



Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



PROFMAT

**GEOMETRIA DO TRIÂNGULO:
TEOREMAS, PROBLEMAS E
APLICAÇÕES EM OLIMPÍADAS DE
MATEMÁTICA**

GEORGE WESLEY BARBALHO GONÇALVES

Brasília

2014



Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



PROFMAT

GEOMETRIA DO TRIÂNGULO: TEOREMAS, PROBLEMAS E APLICAÇÕES EM OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

Autor: George Wesley Barbalho Gonçalves

Orientador: Prof. Dr. Rui Seimetz

Monografia apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática Profissional pelo Departamento de Matemática da Universidade de Brasília.

Brasília

2014

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Geometria do Triângulo – Teoremas, Problemas e Aplicações em Olimpíadas de Matemática.

por

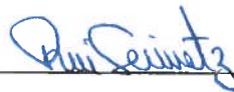
GEORGE WESLEY BARBALHO GONÇALVES*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do “Programa” de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE

Brasília, 06 de junho de 2014.

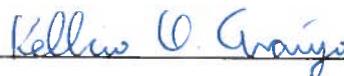
Comissão Examinadora:



Prof. Dr. Rui Seimetz – MAT/UnB (Orientador)



Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha – UFSJ/MG



Prof. Dr. Kellcio Oliveira Araújo – MAT/UnB

* O autor foi bolsista CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Agradecimentos

A Deus, amigo sempre presente, sem o qual nada teria feito.

A minha esposa, Renata Pena Resende Gonçalves, companheira e ajudadora de todos os momentos.

Aos meus Pais, Geisha Barbalho Bezerra Gonçalves e José Glaucio Gonçalves, que sempre incentivaram meus sonhos e estiveram sempre ao meu lado.

Ao Prof. Rui Seimetz, que me acompanhou, transmitindo-me tranqüilidade.

Resumo

Neste Ensaio Teórico iremos abordar alguns teoremas e problemas ligados a propriedades de pontos notáveis do triângulo sempre com o objetivo de apresentar resultados que possam vir a ser utilizados por alunos de Ensino Médio como ferramentas para solução de problemas em Olimpíadas de Matemática . Para isto iremos citar alguns postulados de Euclides, iremos definir os “clássicos” pontos notáveis do triângulo, acompanhados de algumas de suas propriedades, para finalmente demonstrar e aplicar Teoremas como o de Erdos Mordell , Ceva, Menelaus, e finalmente os Teoremas de Morley e de Miquel. Iremos também neste trabalho citar e resolver dois problemas de solução não trivial como o problema de Fagnano e o Problema de Fermat, por apresentarem em sua solução belíssimas conclusões que também podem ser utilizadas em soluções de problemas olímpicos.

Palavras-chave: Pontos notáveis, Olimpíadas de Matemática, Teoremas, Problemas.

Abstract

In this Theoretical essay we will consider some theorems and problems related to properties notables points in triangle always aiming to deliver results that may be used by high school students as tools for problem solving in Mathematics Olympiads. For this we will cite some postulates of Euclid, we define the “classic” notable points of the triangle, accompanied by some of its properties, to finally demonstrate and apply theorems such as Erdos Mordell, Ceva, Menelaus, and finally the Morley and Miquel theorems. We will also cite this work and solve two problems of non-trivial solution to the problem of Fagnano and Fermat Problem, by presenting its solution in stunning conclusions that can also be used in solutions for Olympic problems.

Keywords: Notable Points, Math Olympics, Theorems, Problems.

Sumário

Resumo	4
Abstract	5
Introdução	8
1 EUCLIDES	10
2 CONCEITOS PRIMITIVOS E AXIOMAS	11
2.1 Postulados de Euclides	11
2.2 Um axioma de congruência	12
3 PONS ASINORUM	13
3.1 Teorema - Pons Asinorum	13
3.2 Reflexões	14
3.3 Consequências do Teorema Pons Asinorum	16
4 TEOREMA DE ERDÖS-MORDELL	18
4.1 O Teorema de Erdős - Mordell	19
4.2 Aplicação do Teorema de Erdős - Mordell	21
5 AS MEDIANAS E O BARICENTRO	22
5.1 O Baricentro	22
5.2 Aplicação das propriedades do Baricentro	23
6 BISSETRIZES INTERNAS E O INCENTRO	24
6.1 O Incentro	24
6.2 Uma propriedade do Incentro	26
6.3 Aplicação das propriedades do Incentro	28

7	MEDIATRIZES E O CIRCUNCENTRO	30
7.1	O Circuncentro	30
7.2	Aplicação das propriedades do Circuncentro	32
8	ALTURAS, O ORTOCENTRO E A RETA DE EULER	33
8.1	O Ortocentro	33
8.2	Triângulo Órtico	35
8.3	Leonhard Euler	37
8.4	A Reta de Euler	37
8.5	Aplicação da propriedade da reta de Euler	41
9	DOIS PROBLEMAS EXTREMOS	42
9.1	Problema de Fagnano	43
9.2	Problema de Fermat	44
10	TEOREMA DE MORLEY	47
10.1	O Teorema de Morley	47
10.2	Aplicação do Teorema de Morley	52
11	TEOREMAS DE MENELAUS E CEVA	53
11.1	Os Teoremas de Menelaus e Ceva	53
11.2	Aplicação dos teoremas de Ceva e Menelaus - Quádrupas Harmônicas	55
12	TEOREMA DE MIQUEL	57
12.1	O Teorema de Miquel	57
12.2	Aplicação do Teorema de Miquel	58
12.3	Teorema de Miquel para triângulos	60
	Considerações finais	61

Introdução

O Homem que ao longo da sua evolução sentiu necessidade na sua vida prática de tornar rígidas e seguras algumas das suas construções. Por exemplo, nos tempos primitivos da civilização Grega, foi usado pelos gregos o triângulo de descarga. O triângulo de descarga era uma construção que permitia descarregar as pressões exercidas por grandes pesos que se encontravam por cima das portas dos túmulos e dos portais das cidadelas. Devido ao peso, as portas podiam abater, mas com o triângulo, esse peso era suportado por postes laterais que eram maciços.

No princípio da Idade Média, apareceu no Mediterrâneo, uma vela triangular, alinhada com o eixo longitudinal do casco da embarcação, contrariando a até então utilizada, que era perpendicular ao mesmo eixo e de configuração quadrada. Árabes, Indianos e Indonésios, são apontados como os precursores de tal sistema, que permite à embarcação navegar contra o vento a uns 50 ou 60 graus. Já os Portugueses introduziram grandes melhoramentos e nasceu a Caravela Portuguesa.

Na atualidade, são muitas as situações em que se recorre à robustez do triângulo. Os engenheiros usam frequentemente formas triangulares nas suas construções, para torná-las mais seguras.

Podemos visualizar alguns exemplos:

Na cobertura de estádios



Estádio do Dragão, no Porto.

Nas pontes de ferro



Ponte D. Luís, no Porto.

Neste trabalho, vamos analisar nos capítulos iniciais alguns conceitos primitivos e a proposição intitulada de Pons Asinorum. Iremos também, no primeiro capítulo, nos

referir às proposições de Euclides devido ao número de vezes que elas foram e têm sido utilizadas em todo o mundo por mais de dois mil anos. Em seguida dedicaremos um capítulo ao Teorema de Erdős-Mordel com uma aplicação num problema de Olimpíada de Matemática, os capítulos seguintes irão abordar propriedades importantes sobre os pontos notáveis de um triângulo, seguido de um capítulo que apresenta e soluciona os problemas de Fagnano e Fermat , finalmente os capítulos finais irão abordar os teoremas de Morley, Ceva, Menelaus e Miquel, suas demonstrações e aplicações em problemas clássicos presentes em Olimpíadas de Matemática do Ensino Médio.

1 EUCLIDES

Euclides (330 a.C. – 260 a.C.) foi um dos primeiros geômetras e é reconhecido como um dos matemáticos mais importantes da Grécia Clássica e de todos os tempos. Muito pouco se sabe da sua vida. Sabe-se que foi chamado para ensinar Matemática na escola criada por Ptolomeu Soter (306 a.C. – 283 a.C.), em Alexandria, mais conhecida por "Museu". Aí alcançou grande prestígio pela forma brilhante como ensinava Geometria e Álgebra, conseguindo atrair para as suas lições um grande número de discípulos. Diz-se que tinha grande capacidade e habilidade de exposição e algumas lendas caracterizam-no como um bondoso velho.

Conta-se que, um dia, o rei lhe perguntou se não existia um método mais simples para aprender geometria e que Euclides respondeu: "*Não existem estradas reais para se chegar à geometria*".

Euclides é exemplo do "Puro Homem da Ciência", que se dedica à especulação pelo gosto do saber, independentemente das suas aplicações materiais.

Cerca de 300 a.C. Euclides de Alexandria escreveu um tratado, em treze livros chamados de Elementos. Do autor (por vezes, lamentavelmente confundido com o filósofo anterior, Euclides de Megara), sabemos muito pouco. Proclus (410 d.C. – 485 d.C.) afirmou que ele reuniu os Elementos, coletando muitos dos teoremas de Eudoxo, o aperfeiçoamento de muitos dos de Teeteto, e trazendo também à demonstração irrefutável, as coisas que foram somente fracamente provadas por seus predecessores.

Dos treze livros, os seis primeiros podem ser brevemente descritos sobre o que tratam, respectivamente, triângulos, retângulos, círculos, polígonos, proporção e semelhança. Os próximos quatro tratam, sobre a teoria dos números, incluindo duas conquistas notáveis: IX.2 e X.9, onde é demonstrado que existem infinitos números primos, e que $\sqrt{2}$ é irracional [Hardy 2, p. 32-36]. O livro XI é uma introdução à geometria sólida, o XII trata sobre pirâmides, cones e cilindros, e o XIII é sobre os cinco sólidos regulares.

Segundo Proclo, Euclides tinha como finalidade com os Elementos, a construção das chamadas figuras platônicas. Essa noção de efeito de Euclides é suportada pela teoria platônica de uma correspondência mística entre os quatro sólidos e os quatro "elementos".

2 CONCEITOS PRIMITIVOS E AXIOMAS

2.1 Postulados de Euclides

No desenvolvimento lógico de qualquer ramo da matemática, cada definição de um conceito ou uma relação envolve outros conceitos e relações. Portanto uma maneira de evitar um círculo vicioso é permitir que certos conceitos primitivos e relações (geralmente o mínimo possível) permaneçam indefinidos [1 pp Synge. 32-34]. Da mesma forma, a prova de cada proposição utiliza outras proposições e, portanto, certas proposições primitivas, chamadas de postulados ou axiomas, devem permanecer sem comprovação. Euclides não especificou seus conceitos primitivos e relações, mas estava disposto a dar definições em termos de ideias que seriam familiares a todos. Como a maioria dos treze livros, o livro I começa com uma lista de Definições (23, ao todo) sem qualquer comentário como, por exemplo, as de ponto, reta, círculo, triângulo, ângulo, paralelismo e perpendicularidade de retas tais como:

- "um ponto é o que não tem parte",
- "uma reta é um comprimento sem largura",
- "uma superfície é o que tem apenas comprimento e largura".

Após às definições, aparecem os Postulados e as Noções Comuns ou Axiomas, nesta ordem. Os Postulados são proposições geométricas específicas. "Postular" significa "pedir para aceitar". Assim, Euclides pede ao leitor para aceitar as cinco proposições geométricas que formula nos Postulados:

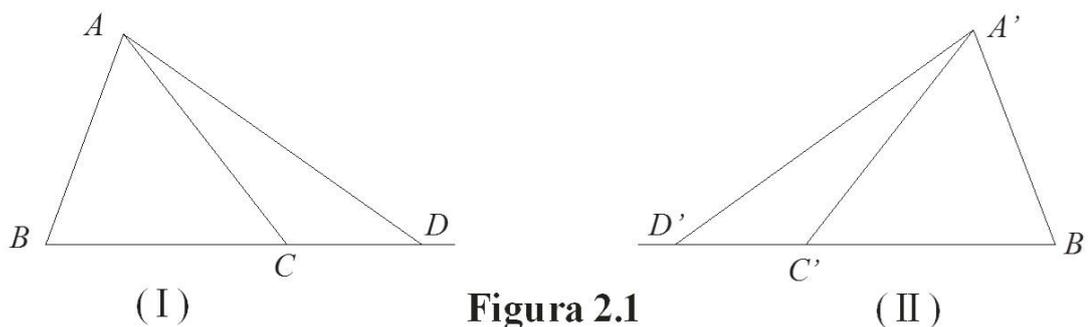
1. Uma linha reta pode ser traçada a partir de qualquer ponto para qualquer outro ponto.
2. Uma linha reta finita pode ser estendida continuamente em uma linha reta.
3. Um círculo pode ser descrito com qualquer centro e qualquer raio.
4. Todos os ângulos retos são iguais entre si.
5. Se uma reta cortar duas outras retas de modo que a soma dos dois ângulos interiores, de um mesmo lado, seja menor que dois ângulos retos, então as duas outras retas se cruzam, quando suficientemente prolongadas do lado da primeira reta em que se acham os dois ângulos.

É bastante natural que, após um lapso de cerca de 2.250 anos, alguns detalhes são agora revistos como intuito de melhorar. Por exemplo, Euclides I.1 constrói um triângulo equilátero desenhando dois círculos, mas como sabemos que esses dois círculos se interceptam? Outro exemplo, está relacionado com a definição de segmento de reta que aparece no Postulado 2 como uma "linha reta finita". A maravilha é que muito das palavras de Euclides continua perfeitamente válido.

No tratamento moderno da sua geometria [ver, por exemplo, Coxeter 3, pp. 161-187], é usual reconhecer conceitos primitivos e as duas relações primitivas, a de intermediação (a ideia de que um ponto pode estar entre dois pontos) e a de congruência (a ideia de que a distância entre dois pontos pode ser igual à distância entre dois outros pontos, ou que dois segmentos de reta podem ter o mesmo comprimento). O princípio de Euclides "de superposição", usado para provar I.4, levanta a questão de saber se uma figura pode ser movida sem alterar sua estrutura interna. Este princípio é hoje substituído por uma suposição mais explícita, como o axioma da "rigidez de um triângulo com uma cauda (Figura 2.1):

2.2 Um axioma de congruência

Se $\triangle ABC$ é um triângulo sendo D um ponto sobre o prolongamento do lado BC , enquanto D' é analogamente obtido em outro triângulo, $\triangle A'B'C'$, e se $BC = B'C'$, $CA = C'A'$, então $AD = A'D'$.



Este axioma pode ser usado para estender a noção de congruência de segmentos de reta para figuras mais complicadas, como os ângulos, de modo que podemos dizer precisamente o que queremos dizer com a relação: $\angle ABC = \angle A'B'C'$.

Então não precisamos mais utilizar o princípio da superposição, a fim de provar Euclides I.4: Em dois triângulos que têm dois lados iguais, e têm os ângulos entre eles iguais, eles também têm seus terceiros lados iguais, e os seus outros ângulos iguais, na verdade, eles serão triângulos congruentes.

3 PONS ASINORUM

Esta é a quinta proposição do primeiro livro dos Elementos de Euclides. Acredita-se que tenha sido Tales o primeiro a prová-la.

3.1 Teorema - Pons Asinorum

Teorema 3.1. *Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.*

Demonstração. Seja $\triangle ABC$ um triângulo isósceles, pela definição AB é igual a AC . Portanto os triângulos são congruentes pelo critério (LAL). Então os ângulos correspondentes são iguais. Em particular os ângulos da base são iguais, $\angle ABC = \angle ACB$. *c.q.d.*

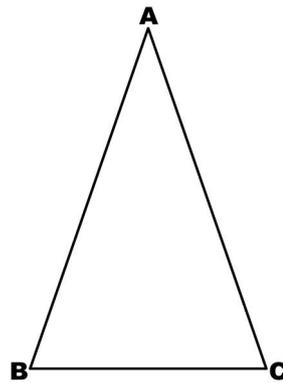


Figura 3.1

O nome *pons de asinorum* para este famoso teorema, provavelmente, surgiu a partir da aparência de uma ponte na figura de Euclides (com as linhas de construção necessárias em sua prova bastante complicada) e da noção de que alguém incapaz de atravessar a

ponte deve ser um "tolo", pois o termo latino significa "ponte dos tolos" ou dos "asnos", aludindo ao fato de os fracos não poderem ir além deste ponto nos seus estudos de matemática. Felizmente, uma prova muito mais simples foi fornecida por Pappus de Alexandria cerca de 340 a.C. (Figura 3.2).

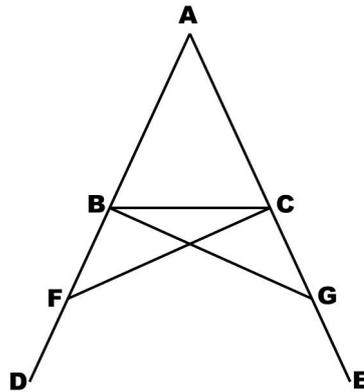


Figura 3.2

3.2 Reflexões

Definição. *Sejam \mathbb{E} e \mathbb{F} espaços vetoriais. Uma transformação linear $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ é uma função de \mathbb{E} em \mathbb{F} tal que:*

- i) $T(u + v) = T(u) + T(v)$, quaisquer que sejam u e v em \mathbb{E} .*
- ii) $T(\alpha v) = \alpha T(v)$, quaisquer que sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{E}$.*

A reflexão em torno de uma reta r é a transformação T que faz corresponder a cada ponto P do plano o ponto P' , simétrico de P em relação à reta r . Se desenharmos uma figura numa folha de papel e dobrarmos o papel, de tal modo que a dobra coincida com a reta r , as figuras coincidirão perfeitamente. Isto acontece porque pontos simétricos estão em lados opostos, mas à mesma distância da reta. A reflexão σ_m na reta m é a aplicação definida por:

$$\sigma_m(P) = \begin{cases} P, & \text{se } P \in m \\ Q, & \text{se } P \notin m \text{ e } m \text{ é mediatriz de } \overline{PQ} \end{cases}$$

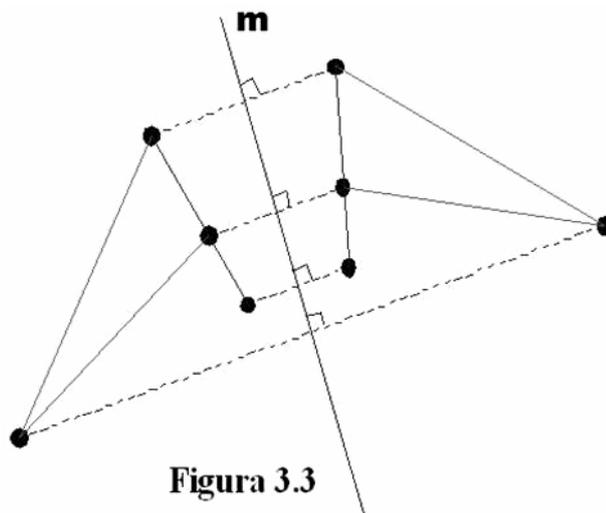


Figura 3.3

A reta m diz-se o eixo da reflexão. Da definição deduz-se que:

- Uma reflexão não pode ser a identidade
- Os únicos pontos fixos pontualmente são os do eixo
- O eixo é a única reta fixa pontualmente
- Todas as retas perpendiculares ao eixo são fixas (não pontualmente) pela reflexão, isto é, se a é uma reta perpendicular ao eixo m , então $\sigma_m(a) = a$.

Veremos que muitas provas geométricas são mais curtas e tornam-se mais claras com o uso de reflexões. Mas devemos lembrar que este procedimento é apenas um atalho: cada argumento poderia ter sido evitado por meio de um circunlóquio envolvendo triângulos congruentes. Por exemplo, a construção acima é válida, pois os triângulos são congruentes.

Várias figuras, não importando quão irregulares elas sejam, produzem figuras simétricas quando colocadas próximas a um espelho e renunciam a distinção entre objeto e imagem. Essa simetria bilateral é característica da forma externa da maioria dos animais.

Aplicando o conceito de definição podemos demonstrar o teorema de *Pons Asinorum* da seguinte maneira.

Seja o triângulo isósceles ABC vide figura 3.4, primeiramente vamos ligar o vértice A ao ponto D , o ponto médio da base BC . A mediana AD pode ser considerada como um espelho que reflete B em C . Assim, dizemos que um triângulo isósceles é simétrico por reflexão, ou que tem simetria bilateral. (Claro, o espelho utilizado em geometria não tem espessura e reflete em ambos os lados, de modo que não apenas reflete B em C , mas também reflete C em B).

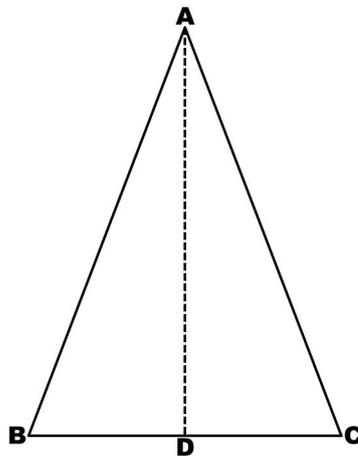


Figura 3.4

O método foi redescoberto há poucos anos pelo programa de computador concebido para demonstrar teoremas em geometria euclidiana elementar, elaborado por *E. Gelernter* em aproximadamente 1960.

A demonstração do Teorema *PonsAsinorum* pela máquina geométrica de Gelernter, considera o triângulo ΔABC e sua imagem refletida como dois triângulos diferentes. Esses triângulos são congruentes, por ser a reflexão uma isometria, então é destacado que os dois ângulos da base são respectivamente correspondentes e em consequência, eles são congruentes.

3.3 Consequências do Teorema Pons Asinorum

Pons asinorum tem muitas consequências úteis encontradas no livro III dos Elementos, tais como as cinco seguintes:

III. 20 Em um círculo o ângulo no centro é o dobro do ângulo na circunferência, quando os raios que formam os ângulos encontram a circunferência nos mesmos dois pontos.

III. 21. Num círculo, qualquer par de cordas com um extremo comum, que determine o mesmo arco na circunferência, determinará também o mesmo ângulo inscrito (Figura 3.5 (I), $\angle PQQ' = \angle PP'Q'$).

III. 22. Os ângulos opostos de um quadrilátero inscrito em um círculo são ambos ângulos retos. Teremos também a oportunidade de usar dois teoremas familiares sobre triângulos semelhantes encontrados no livro VI:

VI. 2. Uma linha reta traçada paralelamente a um dos lados de um triângulo, esta quando cortar, cortará proporcionalmente os outros lados, e, se ambos os lados do triângulo forem seccionados proporcionalmente, a linha que liga os pontos de seção será paralela ao outro lado.

VI.4. Se os ângulos correspondentes de dois triângulos são iguais, então os lados correspondentes são proporcionais. Combinando este último resultado com III. 21 e 22 deduz-se duas propriedades importantes das secantes de um círculo (Figura 3.5):

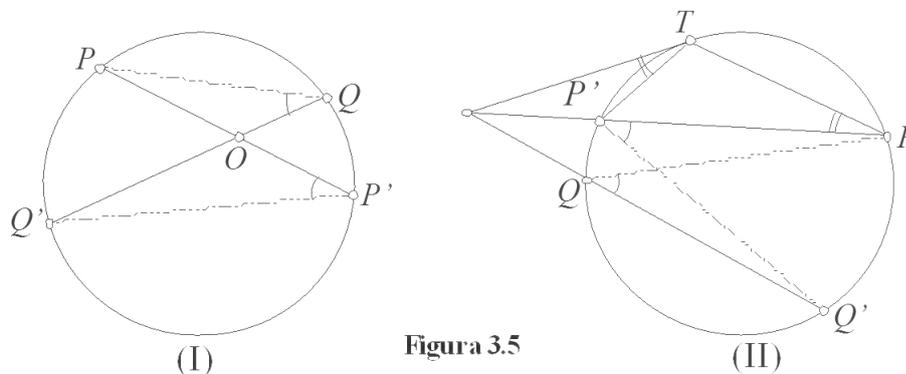


Figura 3.5

III. 35. Se em um círculo duas linhas retas se interceptam, o retângulo definido pelos segmentos de uma tem área igual ao retângulo compreendido pelos segmentos da outra (isto é, $OP \times OP' = OQ \times OQ'$).

III. 36. Se de um ponto fora de um círculo uma secante e uma tangente se interceptam, o retângulo definido por toda secante e a parte da mesma secante que está fora do círculo, terá área igual ao quadrado da tangente (isto é, $OP \times OP' = OT^2$).

O livro VI também contém uma propriedade importante sobre as áreas de triângulos

semelhantes:

VI.19. Triângulos são semelhantes entre si em relação ao quadrado de seus lados correspondentes (isto é, se ΔABC e $\Delta A'B'C'$ são triângulos semelhantes, as suas áreas estão na relação $AB^2 : A'B'^2$). Este resultado fornece a prova mais fácil para o teorema de Pitágoras [ver Heath 1, p. 353, 2, p. 270].

I47. *Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos dois catetos.*

Demonstração: Num triângulo ABC retângulo em C , trace CF perpendicular à hipotenusa AB (vide figura 3.6). Assim teremos três triângulos semelhantes ABC , ACF , CBF com hipotenusas AB , AC , CB , respectivamente. Pelo VI.19, as áreas dos triângulos satisfazem: $\frac{ABC}{AB^2} = \frac{ACF}{AC^2} = \frac{CBF}{CB^2}$.

Fica evidente que, $ACB = ACF + CBF$ então $AB^2 = AC^2 + CB^2$. **c.q.d.**

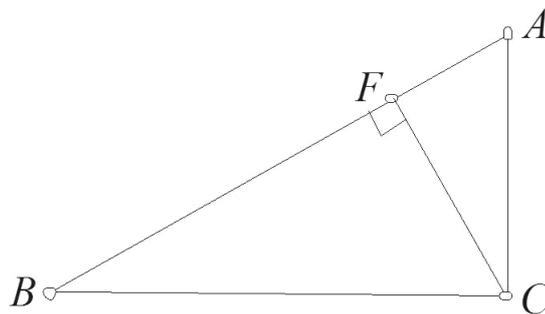


Figura 3.6

4 TEOREMA DE ERDÖS-MORDELL

A famosa Desigualdade de Erdős-Mordell foi inicialmente conjecturada pelo matemático húngaro Paul Erdős e demonstrada no mesmo ano por Louis Mordell, na revista *American Mathematical Monthly* (problema nº 3740). Logo após surgiram várias soluções e alguns artigos sobre a desigualdade, cada uma usando variadas técnicas: trigonometria (Louis J. Mordell e P.F. Barrow), desigualdades angulares e semelhanças (Leon Bankoff), teorema de Ptolomeu (André Avez e Hojoo Lee), áreas de polígonos (V. Komornik). Vamos mostrar uma delas.

4.1 O Teorema de Erdős - Mordell

Teorema de Erdős - Mordell. *Considere um triângulo ABC e O um ponto interior ao triângulo. Sejam as projeções ortogonais de O nos lados BC , CA , AB respectivamente. Vale então a desigualdade: $OA + OB + OC \geq 2(OP + OQ + OR)$.*

Demonstração: Seja um triângulo $\triangle ABC$ e O um ponto interior ao triângulo.

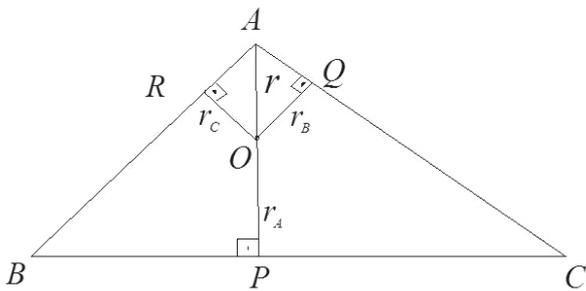


Figura 4.1

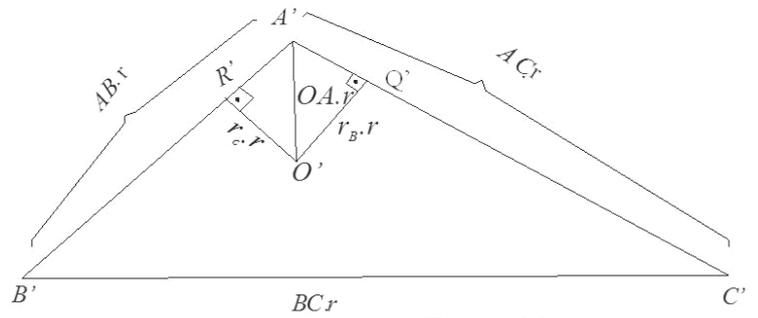


Figura 4.2

Na figura 4.1, $AO = r$, $OP = r_A$, $OQ = r_B$, $OR = r_C$, considere $A'B'C'$ um triângulo semelhante ao triângulo ABC cuja razão de semelhança é r , (vide Figura 4.2)

Vamos agora construir os triângulos $A'B'D$ e $A'C'E$, semelhantes aos triângulos $A'O'Q'$ e $A'O'R'$ respectivamente, (vide Figura 4.3)

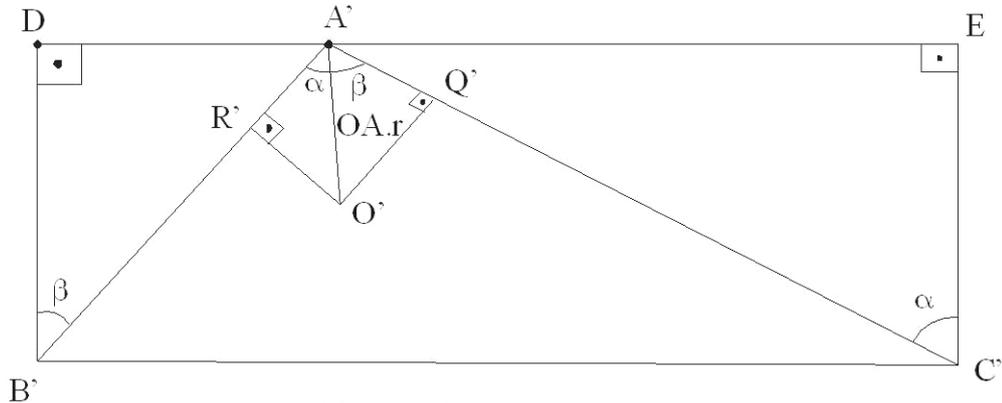


Figura 4.3

$$D\hat{A}'B' = 90 - \beta \text{ e } E\hat{A}'C' = 90 - \alpha \Rightarrow D\hat{A}'B' + B'\hat{A}'C' + E\hat{A}'C' = 90 - \beta + \alpha + \beta + 90 - \alpha = 180^\circ.$$

Logo os pontos D , A' e E são colineares. Temos também que $A'\hat{D}B'$ e $A'\hat{E}C$ são ambos retos, assim as retas DB' e EC' são paralelas, sendo DE a menor distância entre elas. (1)

Pela semelhança entre os triângulos $A'Q'O'$ e $A'DB'$ obtemos:

$$\frac{A'D}{O'Q'} = \frac{A'B'}{A'O'} \Rightarrow \frac{A'D}{r_B \cdot r} = \frac{AB \cdot r}{OA \cdot r} \Rightarrow A'D = AB \cdot r_B \quad (2)$$

Pela semelhança entre os triângulos $A'R'O'$ e $A'EC'$ obtemos:

$$\frac{A'E}{O'R'} = \frac{A'C'}{A'O'} \Rightarrow \frac{A'E}{r_C \cdot r} = \frac{AC \cdot r}{OA \cdot r} \Rightarrow A'E = AC \cdot r_C \quad (3)$$

Sendo assim de (1), (2), e (3), temos:

$$\begin{aligned} B'C' &\geq DE \Rightarrow B'C' \geq A'D + A'E \\ &\Rightarrow BC \cdot r \geq AB \cdot r_B + AC \cdot r_C \\ &\Rightarrow r \geq \frac{AB \cdot r_B}{BC} + \frac{AC \cdot r_C}{BC} \\ &\Rightarrow AO \geq \frac{AB}{BC} \cdot r_B + \frac{AC}{BC} \cdot r_C \quad (d_1) \end{aligned}$$

Analogamente teríamos:

$$OB \geq \frac{AB}{AC} \cdot r_A + \frac{BC}{AC} \cdot r_C \quad (d_2)$$

$$OC \geq \frac{AC}{AB} \cdot r_A + \frac{BC}{AB} \cdot r_B \quad (d_3)$$

Somando as três desigualdades (d_1) , (d_2) e (d_3) obtemos:

$$OA + OB + OC \geq \left(\frac{AB}{AC} + \frac{AC}{AB} \right) r_A + \left(\frac{AB}{BC} + \frac{BC}{AB} \right) r_B + \left(\frac{AC}{BC} + \frac{BC}{AC} \right) r_C$$

Como para $x > 0$ temos $x + \frac{1}{x} \geq 2$ teremos:

$$OA + OB + OC \geq 2r_A + 2r_B + 2r_C \Rightarrow OA + OB + OC \geq 2(OP + OQ + OR)$$

c.q.d.

Observação: Podemos observar que a *igualdade*, $OA + OB + OC = 2(OP + OQ + OR)$, ocorre se e somente se O for o circuncentro de um triângulo ABC equilátero.

4.2 Aplicação do Teorema de Erdős - Mordell

(IMO 1991, Problema 4) Sejam $\triangle ABC$ um triângulo e M um ponto interior. Mostre que pelo menos um dos ângulos $\angle MAB$, $\angle MBC$ e $\angle MCA$ é menor ou igual a 30° .

Resolução: Sejam P , Q e R as projeções de M sobre BC , CA , e AB , respectivamente.

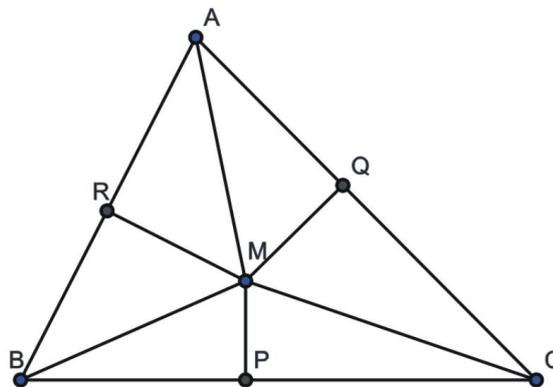


Figura 4.4

Pela desigualdade de *Erdős-Mordell*, $MA + MB + MC \geq 2(MP + MQ + MR)$. Se todas as razões $\frac{MR}{MA}$, $\frac{MP}{MB}$, $\frac{MQ}{MC}$ são maiores do que $\frac{1}{2}$, então $MA < 2MR$, $MB < 2MP$ e $MC < 2MQ$, e $MA + MB + MC < 2(MP + MQ + MR)$, contradição. Então uma das razões, digamos, $\frac{MR}{MA}$, é menor ou igual a $\frac{1}{2}$. Todavia, $\frac{MR}{MA} = \text{sen} \angle MAB$, de modo que $\angle MAB \leq 30^\circ$. Assim encerra a resolução.

c.q.d.

5 AS MEDIANAS E O BARICENTRO

Neste capítulo iremos tratar sobre um ponto notável do triângulo, o Baricentro, que é o ponto de encontro das medianas de um triângulo, em que o segmento que une um vértice de um triângulo ao ponto médio do lado oposto é uma mediana.

5.1 O Baricentro

Teorema 5.1 1. *As medianas de um triângulo intersectam-se em um único ponto. A figura a seguir ilustra a demonstração de tal teorema.*

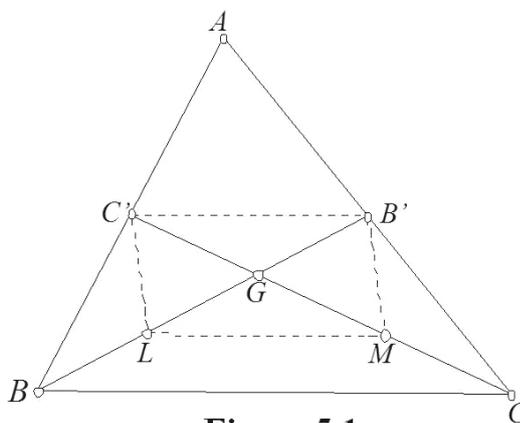


Figura 5.1

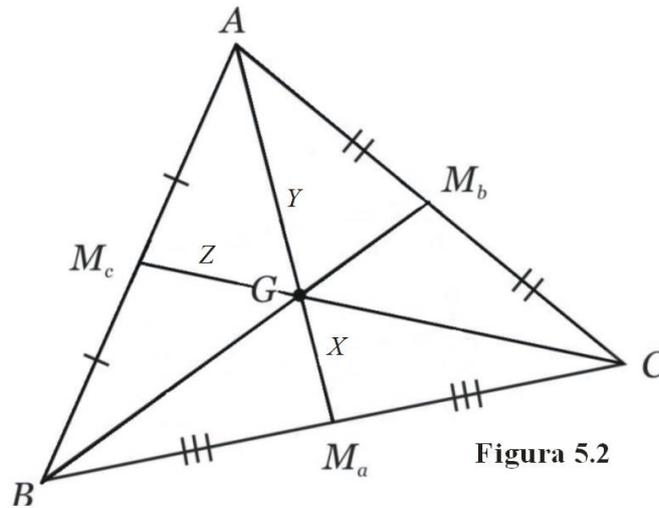
Demonstração: Considere que duas das três medianas, em particular BB' e CC' , se encontram em G (Figura 5.1). Sejam L e M os pontos médios de GB e GC respectivamente. Por Euclides VI.2 e 4 (de 3.3), tanto $C'B'$ como LM são paralelos a BC e possuem metade do comprimento deste lado. Logo $B'C'LM$ é um paralelogramo e como as diagonais de um paralelogramo interceptam-se no ponto médio, temos:
 $B'G = GL = LB, \quad C'G = GM = MG$ **c.q.d.**

Assim, as duas medianas BB' e CC' se trissecam em G . Em outras palavras, este ponto, que pode ser definido como um ponto de trisseção de uma mediana, é também um ponto de trisseção da outra, e semelhantemente da terceira mediana. Ficando provado que as medianas de um triângulo intersectam-se num único ponto. O ponto comum das três medianas é chamado de baricentro do triângulo.

Arquimedes (c. 287 – 212 a.C.) obteve-o como o centro de gravidade de uma placa triangular de densidade uniforme.

5.2 Aplicação das propriedades do Baricentro

A soma das medianas de um triângulo situa-se entre $\frac{3}{4}p$ e p , onde p , é a soma dos lados do triângulo.



Demonstração. Seja o triângulo ΔABC , com as medianas AM_a , BM_b e CM_c .

Consideremos as seguintes representações: $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $AG = 2x$, $M_aG = x$, $BG = 2y$, $M_bG = y$, $CG = 2z$, $M_cG = z$.

Sendo assim pela desigualdade triangular nos triângulos BGC , AGC e AGB temos:

$$\begin{cases} 2y + 2z > a \\ 2x + 2z > b \\ 2x + 2y > c \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4x + 4y + 4z > a + b + c \Rightarrow x + y + z > \frac{a + b + c}{4} \Rightarrow 3x + 3y + 3z > \frac{3}{4}(a + b + c),$$

Com isso provamos a primeira parte do teorema que afirma que a soma dos comprimentos das medianas é maior que $\frac{3}{4}p$. Vamos agora provar a segunda parte, e para isso vamos traçar na Figura 5.2 um segmento unindo o ponto médio do lado AB ao ponto médio do segmento AM_b , outro unindo o ponto médio do lado AC ao ponto médio do segmento CM_a , e por fim um segmento unindo o ponto médio do lado BC

ao ponto médio do segmento BM_c determinando respectivamente os pontos D, E, F (vide Figura 5.3).

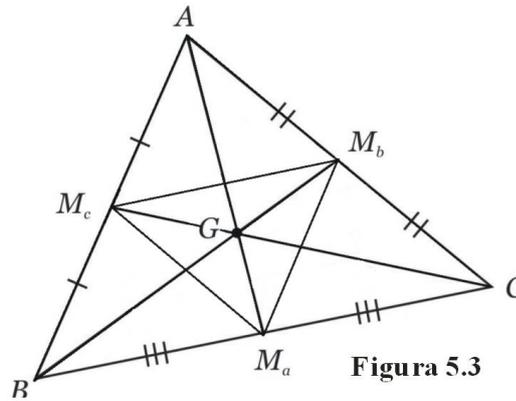


Figura 5.3

Podemos observar que $M_cM_b = \frac{a}{2}$, $M_aM_c = \frac{b}{2}$, $M_aM_b = \frac{c}{2}$, por serem as bases médias do triângulo ABC .

Sendo assim pela desigualdade triangular nos triângulos AM_aM_b , BM_bM_c e CM_aM_c temos:

$$\frac{b}{2} + \frac{c}{2} > 3x \quad \frac{a}{2} + \frac{c}{2} > 3y \quad \frac{a}{2} + \frac{b}{2} > 3z \Rightarrow a + b + c > 3x + 3y + 3z \Rightarrow$$

que a soma das medianas é menor que p .

c.q.d.

6 BISSETRIZES INTERNAS E O INCENTRO

Neste capítulo iremos tratar sobre um outro ponto notável do triângulo, o Incentro, que é o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo, em que a semi-reta que divide um ângulo em duas partes iguais é uma bissetriz.

6.1 O Incentro

Teorema 6.1. *As três bissetrizes internas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que está a igual distância dos lados do triângulo. A figura a seguir ilustra o ponto de encontro de tais bissetrizes.*

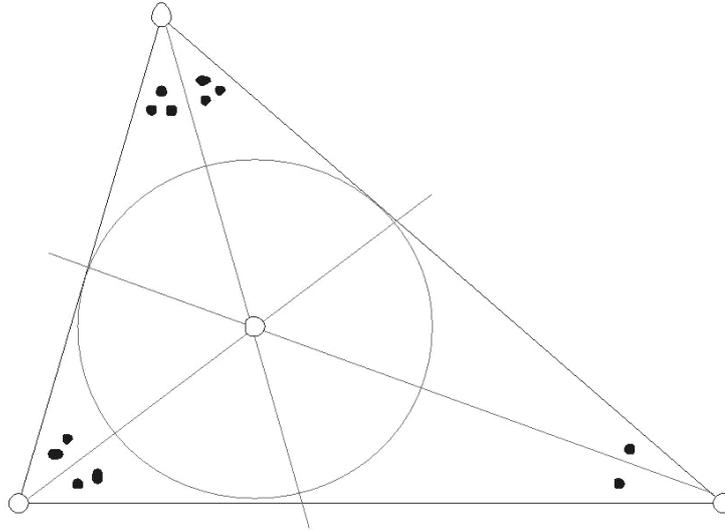


Figura 6.1

Demonstração: Sendo o triângulo ABC de lados $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, e $\overline{AB} = c$ e sejam \overline{AS}_1 , \overline{BS}_2 , \overline{CS}_3 , as bissetrizes do triângulo ABC , em que S_1 , S_2 , S_3 são os pés das bissetrizes que partem, respectivamente, dos vértices A , B e C .

Seja S o ponto tal que: $\overline{BS}_2 \cap \overline{CS}_3 = \{S\}$

Considerando que $d_{S,x}$ representa a distância do ponto S ao lado de comprimento x ,

temos:
$$\left. \begin{array}{l} S \in \overline{BS}_2 \Rightarrow d_{S,a} = d_{S,c} \\ S \in \overline{CS}_3 \Rightarrow d_{S,a} = d_{S,b} \end{array} \right\} \Rightarrow d_{S,b} = d_{S,c} \Rightarrow S \in \overline{AS}_1.$$

Logo,

1°) $\overline{AS}_1 \cap \overline{BS}_2 \cap \overline{CS}_3 = \{S\}$ e 2°) $d_{S,a} = d_{S,b} = d_{S,c}$

c.q.d.

Este ponto de interseção (ou ponto de encontro ou ponto de concurso) das três bissetrizes de um triângulo é o incentro do triângulo, que devido ao fato de está a igual distância dos lados do triângulo, é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

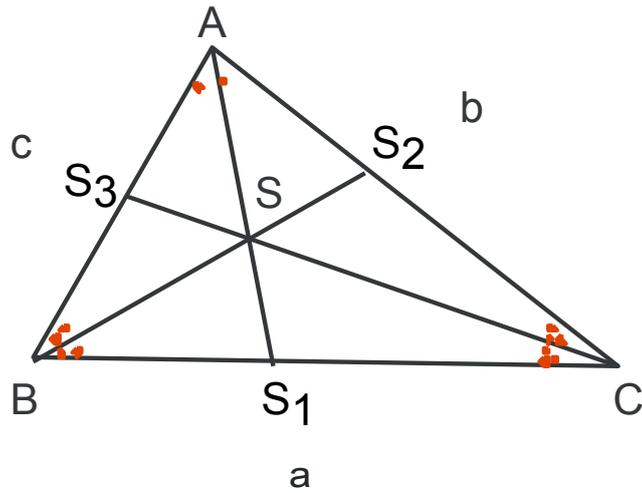


Figura 6.2

6.2 Uma propriedade do Incentro

Teorema 6.2. Se I é o incentro de um triângulo ABC temos que $\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}A$

Demonstração: Considere o triângulo ABC em que b_1 , b_2 e b_3 são segmentos que estão contidos em suas bissetrizes. Temos que I é o Incentro.

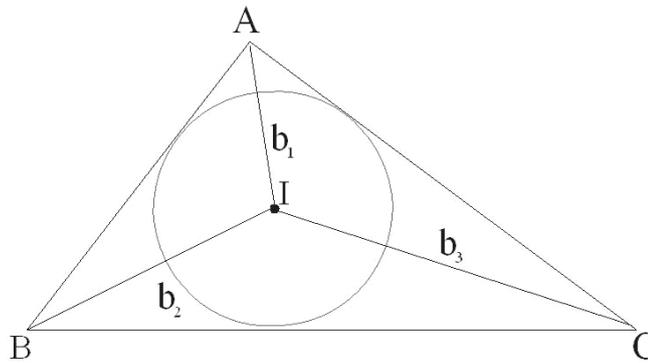
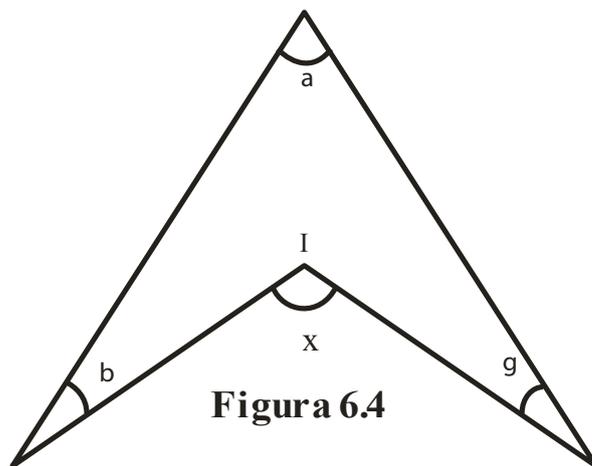
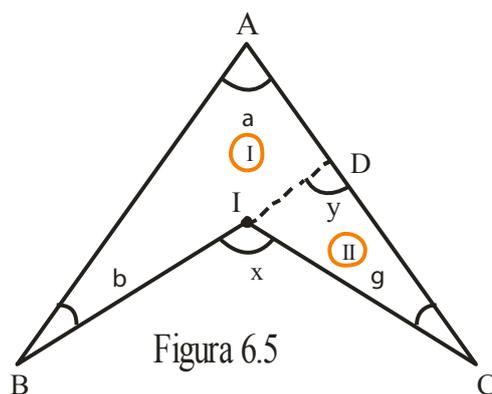


Figura 6.3

Primeiramente vamos provar que $\angle BIC = \angle ABI + \angle ACI + \angle BAC$. Isto seria equivalente a provar na figura abaixo que $x = \alpha + \beta + \gamma$.



Sendo assim temos:



I. $y = \alpha + \beta$ (ângulo externo do $\triangle ABD$)

II. $x = y + \gamma$ (ângulo externo do $\triangle CDI$)

I + II. $x + y = \alpha + \beta + y + \gamma \implies x = \alpha + \beta + \gamma$

Mas no triângulo ABC temos $\angle ABC = 2\beta$, $\angle ACB = 2\gamma$ e $\angle BAC = \alpha \implies \alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ \implies \beta + \gamma = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

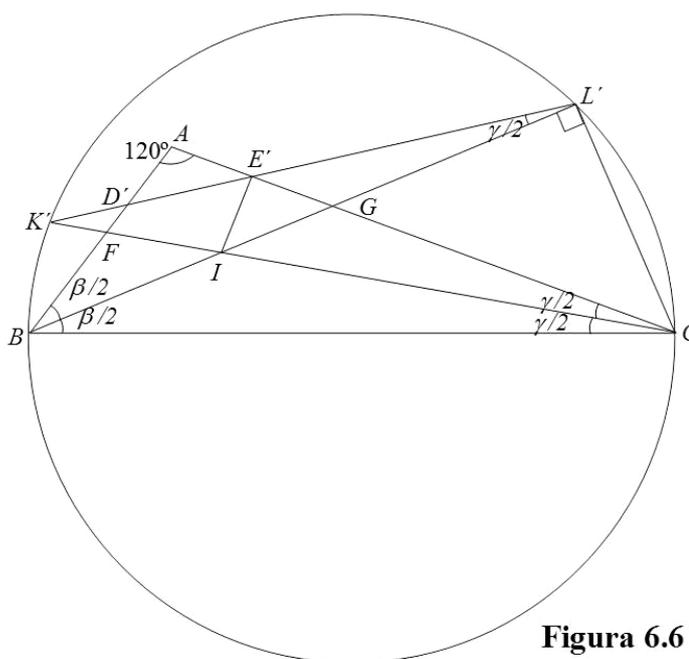
Logo, $\angle BIC = x = \alpha + \beta + \gamma = \alpha + 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$.

c.q.d.

6.3 Aplicação das propriedades do Incentro

(XXXI OBM – nível 3 – 2ª fase – problema 4) Num triângulo ABC , temos $\angle A = 120^\circ$ e $BC = 12$ cm. A circunferência inscrita em ABC tangencia os lados AB e AC , respectivamente, nos pontos D e E . Sejam K e L os pontos onde a reta DE intersecta a circunferência de diâmetro BC . Determine a distância entre os pontos médios dos segmentos BC e KL . Ver figura 6.6.

Resolução: Vamos mostrar inicialmente que BL e CK são as bissetrizes dos ângulos \widehat{B} e \widehat{C} do ΔABC . Para isto, sejam K' e L' as intersecções das bissetrizes de \widehat{C} e \widehat{B} com a circunferência de diâmetro \overline{BC} , como na figura. Seja ainda I o incentro de ΔABC e β e γ as medidas de \widehat{B} e \widehat{C} , respectivamente, de modo que $\beta + \gamma = 60^\circ$.



Sejam D' e E' as intersecções de $\overline{K'L'}$ com os lados e do triângulo. Para mostrar que BL e CK são as projeções ortogonais de I aos lados AC e AB . Como BC é diâmetro, temos que $\angle K'L'B$ é reto, assim se mostrarmos que o quadrilátero $IK'L'B$ é cíclico, provaremos que BL é reto, e analogamente para D' . Denote por F e G os encontros das bissetrizes de \widehat{C} e \widehat{B} com os lados opostos.

$$\text{Temos } m(\widehat{GIC}) = m(\widehat{FIB}) = m(\widehat{AFC}) - m(\widehat{FBI}) = \beta + \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{\beta + \gamma}{2} = 30^\circ.$$

Da mesma forma, temos $m(GE'L') = m(BGA) - m(GL'E') = \frac{\beta}{2} + \gamma - \frac{\gamma}{2} = \frac{\beta + \gamma}{2} = 30^\circ$, uma vez que, $m(GL'E') = m(BL'K') = m(BCK')$, pois ambos os ângulos subtendem o mesmo arco BK' . Assim, $m(\widehat{GEL'}) = m(\widehat{GIC})$, provando que $IE'L'C$ é cíclico. Sendo O o ponto médio de BC , temos $m(KOL) = 180^\circ - m(LOC) - m(KOB) = 180^\circ - \beta - \gamma = 120^\circ$

Logo a distância pedida é $LO \cdot \cos \frac{m(LOK)}{2} = \frac{BC}{2} \cdot \cos 60^\circ = 3cm$.

Assim terminamos nossa resolução.

c.q.d.

7 MEDIATRIZES E O CIRCUNCENTRO

Neste capítulo iremos tratar sobre um terceiro ponto notável do triângulo, o Circuncentro, que é o ponto de encontro das mediatrizes dos lados de um triângulo, em que mediatriz de um segmento de reta é o nome dado ao conjunto de pontos (que forma uma reta no plano) que estão à mesma distância de ambas as extremidades desse segmento. Logo a mediatriz do lado de um triângulo, é a reta perpendicular ao lado traçada pelo seu ponto médio.

7.1 O Circuncentro

Teorema 7.1. *As mediatrizes dos lados de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que está a igual distância dos vértices do triângulo. A figura a seguir ilustra o ponto de encontro de tais mediatrizes.*

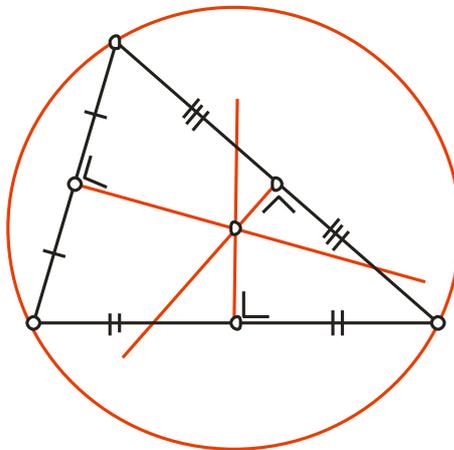


Figura 7.1

Demonstração. Considere o ΔABC , e m_1 , m_2 , m_3 mediatrizes de \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente.

Sejam O o ponto tal que:

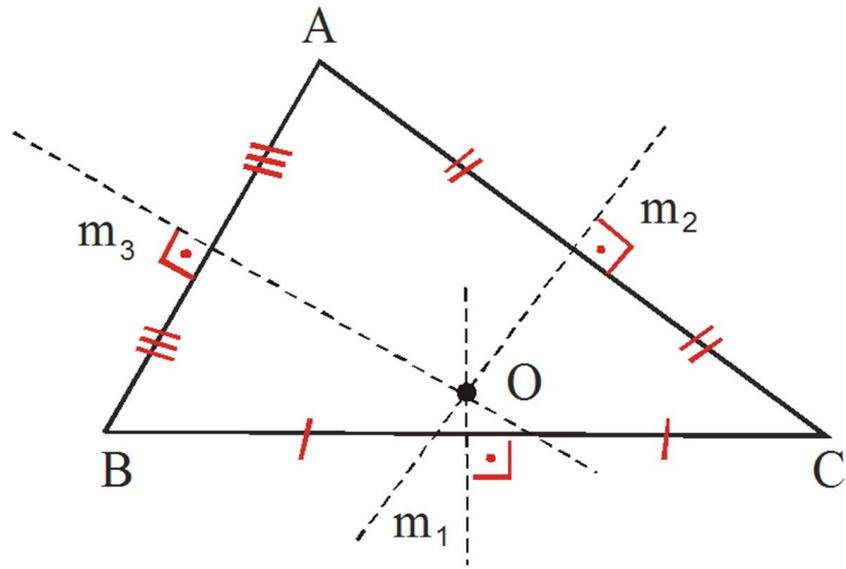


Figura 7.2

$$m_2 \cap m_3 = \{O\}$$

$$\left. \begin{array}{l} O \in m_2 \Rightarrow \overline{OA} \equiv \overline{OC} \\ O \in m_3 \Rightarrow \overline{OA} \equiv \overline{OB} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow OB \equiv OC \Rightarrow O \in m_1$$

Logo,

$$1) m_1 \cap m_2 \cap m_3 = \{O\} \text{ e}$$

$$2) \overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC}.$$

c.q.d.

Este ponto de interseção das três mediatrizes de um triângulo é o circuncentro do triângulo, que devido ao fato de estar a igual distância dos vértices do triângulo, é o centro da circunferência circunscrita no triângulo.

7.2 Aplicação das propriedades do Circuncentro

(XXIX OBM ? nível 3 ? 2ª fase ? problema 1) Seja ABC um triângulo e O seu circuncentro. Seja ainda P a intersecção das retas BO e AC e S a circunferência circunscrita a AOP . Suponha que $BO = AP$ e que a medida do arco OP em S que não contém A é 40° . Determine a medida do ângulo $\angle OBC$.

Resolução: A figura a seguir ilustra a resolução de tal problema.

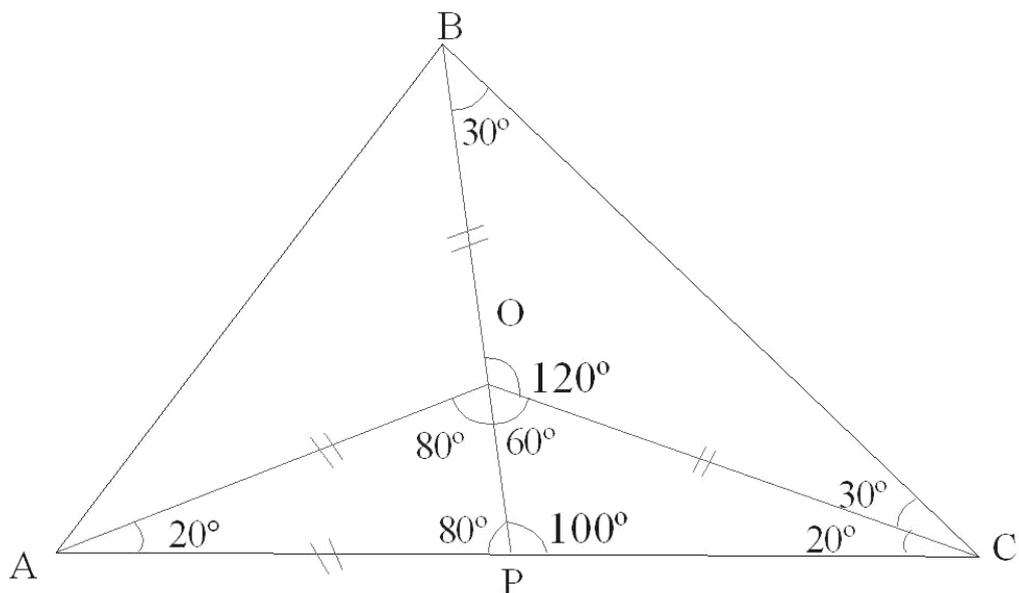


Figura 7.3

Como o circuncentro está a igual distância dos vértices, temos:

O é o circuncentro o que implica que $AO = BO = CO$, Como $\triangle APO$ é isósceles e temos também $\angle AOP = 40^\circ \Rightarrow \angle OAP = 20^\circ, \angle AOP = \angle APO = 80^\circ$

Daí, $\angle OPC = 100^\circ, \angle OCP = 20^\circ, \angle POC = 60^\circ$.

Logo $\angle BOC = 120^\circ$, mas $\triangle BOC$ é isosceles, daí $\angle OBC = \angle OCB = 30^\circ$.

Isso termina a resolução do problema.

c. q. d.

8 ALTURAS, O ORTOCENTRO E A RETA DE EU- LER

Neste capítulo iremos tratar sobre um o último ponto notável do triângulo, que nos interessa, o Ortocentro, que é o ponto de encontro das alturas de um triângulo, em que altura é um segmento de reta perpendicular a um lado do triângulo ou ao seu prolongamento, traçado pelo vértice oposto. Esse lado é chamado base da altura, e o ponto onde a altura encontra a base é chamado de pé da altura.

8.1 O Ortocentro

Teorema 8.1. *As três retas suportes das alturas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto. A figura a seguir ilustra o ponto de encontro de tais alturas.*

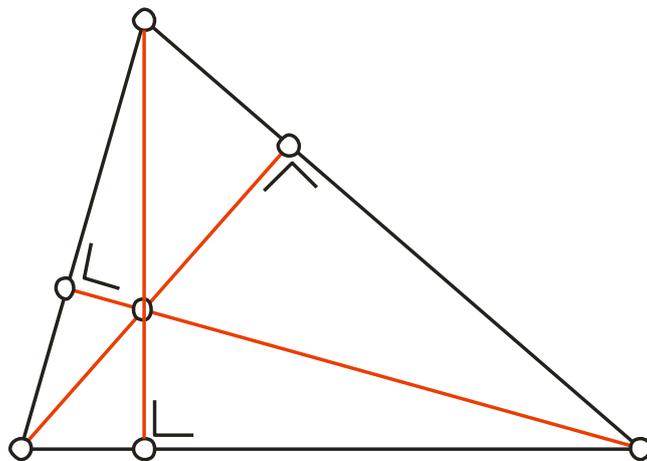


Figura 8.1

Demonstração: Considere o ΔABC de alturas $\overline{AH_1}$, $\overline{BH_2}$, $\overline{CH_3}$ e as retas AH_1 , BH_2 , e CH_3 retas que contêm estas alturas.

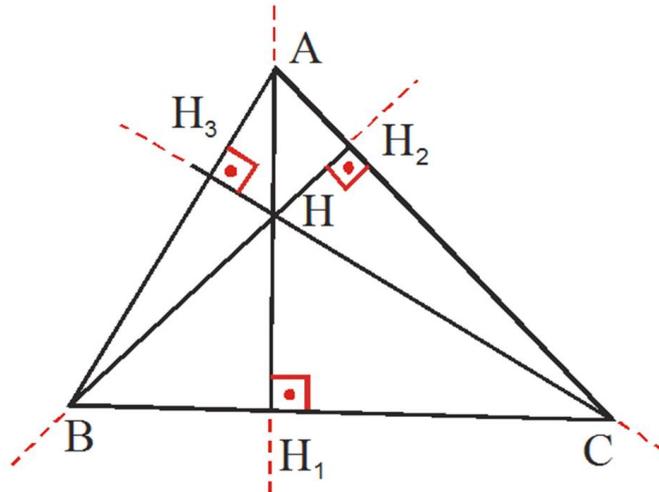


Figura 8.2

Pelos vértices A, B, C do triângulo conduzimos retas paralelas aos lados opostos, obtendo o triângulo MNP .

Temos:

$$A \in \overline{NP} \text{ e } \overline{NP} // \overline{BC};$$

$$B \in \overline{MP} \text{ e } \overline{MP} // \overline{AC};$$

$$C \in \overline{MN} \text{ e } \overline{MN} // \overline{AB}.$$

$$\left. \begin{array}{l} APBC \text{ um paralelogramo} \Rightarrow \overline{AP} \equiv \overline{BC} \\ ANBC \text{ um paralelogramo} \Rightarrow \overline{AN} \equiv \overline{BC} \end{array} \right\} \Rightarrow A \text{ é o ponto médio de } \overline{NP} \quad (1)$$

$$\overleftrightarrow{AH_1} \perp \overline{BC}, \overline{NP} // \overline{BC} \Rightarrow \overleftrightarrow{AH_1} \text{ é perpendicular a } \overline{NP} \quad (2)$$

De (1) e (2), decorre que:

A reta $\overleftrightarrow{AH_1}$ é mediatriz de NP .

Analogamente:

A reta $\overleftrightarrow{BH_2}$ é mediatriz do segmento MP . A reta $\overleftrightarrow{CH_3}$ é mediatriz do segmento MN .

Logo, considerando o ΔMNP , as mediatrizes $\overleftrightarrow{AH_1}$, $\overleftrightarrow{BH_2}$ e $\overleftrightarrow{CH_3}$ dos lados do triângulo interceptam-se num ponto, H .

$$\overleftrightarrow{AH_1} \cap \overleftrightarrow{BH_2} \cap \overleftrightarrow{CH_3} = \{H\}$$

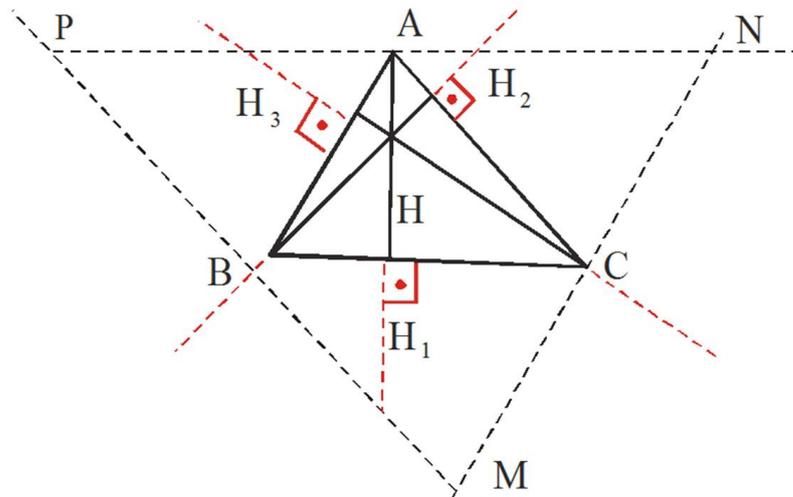


Figura 8.3

c. q. d.

O ponto de interseção das três alturas de um triângulo denomina-se ortocentro (H). No triângulo acutângulo, o ortocentro é interno ao triângulo; no triângulo retângulo, é o vértice do ângulo reto; e no triângulo obtusângulo é externo ao triângulo. Os três vértices juntos com o ortocentro forma um sistema ortocêntrico. O triângulo formado pelos pés das alturas é denominado triângulo órtico.

8.2 Triângulo Órtico

Denomina-se triângulo órtico o triângulo cujos vértices são os pés das suas alturas de um triângulo acutângulo ABC dado. A figura a seguir ilustra o triângulo órtico obtido a partir do triângulo ABC , também representado.

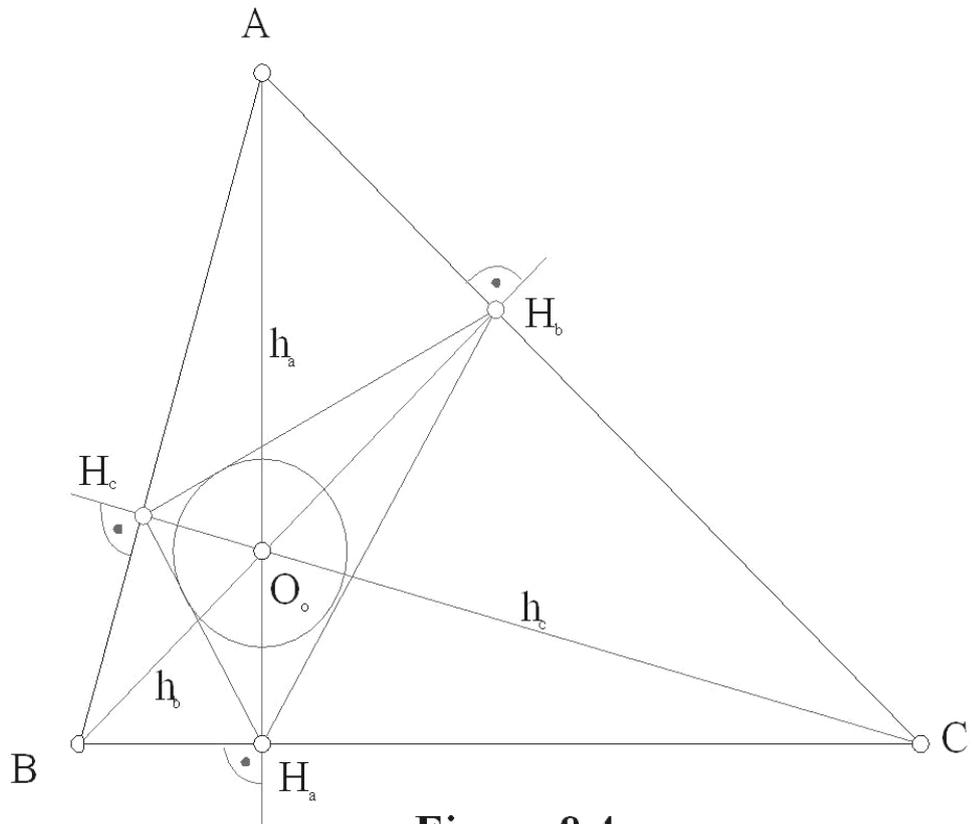


Figura 8.4

Teorema 8.2. *As alturas de um triângulo acutângulo são bissetrizes interiores do triângulo órtico.*

Demonstração: A figura a seguir ilustra a demonstração de tal teorema.

$\widehat{ABE} \cong \widehat{ADE}(\theta)$ (ângulos inscritos que "enxergam" o arco AE)

$\widehat{ADF} \cong \widehat{ACF}(\beta)$ (ângulos inscritos que "enxergam" o arco AF)

$$\text{No } \triangle AEB, \text{ temos : } \theta + \alpha + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \theta = \beta$$

$$\text{No } \triangle ACF, \text{ temos : } \beta + \alpha + 90^\circ = 180^\circ$$

E portanto \overline{AD} é uma bissetriz interna do triângulo órtico DFE analogamente para \overline{CF} e \overline{BE} .

c. q. d.

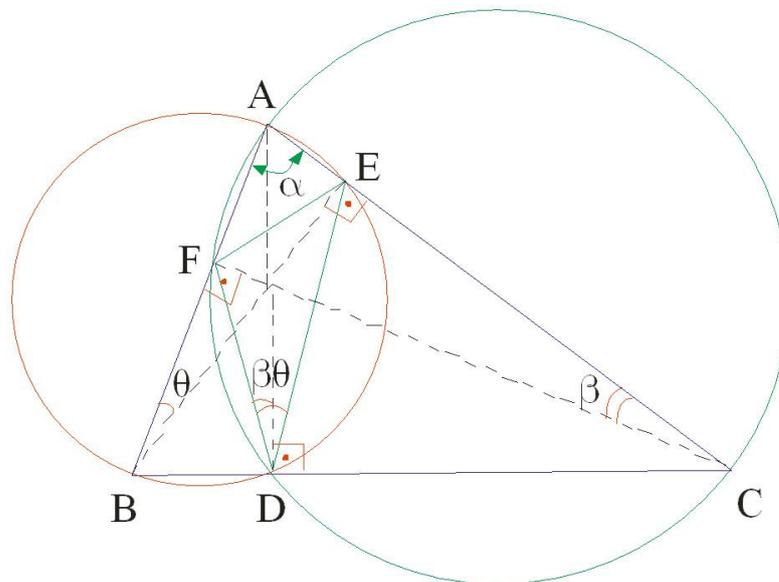


Figura 8.5

8.3 Leonhard Euler

Leonard Euler (1707 – 1783), um suíço que passou a maior parte de sua vida na Rússia, um importante contribuidor para todos os ramos da matemática. Ao nos referirmos a Leonhard Euler estamos falando do escritor de matemática mais produtivo de todos os tempos. Para se ter uma idéia, a Academia de Ciências de São Petersburgo continuou a publicar trabalhos novos de Euler até 50 anos depois da sua morte.

8.4 A Reta de Euler

A Reta de Euler em homenagem ao matemático Leonhard Euler é a reta que passa pelo Circuncentro (O), o Baricentro (G) e o Ortocentro (H) de um triângulo qualquer. Leonhard Euler além de demonstrar que em um triângulo arbitrário esses três pontos são colineares, definiu o centro do círculo de Euler como sendo o ponto médio do segmento de reta que liga o ortocentro e o circuncentro, e demonstrou que a distância entre o baricentro ao circuncentro é a metade da distância entre o baricentro e o ortocentro. A figura a seguir ilustra a obtenção da Reta de Euler a partir da obtenção dos pontos O , G e H , que determinam a mesma.

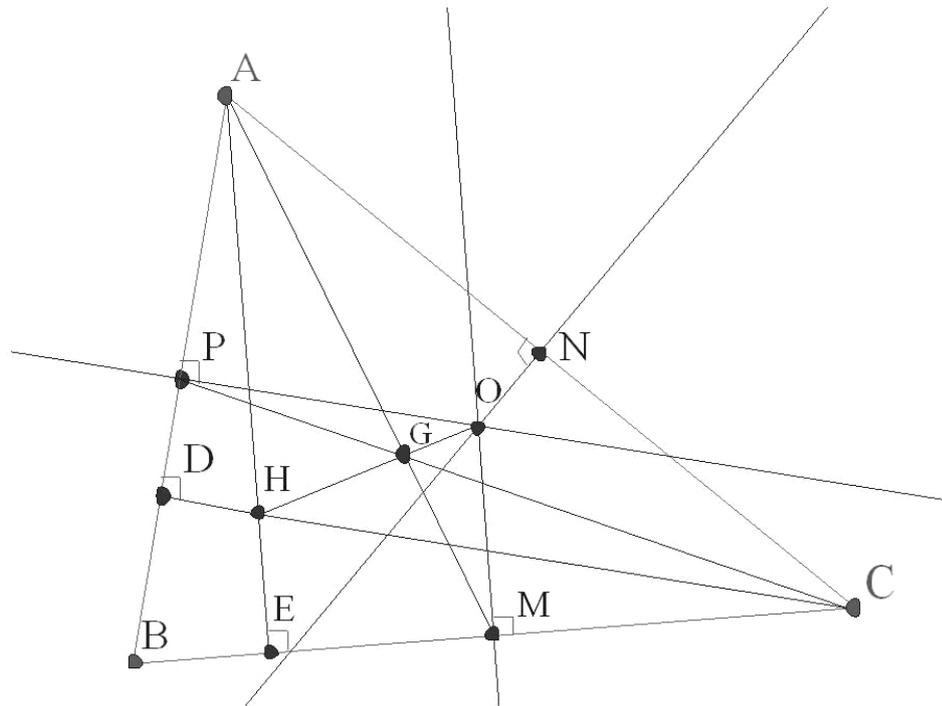


Figura 8.6

Teorema. *Em um triângulo ABC qualquer, o baricentro, o ortocentro, e o circuncentro são colineares. O baricentro está entre o ortocentro e o circuncentro e sua distância ao ortocentro é o dobro de sua distância ao circuncentro.*

Demonstração: No caso de o triângulo ABC ser equilátero (figura 8.7), medianas, alturas e mediatrizes coincidem, conseqüentemente, os três pontos G , H e O também irão se coincidir. Para se definir uma reta precisamos de dois pontos distintos. Sendo assim, em um triângulo equilátero a *Reta de Euler* não está definida.

Para triângulos isósceles (figura 8.8), temos que a mediana, mediatriz e altura relativa à base são coincidentes, logo, o baricentro, o ortocentro e o circuncentro pertencem a um mesmo segmento. Assim, a reta que contém esse segmento é a *Reta de Euler* do triângulo.

Por simplicidade na demonstração para um triângulo qualquer utilizaremos um triângulo acutângulo para garantirmos que os três pontos, citados acima, serão internos ao triângulo. No entanto a prova é análoga para um triângulo obtusângulo, ou mesmo re-

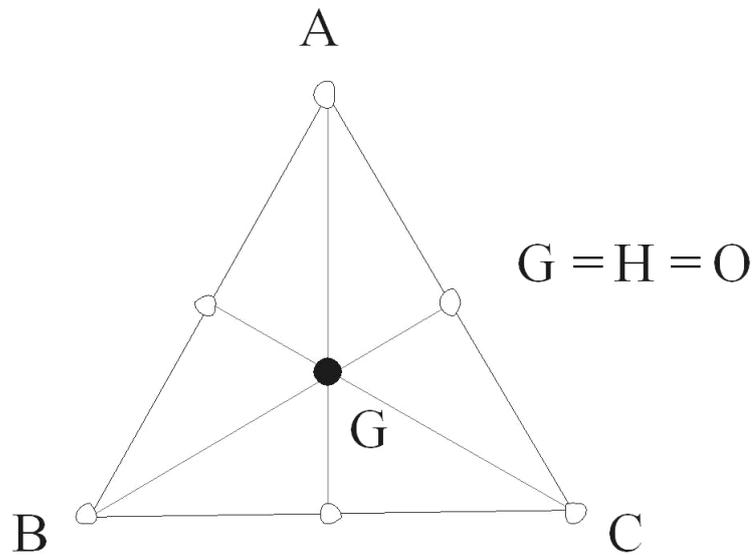


Figura 8.7

tângulo. Segue, para o melhor entendimento do leitor, o passo a passo da demonstração do caso escolhido, devido a extensão da demonstração realizada.

- Vamos considerar então um triângulo ABC escaleno (figura 8.9).
- Baricentro G (contido na mediana) e o circuncentro O (contido na mediatriz) são pontos distintos, pois a mediana é distinta da mediatriz;
- Tomamos então a reta I determinada pelos pontos G e O ; - Seja H' um ponto pertencente a semi-reta OG tal que $GH' = 2GO$;
- Seja P o ponto médio do lado BC ;
- Consideremos a mediana e a mediatriz relativas ao lado BC ;
- Os triângulos $GH'A$ e GOP são semelhantes pelo caso LAL de semelhança:

$$GH' = 2GO \text{ (por construção)}$$

$$AGH' = AGO \text{ (o.p.v)}$$

$$AG = 2GO \text{ (propriedade do baricentro)}$$

- Logo, seus ângulos correspondentes, $AH'G$ e POG são congruentes;

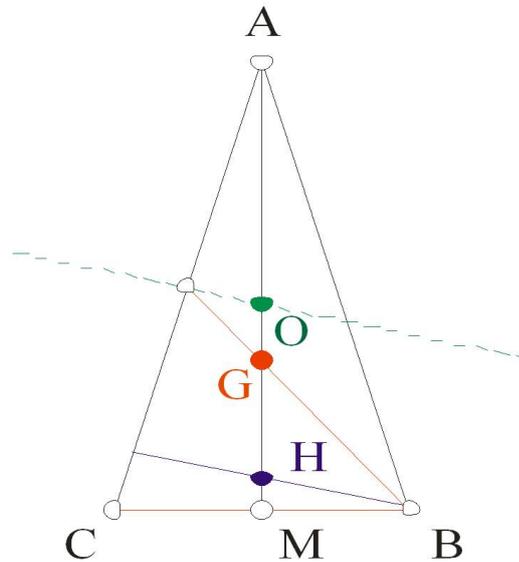


Figura 8.8

- Assim a reta suporte que contém o segmento AH' é paralela à mediatriz OP ;
- Consequentemente, H' é um ponto pertencente à altura relativa ao lado BC ;
- Raciocinando da mesma forma, vamos tomar agora a mediana e a mediatriz relativas ao lado AC (figura 8.10).
- Seja P' o ponto médio do lado AC ;
- Os triângulos $GH'B$ e GOP' são semelhantes pelo caso LAL de semelhança:
 $GH' = 2GO$ (por construção)
 $BGH' = P'GO$ (o.p.v)
 $BG = 2GP'$ (propriedade do baricentro)
- Logo, seus ângulos correspondentes, $BH'G$ e $P'OG$ são congruentes;
- Assim a reta suporte que contém o segmento BH' é paralela à mediatriz OP' ;
- Consequentemente, H' é um ponto pertencente à altura relativa ao lado AC ; - Como H' é a intersecção de duas alturas do triângulo ABC temos que $H' = H$ (ortocentro).
- Concluimos assim que, Circuncentro (O) Baricentro (G) e Ortocentro (H) são coli-

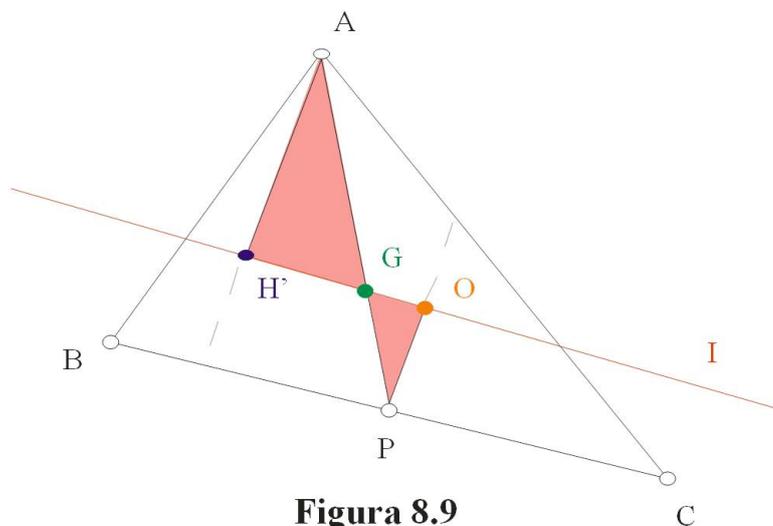


Figura 8.9

neares e a Reta é a *Reta de Euler* do Triângulo ABC .

- Como o Ortocentro de um triângulo é único, por construção, temos que, o Baricentro estará sempre entre o Ortocentro e o Circuncentro e $GH = 2GO$.

c.q.d.

8.5 Aplicação da propriedade da reta de Euler

(IMO 1994, Problema 2) Considere o triângulo ABC abaixo. l é a reta que contém H (Ortocentro) e K (Circuncentro) do triângulo ABC . AM é mediana relativa a CB . $\angle AXY = 45^\circ$. $AX = \frac{4}{\sqrt{2}}$, $XY = 2$.

Determine a medida do segmento AM .

Solução: Sabemos que os três pontos notáveis (baricentro, ortocentro e circuncentro) de um triângulo estão sobre a *Reta de Euler*.

Como a reta l contém os pontos H e K , então l é a Reta de Euler do triângulo ABC . Logo baricentro G também pertence a l . Como AM é mediana, AM contém G .

Temos então: $G \in l, G \in AM \Rightarrow G = Y$.

Usando lei dos Cossenos no triângulo AXY podemos determinar AY .

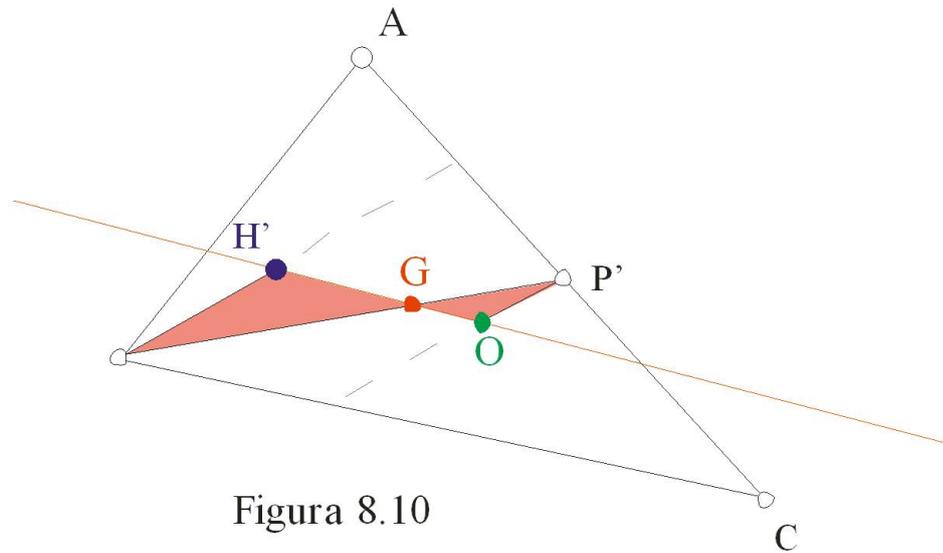


Figura 8.10

$$AY^2 = 2^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \cos 45^\circ \Rightarrow AY = 2.$$

Como o Baricentro de um triângulo divide suas medianas em 2 partes sendo a que contém o vértice é o dobro da outra, sendo assim temos que temos:

$$AM = AY + YM \text{ e } YM = \frac{1}{2}AY. \text{ Logo,}$$

$$AM = AY + \frac{1}{2}AY \Rightarrow AM = \frac{3}{2}AY \Rightarrow AM = 3.$$

Isto termina a resolução.

c.q.d.

9 DOIS PROBLEMAS EXTREMOS

Vamos descrever os problemas de *Fagnano* e *Fermat* em detalhes consideráveis por causa dos interessantes métodos usados para resolvê-los. A primeira foi proposta em 1775 por *JF de Fuschis Fagnano*, que resolveu, por meio do cálculo diferencial. O método apresentado aqui foi descoberto por *L. Fejér* enquanto ele era um estudante [Rademacher e Toeplitz 1, p. 30-32].

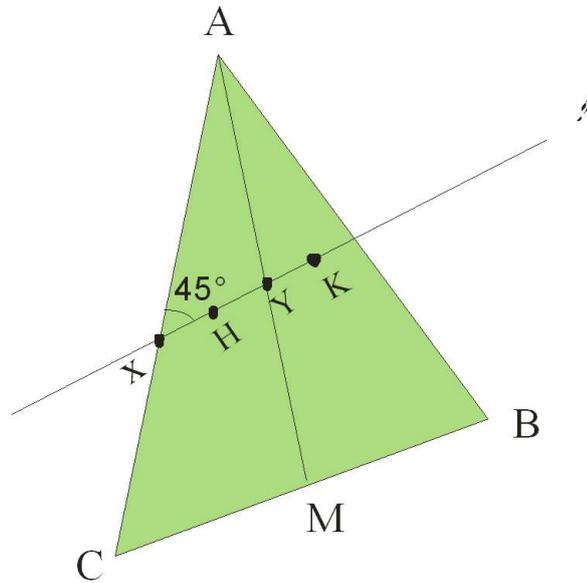


Figura 8.11

9.1 Problema de Fagnano

Dado um triângulo acutângulo ABC inscrever um triângulo UVW de menor perímetro possível.

Resolução: Considere um triângulo arbitrário UVW com U em BC , V em CA , W em AB . Considere U' e U'' as imagens de U por uma reflexão em CA e AB , respectivamente. A figura a seguir ilustra tal situação.

Então temos:

$$UV + VW + WU = U'V + VW + WU''.$$

Assim, entre todos os triângulos inscritos com um vértice U sobre BC , aquele com menor perímetro ocorre quando V e W ficam na reta $U'U''$. Desta forma, obtemos um triângulo UVW definido para cada escolha de U em BC . O problema será resolvido quando nós escolhermos U de modo a minimizar $U'U''$, que é igual ao perímetro.

Como AU' e AU'' são imagens de UA pela reflexão em AC e AB , respectivamente, AU' e AU'' serão congruentes e $\angle U'AU'' = 2A$.

Assim $AU'U''$ é um triângulo isósceles cujo ângulo A é independente da escolha de U . A base é mínima quando os lados iguais são mínimos, ou seja, quando o segmento UA

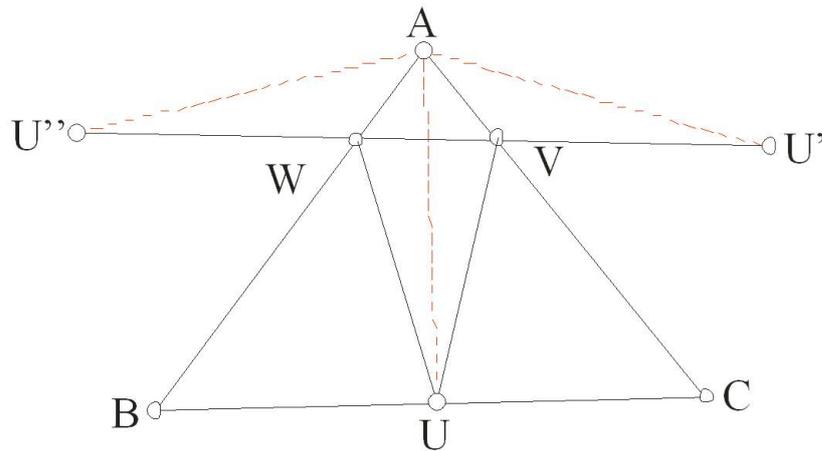


Figura 9.1

é mínimo. Em outras palavras, UA é a distância mais curta entre o ponto A e o lado BC . Como a hipotenusa de um triângulo retângulo é maior do que qualquer de seus catetos, o local desejado de U é tal que UA é perpendicular a BC . Assim AU é a altura a partir de A .

Esta escolha de U nos dá um triângulo UVW cujo perímetro é menor que a de qualquer outro triângulo inscrito. Como poderíamos ter feito o mesmo a partir de B ou C em vez de A , vemos que BV e CW são as alturas a partir de B e C . Logo, **o triângulo de menor perímetro possível inscrito num triângulo acutângulo é o triângulo órtico**. Assim termina a resolução.

c.q.d.

9.2 Problema de Fermat

Dado um triângulo ABC acutângulo, localizar um ponto P cuja distância a A, B, C tem a menor soma possível.

Resolução: Considere primeiro um ponto arbitrário P dentro do triângulo. Mantendo os pontos A, B, C gire o interior do triângulo APB 60° em torno de B obtendo o triângulo $C'P'B$, de modo que a ABC' e PBP' são triângulos equiláteros, como mostrado na figura a seguir.

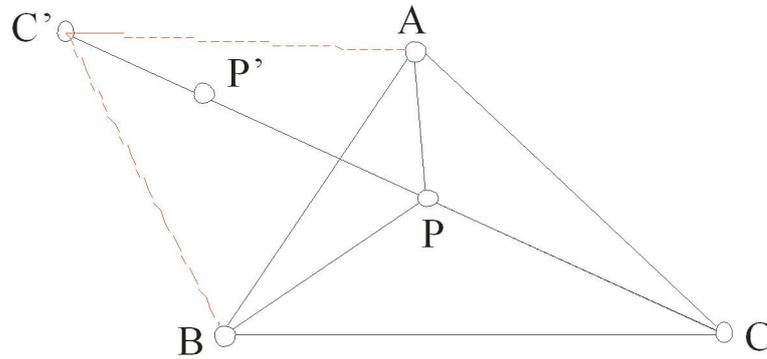


Figura 9.2

Então temos,

$$AP + BP + CP = C'P' + P'P + PC$$

Um caminho de C' para C , geralmente uma reta quebrada com ângulos em P' e P . Esse caminho (que se juntam de C' para C por uma sequência de três segmentos) é mínimo quando esses três segmentos formam uma única reta, caso em que,

$$\angle BPC = 180^\circ - \angle BPP' = 120^\circ \text{ e } \angle APB = \angle C'P'B = 180^\circ - \angle PP'B = 120^\circ.$$

Assim, o ponto desejado P , para o qual $AP + BP + CP$ é mínimo, é o ponto a partir do qual cada um dos lados BC , CA , AB subtende um ângulo de 120° . Este "ponto de Fermat" é mais simples construído como a segunda interseção da CC' e do círculo ABC' (ou seja, a circunferência circunscrita ao triângulo equilátero ABC').

Este problema tem sido citado [por exemplo, Pedoe 1, pp 11-12] afirmando que o triângulo ABC não precisa ser acutângulo. A solução acima é válida quando não há ângulo superior a 120° .

Em vez do triângulo equilátero ABC' sobre AB poderíamos muito bem ter desenhado um triângulo BCA' sobre BC , e BCA sobre CA , como na Figura 9.3.

Assim, as três retas AA' , BB' , CC' passam pelo ponto de Fermat P , e o ponto de interseção de duas delas fornecem uma construção alternativa para P . Além disso, os segmentos de reta AA' , BB' , CC' são todos iguais a $AP + BP + CP$. Logo, se os triângulos equiláteros são construídos externamente sobre os lados de um triângulo ABC qualquer, os segmentos são iguais, concorrentes e formam entre si um ângulo de

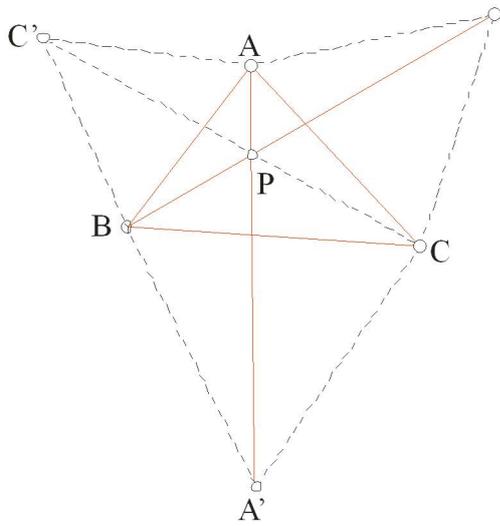


Figura 9.3

60° (Figura 9.3). Assim termina a resolução.

c.q.d.

10 TEOREMA DE MORLEY

Um dos teoremas mais surpreendentes na geometria elementar foi descoberto cerca de 1899 por F. Morley (cujo filho Christopher escreveu romances como *Thunder on the Left*). Ele mencionou o Teorema a seus amigos sem chegar a demonstrá-lo, isto é, deixou-o como conjectura. Eles, por sua vez, o difundiram como curiosidade matemática. Finalmente, depois de dez anos, publicaram-se duas demonstrações, uma trigonométrica de M. Satyanarayana e outra de geometria elementar de M. T. Naraniengar. Esta última seria redescoberta em 1922 por J. M. Child.

10.1 O Teorema de Morley

Na geometria plana, o teorema de Morley estabelece que, em um triângulo qualquer, os três pontos de intersecção entre trissetrizes de ângulos adjacentes formam um triângulo equilátero, denominado triângulo de Morley.

Atualmente existem muitas demonstrações matemáticas do teorema de Morley, algumas das quais são muito técnicas. Entre as demonstrações existentes encontra-se a demonstração geométrica de Raoul Bricard de 1922, a demonstração algébrica de Alain Connes e a demonstração geométrica de John Conway. Esta última demonstração começa com um triângulo equilátero e mostra que se pode construir em torno dele um triângulo semelhante a qualquer triângulo.

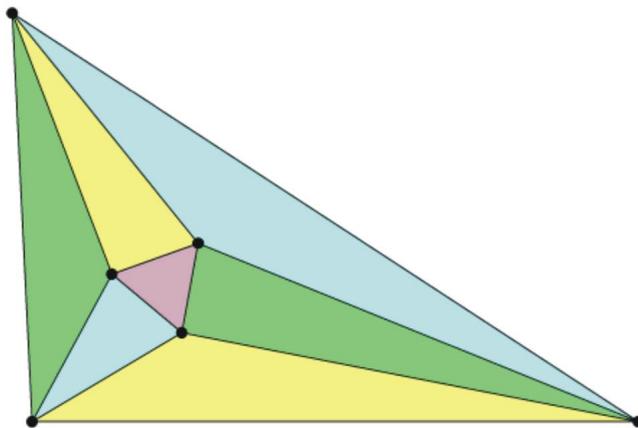


Figura 10.1

Vamos aqui apresentar duas demonstrações. Primeiramente a que é feita de trás pra frente começando com um triângulo equilátero e construindo um triângulo que posteriormente será identificado como triângulo dado ABC .

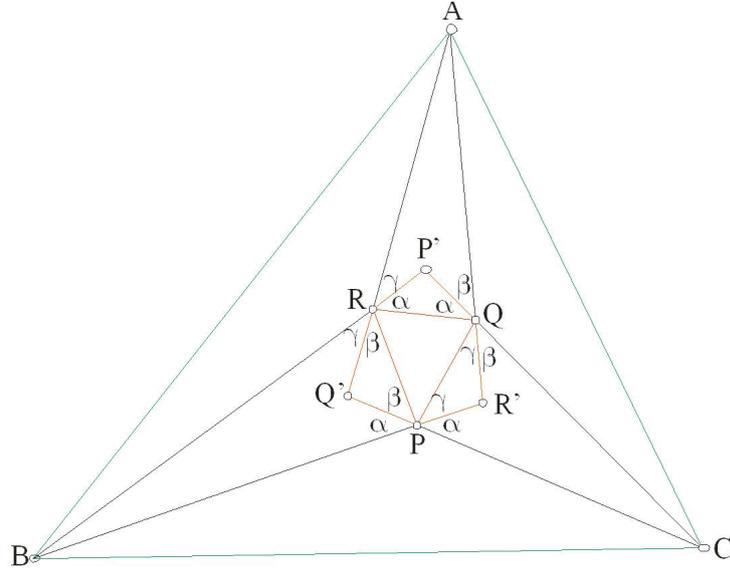


Figura 10.2

Demonstração 1:

Nos respectivos lados QR, RP, PQ de um dado triângulo equilátero PQR , constrói-se os triângulos isósceles $R'PO, P'QR, Q'RP$, cujos ângulos da base satisfazem a equação e as desigualdades,

$$\alpha + \beta + \gamma = 120^\circ, \alpha < 60^\circ, \beta < 60^\circ, \gamma < 60^\circ.$$

Prolongando-se os lados iguais dos triângulos isósceles a partir dos vértices da base, estes se encontrarão nos vértices A, B e C. Temos $\alpha + \beta + \gamma + 60^\circ = 180^\circ$, e podemos imediatamente obter a medida de todos os outros ângulos representados na Figura 1.9a. Particularmente no triângulo CQP temos um ângulo de $60^\circ - \gamma$ no vértice C, uma vez que os ângulos nos vértices Q e P são respectivamente $\gamma + \beta$ e $\gamma + \alpha$.

No triângulo $P'BC$ temos que PP' é bissetriz do ângulo $BP'C$ uma vez que por LAL os triângulos $P'PQ$ e $P'PR$ são congruentes. Além disso, temos:

$$\begin{aligned} \angle BPC &= 360^\circ - 2\alpha - \beta - \gamma - 60^\circ = 300^\circ - \alpha - \beta - \gamma - \alpha = 300^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) - \alpha \\ &= 180^\circ - \alpha = 90^\circ + (90^\circ - \alpha) \Rightarrow \angle BPC = 90^\circ + \left(\frac{180^\circ - 2\alpha}{2} \right) = 90^\circ + \frac{P'}{2} \end{aligned}$$

Aplicando o resultado demonstrado em 6.2 (Se I é o incentro de um triângulo ABC

temos que $\angle BIC = 90 + \frac{1}{2}A$) verificamos que P é o incentro do triângulo $BP'C$. Da mesma forma Q é o incentro do triângulo $Q'CA$, e R é o incentro do triângulo $R'AB$. Assim os ângulos $P\hat{C}Q, B\hat{C}P$ e $Q\hat{C}A$ são iguais e como $P\hat{C}Q = 60^\circ - \gamma$, temos:

$$P\hat{C}Q = B\hat{C}P = Q\hat{C}A = 60^\circ - \gamma \Rightarrow C = 3(60^\circ - \gamma) \Rightarrow \gamma = 60^\circ - \frac{1}{3}C, \text{ analogamente}$$

$$\text{temos } \alpha = 60^\circ - \frac{1}{2}A, \beta = 60^\circ - \frac{1}{3}B.$$

Ao escolher esses valores para os ângulos da base dos triângulos isósceles construídos, podemos garantir que esse procedimento pode ser realizado para qualquer triângulo ABC dado.

c.q.d.

Demonstração 2: Nesta demonstração, iremos fazer o uso da trigonometria. A figura a seguir ilustra o que usaremos nesta demonstração.

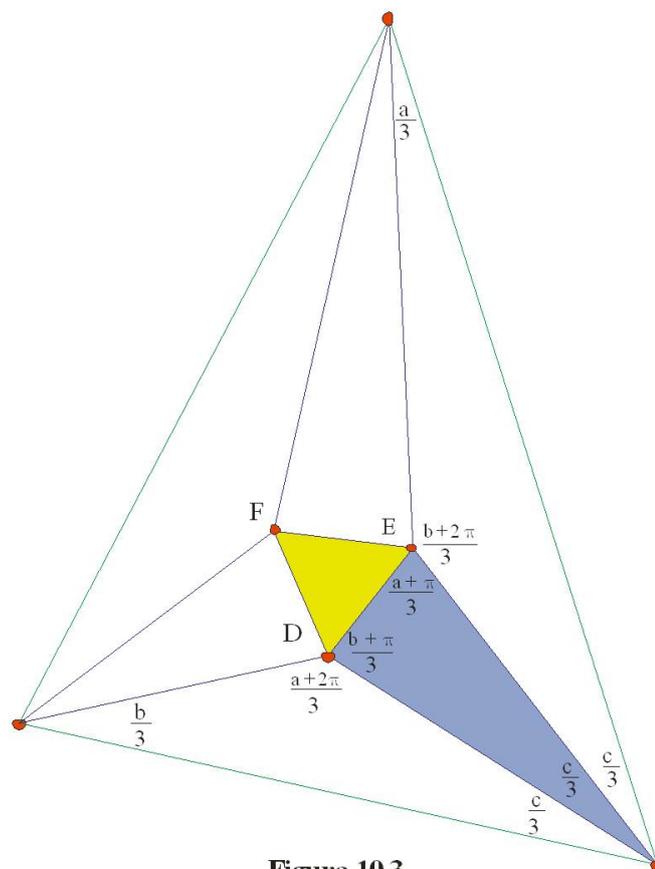


Figura 10.3

Em primeiro lugar, vamos deduzir uma fórmula trigonométrica que será bastante útil. Dado um ângulo x qualquer, temos:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen} x &= \operatorname{sen} \left(\frac{2x}{3} + \frac{x}{3} \right) = \operatorname{sen} \frac{2x}{3} \cos \frac{x}{3} + \cos \frac{2x}{3} \operatorname{sen} \frac{x}{3} \\
 &= \left(2 \operatorname{sen} \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} \right) \cos \frac{x}{3} + \operatorname{sen} \frac{x}{3} \left(\cos^2 \frac{x}{3} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{3} \right) \\
 &= \operatorname{sen} \frac{x}{3} \left(2 \cos^2 \frac{x}{3} + 2 \cos^2 \frac{x}{3} - 1 \right) = \operatorname{sen} \frac{x}{3} \left(4 \cos^2 \frac{x}{3} - 1 \right) \\
 &= \operatorname{sen} \frac{x}{3} \left(4 \cdot \frac{1 + \cos \frac{2x}{3}}{2} \right) = \operatorname{sen} \frac{x}{3} \left(2 \cos \frac{2x}{3} + 1 \right) \\
 &= 2 \operatorname{sen} \frac{x}{3} \left(\cos \frac{2x}{3} - \cos \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{3} \cdot 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{3} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{3} \right) \\
 &= 4 \operatorname{sen} \frac{x}{3} \operatorname{sen} \frac{\pi + x}{3} \operatorname{sen} \frac{\pi - x}{3} = 4 \operatorname{sen} \frac{x}{3} \operatorname{sen} \frac{x + \pi}{3} \operatorname{sen} \frac{x + 2\pi}{3}
 \end{aligned}$$

Sejam $a = C\hat{A}B$, $b = A\hat{B}C$, $c = B\hat{C}A$ e R o circunraio do triângulo ABC . Então, aplicando a lei dos senos ao triângulo ABC , temos:

$$\overline{BC} = 2R \operatorname{sen} a = 8R \operatorname{sen} \frac{a}{3} \operatorname{sen} \frac{a + \pi}{3} \operatorname{sen} \frac{a + 2\pi}{3}$$

Consideremos agora o triângulo ABC . As amplitudes dos seus ângulos são dadas por:

$$D\hat{B}C = \frac{b}{3}, \quad D\hat{C}B = \frac{c}{3} \quad \text{e} \quad B\hat{D}C = \pi - \frac{b}{3} - \frac{c}{3} = \frac{3\pi - b - c}{3} = \frac{(\pi - b - c) + 2\pi}{3} = \frac{a + 2\pi}{3}$$

Aplicando a lei dos senos ao triângulo DBC , temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\overline{DC}}{\operatorname{sen} \frac{b}{3}} &= \frac{\overline{BC}}{\operatorname{sen} \frac{a + 2\pi}{3}} \Rightarrow \overline{DC} = \frac{\overline{BC}}{\operatorname{sen} \frac{a + 2\pi}{3}} \operatorname{sen} \frac{b}{3} = \\
 &= \frac{8R \operatorname{sen} \frac{a}{3} \operatorname{sen} \frac{a + \pi}{3} \operatorname{sen} \frac{a + 2\pi}{3}}{\operatorname{sen} \frac{a + 2\pi}{3}} \operatorname{sen} \frac{b}{3} = 8R \operatorname{sen} \frac{a}{3} \operatorname{sen} \frac{b}{3} \operatorname{sen} \frac{a + \pi}{3}.
 \end{aligned}$$

Analogamente, considerando agora o triângulo AEC , temos:

$$\overline{EC} = 8R \operatorname{sen} \frac{a}{3} \operatorname{sen} \frac{b}{3} \operatorname{sen} \frac{b + \pi}{3}$$

Note-se que

$$\frac{a + \pi}{3} + \frac{b + \pi}{3} + \frac{c}{3} = \frac{a + \pi + b + \pi + c}{3} = \frac{(a + b + c) + 2\pi}{3} = \frac{\pi + 2\pi}{3} = \pi, \text{ logo é}$$

possível construir um triângulo $E'D'C'$ com ângulos de amplitude $\frac{a + \pi}{3}$, $\frac{b + \pi}{3}$ e $\frac{c}{3}$.

Supondo ainda que o seu circunraio é dado por $4R \operatorname{sen} \frac{a}{3} \operatorname{sen} \frac{b}{3}$, pela lei dos senos os lados adjacentes ao ângulo de amplitude $\frac{c}{3}$ terão como medida os mesmos valores obtidos para \overline{DC} e \overline{EC} .

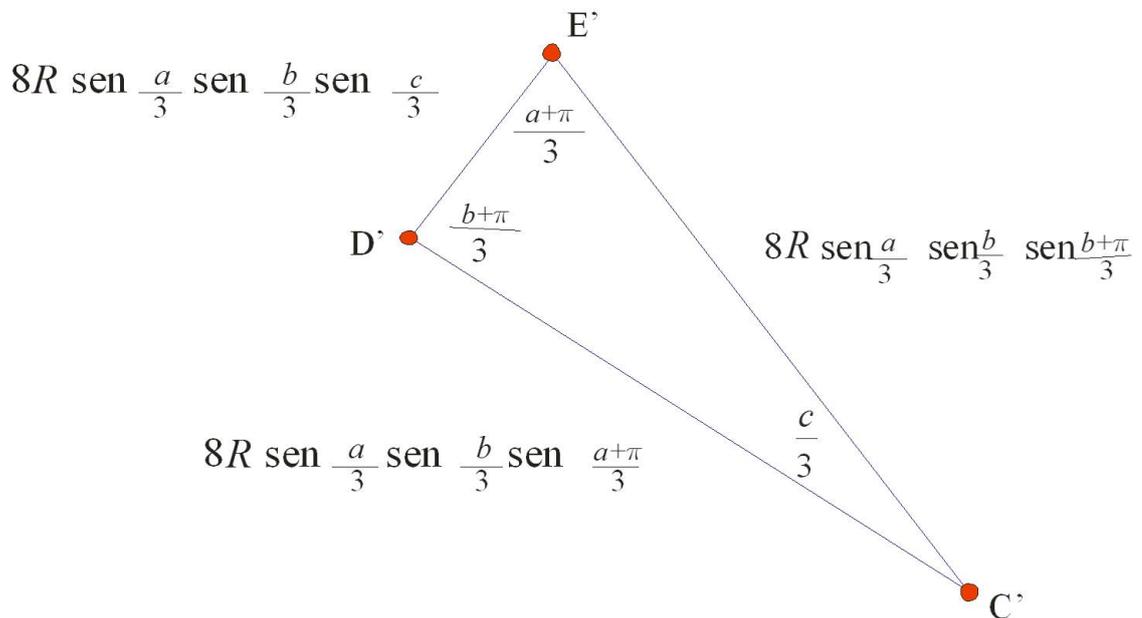


Figura 10.4

Este triângulo é congruente com o triângulo EDC pelo fato de terem um ângulo igual e os lados adjacentes a esse ângulo iguais, sendo este um dos critérios de congruência de triângulos. Portanto, temos:

$$\overline{ED} = \overline{E'D'} = 8R \operatorname{sen} \frac{a}{3} \operatorname{sen} \frac{b}{3} \operatorname{sen} \frac{c}{3}$$

Note-se que, apesar de nesta demonstração se deduzir apenas que um dos lados do triângulo de *Morley* tem o comprimento referido ($8R \operatorname{sen} \frac{a}{3} \operatorname{sen} \frac{b}{3} \operatorname{sen} \frac{c}{3}$), o mesmo argumento permite concluir que a fórmula é válida para os outros dois lados (de fato, uma permutação das variáveis, e na fórmula dada não a altera). Obviamente, isto significa que todos os lados do triângulo de *Morley* são iguais (ou seja, o triângulo é equilátero).

c.q.d.

10.2 Aplicação do Teorema de Morley

(XXXIV OBM – nível 3 – 1ª fase – problema 22) O teorema de *Morley* diz que, ao traçarmos as retas que dividem cada ângulo interno de um triângulo ABC em três ângulos iguais, obtemos um triângulo equilátero chamado triângulo de Morley de ABC , como o que EFD na figura a seguir:

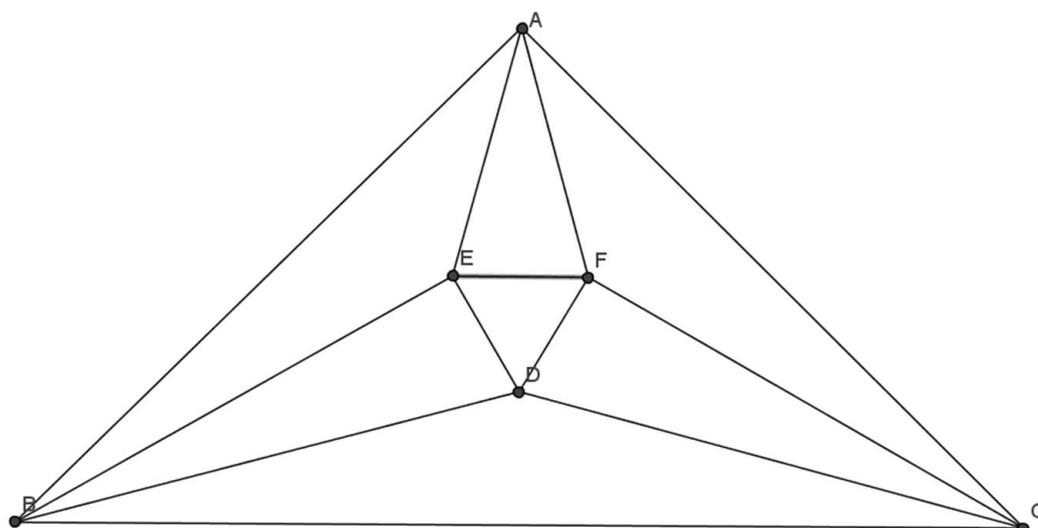


Figura 10.5

Qual é a medida do lado do triângulo de *Morley* de um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 2?

Resolução: Pela simetria da figura, temos que $E\hat{D}B = F\hat{D}C$. Pelo Teorema de *Morley*, temos que $E\hat{D}F = 60^\circ$. Além disso, $B\hat{D}C = 150^\circ$, pois $D\hat{B}C = D\hat{C}B = 15^\circ$. Daí, teremos que $E\hat{D}B = 75^\circ$, donde o triângulo BED é retângulo em E . A hipotenusa BC do triângulo ABC é igual a $2\sqrt{2}$. Traçando a altura relativa à base do triângulo isósceles BDC , temos que $BD = \frac{\sqrt{2}}{\cos 15^\circ}$ e no triângulo BED , temos que $ED = BD \cdot \text{sen}15^\circ$ e daí $ED = \sqrt{2} \tan 15^\circ = \sqrt{2} (2 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{2} - \sqrt{6}$.

Observação: Usando a fórmula $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$, temos que $\tan 15^\circ =$

$$\tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 - \sqrt{3}. \text{ Assim termina nossa}$$

resolução.

c. q. d.

11 TEOREMAS DE MENELAUS E CEVA

O objetivo desse capítulo é apresentar dois teoremas básicos para a geometria euclidiana - a saber, os teoremas de Menelau e Ceva. Menelau de Alexandria foi um astrônomo que viveu no fim do primeiro século d.c. Através de comentários de historiadores gregos e árabes sabemos que ele escreveu uma coleção de seis livros sobre "Cordas no Círculo", um livro de "Elementos da Geometria" e uma série de trabalhos em geometria e astronomia, todos perdidos. O único livro de Menelau que sobreviveu aos tempos foi o "Sphaerica", um tratado em três volumes sobre geometria e trigonometria esférica, do qual chegou até o nosso tempo uma tradução árabe. No volume III ele menciona o teorema que leva seu nome, Apesar de situar-se no esteio das formulações gregas típicas do euclidianismo, de requerer e usar a verdade de Tales da semelhança de triângulos para erigir seu famoso teorema, Menelau, com outros olhos, pode ser visto como um inovador. Mais tarde, em 1806, Carnot baseou toda sua "teoria de transversais" neste teorema de Menelau. O Teorema de Ceva é uma extensão do de Menelau. Aliás, se considerarmos Menelau como sendo uma articulação mais ampla de Tales, Ceva é isto em um nível ainda maior de especificidade de aplicação.

11.1 Os Teoremas de Menelaus e Ceva

TEOREMA DE MENELAUS. *Suponha que $X \in AB$, $Y \in BC$ e $Z \in AC$ sejam colineares. Então $\frac{AX}{BX} \cdot \frac{BY}{CY} \cdot \frac{CZ}{AZ} = 1$.*

Demonstração: Suponha que $X = tA + (1 - t)B$ e $Y = sB + (1 - s)C$.

Então $Z = uX + (1 - u)Y$, onde u é tal que $(1 - t)u + s(1 - u) = 0$, ou seja,

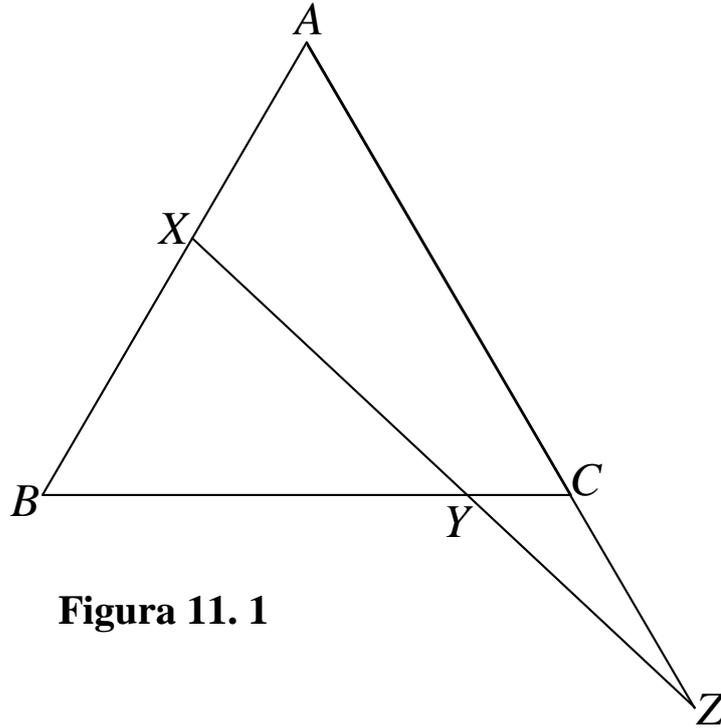


Figura 11. 1

$$Z = \frac{st}{s+t-1}A - \frac{(1-s)(1-t)}{s+t-1}C. \text{ Assim,}$$

$$\frac{AX}{BX} \cdot \frac{BY}{CY} \cdot \frac{CZ}{AZ} = \frac{1-t}{t} \cdot \frac{1-s}{s} \cdot \frac{st}{(1-s)(1-t)} = 1.$$

c.q.d.

TEOREMA DE CEVA 1. *Suponha que as cevianas AM , BN e CP de um triângulo ABC se encontrem em um ponto Q . Então $\frac{AN}{CN} \cdot \frac{CM}{BM} \cdot \frac{BP}{AP} = 1$.*

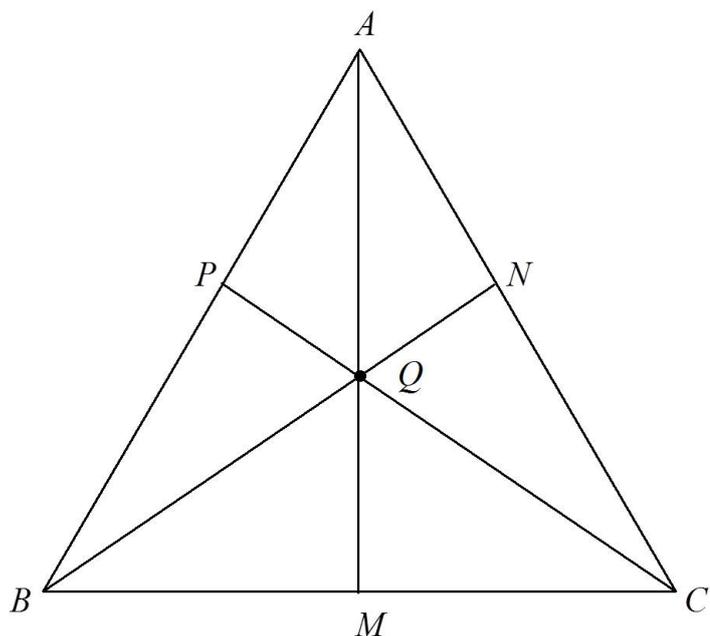


Figura 11.2

Demonstração: Suponha que $Q = t_1A + t_2B + t_3C$ com $t_1 + t_2 + t_3 = 1$.

Então teremos $M = \frac{t_2B + t_3C}{t_2 + t_3}$, $N = \frac{t_1A + t_3C}{t_1 + t_3}$ e $P = \frac{t_1A + t_2B}{t_1 + t_2}$.

Assim, $\frac{AN}{CN} \cdot \frac{CM}{BM} \cdot \frac{BP}{AP} \cdot \frac{t_3}{t_1} \cdot \frac{t_2}{t_3} \cdot \frac{t_1}{t_2} = 1$.

c. q. d.

11.2 Aplicação dos teoremas de Ceva e Menelaus - Quádrupas Harmônicas

No plano euclidiano, se quatro pontos A , B , C e D de uma reta são tais que: $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$, dizemos que C e D "dividem harmonicamente" o segmento \overline{AB} .

Observe que, de acordo com a definição, isto também implica que A e B dividem harmonicamente o segmento \overline{CD} . Representaremos esta situação com o símbolo $H(AB, CD)$. Também diremos que A , B , C e D , nesta ordem, formam uma "quádrupla harmônica".

Dados os pontos A , B e C sobre uma reta, o ponto D tal que $H(AB; CD)$ é chamado "conjugado harmônico" de C em relação a \overline{AB} .

Surpreendentemente, apesar da definição utilizar a noção de distância (que não faz sentido no plano projetivo), o conceito de quádruplas harmônicas faz sentido no Plano Projetivo, por meio da seguinte construção para o conjugado harmônico:

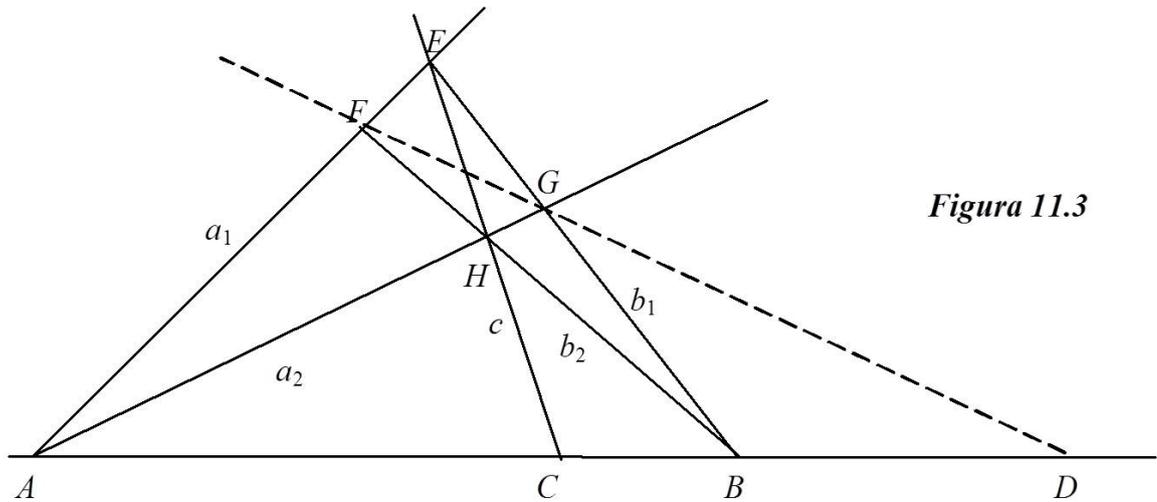


Figura 11.3

Dados os pontos A , B e C sobre uma reta r , traçamos duas retas quaisquer a_1 e a_2 passando por A e uma reta c passando por C . Unindo a B os pontos de incidência de c com a_1 e a_2 , respectivamente, obtemos as retas b_1 e b_2 . Fica então formado um quadrilátero ($EFHG$, na figura) tal que os lados opostos concorrem em A e B , e tal que uma de suas diagonais passa por C . Seja D o ponto de encontro de r com a outra diagonal do quadrilátero. Então D é o conjugado harmônico de C em relação à AB .

Esta construção é a definição de quádruplas harmônicas no plano projetivo. Vejamos que ela coincide, no plano Euclidiano, com a definição usual. Sejam os pontos E , F , G como na figura 1.

Aplicando o Teorema de Menelaus no $\triangle ABE$, secante DGF , temos:

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BG}{EG} \cdot \frac{EF}{AF} = 1. \quad (1)$$

No $\triangle ABE$, aplicamos o Teorema de Ceva para as cevianas concorrentes \overline{EC} , \overline{BF} e \overline{AG} :

$$\frac{AC}{BC} \cdot \frac{BG}{EG} \cdot \frac{EF}{AF} = 1. \quad (2)$$

De (1) e (2) temos $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$.

12 TEOREMA DE MIQUEL

Começaremos nesse capítulo com o teorema em si, que é um dos vários pequenos milagres dos chamados quadriláteros completos (veja um pouco mais desses "milagres" no problema proposto), que são os quadriláteros conhecidos unidos com as retas que contêm os lados. Isto é, um quadrilátero completo é a união de quatro retas em vez de quatro segmentos. Em seguida vamos estudar o Teorema de Miquel para triângulos, uma vez que os triângulos são o grande foco deste trabalho.

12.1 O Teorema de Miquel

Sejam a, b, c, d quatro retas coplanares, de modo que não há duas paralelas nem três concorrentes. Os circuncírculos dos quatro triângulos determinados pelas quatro retas passam por um mesmo ponto, denominado ponto de Miquel das quatro retas.

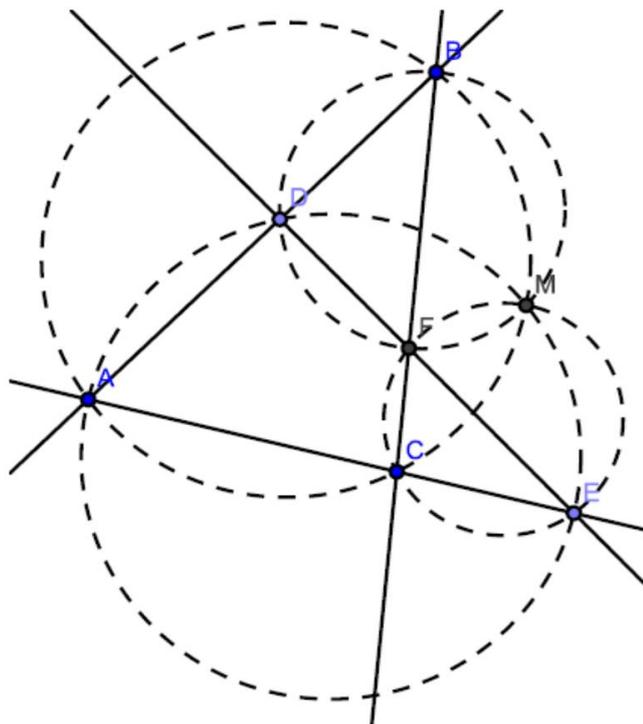


Figura 12.1

Demonstração: Seja M a interseção dos circuncírculos de CEF e BDF na figura acima.

Então $\angle MEA = \angle MFA = 180^\circ - \angle MFC = \angle BFM = \angle BDM = 180^\circ - \angle ADM$, de modo que $\angle MEA + \angle BDM = 180^\circ$ e, portanto, $MDAE$ é inscritível. Isso quer dizer que M pertence ao circuncírculo de ADE . Analogamente, prova-se que M pertence ao circuncírculo de ABC .

c.q.d.

12.2 Aplicação do Teorema de Miquel

(USAMO 2006, Problema 6) Seja $ABCD$ um quadrilátero e E e F pontos sobre os lados AD e BC , respectivamente, tal que $AE/ED = BF/FC$. A semirreta FE corta as semirretas BA e CD em S e T , respectivamente. Prove que os circuncírculos do triângulos SAE , SBF , TCF e TDE passam por um mesmo ponto.

Resolução: Ao fazer a figura, você provavelmente vai notar uma certa semelhança com a figura anterior.

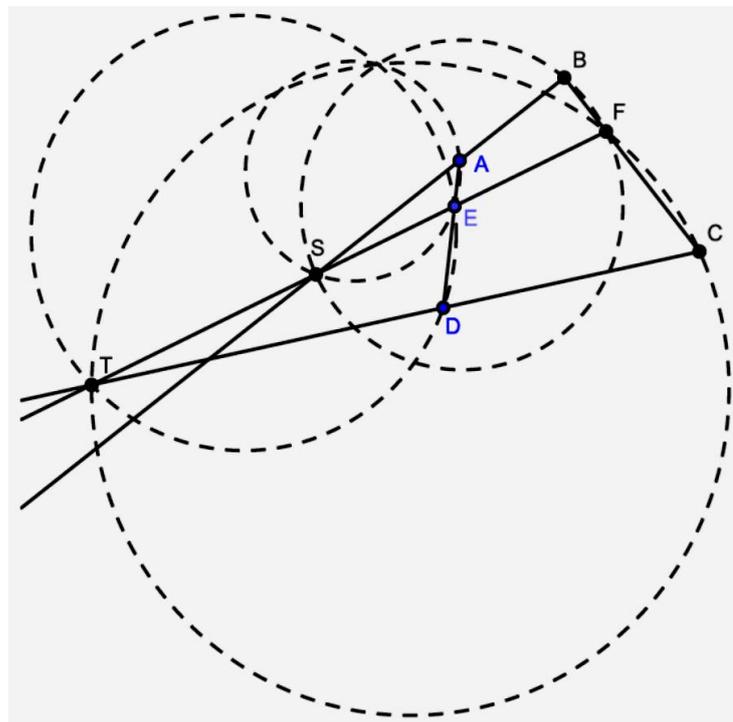


Figura 12. 2

Queremos provar que os pontos de Miquel de $ADTS$ e $BCTS$ coincidem, sendo assim temos:

Seja M a interseção dos circuncírculos de SAE e SBF . Mostraremos que os circuncírculos de TED e TFC também passam por M .

Um arrastão e uma semelhança dão conta do recado: primeiro, note que $\angle AME = \angle ASE = \angle BSF = \angle FBM$ e $\angle MEA = \angle MSA = \angle MSB = \angle MFB$. Então os triângulos AME e BMF são semelhantes, e da igualdade $AE/ED = BF/FC$ os triângulos MAD e MBC são semelhantes também. Uma rápida verificação mostra que MAB e MDC também são semelhantes, de fato, $\angle A\hat{M}B = \angle DMB - \angle DMA = \angle DMC + \angle CMB - \angle DMA = \angle DMC$, pois como MAD e MBC são semelhantes então $\angle DMA = \angle CMB$ e (novamente da semelhança).

Você pode imaginar que o triângulo MAD "gira" em torno de M e, após um "acerto de escala", é transformado no triângulo MBC . Isso é uma transformação geométrica conhecida como *roto-homotetia* de centro M . Assim, A é levado em B e D é levado em C . Note que a semelhança obtida anteriormente envolve o centro de *roto-homotetia* M , os pontos e suas imagens na transformação. Isso na verdade sempre acontece (é uma das semelhanças automáticas).

Agora podemos terminar o problema: da semelhança entre MAB e MDC , os ângulos externos MDT e MAS são congruentes. Como M pertence ao circuncírculo de SAE , $\angle MAS = \angle MES = \angle MET$, ou seja, $MDT = \angle MET$, o que significa que $MEDT$ é cíclico e, portanto, M pertence ao circuncírculo de TED . Utilizando outra semelhança automática, entre MEF e MDC (pois é, E é levado em F), prova-se que M pertence também ao circuncírculo de TFC .

Note que se U é a interseção de AB e CD , então pelo teorema de Miquel M também pertence ao circuncírculo de STU . Então na verdade cinco círculos passam pelo ponto M .

c.q.d.

12.3 Teorema de Miquel para triângulos

Seja ABC um triângulo e D, E, F pontos sobre as retas BC, CA, AB , respectivamente. Então os circuncírculos de AEF, BFD e CDE têm um ponto em comum. Esse ponto também é chamado de ponto de Miquel.

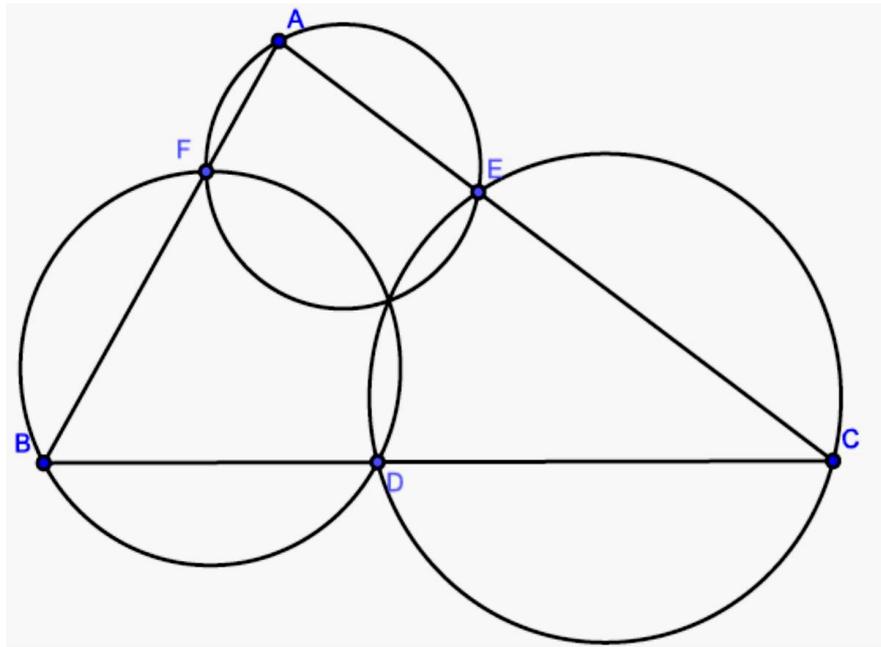


Figura 12. 3

Seja M a segunda interseção dos circuncírculos de AEF e BFD .

Então $\angle CDM = \angle BFM = \angle AEM = 180^\circ - \angle CEM$.

Considerações finais

Neste trabalho tivemos a oportunidade de discutir alguns teoremas e problemas de extrema importância para o estudo da geometria dos triângulos, porém podemos constatar que este é um assunto que possui uma infinidade de ramos que ainda podem ser abordados, uma vez que nos limitamos aqui em trabalhar teoremas com aplicações em problemas de Olimpíadas de Matemática. Vale salientar que o conteúdo aqui trabalhado já foi utilizado como material na preparação de alunos do Ensino Médio para Olimpíadas em um curso por mim ministrado no Pódion Colégio-Curso. Tal preparação ajudou a promover expressivos resultados, como por exemplo, alunos que obtiveram medalhas e menções honrosas em competições no âmbito nacional e internacional.

Referências

- [1] COXETER, H.S.M, GREITZER,S.L. **Geometry Revisited**.
- [2] Struik, D. J. **História Concisa das Matemáticas**, 3ª Edição. Lisboa: Ciência Aberta, Gradiva. 1997.
- [3] Revista do professor de matemática (RPM), nº 43, p. 26.
- [4] www.gogeometry.com
- [5] Revista Eureka! nº08, Sociedade brasileira de Matemática.
- [6] Revista Eureka! nº31, Sociedade brasileira de Matemática.
- [7] Revista Eureka! nº32, Sociedade brasileira de Matemática.
- [8] www.dmm.im.ufrj.br/projeto/forum/euler.htm - 1
- [9] www.ime.ufg.br/bienal/2006/mini/adelmo.of.pdf
- [10] www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/euclides/index.htm