unesp
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto
IBILCE

Michel Mir

Uma Abordagem de Isometria em Sala de Aula

São José do Rio Preto
2014

Michel Mir

Uma Abordagem de Isometria em Sala de Aula

Dissertação de Mestrado Profissional apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Évelin Meneguesso Barbaresco

São José do Rio Preto
2014

Michel Mir

Uma Abordagem de Isometria em Sala de Aula

Dissertação de Mestrado Profissional apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Profª. Drª. Évelin Meneguesso Barbaresco
UNESP – São José do Rio Preto
Orientadora

Profª. Drª. Ermínia de Lourdes Campello Fanti
UNESP – São José do Rio Preto

Profª. Drª. Francielle Rodrigues de Castro Coelho
UFU – Universidade Federal de Uberlândia

São José do Rio Preto
14 de novembro de 2014

Dedico este trabalho a minha noiva Tatiane Habaro Ishizawa pelo carinho, apoio e paciência neste período.

Ofereço a meus pais Nazir Mir e Neusa Florido Mir, pelo amor, carinho, educação e orientação no decorrer de minha vida, ao meu irmão Nazir Mir Jr pelo incentivo e apoio durante toda a minha vida, e a minha tia Munira Mir (in memoriam) por ter participado da minha criação e educação.

AGRADECIMENTOS

A Deus por sempre me acompanhar em todos os momentos de minha vida, abrindo diversas portas e várias janelas para o meu sucesso pessoal e profissional.

À minha noiva Tatiane Habaro Ishizawa, pelo apoio e incentivo nos momentos difíceis e que, pacientemente, soube dividir o nosso precioso tempo com este projeto. Aos meus pais Nazir Mir e Neusa Florido Mir, e ao meu querido irmão Nazir Mir Junior, que sempre estiveram presentes na minha vida, educando, orientando, incentivando e torcendo por mim.

À Profª. Drª. Evelin Meneguesso Barbaresco, por toda tranquilidade, paciência e dedicação com que conduziu a orientação desta dissertação. Muito obrigado por todas as excelentes sugestões e ensinamentos, sem os quais seria impossível a conclusão deste trabalho.

À Coordenação do PROFMAT e a todos os docentes do Departamento de Matemática envolvidos neste importante projeto. À CAPES pela concessão da bolsa de estudos.

Aos colegas de curso, pela amizade, incentivo, exemplo e determinação. Especialmente ao Gilberto Antônio de Oliveira, pelo companheirismo nos incontáveis sábados e domingos de estudos e preparação para as avaliações.

Ao Robert Ishizawa pela cooperação nas inúmeras orientações em lidar com os recursos gráficos e computacionais.

A todos, que direta ou indiretamente, participaram desta grandiosa jornada de minha vida, a este sonho que se realizou.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo principal estudar as isometrias - no plano e no espaço - dentro da sala de aula. Inicialmente é realizado um breve resgate histórico a respeito da relação entre os conceitos de isometria e beleza, através dos tempos. Algumas das isometrias foram observadas na natureza em animais e plantas, e em obras construídas pelo Homem, como objetos, obras arquitetônicas famosas e obras de arte (quadros e esculturas). Buscamos conceituar e demonstrar os tipos de isometria no plano, bem como suas composições, além de conceituar os tipos de isometrias no espaço. Também apresentamos o Teorema Fundamental das Isometrias que caracteriza todos os tipos de isometrias no plano. Após a fundamentação teórica, descrevemos a realização de atividades em sala de aula utilizando diferentes tipos de malhas e imagens recortadas de revistas e jornais, com o objetivo de levar o aluno a identificar algum tipo de isometria. No final, apresentamos uma análise de como o ensino-aprendizagem de isometrias são abordados em alguns documentos oficiais de ensino no Brasil (PCNs, Currículo do Estado de São Paulo e matrizes de referências do SARESP).

Palavras-chave: Isometrias, Reflexão, Rotação, Translação, Reflexão com Deslizamento, Figuras Congruentes, Ensino de Matemática.

ABSTRACT

This work has as main objective to study the isometries - in the plane and in the space - inside the classroom. Initially is performed a brief historic rescue about the relation between the concepts of isometry and beauty through the ages. Some of isometries have been observed in nature in animals and plants, and works constructed by mens, such as objects, famous architectural works and artworks (paintings and sculptures). We seek to conceptualize and demonstrate the types of isometries in the plane, as well as their compositions, and conceptualize the types of isometries in space. After the theoretical foundation, we describe the realization of activities in the classroom using different types of grids and pictures cut from magazines and newspapers, with the goal of bringing students to identify some sort of isometry. In the end, we present an analysis of how the teaching and learning of isometries are dealt in some official documents of education in Brazil (PCNs, Curriculum of São Paulo and arrays of references SARESP).

Keywords: Isometries, Reflection, Rotation, Translation, Reflection with Slip, Congruent Figures, Teaching of Mathematics.

“A natureza tem perfeições que mostram que é a imagem de Deus, e defeitos que mostram que é apenas a imagem.”
Blaise Pascal

“*Só a educação liberta.*”
Epicteto

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Neste trabalho estamos interessados em estudar as isometrias no plano e no espaço. Chamamos isometrias às aplicações que transformam uma figura geométrica numa outra geometricamente igual à primeira, ou seja, é uma aplicação que conserva as distâncias entre os pontos e a amplitude dos ângulos. A isometria tem sido usada pelo homem nas suas criações desde os tempos mais primitivos. Povos antigos utilizaram figuras geométricas como elementos decorativos e, com o desenvolvimento das civilizações, as figuras adquiriram disposições mais complexas. Surgiram assim os ornamentos com repetições de uma mesma figura geométrica, tais como rosáceas, frisos ou pavimentações. Esse efeito visual pode ser observado em edifícios, painéis de azulejos, pavimentos de calçada portuguesa, vitrais de igrejas, tapeçarias, papéis de parede e quadros de artistas famosos como o artista gráfico holandês Maurits Cornelis Escher (1898-1972), entre outros.

O objetivo principal deste trabalho foi explorar o conceito de isometria em sala de aula, com alunos de 5ª série/6º ano e 6ª série/7º ano, levando-os a compreender o que é isomeria e a sua classificação básica.

Este trabalho está organizado em quatro capítulos.

No Capítulo 1, realizamos um breve resgate histórico de isometria e sua relação com o conceito de beleza através dos tempos

No Capítulo 2, descrevemos os fundamentos teóricos envolvidos nas atividades aplicadas em sala de aula. Inicialmente, introduzimos o conceito de isometria e algumas propriedades. Em seguida, particularizamos o estudo das isometrias no plano, apresentando os diversos tipos existentes e também provamos o Teorema de Classificação das Isometrias. Neste mesmo capítulo, apresentamos os tipos de isometrias no espaço e algumas propriedades.

No Capítulo 3, apresentamos uma proposta de atividade para ser realizada em sala de aula, com alunos de 5ª série/6º ano e 6ª série/7º ano. Nestas atividades são explorados o conceito de isometria, o reconhecimento dos tipos de isometria existentes, além de fazer uso do conceito de isometria para introdução dos números inteiros.

No Capítulo 4, fizemos uma breve análise de como o ensino de isometria é abordado em alguns documentos oficiais de ensino (PCN e Currículo do Estado de São Paulo).

CAPÍTULO 1 - UMA BREVE HISTÓRIA DA ISOMETRIA E SUA RELAÇÃO COM A BELEZA

O conceito de beleza já era utilizado nas linhas harmônicas das construções do Antigo Egito (Figura 1.1).

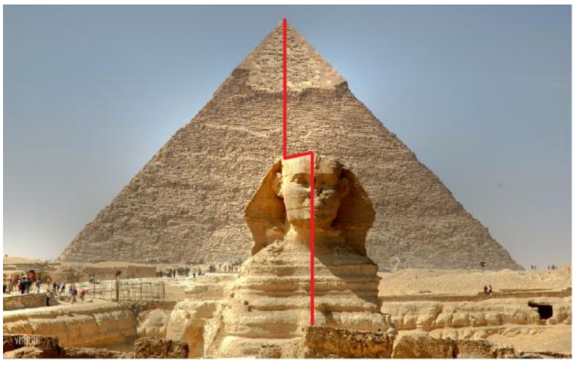


Figura 1.1: Pirâmides de Gizé e a grande Esfinge.

(Fonte: http://arqueologiaegipcia.com.br/2010/09/04/documentario-a-piramide-de-gize/)

Com o passar do tempo os gregos passaram a utilizar o conceito de simetria em suas construções com o intuito de deixá-las belas. Isso pode ser visto em algumas obras arquitetônicas gregas, por exemplo, no Parthenon de Atenas, no Teatro de Herodes Atticus e no Templo de Dionísio (Figura 1.2).

Figura 1.2: Parthenon de Atenas, Teatro de Herodes Atticus e Templo de Dionísio.

(Fonte: http://soyviajero.com/grandes-destinos/viajando-al-partenon-de-atenas/)

(Fonte: http://www.greek-islands.us/athens/herodes-atticus-theater/)

(Fonte: http://viagem.uol.com.br/album/guia/2013/07/12/atenas.htm)

Além do conceito de beleza nas construções os gregos passaram a observar esse conceito na natureza, em plantas, flores e animais (Figura 1.3).

Figura 1.3: Plantas, flores e animais simétricos.

(Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Simetria)

(Fonte: http://www.revista-temas.com/contacto/NewFiles/Contacto5.html)

(Fonte: http://monique-belfort.blogspot.com.br/2011/02/simetria-x-assimetria-turmas-161-e-162.html)

A simetria já era um conceito muito utilizado pelos antigos persas na confecção de tapetes (Figura 1.4). Há relatos de que alguns desses tapetes datam do século V a. C. Nesses tapetes podemos observar a presença de translação nas bordas, reflexão por meio de dois eixos perpendiculares no centro do tapete e a rotação.

Figura 1.4: Tapetes persas.

(Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Tapete_persa)

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Tapete_de_Kashan)

Nos séculos XI e XII os mouros levaram os primeiros tapetes persas para a Espanha, sendo espalhados por toda a Europa no século XV. Diversos pintores do período renascentista se utilizaram das simetrias na composição de suas obras, sendo muitas vezes inspirados nos tapetes persas. Como exemplo temos o afresco "A Escola de Atenas" de Rafael (Raffaelo Sanzio) que está no Palácio do Vaticano, datando de 1511 (Figura 1.5).

Figura 1.5: "A Escola de Atenas".

(Fonte: http://slideplayer.com.br/slide/1260074/)

A obra *"Homem Vitruviano"* de Leonardo da Vinci (Figura 1.6), datada de 1490, é um exemplo de observação da simetria no corpo humano. Essa obra é baseada numa passagem do arquiteto romano Marcus Vitruvius Pollio, encontrada no terceiro livro, de uma série de dez, intitulados *De Architectura*. Nessa passagem, ele descreve as proporções do corpo humano masculino.

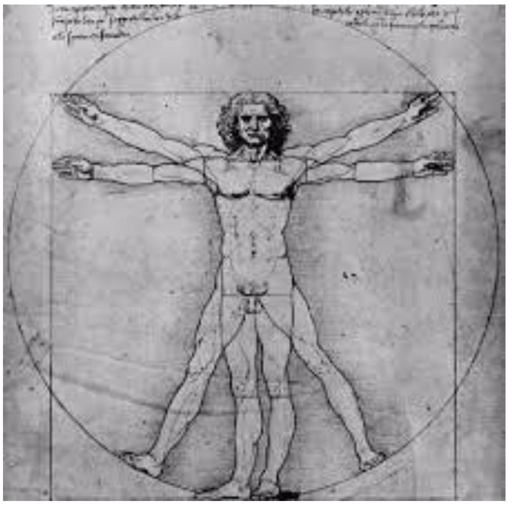


Figura 1.6: Obra “Homem Vitruviano”.

(Fonte: http://auxiliadoresdoconhecimento.blogspot.com.br/2013/11/o-homem-vitruviano-e-uma-obra-de.html)

No século XVII temos o início do período barroco que é caracterizado pelos diversos antagonismos belo/feio, claro/escuro, etc. Além disso, as pinturas são caracterizadas por suas assimetrias.

Já nos séculos XIX e XX, as obras de arte voltam a ser caracterizadas pela presença de simetrias. Um dos maiores artistas deste século foi o artista gráfico holandês Maurits Cornelis Escher (1898 – 1972). Suas obras possuem uma presença marcante das simetrias de rotação, translação e reflexão. Isso fica evidente em algumas de suas obras (Figura 1.7).

Figura 1.7: "Palhaço", "Cavalos Marinhos" e "Anjos e Demônios" (da esquerda para a direita).

(Fonte: http://www.mcescher.com/)

CAPÍTULO 2 - ISOMETRIAS

Inicialmente observamos que as principais referências para este capítulo são [LIMA, 1996] e [TINOCO, 2012]. São destas referências também a maioria das figuras encontradas neste capítulo.

No ensino fundamental, ao introduzirmos o conceito de isometria, dizemos que é um tipo especial de *transformação* – uma maneira de deslocar uma imagem. Se a imagem parecer a mesma depois de deslocada, isto é, se as imagens inicial e final forem congruentes, então esta transformação é uma isometria.

Na seção a seguir iremos definir alguns conceitos iniciais para, em seguida, aprofundarmos o estudo sobre isometrias.

2. 1 CONCEITOS INICIAIS

Para definir o conceito de isometria iremos, inicialmente, definir e exemplificar o conceito de distância.

Definição 2. 1: Dado um conjunto $M \neq \emptyset$, seja $d: M \times M \to \mathbb{R}_+$ uma aplicação e indiquemos por $d(x, y)$ a imagem de um par genérico $(x, y) \in M \times M$, através da aplicação d. Dizemos que d é *métrica* sobre M se as seguintes condições se verificam para quaisquer $x, y, z \in M$:

(M_1) $d(x, y) \geq 0,\ \forall x, y \in M$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M_2) $d(x, y) = d(y, x)$

(M_3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Nessas condições, cada imagem $d(x, y)$ recebe o nome de *distância de x a y* e um par (M, d), onde d é uma métrica sobre M, é chamado de *espaço métrico*.

<u>Exemplos:</u>

1) Sobre $\mathbb{R}$ considere a função $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, dada por $d(x, y) = |x - y|$. Então d é uma métrica sobre $\mathbb{R}$.

De fato, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$, temos:

(M_1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M_2) $d(x, y) = |x - y| = |(-1)(y - x)| = |-1||y - x| = |y - x| = d(y, x)$

(M_3) $d(x, y) = |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$

2) O espaço $\mathbb{R}^n$ também é um espaço métrico com a função $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ dada por

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},$$

onde $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Tal métrica é chamada *métrica euclidiana*.

Vejamos que d é uma métrica sobre $\mathbb{R}^n$, para isso denotaremos $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n)$ e $z = (z_1, \cdots, z_n)$ pontos do $\mathbb{R}^n$.

(M_1) $d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \geq 0$ pela definição de raiz quadrada.

Além disso, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 = 0 \Leftrightarrow (x_i - y_i)^2 = 0, \forall i = 1,2,\dots,n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_i - y_i = 0, \forall i = 1,2,\dots,n \Leftrightarrow x_i = y_i, \forall i = 1,2,\dots,n \Leftrightarrow x = y.$$

(M_2)

$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{[(-1)(x_1 - y_1)]^2 + \cdots + [(-1)(x_n - y_n)]^2} =$

$= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2} = d(y,x).$

Para a demonstração de (M_3) será necessário utilizarmos a desigualdade de Cauchy-Schwarz no $\mathbb{R}^n$, cujo enunciado é o seguinte:

Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, então:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} . \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$$

Vamos mostrar que a afirmação acima é verdadeira. De fato, sejam $r, s \in \mathbb{R}$, então

$$(r-s)^2 \geq 0 \Rightarrow r^2 - 2rs + s^2 \geq 0 \Rightarrow 2rs \leq r^2 + s^2.$$

Consideremos $p = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ e $q = \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}$. Então é verdadeira a relação $2\frac{|x_i|}{p}\frac{|y_i|}{q} \leq \frac{x_i^2}{p^2} + \frac{y_i^2}{q^2}$ para qualquer i $(1 \leq i \leq n)$. Assim, somando em relação ao índice i, temos:

$$\frac{2}{p.q}\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \frac{(x_1^2 + \cdots + x_n^2)}{p^2} + \frac{(y_1^2 + \cdots + y_n^2)}{q^2} = \frac{p^2}{p^2} + \frac{q^2}{q^2} = 1 + 1 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p.q}\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq p.q = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} . \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$$

(M_3) Provemos agora a condição (M_3).

Temos: $\quad d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad [d(x,y)]^2 = (x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} [(x_i - z_i) + (z_i - y_i)]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)(z_i - y_i) + \sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2 \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2 + 2\left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2\right]^{1/2} \left[\sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2\right]^{1/2} + \sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2 =$$

$$= d(x,z)^2 + 2d(x,z).d(z,y) + d(z,y)^2 = [d(x,z) + d(z,y)]^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$

Definição 2. 2: Considere os espaços métricos (M,d) e (M',d'). Uma aplicação $\varphi: (M,d) \to (M',d')$ é uma *isometria* se

$$d(x,y) = d'\big(\varphi(x),\ \varphi(y)\big), \quad \forall x,y \in M.$$

O conceito de isometria nada mais é do que uma aplicação que preserva distâncias. Note que, etimologicamente, a palavra *isometria* significa “mesma medida”.

Observação 2.1:

1) Toda isometria $\varphi: (M,d) \to (M',d')$ é uma aplicação injetora, pois:

$\forall\ x,y\ \in M,\ \varphi(x) = \ \varphi(y) \Longrightarrow d'\big(\varphi(x),\varphi(y)\big) = 0 \ \xRightarrow{\varphi:\, iso.} d(x,y) = 0 \Longrightarrow x = y.$

2) Neste trabalho, estamos interessados em estudar isometrias φ para $M = M' = \mathbb{R}^2$ e $M = M' = \mathbb{R}^3$, ambos com a métrica euclidiana. Nesse caso, pode-se mostrar que φ é uma aplicação sobrejetora. Faremos a prova deste resultado nas seções a seguir.

Proposição 2. 1: Sejam φ_1 e φ_2 isometrias entre espaços métricos. Então a composta $\varphi_1 \circ \varphi_2$ também é isometria.

Demonstração: Considere as isometrias $\varphi_2: (M, d_M) \to (N, d_N)$ e $\varphi_1: (N, d_N) \to (P, d_P)$. Para $a, b \in M$, temos que $\varphi_2(a)$ e $\varphi_2(b) \in N$. Assim,

$$d_M(a,b) = d_N(\varphi_2(a), \varphi_2(b)) = d_P\big(\varphi_1(\varphi_2(a)), \varphi_1(\varphi_2(b))\big) =$$

$$= d_P\big((\varphi_1 \circ \varphi_2)(a), (\varphi_1 \circ \varphi_2)(b)\big)$$

Logo, a aplicação composta $\varphi_1 \circ \varphi_2$ preserva a distância entre dois elementos de um espaço métrico, satisfazendo a definição de isometria dada anteriormente.

Definição 2. 3: Duas figuras planas F_1 e F_2(ou seja, F_1 e F_2 são subconjuntos de $\mathbb{R}^2$) são ditas *congruentes* (ou isométricas) se existe uma isometria $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $F_2 = \varphi(F_1)$ (Figura 2.1).

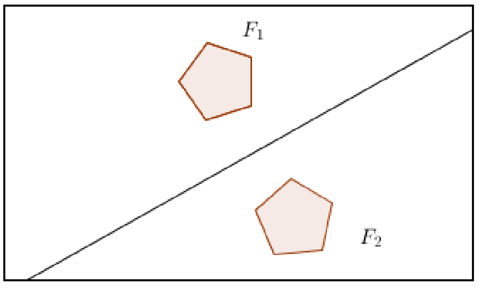


Figura 2.1: Figuras isométricas.

2. 2 ISOMETRIAS NO PLANO

Daqui em diante iremos fixar um plano Π. A correspondência biunívoca entre os pontos do plano Π e o $\mathbb{R}^2$ permite que substituamos, em alguns raciocínios, o ponto P do plano Π pelo par ordenado (x, y) que são as suas coordenadas. E quando estivermos considerando o $\mathbb{R}^2$ será com a métrica euclidiana.

Vamos estabelecer algumas notações que serão utilizadas e admitir fixada uma unidade de comprimento. Sejam A e B pontos no plano. A distância de A até B é a medida do segmento AB, que será indicada por $d(A, B)$ ou $\overline{AB}$. Um segmento de extremidades A e B será denotado por AB e a reta determinada por A e B será indicada por $\overrightarrow{AB}$. Se O é um ponto no plano, o ângulo de vértice O cujos lados são as semirretas OA e OB será indicado por $A\hat{O}B$.

No que segue serão admitidos conhecidos alguns conceitos e resultados de Geometria Plana (Euclidiana e Analítica) e Geometria Espacial, bem como de Álgebra Vetorial, que podem ser encontrados com maiores detalhes em Boulos e Camargo (2005), Rezende e Queiroz (2008) e Carvalho (2005).

A seguir provaremos alguns resultados à repeito de isometria definidas no plano. Em particular, provaremos que uma isometria $\varphi: \Pi \to \Pi$ é uma aplicação bijetora. Para isso, precisaremos inicialmente garantir que toda isometria definida sobre a reta é uma aplicação bijetora.

Proposição 2. 2: Sejam r e s retas num plano Π e $\varphi: r \to s$ uma isometria. Então a aplicação φ é bijetora e sua inversa $\varphi^{-1}: s \to r$ ainda é uma isometria.

<u>Demonstração</u>: Dados $X, Y \in r$, chamemos $X' = \varphi(X)$ e $Y' = \varphi(Y)$. Então se $X \neq Y$ temos que a medida do segmento XY é maior que zero ($\overline{XY} > 0$). Assim, $\overline{X'Y'} = \overline{XY} > 0$, o que implica $X' \neq Y'$. Logo φ é injetora.

Provemos que φ é sobrejetora. Seja $Y \in s$ um ponto qualquer, mostremos que existe $X \in r$ tal que $\varphi(X) = Y$. Para isso, tomemos um ponto qualquer $A \in r$ e consideremos $A' = \varphi(A)$.

Seja $d = \overline{A'Y}$ a distância de A' ao ponto Y. Se $d = 0$ então $A' = Y$ e A é o ponto X procurado. Se $d > 0$, existem dois pontos X_0 e X_1 em r, situados à uma distância d do ponto A. Como φ é injetora, então φ transforma X_0 e X_1 nos dois únicos pontos de s situados à uma distância d do ponto A'. Como um destes pontos é Y, segue que se tem $\varphi(X_0) = Y$ ou $\varphi(X_1) = Y$ (Figura 2.2). Logo φ é sobrejetora.

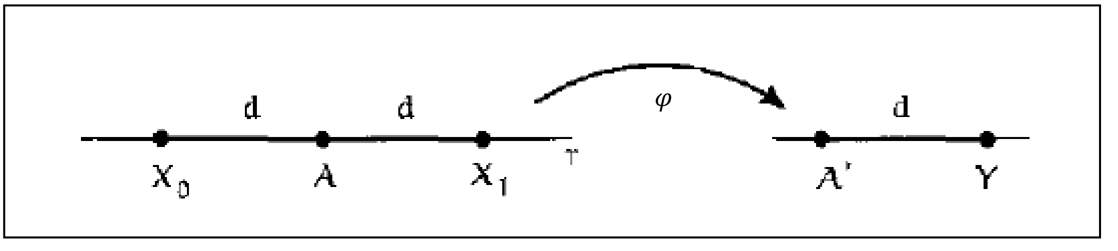


Figura 2.2: Isometria φ

Vejamos que a aplicação inversa $\varphi^{-1}: s \rightarrow r$ ainda é uma isometria. Dados $X, Y \in s$, temos $X = \varphi(X_0)$ e $Y = \varphi(Y_0)$. Então $X_0 = \varphi^{-1}(X)$ e $Y_0 = \varphi^{-1}(Y)$. Assim,

$$d(X,Y) = d(\varphi(X_0), \varphi(Y_0)) = d(X_0, Y_0) = d(\varphi^{-1}(X), \varphi^{-1}(Y)).$$

Logo, $\varphi^{-1}: s \rightarrow r$ é uma isometria.

Proposição 2. 3: Toda isometria $\varphi: \Pi \rightarrow \Pi'$ transforma retas em retas.

<u>Demonstração</u>: Considere uma reta $r \subset \Pi$. Tomemos dois pontos distintos A e B em r, consideremos $A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$ e chamemos de r' a reta no plano Π' que passa por A' e B'. Dado qualquer $X \in r$, um dos três pontos A, B e X está entre os outros dois. Digamos que B esteja entre A e X, ou seja, que B pertence ao segmento AX. (Os outros dois casos são análogos). Então $\overline{AX} = \overline{AB} + \overline{BX}$ logo, pondo $X' = \varphi(X)$, temos que $\overline{A'X'} = \overline{A'B'} + \overline{B'X}$ portanto B' pertence ao segmento $A'X'$. Assim os pontos A', B' e X' são colineares. Isto mostra que $X \in r$ implica $X' \in r'$. Logo a restrição de φ a r é uma isometria entre r e r'. Como toda isometria entre retas é sobrejetora, tem-se $\varphi(r) = r'$ (Figura 2.3).

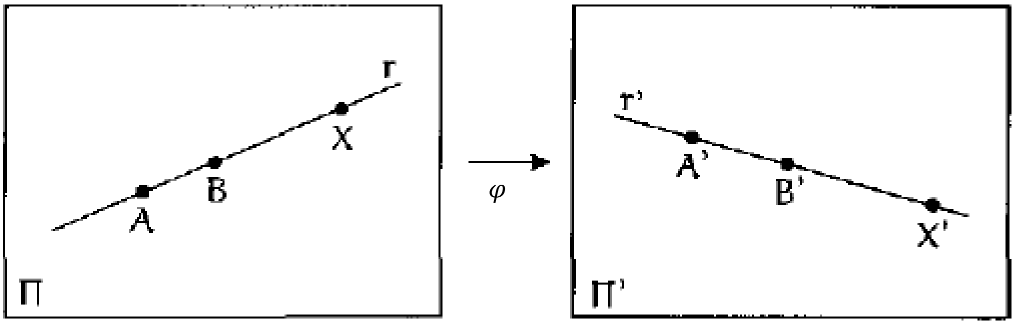


Figura 2.3: Isometria entre retas.

Proposição 2. 4: Uma isometria $\varphi\colon \Pi \to \Pi'$ transforma retas perpendiculares em retas perpendiculares.

<u>*Demonstração*</u>*:* *D*adas duas retas perpendiculares r e s em Π, consideremos: o ponto A de interseção de r e s, dois pontos B e C em r, equidistantes de A, e um ponto qualquer D sobre s (Figura 2.4). Chamemos $A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$, $C' = \varphi(C)$ e $D' = \varphi(D)$. Note que AD é a mediana do triângulo isósceles BCD.

A isometria φ transforma a mediana AD na mediana $A'D'$ do triângulo isósceles $B'C'D'$. Logo o segmento $A'D'$ é perpendicular ao segmento $B'C'$, ou seja, r' é perpendicular a s'.

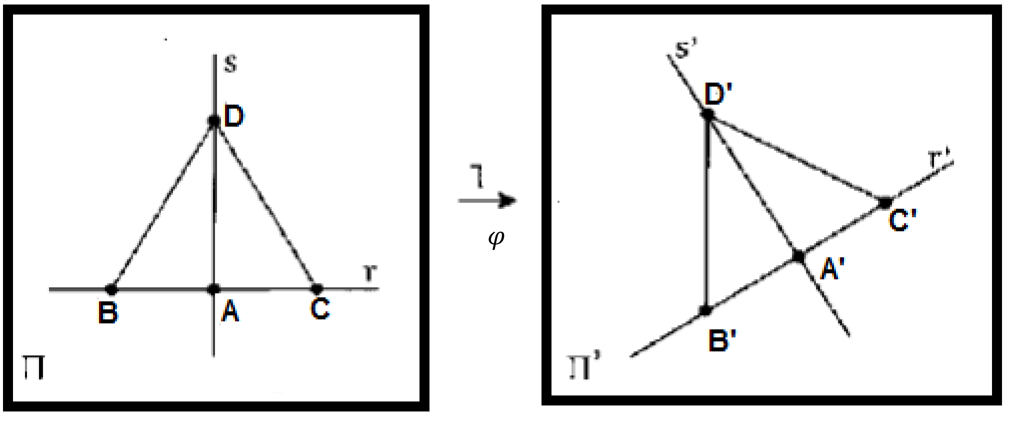


Figura 2.4: Isometria entre retas.

Proposição 2. 5: Toda isometria $\varphi\colon \Pi \to \Pi'$ é uma aplicação bijetora.

<u>*Demonstração*</u>*:* Já vimos que φ é uma aplicação injetora. Para provar que φ também é uma aplicação sobrejetora, tomamos um ponto arbitrário $X' \in \Pi'$ e procuramos determinar um ponto $X \in \Pi$ tal que $\varphi(X) = X'$.

Traçamos uma reta qualquer r em Π. A imagem de r por φ é uma reta r' no plano Π' (Proposição 2.1). Se $X' \in r'$ então, por definição de imagem, existe um ponto $X \in r$ tal que $\varphi(X) = X'$. Caso contrário, considere s' a reta perpendicular a r passando por X' (Figura 2.5). Chamemos de Y' o ponto de interseção de r' com s'. Como $Y' \in r'$, existe $Y \in r$ tal que $\varphi(Y) = Y'$. Seja s a reta perpendicular a r passando por Y. A imagem de s pela isometria φ é perpendicular a r' e contém Y'. Logo $\varphi(s) = s'$. Como $X' \in s'$, existe $X \in s$ tal que $\varphi(X) = X'$.

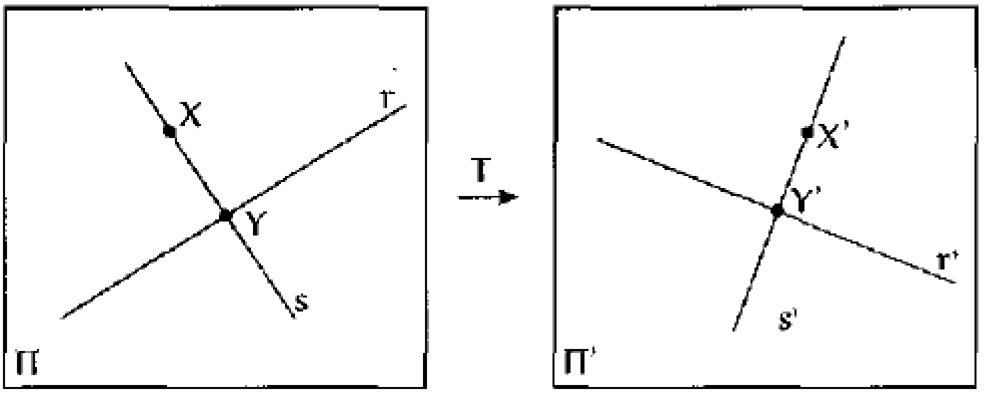


Figura 2.5: Isometria entre retas.

2. 2. 1 TIPOS DE ISOMETRIAS NO PLANO

Definiremos a seguir algumas aplicações no plano, a saber: reflexão, rotação, translação e reflexão com deslizamento. Essas aplicações são isometrias, fato que será provado no final da próxima subseção (2.2.2).

REFLEXÃO

Definição 2. 4: Seja l uma reta no plano. A *reflexão em torno da reta* l é uma aplicação $\varphi_l: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, que a cada ponto P do plano associa o ponto P' do plano de maneira que o segmento PP' seja perpendicular à reta l e que a distância de P à reta l seja igual à distância de P' à l. Ou seja, a reta l é a mediatriz do segmento PP', se $P \notin l$.

A reta l é chamada de *eixo de reflexão* e o ponto P' é o *simétrico* de P em relação à reta l (Figura 2.6).

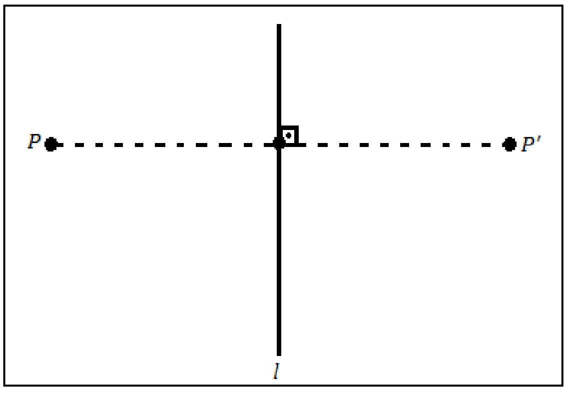


Figura 2.6: Reflexão do ponto P em torno da reta l.

Note que os pontos pertencentes ao eixo de reflexão permanecem invariantes (ou seja, $\varphi_l(P) = P$ se $P \in l$).

Observação 2. 2: Existem figuras $\mathcal{B}$ que podem ser vistas como a união de uma figura F com sua imagem F', pela reflexão numa reta l que intersecciona essa figura. Dizemos, então, que essa figura $\mathcal{B} = F \ \cup F'$ é uma figura *simétrica* em relação à reta l, ou ainda, que $\mathcal{B}$ possui *simetria de reflexão* ou *simetria axial* (Figura 2.7). Neste caso, dizemos que a reta l é o *eixo de simetria*.

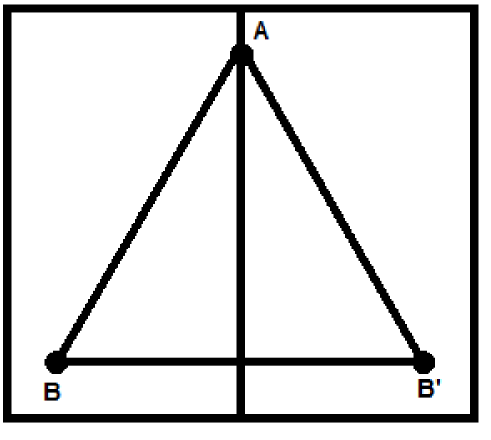


Figura 2.7: Figura que possui simetria de reflexão.

ROTAÇÃO

Definição 2. 5: Seja O um ponto do plano e $\alpha = X\hat{O}Y$ um ângulo de vértice O. A rotação de um ângulo α em torno de um ponto O(ou de centro O) é a aplicação $\mathcal{R}_{\alpha,O}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ assim definida: $\mathcal{R}_{\alpha,O}(O) = O$ e para todo $P \neq O$ em $\mathbb{R}^2, \mathcal{R}_{\alpha,O}(P) = P'$ é o ponto do plano $\mathbb{R}^2$ tal que $d(P,O) = \ d(P',O)$ e $P\hat{O}P^{'} = \ \alpha$ e o "sentido de rotação" de X para Y é o mesmo de P para P' (Figura 2.8).

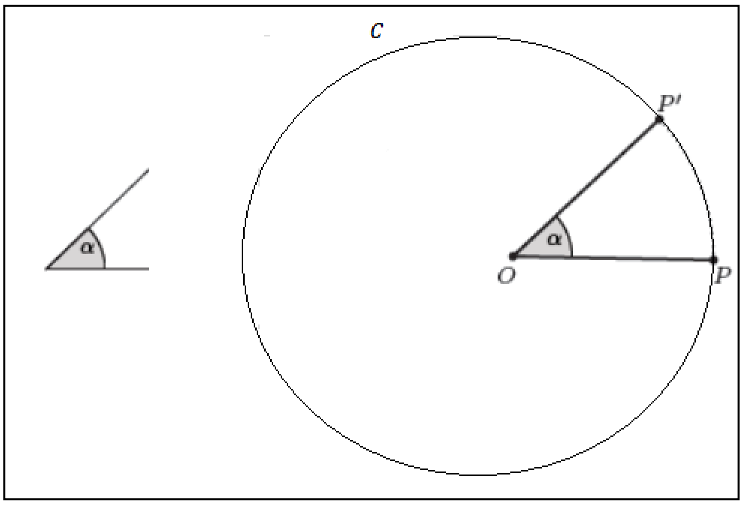


Figura 2.8: Rotação.

Observação 2. 3:

1) A rotação de um ângulo raso (ou seja, um ângulo cuja medida é $180°$) em torno de um ponto O também é denominada de *simetria em torno de* O.

2) Diz-se que $X\hat{O}Y$ é um *ângulo orientado* quando a ordem das semirretas OX e OY é levada em conta: OX é a primeira e OY é a segunda. Neste caso, $\alpha = X\hat{O}Y$ é considerado diferente do ângulo orientado $-\alpha = Y\hat{O}X$. Isso deve ser considerado para que a rotação $\mathcal{R}_{\alpha,O}$ de centro O e ângulo $\alpha = X\hat{O}Y$ esteja bem definida.

3) Podemos dizer que $\mathcal{R}_{\alpha,O}$ é a rotação de amplitude α e centro O.

Nota: No ensino de isometria para alunos do Ensino Fundamental e Médio, em geral, usa-se a palavra simetria somo sinônimo de isometria. No entanto, como vimos nas observações anteriores (2.2 e 2.3), *simetria de reflexão* e *simetria em torno de um ponto* são casos particulares de isometria.

TRANSLAÇÃO

Definição 2. 6: Sejam A e B pontos distintos em $\mathbb{R}^2$, a translação $\tau_{AB}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é a aplicação assim definida: dado $X \in \mathbb{R}^2$, sua imagem $X' = \tau_{AB}(X)$ é o quarto vértice do paralelogramo que tem AB e AX como lados, se A, B e X não são colineares. Se A, B e X são colineares, então $X' = \tau_{AB}(X)$ é tal que XX' está na reta AB e os segmentos AX' e BX têm o mesmo ponto médio (Figura 2.9).

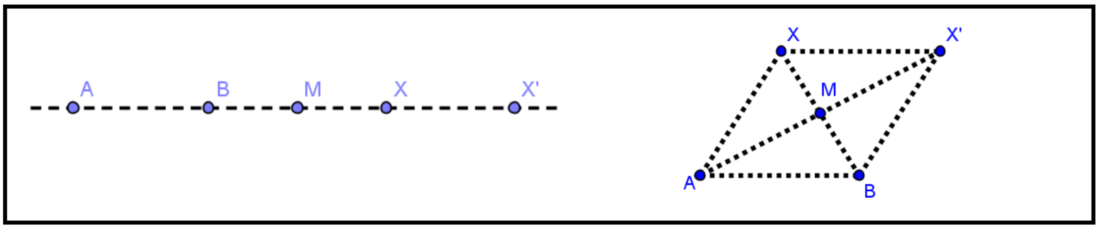


Figura 2.9: Translação.

Observação 2. 4: A noção de translação está intimamente relacionada com o conceito de vetor. Considerando o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, podemos escrever $\tau_{\vec{v}}$ ao invés de τ_{AB} e dizer que $\tau_{\vec{v}}$ é a translação pelo vetor $\vec{v}$. Assim, dado o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e o ponto $X \in \mathbb{R}^2$, existe um único ponto $X' \in \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XX'}$. O ponto X' é o quarto vértice do paralelogramo que tem AB e AX como lados. Nesse caso, escrevemos $X' = X + \vec{v}$ e dizemos que o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ translada o ponto X para a posição X'. Então, naturalmente, temos $X' = \tau_{AB}(X) = \tau_{\vec{v}}(X)$.

REFLEXÃO COM DESLIZAMENTO

Definição 2. 7: Sejam $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ um vetor não nulo e l uma reta paralela à $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ no plano. A *reflexão com deslizamento*, determinada pelo vetor $\vec{v}$ e pela reta l, é a aplicação $\psi = \tau_{\vec{v}} \circ \varphi_l : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ obtida fazendo a composição da reflexão em torno da reta l com a translação pelo vetor $\vec{v}$ (Figura 2.10).

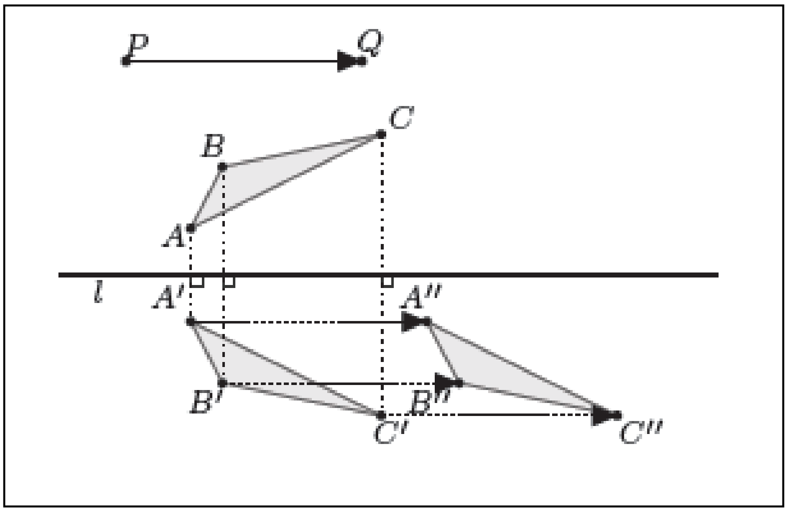


Figura 2.10: Reflexão com deslizamento.

Observação 2. 5: Como o vetor $\vec{v}$ é paralelo à reta l, é possível mostrar que $\tau_{\vec{v}} \circ \varphi_l = \varphi_l \circ \tau_{\vec{v}}$.

2. 2. 2 COMPOSIÇÃO DE REFLEXÕES

Nesta seção estudaremos como se comporta a composição de reflexões. A translação, a rotação e a reflexão com deslizamento podem ser obtidas através da reflexão. Isso é o que veremos a seguir.

Proposição 2. 6: ***(Composição de duas reflexões em eixos paralelos)***
Sejam φ_r e $\varphi_s$as reflexões em torno das retas r e s, respectivamente. Se r e s são retas paralelas distintas, então $\varphi = \varphi_s \circ \varphi_r$ é a translação por um vetor perpendicular às retas e de comprimento igual ao dobro da distância entre elas.

<u>*Demonstração*</u>: Considere A um ponto no plano. A demonstração pode ser feita supondo que A está num dos semiplanos em que r divide o plano e s está no outro e, além disso, que a distância de A a r é menor ou igual que a distância d entre as retas r e s.Os demais casos são análogos.

Seja A' a imagem do ponto A por reflexão no eixo r e A'' a imagem do ponto A' por reflexão no eixo s. Então $A'' = \varphi_s(A') = \varphi_s(\varphi_r(A)) = \varphi_s \circ \varphi_r(A) = \varphi(A)$.

Tome P o ponto de interseção da reta r com o segmento AA'e P' o ponto de interseção da reta s com o segmento $A'A''$ (Figura 2.11).

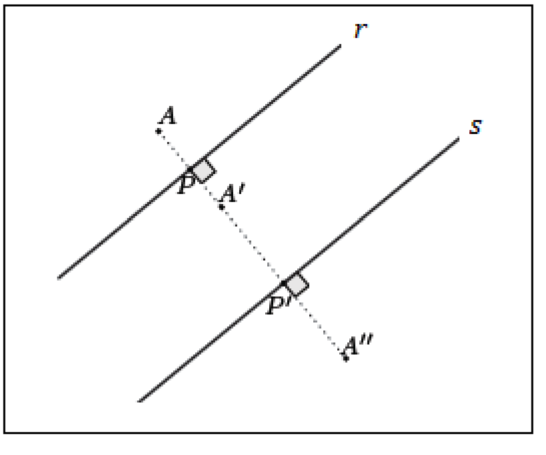


Figura 2.11: Composição de duas reflexões em eixos paralelos.

Pela definição de reflexão, a reta AA'é perpendicular a reta $r$em P. Do mesmo modo, temos a reta $A'A''$ perpendicular a reta s em P'. Logo, os pontos A, A' e A'' são colineares, caso contrário, o triângulo $A'PP'$ teria dois ângulos retos, o que é um absurdo.

Considere o vetor $\vec{v} = 2\,\overrightarrow{PP'}$. Então o vetor $\vec{v}$ é perpendicular às retas r e s e o seu comprimento é $2d$. E ainda, temos: $\vec{v} = 2\,\overrightarrow{PP'} = 2\,\left(\overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{A'P'}\right)$.

Como, por definição de reflexão, os pontos A, P e P' são colineares e os segmentos AP e PA' são congruentes, segue que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PA'}$. Do mesmo modo, obtemos que $\overrightarrow{A'P'} = \overrightarrow{P'A''}$. Assim,

$$\vec{v} = \overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{A'P'} + \overrightarrow{A'P'} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{A'P'} + \overrightarrow{P'A''} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''} = \overrightarrow{AA''}.$$

Logo,

$$\tau_{\vec{v}}(A) = A + \vec{v} = A + \overrightarrow{AA''} = A'' = \varphi(A).$$

Portanto φ é a translação por um vetor $\vec{v}$ que é perpendicular às retas r e s e tem comprimento igual ao dobro da distância entre essas retas.

Observação 2. 6: Na demonstração da Proposição 2.6 acima, vimos que $\varphi_s \circ \varphi_r = \varphi = \tau_{\vec{v}}$. Essa igualdade também nos diz que toda translação $\tau_{\vec{v}}$ pode ser expressa como a composta de duas reflexões em torno de retas r e s de tal modo que r e s são paralelas, são perpendiculares ao vetor v (sendo que o sentido do vetor v é da reta r para a reta s) e a distância entre elas é igual à metade do comprimento do vetor v.

Proposição 2. 7: ***(Composição de três reflexões em eixos paralelos)***
Sejam φ_r,φ_s e φ_t as reflexões em torno das retas r, s e t, respectivamente. Se r, s e t são retas paralelas distintas, então $\varphi = \varphi_t \circ \varphi_s \circ \varphi_r$ é uma reflexão em torno de uma reta u paralela às essas retas, sendo que a reta u é única (ou seja, o eixo da reflexão φ é único).

<u>*Demonstração*</u>: Considere A um ponto no plano. Seja A' a imagem do ponto A por reflexão no eixo r, A'' a imagem do ponto A' por reflexão no eixo s e A''' a imagem do ponto A'' por reflexão no eixo t. Então:

$$A''' = \varphi_t(A'') = \varphi_t(\,\varphi_s(A') = \varphi_t(\,\varphi_s\big(\varphi_r(A)\big) = \varphi_t \circ \varphi_s \circ \varphi_r(A) = \varphi(A).$$

Vimos na demonstração da proposição anterior que os pontos A, A' e A'' são colineares. Usando o mesmo raciocínio, obtemos que os pontos A, A', A'' e A''' são colineares.

Seja u a mediatriz do segmento AA'''. Assim, por definição de reflexão e pela unicidade da mediatriz, $A''' = \varphi_u(A)$.

Logo, $\varphi = \varphi_u$, ou seja, $\varphi_t \circ \varphi_s \circ \varphi_r$ é uma reflexão em torno da reta u.

Como as retas u e r são perpendiculares à reta AA''', segue que u e r são paralelas. Da hipótese e pela transitividade, obtemos que r, s, t e u são retas paralelas (Figura 2.12).

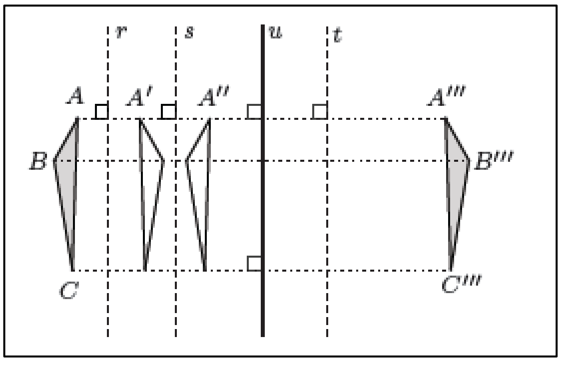


Figura 2.12: Composição de três reflexões em eixos paralelos.

Observação 2. 7: Das Proposições 2.6 e 2.7, podemos concluir que, ao realizarmos reflexões em torno de eixos paralelos, se o número de reflexões for par a isometria obtida é uma translação, se o número for ímpar, é uma reflexão.

Proposição 2. 8: ***(Composição de duas reflexões em eixos concorrentes)***
Sejam φ_r e φ_s as reflexões em torno das retas r e s, respectivamente. Se r e s são retas concorrentes em O, então $\varphi = \varphi_s \circ \varphi_r$ é uma rotação em torno do ponto O e de amplitude igual ao dobro do ângulo formado pelas duas retas.

<u>*Demonstração*</u>: Por definição de reflexão, O permanece invariante aos eixos de reflexão, ou seja, $\varphi_r(O) = \varphi_s(O) = O$. Assim, $\varphi(O) = \varphi_s \circ \varphi_r(O) = O$.

Seja α o ângulo formado pelas retas concorrentes r e s. Considere um ponto A no plano com $A \neq O$, $\varphi_r(A) = A'$ e $\varphi_s(A') = A''$. Então

$$A'' = \varphi_s\big(\varphi_r(A)\big) = \varphi_s \circ \varphi_r(A) = \varphi(A).$$

Tome P o ponto de interseção da reta r com o segmento AA' e P' o ponto de interseção da reta s com o segmento $A'A''$ (Figura 2.13).

Pela definição de reflexão, os segmentos AP e $A'P$ são congruentes e os ângulos $A\hat{P}O$ e $A'\hat{P}O$ são retos. Assim, os triângulos AOP e $A'OP$ são congruentes (pelo caso LAL) e, consequentemente, $d(A, O) = d(A', O)$ e as medidas dos ângulos $A\hat{O}P$ e $A'\hat{O}P$ são iguais ($A\hat{O}P = A'\hat{O}P = \theta$). De modo análogo, obtemos $d(A', O) = d(A'', O)$ e também que as medidas dos ângulos $A'\hat{O}P'$ e $A''\hat{O}P'$ são iguais ($A'\hat{O}P' = A''\hat{O}P' = \beta$).

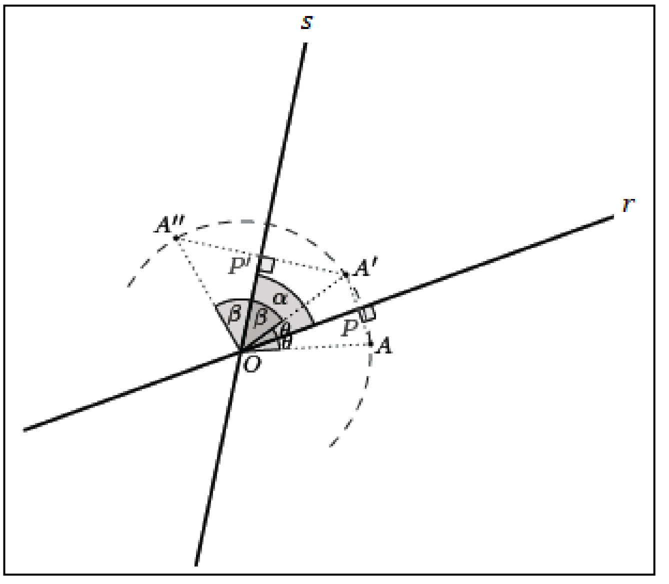


Figura 2.13: Composição de reflexões em eixos concorrentes.

Logo, $d(A, O) = d(A'', O)$. Para determinar a amplitude da rotação (ângulo $A\hat{O}A''$) utilizamos a seguinte expressão:

$$A\hat{O}A'' = A\hat{O}P + P\hat{O}A' + A'\hat{O}P' + P'\hat{O}A'' = 2\theta + 2\beta = 2(\theta + \beta).$$

Note que o ângulo formado pelos eixos r e s corresponde a

$$\alpha = P\hat{O}P' = P\hat{O}A' + A'\hat{O}P' = \theta + \beta.$$

Assim, $A\hat{O}A'' = 2(\theta + \beta) = \alpha$.

Portanto, podemos concluir que φ é uma rotação em torno do ponto O, com amplitude igual ao dobro do ângulo formado pelos eixos concorrentes.

Observação 2. 8: Na demonstração da Proposição anterior, obtivemos que $\mathcal{R}_{\alpha,O} = \varphi_s \circ \varphi_r$. Desse modo, podemos dizer que toda rotação do plano pode ser expressa como a composta de duas reflexões em torno de retas que se intersectam no centro da rotação e formam entre si um ângulo cuja medida é igual a metade do ângulo da rotação. É importante tomar a composição $\varphi_s \circ \varphi_r$ na ordem certa, de modo que α seja o dobro do ângulo da reta r para a reta s (e não de s para r). Uma dessas retas pode ser tomada arbitrariamente, desde que passe por O.

Lema 2. 1: Considere $\mathcal{R}_{\theta,O}$ uma rotação centrada em O com ângulo de rotação θ, e l uma reta qualquer que passe pelo ponto O. Então existem, e são únicas, as retas r_1 e s_1 tais que $\mathcal{R}_{\theta,O} = \varphi_l \circ \varphi_{r_1} = \varphi_{s_1} \circ \varphi_l$.

<u>*Demonstração:*</u> Considere A um ponto no plano. Seja $\mathcal{R}_{\theta,O}$ uma rotação como na hipótese, que envia o ponto A no ponto A', ou seja, $A' = \mathcal{R}_{\theta,O}(A)$. Considere l uma

reta qualquer que passa pelo ponto O. Toda rotação pode ser vista como a composição de duas reflexões em torno de eixos concorrentes (Observação 2.8), sendo que o centro de rotação é o ponto de interseção desses eixos e a amplitude é o dobro da medida do ângulo entre os dois eixos. Assim as retas r_1 e s_1 são as únicas retas que fazem um ângulo de $\frac{\theta}{2}$ com a reta l, de tal forma que devemos considerar o ângulo no sentido de r_1 para l no primeira igualdade requerida, e no sentido de l para s_1 na segunda (Figuras 2.14 e 2.15).

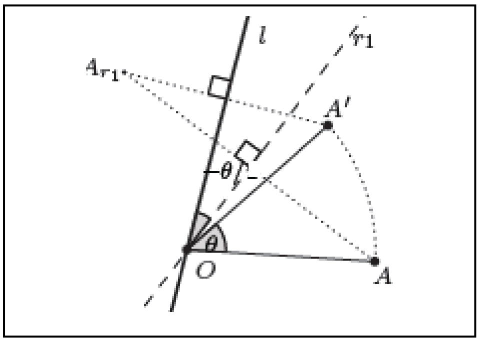


Figura 2.14: Representação de $\mathcal{R}_{\theta,O} = \varphi_l \circ \varphi_{r_1}$.

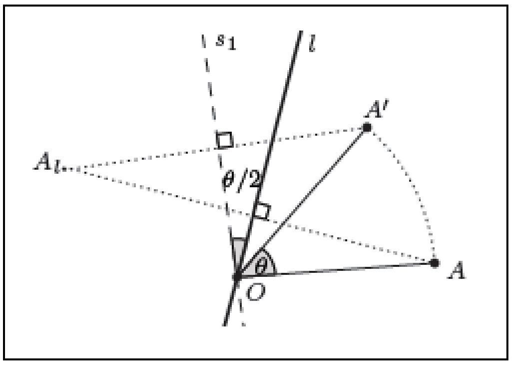


Figura 2.15: Representação de $\mathcal{R}_{\theta,O} = \varphi_{s_1} \circ \varphi_l$.

Proposição 2. 9: ***(Composição de três reflexões em eixos concorrentes)***

Sejam φ_r, φ_s e φ_t reflexões em torno das retas r, s e t, respectivamente. Se r, s e t são retas concorrentes num ponto P, então existe uma única reta l, que passa pelo ponto P, tal que $\varphi = \varphi_t \circ \varphi_s \circ \varphi_r$ é uma reflexão em torno da reta l.

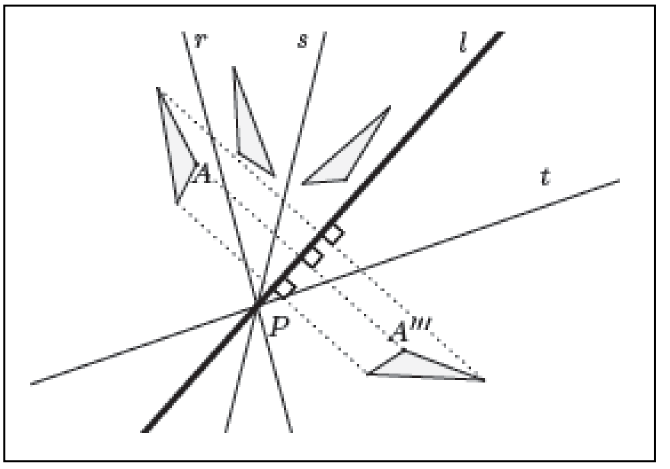


Figura 2.16: Composição de reflexões em torno de três retas concorrentes.

<u>*Demonstração*</u>*:* Pela Proposição 2.8 temos que $\varphi_s \circ \varphi_r$ é uma rotação, centrada no ponto P e de amplitude igual ao dobro do ângulo formado entre as retas r e s. Se considerarmos $\frac{\theta}{2}$ o ângulo formado entre as retas r e s, então $\varphi_s \circ \varphi_r = \mathcal{R}_{\theta,P}$.

Pelo Lema 2.1, existe uma única reta l, que passa por P e forma um ângulo de $\frac{\theta}{2}$ com a reta t, de tal maneira que $\varphi_s \circ \varphi_r = \mathcal{R}_{\theta,P} = \varphi_t \circ \varphi_l$. Disso temos,

$$\varphi_t \circ \varphi_s \circ \varphi_r = \varphi_t \circ \varphi_t \circ \varphi_l.$$

Como $\varphi_t \circ \varphi_t$ é a identidade (duas reflexões sucessivas em torno da mesma reta é igual a identidade), então $\varphi_t \circ \varphi_s \circ \varphi_r = \varphi_l$.

Pela definição de reflexão, a reta l é a mediatriz de dois pontos correspondentes, por exemplo, A e A''' (Figura 2.16).

Proposição 2. 10 ***(Composição de três reflexões em eixos nem paralelos e nem concorrentes):*** Sejam φ_r , φ_s e φ_t reflexões em torno das retas r, s e t, respectivamente. Se r, s e t são retas distintas que não são paralelas nem concorrentes entre si (simultaneamente), então $\varphi = \varphi_r \circ \varphi_s \circ \varphi_t$ é uma reflexão com deslizamento.

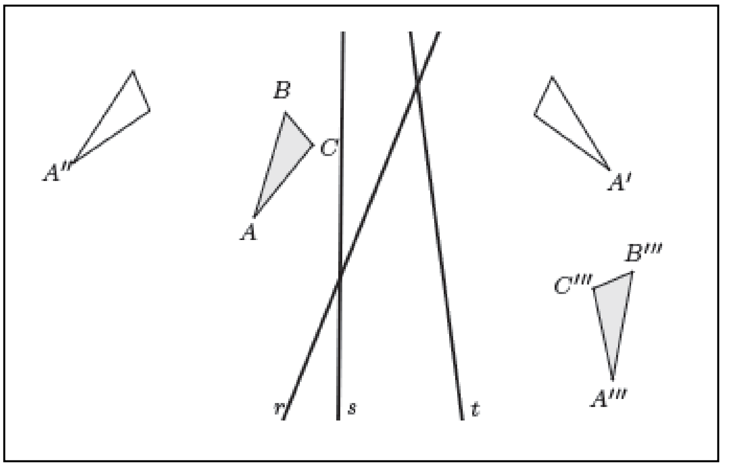


Figura 2.17: Reflexão em torno de três retas nem paralelas nem concorrentes.

Demonstração: Consideremos as retas r e s interceptando-se num ponto P. Por hipótese $P \notin t$. Seja l a reta perpendicular a t passando por P, e Q o ponto de interseção de l e t (Figura 2.18).

De maneira análoga ao que foi feito na demonstração da Proposição acima (Proposição 2.9) usando o Lema 2.1, temos que existe uma única reta u que passa por P tal que $\varphi_r \circ \varphi_s = \varphi_u \circ \varphi_l$. Assim,$\varphi_r \circ \varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_u \circ \varphi_l \circ \varphi_t$.

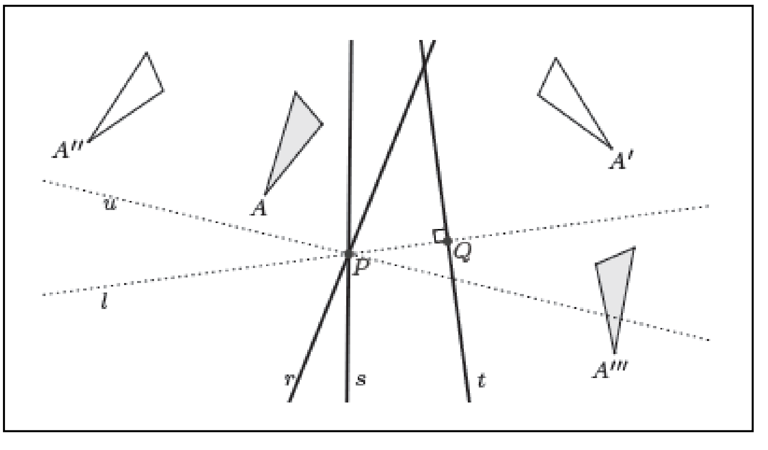


Figura 2.18: Retas u e l em reflexões em torno de três retas nem paralelas nem concorrentes.

Seja agora v a reta perpendicular a u que passa por Q e m a reta perpendicular a v que passa por Q (Figura 2.19). Pela Proposição 2.4 temos que $\varphi_l \circ \varphi_t = \varphi_m \circ \varphi_v$ é uma rotação de $180°$ (ou $2.90°$), então $\varphi_r \circ \varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_u \circ \varphi_l \circ \varphi_t = \varphi_u \circ \varphi_m \circ \varphi_v$.

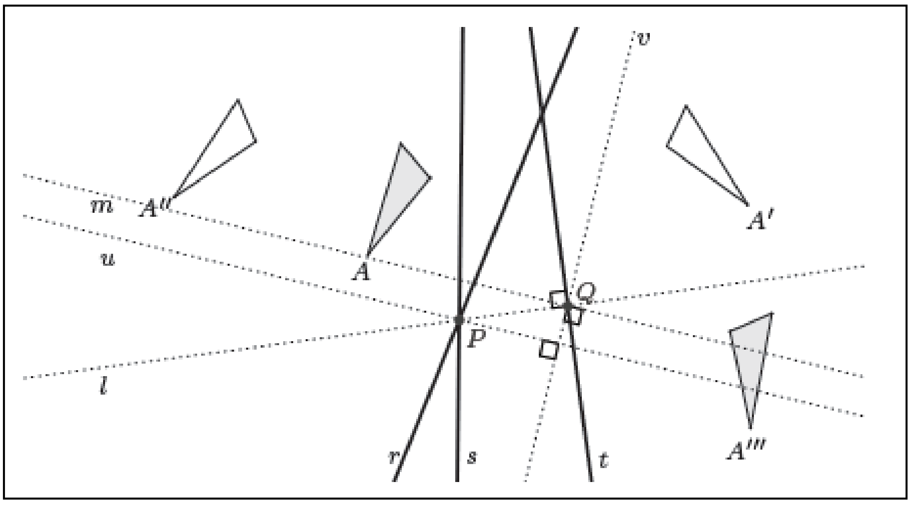


Figura 2.19: Retas m e v nas três reflexões.

Como as retas u e m são retas paralelas (pois ambas são perpendiculares a reta v), então pela Proposição 2.8, temos que $\varphi_u \circ \varphi_m$ é uma translação por um vetor $\vec{w}$ perpendicular as retas u e m. Isto é, $\tau_{\vec{w}} = \varphi_u \circ \varphi_m$.

Portanto, $\varphi_r \circ \varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_u \circ \varphi_m \circ \varphi_v = \tau_{\vec{w}} \circ \varphi_v$ que é, por definição, uma reflexão com deslizamento.

Agora, podemos provar que a reflexão, a translação, a rotação e a reflexão com deslizamento são de fato isometrias.

Proposição 2. 11: Toda reflexão em torno de uma reta é uma isometria.

<u>*Demonstração:*</u> Seja $\varphi_l: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a reflexão no plano em torno da reta l. Dados dois pontos A e B do plano, denotemos por $A' = \varphi_l(A)$ e $B' = \varphi_l(B)$.

Para mostrar que φ_l é uma isometria devemos mostrar que

$$d(A,B) = d\big(\varphi_l(A), \varphi_l(B)\big) = d(A',B').$$

Analisemos 4 possíveis situações, conforme a localização dos pontos A e B:

<u>Situação 1</u>: Ambos os pontos $A, B \in l$. Então $A = A'$ e $B = B'$ e de imediato se pode concluir que $d(A,B) = d(A',B')$.

<u>Situação 2:</u> Apenas um dos pontos A ou B pertence a reta l. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $B \in l$ (Figura 2.20).

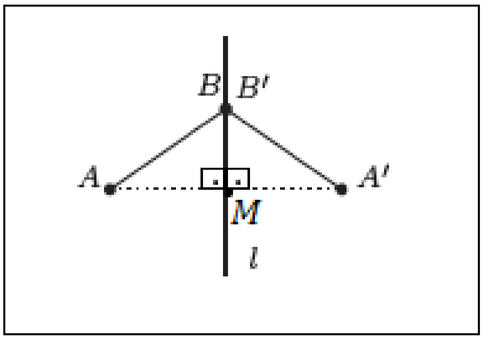


Figura 2.20: Reflexão do segmento de reta AB.

Consideremos o ponto $M \in l \cap \overleftrightarrow{AA'}$. Pelo critério de congruência de triângulos LAL, temos que $\Delta ABM \equiv \Delta A'B'M$. De fato:

$$\left.\begin{array}{r} \overline{AM} = \overline{MA'} (M\ \text{é o ponto médio de}\ AA') \\ \overline{MB} = \overline{MB'} \left(B \in l \Rightarrow B = B'\right) \\ A\widehat{M}B = B'\widehat{M}A' = 90°\left(l \perp \overleftrightarrow{AA'}\right) \end{array}\right\} \overset{LAL}{\Longrightarrow} \Delta ABM \equiv \Delta A'B'M$$

Assim, os lados AB e $A'B'$ tem a mesma medida e, portanto, $d(A,B) = d(A',B')$.

<u>Situação 3:</u> O segmento AB é perpendicular à reta l e a intersecta no ponto X (Figura 2.21).

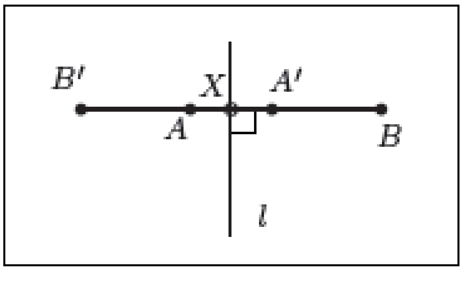


Figura 2.21: Reflexão do segmento de reta AB perpendicular a reta l.

Consideremos o sistema ortogonal de coordenadas tal que o ponto X é a origem e os eixos coordenados são as retas l e $\overleftrightarrow{AB}$. Assim, podemos escrever $A = (a, 0)$ e $B = (b, 0)$ e temos:

$$d(A,B) = \sqrt{(a-b)^2 + (0-0)^2} = |b-a|.$$

Pela definição de reflexão e pelas propriedades da mediatriz, segue que $A' = (-a, 0)$ e $B' = (-b, 0)$. Portanto,

$$d(A',B') = |-b-(-a)| = |-b+a| = |b-a| = d(A,B).$$

<u>Situação 4</u>: Os pontos $A, B \notin l$ e o segmento AB não é perpendicular à reta l. Nesta situação ainda temos que considerar dois casos: os pontos A e B estão do mesmo lado ou em lados opostos de l (Figura 2.22).

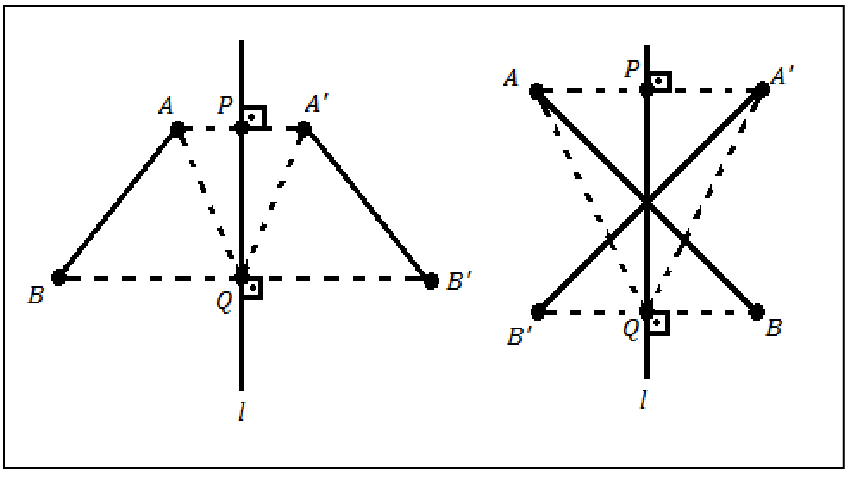


Figura 2.22: Reflexão do segmento de reta AB na reta l.

Suponhamos que A e B estão do mesmo lado de l. Sejam P e Q as interseções dos segmentos de reta AA' e BB' com l, respectivamente. Então $P \neq Q$, pois o segmento de reta AB não é perpendicular à reta l. Considere os triângulos APQ e $A'PQ$, note que o segmento PQ é lado comum aos dois triângulos. Como $P \in l$ e l é a mediatriz do segmento de reta AA', segue que $\overline{AP} = \overline{PA'}$ e $A\hat{P}Q = A'\hat{P}Q = 90°$. Logo os triângulos APQ e $A'PQ$ são congruentes (LAL).

Assim, $\overline{AQ} = \overline{A'Q}$ e $A\hat{Q}P = A'\hat{Q}P = \alpha$.

Como l é a mediatriz do segmento BB', então $B\hat{Q}P = B'\hat{Q}P = 90°$. Desse modo, $A\hat{Q}B = A'\hat{Q}B' = 90° - \alpha$.

Sendo $\overline{BQ} = \overline{B'Q}$, $\overline{AQ} = \overline{A'Q}$ e $A\hat{Q}B = A'\hat{Q}B'$, então os triângulos ABQ e $A'B'Q$ são congruentes (LAL).

Assim os lados AB e $A'B'$ tem mesma medida e, portanto, $d(A, B) = d(A', B')$.

A demonstração para o caso em que A e B estão em lados opostos a l, é análoga observando que $A\hat{Q}B = A'\hat{Q}B' = 90° + \alpha$.

Proposição 2. 12: Toda rotação é uma isometria.

<u>Demonstração</u>: Vimos que a rotação é a composição de duas reflexões em torno de retas concorrentes. Usando a Proposição anterior (2.11) e o fato que a composição de isometrias é uma isometria (Proposição 2.1), concluímos que a rotação é uma isometria.

Proposição 2. 13: Toda translação é uma isometria.

<u>*Demonstração*</u>*:* A demonstração de que toda translação é uma isometria decorre dos seguintes fatos: toda translação é a composição de duas reflexões sucessivas sobre eixos paralelos; a reflexão é uma isometria e a composição de isometrias é uma isometria.

Proposição 2. 14: Toda reflexão com deslizamento é uma isometria.

<u>*Demonstração*</u>: Como a reflexão com deslizamento é a composição de uma reflexão com uma translação e cada uma destas é uma isometria, temos que a reflexão com deslizamento também é uma isometria.

2. 2. 3 CLASSIFICAÇÃO DAS ISOMETRIAS

Pode-se mostrar que os tipos de isometrias apresentados na seção 2.2.1 são os únicos tipos existentes. Mais precisamente, temos:

Teorema 2. 1 Existem apenas quatro tipos de isometria $\varphi: \Pi \longrightarrow \Pi$ do plano Π, além da aplicação identidade, a saber: translação, rotação, reflexão e reflexão com deslizamento.

Para a prova do teorema acima precisamos dos seguintes resultados:

Lema 2. 2: Uma isometria definida sobre uma reta r, $\varphi: r \to r$, que possui dois pontos fixos distintos, é a aplicação identidade.

<u>*Demonstração*</u>*:* Sejam A e B pontos de r fixados pela φ distintos, ou seja, $\varphi(A) = A$ e $\varphi(B) = B$, com $A \neq B$. Suponha φ não é a aplicação identidade, ou seja, existe um ponto $X \in r$ tal que $X' = \varphi(X) \neq X$. Então, como $d(A, X) = d\big(\varphi(A), \varphi(X)\big) = d(A, X')$, temos que A é o ponto médio do segmento XX'. Fazendo o mesmo raciocínio para B, concluímos que B também o ponto médio do segmento XX'. Logo $A = B$, o que nos dá uma contradição. Isto mostra que uma isometria $\varphi: r \to r$ diferente da identidade possui no máximo um ponto fixo.

Proposição 2. 15: Sejam $\rho, \varphi: r \to r$ isometrias sobre a reta r. Se existirem pontos $A \neq B$ em r tais que $\rho(A) = \varphi(A)$ e $\rho(B) = \varphi(B)$ então $\rho = \varphi$, isto é, $\rho(X) = \varphi(X)$, para todo $X \in r$.

<u>*Demonstração*</u>*:* Nesse caso, a isometria $\phi = \varphi^{-1} \circ \rho: r \to r$ é tal que $\phi(A) = A$ e $\phi(B) = B$. Assim, pelo Lema 2.2 acima, temos que ϕ é a aplicação identidade, ou seja, $\rho = \varphi$.

Lema 2. 3: Se uma isometria definida sobre um plano Π, $\varphi: \Pi \longrightarrow \Pi$, possui três pontos fixos não colineares, então φ é a aplicação identidade.

<u>*Demonstração*</u>*:* Sejam A, B e C pontos não colineares do plano Π, tais que $\varphi(A) = A$, $\varphi(B) = B$ e $\varphi(C) = C$. Considere as retas $r = AB$ e $s = AC$.

A imagem da reta r pela isometria φ é a reta que passa pelos pontos $\varphi(A) = A$ e $\varphi(B) = B$. Pela Proposição 2.3 temos que $\varphi(r) = r$.

Assim, a restrição $\varphi_{|r}$ é uma isometria da reta r, com dois pontos fixos distintos A e B. Pelo Lema 2.2, temos que $\varphi(X) = X$ para todo $X \in r$. Analogamente prova-se que $\varphi(Y) = Y$ para todo $Y \in s$.

Considere Z um ponto qualquer de Π. Seja t a reta que passa por Z e intersecta r e s nos pontos X e Y, respectivamente (Figura 2.23). Como $\varphi(X) = X$ e $\varphi(Y) = Y$, temos que φ fixa todos pontos da reta t. Em particular, $\varphi(Z) = Z$. Como Z é um ponto arbitrário de Π, segue que φ é a aplicação identidade.

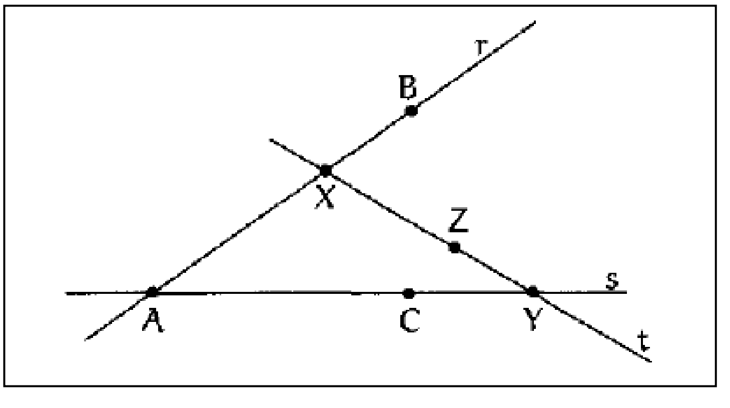


Figura 2.23: Isometria φ.

Proposição 2. 16: Sejam $\rho, \varphi: \Pi \longrightarrow \Pi$ isometrias definidas sobre o plano Π. Se existirem em Π três pontos não colineares A, B e C tais que $\rho(A) = \varphi(A)$, $\rho(B) = \varphi(B)$ e $\rho(C) = \varphi(C)$ então $\rho = \varphi$, isto é, $\rho(X) = \varphi(X)$, para todo $X \in \Pi$.

<u>Demonstração:</u> Considerando as hipóteses acima, a isometria $\varphi^{-1} \circ \rho: \Pi \longrightarrow \Pi$ deixa fixo os pontos A, B e C. Assim, pelo Lema 2.3 acima, $\varphi^{-1} \circ \rho$ é a aplicação identidade. Portanto $\rho = \varphi$.

Finalmente, podemos demonstrar o Teorema 2.1.

<u>Demonstração do Teorema:</u> Seja $\varphi: \Pi \longrightarrow \Pi$ uma isometria diferente da identidade. Então existe um ponto $A \in \Pi$ tal que $\varphi(A) = A' \neq A$. Seja $A'' = \varphi(A')$. Assim temos que $\overline{AA'} = \overline{A'A''}$. Temos três casos a considerar.

<u>Primeiro caso</u>: A, A' e A'' são não colineares (Figura 2.24).

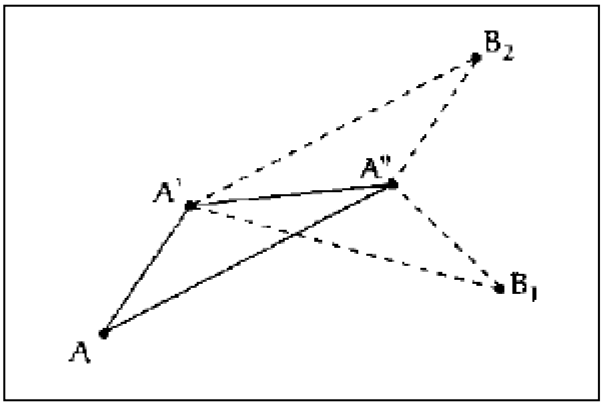


Figura 2.24: A, A' e A'' não colineares.

A imagem do triângulo $AA'A''$ pela isometria φ é um triângulo que tem A' e A'' como vértices. Como os lados desse novo triângulo têm medida iguais às dos lados do triângulo $AA'A''$, existem duas posições possíveis, B_1e B_2, para o terceiro vértice, conforme ele e o ponto A estejam ou não do mesmo lado da reta $A'A''$.

Na primeira hipótese, o ponto $B_1 = \varphi(A'')$ forma com os pontos A, A' e A'' a poligonal convexa $AA'A''B_1$ (Figura 2.25).

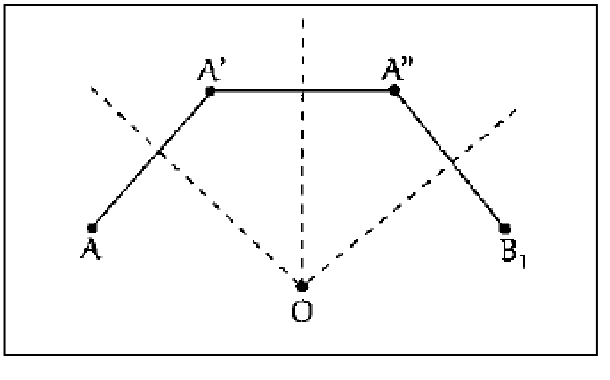


Figura 2.25: Poligonal convexa $AA'A''B_1$.

Os lados dessa poligonal têm a mesma medida e os ângulos $A\widehat{A'}A''$ e $A'\widehat{A''}B_1$ são iguais, logo ela pode ser inscrita numa circunferência de raio $\overline{OA}$, cujo centro O é o ponto de interseção das mediatrizes dos segmentos $AA', A'A''$ e $A''B_1$.

Seja $O' = \varphi(O)$. Então, como $\overline{OA} = \overline{OA'} = \overline{OA''}$ temos que $\overline{O'A'} = \overline{O'A''} = \overline{O'B_1}$, logo O' pertence às mediatrizes dos segmentos $A'A''$ e $A''B_1$. Donde se conclui que $O' = O$.

Assim, se considerarmos a rotação $\mathcal{R}_{\alpha,O}$ de centro O e ângulo $\alpha = A\hat{O}A'$, teremos $\mathcal{R}_{\alpha,O}(A) = A' = \varphi(A)$, $\mathcal{R}_{\alpha,O}(A') = A'' = \varphi(A')$ e $\mathcal{R}_{\alpha,O}(A'') = B_1 = \varphi(A'')$. Segue da Proposição 2.16 que $\varphi = \mathcal{R}_{\alpha,O}$, portanto φ é uma rotação.

Na segunda hipótese temos um paralelogramo no qual AA' e $A''B_2$ são lados opostos e $A'A''$ é uma diagonal (Figura 2.26).

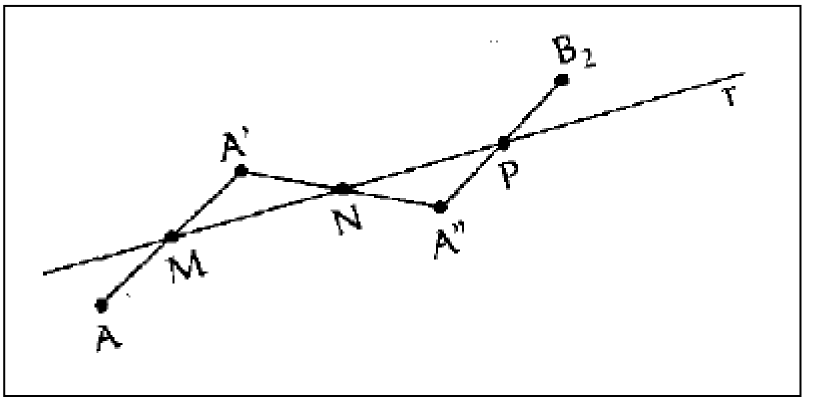


Figura 2.26: Poligonal $AA'A''B_2$.

Assim, os pontos médios M, P e N desses três segmentos estão sobre uma reta r. Se considerarmos a isometria $\psi = \tau_{MN} \circ \varphi_r$, composta da translação τ_{MN} com a reflexão em torno da reta r, veremos que ψ e φ coincidem nos pontos não colineares A, A' e A'', logo $\psi = \varphi$, pela Proposição 2.16. Concluímos então que φ é uma reflexão com deslizamento. Isso encerra a discussão do primeiro caso.

<u>Segundo caso</u>: A, A' e A'' são pontos distintos e colineares (Figura 2.27).

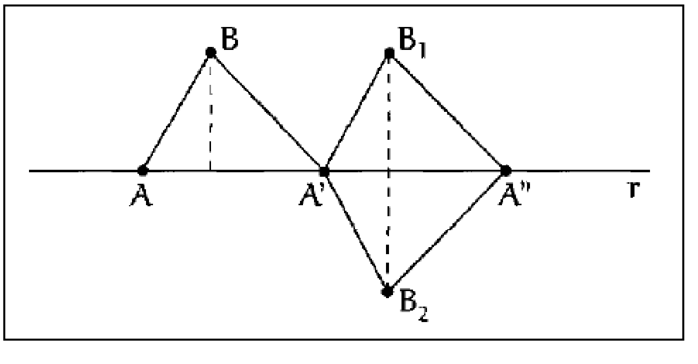


Figura 2.27: A, A' e A'' são distintos e colineares.

Como $\overline{AA'} = \overline{A'A''}$, vemos que A' é o ponto médio do segmento AA''. A reta r, que contém os três pontos dados, é transformada em si mesma pela isometria φ. Além disso φ coincide, nos pontos A e A', com a translação $\tau_{AA'}: r \to r$. Segue da Proposição 2.15 que, em todos os pontos de r, φ coincide com essa translação. Consideremos um ponto B fora da reta r.

O triângulo $AA'B$ é transformado pela isometria φ noutro triângulo que tem A' e A'' como vértices e lados com as mesmas medidas que os de $AA'B$. Existem duas posição possíveis, B_1 e B_2, para o terceiro vértice desse triângulo, conforme ele e B estejam do mesmo lado ou em lados opostos da reta r. Na primeira hipótese, AB e $A'B_1$ são lados opostos de um paralelogramo. Logo, considerando a translação $\tau_{AA'}: \Pi \to \Pi$, vemos que ela coincide com a isometria φ nos pontos não colineares A, A' e B. Segue da Proposição 2.16 que $\varphi = \tau_{AA'}$. Logo φ é uma translação.

Na segunda hipótese, como o ponto B_2 é o simétrico de B_1 em relação a reta r, considerando a reflexão com deslizamento $\psi = \tau_{AA'} \circ \varphi_r: \Pi \to \Pi$, vemos que $\psi(A) = \varphi(A) = A'$, $\psi(A') = \varphi(A') = A''$ e $\psi(B) = \varphi(B) = B_2$. Logo $\psi = \varphi$, pela Proposição 2.16. Assim φ é uma reflexão com deslizamento, o que encerra a discussão do segundo caso.

<u>Terceiro caso</u>: $A = A''$ (Figura 2.28).

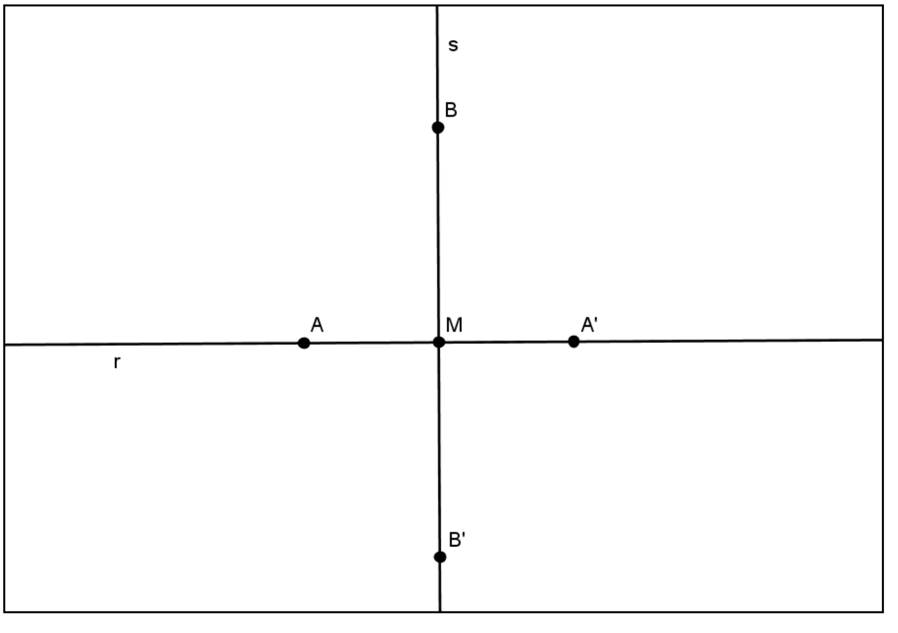


Figura 2.28: $A = A''$.

Neste caso, a isometria φ transforma o segmento de reta AA' em si mesmo, logo $\varphi(M) = M$ se M é o ponto médio de AA'. A mediatriz s desse segmento é então transformada em si mesma por φ.

Seja B um ponto dessa mediatriz, diferente de M. Há duas possibilidades: ou $\varphi(B) = B$ ou $\varphi(B) = B'$, onde B' é o ponto simétrico de B em relação à reta $r = \overleftrightarrow{AA'}$. Na primeira hipótese, φ coincide com a reflexão $\varphi_s: \Pi \to \Pi$ nos pontos A, A' e B, logo $\varphi = \varphi_s$. Na segundo hipótese, φ coincide com a rotação $\mathcal{R}_{180^o,M}: \Pi \to \Pi$ em torno do ponto M, com ângulo de 180^0, nos pontos não colineares A, B e M. Logo $\varphi = \mathcal{R}_{180^o,M}$. Portanto, neste terceiro caso, φ é uma translação ou uma rotação de 180^0 (simetria em torno de um ponto).

2. 3 ISOMETRIAS NO ESPAÇO

Nesta seção iremos considerar isometrias definidas sobre o espaço euclidiano tridimensional. Vimos anteriormente que considerando uma aplicação $\sigma: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ela é uma isometria quando σ preserva a distância entre pontos do $\mathbb{R}^3$, isto é, quando $d(\sigma(X), \sigma(Y)) = d(X, Y)$ para quaisquer $X, Y \in \mathbb{R}^3$ (como antes, $d(X, Y)$ representa a distância entre os pontos X e Y, ou seja; o comprimento $\overline{XY}$ do segmento de reta XY).

Proposição 2. 17: Uma isometria $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transforma pontos colineares em pontos colineares. Em particular, φ transforma reta em reta.

<u>*Demonstração:*</u> Dados $A, B, C \in \mathbb{R}^3$, com $A \neq B$. Sejam $A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$ e $C' = \varphi(C)$. Se o ponto C pertence ao segmento AB então $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)$, logo $d(A', B') = d\big(\sigma(A), \sigma(B)\big) = d(A, B) = d(A, C) + d(C, B) = d\big(\sigma(A), \sigma(C)\big) + d\big(\sigma(C), \sigma(B)\big) = d(A', C') + d(C', B')$. Portanto $C' \in A'B'$. Assim, a isometria T transforma pontos colineares em pontos colineares.

Sejam r a reta que contém os pontos A e B, e r' a reta que contém A' e B', vemos então que $\varphi(r) \subset r'$, logo a restrição de φ a r é uma isometria entre as retas r e r'. Pela Proposição 2.2 temos que $\varphi(r) = r'$. Portanto a imagem de uma reta por meio de uma isometria $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma reta.

Proposição 2. 18: A imagem de um plano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ por uma isometria $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um plano $\Pi' \subset \mathbb{R}^3$.

<u>*Demonstração:*</u> Sejam r e s retas no plano Π que se intersectam no ponto A. As imagens dessas retas pela isometria φ são retas r' e s' que se intersectam no ponto

$A' = \varphi(A)$.

Seja Π' o plano determinado por r' e s'. Afirmamos que $X \in \Pi \Rightarrow X' = \varphi(X) \in \Pi'$. De fato, dado um ponto arbitrário X no plano Π, considere a reta $t \subset \Pi$ que passa por X, tal que t não seja paralela a r nem a s e que não passe por A. A reta t intersecta r no ponto Y e s no ponto Z, com $Y \neq Z$ (Figura 2.29).

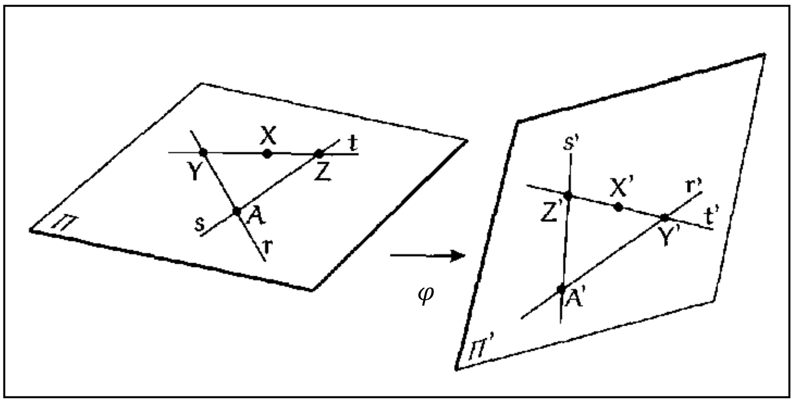


Figura 2.29: A isometria φ aplicada em um plano Π.

Logo sua imagem t' é uma reta em $\mathbb{R}^3$ que contém X' e passa pelos pontos $Y' = \varphi(Y)$ e $Z' = \varphi(Z)$, pois $Y' \in r' \subset \Pi'$ e $Z' \in s' \subset \Pi'$. Como Y' e Z' pertencem a Π', segue-se que $t' \subset \Pi'$, donde $X' \in \Pi'$. Assim $\varphi(\Pi) \subset \Pi'$. A restrição de φ a Π é uma isometria entre Π e Π'. Como toda isometria entre planos é sobrejetora (Proposição 2.5) temos $\varphi(\Pi) = \Pi'$.

Considere r e s retas contidas em $\mathbb{R}^3$. Dizemos que r e s são *retas perpendiculares* quando se interceptam num ponto A e, além disso, tomando-se dois pontos $B \in r$ e $C \in s$, vale a relação de Pitágoras $d(A,B)^2 + d(A,C)^2 = d(B,C)^2$. Disso segue que, toda isometria $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transforma retas perpendiculares em retas perpendiculares.

Seja r uma reta que intercepta o plano Π no ponto A (mas que não está contida em Π). Dizemos que r é *perpendicular* a esse plano se r for perpendicular a toda reta de Π que passa por A. Para que isso ocorra, basta que r seja perpendicular a duas retas distintas contidas em Π, que passam por A (Figura 2.30).

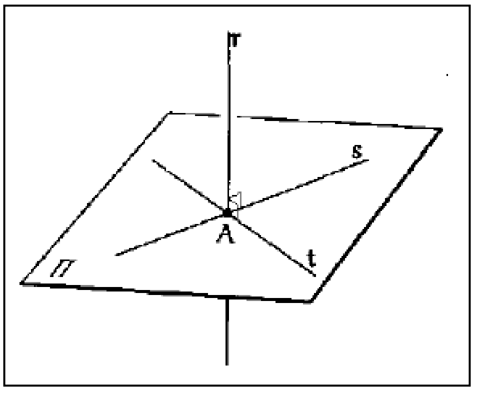


Figura 2.30: Reta r perpendicular ao plano Π.

Proposição 2. 19: Seja $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma isometria. Se a reta r é perpendicular ao plano Π então sua imagem $r' = \varphi(r)$ é perpendicular ao plano $\Pi' = \varphi(\Pi)$.

Demonstração: Seja A ponto o de interseção de r com Π. Considere s e t retas distintas contidas em Π, passando pelo ponto A. Chamemos $r' = \varphi\ (r)$ e $s' = \varphi(s)$. Então temos que r' e s' são retas distintas no plano Π', passando por $A' = \varphi(A)$. Como r é perpendicular a Π, segue que s e t são perpendiculares a r. Logo s' e t' são perpendiculares a r, portanto r' é perpendicular ao plano Π (Figura 2.31).

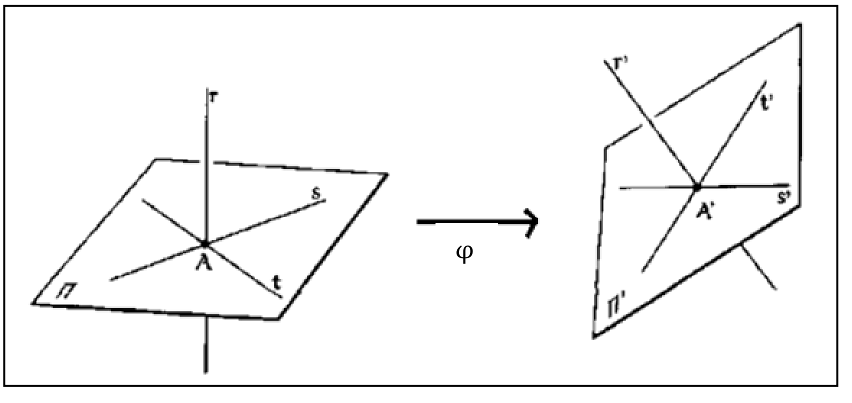


Figura 2.31: Retas r e r' perpendiculares aos planos Π e Π', respectivamente.

Proposição 2. 20: Toda isometria $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma aplicação bijetora, cuja inversa $\varphi^{-1}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é ainda uma isometria.

Demonstração: Sabemos que toda isometria é uma aplicação injetora. Provemos que φ é sobrejetora. Dado um ponto qualquer $X' \in \mathbb{R}^3$, a fim de obter um ponto $X \in \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(X) = X'$, consideremos um plano qualquer Π e chamamos de Π' sua imagem por φ. Se $X' \in \Pi'$ então existe $X \in \Pi$ tal que $\varphi(X) = X'$. Se $X' \notin \Pi'$, tomemos a reta r', perpendicular ao plano Π' passando por X' (Figura 2.32).

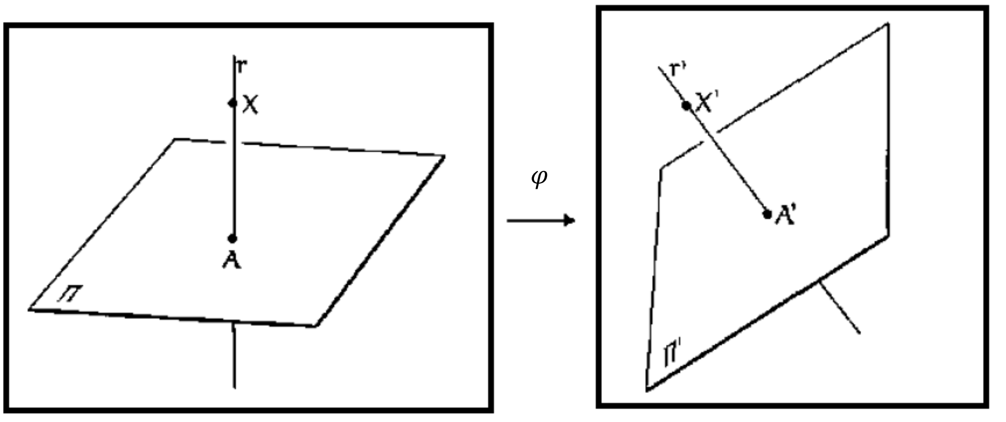


Figura 2.32: Aplicação φ sobrejetora.

Seja A' a interseção de r' com Π'. Como $\Pi' = \varphi(\Pi)$, então existe $A \in \Pi$ tal que $\varphi(A) = A'$. Seja r a reta perpendicular ao plano Π passando pelo ponto A. Segue-se da Proposição anterior (2.19) que $\varphi(r) = r'$. Como $X' \in r'$, existe um ponto $X \in r$ com $\varphi(X) = X'$. Logo φ é uma aplicação sobrejetora.

Vejamos que φ^{-1} também é uma isometria. Dados quaisquer $X, Y \in \mathbb{R}^3$ temos que $X = \varphi(\varphi^{-1}(X))$ e $Y = \varphi(\varphi^{-1}(Y))$. Assim,

$$d(X,Y) = d(\varphi(\varphi^{-1}(X)), \varphi(\varphi^{-1}(Y)) = d(\varphi^{-1}(X),\ \varphi^{-1}(Y)).$$

Portanto $\varphi^{-1}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma isometria.

2. 3. 1 TIPOS DE ISOMETRIAS NO ESPAÇO

Vejamos agora alguns exemplos de isometrias no espaço.

REFLEXÃO

Definição 2. 8: Seja $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ um plano. A *reflexão em torno de* Π é a aplicação $\varphi_\Pi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que associa a cada ponto $X \epsilon \mathbb{R}^3$ o ponto $X' = \varphi_\Pi(X)$, tal que Π é o plano mediador do segmento XX' (isto é, Π é um plano perpendicular ao segmento XX' que o intercepta no seu ponto médio). Isto significa que XX' é perpendicular a Π e, além disso, se $\{A\} = XX' \cap \Pi$ então $\overline{XA} = \overline{AX'}$. Então, para todo ponto $B \epsilon \Pi$ tem-se também $\overline{XB} = \overline{BX'}$ (Figura 2.33).

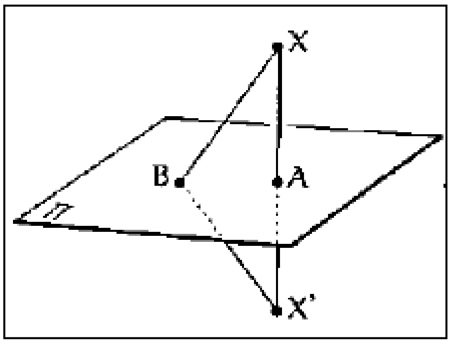


Figura 2.33: Reflexão de um ponto em torno de um plano.

Proposição 2. 21: A reflexão $\varphi_\Pi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma isometria.

<u>Demonstração</u>: Sejam X e Y pontos quaisquer do espaço, com $X' = \varphi_\Pi(X)$ e $Y' = \varphi_\Pi(Y)$. Se X e Y estão ambos em Π então $X' = X$ e $Y' = Y$, logo $d(X', Y') = d(X, Y)$. Se um desses pontos, digamos X, não está em Π, consideremos o plano Π' contendo a perpendicular XX' e o ponto Y. Seja $r = \Pi \cap \Pi'$ (Figura 2.34). Restrita ao plano Π', φ_Π coincide com a reflexão $\varphi_r: \Pi' \to \Pi'$, em torno da reta r. Assim, pela definição de reflexão no plano temos que $d(X', Y') = d(X, Y)$. Portanto φ_Π é uma isometria.

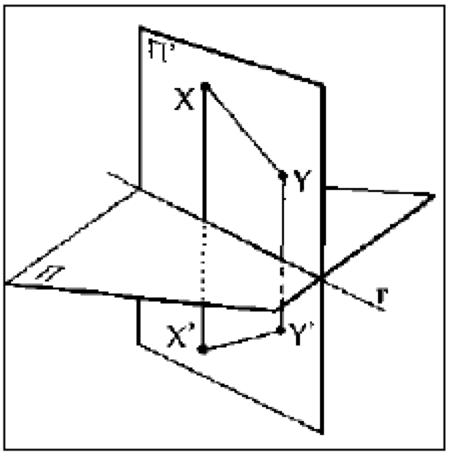


Figura 2.34: Reflexão de um segmento em torno de um plano.

ROTAÇÃO

Definição 2. 9: Sejam r uma reta e $\alpha = A\hat{O}B$ um ângulo cujo vértice O pertence a r e cujos lados estão sobre um plano Π perpendicular a r. Como na definição de rotação para o plano, o ângulo α é considerado orientado, isto é, subentende-se que OA é o primeiro lado e OB é o segundo lado do ângulo. Desta forma, definimos a *rotação de ângulo α em tomo da reta r* como a aplicação $\mathcal{R}_{\alpha,r}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que faz corresponder a cada ponto X o ponto $X' = \mathcal{R}_{\alpha,r}(X)$ (Figura 2.35) determinado pelas seguintes condições:

1. X' pertence ao plano Π que passa por X e é perpendicular a r;
2. se O é o ponto de interseção desse plano Π com r, tem-se $\overline{OX} = \overline{OX'}$;
3. o ângulo orientado $X\hat{O}X'$ é igual a α.

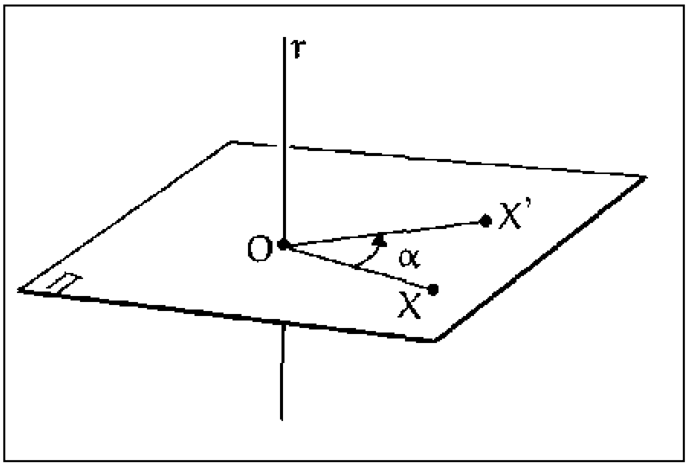


Figura 2.35: Rotação do ponto X em torno da reta r.

Proposição 2. 22: A rotação $\mathcal{R}_{\alpha,r}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de ângulo α em tomo da reta r é uma isometria.

<u>*Demonstração*</u>: Para provar que a rotação $\mathcal{R}_{\alpha,r}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma isometria, tomemos dois pontos arbitrários $X, Y \in \mathbb{R}^3$. Suponhamos $X' = \mathcal{R}_{\alpha,r}(X)$ e $Y' = \mathcal{R}_{\alpha,r}(Y)$. Mostremos que $\overline{X'Y'} = \overline{XY}$.

Seja Π o plano perpendicular a r que contém os pontos X e X'. Consideremos os pontos Y_0 e Y_0' projeções ortogonais sobre Π, dos pontos Y e Y', respectivamente.

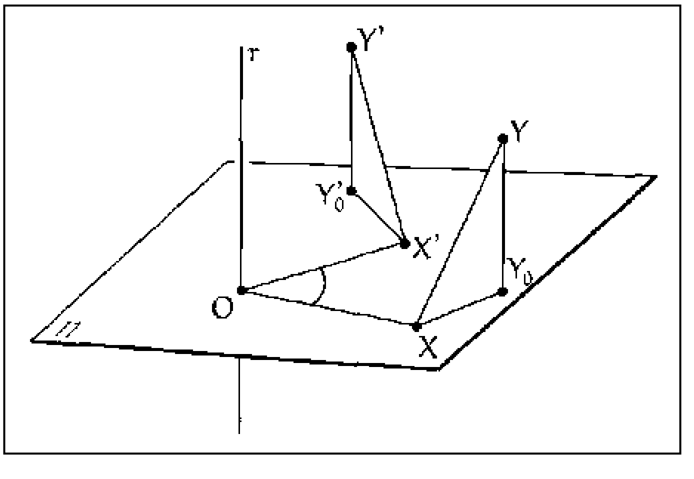


Figura 2.36: Rotação do segmento XY em torno da reta r.

O segmento XY é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são XY_0 e Y_0Y. Analogamente, $X'Y'$ é hipotenusa do triângulo retângulo $X'Y'Y_0'$, cujos catetos são $X'Y_0'$ e $Y'Y_0'$ (Figura 2.36). Ora, $\overline{X'Y_0'} = \overline{XY_0}$ porque $\mathcal{R}_{\alpha,r}$ restrita ao plano Π é uma isometria, é a rotação de centro $O = r \cap \Pi$ e ângulo α. Além disso, $\overline{YY_0} = \overline{Y'Y_0'}$, pois Y e Y' pertencem ao mesmo plano perpendicular a r. Assim, $\Delta XYY_0 \equiv \Delta X'Y'Y_0'$. Logo, $\overline{X'Y'} = \overline{XY}$ e, portanto a rotação é uma isometria.

TRANSLAÇÃO

Assim como no caso do plano, o conceito de translação $\tau: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ equivale ao de vetor no espaço. Recordemos esta noção. Dois segmentos AB e CD no espaço chamam-se *equipolentes* quando têm o mesmo comprimento, são paralelos (ou então colineares) e o sentido $A \to B$ coincide com o sentido $C \to D$ (Figura 2.37). Estas condições se resumem numa única: a de que os pontos médios dos segmentos AD e BC coincidam. Salientamos que, para falar em equipolência é necessário que se considerem segmentos orientados, ou seja, que se distinga entre AB e BA (e, naturalmente, entre CD e DC). Se AB e CD são equipolentes, escreve-se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ e diz-se que estes segmentos determinam o mesmo vetor $v = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

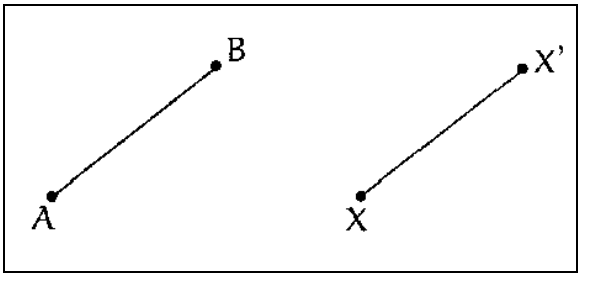


Figura 2.37: Segmentos equipolentes.

Quando $A = B$, considera-se o vetar nulo $0 = \overrightarrow{AA}$. Evidentemente, $\overrightarrow{XX} = 0$ para todo $X \in \mathbb{R}^3$.

Definição 2. 10: Sejam A e B pontos distintos do espaço. A *translação* $\tau_{AB}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é a aplicação que faz corresponder a cada ponto $X \in \mathbb{R}^3$ o ponto X' tal que $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AB}$, ou seja, tal que $\overline{XX'} = \overline{AB}$, XX' é paralelo a AB e o sentido de percurso $X \to X'$ coincide com o sentido $A \to B$ (Figura 2.38).

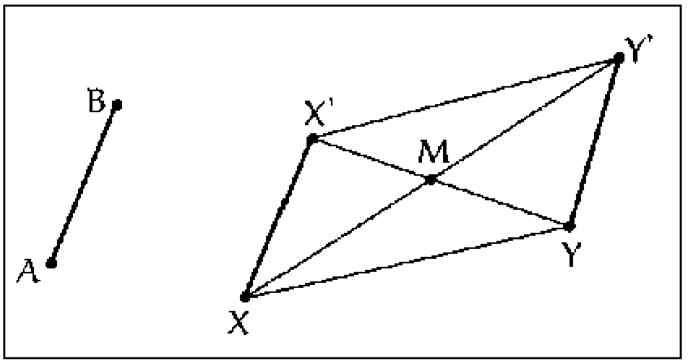


Figura 2.38: Translação do segmento $\overline{XY}$.

Observação 2. 9: Evidentemente, $\tau_{AB} = \tau_{CD}$ se, e somente se, os segmentos AB e CD são equipolentes (ou seja, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$). Podemos escrever τ_v em vez de τ_{AB} se $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

Proposição 2. 23: A translação $\tau_{AB}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma isometria.

<u>*Demonstração*</u>: Dados os pontos $X, Y \in \mathbb{R}^3$, com $X' = \tau_{AB}(X)$ e $Y' = \tau_{AB}(Y)$, temos $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{YY'}$. Logo os segmentos XX' e YY' são equipolentes, ou seja, os pontos médios de XY' e $X'Y$ coincidem. Isto significa também que $X'Y'$ e XY são equipolentes. Em particular, $\overline{X'Y'} = \overline{XY}$. Portanto, toda translação é uma isometria.

ISOMETRIA HELICOIDAL

Definição 2. 11: Uma *isometria helicoidal* $\sigma: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é a composta $\sigma = \tau_{AB} \circ \mathcal{R}_{\alpha,r} = \mathcal{R}_{\alpha,r} \circ \tau_{AB}$ de uma rotação de ângulo α em torno da reta r com uma translação τ_{AB}, onde o segmento AB é paralelo à reta r ou está contido nela (Figura 2.39).

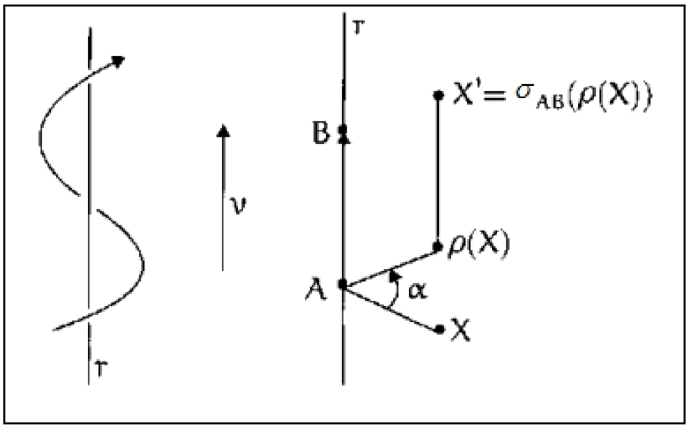


Figura 2.39: Isometria helicoidal.

Proposição 2. 24: A isometria helicoidal é uma isometria.

<u>*Demonstração*</u>: A isometria helicoidal $\sigma = \tau_{AB} \circ \mathcal{R}_{\alpha,r} = \mathcal{R}_{\alpha,r} \circ \tau_{AB}$, de fato, é uma isometria pois é a composta de duas isometrias.

REFLEXÃO COM DESLIZAMENTO

Definição 2. 12: A *reflexão com deslizamento* é definida como sendo a composta $\psi = \tau_{AB} \circ \varphi_\Pi = \varphi_\Pi \circ \tau_{AB}$, onde $\varphi_\Pi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é a reflexão em torno de um plano Π e o segmento AB é paralelo ao plano Π ou está contido nele (Figura2.40).

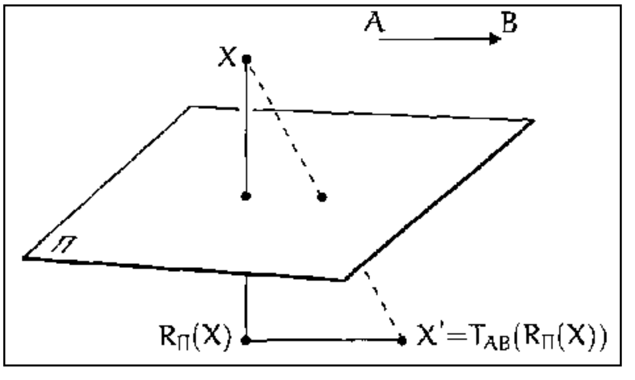


Figura 2.40: Reflexão com deslizamento do ponto X.

Proposição 2. 25: A reflexão com deslizamento é uma isometria.

<u>*Demonstração*</u>: A reflexão com deslizamento, é uma isometria pois é a composta de duas isometrias.

ROTAÇÃO REFLETIDA

Definição 2. 13: Uma *rotação refletida* $\phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é a composta $\phi = \varphi_\Pi \circ \mathcal{R}_{\alpha,r} = \mathcal{R}_{\alpha,r} \circ \varphi_\Pi$, onde φ_Π é a reflexão em torno de um plano Π e $\mathcal{R}_{\alpha,r}$ é a rotação de ângulo α em torno de uma reta r perpendicular a Π (Figura 2.41).

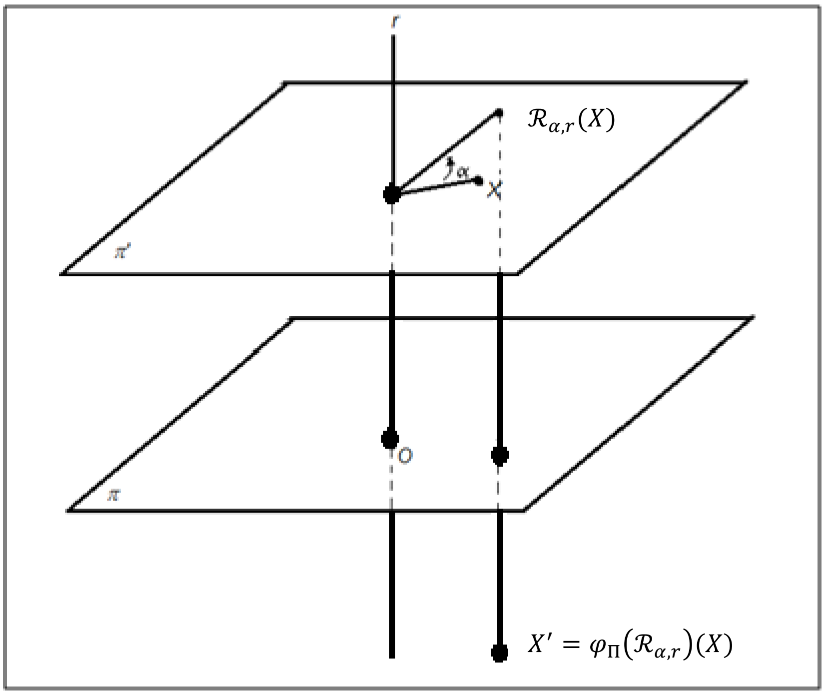


Figura 2.41: Rotação refletida do ponto X.

Observação 2. 10: Quando $\alpha = 180°$, a rotação refletida coincide com a simetria em torno do ponto O, onde O é a interseção de Π com r.

Proposição 2. 26: Uma rotação refletida $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma isometria.

Demonstração: Por ser a composta de duas isometrias, temos que a rotação refletida é uma isometria.

Vale ressaltar que existem apenas os seis tipos de isometrias no espaço que foram apresentados nesta seção. A demonstração de tal resultado não será feita neste trabalho, mas pode ser encontrada em [LIMA, 1996, p.72].

CAPÍTULO 3 - ATIVIDADE PROPOSTA EM SALA DE AULA

Neste capítulo iremos apresentar o desenvolvimento de duas atividades distintas e seus resultados. Tais atividades foram desenvolvidas no 2º semestre de 2013 em uma escola estadual pertencente à Diretoria de Ensino de São José do Rio Preto, situada no município de Onda Verde, São Paulo. Essas atividades foram realizadas com três turmas: 5ª série/6º ano (turmas A e B), e 6ª série/7º ano (turma B).

3. 1 ATIVIDADE PROPOSTA NA 5ª SÉRIE/6º ANO (TURMAS A E B)

Antes de desenvolver a atividade proposta na sala de aula, foi entregue à coordenação da escola, um projeto da atividade proposta. Esse projeto apresenta, de maneira detalhada, objetivos, conteúdos envolvidos, materiais utilizados, forma de avaliação e de recuperação da atividade. Veremos nas subseções a seguir esse projeto, seu desenvolvimento e sua conclusão.

As malhas utilizadas bem como as fotos do desenvolvimento e da conclusão do projeto serão colocadas anexas.

3. 1. 1 PROJETO

TEMA ABORDADO: Isometria em desenhos.

OBJETIVO GERAL: Aprender conceitos básicos de isometria por meio de desenhos realizados em diferentes tipos de malhas.

COMPETÊNCIAS

- Compreender as propriedades dos objetos e a sua posição relativa e desenvolver o raciocínio espacial por meio de construções e de formas.
- Compreender e fazer uso das medidas, ou de sistemas convencionais, para o cálculo de perímetros e áreas entre as diferentes unidades de medida.

HABILIDADES

- Identificar formas planas e espaciais em situações do cotidiano e por meio de suas representações em desenhos e malhas.
- Identificar figuras espaciais a partir de suas planificações.
- Determinar perímetro e área de uma figura utilizando composição e decomposição de figuras.
- Identificar simetria axial e rotação nas representações dos objetos e das figuras geométricas.
- Usar desenhos de escalas para resolver problemas do cotidiano que incluam distância.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Ao término da atividade o aluno deverá:

- reconhecer simetria axial (reflexão em torno de uma reta), rotação e translação;
- identificar as diferentes malhas utilizadas;
- reconhecer as figuras geométricas formadas no desenho;
- diferenciar as unidades de medida para comprimento e área;
- compreender os conceitos de perímetro e área.

JUSTIFICATIVA DE SE TRABALHAR DETERMINADO CONTEÚDO

Mostrar ao educando que através de diferentes tipos de malhas conseguimos formar figuras geométricas trabalhadas anteriormente. Além disso, fazer com que o educando reconheça padrões construídos por ele mesmo no seu desenho.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

1º) Distribuir um tipo de malha para cada aluno, dentre os seis diferentes tipos de malhas que o professor levou para a sala de aula (vide modelos no Anexo).
2º) Questionar os alunos sobre as possibilidades de figuras geométricas que podem ser formadas em sua malha.
3º) Mostrar alguns exemplos de malhas coloridas, chamando a atenção para o capricho e a criatividade.
4º) Solicitar que eles pintem a malha com diversas cores, podendo formar ou não um desenho.

5º) Questionar os alunos com relação aos seus desenhos (o que ele pensou, se ele percebeu que determinada figura “girou”, se dividirmos a figura em 2 partes uma delas é “a imagem da outra na frente do espelho”, etc.).
6º) Pedir para que cada aluno meça o perímetro de uma das figuras formadas em seu desenho utilizando como unidade de comprimento o lado da figura da malha. Em seguida pedir que determine a área dessa mesma figura utilizando como unidade de área a figura geométrica da malha escolhida.
7º) Apresentar uma palestra sobre as diversas pavimentações em locais turísticos ao redor do mundo e as obras do artista gráfico holandês Maurits Cornelis Escher.

RECURSOS MATERIAIS E TECNOLÓGICOS

- Malhas
- Lápis de cor
- Tesoura
- Cola
- Computador
- Projetor

AVALIAÇÃO

A avaliação será feita pelo capricho e pela criatividade do trabalho apresentado pelo aluno, e através de sua participação durante as aulas quando forem realizadas perguntas pelos colegas de sala e pelo professor, averiguando se o educando atingiu os objetivos propostos.

RECUPERAÇÃO

Será proposta aos alunos que não atingiram (ou atingiram parcialmente) os objetivos propostos, uma atividade extraclasse, correção de parte do trabalho (6º passo da metodologia) e aperfeiçoamento do trabalho.

3. 1. 2 DESCRIÇÃO

Para o desenvolvimento da atividade proposta, foi necessário rever nas turmas de 5ª série/6º ano, as diferenças entre figuras planas e espaciais, suas formas e classificações.

Após essa retomada de conteúdo, os alunos foram questionados se haveriam outras formas de azulejarmos o chão da sala de aula, com quais figuras planas poderíamos fazer essa pavimentação e se poderíamos utilizar mais de uma figura plana nela. Daí foram exibidos 6 tipos de malhas sendo uma composta por hexágonos regulares, uma mista composta por quadrados, triângulos equiláteros e hexágonos regulares, uma quadriculada e três triangulares sendo uma composta por triângulos equiláteros, outra por triângulos isósceles e uma terceira por triângulos escalenos, ilustrando outras formas de pavimentarmos o plano, onde os alunos puderam identificar algumas formas geométricas utilizadas nas malhas.

Em seguida, distribuímos uma malha por aluno, explicando os critérios de avaliação do trabalho (beleza, capricho e criatividade). Então solicitamos lhes que buscassem colorir as malhas como se fossem azulejar o chão da escola e que para isso eles deveriam estabelecer um padrão.

A primeira turma a receber as orientações do trabalho foi a turma B. Solicitamos que o trabalho deveria começar na sala de aula e ser concluído em casa, no prazo de três dias, pois assim eles teriam o final de semana para realizarem a atividade. Na segunda-feira, ao recolher os trabalhos, percebemos que a maioria deles não estava de acordo com o solicitado (alguns não haviam entendido a proposta e outras fizeram sem capricho). Então, mostramos a eles alguns exemplos de trabalhos e propusemos que eles refizessem a atividade em sala de aula. Dessa forma podemos obter o trabalho desejado.

A turma A executou o trabalho proposto sem maiores problemas, pois houve uma grande troca de informações entre os alunos das duas turmas.

Com o término do preenchimento das malhas, foi solicitado aos alunos que utilizassem certa unidade de medida de comprimento e de área e determinassem o perímetro e a área das figuras formadas em seus desenhos.

A atividade foi concluída com uma palestra, apresentada pelo professor para todas as turmas, a respeito das diversas pavimentações em locais turísticos, ao redor do mundo, e das obras do artista gráfico holandês Maurits Cornelis Escher.

3. 1. 3 CONCLUSÃO

Nas turmas de 5ª série/6º ano a atividade levou um tempo de conclusão maior do que o esperado. Como inicialmente a ideia era de que o trabalho fosse realizado em casa, havíamos preparado quatro aulas para executá-lo, sendo duas aulas para a retomada de conteúdo das figuras geométricas, uma aula para os questionamentos e uma aula para orientação do trabalho.

No entanto, não houve entendimento e comprometimento (empenho e capricho) da 1ª turma na realização do trabalho em casa. Por isso, o trabalho foi refeito durante as aulas para que os objetivos propostos pudessem ser atingidos. Isso demandou mais 6 aulas, sendo 1 aula para questionar os trabalhos entregues, fazendo uma nova orientação de como deveria ser realizado o trabalho, 4 aulas para a realização do trabalho e 1 aula para o trabalho com área e perímetro. Logo, a atividade proposta levou 10 aulas com a turma B e aproveitando a experiência obtida com a turma B, consegui reduzir para 8 aulas a execução do trabalho com a turma A.

No decorrer da atividade, podemos perceber um interesse muito grande dos alunos em realizar as atividades com as malhas, uma vez que, os alunos que acabavam o trabalho antes dos demais pediam para fazer mais de uma atividade. Além disso, nos trabalhos com mais detalhes, aqueles que já haviam terminado de colorir a sua malha e não queriam fazer outra, acabavam ajudando os colegas que não haviam terminado de colorir.

Também pude perceber um maior empenho e entendimento dos alunos com algum tipo de deficiência (dislexia, discalculia e retardamento mental). Esses alunos realizaram trabalhos bastante criativos e caprichados. Quanto ao cálculo do perímetro e da área dos desenhos realizados, para algumas crianças foi fácil determinar o seu cálculo (nos desenhos mais simples) em outros os alunos tiveram dificuldade no cálculo, pois precisaram determiná-lo a partir de uma figura que era parte do desenho.

O encerramento da atividade deu-se com uma palestra, realizada juntamente com as duas turmas de 5ª série/6º ano e a turma da 6ª série/7º ano. Durante a palestra os alunos mostraram-se bastante interessados e ficaram maravilhados com a relação existente entre a natureza, a matemática e as obras artísticas ao redor do mundo. Os alunos mantiveram a atenção e um grande interesse na apresentação, pelo fato dos alunos da 6ª série/7º ano estarem juntos, participando com explicações e comentários a respeito dos eixos de simetria, de rotação e na questão do "reflexo da figura no espelho".

Portanto, todos os objetivos propostos foram atingidos, apesar de ultrapassar o tempo programado e da dificuldade na escolha de figuras para o cálculo de áreas e perímetros.

3. 2 ATIVIDADE PROPOSTA NA 6ª SÉRIE/7º ANO (TURMA B)

Essa atividade não foi proposta para a turma A, pois são professores distintos entre as turmas. Além disso, o professor de matemática da outra turma já havia aplicado outra atividade desenvolvendo esse conteúdo.

As fotos da execução e da conclusão do projeto serão colocadas anexas.

3. 2. 1 PROJETO

TEMA ABORDADO: Isometria na natureza e nas obras humanas.

OBJETIVO GERAL: Rever conceitos básicos de isometria por meio da observação da natureza e de obras humanas, refletindo no conceito de números com seus respectivos simétricos. A partir daí, o educando deverá associar as operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão) com os números inteiros.

COMPETÊNCIAS

- Compreender as propriedades dos objetos e a sua posição relativa.
- Desenvolver o raciocínio quantitativo e o pensamento funcional, isto é, o pensamento em termos de relações e a variedade de suas representações, incluindo as simbólicas, as algébricas, as gráficas, as tabulares e as geométricas.

HABILIDADES

- Resolver problemas que envolvam as quatro operações básicas entre números inteiros (adição, subtração, multiplicação e divisão).
- Representar medidas não inteiras utilizando frações.
- Fazer cálculos que envolvam adições e subtrações de frações.
- Representar quantidades não inteiras que utilizam notação decimal.
- Fazer cálculos que envolvam adições e subtrações de números decimais.
- Efetuar cálculos com adição, subtração, multiplicação e divisão com negativos.
- Ler e escrever expressões algébricas correspondentes a textos matemáticos escritos em linguagem corrente e vice-versa.

- Identificar simetria axial e rotação nas representações dos objetos e das figuras geométricas.
- Realizar medidas usando padrões e unidades não convencionais ou de outros sistemas de medidas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Ao término do projeto o aluno deverá:

- reconhecer simetria axial e rotação;
- reconhecer a simetria axial na reta dos números inteiros;
- operar com números positivos e negativos;
- resolver situações-problema que envolvam números positivos e negativos;
- (re)conhecer outras unidades de medida.

JUSTIFICATIVA DE SE TRABALHAR DETERMINADO CONTEÚDO

Fazendo com que o educando associe o conceito de números negativos com a noção de simetria axial, buscamos uma melhor compreensão (por parte do aluno) do que são e de como operar com números negativos, e também como esses números se comportam na reta numérica.

OS PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

1º) Pedir aos alunos que providenciem uma imagem de animal (ou planta) e uma imagem de construção (ou objeto). Eles devem identificar o tipo de isometria, traçar o eixo de simetria, localizar o centro de rotação e identificar o sentido da translação.

2º) Dividir a sala em grupos com 4 alunos.

3º) Os alunos deverão montar cartazes com informações e curiosidades sobre as imagens escolhidas e apresentar para os demais colegas.

4º) Colocar na lousa uma reta numérica com números positivos (naturais, frações e decimais) a partir do zero. Em seguida, os alunos serão questionados se há isometria (simetria axial, em particular) na imagem desenhada na lousa. Assim, com o auxílio de um espelho, será mostrado aos alunos que o único local que pode haver um eixo de simetria é no zero.

5º) De forma expositiva, mostrar certos números inteiros e racionais.

6º) Propor uma lista de exercícios envolvendo cálculos com números inteiros e racionais e situações problemas, para cada grupo.

7º) Fazer com que os alunos corrijam os exercícios explicando o que eles entenderam, para os demais colegas.

8º) Apresentar uma palestra a respeito dos diversos tipos de simetria na natureza (em plantas e animais) e das simetrias nas diversas pavimentações em locais turísticos ao redor do mundo e das obras do artista gráfico holandês Maurits Cornelis Escher.

OS RECURSOS MATERIAIS E TECNOLÓGICOS

- Lápis de cor
- Cola
- Tesoura
- Caneta hidrocor
- Régua
- Papel sulfite
- Cartolina
- Espelho
- Computador
- Projetor

AVALIAÇÃO

A avaliação também será feita através do capricho e da criatividade do trabalho apresentado pelo grupo, de sua participação durante as perguntas realizadas pelos colegas de sala e pelo professor e, por último, será averiguado se o aluno atingiu os objetivos propostos, por meio da lista de exercícios.

RECUPERAÇÃO

Será proposto aos alunos que não atingiram (ou atingiram parcialmente) os objetivos propostos, que eles realizem atividades extraclasse, façam a correção e o aperfeiçoamento de parte do trabalho (6º passo da metodologia) e refaçam a lista de exercícios, com ajuda do professor.

3. 2. 2 DESCRIÇÃO

Para o desenvolvimento da atividade proposta foi necessário rever a noção de isometria e seus diferentes tipos (reflexão, rotação, translação e reflexão com deslizamento) com os alunos da 6ª série/7º ano turma B.

Após essa retomada de conteúdo, foi solicitado aos alunos que trouxessem, para a aula seguinte, algumas figuras de construções, animais e plantas onde pudesse ser percebido algum tipo de isometria.

Na aula seguinte os alunos foram divididos em grupos. Eles deveriam verificar se as figuras encontradas possuíam ou não algum tipo de isometria, dizer qual(ais) o(s) tipo(s) presente(s) e marcar o(s) eixo(s) de simetria, o centro da rotação e o sentido da translação. Durante esse momento houve muita discussão em algumas figuras (principalmente de animais e construções), pois a imagem trazida não possuía reflexão, mas imaginando a figura no espaço poderíamos perceber a isometria (por exemplo, a imagem de um golfinho de perfil não apresentava isometria, porém o golfinho é um animal simétrico quando olhado de frente, no espaço).

Em seguida os grupos deveriam elaborar cartazes separando as imagens simétricas das não simétricas.

A partir do conhecimento adquirido pelo aluno sobre simetria axial, introduzimos o conceito de números negativos como sendo os números simétricos dos positivos, tendo o zero no ponto por onde passa o eixo de simetria dos números racionais na reta. Através de situações-problemas começamos a trabalhar as 4 operações básicas com números negativos e positivos. Para isso foi elaborada uma lista de exercícios com situações-problemas envolvendo unidades monetárias, temperaturas, direção e sentido, etc.

Por fim a atividade foi concluída com uma apresentação de uma palestra a respeito dos diversos tipos de isometria na natureza (em plantas e animais) e nas diversas pavimentações em locais turísticos ao redor do mundo e das obras do artista gráfico holandês Maurits Cornelis Escher.

3. 2. 3 CONCLUSÃO

Com a turma de 6ª Série/7º ano a atividade foi concluída em 12 aulas, sendo 1 aula para a retomada de conteúdos e explicação do projeto; 3 aulas para discussão, separação e classificação das figuras quanto ao tipo de isometria, e para a elaboração dos cartazes; 1 aula para relacionar os números racionais positivos e negativos a simetria axial; 3 aulas para a realização da lista de exercícios; 4 aulas para a correção da lista de exercícios pelos alunos, na lousa.

No decorrer da atividade houve uma discussão muito produtiva com relação a simetria axial de certos animais e objetos. Alguns alunos conseguiam visualizar o animal/objeto como uma figura espacial sendo interceptada por um plano, e por isso, queriam classificar a figura como simétrica. Já outros alunos ficaram presos à imagem recortada, isto é, à figura plana, querendo classificá-la como não simétrica. A classificação ficou a critério de cada grupo, não havendo intervenção por parte do professor.

Após a elaboração dos cartazes realizamos uma retomada de conteúdo sobre a relação dos números positivos (naturais, decimais e fracionários) na reta numérica. Em seguida, questionamos os alunos sobre como seria essa reta se traçássemos um eixo de simetria vertical ao número zero, e com o auxílio de um espelho mostramos como seria. A partir daí, observamos que cada número negativo era o simétrico de um número positivo. Assim, utilizando situações-problemas com dinheiro, temperatura, andares de prédio, etc., foram propostos diversos problemas envolvendo diferentes tipos de operações para que os alunos buscassem resolvê-las em grupo.

Essas situações-problemas foram apresentadas e explicadas para os demais alunos da sala pelos grupos que conseguiram entender melhor. Os alunos dos outros grupos puderam questionar e corrigir os colegas quando havia dúvida ou erro. Além disso, podemos perceber que a maioria das dúvidas não surgia na montagem das expressões numéricas e sim na operação com números positivos e negativos. Para facilitar a compreensão das operações de adição e subtração, relacionamos os números inteiros negativos com a “dívida” e os positivos com “o valor que se dispunha (poupança)”, e para a operação de multiplicação fizemos sua representação como soma de parcelas de mesmos valores, isto é, somamos dívidas ou valores que dispunham. Já na operação de divisão, a grande dificuldade era realizar a operação de divisão com mais de dois números na chave, e para tentar solucionar isso, fizemos uma retomada rápida de conteúdo com os alunos, sobre o algoritmo da divisão.

O encerramento da atividade deu-se com uma palestra, realizada juntamente com as turmas de 5ª série/6º ano, onde os alunos da 6ª série/7º ano puderam comentar, explicar e mostrar aos alunos da série anterior, a relação entre a natureza, a matemática e as obras artísticas ao redor do mundo. Portanto, todos os objetivos propostos foram atingidos, uma vez que foi sanada a falta de pré-requisitos em alguns alunos (operação de divisão).

CAPÍTULO 4 - AS ISOMETRIAS EM ALGUNS DOCUMENTOS OFICIAIS DE ENSINO

Neste capítulo analisaremos como alguns documentos oficiais de ensino, nacionais e especificamente do Estado de São Paulo, abordam o ensino das Isometrias (simetrias de reflexão, rotação e translação), e a sua contribuição para o desenvolvimento de habilidades específicas nos estudantes do ensino básico brasileiro.

Observamos que nos documentos oficiais de ensino, o tema Isometrias é abordado com o nome de simetrias e abrange apenas os seguintes tipos: reflexão, rotação e translação.

Salientamos ainda que as atividades propostas de Isometrias nesta dissertação são direcionadas as turmas de 6º Ano/5ª Série e 7º Ano/6ª Série, que segundo os PCN correspondem ao 3º Ciclo do Ensino Fundamental com crianças de faixa etária entre 11 e 12 anos, estando de acordo com a seriação apresentada no Currículo do Estado de São Paulo e PCN's.

4. 1 OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCN) E AS ISOMETRIAS

4. 1. 1 NOÇÕES BÁSICAS SOBRE OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCN) DO ENSINO FUNDAMENTAL

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) são referenciais de qualidade elaboradas pelo Governo Federal para nortear as equipes escolares na execução de seus trabalhos. Criados em 1996, as diretrizes são voltadas, sobretudo, para a estruturação e reestruturação dos currículos escolares de todo o Brasil. O objetivo principal dos PCN é padronizar o ensino no país, estabelecendo pilares fundamentais para guiar a educação formal, garantindo a todas as crianças e jovens brasileiros, mesmo em locais com condições socioeconômicas desfavoráveis, o direito de usufruir do conjunto de conhecimentos reconhecidos como necessários para o exercício da cidadania. Não possuem caráter de obrigatoriedade e, portanto, pressupõe-se que serão adaptados às peculiaridades locais.

Colocando em linhas gerais, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998), é caracterizado por:

> • apontar a necessidade de unir esforços entre as diferentes instâncias governamentais e da sociedade, para apoiar a escola na complexa tarefa educativa;
> • mostrar a importância da participação da comunidade na escola, de forma que o conhecimento aprendido gere maior compreensão, integração e inserção no mundo; a prática escolar comprometida com a interdependência escola-sociedade tem como objetivo situar as pessoas como participantes da sociedade — cidadãos — desde o primeiro dia de sua escolaridade;
> • contrapor-se à ideia de que é preciso estudar determinados assuntos porque um dia eles serão úteis; o sentido e o significado da aprendizagem precisam estar evidenciados durante toda a escolaridade, de forma a estimular nos alunos o compromisso e a responsabilidade com a própria aprendizagem;
> • explicitar a necessidade de que as crianças e os jovens deste país desenvolvam suas diferentes capacidades, enfatizando que a apropriação dos conhecimentos socialmente elaborados é base para a construção da cidadania e da sua identidade, e que todos são capazes de aprender e mostrar que a escola deve proporcionar ambientes de construção dos seus conhecimentos e de desenvolvimento de suas inteligências, com suas múltiplas competências;
> • apontar a fundamental importância de que cada escola tenha clareza quanto ao seu projeto educativo, para que, de fato, possa se constituir em uma unidade com maior grau de autonomia e que todos que dela fazem parte possam estar comprometidos em atingir as metas a que se propuseram;
> • ampliar a visão de conteúdo para além dos conceitos, inserindo procedimentos, atitudes e valores como conhecimentos tão relevantes quanto os conceitos tradicionalmente abordados;
> • evidenciar a necessidade de tratar de temas sociais urgentes — chamados Temas Transversais — no âmbito das diferentes áreas curriculares e no convívio escolar;
> • apontar a necessidade do desenvolvimento de trabalhos que contemplem o uso das tecnologias da comunicação e da informação, para que todos, alunos e professores, possam delas se apropriar e participar, bem como criticá-las e/ou delas usufruir;
> • valorizar os trabalhos dos docentes como produtores, articuladores, planejadores das práticas educativas e como mediadores do conhecimento socialmente produzido; destacar a importância de que os docentes possam atuar com a diversidade existente entre os alunos e com seus conhecimentos prévios, como fonte de aprendizagem de convívio social e como meio para a aprendizagem de conteúdos específicos. (BRASIL, 1998a, p. 10–11).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais indicam como principais objetivos do Ensino Fundamental que os alunos sejam capazes de:

> • compreender a cidadania como participação social e política, assim como exercício de direitos e deveres políticos, civis e sociais, adotando, no dia-a-dia, atitudes de solidariedade, cooperação e repúdio às injustiças, respeitando o outro e exigindo para si o mesmo respeito;
> • posicionar-se de maneira crítica, responsável e construtiva nas diferentes situações sociais, utilizando o diálogo como forma de mediar conflitos e de tomar decisões coletivas;
> • conhecer características fundamentais do Brasil nas dimensões sociais, materiais e culturais como meio para construir progressivamente a noção de identidade nacional e pessoal e o sentimento de pertinência ao país;
> • conhecer e valorizar a pluralidade do patrimônio sociocultural brasileiro, bem como aspectos socioculturais de outros povos e nações, posicionando-se contra qualquer discriminação baseada em diferenças culturais, de classe social, de crenças, de sexo, de etnia ou outras características individuais e sociais;

> • perceber-se integrante, dependente e agente transformador do ambiente, identificando seus elementos e as interações entre eles, contribuindo ativamente para a melhoria do meio ambiente;
> • desenvolver o conhecimento ajustado de si mesmo e o sentimento de confiança em suas capacidades afetiva, física, cognitiva, ética, estética, de inter-relação pessoal e de inserção social, para agir com perseverança na busca de conhecimento e no exercício da cidadania;
> • conhecer o próprio corpo e dele cuidar, valorizando e adotando hábitos saudáveis como um dos aspectos básicos da qualidade de vida e agindo com responsabilidade em relação à sua saúde e à saúde coletiva;
> • utilizar as diferentes linguagens — verbal, musical, matemática, gráfica, plástica e corporal — como meio para produzir, expressar e comunicar suas ideias, interpretar e usufruir das produções culturais, em contextos públicos e privados, atendendo a diferentes intenções e situações de comunicação;
> • saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos;
> • questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação. (BRASIL, 1998a, p. 55–56)

Para que estes objetivos possam ser alcançados, os Parâmetros Curriculares Nacionais foram organizados em áreas de conhecimentos e temas transversais, sempre prevendo adequações, respeitando as particularidades sociais e financeiras de cada região. Todas as áreas de conhecimento visam inserir o cidadão na sociedade de uma forma autônoma, construindo conhecimentos significativos para o desenvolvimento de suas capacidades.

4. 1. 2 OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS DE MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL (5ª SÉRIE/6º ANO À 8ª SÉRIE/9º ANO) E SUA RELAÇÃO COM O ENSINO DAS ISOMETRIAS

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para a área de Matemática enfatiza que a Matemática faz parte do cotidiano de todos nós, e isto pode ser observado em situações simples do dia-a-dia como contar, calcular, lidar com dinheiro, ler gráficos e mapas e tantas outras coisas. Para as atividades em sala de aula, enfoca como ponto de partida a resolução de problemas ao invés da memorização de mecanismos e fórmulas.

Para que o ensino de Matemática atinja plenamente seus objetivos, permitindo ao educando que desenvolva suas capacidades cognitivas, e dessa maneira ampliar seu repertório de recursos distintos, necessários para o exercício da cidadania, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática tem como propósitos, o seguinte:

> • incorporar o estudo dos recursos estatísticos constituindo um bloco de conteúdos denominado Tratamento de Informação;
> • indicar aspectos novos no estudo dos números e operações, privilegiando o desenvolvimento do sentido numérico e a compreensão de diferentes significados das operações;
> • propor um novo enfoque para o tratamento da álgebra, apresentando-a incorporada aos demais blocos de conteúdos, privilegiando o desenvolvimento do pensamento algébrico e não o exercício mecânico do cálculo;
> • enfatizar a exploração do espaço e de suas representações e a articulação entre a geometria plana e espacial;
> • destacar a importância do desenvolvimento do pensamento indutivo e dedutivo e oferecer sugestões de como trabalhar com explicações, argumentações e demonstrações;
> • apresentar uma graduação dos conteúdos do segundo para o terceiro ciclo que contempla diferentes níveis de aprofundamento, evitando repetições;
> • recomendar o uso de calculadoras nas aulas de Matemática. (BRASIL, 1998a, p. 60)

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, para se que tenha um ensino de Matemática que torne propício ao aluno a construção da cidadania, o Ensino Fundamental tem as seguintes metas:

> • identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas;
> • fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles, utilizando o conhecimento matemático (aritmético, geométrico, métrico, algébrico, estatístico, combinatório, probabilístico);
> • selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente;
> • resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis;
> • comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas;
> • estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares;
> • sentir-se seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções;
> • interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de um assunto, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (BRASIL, 1998b, p. 47–48)

Nos PCN, os vários campos da Matemática, tais como Aritmética, Álgebra, Geometria, Probabilidade e Estatística, foram separados em quatro blocos de aprendizagem, podendo ou não estabelecer conexões entre si. São eles:

- Números e Operações – envolvendo os campos da Aritmética e da Álgebra;
- Espaço e Forma – abrangendo o campo da Geometria;
- Grandezas e Medidas – fazendo conexões com os campos da Aritmética, da Álgebra, da Geometria e de outras áreas do conhecimento;
- Tratamento da Informação – abrangendo os campos da Probabilidade e da Estatística.

Com relação às Isometrias, podemos dizer que o seu estudo está inserido no tema "Espaço e Forma". No entanto, buscamos associá-lo, também, com os temas “Números e Operações” e “Grandezas e Medidas”.

O tema em questão começa a ser abordado no início do ciclo II do Ensino Fundamental, ou seja, a partir da 6ª série / 7º ano. Um dos objetivos do Ensino de Matemática, neste ciclo, no que diz respeito à competência do desenvolvimento do pensamento geométrico, é o de que seja feito por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a ampliar e aprofundar noções geométricas para estabelecer relações, inclusive as métricas, em figuras bidimensionais e tridimensionais. O aluno também deve ser levado a ampliar e construir as noções de medidas, pelo estudo de diferentes grandezas, efetuar cálculos, obtidos através do método dedutivo e utilizar fórmulas para o cálculo de área de figuras planas. O ideal é que as situações de aprendizagem a serem desenvolvidas neste ciclo, principalmente os conteúdos do bloco Espaço e Forma, na qual as Isometrias se enquadram, sejam feitas com construções, manuseio das figuras, que permitam ao aluno através de suas análises e observações, fazer conjecturas e identificar os tipos de isometrias encontradas. Dessa forma, segundo os PCN, conceitos e procedimentos visando o ensino das Isometrias, podem ser tratados em:

> **Espaço e Forma [...]**
> - Desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas a partir de transformações (reflexões em retas, translações, rotações e composições destas), identificando as medidas invariantes (dos lados, dos ângulos, das superfícies). (...) (BRASIL, 1998b, p. 87).

4. 2 O ENSINO DAS ISOMETRIAS DE ACORDO COM O CURRÍCULO OFICIAL DE ENSINO DO ESTADO DE SÃO PAULO

4. 2. 1 NOÇÕES BÁSICAS SOBRE O CURRÍCULO OFICIAL DE ENSINO DO ESTADO DE SÃO PAULO

O Currículo Oficial de Ensino do Estado de São Paulo foi elaborado em 2008 pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Sua elaboração propunha reformulações no currículo básico para as escolas da rede estadual nos níveis do Ensino Fundamental (Ciclo II) e Ensino Médio. Esse currículo básico pretendia dar apoio pedagógico aos trabalhos desenvolvidos pelos professores nas escolas estaduais paulistas, objetivando a melhoria na qualidade das aprendizagens dos alunos.

> [...] a Secretaria pretende que esta iniciativa seja, mais do que uma nova declaração de intenções, o início de uma contínua produção e divulgação de subsídios que incidam diretamente na organização da escola como um todo e nas aulas. Ao iniciar este processo, a Secretaria procura também cumprir seu dever de garantir a todos uma base comum de conhecimentos e competências, para que nossas escolas funcionem de fato como uma rede [...]. (SÃO PAULO, 2008, p.3).

Atualmente, esta proposta está estruturada em seis princípios, sendo cada um deles de suma importância para a sua implementação. São eles:

I. Uma escola que também aprende;
II. O currículo como espaço de cultura;
III. As competências como referência;
IV. Prioridade para a competência da leitura e da escrita;
V. Articulação das competências para aprender;
VI. Articulação com o mundo do trabalho.

4. 2. 2 O CURRÍCULO OFICIAL DE ENSINO DE MATEMÁTICA DO ESTADO DE SÃO PAULO E O ENSINO DAS ISOMETRIAS

O Currículo Oficial do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias no Ensino Fundamental (ciclo II) e Ensino Médio (SÃO PAULO, 2011), tem como uma de suas principais finalidades fazer uma aproximação entre a matemática que é ensinada nas escolas e o universo cultural. Pensando nessa aproximação, buscamos neste trabalho, além de desenvolver os conceitos de isometrias, mostrar como inúmeros pintores, escultores e construtores se utilizavam das isometrias em suas obras como uma forma de torná-las mais harmônicas e belas, buscando assim, tornar o conhecimento sobre isometrias algo significativo para os alunos.

Além disso, o Currículo Oficial do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias busca também valorizar contextualizações e enfrentamentos de situações-problema, para que, em parceria com a língua materna, o aluno tenha o desenvolvimento de sua percepção crítica sobre o mundo no qual está inserido.

> Existe um acordo tácito com relação ao fato de que os adultos necessitam da Matemática em suas ações como consumidores, como cidadãos, como pessoas conscientes e autônomas. Todos lidam com números, medidas, formas, operações; todos leem e interpretam textos e gráficos, vivenciam relações de ordem e de equivalência; todos argumentam e tiram conclusões válidas a partir de proposições verdadeiras, fazem inferências plausíveis a partir de informações parciais ou incertas. Em outras palavras, a ninguém é permitido dispensar o conhecimento da Matemática sem abdicar de seu bem mais precioso: a consciência nas ações. (SÃO PAULO, 2011, p. 29).

A fim de desenvolver o elenco de competências básicas dos alunos ao longo de sua vida escolar, o Currículo Oficial de Ensino do Estado de São Paulo de Matemática e suas Tecnologias, possuí três eixos norteadores da ação educacional:

> • **o eixo expressão/compreensão**: a capacidade de expressão do eu, por meio das diversas linguagens, e a capacidade de compreensão do outro, do não eu, do que me complementa, o que inclui desde a leitura de um texto, de uma tabela, de um gráfico, até a compreensão de fenômenos históricos, sociais, econômicos, naturais etc.;
> • **o eixo argumentação/decisão**: a capacidade de argumentação, de análise e de articulação das informações e relações disponíveis, tendo em vista a viabilização da comunicação, da ação comum, a construção de consensos e a capacidade de elaboração de sínteses de leituras e de argumentações, tendo em vista a tomada de decisões, a proposição e a realização de ações efetivas;
> • **o eixo contextualização/abstração**: a capacidade de contextualização dos conteúdos estudados na escola, de enraizamento na realidade imediata, nos universos de significações – sobretudo no mundo do trabalho –, e a capacidade de abstração, de imaginação, de consideração de novas perspectivas, de virtualidades, de potencialidades para se conceber o que ainda não existe. (SÃO PAULO, 2011, p. 31–32).

Com relação à organização dos conteúdos básicos, estes foram organizados, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, em três blocos temáticos: Números, Geometria e Relações, que natural e permanentemente, se relacionam entre si.

Apesar da evidente diferença com o PCN, que separa os conteúdos básicos da matemática em quatros blocos conforme visto anteriormente, podemos perceber que a separação do Currículo Oficial do Ensino de Matemática em três blocos, não deixa de abranger nenhum dos conteúdos propostos pelo PCN.

Sobre as Isometrias, objeto de nosso estudo, podemos dizer que elas estão envolvidas em todos os três blocos, mas é natural que, especificamente, se enquadre dentro do bloco "Geometria".

Em "Geometria", nas séries/anos iniciais do ciclo II, devemos nos preocupar em representar e classificar as formas planas e espaciais, principalmente com atividades concretas. Nos anos finais do ciclo II, deve-se dar ênfase à construção de certos raciocínios lógicos geométricos, de simples deduções de resultados anteriormente conhecidos. É importante salientar que cabe ao professor buscar um equilíbrio na distribuição dos conteúdos a fim de incorporar o ensino da Geometria, de forma espiralada, em todas as séries/anos da grade escolar, tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio.

De acordo com o Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias, os conteúdos associados a habilidades a serem desenvolvidas foram organizados em grades curriculares, distribuídas por bimestre, em cada série/ano, tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio. O que se objetiva com esta "lista" de conteúdos, a qual não é rígida e inflexível, é que suas abordagens estejam voltadas para a formação das competências pessoais, levando o aluno a um enriquecimento e valorização da cultura e do mundo do trabalho.

No Currículo do Estado de São Paulo, o estudo das Isometrias consta, explicitamente, no conteúdo do Ensino Fundamental, nas séries/anos iniciais do ciclo II (6ª série/7º ano.)

6ª série/7º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	**Habilidades**
2º Bimestre	**Geometria** Geometria • Ângulos • Polígonos • Circunferência • Simetrias • Construções geométricas • Poliedros	• Compreender a ideia de medida de um ângulo (em grau), sabendo operar com medidas de ângulos e usar instrumentos geométricos para construir e medir ângulos • Compreender e identificar simetria axial e de rotação nas figuras geométricas e nos objetos do dia a dia • Saber calcular a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e estender tal cálculo para polígonos de *n* lados • Saber aplicar os conhecimentos sobre a soma das medidas dos ângulos de um triângulo e de um polígono em situações práticas • Saber identificar elementos de poliedros e classificar os poliedros segundo diversos pontos de vista • Saber planificar e representar (em vistas) figuras espaciais

Figura 4.1: Conteúdos e Habilidades de Matemática referente ao 2º bimestre da 6ª série/7º ano do Ensino Fundamental. (Fonte: SÃO PAULO, 2011, p. 59.)

Neste momento, as Isometrias são trabalhadas por meio de situações-problema, com ideias que induzem o aluno a constatar a reflexão de imagens por meio de um eixo de simetria. Isto acontece no 2º bimestre, na *Situação de Aprendizagem* 2 contida no Caderno do Professor, volume 2, da 6ª série/7º ano. Seu roteiro é descrito da seguinte maneira:

> Na Situação de Aprendizagem 2 – Seja na natureza ou nos objetos e construções criados pelo homem, nosso mundo é repleto de simetria. A palavra simetria é usada na linguagem coloquial em dois sentidos. Um deles indica algo em boas proporções, equilibrado e harmonioso, muitas vezes associado a ideia de beleza. O segundo é aquele que aproxima simetria da ideia de balança, ou seja, da ideia de que devemos ter elementos idênticos dos dois lados de um referencial como, por exemplo, à esquerda e à direita em relação a uma linha reta. Nesse sentido, a ideia de reflexão desempenha papel importante porque a ela associamos o "espelhamento" perfeito e sem distorção.
>
> A ideia de simetria deve ser explorada na 6ª série / 7º ano por meio de duas interpretações possíveis: simetria axial (ou simetria bilateral, ou ainda simetria de reflexão) e simetria de rotação (ou simetria rotacional). (SÃO PAULO, 2009a, p. 25).

As Isometrias também podem ser utilizadas como porta de entrada para uma apresentação mais detalhada do plano cartesiano. Várias atividades podem e devem ser desenvolvidas a partir daí.

As simetrias são retomadas nas séries seguintes, principalmente na 8ª série/9º ano no estudo de Funções e nas suas representações gráficas e no Ensino Médio no estudo de Funções Quadráticas, onde a parábola é descrita como uma curva simétrica, sendo seu eixo de simetria uma reta perpendicular ao eixo das abscissas, passando pelo vértice da parábola.

Vejamos, a seguir, como as atividades da *Situação de Aprendizagem* 2, sobre as Isometrias são propostas na 6ª série/7º ano do Ensino Fundamental. Algumas delas foram trabalhadas em sala com os alunos, depois do desenvolvimento do projeto descrito no capítulo anterior.

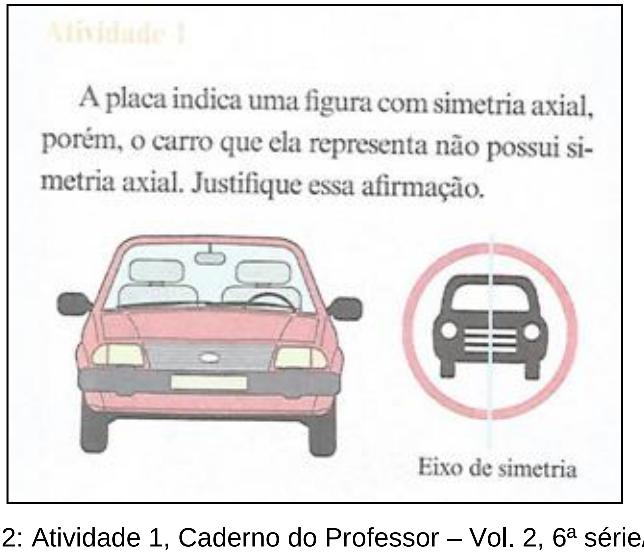


Figura 4.2: Atividade 1, Caderno do Professor – Vol. 2, 6ª série/7º ano.

(Fonte: SÃO PAULO, 2009a, p. 25.)


Atividade 2

Qual(is) das figuras a seguir possui(em) simetria axial? Para aquela(s) que possui(em), indique onde estaria o eixo de simetria; para as demais, indique porque elas não possuem simetria axial.

a)

© Samuel Silva

b)

© Purestock

c)

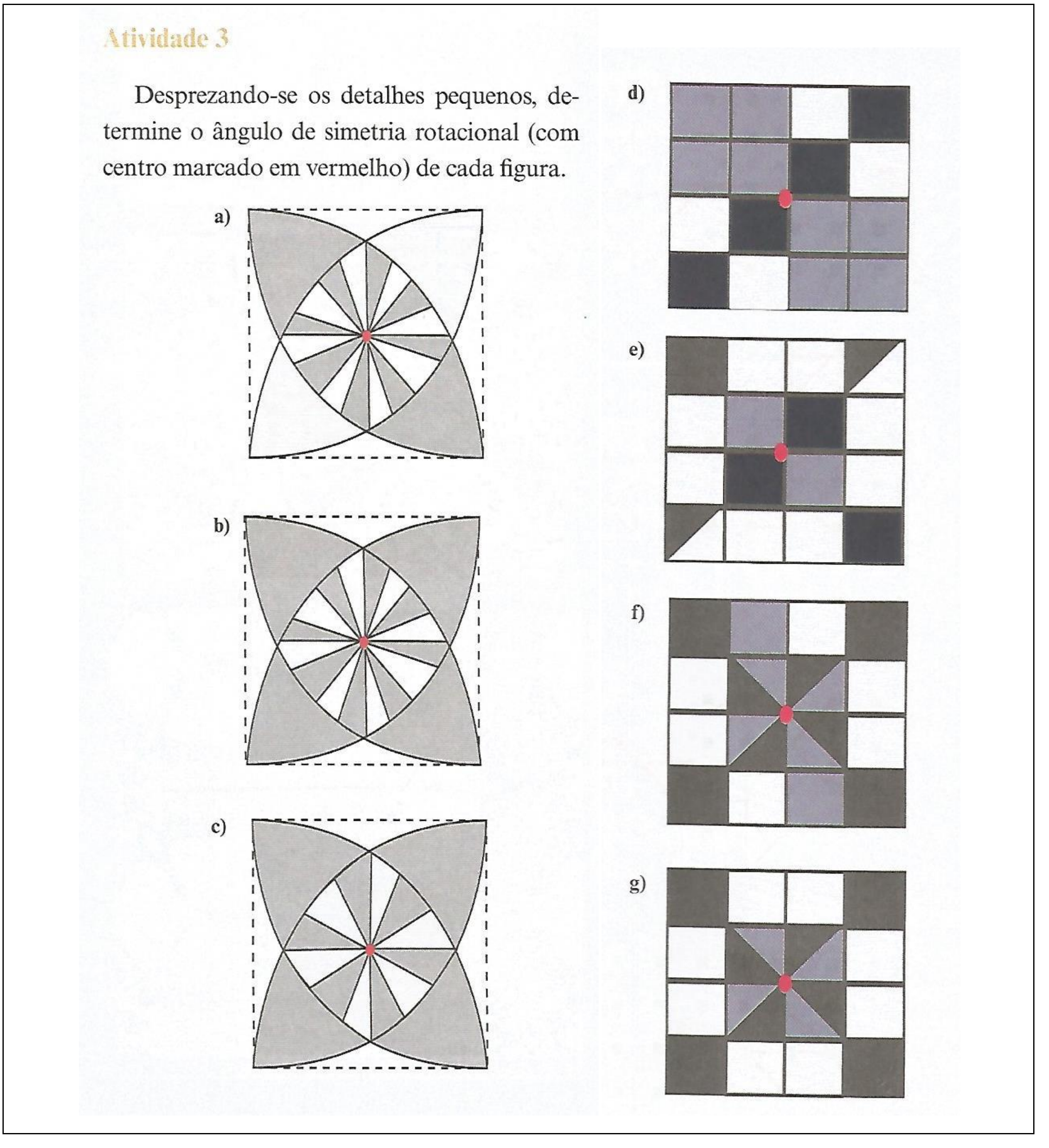
© Bobo / Alamy-Otherimages

d)

© Vivek Chugh / SXC.hu

Figura 4.3: Atividade 2, Caderno do Professor – Vol. 2, 6ª série/8º ano

(Fonte: SÃO PAULO, 2009a, p. 25 e 26.)



Atividade 3

Desprezando-se os detalhes pequenos, determine o ângulo de simetria rotacional (com centro marcado em vermelho) de cada figura.

Figura 4.4: Atividade 3, Caderno do Professor – Vol. 2, 6ª série/7º ano.

(Fonte: SÃO PAULO, 2009a, p. 26 e 27.)

Atividade 4

Copie as figuras abaixo em uma malha quadriculada e, em seguida, complete o desenho assumindo que a linha azul é a linha de simetria da figura pintada.

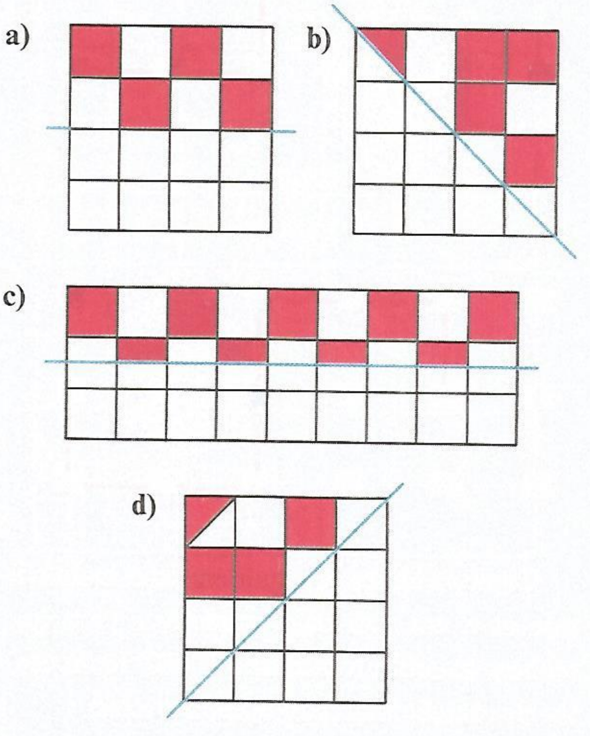


Figura 4.5: Atividade 4, Caderno do Professor – Vol. 2, 6ª série/7º ano.

(Fonte: SÃO PAULO, 2009a, p. 27.)

Atividade 5

A Figura 1 não possui simetria rotacional de 180º (com centro no ponto marcado em azul), mas a Figura 2 possui. Observe-as:

Figura1

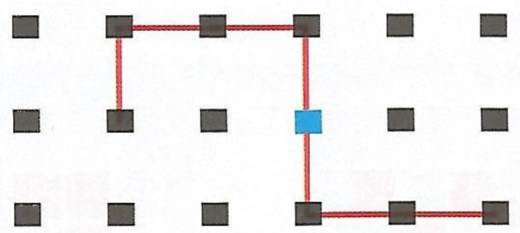
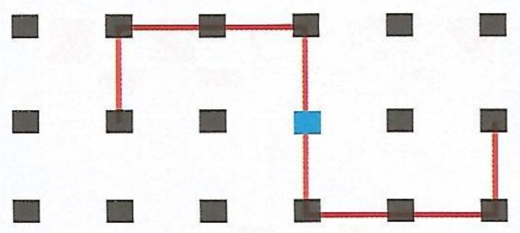
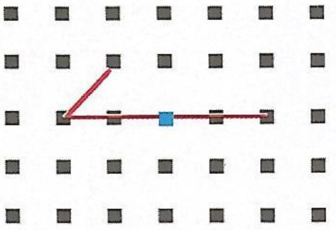


Figura2

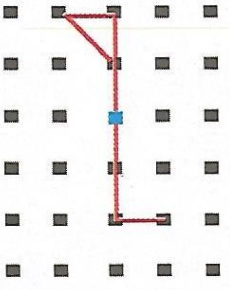


Copie as figuras a seguir em uma malha de pontos e, em seguida, complete-as para que tenham simetria rotacional de 180º (com centro de rotação marcado no ponto azul).

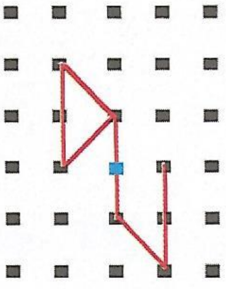
a)



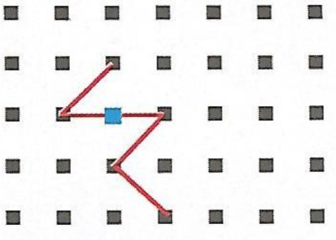
b)



c)



d)



e)

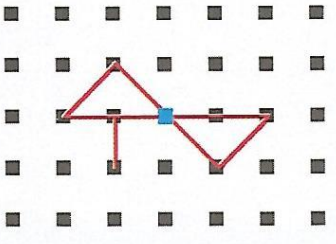
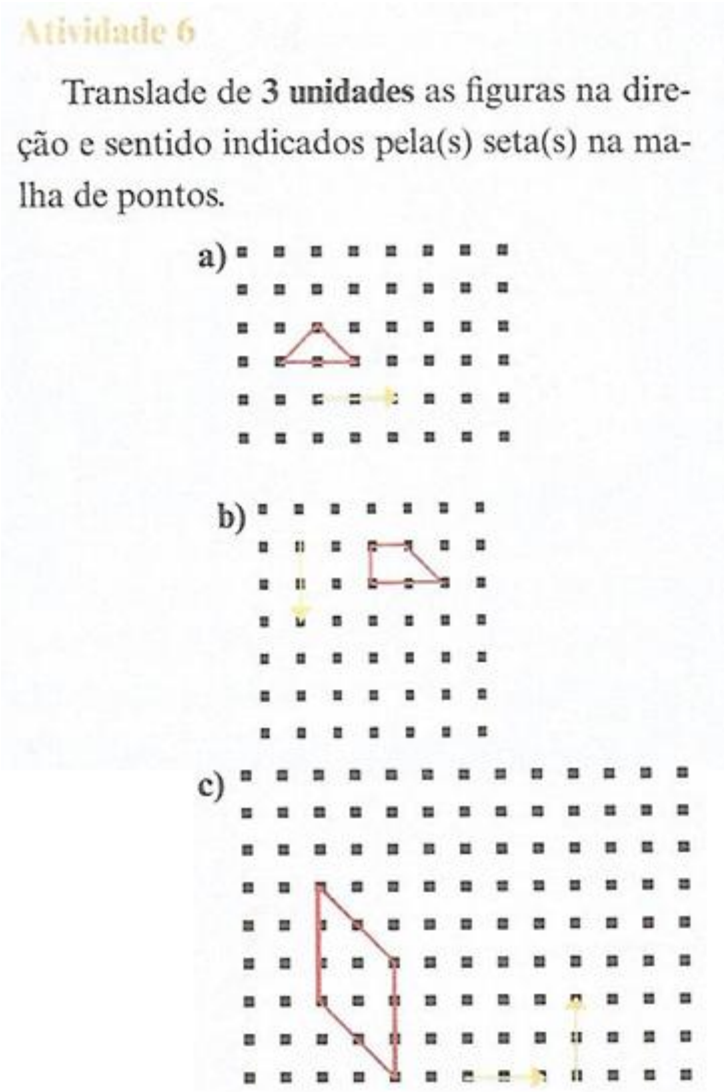


Figura 4.6: Atividade 5, Caderno do Professor – Vol. 2, 6ª série/7º ano.

(Fonte: SÃO PAULO, 2009a, p. 28.)



Atividade 6

Translade de **3 unidades** as figuras na direção e sentido indicados pela(s) seta(s) na malha de pontos.

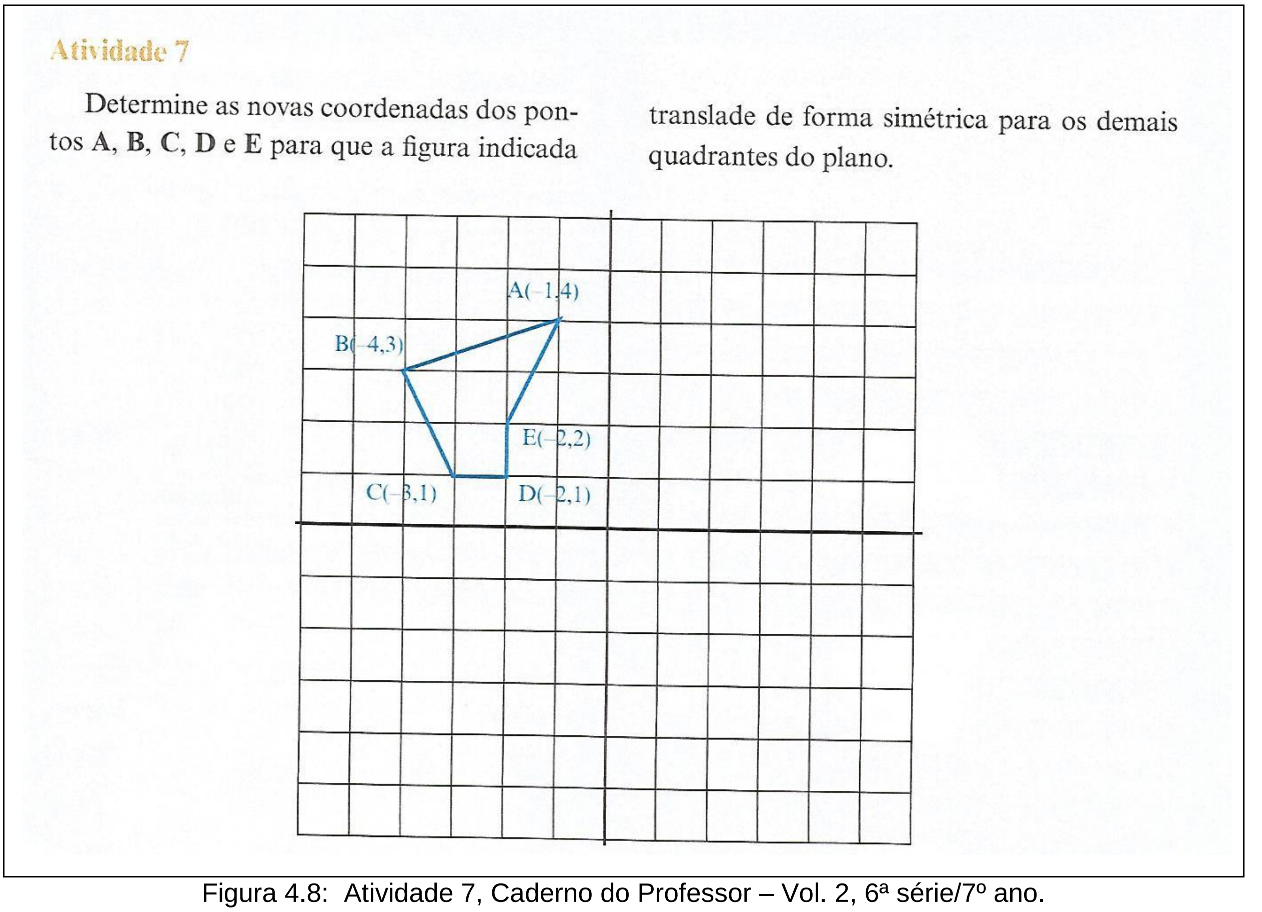
a)

b)

c)

Figura 4.7: Atividade 6, Caderno do Professor – Vol. 2, 6ª série/7º ano.

(Fonte: SÃO PAULO, 2009a, p. 30.)



Atividade 7

Determine as novas coordenadas dos pontos **A**, **B**, **C**, **D** e **E** para que a figura indicada translade de forma simétrica para os demais quadrantes do plano.

Figura 4.8: Atividade 7, Caderno do Professor – Vol. 2, 6ª série/7º ano.

(Fonte: SÃO PAULO, 2009a, p. 31.)

Vale ressaltar que na Atividade 7 (Figura 4.8) se inicia a ideia de plano cartesiano. Tal conteúdo será mais aprofundado na 7ª série/8º ano.

Apesar de não aparecer claramente expressa, a utilização das Isometrias é muito variada no dia-a-dia, desde a pavimentação de pisos até o movimento dos planetas.

4. 3 AS ISOMETRIAS NAS MATRIZES DE REFERÊNCIA PARA AVALIAÇÃO DO SARESP

4. 3. 1 NOÇÕES BÁSICAS SOBRE O SARESP

A partir de 1996 foi adotado, pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, um sistema de avaliação de desempenho dos alunos da Educação Básica ao término da 2ª série/3º ano, 4ª série/5º ano, 6ª série/7º ano e 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental e também 3º ano do Ensino Médio. Esse sistema recebeu o nome de SARESP (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo).

O SARESP visa avaliar o aluno, não apenas atribuindo a ele uma nota ou conceito, mas também sistematizando dados e produzindo informações sobre o desempenho e a evolução dos alunos.

A partir de 2007 houve muitas mudanças no SARESP, uma delas foi a adequação das habilidades avaliadas às do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB)/Prova Brasil, tornando a comparação dos resultados obtidos pelos alunos nestes dois exames algo possível. Além disso, foram introduzidas mudanças na avaliação de Matemática, com a inclusão de questões dissertativas, onde as respostas construídas pelos alunos permitem a verificação das diferentes estruturas de seu pensamento lógico-matemático, detectando os procedimentos utilizados pelos mesmos no cumprimento das tarefas.

O Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo é aplicado anualmente, geralmente no mês de novembro, como forma de avaliar todo o sistema de ensino paulista e serve também de subsídio para o governo monitorar as políticas públicas de educação. Tudo isso não é realizado somente com a aplicação de provas aos alunos, mas também por meio de questionários dirigidos aos alunos, pais, professores e toda equipe gestora de ensino. Participam alunos das redes públicas municipais e estaduais de ensino, sendo que a participação de alunos de escolas da rede privada também é possível, desde que a unidade de ensino faça a adesão ao programa e assuma as despesas decorrentes.

Além de avaliar o sistema de ensino paulista, o SARESP está atrelado ao Bônus Mérito do Professor da Rede Estadual Paulista, ou seja, um prêmio em dinheiro é concedido a toda equipe escolar desde que os alunos das séries terminais de cada ciclo consigam atingir ou superar as metas propostas pelo governo estadual. Essas metas, atualmente levam em conta o desempenho dos alunos no SARESP, o número de evasão escolar e de retenção escolar.

Atualmente o SARESP avalia o aluno em três disciplinas: português, matemática e uma terceira que a cada ano é renovada podendo ser ciências, história ou geografia.

4. 3. 2 MATRIZES DE REFERÊNCIA PARA A AVALIAÇÃO

No Estado de São Paulo temos como as principais matrizes de referência para avaliação a Matriz de Referência do SAEB e a Matriz de Referência do SARESP. Sua finalidade principal é a orientação das estruturas básicas de conhecimentos, pautados em competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos, por meio de diferentes componentes curriculares, em todas as etapas de sua vida escolar.

> No campo da Educação, é fundamental definir uma matriz de referência em situações de aprendizagem e ensino. Por esse intermédio pode-se avaliar, mesmo que de modo indireto e inferencial, a ocorrência de efetiva aprendizagem. Pode-se, ainda, estabelecer correspondências entre uma situação (o ensino e a aprendizagem em sala de aula) e outra (o que é legítimo de ser avaliado em uma prova, por exemplo). Quanto ao instrumento de avaliação em si mesmo, pode-se comparar a matriz de referência proposta (em sua perspectiva geral) com as habilidades aferidas nesse instrumento específico. (São Paulo, 2009b, p. 10 – 11).

Em 2008, foi introduzida a matriz de referência do SARESP, tendo sido elaborada a partir da Proposta Curricular do Estado de São Paulo. Tal proposta permite que já se possa esperar o que o aluno deverá ter aprendido ao final de cada ciclo. Dessa forma, não apenas o SARESP pôde contar com o apoio das Matrizes de Referências em seu sistema de avaliação, como também contribuiu para a sua implementação.

A Matriz de Referência do SARESP tem sua estrutura baseada no trio - Habilidades - Competências Cognitivas - Conteúdos.

As Habilidades possibilitam a inferência do nível de domínio das competências cognitivas em que os alunos se encontram. Devendo ser caracterizadas de forma mensurável e funcionando como indicadores das aprendizagens do que se espera do educando no período avaliado. Suas indicações são úteis na elaboração dos itens da prova, na qual os elaboradores podem adequar os conteúdos de cada disciplina à competência que será avaliada em dada questão.

As Competências Cognitivas são conceituadas da seguinte maneira na Matriz de Referência do SARESP:

> Competências cognitivas são modalidades estruturais da inteligência. Modalidades, pois expressam o que é necessário para compreender ou resolver um problema. Ou seja, valem por aquilo que integram, articulam ou configuram como resposta a uma pergunta. Ao mesmo tempo, são modalidades porque representam diferentes formas ou caminhos de se conhecer. Um mesmo problema pode ser resolvido de diversos modos. Há igualmente muitos caminhos para se validar ou justificar uma resposta ou argumento. (São Paulo, 2009b, p.14).

Tais Competências Cognitivas, avaliadas no exame do SARESP, foram organizadas em três grupos:

> Grupo I: Competências para observar.
>
> O Grupo I refere-se aos esquemas presentativos ou representativos, propostos por Jean Piaget. Graças a eles, os alunos podem ler a prova, em sua dupla condição: registrar perceptivamente o que está proposto nos textos, imagens, tabelas ou quadros e interpretar este registro como informação que torna possível assimilar a questão e decidir sobre a alternativa que julgam mais correta. (São Paulo, 2009b, p.16).

> Grupo II: Competências para realizar.
>
> As habilidades relativas às competências do Grupo II caracterizam-se pelas capacidades de o aluno realizar os procedimentos necessários às suas tomadas de decisão em relação às questões ou tarefas propostas na prova. (São Paulo, 2009b, p.18).
>
> Grupo III: Competências para compreender.
>
> Estas competências implicam o uso de esquemas operatórios. As competências relativas a esse Grupo III devem ser analisadas em duas perspectivas. Primeiro, estão presentes e são mesmo essenciais às competências cognitivas ou às operações mentais destacadas nos Grupos I e II. Porém, quando referidas a eles, têm um lugar de meio ou condição, mas não de fim. Ou seja, atuam de modo a possibilitar realizações via esquemas procedimentais (Grupo II) ou leituras via esquemas de representação (Grupo I). (São Paulo, 2009b, p.18).

Dentro de cada grupo estão descritas inúmeras habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos, de modo à sempre integrar e articular os saberes.

Com relação aos Conteúdos, estes devem privilegiar algumas competências e habilidades a eles associadas. Descrevendo as estruturas conceituais mais gerais de cada disciplina, traduzindo em aquisição de habilidades específicas pelos alunos.

A Matriz de Referência do SARESP divide os conteúdos nos mesmos temas indicados nos PCN do Ensino Fundamental (Tema 1: Números e Operações, Tema 2: Espaço e Forma, Tema 3: Grandezas e Medidas e Tema 4: Tratamento da informação).

As Isometrias são explicitamente citadas como um conteúdo do Tema 2 (Espaço e Forma) na 6ª série/7º ano do Ensino Fundamental. As habilidades que os alunos devem adquirir sobre elas estão inseridas nas competências dos Grupos I e II (Competências para observar e Competências para realizar, respectivamente). Eles devem resolver problemas em diferentes contextos, que envolvam as Isometrias de reflexão, rotação e translação.

	COMPETÊNCIAS DO SUJEITO		
	GRUPO I Competências para observar	GRUPO II Competências para realizar	GRUPO III Competências para compreender
OBJETOS DO CONHECIMENTO (CONTEÚDOS) Tema 2 – Espaço e forma	H16 Identificar formas planas e espaciais em situações do cotidiano e por meio de suas representações em desenhos e em malhas. H18 Identificar figuras espaciais a partir de suas planificações. H20 Identificar simetria axial e de rotação na leitura das representações dos objetos no dia a dia e das figuras geométricas.	H17 Classificar formas planas e espaciais. H19 Determinar área e perímetro de uma figura utilizando composição e decomposição de figuras. H21 Identificar elementos e classificar poliedros.	

Figura 4.9 Competências do sujeito referente à 6ª série/7º ano do Ensino Fundamental.

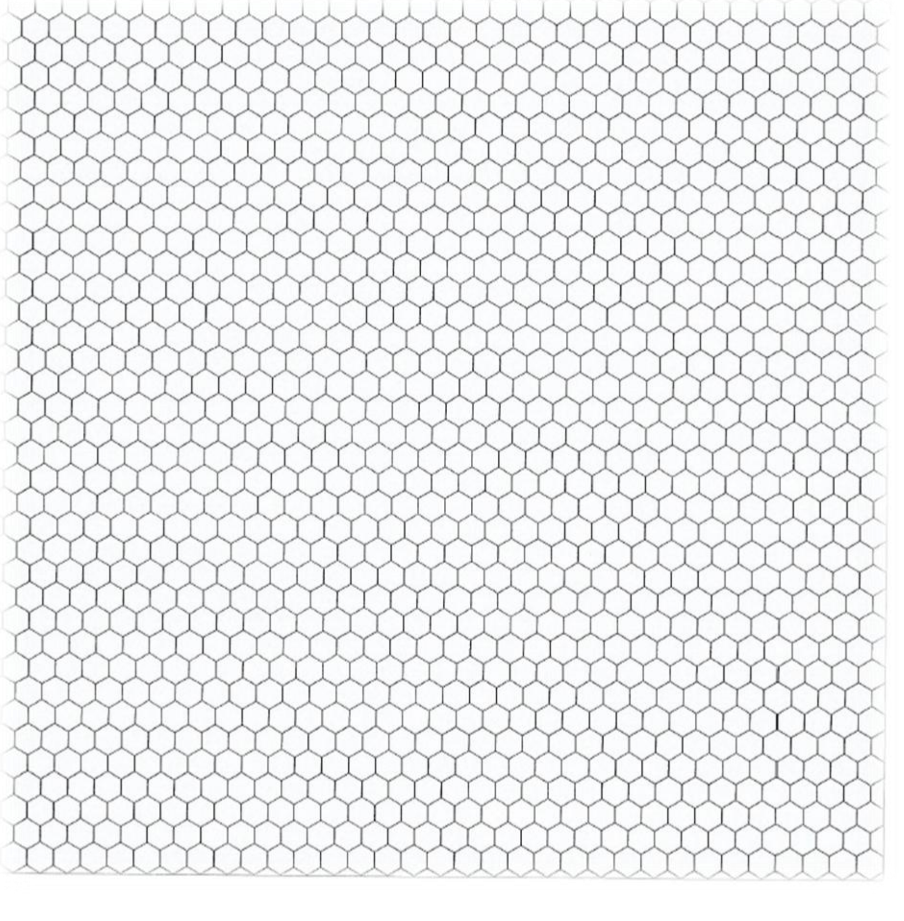
(Fonte: São Paulo, 2009b, p. 72.)

APÊNDICE

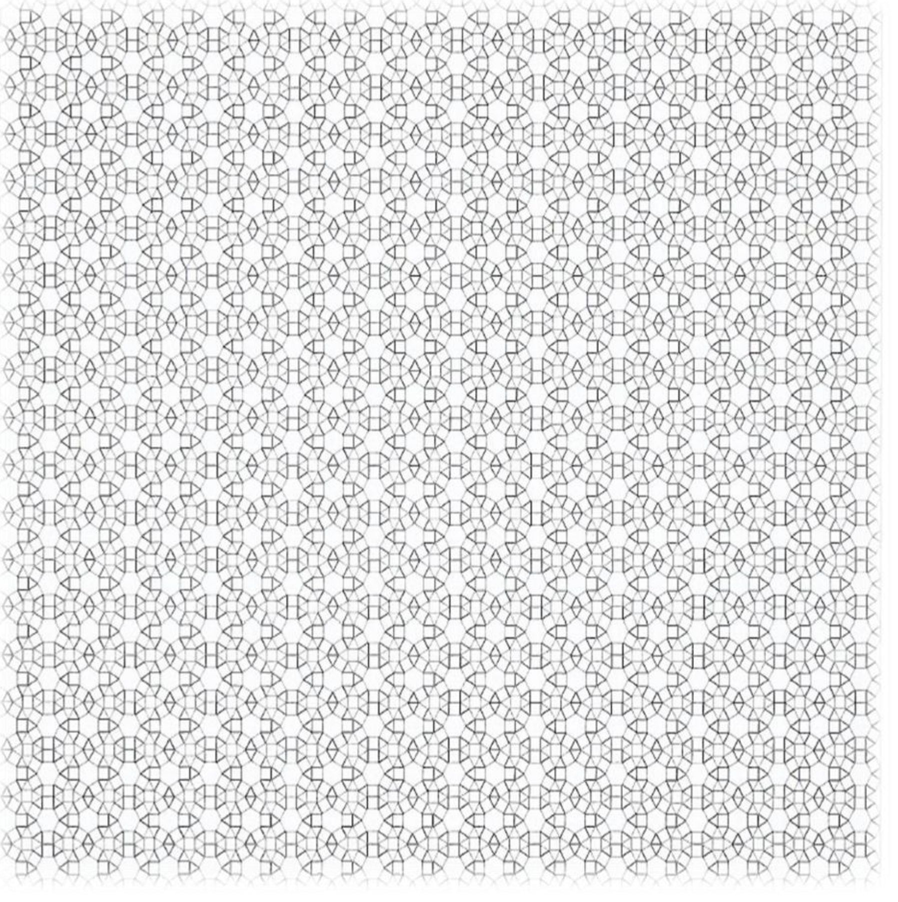
Neste apêndice apresentamos os diversos tipos de malhas utilizados na atividade realizada com as turmas de 5ª Série / 6º Ano, além de fotos da execução e conclusão das atividades apresentadas pelos alunos. Ao final, algumas fotos ilustram o momento da realização da palestra para os alunos das duas séries.

TIPOS DE MALHAS

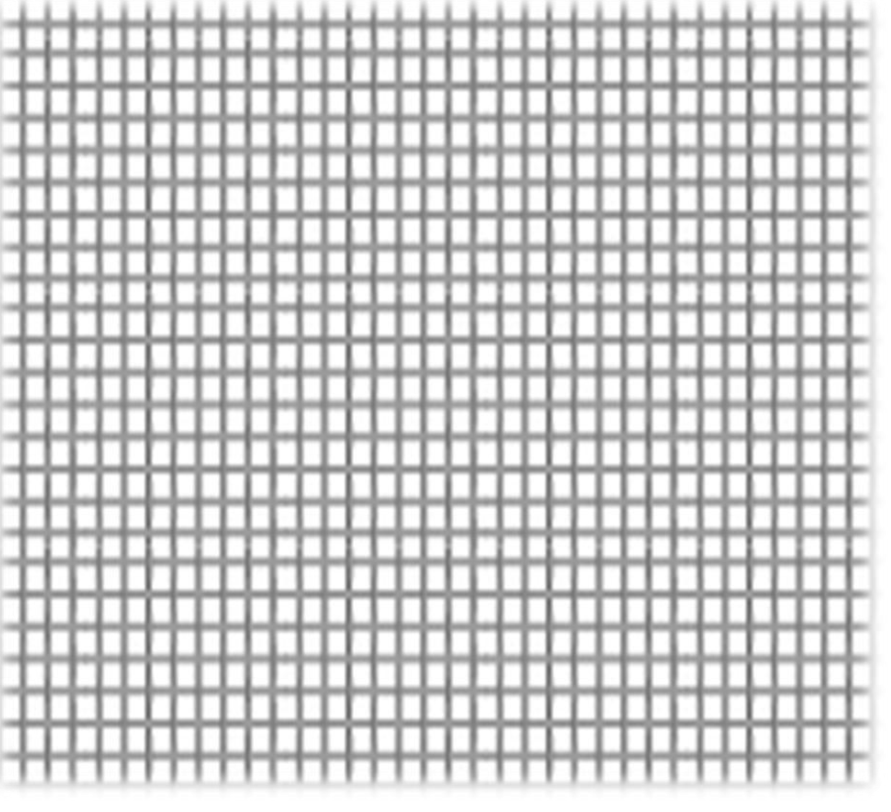
- Malha composta por hexágonos regulares



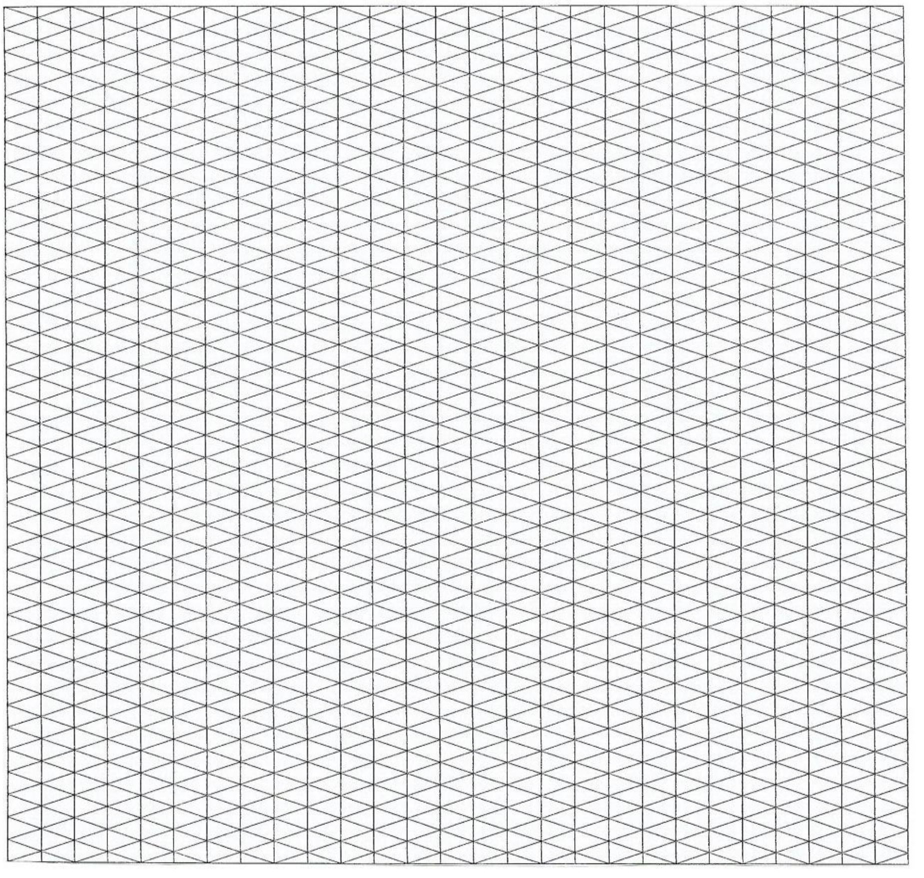
- Malha mista composta de quadrados, triângulos equiláteros e hexágonos regulares



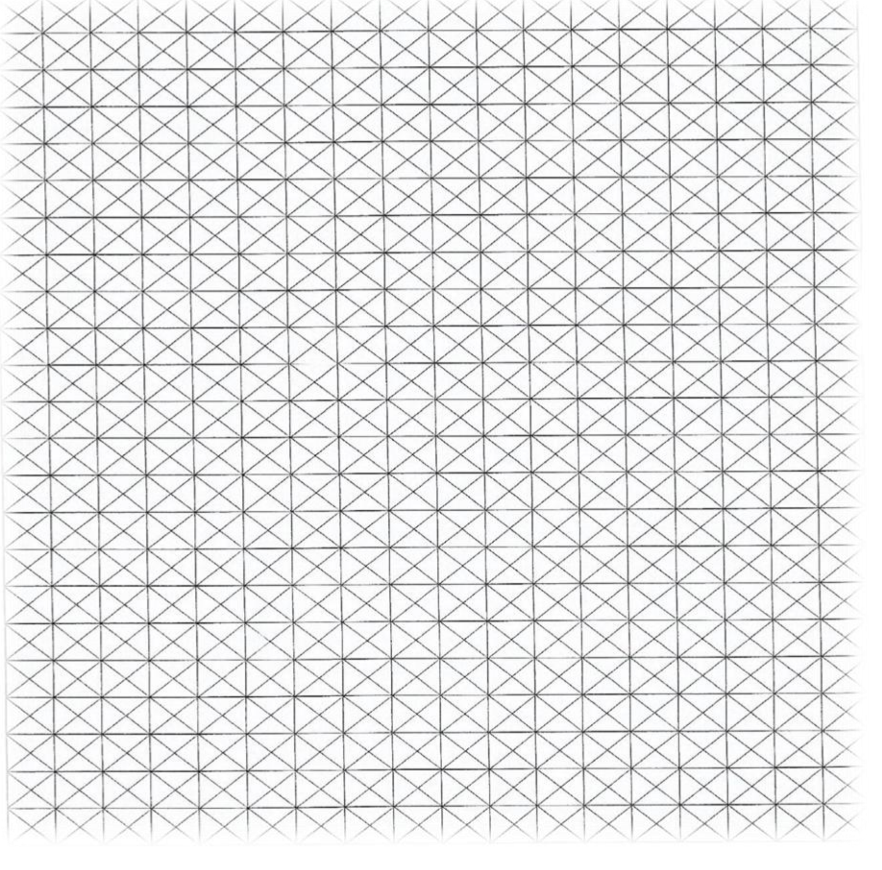
- Malha quadriculada



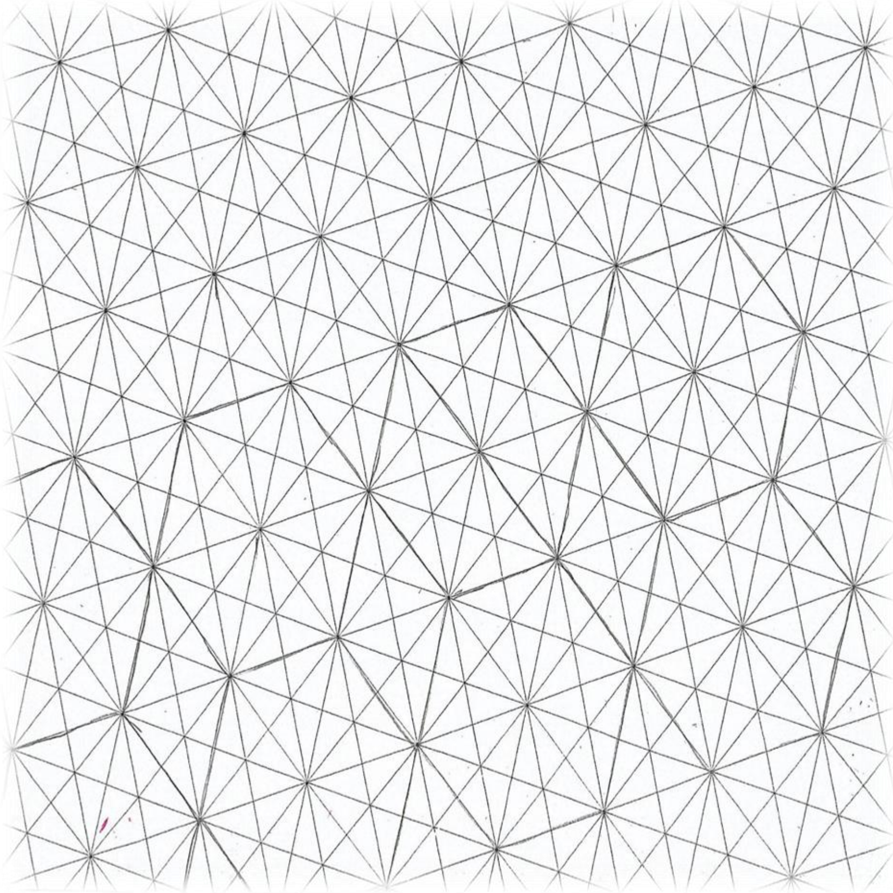
- Malha composta por triângulos equiláteros



- Malha composta por triângulos isósceles

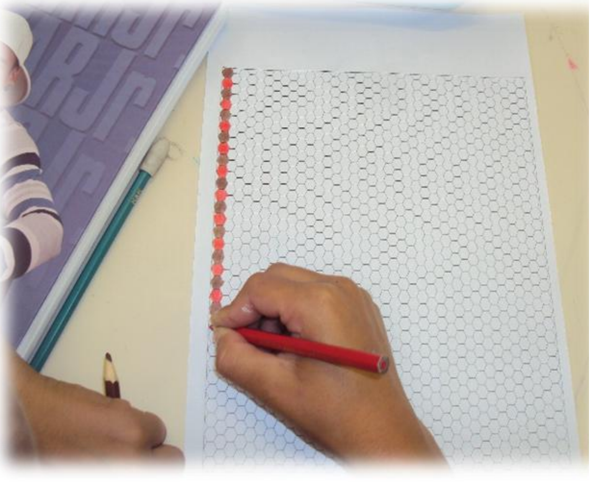


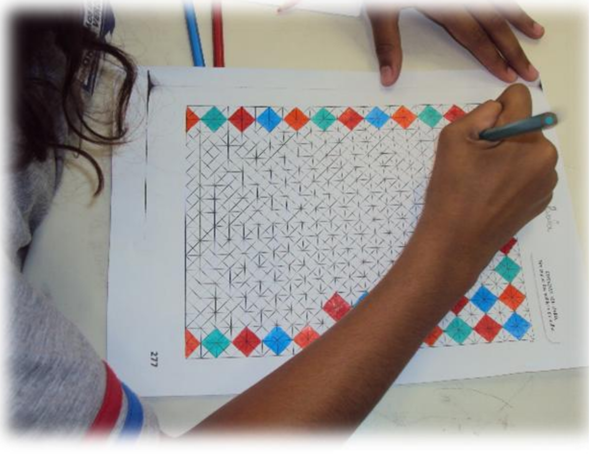
- Malha composta por triângulos escalenos



FOTOS

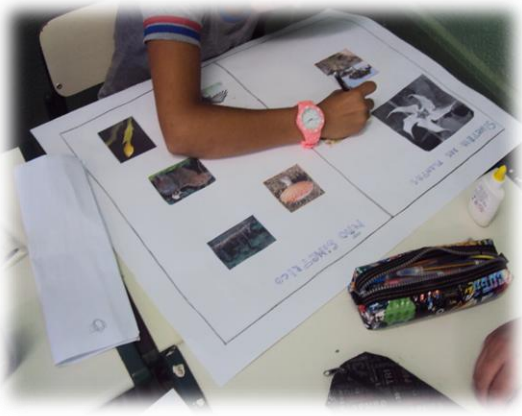
- Execução do Projeto da 5ª Série / 6º Ano (Turmas A e B)





- Conclusão do Projeto da 5ª Série / 6º Ano (Turmas A e B)

- Execução do Projeto da 6ª Série / 7º Ano (Turmas B)



- Conclusão do Projeto da 6ª Série / 7º Ano (Turmas B)

- Palestra apresentada aos alunos

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BOULOS, P.; CAMARGO, I. ***Geometria Analítica – um tratamento vetorial***. 3ª ed. São Paulo: Ed. Prentice Hall, 2005.

[2] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. ***Parâmetros Curriculares Nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais, terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental****.* Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1998a. 174 p.

[3] BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. ***Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental****.* Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998b. 148 p.

[4] CARVALHO, P. C. P. ***Introdução à Geometria Espacial****.* 4ª ed. Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[5] DOMINGUES, H. H*.* ***Espaços métricos e introdução à topologia***. São Paulo: Ed. Atual, 1982.

[6] ERNST, B. ***O Espelho Mágico de M. C. Escher***. 1ª ed. Editora Taschen, 2007.

[7] GERÔNIMO, J. R.; FRANCO, V. S. ***Simetrias no Plano: uma abordagem geométrica e algébrica****.* Maringá. UEM, 2002.

[8] LIMA, E. L. ***Isometrias****.* Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro: SBM, 1996.

[9] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. ***A Matemática do Ensino Médio***. Coleção Professor de Matemática, Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[10] PÓLA, M. R.; MACHADO S. R. B. ***A Geometria nos Tapetes Persas***. Disponível em <http://wright.ava.ufsc.br/~grupohipermidia/graphica2013/trabalhos/A%20GEOMETRIA%20NOS%20TAPETES%20PERSAS.pdf>. Acesso em: 10 fev. 2014.

[11] POLYA, G. ***A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.*** Rio de Janeiro: Interciência, 1977.

[12] REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. ***Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas***. 3ª ed. Campinas: Ed. da UNICAMP, 2008.

[13] ROSA, C. A. P. ***História da Ciência***. Disponível em <http://www.funag.gov.br/biblioteca/dmdocuments/HISTORIA_DA_CIENCIA_VOL_II_TOMO_II.pdf>. Acesso em: 13 jan. 2014.

[14] SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. ***Caderno do Aluno: Matemática. Ensino Fundamental 6ª série, volume 2***. Secretaria da Educação; Coordenação geral, São Paulo, SEE, 2009a.

[15] SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. ***Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias - Ensino Fundamental – Ciclo II e Médio***. São Paulo, SEE, 2011. 72p.

[16] SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. ***Matrizes de referência para a avaliação SARESP: documento básico.*** Secretaria da Educação; Coordenação geral, São Paulo, SEE, 2009b. 174 p. v. 1

[17] SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. ***Proposta Curricular do Estado de São Paulo*****.** São Paulo, SEE, 2008. 35p.

[18] SCHATTSCHNEIDER, D. ***M. C. ESCHER: Visions of Symmetry***. Editora Abrams, 2ª edição, 1990.

[19] SILVA, A. C. Simetria passo a passo. ***Projeto Klein de Matemática***. Disponível em <http://klein.sbm.org.br/wp-content/uploads/2012/11/artigo_simetrias_1.pdf>. Acesso em: 07 jan. 2014.

[20] SILVA, A. C. Simetria passo a passo II. ***Projeto Klein de Matemática***. Disponívelem<http://klein.sbm.org.br/wp-content/uploads/2012/10/artigo_simetrias_21.pdf>. Acesso em: 07 jan. 2014.

[21] TINOCO, M. J. ***Isometrias***. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2012. Disponível em <http://sigarra.up.pt/fcup/pt/publs_pesquisa.showpubl_file?pct_gdoc_id=10348>. Acesso em: 02 jan. 2014.