$, além disso, \overline{AD} é lado comum, portanto, de acordo com *T1 (caso LAL)*, os triângulos $\triangle BAD$ e $\triangle CDA$ são congruentes, deste modo, $AC = BD$.
2. Comparando os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle BCD$, temos que $AB = CD$, $AC = BD$ (demonstração do *item 1*) e \overline{BC} é lado comum, portanto, baseado na *proposição 2.5 (caso LLL)*, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DCB$ são congruentes, deste modo, os ângulos correspondentes têm medidas iguais e, em particular, $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$

■

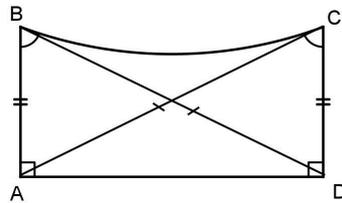


Figura 2.35 No quadrilátero de Saccheri, as diagonais são iguais.

A proposição anterior nos mostra que em todo quadrilátero de Saccheri as diagonais têm medidas iguais, fato que aprendemos na geometria euclidiana quando estudamos as propriedades do retângulo. Mais adiante, mostraremos que o retângulo é um caso particular do quadrilátero de Saccheri.

Outra propriedade dos retângulos é que essas diagonais intersectam-se em seus pontos médios. Isto é decorrência da próxima proposição, porém não provaremos tal consequência, pois não é objetivo deste trabalho.

Proposição 2.11. *Se $ABCD$ é um quadrilátero de Saccheri, então o segmento que une os pontos médios de \overline{AD} e de \overline{BC} é perpendicular a ambos.*

Demonstração. Dado o quadrilátero de Saccheri $ABCD$, seja E o ponto médio de \overline{AD} e seja m a perpendicular a \overline{AD} em E . Sabendo que m é a mediatriz de \overline{AD} , então os pontos A e B estão

em um mesmo lado de m , enquanto que os pontos C e D estão do outro lado em relação a m . Daí m intersecta o segmento \overline{BC} em um ponto F . De *T1* (*caso LAL*), temos que os triângulos $\triangle AEF$ e $\triangle DEF$ são congruentes. Assim,

$$\widehat{FAE} = \widehat{FDE}$$

$$AF = FD$$

Por definição os ângulos \widehat{ADC} e \widehat{BAD} são retos, logo, por subtração, temos:

$$\widehat{BAF} = \widehat{CDF}$$

Então, novamente de *T1*, os triângulos $\triangle BAF$ e $\triangle CDF$ são congruentes. Deste modo,

$$\widehat{ABF} = \widehat{DCF}$$

$$BF = CF$$

e F é o ponto médio de \overline{BC} . Os dois pares de triângulos congruentes também implica que

$$\widehat{BFE} = \widehat{CFE}$$

Mas \widehat{BFE} e \widehat{CFE} são suplementares, sendo assim, por *D18*, ambos são ângulos retos e, portanto \overline{EF} é perpendicular a \overline{BC} . ■

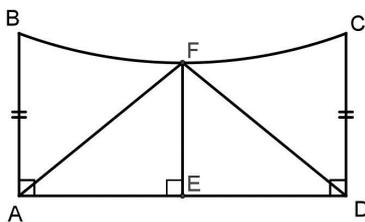


Figura 2.36 Num quadrilátero de Saccheri, a mediatriz de \overline{AD} também é perpendicular a \overline{BC} .

A proposição a seguir nos mostra que qualquer outro quadrilátero, cujos lados paralelos são desiguais, também não terá ângulos superiores com medidas iguais.

Proposição 2.12. *Seja $ABCD$ um quadrilátero com $\widehat{BAD} = \widehat{CDA} = 90$ e $AB \neq CD$. Então*

$$\widehat{ABC} > \widehat{BCD} \Leftrightarrow AB < CD$$

Demonstração. Supondo $AB < CD$ e escolhendo E em \overline{CD} , tal que $AB = DE$. Então $ABDE$ é um quadrilátero de Saccheri e $\widehat{ABE} = \widehat{DEB}$, pela *proposição 2.10*. Agora, $\widehat{ABC} > \widehat{ABE}$ e, pelo *lema 2.1 (Teorema do Ângulo Externo)*, $\widehat{BED} > \widehat{BCD}$, portanto $\widehat{ABC} > \widehat{ABE} = \widehat{BED} > \widehat{BCD}$. Por outro lado, se $\widehat{ABC} > \widehat{BCD}$, então devemos considerar um ponto E no lado \overline{CD} , tal que $\widehat{ABC} = \widehat{BED}$, daí temos que mostrar que $CD > DE = AB$.

- Supondo por absurdo que $CD = DE$, então o ponto E coincide com o ponto C , deste modo, pela *proposição 2.10*,

$$\widehat{BCD} = \widehat{BED} = \widehat{ABC}$$

Absurdo, pois, por hipótese, $\widehat{ABC} > \widehat{BCD}$.

- Supondo novamente por absurdo que $CD < DE$, daí teríamos que $\angle BCD$ é ângulo externo do triângulo $\triangle BCE$ e, pelo *lema 2.1 (Teorema do Ângulo Externo)*,

$$\widehat{BCD} > \widehat{BED} = \widehat{ABC},$$

um absurdo novamente. Deste modo, $AB < CD$.

■

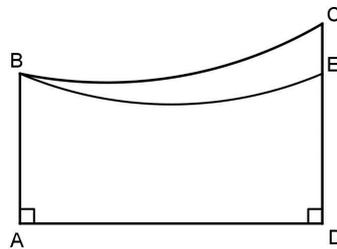


Figura 2.37 Num quadrilátero em que $\widehat{BAD} = \widehat{CDA} = 90$ e $AB \neq CD$, os ângulos superiores são desiguais.

As próximas proposições nos mostram que os ângulos superiores do quadrilátero de Saccheri

podem ser agudos, retos ou obtusos e dependem de um segmento paralelo aos lados paralelos do quadrilátero de Saccheri.

Proposição 2.13. *Sejam $ABCD$ um quadrilátero de Saccheri, P um ponto sobre o segmento \overline{BC} , \overline{PQ} a perpendicular a \overline{AD} e $\alpha = \widehat{ABC} = \widehat{BCD}$, deste modo, temos:*

(a) *Se $PQ < CD$, então α é agudo.*

(b) *Se $PQ = CD$, então α é reto.*

(c) *Se $PQ > CD$, então α é obtuso.*

Demonstração. Consideremos os ângulos $\beta = \widehat{BPQ}$ e $\gamma = \widehat{CPD}$ e analisemos os três casos:

(a) Se $PQ < CD$, então $PQ < AB$ e, a partir da *proposição 2.12*, obtemos $\alpha < \beta$ e $\alpha < \gamma$, mas β e γ são suplementares, daí $2\alpha < \beta + \gamma = \pi$ e $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Assim, α é agudo.

(b) Se $PQ = CD$, então os quadriláteros $ABPQ$ e $QPCD$ são quadriláteros de Saccheri, deste modo, $\alpha = \beta = \gamma$, como β e γ são ângulos suplementares, então, por *D18*, $\alpha = \beta = \gamma = \pi/2$. Daí concluímos que α é reto.

(c) Neste caso procedemos de forma semelhante ao caso (a), invertendo o sentido do sinal de desigualdade.

■

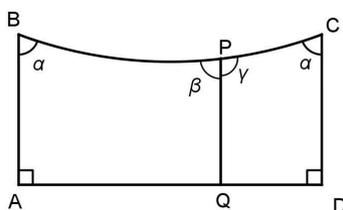


Figura 2.38 α é agudo quando o ponto P está entre os pontos B e C e o segmento \overline{PQ} é menor do que o segmento \overline{CD} .

Proposição 2.14. Sejam $ABCD$ um quadrilátero de Saccheri, P um ponto sobre a semirreta \overrightarrow{BC} , de modo que C está entre B e P . Sejam também \overline{PQ} uma perpendicular a \overline{AB} e $\alpha = \widehat{ABC} = \widehat{BCD}$, deste modo:

(a) Se $PQ > CD$, então α é agudo.

(b) Se $PQ = CD$, então α é reto.

(c) Se $PQ < CD$, então α é obtuso.

Demonstração. Analisemos os três casos:

(a) Assumimos que $PQ > CD$ e escolhemos E em \overline{PQ} tal que $CD = QE$. Construímos \overline{BE} e \overline{CE} . Sendo assim, temos três quadriláteros de Saccheri, $ABCD$, $DQEC$ e $AQEB$. Sejam $\alpha = \widehat{BCD}$, $\beta = \widehat{DCE}$ e $\gamma = \widehat{ABE}$ ângulos dos quadriláteros $ABCD$, $DQEC$ e $AQEB$, respectivamente. Seja $\delta = \widehat{ECP}$. Vemos que δ é um ângulo externo do triângulo $\triangle BCE$, portanto, pelo lema 2.1 (Teorema do Ângulo Externo), $\delta > \widehat{CBE} = \alpha - \gamma$. Por outro lado, vemos que $\beta = \widehat{QEC} > \widehat{QEB} = \gamma$. Daí,

$$\pi = \alpha + \beta + \delta > \alpha + \gamma + \alpha - \gamma = 2\alpha \Leftrightarrow \alpha < \pi/2$$

Portanto, α é agudo.

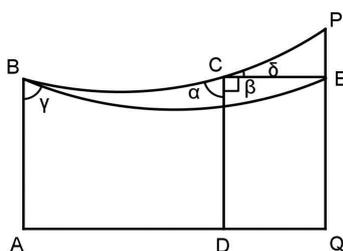


Figura 2.39 Quando C está entre B e P e $PQ > CD$, então α é agudo.

(b) Quando $PQ = CD$, pela proposição 2.13, item (b), α é reto.

(c) Quando $PQ < CD$, a prova é semelhante. Estendemos \overline{PQ} até o ponto E , de modo que $CD = QE$ e construímos \overline{BE} e \overline{CE} . Isto nos dá três quadriláteros de Saccheri, $ABCD$,

$DQEC$ e $AQEB$, com $\alpha = \widehat{ABC}$, $\beta = \widehat{PEC}$ e $\gamma = \widehat{ABE}$. Seja $\delta = \widehat{PCE}$, então, novamente pelo lema 2.1 (*Teorema do Ângulo Externo*), $\delta > \widehat{CBE} = \gamma - \alpha$. Podemos ver que $\gamma = \widehat{ABE} = \widehat{BEQ} > \widehat{CEQ} = \beta$. Por outro lado, podemos ver também que $\alpha + \beta - \delta = \pi$. Assim, com a combinação destes resultados, obtemos

$$\pi = \alpha + \beta - \delta < \alpha + \gamma - (\gamma - \alpha) < 2\alpha \Leftrightarrow \alpha > \pi/2$$

Portanto, α é obtuso. ■

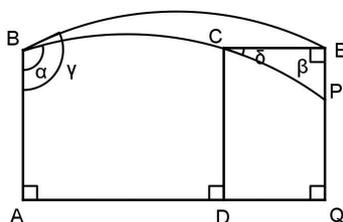


Figura 2.40 No caso em que C está entre B e P e $PQ < CD$, temos α obtuso.

A proposição a seguir nos mostra que todos os quadriláteros de Saccheri que possuem o mesmo tipo de ângulo são encontrados em um particular plano de Hilbert.

Proposição 2.15. *Em qualquer plano de Hilbert, se um quadrilátero de Saccheri tem ângulos agudos, todos os quadriláteros de Saccheri terão. Se algum quadrilátero de Saccheri tem ângulos retos, então todos terão. Se algum quadrilátero de Saccheri tem ângulos obtusos, então todos terão.*

Demonstração. Vamos dar a prova apenas no caso do ângulo agudo, uma vez que as provas nos outros dois casos são semelhantes.

Suponha que $ABCD$ é um quadrilátero de Saccheri com ângulos agudos, e que \overline{EF} é a sua mediatriz. Seja $A'B'C'D'$ um outro quadrilátero de Saccheri com a mediatriz igual a \overline{FE} . Suponha que $AB < A'B'$, assim, $CD < C'D'$, logo pela *proposição 2.13*, α' é agudo. Se $AB > A'B'$,

usamos o mesmo argumento na ordem contrária. Segue-se que todo quadrilátero de Saccheri com mediatriz igual a \overline{EF} tem ângulos agudos.

Consideremos agora o segmento \overline{EG} , onde G é um ponto sobre o lado \overline{AD} , tal que $EG < ED$. Tracemos a perpendicular a \overline{AD} em G , de modo que encontre \overline{BC} em H . Refletindo G e H em relação a \overline{EF} , obtemos G_1 e H_1 . Refletindo F e H em relação a \overline{AD} obtemos F_2 e H_2 . Deste modo, G_1GHH_1 é um quadrilátero de Saccheri com mediatriz \overline{EF} , portanto, pelo argumento anterior, o seu ângulo β é agudo. Mas, FF_2H_2H é outro quadrilátero de Saccheri com o mesmo ângulo agudo β e mediatriz \overline{EG} . Deste modo, usando também o argumento anterior, todos os outros quadriláteros de Saccheri com mediatriz igual a \overline{EG} têm ângulos agudos. Mas \overline{EG} é arbitrária, logo a proposição está provada. ■

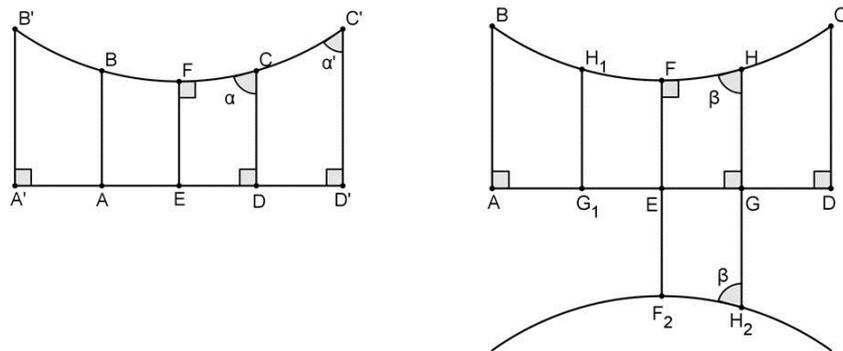


Figura 2.41 Quadriláteros de Saccheri com ângulos agudos.

A proposição a seguir mostra que existe um quadrilátero de Saccheri em que a soma dos seus ângulos superiores é igual à soma dos ângulos internos de um triângulo.

Proposição 2.16. *Dado um triângulo $\triangle ABC$, existe um quadrilátero de Saccheri, cuja soma dos seus dois ângulos superiores é igual à soma dos três ângulos do triângulo.*

Demonstração. Seja $\triangle ABC$ o triângulo dado (figura 2.42). Consideremos D e E , pontos médios de \overline{AB} e \overline{AC} e construímos o segmento \overline{DE} . Consideremos também os segmentos \overline{BF} , \overline{AG} e \overline{CH} , perpendiculares a \overline{DE} .

Deste modo, por construção, temos:

- $AD = DB$
- $\widehat{ADG} = \widehat{BDF}$
- $\widehat{AGD} = \widehat{BFD}$

Portanto, pela *proposição 2.6*, (*caso LAA_o*), os triângulos $\triangle ADG$ e $\triangle BDF$ são congruentes. Usando os mesmos argumentos, concluímos que os triângulos $\triangle AEG$ e $\triangle CEH$ são congruentes, daí temos que $BF = AG = CH$.

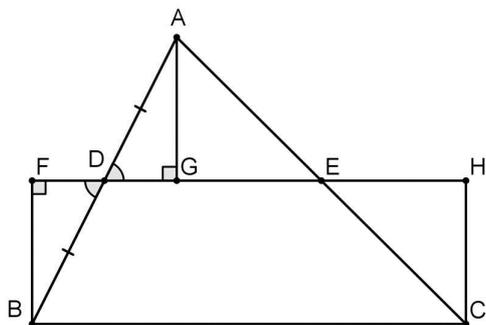


Figura 2.42 Os triângulos $\triangle ADG$ e $\triangle BDF$ são congruentes.

O quadrilátero $BCHF$ (*figura 2.43*) tem ângulos retos \widehat{BFH} e \widehat{FHC} , portanto é um quadrilátero de Saccheri (de cabeça para baixo). Neste quadrilátero, temos:

- $\widehat{FBC} = \widehat{DBC} + \widehat{DBF}$
- $\widehat{BCH} = \widehat{BCE} + \widehat{HCE}$

Além disso, como $\triangle ADG \cong \triangle BDF$, temos que $\widehat{DAG} = \widehat{DBF}$, do mesmo modo, como $\triangle AGE \cong \triangle CHE$, então $\widehat{EAG} = \widehat{ECH}$.

Portanto, sabendo que $\widehat{BAC} = \widehat{GAD} + \widehat{EAG}$, a soma dos ângulos internos do triângulo $\triangle ABC$ é:

$$\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{BCA} = \widehat{ABC} + (\widehat{GAD} + \widehat{EAG}) + \widehat{BCA}$$

$$\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{BCA} = (\widehat{ABC} + \widehat{DBF}) + (\widehat{ECH} + \widehat{BCA})$$

$$\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{BCA} = \widehat{FBC} + \widehat{BCH}$$

Deste modo, a soma dos ângulos internos do triângulo $\triangle ABC$ é igual a soma dos ângulos superiores do quadrilátero de Saccheri.

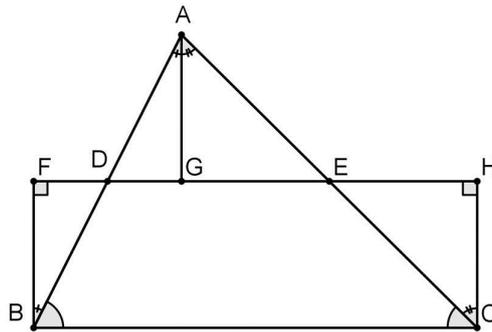


Figura 2.43 A soma dos ângulos internos do triângulo $\triangle ABC$ é igual a soma dos ângulos superiores do quadrilátero de Saccheri $BCHF$

Com as proposições 2.5 e 2.16, podemos mostrar que, se um triângulo possui soma dos ângulos internos menor do que π ou maior do que π ou igual a π , então todos os outros triângulos terão a mesma propriedade. É o que veremos na proposição a seguir.

Proposição 2.17. *Em qualquer plano de Hilbert:*

- (a) *Se existe um triângulo cuja soma dos ângulos é menor do que π , então todo triângulo tem soma dos ângulos menor do que π .*
- (b) *As condições a seguir são equivalentes:*
- (i) *Existe um triângulo com soma dos ângulos igual a π .*
 - (ii) *Existe um retângulo.*
 - (ii') *Todo quadrilátero de Saccheri é um retângulo.*
 - (iii) *Todo triângulo tem soma dos ângulos igual a π .*

(c) Se existir um triângulo cuja soma dos ângulos é maior do que π , então cada triângulo tem soma dos ângulos maior do que π .

Demonstração. Vejamos:

(a) Se existe um triângulo com soma dos ângulos menor do que π , então, pela *Proposição 2.16*, existe um quadrilátero de Saccheri cujos ângulos superiores são agudos. Deste modo, pela *Proposição 2.15*, cada quadrilátero de Saccheri tem ângulos agudos, e pela *Proposição 2.16* novamente, cada triângulo deve ter soma dos ângulos menor do que π .

(b) Provamos de forma semelhante ao caso (a), onde devemos observar que um retângulo é apenas um quadrilátero de Saccheri com ângulos retos.

(c) Esta prova é semelhante a prova de (a).

■

De acordo com a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, definimos o plano de Hilbert.

Definição 2.7. No caso (a) da proposição 2.17, dizemos que a geometria é semihiperbólica. No caso (b), dizemos que é semieclidiana, e no caso (c), dizemos que é semielíptica.

Deste modo, o triângulo pode ser classificado de acordo com a soma das medidas dos seus ângulos internos, isto é o que podemos verificar na seguinte definição.

Definição 2.8. Dizemos que um triângulo é euclidiano, se a soma dos seus ângulos é igual a π . Caso contrário, nós o chamamos de não euclidiano.

Na definição a seguir mostramos que, como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo euclidiano é igual a π , então o que faltar ou exceder este valor é chamado de defeito do triângulo.

Definição 2.9. Para medir a divergência de um triângulo a partir do caso euclidiano, definimos o defeito (δ) de qualquer triângulo a ser $\pi -$ (soma dos ângulos do triângulo). Assim,

- Se $\delta = 0$, então o triângulo é euclidiano;
- Se $\delta > 0$, então o triângulo está contido no plano semihiperbólico;
- Se $\delta < 0$, então o triângulo está no plano semielíptico.

Lema 2.2. Se um triângulo $\triangle ABC$ é dividido em dois triângulos por uma única transversal \overline{BD} , então o defeito do triângulo grande é igual à soma dos defeitos dos dois triângulos pequenos, ou seja:

$$\delta(\triangle ABC) = \delta(\triangle ABD) + \delta(\triangle BCD)$$

Demonstração. Sejam o triângulo $\triangle ABC$ e um segmento \overline{AD} , de modo que D é um ponto pertencente ao lado \overline{BC} (figura 2.44), nessas condições, temos:

- $\widehat{BAC} = \alpha$
- $\widehat{ABC} = \beta_1 + \beta_2$
- $\widehat{BCA} = \gamma$
- $\widehat{ABD} = \beta_1$
- $\widehat{DBC} = \beta_2$
- $\widehat{ADB} = \phi_1$
- $\widehat{BDC} = \phi_2$

Temos:

$$\delta(\triangle ABD) = \pi - \alpha - \beta_1 - \phi_1$$

$$\delta(\triangle BCD) = \pi - \beta_2 - \phi_2 - \gamma$$

Como $\phi_1 + \phi_2 = \pi$ e adicionando essas igualdades, obtemos:

$$\delta(\triangle ABD) + \delta(\triangle BCD) = \pi - \alpha - \beta_1 - \beta_2 - \gamma = \delta(\triangle ABC)$$

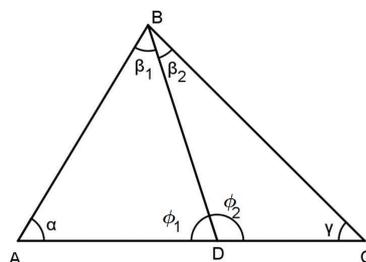


Figura 2.44 Defeito do triângulo $\triangle ABC$ igual a soma dos defeitos dos triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle BCD$.

Esta proposição nos mostra que, se um triângulo qualquer é dividido em dois triângulos a partir de um segmento que une um de seus vértices ao lado oposto, então o seu defeito é igual á soma dos defeitos dois triângulos que resultaram após a sua divisão.

Geometria Hiperbólica

A história nos diz que Gauss, Yános Bolyai e Lobachevsky desenvolveram a geometria hiperbólica ao mesmo tempo e de forma independente. No entanto, a honra da descoberta desta geometria coube a Lobachevsky, pois ele foi o primeiro a publicar seus trabalhos, chamando-a de *Geometria Imaginária*. As dúvidas referentes à consistência da geometria hiperbólica, só foram dissipadas no final do século XIX, quando matemáticos como Eugenio Beltrami, Henri Poincaré e Felix Klein criaram, no universo euclidiano, modelos para esta nova geometria. Um modelo para um determinado sistema axiomático é uma interpretação dada aos conceitos primitivos de modo que os axiomas sejam todas propriedades verdadeiras. Neste capítulo, nossos estudos estão fundamentados em [1], [6], [7], [9], [13], [14], [15], [17], [19], [20] e [21].

3.1 Postulado de Lobachevsky

Na Geometria Hiperbólica são válidos os postulados da Geometria Neutra e o 5º Postulado de Euclides é substituído pelo seguinte:

Postulado 1. *Por um ponto P fora de uma reta r passam, no mínimo, duas retas paralelas à reta r .*

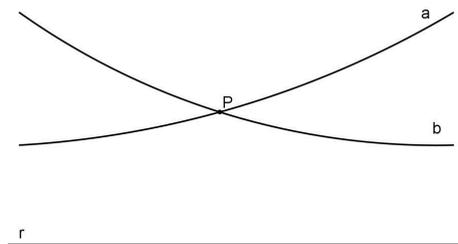


Figura 3.1 Retas a e b passando em P e paralelas a reta r

O plano hiperbólico é qualitativamente diferente do plano euclidiano em um certo número de maneiras. Entre as quais, destacamos o fato de que a soma dos ângulos de um triângulo é estritamente menor do que π . A diferença entre π e a soma é chamado de defeito do triângulo e é proporcional à área do triângulo. Todas as propriedades distintivas podem ser baseadas no Postulado de Lobachevsky. Então, vamos começar com a teoria do paralelismo, apresentada de maneira similar à forma proposta por Gauss.

3.2 O Ângulo de Paralelismo

Pelo Postulado Hiperbólico das paralelas, dados uma reta m e um ponto A , existem duas retas, r e s , paralelas a m e passando por A . Considere um segmento \overline{AB} , perpendicular à reta m . Essas duas retas paralelas que concorrem em A definem 4 semirretas.

Se uma semirreta t_1 que faz ângulo θ_1 com o segmento \overline{AB} e intersecta a reta m , então, pelo *Teorema 2.1 (Teorema da Barra Transversal)*, qualquer semirreta t_2 que faça ângulo $\theta_2 < \theta_1$ com \overline{AB} , também intersecta m .

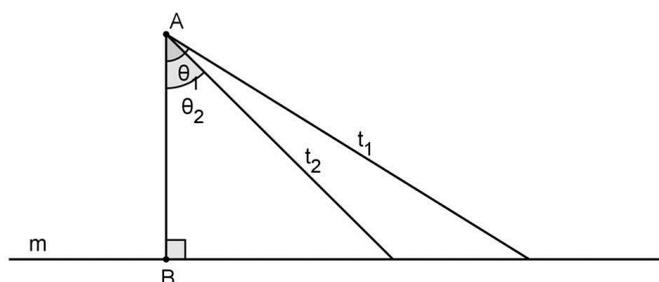


Figura 3.2 Se t_1 intersecta m e faz ângulo θ_1 com AB e t_2 faz ângulo $\theta_2 < \theta_1$ com AB , então t_2 intersecta m

Essas observações nos permitem considerar a seguinte definição:

Definição 3.1. Dados uma reta m , um ponto B em m e um ponto A não pertencente a m , tais que o segmento \overline{AB} é perpendicular à m , dizemos que o ângulo de paralelismo do ponto A e da reta

m é a menor cota superior α para o conjunto dos ângulos agudos θ com a seguinte propriedade:
Existe semirreta que faz ângulo θ com \overline{AB} e intersecta m

Note que, se um ângulo θ for menor do que α , então existe semirreta que faz ângulo θ com \overline{AB} e intersecta m . Por outro lado, se θ for maior do que α , então uma semirreta, com origem em A , que faz ângulo θ com \overline{AB} não intersecta m .

Proposição 3.1. O ângulo α de paralelismo de um ponto A em relação a uma reta m depende apenas da distância $y = AB$ do ponto A à reta m .

Demonstração.

Pela *definição 3.1*, dados uma reta m e um segmento \overline{AB} , perpendicular a m em B , existe semirreta que faz ângulo θ com \overline{AB} e intersecta m em um determinado ponto C . Consideremos um segmento $\overline{A'B'}$ congruente a \overline{AB} , e uma reta m' , que em B' é perpendicular a $\overline{A'B'}$ (*figura 3.3*). Se C é um ponto qualquer de m e C' um ponto de m' , tal que $\overline{B'C'} \cong \overline{BC}$, então, por *TI* (caso LAL), $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, daí $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$. Por conseguinte, uma semirreta de origem em A e faz um ângulo θ com \overrightarrow{AB} , intersecta m se, e só se, a semirreta que tem origem em A' e faz o mesmo ângulo θ com $\overrightarrow{A'B'}$ intersecta m' . Portanto, o ângulo de paralelismo para A' e m' é o mesmo que para A e m . ■

Denotamos por $\Pi(y)$ o ângulo α em função de y , onde $y = AB$.

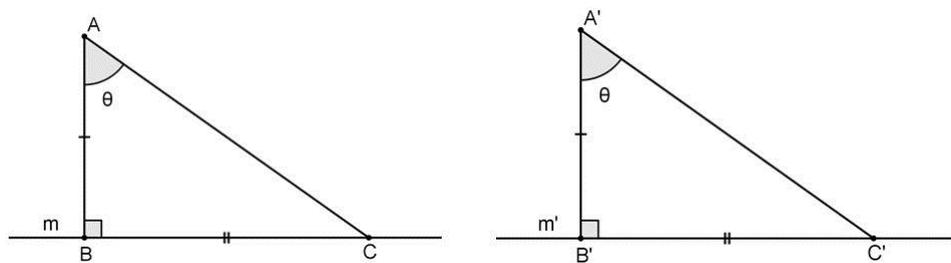


Figura 3.3 O ângulo de paralelismo para A' e m' é o mesmo que para A e m .

Proposição 3.2. No plano hiperbólico existe um triângulo com defeito positivo, ou seja, com soma dos ângulos menor do que π .

Demonstração. Consideremos o ângulo de paralelismo $\alpha = \Pi(y)$ entre a reta m e o segmento \overline{AB} , perpendicular a uma reta l e de comprimento y , como na *figura 3.4*. Lembremos que $\alpha < \pi/2$ para um certo valor de y . Sejam ε um ângulo, tal que $\varepsilon < \min\{\alpha, \pi/2 - \alpha\}$, C um ponto em l , de modo que \overline{AC} faz ângulo $\alpha - \varepsilon$ com \overline{AB} e D outro ponto em l , suficientemente longe de \overline{AB} , de maneira que C está entre B e D e $AC = CD$, como mostrado na *figura 3.4*. Nessas condições, o triângulo $\triangle ACD$ é isósceles, daí $\widehat{CDA} = \widehat{CAD} < \varepsilon$.

Sabendo que $\widehat{BAD} < \alpha$, temos que, a soma dos ângulos do triângulo grande $\triangle ABD$ é:

$$\widehat{ABD} + \widehat{BAD} + \widehat{BDA} < \frac{\pi}{2} + \alpha + \varepsilon < \frac{\pi}{2} + \alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha = \pi$$

Daí segue que:

$$\pi - (\widehat{ABD} + \widehat{BAD} + \widehat{BDA}) > 0$$

Mas, $\pi - (\widehat{ABD} + \widehat{BAD} + \widehat{BDA})$ é o defeito do triângulo $\triangle ABD$, isto é,

$$\delta_{ABD} = \pi - (\widehat{ABD} + \widehat{BAD} + \widehat{BDA}) > 0$$

Portanto, o defeito de $\triangle ABD$ é positivo. ■

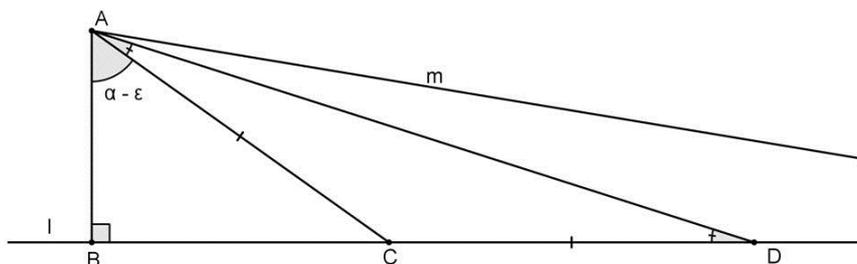


Figura 3.4 Triângulo $\triangle ABC$ com soma dos ângulos internos menor do que π

Para finalizar temos que, de acordo com a *Proposição 2.17 (item (a))*, em qualquer plano de Hilbert, se existe um triângulo cuja soma dos ângulos é menor do que π , então todo triângulo desse plano tem soma dos ângulos menor do que π .

Daí, concluímos que, no plano hiperbólico, *a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é menor do que π .*

Modelos Planos da Geometria Hiperbólica

Nesta seção falaremos dos modelos planos para a Geometria Hiperbólica, porém, de forma mais detalhada, o modelo do disco de Poincaré, onde definiremos alguns objetos. Não apresentaremos demonstrações, porque não atende aos objetivos deste trabalho. Aqueles que se interessarem num estudo mais aprofundado destes modelos, indicamos [13], [14], [17], [19] e [20].

A.1 Modelo de Beltrami

O modelo idealizado por Eugenio Beltrami (1835 - 1900) consiste na rotação da curva tangente constante, definida como a curva pela qual é constante o segmento tangente compreendido entre o ponto de contato e uma reta fixa (eixo dos x) do plano.

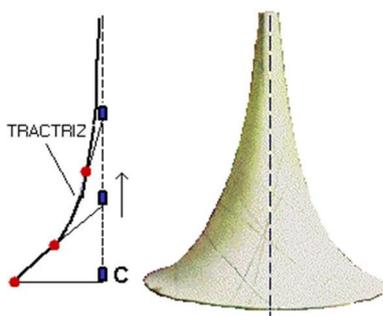


Figura A.1 Tractriz e pseudoesfera de Beltrami.

Em 1901, Hilbert afirmou que, nesse modelo, não existe nenhuma superfície regular sobre a qual se pode aplicar a geometria de Lobachevsky e Bolyai, provando, deste modo, que o modelo de Beltrami não pode ser rigorosamente aceito como o modelo da geometria hiperbólica.

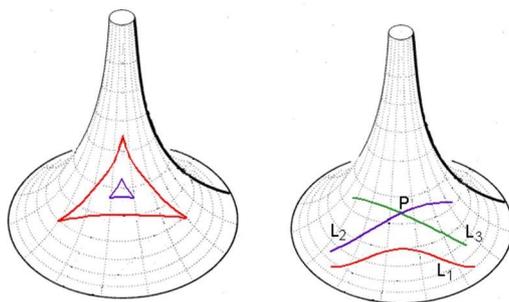


Figura A.2 Triângulo e retas paralelas na pseudoesfera de Beltrami.

A.2 Modelo de Klein

O modelo proposto por Felix Klein (1849-1925) ficou conhecido como Plano de Lobachevsky. Nesse modelo para a geometria hiperbólica, consideramos apenas a região interior de um círculo euclidiano.

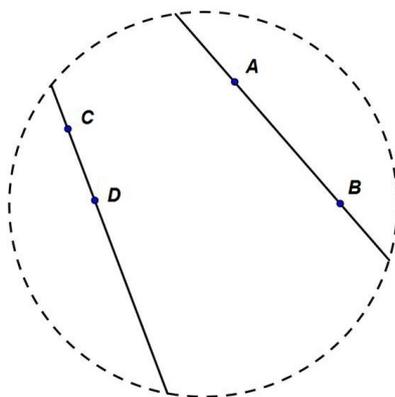


Figura A.3 Modelo do disco de Klein.

As retas são as cordas deste círculo. Como dois pontos distintos de um círculo determinam uma única corda, temos que dois pontos neste plano determinam uma única reta hiperbólica. Temos também que duas cordas distintas se intersectam, no máximo, em um ponto interior do círculo, deste modo, duas retas hiperbólicas se intersectam no máximo em um ponto.

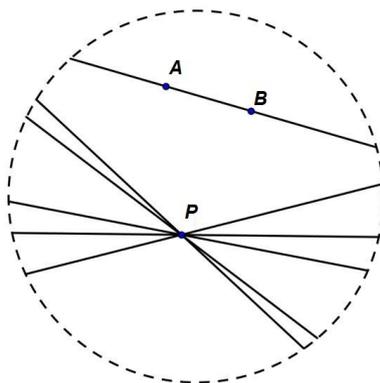


Figura A.4 Retas hiperbólicas paralelas à reta hiperbólica AB passando em P.

A.3 Modelos de Poincaré

Os modelos propostos por Poincaré para a Geometria Hiperbólica foram desenvolvidos entre 1882 e 1887 e são chamados de modelo do disco e modelo do semiplano. Vamos aqui mostrar com mais detalhes alguns elementos presentes no disco de Poincaré, pois este é o modelo que escolhemos para propor uma atividade usando um software de geometria dinâmica para a geometria hiperbólica.

A.3.1 O Modelo do Disco de Poincaré

Foi o matemático francês Henri Poincaré (1854 - 1912) o idealizador do disco que leva o seu nome. Neste modelo, o plano hiperbólico é constituído pelos pontos do interior de um círculo euclidiano, no qual, a circunferência, borda do disco, é chamada de horizonte do espaço. Os pontos pertencentes à circunferência são ditos pontos ideais e não pertencem ao espaço. Iremos sempre nos referir ao espaço como sendo o “Disco”. No ambiente de exploração, a circunferência estará pontilhada para enfatizar o fato de que seus pontos não pertencem ao espaço hiperbólico.

Na *figura A.5*, temos o disco D , onde o ponto A é um ponto ideal e os pontos B e C , no interior de D , pertencem ao plano hiperbólico.

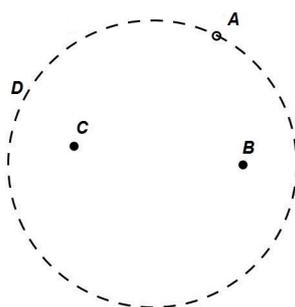


Figura A.5 O ponto A não pertence ao disco D , enquanto que os pontos B e C pertencem.

Definição A.1. Duas circunferências são ditas ortogonais, quando elas se intersectam e as respectivas retas tangentes em cada um dos dois pontos de interseção são retas perpendiculares entre si, conforme ilustrado na figura A.6.

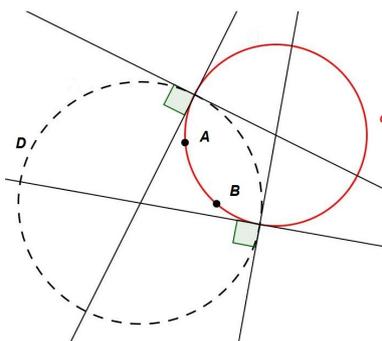


Figura A.6 Circunferência c ortogonal ao disco D .

Observação A.1. Dados dois pontos A e B no disco D , existe uma única circunferência c que passa por A e B e é ortogonal a D , conforme ilustra a figura A.6.

Definição A.2. Dados dois pontos A e B , do plano hiperbólico, chamamos de h -reta, ou reta hiperbólica, definida por A e B o arco da circunferência, no disco D , ortogonal ao disco D que contém os pontos A e B .

Observação A.2. Uma h -reta no Disco D é de um dos tipos:

1. Arco da circunferência ortogonal.

Na figura A.7 temos a h -reta \overleftrightarrow{AB} no espaço D . Podemos observar que M e N são pontos ideais, portanto, não pertencem a h -reta.

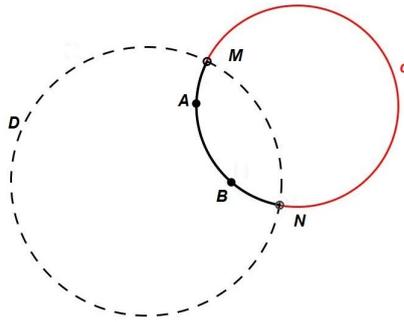


Figura A.7 H-reta AB como arco de c , circunferência ortogonal ao disco D .

2. Diâmetro do Disco

Lembramos que M e N são pontos ideais, logo não pertencem a h-reta (figura A.8).

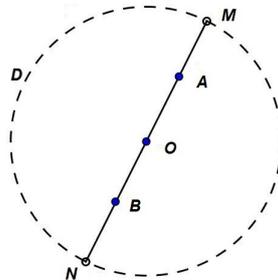


Figura A.8 H-reta como diâmetro do disco D .

Definição A.3. Dados dois pontos A e B , do plano hiperbólico, chamamos de h-semirreta de origem em A e passando por B , o arco da circunferência ortogonal ao disco D , com origem no ponto A e que contém o ponto B .

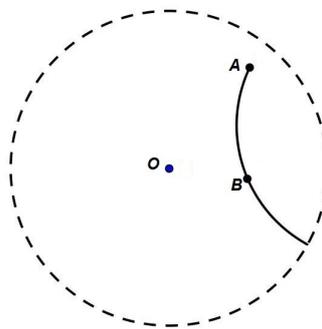


Figura A.9 H-semirreta AB .

Definição A.4. Dados dois pontos A e B , chamamos de h -segmento o arco cujos extremos são os pontos A e B , contidos na h -reta AB .

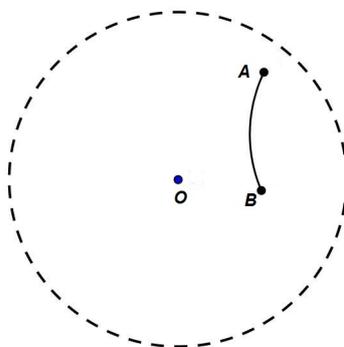


Figura A.10 H-segmento \overline{AB} .

Definição A.5. A união de duas h -semirretas com origem comum A é chamada de h -ângulo de vértice A , onde as h -semirretas são os lados do h -ângulo.

Seja α medida do h -ângulo, tal que $0 < \alpha < \pi$, onde α é o ângulo formado pelas retas (euclidianas) tangentes às h -semirretas no ponto A (figura A.11).

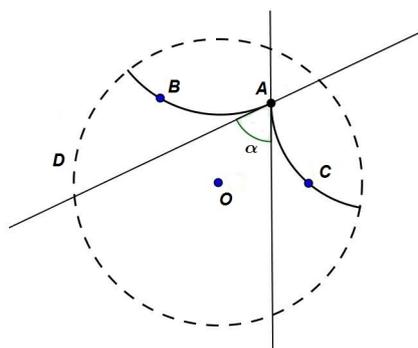


Figura A.11 H-ângulo α .

Definição A.6. Dados três pontos não colineares A , B e C no Disco, dizemos que um h -triângulo é a união dos h -segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} e sua região interna, onde os pontos A , B e C são os vértices e os h -segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} são os lados do h -triângulo.

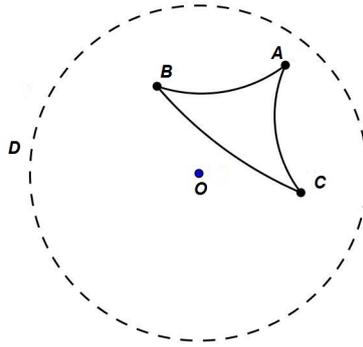


Figura A.12 H-triângulo $\triangle ABC$.

As h-semirretas que passam pelos pontos A e B , B e C , e A e C determinam os três ângulos internos do h-triângulo.

Exercícios Desenvolvidos no Geogebra

Na escola básica, o aluno aprende que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a π , porém, muitas vezes, esse mesmo aluno desconhece que tal fato só ocorre no plano euclidiano. Com o objetivo de fazer com que o aluno conheça o que ocorre com a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo em outras geometrias e, deste modo, comparar os dois resultados, desenvolvemos duas atividades utilizando o software de geometria dinâmica Geogebra. Com essas atividades nosso aluno irá construir passo a passo o triângulo euclidiano, como também o hiperbólico para, no final movimentar os vértices dos triângulos e, assim comparar esses resultados.

A.1 Exercício 1 (Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo Euclidiano)

Construa o triângulo $\triangle ABC$, determine a soma das medidas de seus ângulos internos e, em seguida, faça mover um dos vértices e verifique o que ocorre com essa soma.

Vejamos o passo a passo da construção:

1. Na caixa de entrada, digite as coordenadas dos pontos A , B e C ;

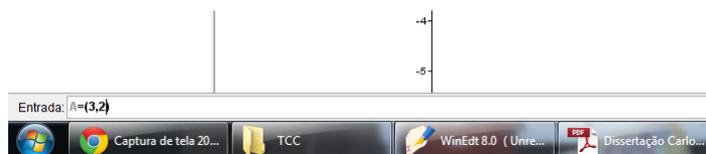


Figura A.1 Campo de entrada.

2. No 5º ícone da barra de ferramentas, escolha "Polígonos" e clique nos pontos A , B , C e A , para ter o triângulo $\triangle ABC$;

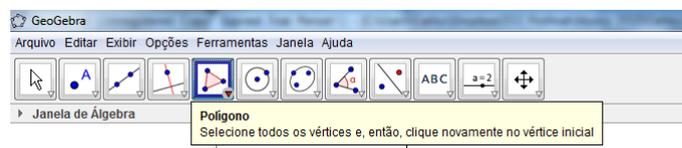


Figura A.2 Ferramenta "Polígono".

3. Para marcar os ângulos do triângulo $\triangle ABC$, selecione a ferramenta "Ângulo", no ícone 8, clique nos vértices B , A e C , nesta ordem. Observe que aparecerá uma marca de ângulo no vértice A . Para marcar os ângulos com vértices em B e C , clique, respectivamente, em C , B , A e em B , A , C .



Figura A.3 Ferramenta "Ângulo".

4. Para somar as medidas dos ângulos internos do triângulo $\triangle ABC$, digite no "campo de entrada" (figura A.1) a fórmula $\alpha + \beta + \gamma$ e dê um "enter". Aparecerá na janela algébrica $\delta = 180^\circ$;
5. Com a ferramenta "Mover", movimente um dos vértices do triângulo e verifique o que ocorre com o valor de δ .



Figura A.4 Ferramenta "Mover".

A.2 Exercício 2 (Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo Hiperbólico)

Considere o disco de Poincaré, definido pelo círculo com centro em $A = (0, 0)$, onde $B = (4, 0)$ é um de seus pontos. Construa o triângulo hiperbólico $\triangle CDE$, determine a soma das medidas de seus ângulos internos e, em seguida, faça mover um dos vértices e verifique o que ocorre com essa soma.

Vejam os passos da construção:

1. Na caixa de entrada (figura A.1), digite as coordenadas dos pontos A e B ;
2. No 6º ícone da barra de ferramentas, escolha "Círculo Dados Centro e um de seus Pontos";



Figura A.5 Ferramenta "Círculo Dados Centro e um de seus Pontos".

3. Clique sobre o contorno do círculo com o botão direito do mouse e selecione "Propriedades";

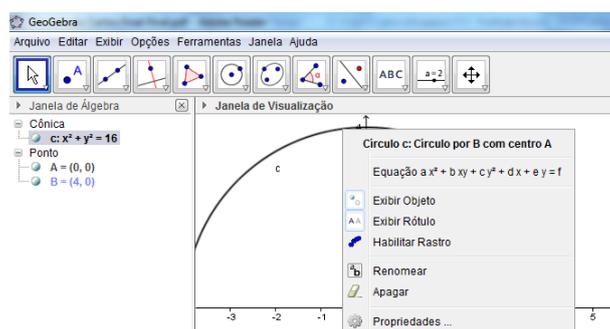


Figura A.6 Janela para escolher "Propriedades".

4. Na janela que se abrirá selecione "Estilo" e modifique a linha da circunferência para tracejada;

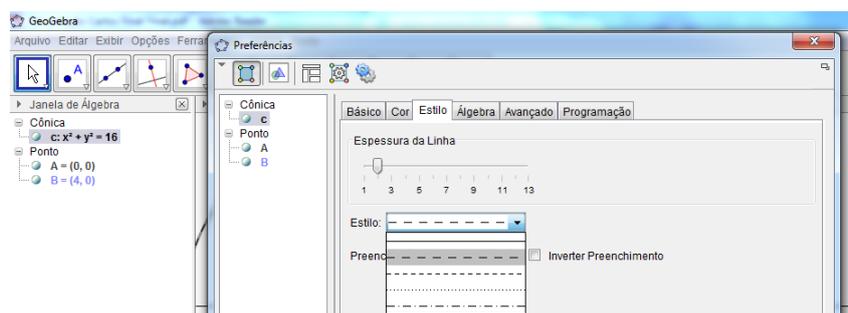


Figura A.7 Janela para escolher "Estilo" e depois "Linha Tracejada".

5. Na barra de ferramentas escolha "Novo Ponto" e clique no interior do círculo em três lugares diferentes. Aparecerão os pontos C , D e E ;



Figura A.8 Ferramenta "Novo Ponto".

6. No 9º ícone da barra de ferramentas, escolha "Reflexão em Relação a um Círculo (Inversão)", clique no ponto C e no círculo, dessa forma será criado o ponto C' ;



Figura A.9 Ferramenta "Reflexão em Relação a um Círculo (Inversão)".

7. No 4º ícone da barra de ferramentas, escolha "Mediatriz", clique nos pontos C e C' , criando a mediatriz a , em seguida clique nos pontos C e D , criando a mediatriz b ;



Figura A.10 Ferramenta "Mediatriz".

8. No 2º ícone da barra de ferramentas, escolha "Interseção de Dois Objetos", selecione as mediatrizes a e b , criando o ponto F ;



Figura A.11 Ferramenta "Interseção de Dois Objetos".

9. No 6º ícone da barra de ferramentas, escolha "Círculo Dados Centro e um de seus Pontos"(figura A.5) e clique nos pontos F e C' , respectivamente;
10. Repita os procedimentos 5, 6, 7 e 8 para criar os círculos com os centros em G e H e passando pelos pontos D e E , respectivamente;
11. No 6º ícone da barra de ferramentas, escolha "Arco circular Dados Centro e Dois Pontos", clique nos pontos F (centro do círculo), C e D , nessa ordem, e crie o segmento \overline{CD} do triângulo hiperbólico;



Figura A.12 Ferramenta "Arco circular Dados Centro e Dois Pontos".

12. Com o botão direito do mouse, clique sobre o lado \overline{CD} , selecione "Propriedades"(figura A.6) e, na janela que se abrir, selecione a cor vermelha;

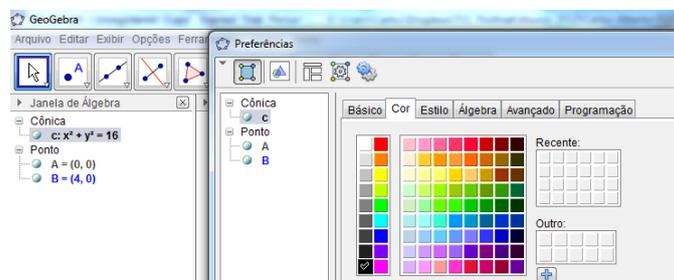


Figura A.13 Janela para selecionar a cor desejada.

13. Para construir os lados \overline{DE} e \overline{CE} , do triângulo hiperbólico, repita os procedimentos 10 e 11, considerando os respectivos objetos;
14. No 4º ícone da barra de ferramentas, escolha "Reta Tangente", clique no ponto C e no lado \overline{CD} , em seguida no ponto C e no lado \overline{CE} ;

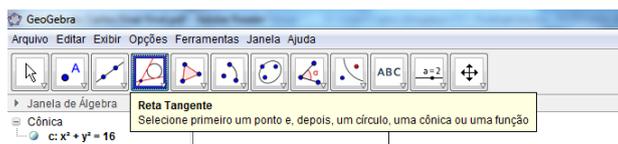


Figura A.14 Ferramenta "Reta Tangente".

15. No 2º ícone da barra de ferramentas, escolha "Ponto em Objeto" e clique sobre as retas tangentes criadas no procedimento anterior (os pontos devem ficar do mesmo lado do triângulo em relação ao vértice C);

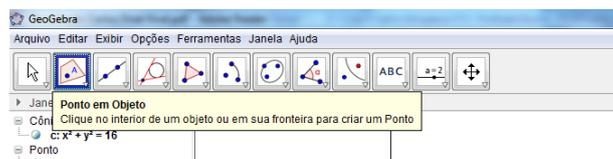


Figura A.15 Ferramenta "Ponto em Objeto".

16. No 8º ícone da barra de ferramentas, escolha "Ângulo" (figura A.2) e crie o ângulo α ;
17. Repita os procedimentos 13, 14 e 15 para criar os ângulos β e γ ;
18. Para somar as medidas dos ângulos internos do triângulo $\triangle CDE$, digite no "Campo de Entrada" (figura A.3) a fórmula $\alpha + \beta + \gamma$ e dê um "enter". Aparecerá na janela algébrica o ângulo δ com o respectivo resultado;
19. Com a ferramenta "Mover" (figura A.4), movimente um dos vértices do triângulo e verifique o que ocorre com o valor de δ .

O que o você observou de diferente quando moveu os vértices de cada triângulo?

Referências Bibliográficas

- [1] ALMEIDA, Francisco Rui Tavares de. *Geometria Não Euclidiana: Notas de Aula da Disciplina Mat 421*. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2011. Disponível em: www.ime.usp.br/~rui/LateX3.pdf. Acessado em: 26/01/2014
- [2] BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.
- [3] BERLINGHOFF, William P. *A Matemática Através dos Tempos: Um Guia Fácil e Prático para Professores e Entusiastas*. Tradução: Elza F. Gomide e Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2010.
- [4] BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Blucher, 2010.
- [5] COSTA, Deise Maria Bertholdi et al. *Elementos de Geometria: Geometria Plana e Espacial*. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2012. Disponível em: <http://www.degraf.ufpr.br/docs/elementos.pdf>. Acessado em: 11/08/2014
- [6] DORIA, Celso Melchiades. *Geometrias Não Euclidianas: Exemplos*. Mini-Curso da II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. Salvador: Universidade Federal da Bahia, 2004. Disponível em: <http://www.bienasbm.ufba.br/M32.pdf>. Acessado em: 05/04/2014
- [7] FIRER, Marcelo. *Geometria Neutra e uma Pitada de Geometria Hiperbólica*. Notas de Aula. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2007. Disponível em: http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/listas/geometrianaoeuclideana/geometria_hiperbolica.pdf. Acessado em: 05/04/2014

- [8] GREENBERG, Marvin Jay. *Geometrias Euclidianas e Não Euclidianas*. San Francisco: W. H. Freeman Company, 1980.
- [9] HARTSHORNE, Robin. *Geometry: Euclid and Beyond*. New York: Springer-Verlag, 2000.
- [10] MANFIO, Fernando. *Fundamentos de Geometria*. Notas de Aula. São Paulo: Universidade de São Paulo. Disponível em: <http://www.icmc.usp.br/pessoas/manfio/Fundamentos.pdf>. Acessado em: 11/08/2014
- [11] MASSAGO, Sadao. *Axiomas da Geometria Euclidiana*. São Carlos: Universidade Federal de São Carlos, 2010. Disponível em: <http://www.dm.ufscar.br/sadao/download/?file.../geometria-euclidiana-axiom>. Acessado em: 11/08/2014
- [12] RAMSAY, Arlan. *Introduction to Hyperbolic Geometry*. New York: Springer-Verlag, 1995.
- [13] RIBEIRO, Ricardo Silva. *Geometrias não Euclidianas na Escola: Uma Proposta de Ensino Através da Geometria Dinâmica*. Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2013. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/79482/000901543.pdf?sequence=1>. Acessado em: 23/01/2014
- [14] RIBEIRO, Ricardo Silva e GRAVINA, Maria Alice. *Disco de Poincaré: Uma Proposta para Explorar a Geometria Hiperbólica no Geogebra*. in Revista do Professor de Matemática, Nº 1, V. 1. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. Disponível em: <http://pmo.sbm.org.br/v001/n001/sbm-pmo-v001-n001-ribeiro-e-gravina.pdf>. Acessado em: 01/08/2014
- [15] RIBEIRO, Guilherme Fernando; SANTOS, Talita Secorun dos e FERREIRA, Luciano. *Construção de Atividades para o Ensino de Geometria Hiperbólica*. Artigo publicado no VI EPCT: Encontro de Produção Científica e Tecnológica. Campo Mourão: Faculdade

- Estadual de Ciências e Letras de Campo Mourão (FECILCAM). 2011. Disponível em: [http://www.fecilcam.br/nupem/anais_vi_epct/PDF/ciencias_exatas/08 – RIBEIRO_SANTOS_FERREIRA.pdf](http://www.fecilcam.br/nupem/anais_vi_epct/PDF/ciencias_exatas/08-RIBEIRO_SANTOS_FERREIRA.pdf). Acessado em: 05/04/2014
- [16] RIBEIRO, Renato Douglas Gomes Lorenzetto. *Ensino das Geometrias Não Euclidianas: Um Olhar sob a Perspectiva da Investigação Científica*. Dissertação de Mestrado em Educação. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2012. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-21012013-154441/en.php>. Acessado em: 19/08/2014
- [17] SACRAMENTO, Andrea de Jesus; BATISTA, Érica Boizan e CARRETERO, Michelli Maldonado. *A Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo nem sempre é 180*. Mini-Curso da XVIII SEMAT - Semana da Matemática - IBILCE/UNESP. São José do Rio Preto: Universidade Estadual Paulista, 2006. Disponível em: <http://www.mat.ibilce.unesp.br/XVIIISemat/Mini-Cursos/TEXTOS/MN6.pdf>. Acessado em: 21/01/2014
- [18] SANTOS, Almir Rogério Silva. Humberto Henrique de Barros. *Geometria Euclidiana Plana*. Notas de Aula. Aracaju: Universidade Federal de Sergipe, 2011. Disponível em: <http://w3.impa.br/arss/cursos/GEP/Geometria/20Euclidiana/20Plana.pdf>. Acessado em: 11/08/2014
- [19] SILVA, Karolina Barone Ribeiro da. *Geometria Hiperbólica no Software NonEuclid*. Artigo publicado no Boletim Labem, ano 3, nº 5. Rio de Janeiro: Universidade Federal Fluminense, 2012. Disponível em: http://www.labem.uff.br/images/Boletim_LABEM/Boletim_n.5/boletim_labem_pp.9-13.pdf. Acessado em: 05/04/2014
- [20] SOUZA, Carlos Bino de. *Geometria Hiperbólica: Consistência do Modelo de Disco de Poincaré*. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Recife: Universidade Federal Rural de Pernambuco.

- [21] TOJO, Benedita Natsuko. *Consepção de uma Sequência Didática para o Ensino/Aprendizagem da Congruência*. Dissertação de Mestrado. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006. Disponível em: http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=4398. Acessado em: 11/08/2014