Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

GRANDEZAS PROPORCIONAIS: Um estudo aprofundado para uma melhor compreensão da fórmula $f(x) = ax$ como modelo matemático para os problemas de proporcionalidade direta.

Antônio Cardoso do Amaral

Teresina
2014

Antônio Cardoso do Amaral

Dissertação de Mestrado:

Grandezas Proporcionais: Um estudo aprofundado para uma melhor compreensão da fórmula $f(x) = ax$ como modelo matemático para os problemas de proporcionalidade direta.

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. João Xavier da Cruz Neto

Teresina

2014

Grandezas Proporcionais: Um estudo aprofundado para uma melhor compreensão da fórmula $f(x) = ax$ como modelo matemático para os problemas de proporcionalidade direta.

Antônio Cardoso do Amaral

Dissertação submetida à Comissão de Pós-gradução em Matemática da Universidade Federal do Piauí, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

____

Prof. Dr. João Xavier da Cruz Neto (Orientador).
Professor (Adjunto) do DM/CCN-UFPI

______________________________-

Dr.
Professor

______________________________-

Dr.
Professor

Teresina - 2014

Amaral, Antonio Cardoso do.

xxxx GRANDEZAS PROPORCIONAIS: Um estudo aprofundado para uma melhor compr

. - 2014

folhas.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Piauí, 2014.

Orientador: Prof. Dr. João Xavier da Cruz Neto

1.Geometria

CDD

Dedico este trabalho a todos aqueles que anseiam por dias melhores, apostando na educação como fonte segura para o futuro dos nossos jovens.

Agradecimentos

A presença divina foi demonstrada, seja nas dificuldades, desafios, alegrias, tristezas, afetos. Afinal, "É o coração que percebe Deus, e não a razão"(Blaise Pascal) ;

Agradeço a todos que conseguiram com palavras ou atitudes, aumentar a minha confiança e entusiasmo para essa conquista.

“*A primeira regra do ensino é saber o que se deve ensinar, a segunda é saber um pouco mais daquilo que se deve ensinar.*".

George Polya.

Resumo

Neste trabalho apresentamos um conjunto de definições, proposições e propriedades que serviram para a demonstração do Teorema Fundamental da Proporcionalidade. Usamos o livro "Meu Professor de Matemática e outras histórias" do professor Elon Lages Lima, especialmente o tópico intitulado "Grandezas Proporcionais", como principal fonte esclarecedora do assunto.

Fizemos uma pesquisa sobre como os principais livros didáticos abordam a relação entre duas grandezas proporcionais e procuramos fazer uma conexão direta com o professor de Matemática da educação básica no que diz respeito à maneira como este assunto é apresentado para os alunos e buscamos através de situações novas tornar mais interessante e significativo o ensino de um dos temas mais importantes para a construção do conhecimento humano, que é a verdadeira compreensão da relação entre duas grandezas proporcionais.

Palavras-chave: Razao; Proporção; Grandezas Proporcionais.

Abstract

In this thesis we present a set of definitions, propositions and properties that will serve to the demonstration of the Fundamental Theorem of Proportionality. We use the book "My Math teacher and others stories" of professor Elon Lages Lima, specially the topic entitled "Proportional Greatnesses", as main enlightening source of the subject.

We did a research about how the main didactic books approach the relation between two proportional greatnesses and attempted to do a direct connection with the mathematic teacher of the basic education in terms of the manner as this subject is presented to the students and tried, through new situations, to turn more interesting and significant the teaching of one of the most important subjects for the construction of human knowledge, which is the truly understanding of the relation between two proportional greatnesses.

Keywords: Ratio; Proportion; Proportional Greatness.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Fazendo uma busca nos artigos publicados na Revista do Professor de Matemática (RPM), nos livros publicados pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) na sua coleção Professor de Matemática e na coleção PROFMAT e no livro "História da matemática: Uma visão crítica desfazendo mitos e lendas", buscamos, neste trabalho, levar aos professores de matemática da educação básica os principais fundamentos que possam conduzir a uma boa compreensão dos conceitos de proporcionalidade tão presentes em diversas situações do cotidianos e com uma incrível oportunidade da ocorrência da tal interdisciplinaridade entre todas as áreas científicas. Por exemplo, na RPM nº 09, concordamos plenamente com as escritas do professor Geraldo Ávila em seu artigo "Ainda Sobre Regra de Três": *"É tão próprio e conveniente que o professor de Matemática mostre aplicações da Matemática às outras ciências, como é próprio e muitas vezes necessário que professores das outras ciências recordem ou expliquem tópicos de Matemática em suas aulas".* O assunto pode parecer simples aos olhos de quem o domina, porém, quando observado no seio das suas formalidades, faz-se necessário um cuidado redobrado na maneira como é dito ou ensinado. Aliás, encontramos trabalhos escritos por grandes pesquisadores alguma divergência pelo menos no trato metodológico do conteúdo em questão. E na verdade, a grande preocupação nem está no fato de que a apresentação do conceito de razão e proporção não se modernizou, mas como os problemas estão sendo interpretados e até que ponto as receitas (flechas, tabelinhas) atropelam o raciocínio do aluno evitando a valorização dos procedimentos fazendo com que apareçam casos em que decisões erradas sejam tomadas.

Estudamos diversas publicações na tentativa de construir um trabalho útil para o professor na preparação das suas aulas. Nesta pesquisa percebe-se que o formalismo presente na apresentação das definições, proposições e demonstrações certamente afasta muitos na busca da verdadeira compreensão. Precisamos entender que quem concebe estes trabalhos está muito mais perto da pesquisa propriamente dita do que da sala de aula, por isso, é preciso um pouco mais de perseverança da parte do professor para um melhor aproveitamento, sem desconhecer, é claro, que o sistema corre contra qualquer boa formação continuada. Neste sentido, adiantamos que quase tudo aqui está em torno do tópico "Grandezas Proporcionais", do livro "Meu Professor de Matemática", do pesquisador Elon Lages Lima. Foi lá que encontramos a mais pura apresentação daquilo que, acredito, precisamos dominar para ensinar bem o assunto.

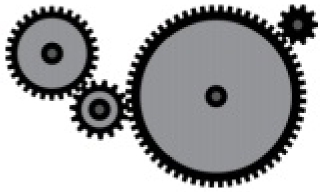
O principal referencial para organização dos conteúdos a serem trabalhados na escola básica, os Parâmetros Curriculares Nacionais, sugere que o bloco Grandezas e Medidas esteja presente em todos os níveis de ensino, principalmente pela sua forte relevância social devido a seu caráter prático e utilitário, e pelas possibilidades de variadas conexões com outras áreas do conhecimento. Na prática, isso significa que desde cedo o aluno seja capaz de reconhecer bem e saber tratar as diferentes grandezas (comprimento, massa, tempo, capacidade, temperatura etc) incluindo as que são determinadas pela razão ou produto de duas outras (velocidade, energia elétrica, densidade demográfica etc). É claro que as intenções dos nossos livros didáticos são boas, alguns são até considerados ótimos, mas o rol de problemas são os mesmos de sempre e isso parece contribuir para que o professor não abandone a sua metodologia tão tradicional.

Como meio de conduzir o que queremos mostrar para uma situação real, o professor pode facilmente levar para seus alunos de 11 ou 12 anos o seguinte problema proposto para alunos dessa idade no Canguru Sem Fronteiras[1] do ano de 2012:

O desenho abaixo representa quatro engrenagens acopladas. A primeira tem 30 dentes, a segunda tem 15, a terceira 60 e a última tem 10 dentes. Se a primeira engrenagem dá

[1]Importante evento internacional de matemática formalizado na França em 1995, a partir das competições de matemática realizadas na Austrália.

uma volta, quantas voltas dará a última?



Veja a resolução dada pela banca:

O número de voltas de um par de engrenagens acopladas é inversamente proporcional ao número de dentes dessas engrenagens. Assim, quando a engrenagem de 30 *dentes dá uma volta, a engrenagem de* 15 *dentes dá* $\frac{30}{15} \times 1 = 2$ *voltas. A engrenagem acoplada a esta tem* 60 *dentes, logo dá* $\frac{15}{60} \times 2 = 0,5$ *(meia) volta e a última engrenagem dá* $\frac{60}{10} \times 0,5 = 3$ *voltas.*

Nessa idade já é possível compreender que duas engrenagens acopladas tem suas quantidades de voltas aumentando respectivamente de acordo uma certa regra. Ou seja, uma, duas, três voltas de uma engrenagem de 30 dentes faz outra de 15 acoplada a ela completar duas, quatro, seis voltas. Posteriormente é dito ao aluno que ocorre uma situação de proporcionalidade (direta). Agora, imagine a sutileza de perceber e explicar a existência de duas grandezas inversamente proporcionais, no caso do número de voltas e o número de dentes, não é tão trivial como parece. Por outro lado, ainda temos que nos perguntar se isso é suficiente, ou seja, será que o aluno está pronto para entender a relação entre duas grandezas que são diretamente ou inversamente proporcionais? E do ponto de vista do professo? Já devemos desmistificar a tal "regra"? Ou devemos colocar mais condições para afirmar que a relação é uma proporcionalidade?

Na sala de aula sempre nos deparamos com situações que esse tipo de pergunta fica sem respostas. Acreditamos fortemente que o professor como principal conhecedor do seu público e ambiente de trabalho deve saber perfeitamente quando e como trabalhar os pormenores de cada assunto. No entanto, uma boa formação está diretamente ligada a estas tomadas de decisão.

O tema central deste trabalho será tratado a nível de Ensino Médio. Não como deve ser mostrado para os alunos, nem mesmo como defesa de como deve ser ensinado. Mas como auxílio para o professor interessado em estudar mais sobre o assunto. Nos afastaremos da elaboração de regras, e nessa jornada faremos conhecidos dos números reais bem como das funções de variáveis reais.

No capítulo que segue falaremos um pouco do contexto histório a cerca das proporções, assim como todo importante conteúdo de Matemática. Nos demais capítulos construiremos as nossas definições, proposições e teoremas úteis para finalmente demonstrarmos o Teorema Fundamental das Proporções. Encerraremos o trabalho com relatos da pesquisa feita nos seis livros didáticos do Ensino Médio aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) para a escolha em 2014 e uso nas escolas públicas a partir de 2015.

Capítulo 2

Contexto Histórico

Os relatos históricos atribuem aos gregos os primeiros trabalhos sobre razões e proporções. O que sabemos é que grande parte do que se conhece de matemática na Grécia antiga giram em torno dos escritos de Platão e Aristóteles ou dos *Elementos* de Euclides, embora a versão mais popular é a que esse livro resulta de uma compilação de conhecimentos matemáticos anteriores. Mas pode ser que isso se deva às características daquele tempo e do meio em que Euclides viveu.

O conceito de razão encerra a ideia de comparação de tamanhos. Portanto, qualquer tipo de comparação entre grandezas pode ser encarada como uma teoria sobre razões.

Nos Elementos de Euclides, podemos encontrar dois tipos de teoria sobre razões e proporções. Há uma versão no livro VII, que pode ser aplicada somente à razão entre números inteiros, e é atribuída aos pitagóricos. A definição contida aí pode ser usada para razões entre grandezas comensuráveis. A segunda versão, presumidamente posterior à primeira, está contida no livro V e é atribuída ao matemático platônico Eudoxo. Esta última teoria das razões e proporções é bastante sofisticada e se aplica igualmente a grandezas comensuráveis e incomensuráveis. Resumindo, existem duas teorias, uma abrangendo grandezas quaisquer e outra apenas para grandezas comensuráveis.

A definição apresentada no Livro V é abrangente o suficiente para que possa se enquadrar nas diferentes teorias de razão (Livro V, Definição 3):

Uma razão é um tipo de relação referente ao tamanho entre duas grandezas de mesmo tipo.

O "termo grandeza de mesmo tipo" refere-se ao caso em que as grandezas podem ser comparadas entre si, determinando-se qual é a maior e qual é a menor. Assim, dois comprimentos são grandezas de mesmo tipo, bem como duas áreas. Já um comprimento e uma área não são grandezas do mesmo tipo. Logo, o enunciado acima estabelece que só as grandezas de mesmo tipo podem ser comparadas por meio de razões. Comparando as duas teorias sobre razões e proporções expostas por Euclides, há motivos históricos para se acreditar que a inadequação da primeira teoria para tratar as grandezas incomensuráveis tenha levado à busca de uma técnica que pudesse ser aplicada a elas de modo confiável. Existia uma técnica, chamada "antifairese", que já era usada para números. Os matemáticos da época teriam tentado estender, por meio deste procedimento, a teoria das razões e proporções para incluir a comparação entre duas grandezas incomensuráveis. Uma das hipóteses mais confiáveis, defendida por historiadores como Freudenthal, Knorr e Fowler, é a de que o método da antifairese estava na base de uma teoria das razões que era praticada, pelo menos, durante o século IV a.E.C[1] e que teria sido desenvolvida por Teeteto, matemático contemporâneo de Platão e pertencente ao seu círculo. Fowler argumenta que, antes de Euclides, era corrente uma teoria tratando somente de razões, baseada na antifairese, sem a investigação de proporções.

A palavra antifairese vem do grego antho-hypo-hairesis, que significa literalmente subtração recíproca. Na álgebra moderna, o procedimento é conhecido como "algoritmo de Euclides" para encontrar o maior divisor comum entre dois números.

Para uma visão mais aprofundada do assunto recomendamos a referência [8]. Aliás, as escritas deste capítulo são uma cópia resumida dos relatos dados pela grande pesquisadora Tatiana Roque (UFRJ) nessa referêcia.

[1]Antes da Era Comum.

Capítulo 3

Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Trataremos neste capítulo do tema central do trabalho, que é a demonstração do Teorema Fundamental da Proporcionalidade. Seguiremos uma linha teórica, aproveitando o que foi construído a fim de demonstrar outras proposições e teoremas. Adotaremos uma notação funcional nos enunciados tal como aparece no livro base para o trabalho, conforme citado anteriormente.

As grandezas ou "variáveis" serão relacionadas à sua medida, que por sua vez, sempre haverá um número real para essa representação. Aliás, trabalharemos com grandezas cuja medida é um número positivo. Isso torna os resultados mais simples, evitando a consideração de casos. Como pode haver relações entre os valores de duas ou mais grandezas, nos deteremos, especialmente, àquelas que serão chamadas *função*. E no lugar das grandezas usaremos conjuntos não vazios.

3.1 Resultados Preliminares

Definição 3.1. *Sejam* X *e* Y *dois conjuntos não vazios. Uma função* $f : X \longrightarrow Y$ *é definida pela relação entre elementos de* X *e* Y *que a cada* $x \in X$ *associa um único* $y = f(x) \in Y$.

Exemplo 3.1. *Seja* X *o conjunto de todos os livros de uma biblioteca pública e* Y *o* *conjunto dos números naturais. Em uma eventual catalogação é preciso associar a cada volume o número de páginas do livro, essa relação representa uma função. Por outro lado, se* Y *é o conjunto dos frequentadores dessa biblioteca e se algum livro foi lido por mais de uma pessoa, a relação que associa a cada livro o nome do leitor, não representa uma função.*

Definição 3.2. *Sejam* $X \subset \mathbb{R}$ *e a função* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$*, diremos que:*
$i)$ f *é crescente, quando dados* $x, y \in X$ *com* $x < y$ *ocorrer sempre* $f(x) < f(y)$
$ii)$ f *é decrescente, quando* $x, y \in X$ *com* $x < y$ *implicar sempre que* $f(x) > f(y)$

Exemplo 3.2. *Imagine a fórmula que gera o número de uma certa marca de sapato de acordo com o tamanho do pé, em centímetros, das pessoas de um país. O fato é que, para cada tamanho possível de um pé neste país, será calculado o número do seu sapato. Além disso, para uma boa aceitação, se quanto maior o pé, maior for o número do sapato, teremos uma função crescente. Caso contrário, uma função decrescente.*

Exemplo 3.3. *A função* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$*, com* $f(x) = x + 1$*, é uma função crescente. Já a função* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$*, com* $f(x) = -x$*, é decrescente.*

Definição 3.3. *Seja* X *um conjunto de números reais. Então dizemos que:*
$i)$ X *é limitado inferiormente se exitir* $a \in \mathbb{R}$ *tal que* $a \leqslant x$ *para todo* $x \in X$*.*
$ii)$ X *é limitado superiormente se exitir* $b \in \mathbb{R}$ *tal que* $x \leqslant b$ *para todo* $x \in X$*.*

Os números reais a *e* b *são chamados de cota inferior e cota superior respectivamente. A menor das cotas superiores é chamada de supremo de* X *e a maior das cotas inferiores é chamada de ínfimo de* X*.*

O teorema seguinte será colocado sem demonstração. Em seguida, demonstraremos que entre dois números reais sempre haverá um número racional. Este fato será muito importante para o trabalho.

Teorema 3.1. $(\mathsf{Propiedade\ Arquimediana\ dos\ Reais})$
$i)$ *O conjunto* $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ *é ilimitado superior;*
$ii)$ *O ínfimo do conjunto* $X = \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$ *é igual a 0;*
$iii)$ *Dados* $a, b \in \mathbb{R}^+$*, existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $na > b$*.*

Proposição 3.1. (Densidade dos Racionais nos Reais)
Dados dois números reais a *e* b*, digamos* $a < b$*, existe um número racional* c *tal que* $a < c < b$.

Demonstração: Como $a < b$, tem-se $b - a > 0$. Pela Propiedade Arquimediana dos números Reais, tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < b - a$. Os intervalos $I_m = [\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n})$, $m \in \mathbb{Z}$, cobrem toda a reta real, isto é,

$$\mathbb{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}}^{\infty} I_m.$$

Então, existe m inteiro tal que $a \in I_m$, logo $\frac{m}{n} \leqslant a < \frac{m+1}{n}$ e daí $-a \leqslant -\frac{m}{n}(1)$. Como o comprimento de I_m é $\frac{1}{n}$ que é menor que $b-a$, tem-se $\frac{m+1}{n} < b$. De fato, se tivessemos $b \leqslant \frac{m+1}{n}$, somando esta ultima desiguldade com (1), teriamos $b - a \leqslant \frac{1}{n}$, o que é uma contradição. Portanto, considere $c = \frac{m+1}{n}$. ■

Definição 3.4. *Razão é um tipo de comparação existente entre as medidas de duas grandezas. Geralmente é expressa como "*a *para* b*",* $a : b$ *ou* $\frac{a}{b}$*, e algumas vezes representada aritmeticamente como um quociente das duas quantidades que indica explicitamente quantas vezes o primeiro número contém o segundo (não necessariamente um inteiro).*

Por exemplo, para saber quantos baldes de água cabem em uma piscina de $20m^3$ *de volume, sabendo que cada balde tem* $0,005m^3$ *de volume, basta calcular:*

$$\frac{20}{0,005} = 4000 \textit{ baldes.}$$

É claro que o quociente entre as medidas de duas grandezas nos leva a uma comparação, através da ideia de "quanto cabe". Embora sabemos que o conceito de "razão" não se restringe exclusivamente a estes casos.

No que segue, teremos os primeiros ensaios do que nos objetiva aqui.

Uma questão extremamente interessante está na busca da dosagem correta do que deve ser repassado para os alunos de acordo com a sua idade ou ano de estudo. Perguntas como: a definição de proporcionalidade é suficiente para os alunos do Ensino Médio? O assunto deve ser apresentado e demonstrado? Os livros didáticos expõem à sua maneira, ou seja, alguns apenas definem, outros vão mais a frente com demonstrações e ainda tem aqueles sem aplicar bem de onde vem o que estão fazendo.

Não estamos a discutir qual a maneira adequada, embora isso seja um objetivo para o futuro. Queremos, na verdade, contribuir para uma melhor compreensão daquilo que é uma situação de proporcionalidade. Repare que os caso de proporção inversa também foram tratados.

Definição 3.5. *Seja* y *uma grandeza que é função da grandeza* x*, isto é,* $y = f(x)$*. Diz-se que* y *é diretamente proporcional a* x *quando as seguintes condições forem satisfeitas:*
$i)$ y *é uma função crescente de* x*;*
$ii)$ *se multiplicarmos* x *por um número natural* n*, o valor correspondente* y *também fica multiplicado por* n*, isto é,* $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$.

Definição 3.6. *Seja* y *uma grandeza que é função da grandeza* x*, isto é,* $y = f(x)$*. Diz-se que* y *é inversamente proporcional a* x *quando as seguintes condições forem satisfeitas:*
$i)$ y *é uma função decrescente de* x*;*
$ii)$ *se multiplicarmos* x *por um número natural* n*, o valor correspondente* y *fica dividido por* n*, isto é,* $f(n \cdot x) = \dfrac{1}{n} \cdot f(x)$.

Da definição acima resulta que o valor a ser pago em uma compra de qualquer tipo de queijo é diretamente proporcional ao seu "peso". De fato, o preço é uma função crescente do "peso", quanto mais "pesado" for a porção, mais caro será. Além disso, iguais quantidades desse queijo custam o mesmo valor. Logo, na compra de n pedaços de mesmo "peso" deve-se pagar exatamente n vezes o preço de um destes pedaço.

No entanto, a área de um quadrado é uma função crescente do lado, mas se dobrarmos o lado, a área fica multiplicada por quatro. Isso revela o fato de duas grandezas y e x poderem relacionar-se de modo que y seja uma função crescente de x sem que seja diretamente proporcional a x. O mesmo ocorre com grandezas inversamente proporcionais. Ou seja, encontramos facilmente funções decrescentes cuja relação entre suas grandezas não é uma proporcionalidade inversa.

Isso sugere uma pergunta: toda relação tal que ocorra a segunda parte da definição é uma função crescente no caso da proporcionalidade direta e decrescente no outro caso?

A resposta é negativa. Quando as grandezas em questão são dadas por números racionais (ou seja, quando podem ser representatas por medidas de segmentos comensuráveis), este fato ocorre sempre. Porém, se as grandezas podem ser medidas com números reais, é possível encontrar funções que não são crescentes ou decrescentes, mas que se verifica nos racionais a segunda parte da definição. Por isso, a exigência das duas condições nas definições. Isso é o que demonstraremos a seguir. O Lema 3.1 esclarece a primeira questão e o Teorema 3.2 completa o sentido do nosso propósito.

Lema 3.1. *Se* $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ *para todo* $x > 0$ *e todo* $n \in \mathbb{N}$*, então* $f(r \cdot x) = r \cdot f(x)$ *para todo número racional* $r = \frac{p}{q}$, $p,\ q \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Tem-se:

$$q \cdot f(r \cdot x) = f(q \cdot r \cdot x) = f(q \cdot \frac{p}{q} \cdot x) = f(p \cdot x) = p \cdot f(x).$$

Logo $f(r \cdot x) = \frac{p}{q} \cdot f(x) = r \cdot f(x)$.

■

Lema 3.2. *Se* $f(n \cdot x) = \frac{f(x)}{n}$ *para todo* $x > 0$ *e todo* $n \in \mathbb{N}$*, então* $f(r \cdot x) = \frac{f(x)}{r}$ *para todo número racional* $r = \frac{p}{q}$, $p,\ q \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Análoga à anterior.

■

Se o universo em que estamos é o conjunto dos números racionais (ou qualquer outro, onde qualquer par de grandezas fossem sempre comensuráveis) a condição $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ implicaria que $y = f(x)$ seria crescente. De fato, sejam $x_1 < x_2$. Entao $x_2 = c \cdot x_1$ onde $c > 1$. Sendo x_1 e x_2 comensuráveis, tem-se $c \in \mathbb{Q}$, e daí pelo Lema 3.1, $f(x_2) = f(c \cdot x_1) = c \cdot f(x_1)$, portanto $f(x_1) < f(x_2)$. E analogamente, usando o Lema 3.2, concluiriamos que $f(n \cdot x) = \frac{f(x)}{n}$ implicaria $y = f(x)$ decrescente.

Veja um exemplo em que as segundas condições das definições acima não necessariamente implicam nas primeiras. Reafirmando o fato de necessitarmos das duas condições nas definições de grandezas proporcionais:

Exemplo 3.4. *Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} x, & se \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0, & se \quad x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

Observe que vale $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$. *De fato, se* $x \in \mathbb{Q}$, *então* $f(x) = x$ *e* $n \cdot x \in \mathbb{Q}$, *logo* $f(n \cdot x) = n \cdot x = n \cdot f(x)$. *E se* $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, *então* $f(x) = 0$ *e* $n \cdot x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, *logo* $f(n \cdot x) = 0 = n \cdot f(x)$. *Porém* f *não é crescente. Ora, basta tomar* $x_1 = 2$ *e* $x_2 = \sqrt{5}$. *Repare que* $x_1 < x_2$ *enquanto que* $f(x_2) < f(x_1)$.

Os teoremas a seguir encerram aquilo que queremos deixar como objeto motivador para uma compreensão verdadeira da relação de proporcionalidade entre duas grandezas. Não apresentaremos novidades mas reforçamos a importância da atenção ao tratamento adequado aos conteúdos de Matemática independente do público que deve ser atingido. Nas referências [4] e [5] encontra-se todos os demais detalhes por aqui iniciados.

3.2 Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Teorema 3.2. (Teorema Fundamental da Proporcionalidade I)
As seguintes afirmações a respeito de $y = f(x)$ *são equivalentes:*
1) y *é diretamente proporcional a* x*;*
2) *para todo número real* $c > 0$, *tem-se* $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$*;*
3) *existe um número k, chamado a "constante de proporcionalidade" entre* x *e* y, *tal que* $f(x) = k \cdot x$ *para todo* x.

Demonstração: 1) $\Rightarrow$ 2) *Suponha, por absurdo, que* $y = f(x)$ *seja diretamente proporcional a* x, *mas que exista um* c *real tal que* $f(c \cdot x) \neq c \cdot f(x)$, *digamos* $f(c \cdot x) < c \cdot f(x)$, *isto é,* $\dfrac{f(c \cdot x)}{f(x)} < c$. *Agora fazendo uso do Teorema 3.1, toma-se* r *racional tal que* $\dfrac{f(c \cdot x)}{f(x)} < r < c \Leftrightarrow f(cx) < r \cdot f(x) < c \cdot f(x)$*(aqui ressalta-se o fato de trabalharmos apenas com grandezas positivas). E pelo Lema 3.1 podemos reescreveer estas desigualdades como* $f(cx) < f(rx) < c \cdot f(x)$. *Mas a desigualdade* $f(cx) < f(rx)$ *juntamente com* $r < c \Rightarrow rx < cx$, *está em contradição com o fato de* y *ser diretamente proporcional a* x, *e ser portanto uma função crescente. Logo* $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$.

2) $\Rightarrow$ 3) *Tome* $k = f(1)$, *e* x *em lugar de* c *em* 2), *daí:*

$$f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = x \cdot k = k \cdot x$$

3) $\Rightarrow$ 1) *Como só lidamos com grandezas de medidas positivas* $f(1) = k \cdot 1 = k > 0$. *Então* $x_1 < x_2$ *implica* $k \cdot x_1 < k \cdot x_2$, *ou seja,* $f(x_1) < f(x_2)$, *portanto* $y = f(x)$ *é uma função crescente de* x *(Condição* i) *da Definicão 3.5). Além disso,* $f(n \cdot x) = k \cdot nx = n \cdot kx = n \cdot f(x)$ *(Condição* ii) *da Definicão 3.5). Concluindo assim que* y *é diretamente proporcional a* x.

∎

Sabendo que $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ *para todo* n *natural, pelo Lema 3.1, mostramos que* $f(r \cdot x) = r \cdot f(x)$ *para todo* r *racional, mas para galgarmos um degrau maior, mostramos que* $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$ *para todo* c *real, usamos fortemente o fato de* f *ser crescente. Essa exigência faz sentido, pois sem ela é possível termos inconsistências como no Exemplo 3.2, onde* f *não é crescente e não é válida a igualdade no caso de* c *real qualquer, por exemplo tomemos* $c = x = \sqrt{2}$, *então* $f(c \cdot x) = f(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) = f(2) = 2 \neq 0 = \sqrt{2} \cdot 0 = \sqrt{2} \cdot f(\sqrt{2}) = c \cdot f(x)$.

A saber, acima podemos trocar a exigência de f *ser crescente por sua continuidade. De fato, dado* $c \in \mathbb{R}$ *e usando a Proposição 3.1, tome uma sequência de números racionais* $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *tal que* $\lim r_n = c$. *Como sabemos que* $f(r \cdot x) = r \cdot f(x)$ *para todo* r *racional, temos* $f(r_n \cdot x) = r_n \cdot f(x)$, *passando o limite e usando a continuidade de* f, *obtemos:*

$$f(c \cdot x) = f(\lim r_n \cdot x) = \lim f(r_n \cdot x) = \lim(r_n \cdot f(x)) = c \cdot f(x).$$

Veja que esta observação não gera um absurdo com o Exemplo 3.2, pois neste exemplo f *não é contínua.*

Teorema 3.3. (Teorema Fundamental da Proporcionalidade II) *As seguintes afirmações a respeito de* $y = f(x)$ *são equivalentes:*

1) y *é inversamente proporcional a* x;

2) *para todo número real* $c > 0$, *tem-se* $f(c \cdot x) = \dfrac{f(x)}{c}$;

3) *existe um número k, chamado a "constante de proporcionalidade" entre* x *e* y, *tal que* $f(x) = \dfrac{k}{x}$ *para todo* x.

Demonstração:

Considere y *como função de* $\frac{1}{x}$, *isto é,* $y = f(x) = f'(\frac{1}{x})$. *E sejam as seguintes asserções:*

$1')$ y *é diretamente proporcional a* $\frac{1}{x}$*;*

$2')$ *para todo número real* $d > 0$, *tem-se* $f'(d \cdot \frac{1}{x}) = d \cdot f'(\frac{1}{x})$*;*

$3')$ *existe um número k, chamado a "constante de proporcionalidade" entre* $\frac{1}{x}$ *e* y, *tal que* $f'(\frac{1}{x}) = k \cdot \frac{1}{x}$ *para todo* x.

Mostraremos agora que $1) \Leftrightarrow 1')$, $2) \Leftrightarrow 2')$ *e* $3) \Leftrightarrow 3')$. *De fato,*

- $1) \Leftrightarrow 1')$

  $1) \Rightarrow 1')$ *Sabendo que* y *é inversamente proporcional a* x, *mostraremos que* $y = f'(\frac{1}{x})$ *é diretamente proporcional a* x. *Sejam* $\frac{1}{x_1} < \frac{1}{x_2}$ *então* $x_2 < x_1$ *e segue da Definição 3.6 que* $f(x_2) < f(x_1)$. *Daí, temos* $f'(\frac{1}{x_1}) < f'(\frac{1}{x_2})$ *concluindo assim que* f' *é crescente para* $\frac{1}{x} > 0$. *Pela Definição 3.6:*

$$f(x) = f(n \cdot \frac{1}{n} \cdot x) = \frac{1}{n} \cdot f(\frac{1}{n} \cdot x)$$

$$f(\frac{1}{n} \cdot x) = n \cdot f(x).$$

  Segue que $f'(n \cdot \frac{1}{x}) = f(\frac{1}{n} \cdot x) = n \cdot f(x) = n \cdot f'(\frac{1}{x})$, *e portanto* f' *satisfaz as condições da Definição 3.5.*

  $1') \Rightarrow 1)$ *Análoga à anterior.*

- $2) \Leftrightarrow 2')$

$$f(cx) = \frac{f(x)}{c} \overset{d=\frac{1}{c}>0}{\Longleftrightarrow} f(\frac{1}{d}x) = d \cdot f(x) \Leftrightarrow f'(d \cdot \frac{1}{x}) = d \cdot f'(\frac{1}{x})$$

- $3) \Leftrightarrow 3')$

$$f(x) = \frac{k}{x} \Leftrightarrow f'(\frac{1}{x}) = k \cdot \frac{1}{x}$$

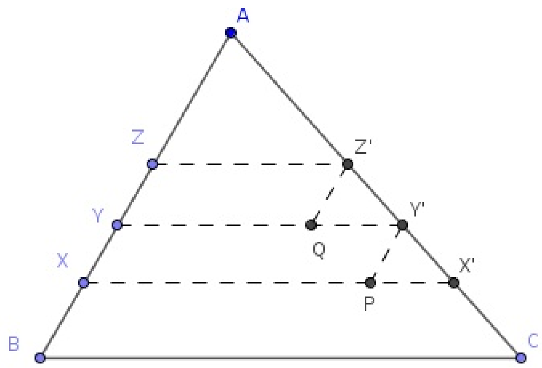
Sabemos pelo Teorema 3.2 que $1') \Leftrightarrow 2') \Leftrightarrow 3')$, *daí segue que* $1) \Leftrightarrow 2) \Leftrightarrow 3)$.

∎

Teorema 3.4. (Teorema de Tales)

Toda paralela a um dos lados de um triângulo divide os outros dois lados em segmentos proporcionais.

Demonstração:



Seja o triângulo ABC. *Por cada ponto* X *do lado* AB *traçamos uma paralela a* BC *que cruza* AC *em* X'. *Provaremos que o comprimento* $X'C$ *é diretamente proporcional ao comprimento* XB. *Dados dois pontos* X *e* Y *de AB, como* XX' *e* YY' *são paralelas, se* $XB < YB$ *então* $X'C < Y'C$. *Agora afirmamos que se os pontos* X, Y, Z *do* AB *são tais que* $XY = YZ$ *então* $X'Y' = Y'Z'$. *De fato, tomemos pontos* P *em* XX' *e* Q *em* YY' *de modo que* $Y'P$ *e* $Z'Q$ *sejam paralelos a* AB. *Como* $PY' = QZ'$, $\angle Z'QY' = \angle Y'PX'$ *e* $\angle QZ'Y' = \angle PY'X'$ *os triângulos* $PX'Y'$ *e* $QY'Z'$ *são conguentes, logo* $X'Y' = Y'Z'$.
Segue indutivamente que se X, Y *são pontos de* AB *com* $YB = n \cdot XB$ *então* $Y'C = n \cdot X'C$. *Portanto temos pela definição que* $X'C$ *é diretamente proporcional a* XB. *Pelo Teorema 3.2 existe uma contante* k *tal que, para todo ponto* X *do segmento* AB *tem-se* $X'C = k \cdot XB$ (1). *Se* $X = A$, *então* $A' = A$ *e* $AC = k \cdot AB$ (2). *Subtraindo* (1) *de* (2) *temos:* $AX' = k \cdot AX$ (3). *E finalmente dividindo* (3) *por* (1), *temos:*

$$\frac{AX'}{X'C} = \frac{AX}{XB}$$

$\blacksquare$

Em diversas situações uma grandeza z *pode estar relacionada com algumas outras, digamos,* x, y, u, v, w, *de modo que a cada escolha destas últimas corresponde um único valor bem determinado para* z. *Dizemos então que* z *é uma função de* x, y, u, v, w *e escrevemos* $z = f(x, y, u, v, w)$.

Neste caso, dizemos também que z *é diretamente proporcional a* x *quando:*
$i)$ *para quaisquer valores fixados de* y, u, v, w, *e* $x_1 < x_2$ *implica* $f(x_1, y, u, v, w) < f(x_2, y, u, v, w)$;
$ii)$ *para quaisquer* x, y, u, v, w *e* $n \in \mathbb{N}$, *tem-se* $f(n \cdot x, y, u, v, w) = n \cdot f(x, y, u, v, w)$.

Analogamente dizemos que z *é inversamente proporcional a* x *quando:*
$i)$ *para quaisquer valores fixados de* y, u, v, w, *e* $x_1 < x_2$ *implica* $f(x_1, y, u, v, w) > f(x_2, y, u, v, w)$;
$ii)$ *para quaisquer* x, y, u, v, w *e* $n \in \mathbb{N}$, *tem-se* $f(n \cdot x, y, u, v, w) = f(x, y, u, v, w) \backslash n$.

Vale ressaltar que definições inteiramente analógas podem ser dadas para as demais variáveis y, u, v, w. *Como no caso de uma só variável, tem-se* f *inversamente proporcional a* x *se, e somente se,* f *é diretamente proporcional a* $1/x$.

O próximo teorema vem generalizar os resultados dados pelos Teorema 3.2 e 3.3 para grandezas que estejam relacionadas a mais de uma variável, ou seja, no caso de uma função de várias variáveis. Para uma melhor compreensão, consideraremos apenas as variáveis x, y, u, v, w, *mas é claro que o teorema vale para um número qualquer de variáveis.*

Teorema 3.5. *Seja* $z = f(x, y, u, v, w)$. *As seguintes afirmações são equivalentes:*
1) z *é diretamente proporcional a* x, y *e inversamente proporcional a* u, v, w.
2) *existe uma constante* k *tal que* $z = k \cdot \dfrac{x \cdot y}{u \cdot v \cdot w}$.

Demonstração:

1) $\Rightarrow$ 2)*:*

Seja $k = f(1,1,1,1,1)$. *Fazendo uso direto, em cada variável, dos Teoremas 3.2 e 3.3, temos:*

$$\begin{aligned} z &= f(x,y,u,v,w) = f(x\cdot 1,y,u,v,w) = x\cdot f(1,y,u,v,w) = xy\cdot f(1,1,u,v,w) \\ &= \frac{xy}{u}\cdot f(1,1,1,v,w) = \frac{xy}{uv}\cdot f(1,1,1,1,w) = \frac{xy}{uvw}\cdot f(1,1,1,1,1) = k\frac{xy}{uvw}. \end{aligned}$$

2) $\Rightarrow$ 1)

Esta implicação segue direto da definição.

$\blacksquare$

Resulta imediatamente do teorema acima que (e também da própria definição) que uma grandeza é diretamente proporcional (ou inversamente) proporcional ao produto dessas outras.

Por exemplo, a área $A = (x,y)$ *de um retângulo de base* x *e altura* y *é diretamente proporcional a* x *e a* y. *Basta verificar quanto a* x*; a outra verificação é análoga. Primeiro, se* $x_1 < x_2$ *então* $A(x_1,y) < A(x_2,y)$. *Porque o retângulo de base* x_1 *e altura* y *está contido no retângulo de base* x_2 *e mesma altura* y. *Além disso, o retângulo de base* $n\cdot x$ *e altura* y *se decompõe como reunião de* n *retângulos justapostos, todos como base* x *e altura* y, *logo* $A(n\cdot x,y) = n\cdot A(x,y)$. *Segue-se do Teorema 3.5 que existe uma constante* k *tal que* $A(x,y) = k\cdot xy$. *Ora,* $k = A(1,1)$ *é a área de um retângulo de base e altura iguais a* 1*(quadrado unitário). Mas o quadrado de lado* 1 *é tomado como unidade de área, logo* $A(1,1) = 1$. *Portanto* $k = 1$ *e* $A(x,y) = x\cdot y$.

Repare que quando atravessamos a barreira das questões de comensurabilidade, tudo ficou mais simples e sofisticado. Agora, o certo é que, em algum lugar a transposição dos racionais para os irracionais deve ocorrer. Vimos aqui que se a escolha é fazer isso na apresentação do Teorema Fundamental da Proporcionalidade, seria dado um grande salto para a construção de outros conceitos, como no caso do cálculo da área da região retangular. Se a opção for por apenas definir o teorema sem demonstrá-lo, fica a necessidade de fazer isso nos casos gerais de alguns teoremas que tratam de medida.

É por isso que precisamos de parâmetros mais apurados para a elaboração de conteúdos a serem levados para a sala de aula.

Capítulo 4

Considerações Finais

Ratificamos o sentido da frase inicial do nosso trabalho, atribuída a George Pólya, na importância do domínio daquilo que deve ser ensinado.

Guardadas as condições de cada educador, tomar como base uma preparação do que vai ser trabalhado é antes de tudo o primeiro dos passos a se dar. Acreditamos, sobretudo, na boa formação do principal mediador de todo o conhecimento: o professor. Além do conhecimento, é claro, as ferramentas básicas fundamentais já estão sendo garantidas. O livro didático do aluno tem uma grande importância em todo o processo, por isso, quanto maior a qualidade do material, maior também serão as chances dos objetivos serem atingidos. Falaremos, pois, do programa responsável pela chegada dos livros didáticos até as nossas escolas públicas. Depois disso, daremos algumas opiniões a respeito do tratamento dado ao nosso tema de trabalho nos livros didáticos aprovados na última avaliação do governo.

4.1 O Programa Nacional do Livro Didático

A cada três anos desde o ano de 2005 o Ministério da Educação, através do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), dar condições para que empresas apresentem propostas de livros didáticos do Ensino Médio para uso em todas as escolas da rede pública que oferecem esta modalidade de ensino. As escolas, juntamente com seus professores, tem o papel de escolher democraticamente os exemplares que considerarem mais apropriados para a sua realidade. Hoje, todas as disciplinas, inclusive Filosofia e Sociologia (os *últimos a entrar) são contempladas neste processo.*

Além dos modelos dos livros aprovados pelo governo, cada escola recebe um guia com a simples finalidade de dar assistência ao professor na escolha do livro didático para os próximos três anos.

O Guia do Livro Didático compreende, dentro de cada área, informações gerais da obra aprovada para a escolha. Lá encontra-se parâmetros elaborados pela equipe avaliadora das obras, além de suas resenhas, com informações de como cada volume está organizado.

4.2 Os Livros Didáticos do Ensino Médio

Os livros didáticos (principalmente os de matemática) são sempre bastante discutidos por pesquisadores ligados ao ensino ou educação matemática. Organização, conteúdo, abordagem de algum tipo especial de assunto, são várias as discussões.

Para este trabalho, fizemos uma rápida análise em cada coleção de matemática aprovada para a escolha em 2014 e uso no ensino médio a partir de 2015. Não sabemos quantos títulos participaram da seleção, sabemos porém, que seis passaram por todos os critérios de avaliação e foram considerados aptos para uso em sala. Pesquisamos exclusivamente sobre como cada coleção trata sobre grandezas proporcionais e como o conteúdo é abordado para ser apresentado aos alunos do ensino médio.

Da experiência de sala com livros do mesmo programa, o trabalho ficou mais fácil, uma vez que o padrão de outras edições permanece nos novos títulos. Cabendo, é claro, a ressalva que, embora em pequena quantidade, percebe-se mudanças em coleções consideradas tradicionais.

Ainda da experiência e de uma pesquisa rápida nos compêndios mais adotados no Ensino Fundamental, sabemos que o assunto grandezas e medidas faz parte do currículo escolar desde muito cedo. Mas é a partir do sétimo ano que os alunos são desafiados a *solucionar problemas de proporcionalidade, por exemplo, os probleminhas de construção de estradas, da relação entre as grandezas tempo e velocidade de um móvel, etc. Em geral, os primeiros problemas são resolvidos por um método que pode ser chamado "direto", isso quando os dados são números pequenos ou fáceis. Por exemplo, se o obetivo é descobrir quantas colheres (sopa) de café é preciso adicionar a* $1/4$ *de litro de água, sabendo que o normal é acrescentar 2 colheres a* $1/2$ *litro de água, espera-se que o aluno, conhecedor das frações, responda imediatamente. Mais tarde, o aluno começa a encontrar respostas para estes problemas depois de reduzir à unidade os valores das grandezas. Este método conhecido como "redução à unidade", é o mais inteligente e se aplica em geral. Segue um exemplo extraído do livro "Temas e Problemas Elementares"(Coleção Profmat):*

Uma firma de engenharia asfaltou uma estrada de 36 km em 14 dias. Quantos dias seriam necessários para asfaltar uma estrada de 54 km?

Solução 1. *Quantos dias serão necessários para asfaltar uma estrada de 1 km? Se 36 km requerem 14 dias, 1 km requer* $14/36$ *dias. Então 54 m requerão* $54\times(14/36) = 21$ *dias.*

Solução 2. *Se as propriedades das proporções e as equações do 1º grau são conhecidas, chama-se de* x *o número de dias que se deseja saber. Então 36 km estão para 54 km assim como 14 dias estão para* x*. Logo,* $x = (54 \times 14) \div 36 = 21$.

Imagina-se que a quantidade de situações enfrentadas pelo aluno no decorrer do Ensino Fundamental é suficiente para a fixação das ideias contidas no assunto. Mas isso é discutível. Se fosse verdade, o Ensino Médio seria a etapa especial para que a teoria das proporções pudesse ser explorada de uma forma que pudesse se aproximar da perfeita construção. Nos livros didáticos desta etapa de ensino, foi percebido um esforço dos autores com esse propósito. Quando, por exemplo, o Teorema de Tales foi apresentado, quase sempre houve a preocupação em demonstrá-lo. Embora caiba alguma dose de discussão sobre como as demonstrações são realizadas.

A nossa análise foi no sentido de compreender como os autores de livros para o ensino médio pretendem que os nossos alunos aprendam os conceitos de razão e proporção e como *tratam o conteúdo para o professor, já que o manual do professor também deve ser uma ferramenta de formação continuada.*

As coleções aprovadas são as seguintes: Conexões com a Matemática; Matemática: Contexto e Aplicações; Matemática - Paiva; Matemática - Ciência e Aplicações; Matemática - Ensino Médio; Novo Olhar: Matemática.

Não faz parte dos propósitos deste trabalho concluir questões como qual obra é a mais adequada para uso em sala na apresentação do conteúdo do nosso trabalho. Tampouco afirmar como acreditamos que deve ser tratado num livro didático. Apenas conferimos a exposição do assunto e verificamos as demonstrações quando existiam. Constatamos que não se verifica uma uniformidade entre as várias coleções. Além do mais, nenhum autor quis seguir a linha teórica escolhida no nosso trabalho que serviu, por exemplo, para a demonstração do Teorema de Tales.

A expectativa é que haja mais reflexões sobre vários conteúdos de Matemática normalmente apresentados na escola básica. Acreditamos que as dicussões contribuirão para melhorar a qualidade de todo o material que o professor tem acesso para o ensino.

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, G. - Razões, proporções e regra de três. *Revista do Professor de Matemática. São Paulo: SBM, 1983. v. 8.*

[2] BRASIL. Ministério da Educação. - Guia de livros didáticos: Ensino Médio - PNLD 2015. *Brasília(2014).*

[3] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental - Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN): terceiro e quarto ciclo do Ensino Fundamental - Matemática. *Brasília(1998).*

[4] LIMA, E. L. - Que são grandezas proporcionais. *Revista do Professor de Matemática. São Paulo: SBM, 1984. v. 9.*

[5] LIMA, E. L. - Meu professor de matemática e outras histórias. *5ª edição. Coleção do Professor de Matemática. SBM, 2010.*

[6] LIMA, E. L. - Matemática e ensino. *3ª edição. Coleção do Professor de Matemática. SBM,2001 .*

[7] LIMA, E. L. et alii - Temas e problemas elementares. *3ª edição. Coleção PROFMAT. SBM, 2012.*

[8] ROQUE, Tatiana. - História da matemática: uma visão crítica, desfazendo lendas e mitos. *Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.*