UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCATINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE PALMAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

Weliton de Farias Nascimento

O ENSINO DE VETORES NA PRIMEIRA SÉRIE DO ENSINO MÉDIO COM AUXÍLIO DO GEOPLANO, DA MALHA QUADRICULADA E DO GEOGEBRA.

Palmas - TO

2014

Weliton de Farias Nascimento

O ENSINO DE VETORES NA PRIMEIRA SÉRIE DO ENSINO MÉDIO COM AUXÍLIO DO GEOPLANO, DA MALHA QUADRICULADA E DO GEOGEBRA.

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Msc. Gilmar Pires Novaes

Palmas – TO

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca da Universidade Federal do Tocantins
Campus Universitário de Palmas

N244e Nascimento, Weliton de Farias

O Ensino de Vetores na Primeira Série do Ensino Médio com Auxílio do Geoplano, da Malha Quadriculada e do Geogebra / Weliton de Farias Nascimento - Palmas, 2014.

59f.

Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Tocantins, Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, 2014.

Linha de pesquisa: Matemática.

Orientador: Prof. Msc. Gilmar Pires Novaes.

1. Geogebra. 2. Geoplano. 3. Vetores. I. Novaes, Gilmar Pires. II. Universidade Federal do Tocantins. III. Título.

CDD 510

Bibliotecário: Paulo Roberto Moreira de Almeida
CRB-2 / 1118

Weliton de Farias Nascimento

O ENSINO DE VETORES NA PRIMEIRA SÉRIE DO ENSINO MÉDIO COM AUXÍLIO DO GEOPLANO, DA MALHA QUADRICULADA E DO GEOGEBRA.

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática e aprovada pela seguinte banca examinadora:

Aprovada em 19 / 09 / 2014

BANCA EXAMINADORA

Rogério Azevedo Rocha

Prof. Dr. Rogério Azevedo Rocha (UFT)

Hellena Apolinário

Prof. Dra. Hellena Christina Fernandes Apolinário (UFT)

Prof. Dr. Reginaldo Naves dos Reis (IFTO)

Palmas – TO
2014

Aos meus avós, Raimundo José Farias e Ilda Maria de Farias e minha mãe, Rosângela Maria de Farias que, com muito esforço e amor, me criaram; À minha inestimável esposa Raquel Lorena Silvestre dos Santos Braga e filha, Sarah Vitória Braga Farias.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado a graça de alcançar esse objetivo tão almejado.

Aos meus colegas do PROFMAT, turma 2012, pelo apoio contínuo.

Aos professores que passaram por minha vida, contribuindo sempre para o meu crescimento pessoal.

Ao diretor (à época) do CEM de Taquaralto, Adolfo Bezerra de Menezes, pela flexibilização do meu horário de trabalho, bem como todos os colegas de trabalho da referida escola, pelo apoio a mim dispensado.

A CAPES pela disponibilização da bolsa de estudos, pois sem ela seria difícil percorrer a longa jornada e seus percalços.

A Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela oportunização deste mestrado.

A Universidade Federal do Tocantins (UFT) por nos disponibilizar espaços físicos, como sala de aula e biblioteca, para que pudéssemos realizar nossos estudos e pesquisas.

Agradeço o professor Dr. Andrés Lázaro Bazarra, pelo esforço e determinação frente à coordenação do PROFMAT no estado do Tocantins.

Ao meu orientador, professor Ms. Gilmar Pires Novaes, pelo apoio e orientações para conclusão deste trabalho.

RESUMO

Ao fazer uma análise do cronograma de conteúdos de matemática para o ensino médio da rede pública do Brasil, percebe-se a falta do ensino específico de vetores no Ensino Médio, em especial na primeira série. Tal abordagem, na maioria das vezes é feita pelos professores da disciplina de Física, pois o uso de vetores é essencial para o estudo da cinemática e da dinâmica. Como mudar essa realidade? Essa pergunta não é desabonadora das habilidades dos professores de Física ou de outra disciplina. O problema é que os conceitos e propriedades pertinentes aos vetores são somente apresentados aos alunos como uma ferramenta matemática, que facilita a representação de uma situação-problema. Quando o tema vetor é abordado, os alunos não são oportunizados a explorarem seus conceitos e propriedades. O veem apenas como um objeto, dotado de sentido, direção e módulo, além de na maioria das vezes nem saberem ao certo o que significam tais características. O ensino básico de vetores, assim como toda a matemática, deve ser feito de forma significativa, proporcionando ao aluno a associação do conceito com a realidade que o cerca. Propõe-se o uso de materiais concretos como o Geoplano e a malha quadriculada, associados ao uso do software Geogebra, no estudo dos conceitos e propriedades de vetores, pois esses materiais facilitam a visualização e a manipulação de um ou mais vetores simultaneamente. Esta proposta é para que seja realizada no início da primeira série do Ensino Médio, pois é a partir daí que os alunos precisarão dominar o conceito de grandezas vetoriais e, consequentemente, vetores.

PALAVRAS-CHAVE: Geogebra, Geoplano, Vetores.

ABSTRACT

When doing an analysis of the math content schedule for high school public network of Brazil, one senses the lack of specific teaching of vectors in high school, especially in the first series. Such an approach, in most cases is done by the teachers of physics discipline, because the use of vectors is essential for the study of kinematics and dynamics. How to change this reality? This question doesn't belittles the abilities of Physical teachers or another discipline. The problem is that the concepts and relevant properties to vectors are only presented to students as a mathematical tool that facilitates representation of a situation-problem. When the vector theme is discussed, students are not oportunizados to explore their concepts and properties. See just how an object endowed with meaning, direction and module, plus most of the time don't even know for sure what they mean such features. The basic teaching of vectors, as well as all the math, must be made significantly, providing the Student Association of the concept with the reality that surrounds it. It is proposed the use of concrete materials like the Geoboard and checkered mesh, associated with the use of the software Geogebra, in the study of the concepts and properties of vectors, because these materials facilitate the visualization and manipulation of one or more arrays simultaneously. This proposal is to be held at the beginning of the first series of high school because it is from there that the students will need to master the concept of vector quantities and, consequently, vectors.

KEYWORDS: Geogebra, Geoboard, Vectors.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Geoplano Isométrico 16
Figura 2: Geoplano Irregular 16
Figura 3: Geoplano quadrado 17
Figura 4: Geoplano retangular 17
Figura 5: Geoplano circular 18
Figura 6: Tábua para construir o Geoplano 18
Figura 7: Tábua quadriculada para ser perfurada........ 19
Figura 8: Perfuração e fixação de pinos na tábua 19
Figura 9: Fixação dos pinos na tábua........ 20
Figura 10: Representação de um vetor com projeções 5 unidades na horizontal e 3 unidades na vertical. 21
Figura 11: Representação de dois vetores quaisquer........ 22
Figura 12: Adição de dois vetores. 22
Figura 13: Vetor resultante da adição de dois vetores. 22
Figura 14: Par ordenado e vetor no plano........ 23
Figura 15: Vetor no plano cartesiano usando o geoplano 23
Figura 16: Representação de um ponto no plano cartesiano 24
Figura 17: As coordenadas de um ponto no plano usando o geoplano 24
Figura 18: Pontos em quadrantes diferentes no geoplano........ 25
Figura 19: Segmento de reta........ 26
Figura 20: Segmentos orientados........ 26
Figura 21: Coordenadas de um vetor no geoplano 27
Figura 22: Patrício e Almeida - Registros de um vetor........ 28
Figura 23: Vetores equipolentes........ 29
Figura 24: Módulo de um vetor no geoplano 30
Figura 25: Componentes de um vetor no geoplano 31
Figura 26: Vetor unitário........ 32
Figura 27: Versor de um vetor........ 32
Figura 28: Vetor nulo 33
Figura 29: Vetores opostos........ 33
Figura 30: Vetores iguais 35
Figura 31: Vetores iguais 35
Figura 32: Vetores colineares 36
Figura 33: Representação numérica de um vetor no geoplano........ 37
Figura 34: Adição de vetores........ 37
Figura 35: Adição de vetores no geoplano 38
Figura 36: Diferença de vetores........ 39
Figura 37: Passos para realizar a diferença entre dois vetores no geoplano 39
Figura 38: Multiplicação um vetor por um número real........ 40
Figura 39: Multiplicação de um vetor por um número real no geoplano 40
Figura 40: Ângulo entre vetores........ 41
Figura 41: Vetores opostos formam ângulo de 180° entre si........ 42

Figura 42: Vetores coincidentes apresentam ângulo 0° entre si 42
Figura 43: Vetores ortogonais no geoplano 43
Figura 44: Projeção de um vetor sobre um eixo 43
Figura 45: Coordenadas de um vetor sobre os eixos horizontal e vertical 44
Figura 46: Tela inicial do geogebra 46
Figura 47: Exibir malha quadriculada no geogebra 47
Figura 48: Construção de um vetor no geogebra 47
Figura 49: Construção de um vetor no geogebra 48
Figura 50: Construção de um vetor no geogebra 48
Figura 51: Translação de um vetor no plano usando a malha quadriculada do geogebra ... 49
Figura 52: Decompondo um vetor na malha quadriculada do geogebra 50
Figura 53: Adição de vetores na malha quadriculada do geogebra 51
Figura 54: Adição de vetores na malha quadriculada do geogebra 52
Figura 55: Adição de vetores na malha quadriculada do geogebra 52
Figura 56: Diferença de vetores na malha quadriculada do geogebra 53
Figura 57: Diferença de vetores na malha quadriculada do geogebra 53
Figura 58: Diferença de vetores na malha quadriculada do geogebra 54
Figura 59: Multiplicação de um vetor por um número real 55
Figura 60: Forças opostas atuando sobre um corpo 55
Figura 61: Dois vetores no plano 56
Figura 62: Ângulo entre dois vetores 56
Figura 63: Ângulo entre vetores usando a Lei dos Cossenos 57

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 11
CAPÍTULO 1: GEOPLANO POR CALEB GATTEGNO 14
1.1 CONTEXTO E HISTÓRIA 14
1.2 CONSTRUINDO UM GEOPLANO 18
1.3 COMO REPRESENTAR UM VETOR NO GEOPLANO 20
1.4 ALGUMAS REPRESENTAÇÕES DE VETORES NO GEOPLANO 21
CAPÍTULO 2: VETORES NO PLANO 23
2.3 ALGUMAS PROPRIEDADES DE VETOR 29
2.3.1 Módulo Ou Norma De Um Vetor 29
2.3.2. Vetor Unitário 31
2.3.4 Vetor Oposto 33
2.3.5 Vetores Iguais 35
2.3.6 Vetores Colineares 36
2.4 OPERAÇÕES COM VETORES 37
2.4.1 Adição De Vetores 37
2.4.2 Diferença De Vetores 39
2.4.3 Multiplicação De Um Vetor Por Um Número Real 40
2.4.4 Ângulo Entre Dois Vetores 41
2.4.5 Projeção De Um Vetor Sobre Um Eixo 43
CAPÍTULO 3: USANDO A MALHA QUADRICULADA E O GEOGEBRA PARA ESTUDAR VETORES 45
3.1. O GEOGEBRA 46
3.2. UM VETOR NA MALHA QUADRICULADA 49
3.3. DECOMPONDO UM VETOR EM COORDENADAS CARTESIANAS 50
3.4. ADIÇÃO DE VETORES NA MALHA QUADRICULADA 51
3.5. DIFERENÇA DE VETORES NA MALHA QUADRICULADA 53
3.6. MULTIPLICAÇÃO DE UM VETOR POR UM NÚMERO REAL NA MALHA QUADRICULADA 54
3.7. ÂNGULO ENTRE DOIS VETORES 55
CONSIDERAÇÕES FINAIS 58
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 59

INTRODUÇÃO

Ensinar o aluno manipular vetores é um grande desafio para os professores de física na primeira série do Ensino Médio, pois a maioria das escolas não tem material pedagógico que facilita a associação entre o conhecimento teórico e a visualização concreta de vetores. Este trabalho consiste numa proposta para auxiliar os professores de física no ensino de vetores com o uso do geoplano, da malha quadriculada e do geogebra como ferramentas que facilitam a compreensão dos conceitos estudados, pois os vetores são ferramentas de grande importância para a física, uma vez que são utilizados na representação de fenômenos e modelagem de situações presentes no cotidiano do Ser Humano.

O geoplano e a malha quadriculada têm sido utilizados no processo de ensino-aprendizagem como objetos auxiliares na exploração lúdica de conceitos geométricos como perímetro, área e simetria de figuras planas nas primeiras séries do Ensino Fundamental. O geogebra é um software utilizado para explorar diversos conceitos matemáticos, principalmente no Ensino Médio. Por ser um software gratuito e dinâmico, seu uso se tornou frequente entre professores de física e matemática, os quais têm como objetivo principal a apropriação do conteúdo por parte do aluno.

Como fazer com que o aluno se aproprie com mais facilidade do conteúdo estudado? Na tentativa de responder esta questão Lima escreve que:

> É bom que o professor tenha, e procure transmitir a seus alunos, uma noção do que significa a matéria que está ensinando, transmitindo também que o ensino dessa matéria é uma das formas de preparar a nação para o futuro. A matemática tem muitas faces: ela é uma arte, é também um eficaz instrumento usado nas mais diversas situações concretas, é uma linguagem precisa e geral, sem contar que ela é ainda um grande desafio, tanto do ponto de vista lúdico, como na disputa eterna entre o matemático e a verdade oculta sob várias formas.
>
> É essa visão que o aluno tem que ter da matemática, familiarizando gradativamente com ela a fim de saber conceituá-la, manipulá-la e aplicá-la de forma satisfatória.

> Essas três componentes bem dosadas implicam no equilíbrio do processo de aprendizagem, o interesse dos alunos e a capacidade que terão para empregar futuramente o que aprenderam nas aulas. (LIMA, 2001, p.149)

Durante longo tempo, a prática mais frequente na educação básica tem sido apenas a transferência de conhecimento. Essa prática deixa lacunas no processo de ensino-aprendizagem, principalmente quando os conceitos abordados têm a matemática como linguagem usada para sua expressão e manipulação. Pensar em matemática, sem situá-la numa dimensão histórico-social implica manter lacunas neste pensar. Veja o que diz Caraça sobre a matemática:

> A matemática é geralmente considerada como uma ciência à parte, desligada da realidade, vivendo na penumbra do gabinete, gabinete fechado, onde não entram os ruídos do mundo exterior, nem o sol, nem os clamores dos homens. Isto só em parte é verdadeiro.
> Sem dúvida, a matemática possui problemas próprios, que não têm ligação imediata com os outros problemas da vida social. Mas não há dúvida também de que os seus fundamentos mergulham tanto como os outros problemas da vida social. Mas não há dúvidas também de outro qualquer ramo da Ciência, na vida real; uns e outros entroncam na mesma Mader. (CARAÇA, 1975, p.13)

Muitas vezes, os conteúdos são abordados de forma desconexa entre si, como se a matemática fosse uma construção particionada, onde as várias partições não tivessem pontes de ligações entre si. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (2000), se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e aprofundada, não há garantias que o aluno estabeleça alguma significação para as ideias isoladas e desconectadas umas das outras, basta observarmos o fracasso escolar e as dificuldades dos alunos em relação à matemática em todos os níveis escolares, fato comprovado em pesquisas nacionais e internacionais.

O professor deve incentivar seus alunos a associarem o conceito de vetor para solucionar determinados problemas. Poderá surgir aí um questionamento por parte do professor. E se os alunos não tiverem habilidades e competências para tal abstração?

Oportunamente, é proposto o uso do geoplano, da malha quadriculada e do software geogebra. É neste momento que o professor mostrará ao aluno, que além de papel formativo e instrumental, a matemática tem caráter científico, instingando-o a buscar explicações e construções lógicas a partir da manipulação de vetores.

O ensino com auxílio dos materiais concretos e dinâmicos deve ser oportunizado ao aluno para que ele possa experimentar diferentes situações ao manipular um ou mais vetores, diferentemente do estudo de vetores de forma tradicional, com papel e caneta, pois o mesmo é rígido, o que dificulta as possíveis variações na manipulação por parte do aluno. O professor deve facilitar e estimular a abstração, oportunizando representações de vetores simultâneos e variáveis, permitindo a análise de ângulos, inclinações, interseções e outros aspectos vetoriais, seja na série final do ensino fundamental ou na série inicial do ensino médio. Deve ficar claro que o estudo de vetores nessa etapa da educação, tem mais caráter investigativo do que formativo.

Este trabalho está estruturado ao longo de três capítulos.

No primeiro capítulo, encontra-se a história do geoplano, os objetivos de sua criação por Caleb Gattegno e algumas aplicações.

O segundo capítulo introduz a noção de vetor no plano bidimensional, a partir do plano cartesiano, suas coordenadas e propriedades usando o geoplano. Este capítulo aborda ainda as operações de adição de vetores, multiplicação de um vetor por um escalar e norma ou comprimento de um vetor. A manipulação de tais operações é fundamental para a física newtoniana, como constam em alguns exemplos ao longo do respectivo capítulo.

A malha quadriculada, juntamente com software geogebra, são usados no terceiro capítulo como instrumentos para estudar as principais operações envolvendo vetores.

As manipulações apresentadas facilitarão o ensino de vetores, pois são simples e dinâmicas, características que despertam o interesse do aluno pelo assunto estudado. Em todo o desenvolvimento do trabalho, os conceitos e propriedades serão abordados usando o geoplano, a malha quadriculada e o geogebra.

CAPÍTULO 1: GEOPLANO POR CALEB GATTEGNO

1.1 CONTEXTO E HISTÓRIA

Caleb Gattegno foi um cientista egípcio que dedicou parte de sua vida a desenvolver materiais que facilitasse a aprendizagem. Nasceu em Alexandria no ano de 1911 e morreu em 1988 em Paris, França. Foi um visionário para sua época, principalmente em relação à educação matemática. Entre os diversos materiais concretos criados por Gattegno destaca-se o geoplano.

Sobre o geoplano, Gelsa Knijnik (2004) afirma que “o material foi criado pelo professor Dr. Caleb Gattegno em 1961 na Inglaterra”. Ainda em relação ao geoplano Leonardo Assis (2006) diz que é um instrumento educacional simples, composto por uma base em formato geométrico com supinos, formando uma malha, normalmente composto por uma base de madeira e com pregos formando sua malha.

A partir da sua criação, o uso do geoplano foi bastante difundido por educadores matemáticos. Porém, com o passar do tempo o uso do mesmo se restringiu às séries iniciais, pois os professores alegam que sua aplicabilidade nas séries finais do ensino fundamental e no ensino médio é limitada. Uma soma de vetores se torna inviável a partir do momento que o vetor resultante tenha comprimento maior que o comprimento da diagonal do geoplano, por exemplo. Além disso, a construção desse instrumento com grandes dimensões, não facilita a manipulação do mesmo dentro da unidade escolar, pois a maioria das escolas não possui laboratório de matemática e o geoplano teria que ser deslocado com frequência.

Outro fator que faz com que o uso do geoplano no ensino médio não seja muito usado é a variedade de softwares que permitem a manipulação prática de alguns conceitos matemáticos, como o geogebra. A proposta então é reunir o material concreto com um software. Mas de que maneira? O geoplano deve ser usado para explorar as ideias iniciais de vetores, como por exemplo, introduzir a noção de módulo, direção e sentido de um vetor e manipular vetores com pequenos módulos, permitindo a representação de uma ou mais operação com os mesmos.

Após a exploração das noções básicas de vetores no geoplano, passa-se, devido às limitações do mesmo, para o uso de malhas quadriculadas, físicas ou digitais, que na maioria dos softwares é “infinita”, preservando propriedades e características dos elementos matemáticos estudados.

A matemática, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio:

> Contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. (BRASIL, 2002, p. 40)

O professor deve usar todas as ferramentas possíveis para que o aluno possa absorver e, posteriormente, manipular com precisão os conceitos estudados. Cabe ao professor usar a ludicidade nas suas aulas, pois facilita o aprendizado e favorece a interdisciplinaridade. Logo, o uso do geoplano será um facilitador na construção de diversos conceitos matemáticos, principalmente no tema proposto pelo professor, ajudando na absorção de conceitos e propriedades que serão usados em momentos oportunos dentro do processo de ensino e aprendizagem de física, matemática ou outra disciplina.

Atualmente, alguns educadores brasileiros têm estudado as aplicabilidades do geoplano nas mais diversas subáreas da matemática, seja através das tábuas com supinos, seja através das malhas quadriculadas. Segundo Rocha (2014) existe diversos tipos de geoplano, classificados a seguir.

Os geoplanos podem ser classificados quanto:

I. À disposição dos pinos.

a) Geoplanos Isométricos

Possuem os pinos fixos no encontro das linhas da malha quadriculada na tábua, conforme figura 1. Esse é o modelo mais usado nas aplicações práticas do ensino de matemática.

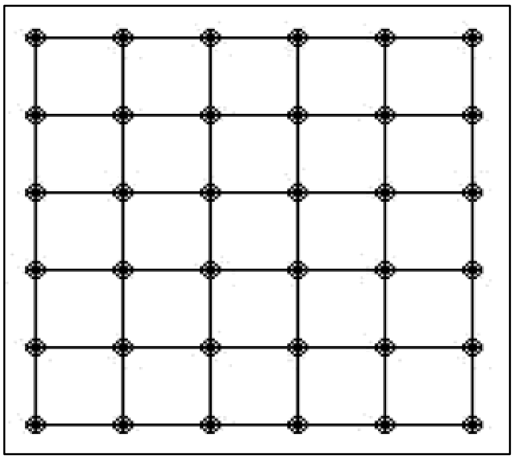


Figura 1: Geoplano Isométrico

b) Geoplanos Irregulares

Nesses, os pinos são fixados de qualquer maneira, sem obedecer a uma sequência lógica. Esse formato de geoplanos é utilizado principalmente por artistas, possibilitando uma infinidade de combinações de fios entrelaçados aos supinos.

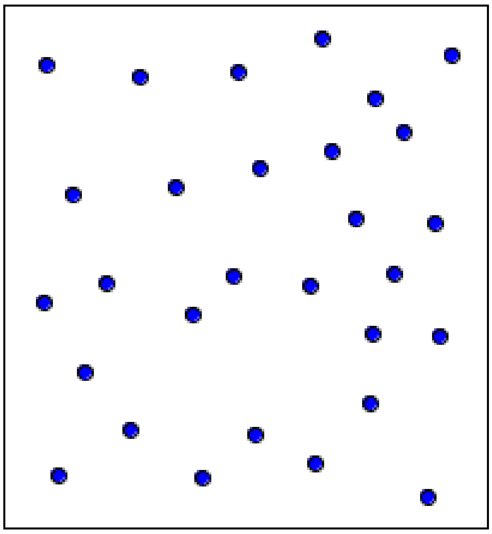


Figura 2: Geoplano Irregular

II. Ao formato da malha.

a) Geoplanos Quadrados.

Os geoplanos quadrados são formados por malhas que apresentam a mesma distância entre dois pinos quaisquer na horizontal ou na vertical, formando quadrados. Geralmente apresentam o mesmo número de pinos na horizontal e na vertical, veja figura 3.

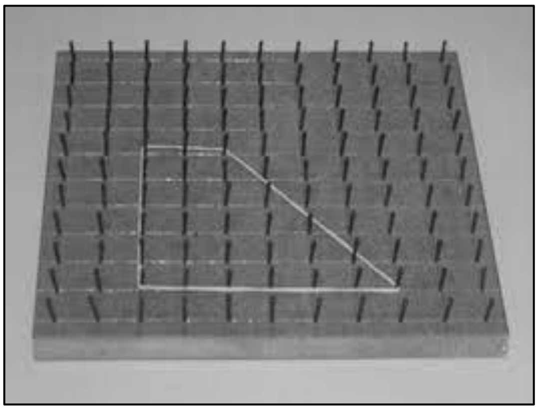


Figura 3: Geoplano quadrado

b) Geoplanos Retangulares.

Nesses as malhas formam retângulos, ou seja, a distância medida entre dois pinos na largura é menor que a distância entre dois pinos no comprimento. Se essas distâncias forem iguais, temos um geoplano de malha quadrada. Os geoplanos retangulares podem apresentar ou não o mesmo número de pinos na horizontal e vertical.

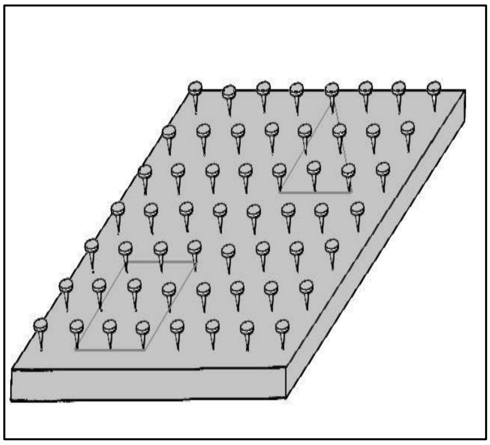


Figura 4: Geoplano retangular

c) Circulares.

Quando a malha é formada por conjuntos (círculos) de pinos equidistantes de um pino central. Além de serem utilizados por artistas, os geoplanos circulares podem ser usados no estudo de círculo e suas propriedades. Basta que o professor tenha o cuidado de manipular um material com conjuntos de pinos dispostos de maneira que não rompa a noção de circunferência. Podem ser exploradas características como raio de um círculo, comprimento de uma circunferência, arcos e suas medidas, ângulos e suas medidas e até mesmo o círculo trigonométrico.

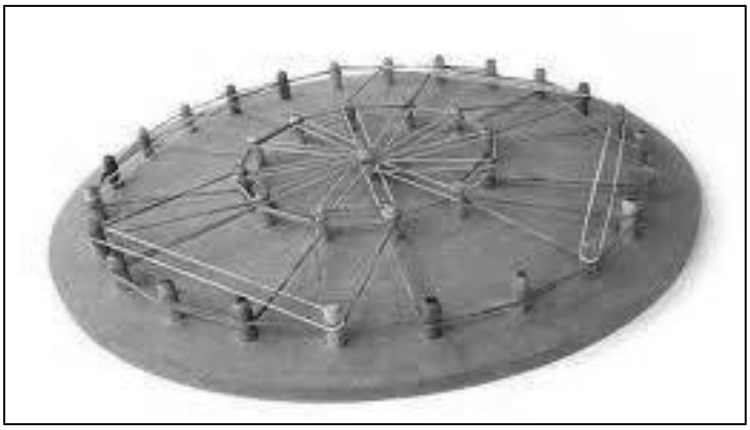


Figura 5: Geoplano circular

1.2 CONSTRUINDO UM GEOPLANO

À primeira vista não parece nada fácil representar um ou mais vetores num tabuleiro com supinos fixos. Mas com criatividade e objetividade o professor pode utilizar diversos materiais do seu cotidiano para representar vetores.

Passos para fabricar um geoplano regular e quadrado.

1° passo:

Corte uma tábua com formato quadrado. As dimensões ficam a critério de cada um, quanto maior as dimensões, maior será a possibilidade de representar vetores de maior módulo.


Figura 6: Tábua para construir o Geoplano

2° passo:

Com uma régua ou trena (instrumento usado na construção civil para medir distância) escolha sua unidade de medida para cada quadriculado interno ao tabuleiro. Se escolher a unidade com cinco cm, cada quadriculado terá cinco cm de lado, por exemplo.

Após escolher a unidade de medida, desenhe uma malha quadriculada sobre a tábua já cortada em formato de quadrado.

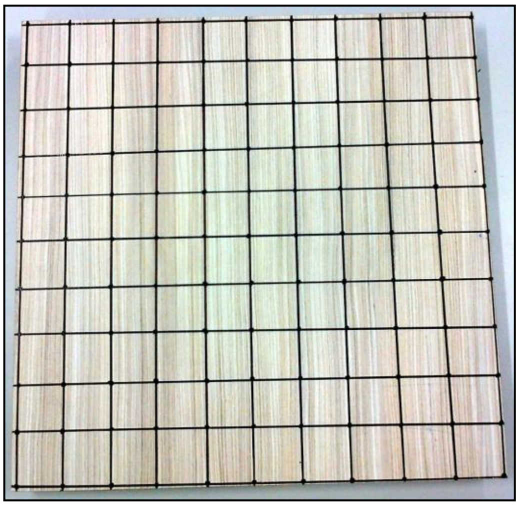


Figura 7: Tábua quadriculada para ser perfurada

3° passo:

Em cada encontro de linhas da malha desenhada, faça um furo de modo que não transpasse a espessura da tábua. Se a tábua tem seis cm de espessura, faça furos com três ou quatro cm de profundidade. O diâmetro dos furos depende do diâmetro dos pinos que você vai utilizar.

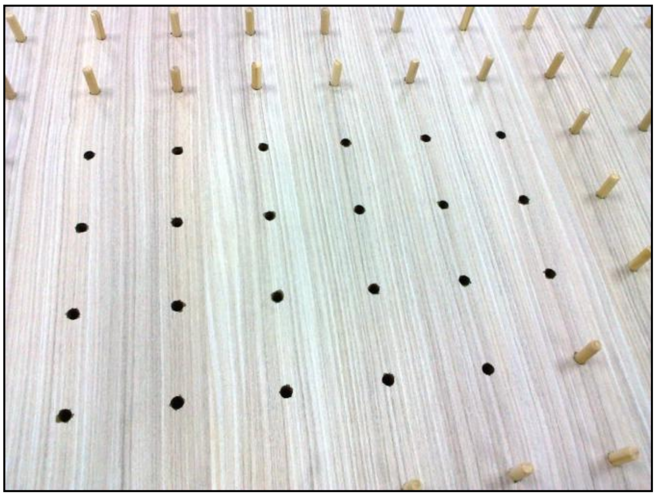


Figura 8: Perfuração e fixação de pinos na tábua

4° passo:

Pode ser utilizados palitos para churrasco ou encomendados pinos específicos numa marcenaria. Porém, para o estudo de vetores, recomendo utilizar apenas os pinos que vão representar o ponto inicial e ponto final do segmento orientado que representará o vetor.

Como a tábua e a malha escolhida são quadradas, o geoplano terá a mesma quantidade x de pinos em cada lado e x^2 pinos no total.

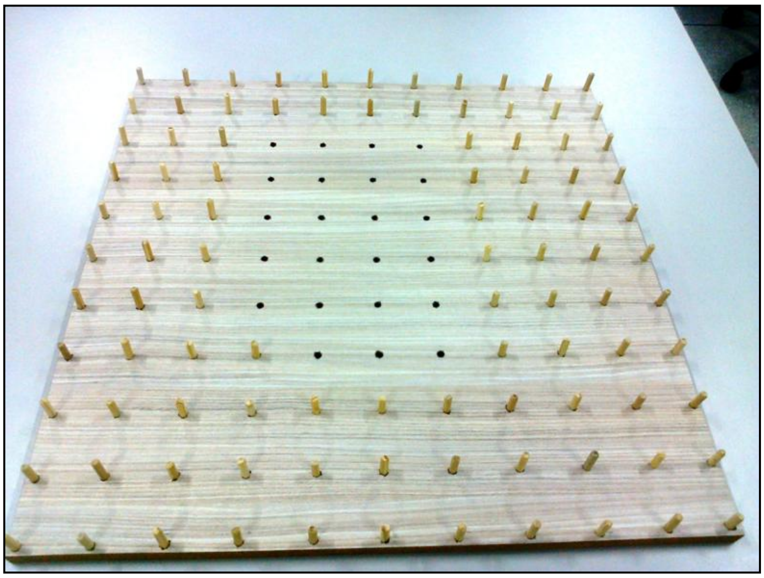


Figura 9: Fixação dos pinos na tábua

O professor deve construir o geoplano junto com seus alunos, o que o possibilitará revisar conceitos geométricos como número quadrado perfeito, potenciação, radiciação, simetrias e áreas, todos estudados em séries anteriores.

1.3 COMO REPRESENTAR UM VETOR NO GEOPLANO

Após a construção da tábua do geoplano com seus supinos, o mesmo está pronto para ser usado.

- Módulo de um vetor no Geoplano:

É propício usar ligas para amarrar dinheiro para representar o módulo do vetor, basta, antes de qualquer coisa, deixar claro que a liga com suas duas “pernas” representa a distância entre os dois pinos aos quais ela está fixa.

- Direção de um vetor no Geoplano:

Basta usar um transferidor para medir o ângulo do vetor representado com a direção horizontal. Nesse momento é oportuno que o professor, mesmo que na série inicial do ensino médio, aborde a noção de inclinação de uma reta no plano.

- Sentido de um vetor no Geoplano:

Estabelecida a direção do vetor, prossegue-se para estabelecer o sentido do mesmo. Como o sentido é representado por uma seta na extremidade do vetor, o professor pode usar diversos objetos para representá-la. Por exemplo, um pedaço (parte pontiaguda) de lápis. Corta-se a extremidade pontiaguda de um lápis, cerca de dois cm, e o fixe à liga com uma fita transparente, conforme figura 10 a seguir.

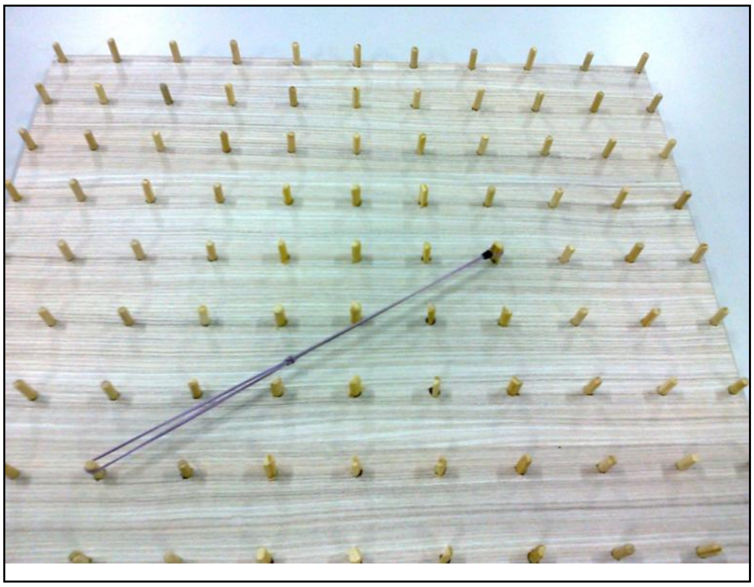


Figura 10: Representação de um vetor com projeções 5 unidades na horizontal e 3 unidades na vertical.

1.4 ALGUMAS REPRESENTAÇÕES DE VETORES NO GEOPLANO

A seguir são representados alguns vetores no geoplano. Todas as representações foram desenvolvidas no decorrer deste trabalho.

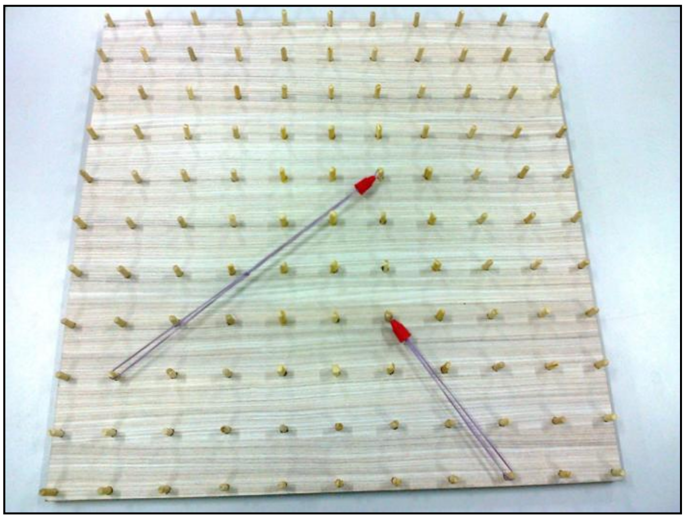


Figura 11: Representação de dois vetores quaisquer.

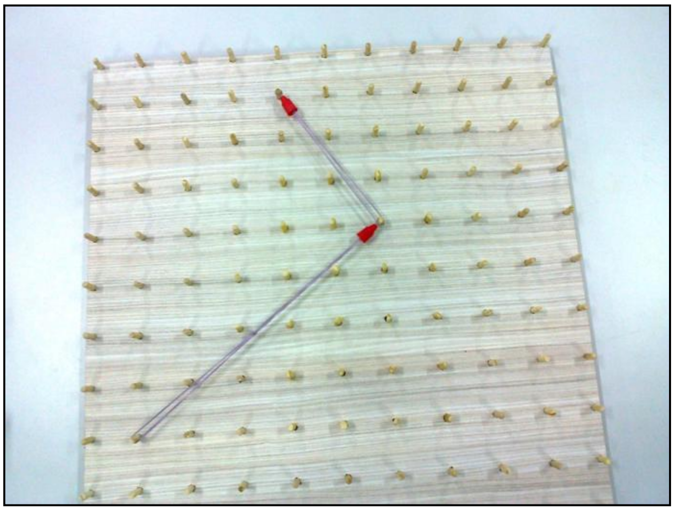


Figura 12: Adição de dois vetores.

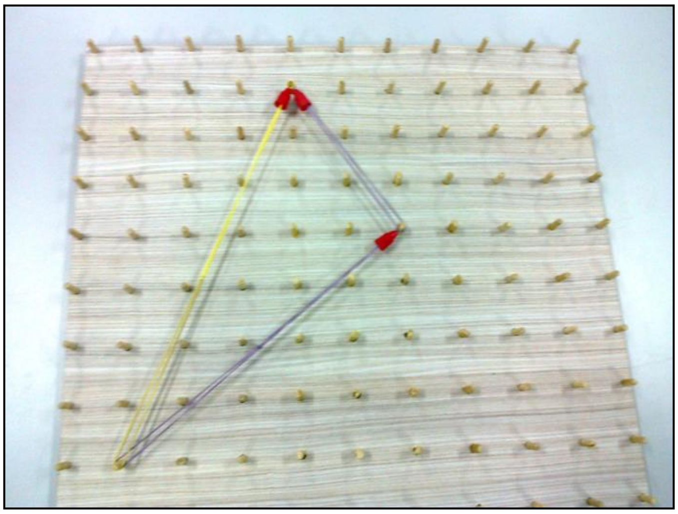


Figura 13: Vetor resultante da adição de dois vetores.

CAPÍTULO 2: VETORES NO PLANO

2.1 O PLANO CARTESIANO

Definição 2.1: Define-se plano cartesiano como sendo o plano contendo um sistema formado por dois eixos, OX, horizontal, e OY, vertical, perpendiculares entre si. O conjunto de todos os pares ordenados (x,y) de números reais forma o plano $\mathbb{R}^2$. Logo:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x,y \in \mathbb{R}\}$$

Um par ordenado (x,y) representa um ponto no plano e, nesse caso, x e y são chamados de coordenadas. Ele também representa um vetor e, nesse caso, x e y são chamados de componentes.

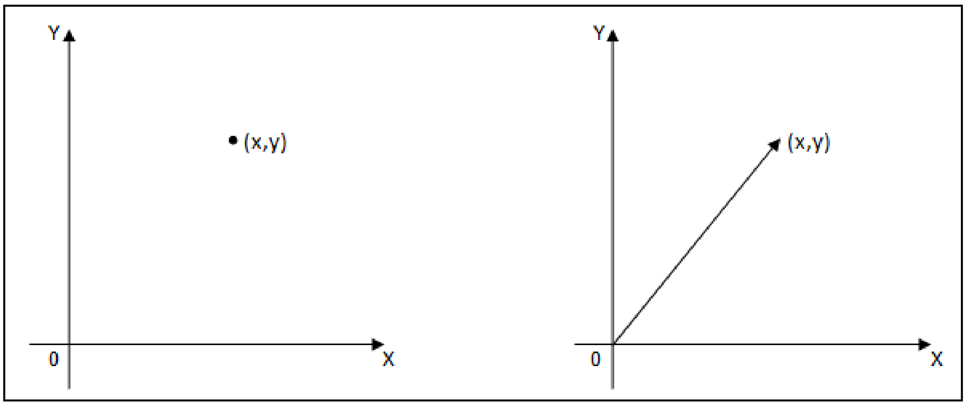


Figura 14: Par ordenado e vetor no plano

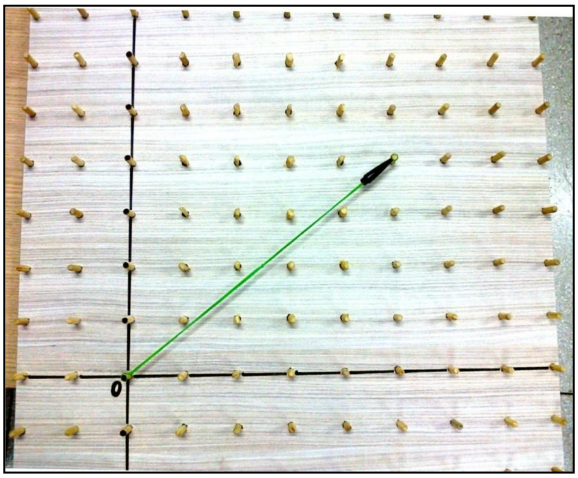


Figura 15: Vetor no plano cartesiano usando o geoplano

Denomina-se a intersecção desses eixos, de origem do sistema, e é representada pela letra O. Adotando uma unidade de medida, se estabelece coordenadas sobre os eixos cartesianos. Daí, os mesmos representam duas retas numéricas reais, interceptando-se nas suas coordenadas de valor zero.

O eixo OX é chamado de eixo das abscissas, enquanto o eixo OY é chamado de eixo das ordenadas. As abscissas e as ordenadas são coordenadas que podem apresentar valores positivos ou negativos.

Abscissas positivas e negativas se localizam à direita e à esquerda, ordenadas positivas e negativas se localizam acima e abaixo da origem, respectivamente. Com o domínio de tais conceitos, pode-se determinar um ponto do plano conhecendo suas coordenadas.

Por outro lado, um ponto P é a imagem geométrica do par ordenado (x,y) e o indicamos por P = (x,y), sendo x a primeira coordenada, ou abscissa, e y a segunda coordenada, ou ordenada de P. Portanto, existe uma relação biunívoca entre a imagem geométrica e o par ordenado que representam um ponto no plano. Logo, o conjunto $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} X \mathbb{R}$ é denominado plano cartesiano, e é geometricamente representado por todos os pontos do plano coordenado xOy.

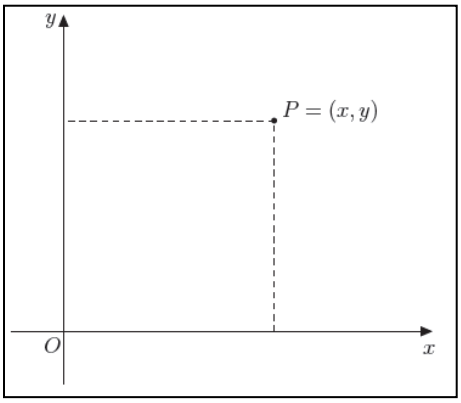


Figura 16: Representação de um ponto no plano cartesiano

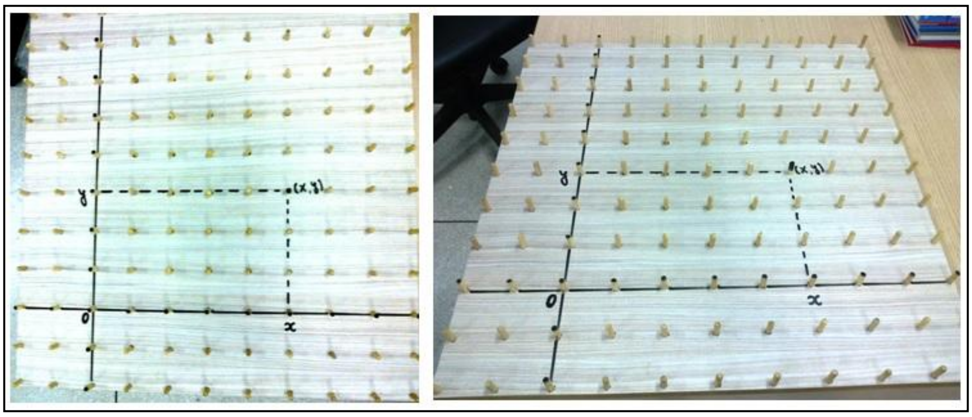


Figura 17: As coordenadas de um ponto no plano usando o geoplano

O plano cartesiano é divido em quatro regiões, delimitadas pelos eixos perpendiculares, denominadas quadrantes. Começa-se nomeando os quadrantes pela região compreendida entre as partes positivas dos eixos. Esse é o primeiro quadrante e, a partir dele, no sentido anti-horário, nomeiam-se os outros três quadrantes. Na figura 18 considere P um ponto localizado no primeiro quadrante, logo os pontos R, S e Q estão localizados respectivamente no segundo, terceiro e quarto quadrante.

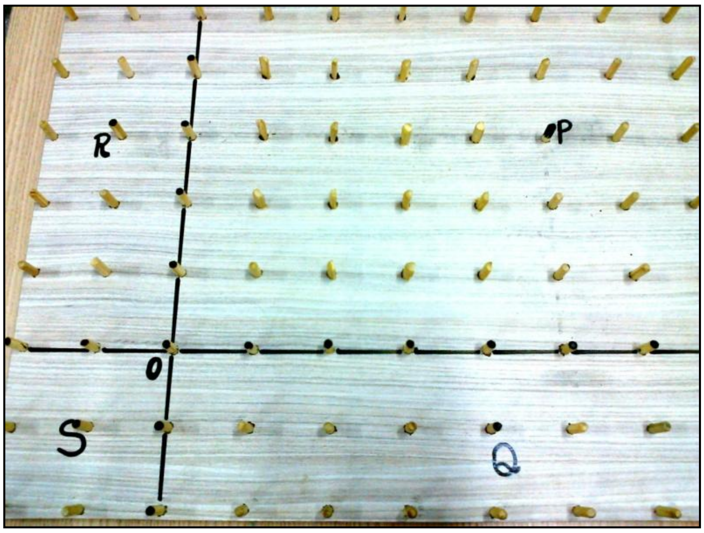


Figura 18: Pontos em quadrantes diferentes no geoplano

1º quadrante (I) = $\{(x,y) \mid x>0 \text{ e } y>0\}$

2º quadrante (II) = $\{(x,y) \mid x<0 \text{ e } y>0\}$

3º quadrante (III) = $\{(x,y) \mid x<0 \text{ e } y<0\}$

4º quadrante (IV) = $\{(x,y) \mid x>0 \text{ e } y<0\}$

Após o estudo dos quadrantes o professor deve realizar atividades de localização de pontos nos respectivos quadrantes usando o geoplano.

2.2 VETORES E SEGMENTOS NO PLANO

Nesse momento o professor deve rever o conceito de segmento de reta, distinguindo-o do conceito de vetor. Os conceitos são distintos, porém os vetores são representados por segmentos de retas.

Definição 2.2: Seja r uma reta do plano. Em seguida considere os pontos A e B pertencentes à reta r. Denomina-se segmento AB da reta r o conjunto dos pontos da reta r compreendidos entre os pontos A e B, sendo A e B os extremos do segmento obtido .

Na linguagem coloquial, define-se o segmento AB ou BA, como sendo a parte da reta, com extremidades em A e B. Nesse caso, não fica definido quem é ponto inicial e quem é ponto final, como na figura a seguir.

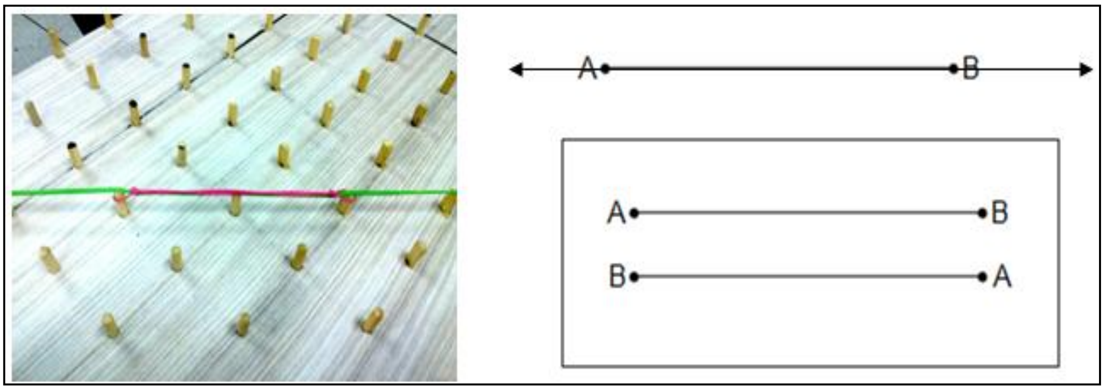


Figura 19: Segmento de reta

Ao atribuir sentido a um segmento, este é chamado de segmento orientado. Nesse, o ponto inicial e o ponto final do segmento são bem definidos, como mostra a figura 20. Quando se estuda ou manipula um segmento orientado, automaticamente, definem-se os pontos inicial e final do mesmo. Logo, os segmentos AB e DC, apresentam A e D como pontos iniciais e B e C como pontos finais, respectivamente.

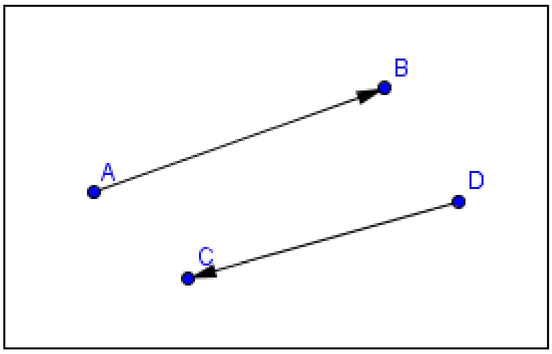


Figura 20: Segmentos orientados

Por que um segmento orientado não é um vetor?

Como explicitado nos parágrafos anteriores, um segmento orientado é fixo no plano. Ele é apenas um objeto geométrico usado para representar um vetor.

Na maioria das vezes quando se ensina o conceito de vetores, é repassada a ideia que o vetor tem um ponto inicial e um ponto final fixo. Dessa maneira, o aluno “engessa” o vetor no plano e não consegue entender a manipulação de vetores para efetuarmos as operações básicas, como adição e subtração entre os mesmos.

Cada ponto P do plano cartesiano define um vetor $\overrightarrow{OP}$ (com origem em O e extremidade em P), logo $\vec{v}$ = (x,y). De acordo com Patrício e Almeida (2014) o professor deve orientar o aluno analisar cada situação, pois associar as coordenadas da extremidade de um vetor com as coordenadas do ponto que representa essa extremidade pode incorrer em um erro, basta que o vetor não tenha origem em O.

Observe a figura a seguir.

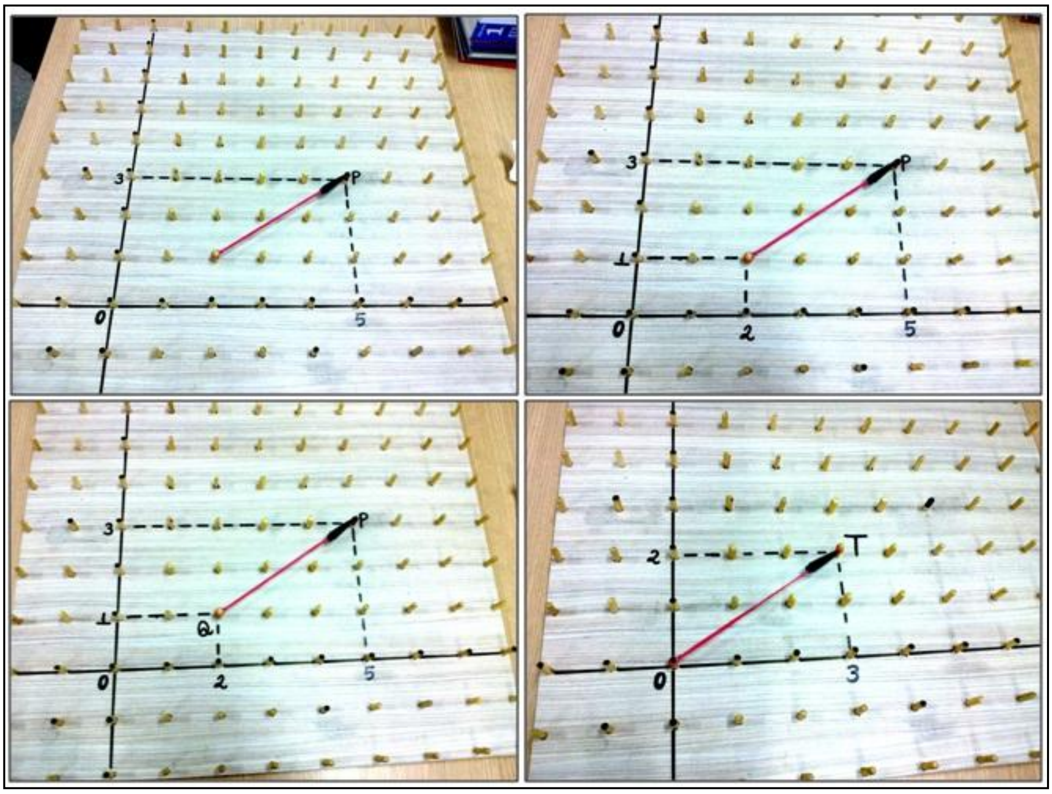


Figura 21: Coordenadas de um vetor no geoplano

O vetor $\overrightarrow{PQ}$ da figura acima tem extremidade no ponto P(5,3), porém a igualdade $\overrightarrow{PQ}$=(5,3) não é verdadeira. O professor deve realizar a translação do vetor em duas unidades para esquerda e uma unidade para baixo, de modo que o mesmo passe a ser representado pelo ponto T(3,2). Logo $\overrightarrow{PQ}$=$\overrightarrow{OT}$=(3,2)=T.

Ainda de acordo com Patrício e Almeida existem diferentes formas de representar um vetor, a saber, representação numérica, representação vetorial, representação gráfica e representação da linguagem natural, conforme imagem a seguir.

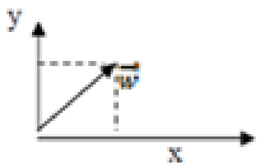
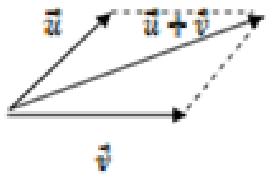
TIPO DE REGISTRO	REPRESENTAÇÕES
Registro Algébrico	Representação Numérica: expressa vetores juntamente com suas coordenadas (parte numérica), geralmente utilizada em operações de soma. Ex.: $\vec{u} = (-2,5)$, $\overrightarrow{AB} = (4,-1)$
	Representação Vetorial: geralmente utilizada quando o vetor é definido por dois pontos (inicial e final). Ex.: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CG}$
Registro Figural	Representação Gráfica: presença de desenho, utilizando como suporte o sistema cartesiano (eixo). Ex.: 
	Representação Vetorial: presença de desenho, sem a utilização do eixo cartesiano. Ex.: 
Registro da Língua Natural	Representação da Língua Natural: utilização de palavras da língua vigente. Ex.: Calcule a soma dos seis vetores que têm por representantes segmento orientados com origem em cada um dos vetores , e extremidades no centro de um mesmo hexágono regular.

Figura 22: Patrício e Almeida - Registros de um vetor

Dado um vetor, esse pode ser representado por qualquer vetor equipolente a ele. Uma classe de vetores equipolentes é o conjunto dos vetores que têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo módulo, conforme figura a seguir.

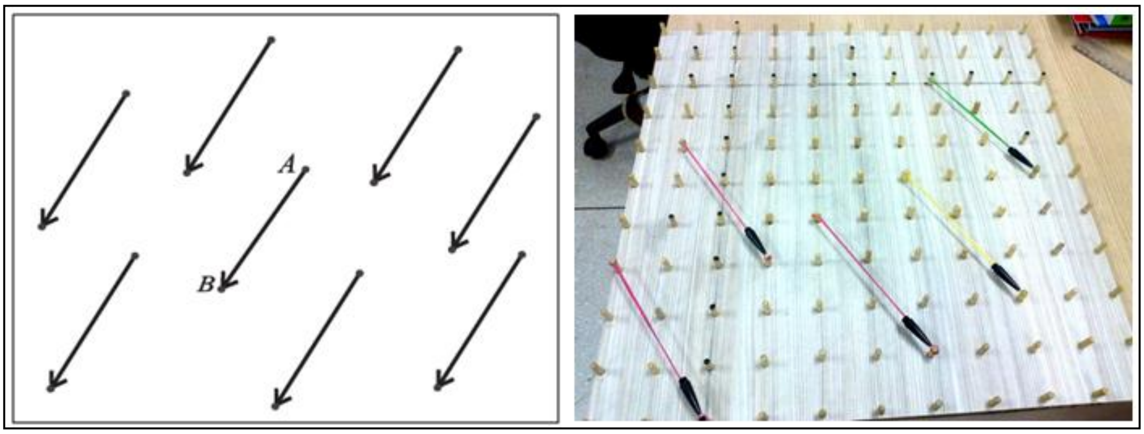


Figura 23: Vetores equipolentes

O vetor $\overrightarrow{AB}$, da figura 23, pode ser representado por qualquer vetor do plano que possua mesma direção, sentido e módulo. Daí, quando se realiza operações com vetores, os mesmos podem ser transladado para qualquer lugar do plano, de modo que satisfaça as necessidades para realizar a operação considerada.

Definição 2.3: Sejam A e B pontos do plano, o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ representa os elementos do conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes ao segmento orientado AB.

O estudo de vetores equipolentes levará o aluno a compreender o fato de poder “mover” um vetor para realizar uma operação, pois ele saberá que não se trata de um segmento orientado.

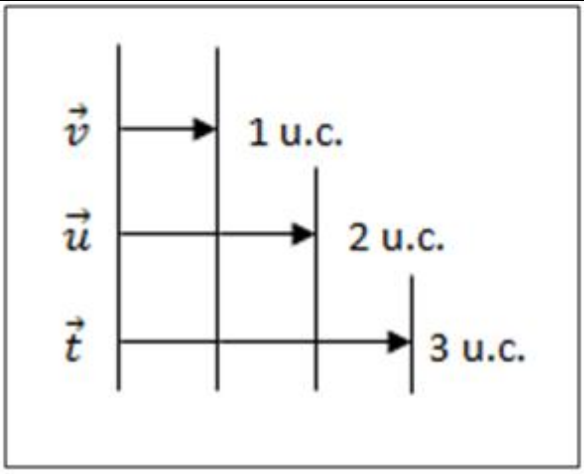
2.3 ALGUMAS PROPRIEDADES DE VETOR

Todas as propriedades de vetores abordadas podem ser apresentadas com o auxílio do geoplano. Cada propriedade terá a descrição de sua abordagem usando o geoplano e a respectiva figura da mesma.

2.3.1 Módulo Ou Norma De Um Vetor

O módulo, ou norma, representa a quantidade de unidades de comprimento que um vetor possui, e sua representação são as barras duplas.

Veja a figura 24 a seguir. À esquerda encontram-se representados três vetores, $\vec{v}$, $\vec{u}$, $\vec{t}$. O primeiro medindo uma unidade de comprimento (u.c.), o segundo duas u.c. e o terceiro, três u.c.



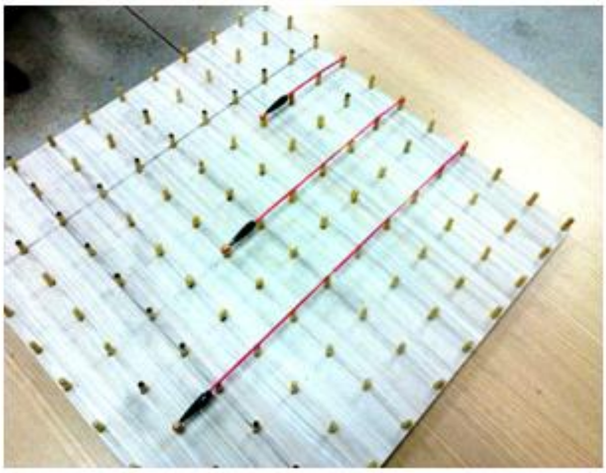


Figura 24: Módulo de um vetor no geoplano

À direita da figura 24 encontram-se representados três vetores no geoplano. É importante o professor auxiliar os alunos na escolha da unidade de comprimento, a qual pode ter uma, duas, três ou mais unidades de comprimento entre os pontos do geoplano. Na representação acima a unidade de comprimento foi definida como três unidades de comprimento para o geoplano ilustrado. Observa-se que estão representados três vetores com módulos distintos. Da maneira que foi definida a unidade de comprimento, os vetores têm módulos medindo um, dois e três unidades de comprimento.

Os módulos dos vetores dados são representados da seguinte forma algébrica:

$||\vec{v}||$ = 1 u.c. $||\vec{u}||$ = 2 u.c. $||\vec{t}||$ = 3 u.c.

Algebricamente o módulo de $\vec{v}$, com $\vec{v}$ = (x, y), é dado pela expressão:

$$||\vec{v}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

A expressão dada é facilmente encontrada ao aplicar o Teorema de Pitágoras nas componentes do vetor, conforme a figura 25.

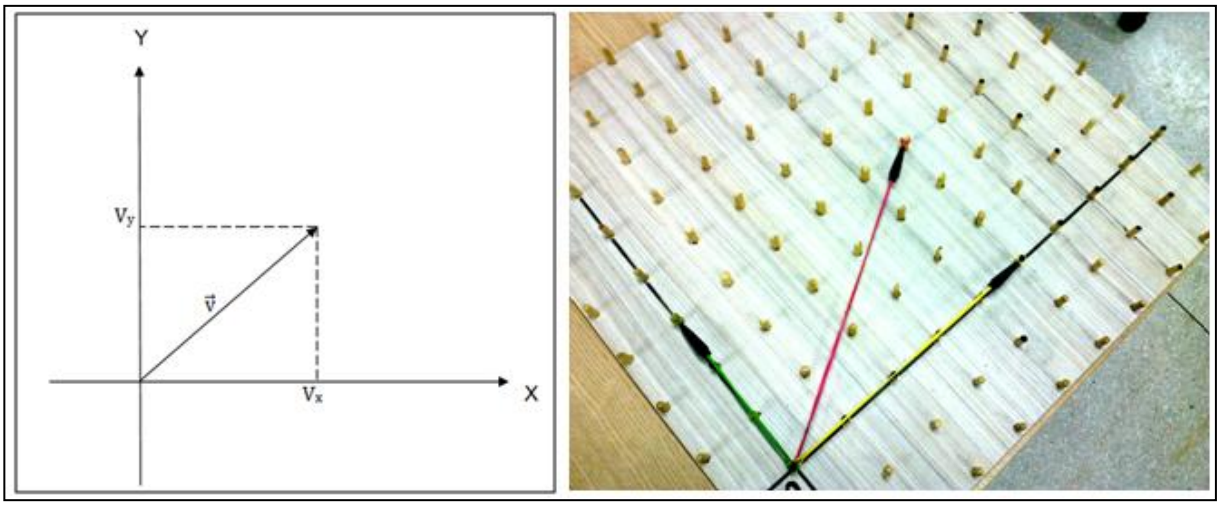


Figura 25: Componentes de um vetor no geoplano

Aplicando o Teorema de Pitágoras num dos triângulos formado na figura, temos:

$$(||\vec{v}||)^2 = (v_x)^2 + (v_y)^2$$

Considerando $v_x = x$ e $v_y = y$, obtemos:

$$||\vec{v}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exemplo: Calcule o módulo do vetor $\vec{v} = (5,3)$, representado no geoplano da figura 25.

$$||\vec{v}|| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34} = 5{,}8309... \cong 5{,}83$$

Independente do local geométrico que este vetor ocupe no plano, basta considerá-lo de forma que sua origem (ponto inicial) coincida com a origem do plano cartesiano.

2.3.2. Vetor Unitário

Um vetor é dito unitário se seu módulo tem comprimento igual a uma unidade de comprimento, conforme ilustração a seguir.

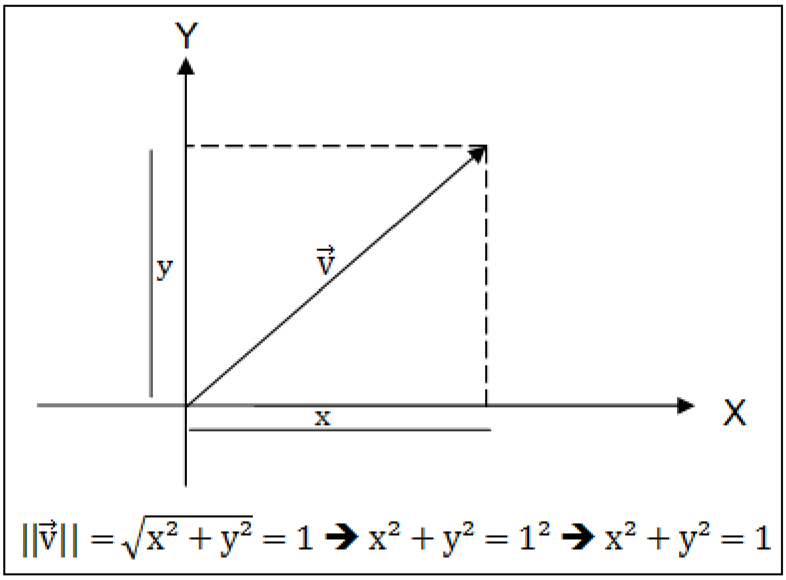


Figura 26: Vetor unitário

O vetor unitário também é conhecido como versor de um vetor não nulo $\vec{v}$. Por exemplo, tomemos um vetor $\vec{u}$ conforme a figura 27.

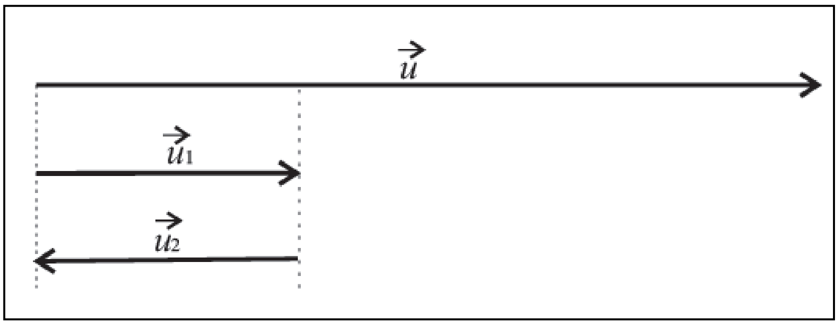


Figura 27: Versor de um vetor

Considere os vetores $\vec{u_1}$ e $\vec{u_2}$ da figura acima unitários. Os vetores $\vec{u_1}$ e $\vec{u_2}$ são unitários, porém apenas o $\vec{u_1}$ é o versor do vetor $\vec{u}$, pois tem a mesma direção e o mesmo sentido de $\vec{u}$.

2.3.3. Vetor Nulo

Um vetor é nulo quando seu módulo, comprimento, é igual à zero. Em outras palavras, o ponto inicial e o ponto final do segmento orientado que representa esse vetor são o mesmo.

Seja P um ponto do plano, logo $\vec{v}$ = $\overrightarrow{PP}$ = $\vec{0}$ é um vetor nulo, conforme figura 28.

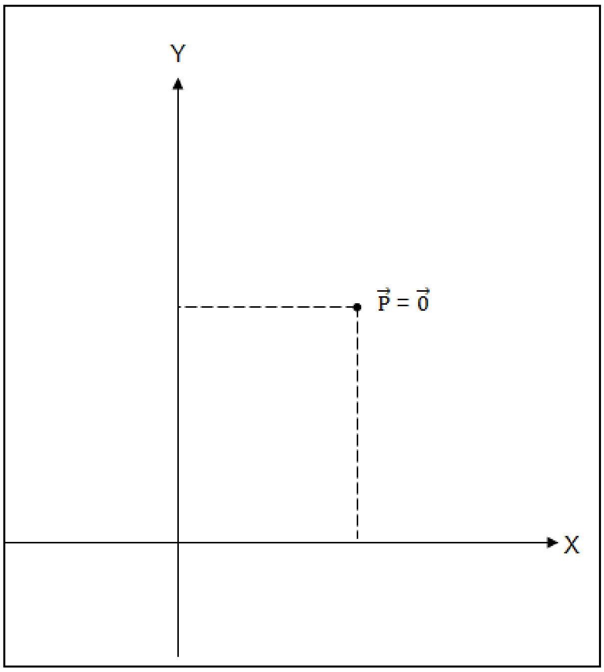


Figura 28: Vetor nulo

O conceito de vetor nulo fica evidente quando se obtém o vetor resultante de adição de dois vetores opostos, conforme exemplo na seção 2.3.4.

2.3.4 Vetor Oposto

Dois vetores são ditos opostos se apresentarem a mesma direção, mesmo módulo, porém sentidos opostos.

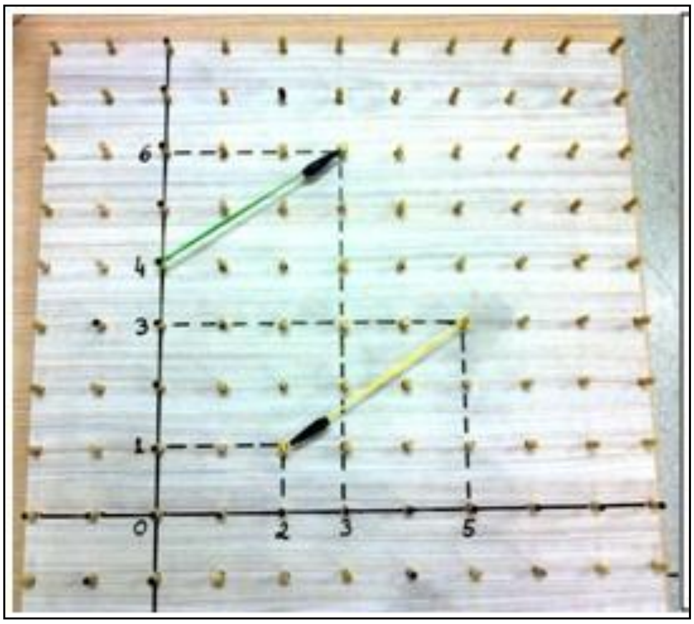


Figura 29: Vetores opostos

Vetores opostos tem mesma direção, logo apresentam a mesma inclinação em relação a horizontal. Este momento é oportuno para que o professor aborde o conceito de inclinação da reta no plano, que é dado pela razão entre a variação das coordenadas na vertical pela razão entre a variação das coordenadas na horizontal.

Na figura 29 encontram-se representados os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$, definidos pelos pontos A(0,4), B(3,6), C(5,3) e D(2,1). O professor deve analisar a direção, o módulo e o sentido dos vetores dados.

- Direção:

Inclinação de $\overrightarrow{AB} = \frac{6-4}{3-0} = \frac{2}{3}$

Inclinação do vetor $\overrightarrow{CD} = \frac{1-3}{2-5} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$

Logo os vetores representados acima possuem a mesma direção.

- Módulo:

Considerando as componentes horizontal e vertical de cada vetor e aplicando o Teorema de Pitágoras, obtêm-se seus módulos.

$||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

$||\overrightarrow{CD}|| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

Nota-se que os vetores têm módulos iguais.

- Sentido:

Como os vetores possuem a mesma direção, as variações nas direções horizontal e vertical de cada um são:

$\overrightarrow{AB}$ ➔	Variação na horizontal: 3	Variação na vertical: 2
$\overrightarrow{CD}$ ➔	Variação na horizontal: - 3	Variação na vertical: - 2

Dois vetores com mesma direção e sentidos opostos apresentam valores opostos nas variações das respectivas coordenadas.

Portanto, os vetores analisados são opostos.

2.3.5 Vetores Iguais

Dois vetores, $\vec{v}$ e $\vec{t}$ são iguais se, e somente se, os segmentos que os representam forem equipolentes, ou seja, tiverem mesma direção, mesmo sentido e módulos de mesma medida.

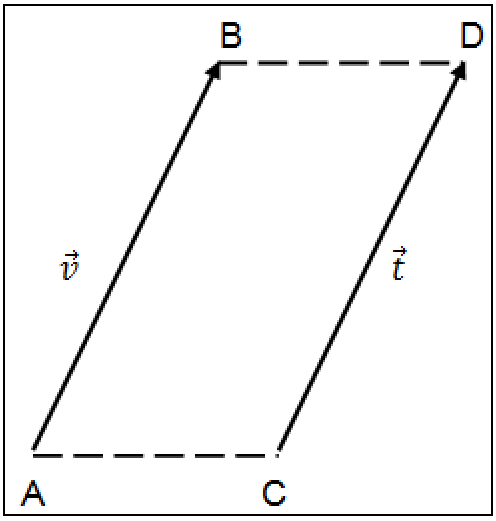


Figura 30: Vetores iguais

Sejam dois vetores $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$, determinados a partir dos pontos $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$, $C(x_C,y_C)$ e $D(x_D,y_D)$. Se $x_B - x_A = x_D - x_C$ e $y_B - y_A = y_D - y_C$, então os vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ são iguais.

Exemplo: Sejam dois vetores representados no plano pelos segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$, conforme figura 31, onde A(0,4), B(3,6), C(2,1) e D(5,3).

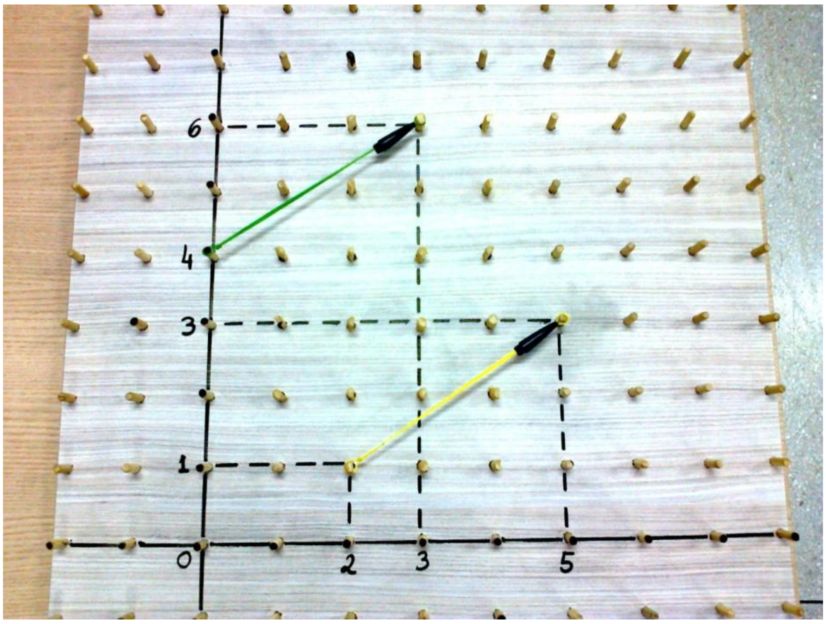


Figura 31: Vetores iguais

Calculando a variação das correspondentes coordenadas dos pontos que representam cada vetor dado, tem-se:

Variação em relação à horizontal: (5) - (2) = (3) - (0) ➔ 3 = 3

Variação em relação à vertical: (3) - (1) = (6) - (4) ➔ 2 = 2

Ao analisar as variações calculadas, conclui-se que os vetores possuem a mesma direção e o mesmo sentido, além de apresentarem o mesmo módulo. Portanto são vetores iguais.

2.3.6 Vetores Colineares

Dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ são colineares se tiverem a mesma direção. Em outras palavras, $\vec{v}$ e $\vec{u}$ são colineares se tiverem representantes AB e CD pertencentes a uma mesma reta ou a retas paralelas, conforme ilustração a seguir.

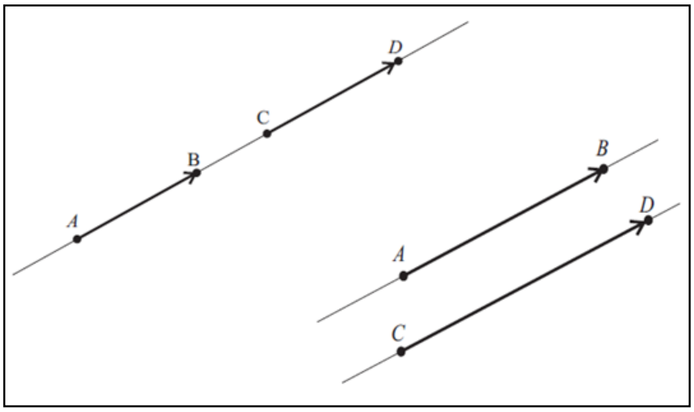


Figura 32: Vetores colineares

Um vetor pode ser representado algebricamente de duas maneiras, a numérica e a vetorial.

Cada ponto do plano representa um vetor com origem na origem do sistema de coordenadas adotado e extremidade no ponto dado. Essa é a representação numérica.

Exemplo: $\vec{v}$ = (4,5) conforme figura 33.

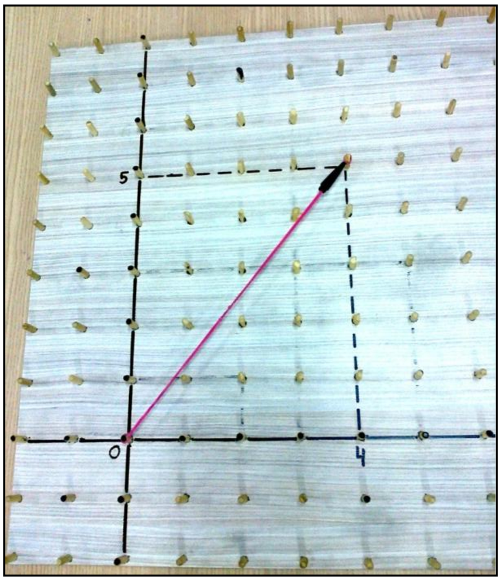


Figura 33: Representação numérica de um vetor no geoplano

A representação vetorial de um vetor está evidente na figura 31, na qual os vetores representados são definidos por dois pontos, um inicial (origem) e um final (extremidade). Os vetores da figura 31 podem ser representados numericamente pelo par ordenado (2,3) por serem iguais.

Portanto, dados dois vetores colineares $\vec{v}$ e $\vec{w}$, existe uma constante c tal que: $\vec{v} = c.\vec{w}$

2.4 OPERAÇÕES COM VETORES

2.4.1 Adição De Vetores

Seja os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representados pelos segmentos orientados AB e BC, conforme figura a seguir.

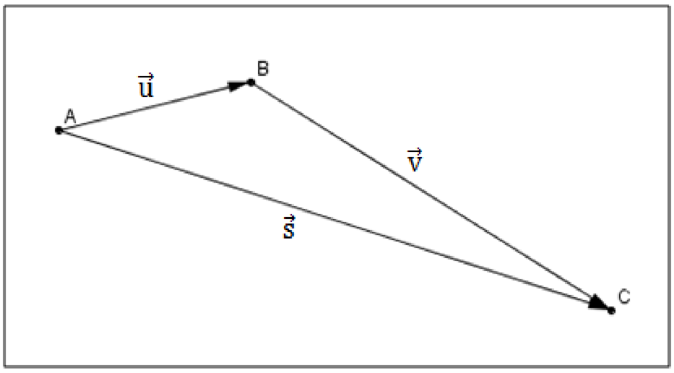


Figura 34: Adição de vetores

Os pontos A e C determinam um vetor $\vec{s}$ que é, por definição, a soma dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é, $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$.

Adicionar vetores no plano não é como adicionar números reais, mas sim, dois pares ordenados de números reais. Algebricamente, adicionam-se dois vetores adicionando suas respectivas coordenadas.

Exemplo 2.1: Sejam v e t, dois vetores tais que, $\vec{v}$ = (2,5) e $\vec{u}$ = (4,3), logo o vetor $\vec{v} + \vec{u}$ = (2+4,5+3) = (6,8), conforme figura 35.

Observação: Quando se escreve $\vec{v}$ = (2,5), o mesmo é escrito como se tivesse início na origem do sistema cartesiano.

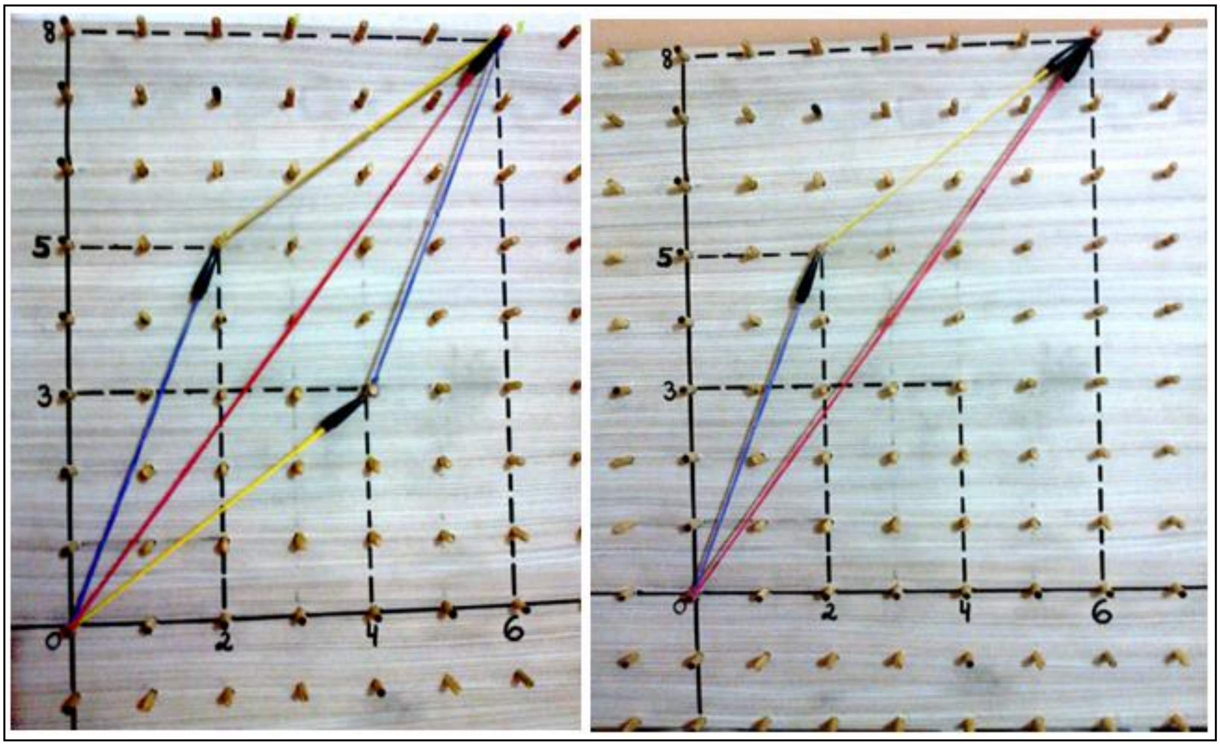


Figura 35: Adição de vetores no geoplano

2.4.1.1 Propriedades Da Adição

Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

Existe um só vetor nulo $\vec{0}$ tal que para todo o vetor $\vec{v}$ se tem:

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$$

Qualquer que seja o vetor $\vec{v}$, existe um só vetor -$\vec{v}$ (vetor oposto de $\vec{v}$) tal que

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = -\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$$

2.4.2 Diferença De Vetores

Chama-se diferença de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e se representa por $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v}$, ao vetor $\vec{u} + (-\vec{v})$.

Geometricamente, dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, representados pelos segmentos AB e AC, respectivamente, constrói-se o paralelogramo ABDC e daí é verificado que a soma $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$ é representada pelo segmento orientado AD, que é uma das diagonais, e que a diferença $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v}$ é representada pelo segmento orientado CB, que é a outra diagonal.

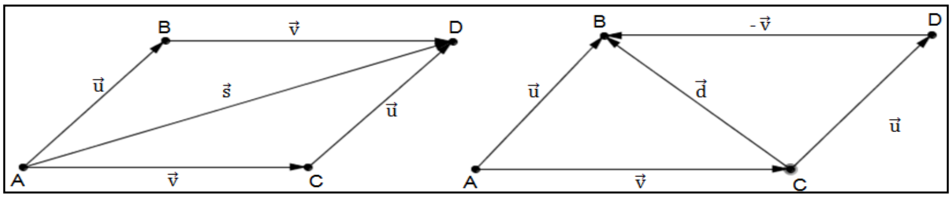


Figura 36: Diferença de vetores

Exemplo: Considerando $\vec{u} = (5,7)$ e $\vec{v} = (2,1)$, temos que $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) =$ $(5,7) + (-2,-1) = (5+(-2),7+(-1)) = (3,6)$, como ilustrado na figura a seguir.

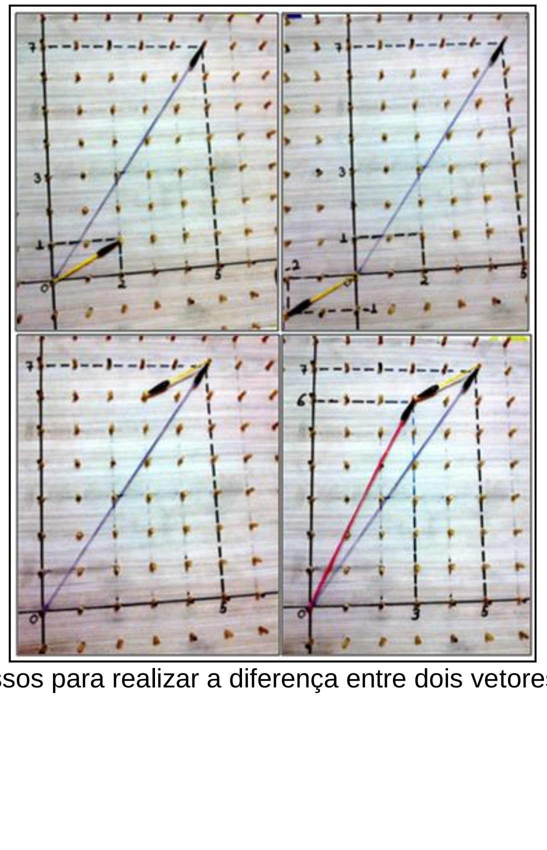


Figura 37: Passos para realizar a diferença entre dois vetores no geoplano

Do segundo para o terceiro passo da figura acima o vetor -$\vec{v}$ foi transladado para a extremidade do vetor $\vec{u}$, resultando assim no vetor $\vec{d}$ = (3,6).

2.4.3 Multiplicação De Um Vetor Por Um Número Real

Seja $\vec{v}$ um vetor não nulo, ou seja, $\vec{v} \neq \vec{0}$ e um número real k também diferente de zero. Chama-se produto do número real k pelo vetor $\vec{v}$ o vetor $\vec{p} = k\vec{v}$, tal que:

a) Módulo: $|\vec{p}| = |k\vec{v}| = |k||\vec{v}|$;

b) Direção: a mesma de $\vec{v}$;

c) Sentido: o mesmo de $\vec{v}$ se k>0, sentido contrário ao de $\vec{v}$ se k<0.

Observe as figuras a seguir:

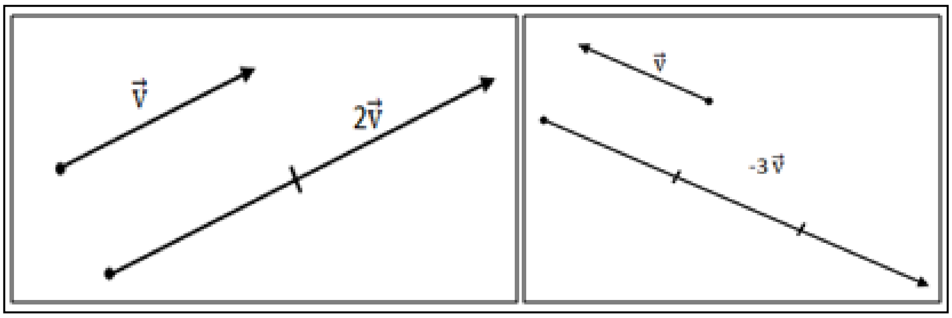


Figura 38: Multiplicação um vetor por um número real

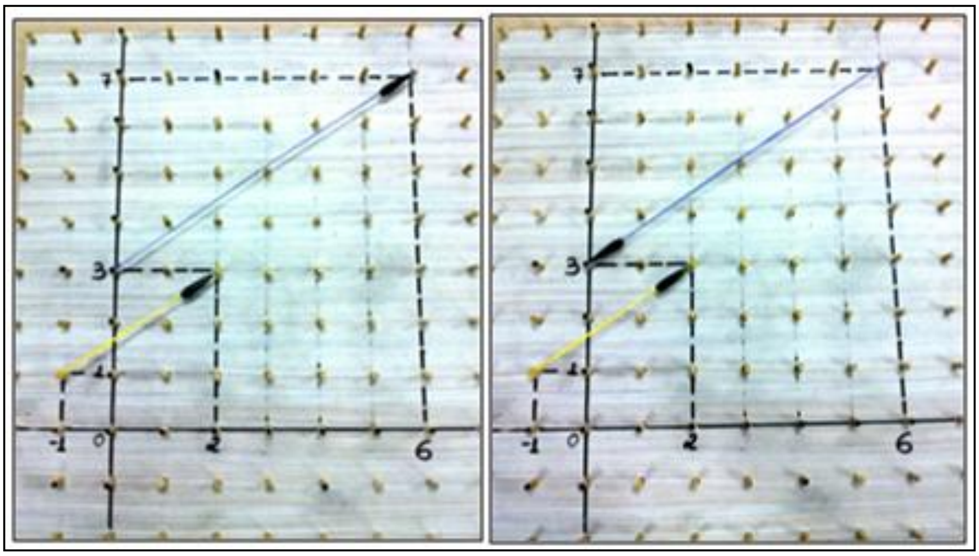


Figura 39: Multiplicação de um vetor por um número real no geoplano

Na figura 39 encontram-se representados três vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{DC}$, definidos pelos pontos A(-1,1), B(2,3), C(0,3) e D(6,7). Na primeira situação o vetor $\overrightarrow{CD}$ = 2. $\overrightarrow{AB}$. Na segunda situação temos $\overrightarrow{DC}$ = (-2) $\overrightarrow{AB}$.

2.4.3.1 Propriedades Da Multiplicação De Um Vetor Por Um Número Real

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores quaisquer e a e b números reais, temos:

I. Associativa

$$a(b\vec{v}) = (ab)\,\vec{v}$$

II. Distributiva em relação à adição de escalares

$$(a + b)\,\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$$

III. Distributiva em relação à adição de vetores

$$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$$

IV. Identidade

$$1\vec{v} = \vec{v}$$

2.4.4 Ângulo Entre Dois Vetores

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ diferentes de zero, o ângulo entre os dois corresponde ao ângulo θ formado pelas semirretas OA e OB e tal que $0 \leq \theta \leq \pi$. Como os vetores podem ser movidos no plano, fixa-se um ponto como origem (O) e, transladam os vetores para que suas origens coincidam com o ponto O, conforme ilustração a seguir.

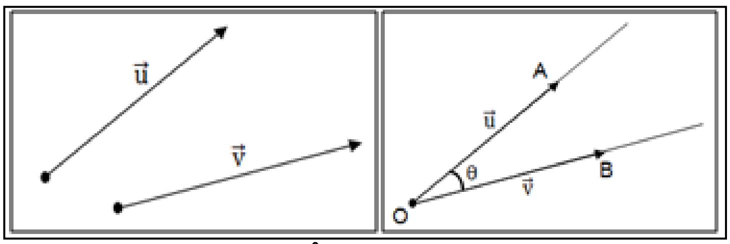


Figura 40: Ângulo entre vetores

As observações a seguir são ilustradas usando o geoplano. Além dessas ilustrações o professor deve no momento da aula ilustrar outras situações em cada caso.

a) Se $\theta = \pi$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção e sentidos contrários, ou seja, estão sobre a mesma reta suporte, porém, em sentidos opostos, conforme figura abaixo.

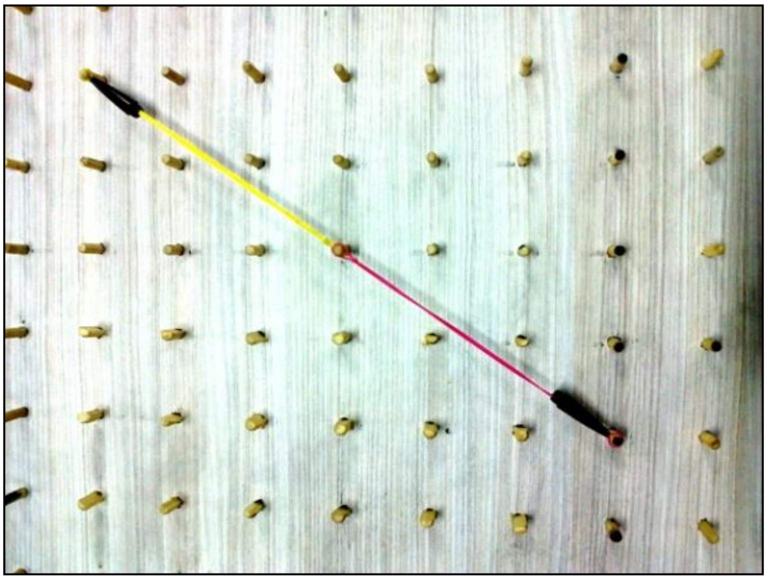


Figura 41: Vetores opostos formam ângulo de 180° entre si

b) Se $\theta = 0$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção e mesmo sentido.

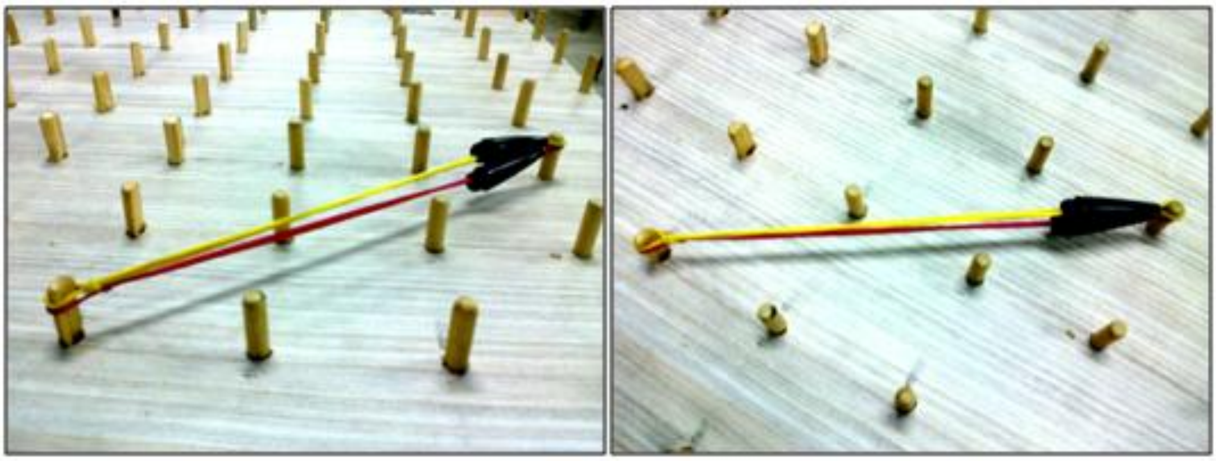


Figura 42: Vetores coincidentes apresentam ângulo 0° entre si

c) Se $\theta = \pi/2$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais, e indica-se $\vec{u} \perp \vec{v}$

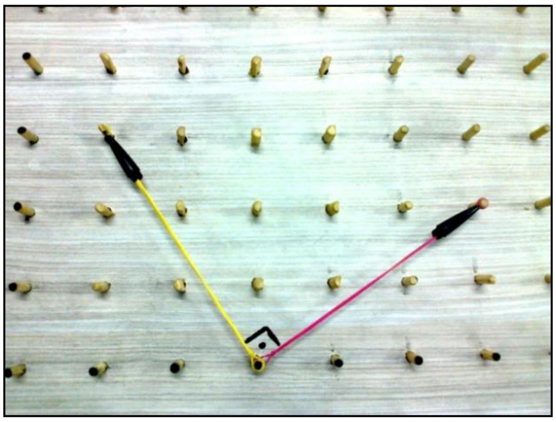


Figura 43: Vetores ortogonais no geoplano

d) O vetor nulo é considerado ortogonal a qualquer vetor.

e) Se $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v}$ e k é um número real qualquer, $\vec{u}$ é ortogonal a $k\vec{v}$.

f) O ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $-\vec{v}$ é o suplemento do ângulo de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

2.4.5 Projeção De Um Vetor Sobre Um Eixo

O conceito de projeção é fundamental para auxiliar o aluno na decomposição de vetores e analisar corretamente modelos físicos e fenômenos da natureza.

A seguir está representada a projeção do vetor $\vec{u}$ sobre um eixo horizontal.

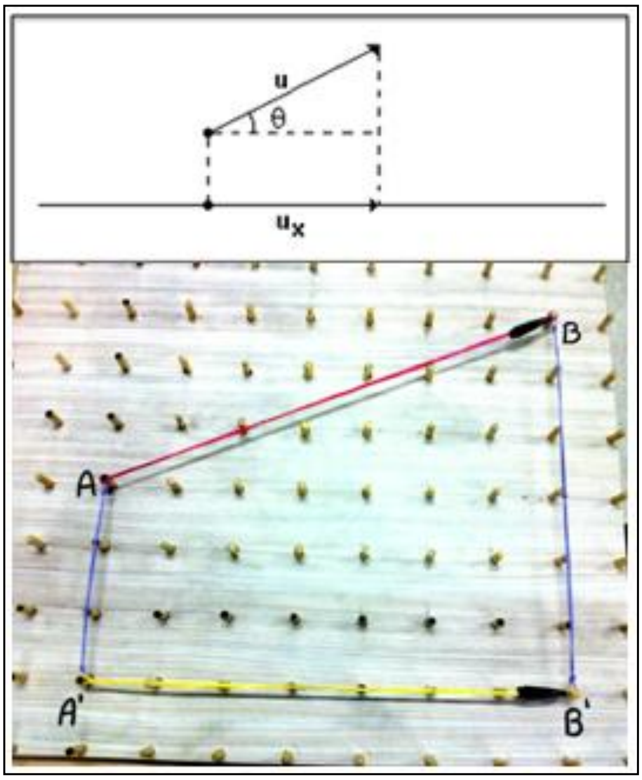


Figura 44: Projeção de um vetor sobre um eixo

A projeção de um vetor sobre um eixo caracteriza-se como uma “sombra” do vetor sobre o eixo considerado. Para se estabelecer geometricamente tal projeção, devem-se traçar segmentos passando nas extremidades do vetor e perpendiculares ao eixo considerado. A região do eixo compreendida entre os dois segmentos traçados é chamada de projeção do vetor sobre o eixo. Convencionou-se escrever $\vec{u}_x$ para a projeção de um vetor $\vec{u}$ qualquer sobre o eixo das abscissas no plano cartesiano e $\vec{u}_y$ para representar a projeção de um vetor $\vec{u}$ sobre o eixo das ordenadas.

Observe que as projeções de um vetor dado juntamente com ele mesmo, forma um triângulo retângulo.

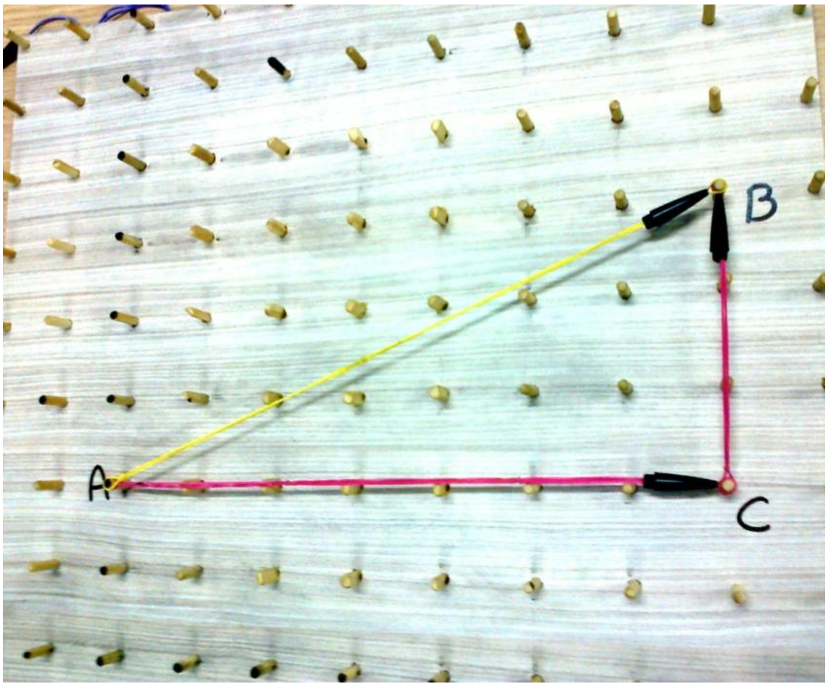


Figura 45: Coordenadas de um vetor sobre os eixos horizontal e vertical

Logo, temos pelo Teorema de Pitágoras que:

$$(\vec{u})^2 = (\vec{u}_x)^2 + (\vec{u}_y)^2$$

Sendo θ o ângulo de inclinação da reta suporte do vetor $\vec{u}$, temos:

$$\text{sen}\theta = \frac{||\vec{u}_y||}{||\vec{u}||} \Rightarrow ||\vec{u}_y|| = ||\vec{u}||.\text{sen}\theta$$

$$\cos\theta = \frac{||\vec{u}_x||}{||\vec{u}||} \Rightarrow ||\vec{u}_x|| = ||\vec{u}||.\cos\theta$$

CAPÍTULO 3: USANDO A MALHA QUADRICULADA E O GEOGEBRA PARA ESTUDAR VETORES

Neste capítulo a proposta é o uso da malha quadriculada para explorar os conceitos básicos de vetores como coordenadas, decomposição de vetores, adição e subtração de vetores, multiplicação de um número real por um vetor entre outros.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio:

> Aulas e livros, contudo, em nenhuma hipótese resumem a enorme diversidade de recursos didáticos, meios e estratégias que podem ser utilizados no ensino das Ciências e da Matemática. O uso dessa diversidade é de fundamental importância para o aprendizado porque tabelas, gráficos, desenhos, fotos, vídeos, câmeras, computadores e outros equipamentos não são só meios. Dominar seu manuseio é também um dos objetivos do próprio ensino das Ciências, Matemática e suas Tecnologias. Determinados aspectos exigem imagens e, mais vantajosamente, imagens dinâmicas; outros necessitam de cálculos ou de tabelas de gráfico; outros podem demandar expressões analíticas, sendo sempre vantajosa a redundância de meios para garantir confiabilidade de registro e/ou reforço no aprendizado. (BRASIL, 2002, p.53)

Além de ser atrativa, a malha quadriculada proporciona a aplicação fácil e objetiva dos conceitos estudados, no caso em questão, de vetores. Porém, o professor não pode considerar o geoplano ou qualquer outro tipo de material concreto como facilitador da aprendizagem por si só.

Dominar os conceitos e conhecer bem a metodologia adotada é fundamental para que o professor obtenha sucesso no processo de ensino e aprendizagem. O professor é mediador do processo, sendo sua responsabilidade e autonomia conduzir o processo educativo e não seguir modelos pré-estabelecidos. Para Fiorentini e Miorim:

> o professor não pode subjugar sua metodologia de ensino a algum tipo de material porque ele é atraente ou lúdico. Nenhum material é válido por si só. Os materiais e seu emprego sempre devem estar em segundo plano. A simples introdução de jogos ou atividades no ensino da matemática não garante uma melhor aprendizagem desta disciplina. (FIORENTINI E MIORIM, 1996, p.9)

Logo, é esperado que o professor use os objetos concretos como complemento na busca por aulas mais dinâmicas e satisfatórias.

3.1. O GEOGEBRA

Software desenvolvido pelo professor Markus Hohenwarter em 2001 na universidade de Salzburg, permite trabalhar com conteúdos geométricos e algébricos. Suas ferramentas permitem criar objetos matemáticos de forma instantânea.

O *software* possui duas janelas, uma de geometria (visualização) e uma de álgebra. Cada expressão apresentada na janela de álgebra corresponde a um objeto na janela de visualização e vice-versa, o que permite ao usuário começar os processos pela geometria ou pela álgebra. Acima das janelas tem uma barra de objetos que podem ser escolhidos ao clicar a seta do mouse sobre ele. A partir de cada objeto nessa barra é possível acessar outros objetos com mesmas características geométricas ao posicionar a seta do mouse no canto do objeto escolhido. Acima da barra de objetos, o geogebra apresenta uma barra de menus, os quais contêm abas com diversas funções, conforme figura abaixo.

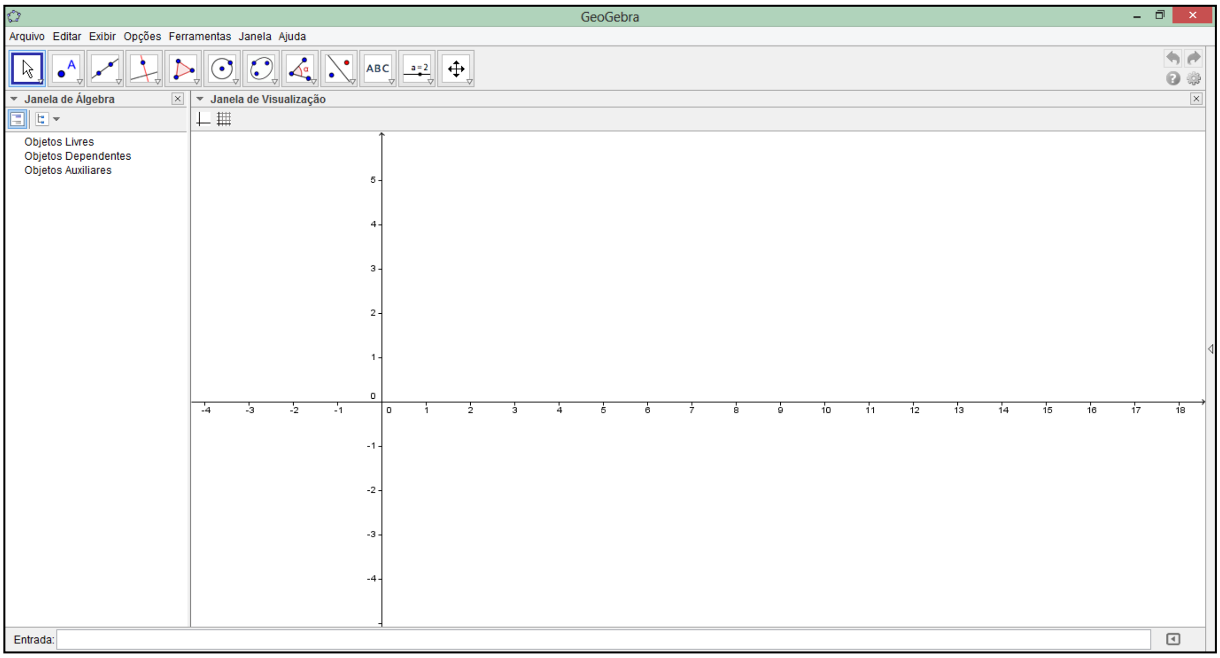


Figura 46: Tela inicial do geogebra

Para exibir a malha quadriculada o usuário deve clicar no símbolo da mesma, que fica na janela de visualização, conforme a figura 47.

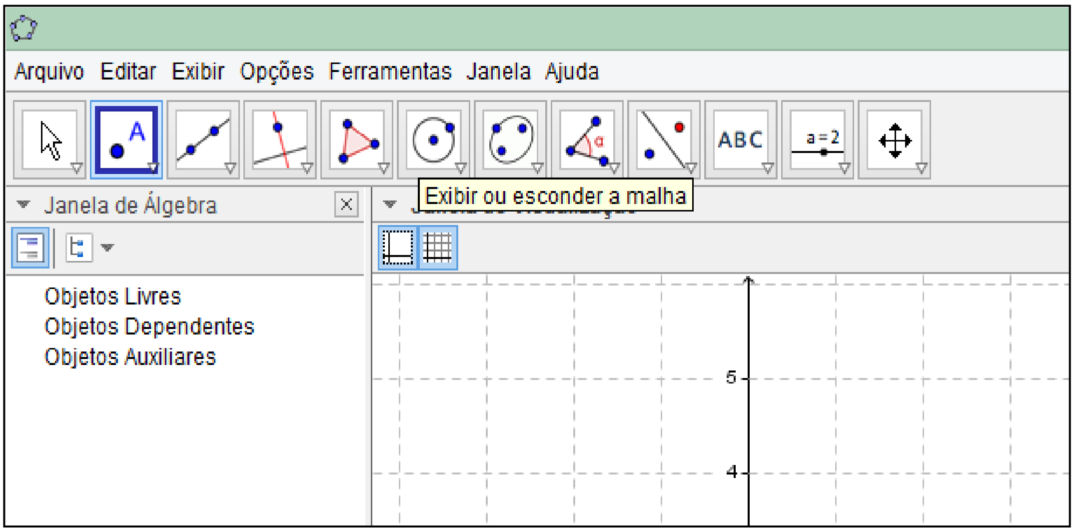


Figura 47: Exibir malha quadriculada no geogebra

A construção de um vetor no geogebra é feita da seguinte maneira:

1) Clique no canto direito inferior do objeto denominado reta;
2) Clique na opção vetor;
3) Escolhida a opção vetor, o usuário clica com a seta do mouse no lugar geométrico que escolher como ponto inicial do vetor e arrastar a seta até o lugar geométrico que escolher como ponto final do vetor. Automaticamente o vetor é fixado com nome e pontos extremos, estes com coordenadas exibidas na janela de álgebra.

Os passos descritos acima são ilustrados pelas figuras 48, 49 e 50.

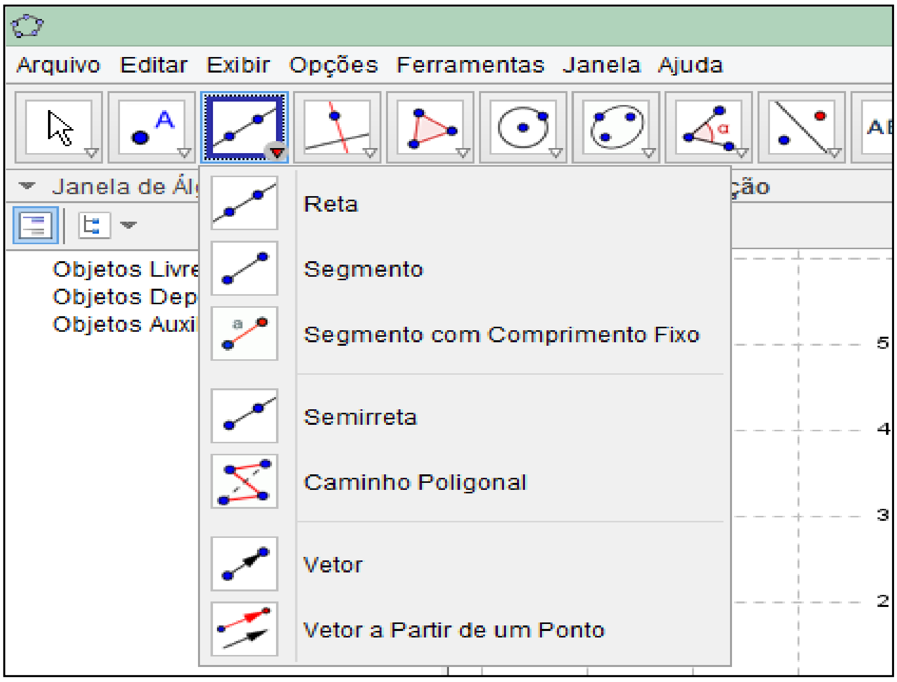


Figura 48: Construção de um vetor no geogebra

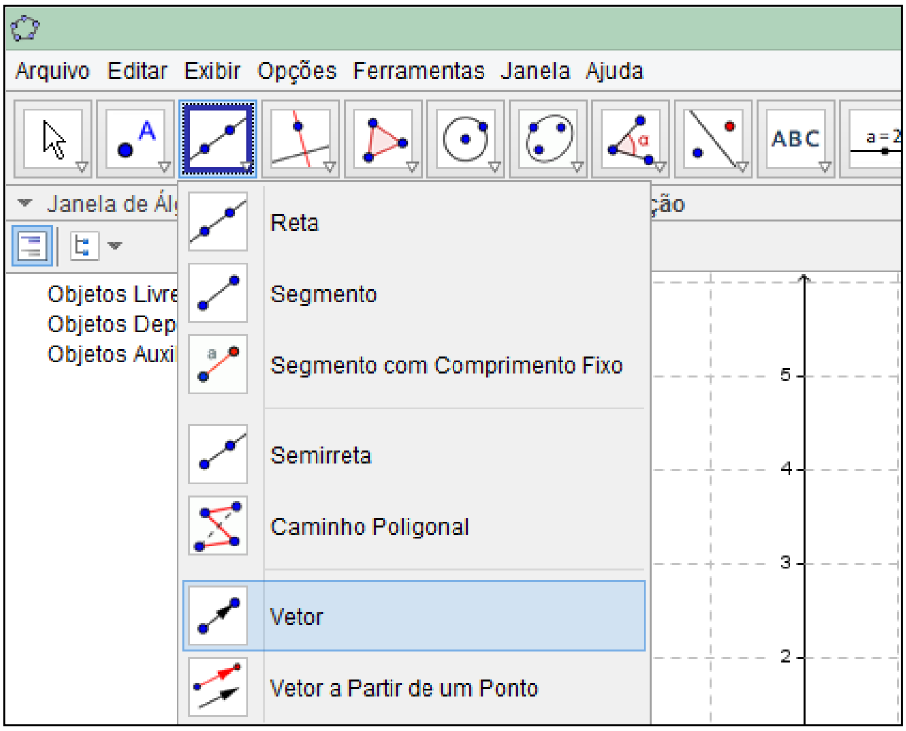


Figura 49: Construção de um vetor no geogebra

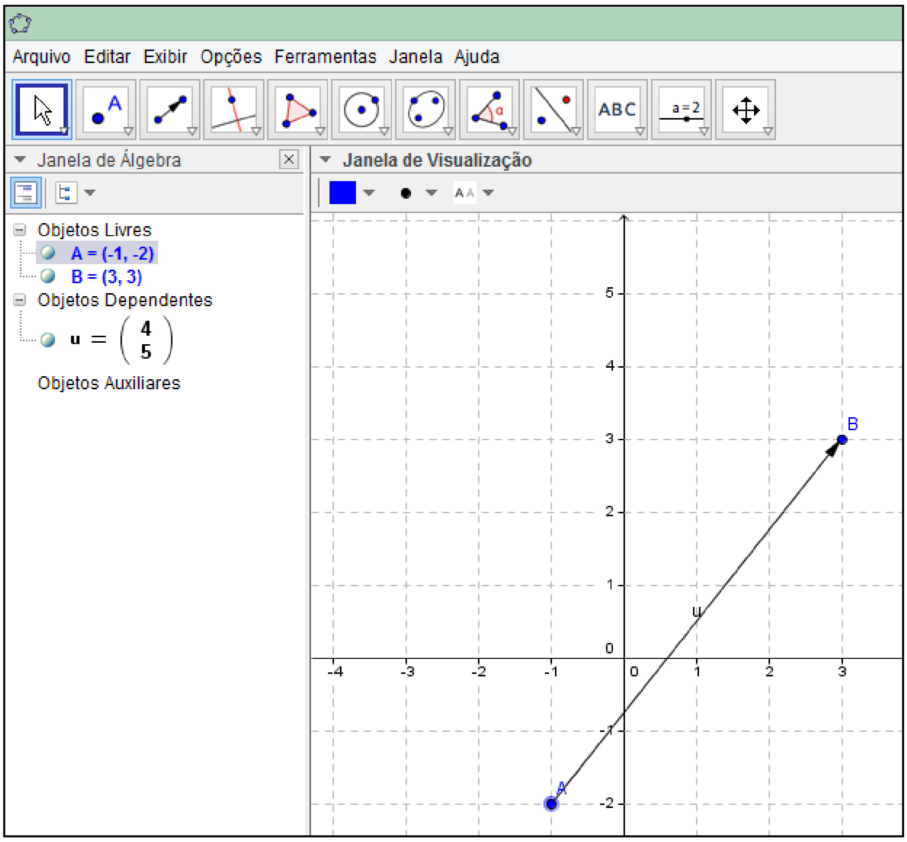


Figura 50: Construção de um vetor no geogebra

Após as manipulações o usuário clica no menu arquivo e na opção gravar como, escolhe o local de destino do arquivo para abri-lo assim que desejar.

3.2. UM VETOR NA MALHA QUADRICULADA

A malha quadriculada é facilmente encontrada em papelarias. O interessante é que o aluno confeccione sua própria malha, por exemplo, numa cartolina. Essa confecção facilitará a compreensão de conceitos a serem estudados.

Neste capítulo serão usadas as malhas quadriculadas obtidas no geogebra.

O professor deve explicar ao aluno que um vetor pode estar em qualquer local da malha quadriculada. Porém, o representamos com início na origem do plano cartesiano definido para simplificar sua manipulação. Cabe aqui lembrar ao aluno que o vetor é passível de translação no plano, mantendo-se o sentido e a direção.

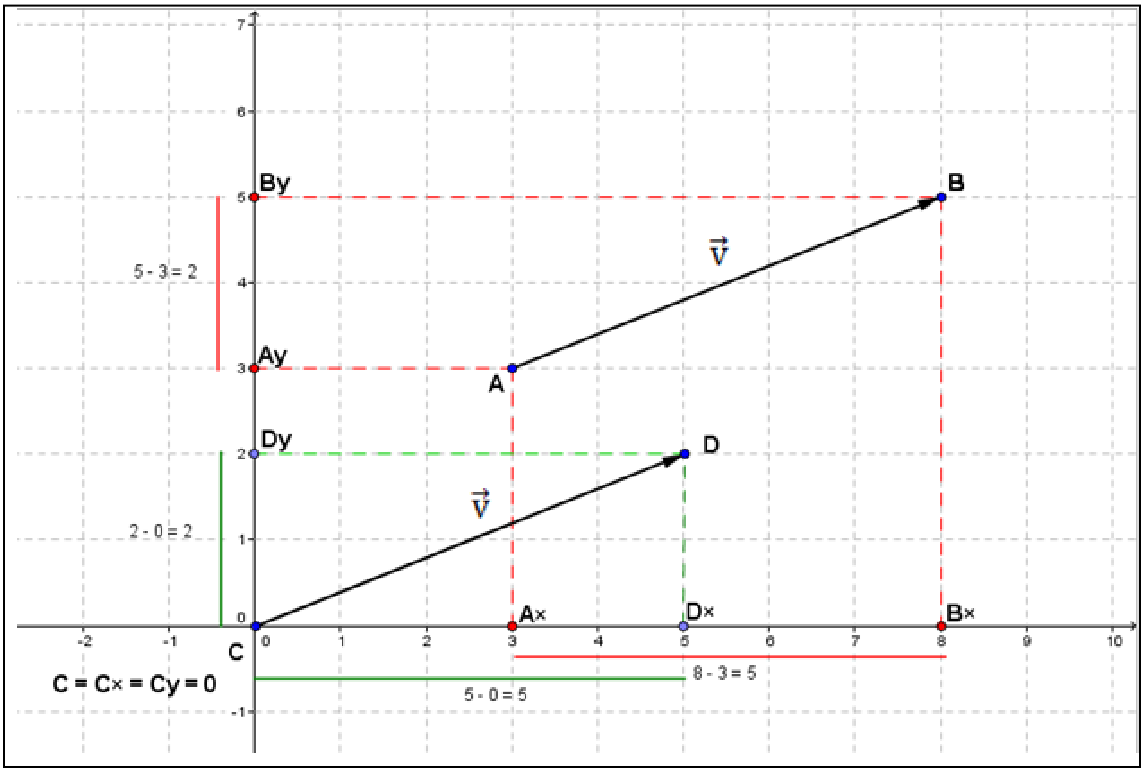


Figura 51: Translação de um vetor no plano usando a malha quadriculada do geogebra

Usando a malha quadriculada o aluno deve proceder da seguinte maneira:

1) Desenhar o plano cartesiano na malha quadriculada.
2) Escolher e marcar dois pontos quaisquer da malha. Os pontos devem ser escolhidos de modo que fiquem sobre os encontros das linhas que formam a malha, a fim de manipular coordenadas inteiras.

3) Fixar um ponto como inicial e, a partir dele, desenhar o vetor, ligando os dois pontos escolhidos. Na figura 51 o vetor $\vec{v}$ corresponde ao segmento orientado AB.
4) Neste momento o professor deve pedir ao aluno que ele transporte o vetor desenhado no passo 3) para que seu ponto inicial coincida com a origem do plano cartesiano. Na figura 51, o vetor $\vec{v}$ será representado pelo segmento orientado CD.
5) É interessante que após realizar tal translação, o aluno tenha observado que o vetor é o mesmo, porém, representado por segmentos diferentes.

3.3. DECOMPONDO UM VETOR EM COORDENADAS CARTESIANAS

Todo vetor no plano tem duas componentes que também são vetores, a horizontal (x) e a vertical (y). É interessante que o professor explore bem esse conceito, pois ele recorrerá ao estudo de triângulos retângulos, principalmente o Teorema de Pitágoras.

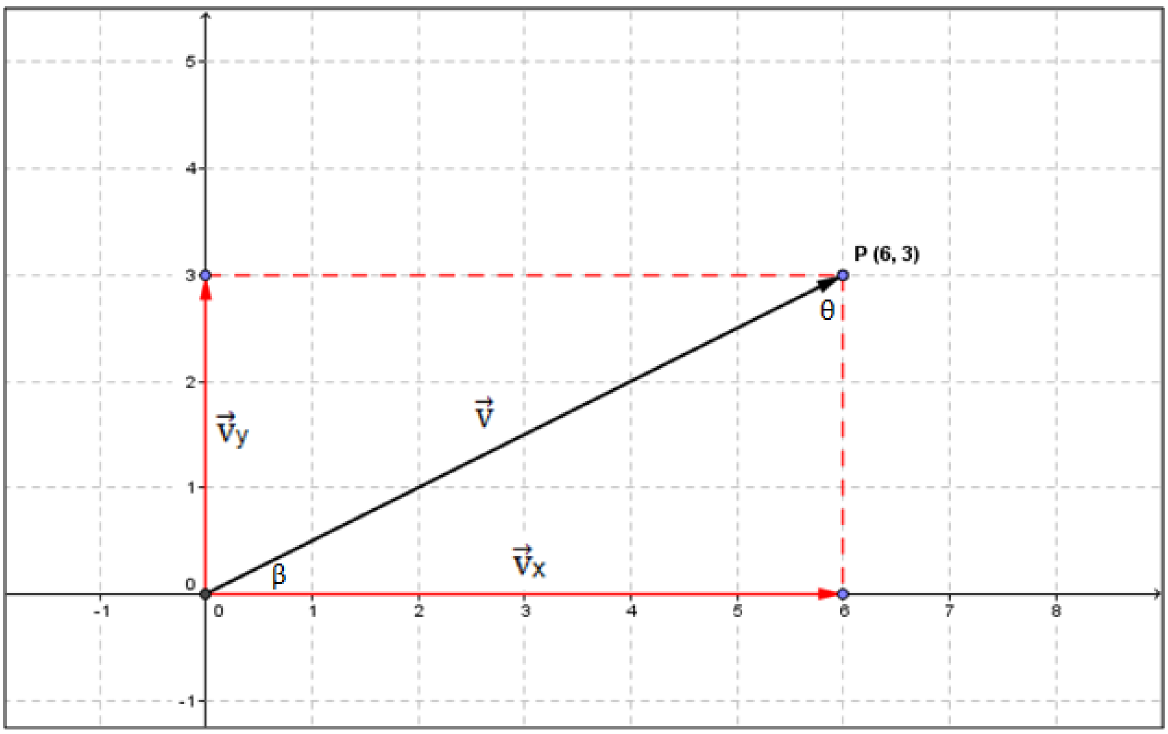


Figura 52: Decompondo um vetor na malha quadriculada do geogebra

Observe na figura 52 que juntos, as componentes V_x e V_y e o vetor V, formam um triângulo retângulo. O ângulo β de inclinação do vetor V é dado como sendo o ângulo formado entre o eixo x, no caso o vetor V_x, e o vetor V, no sentido anti-horário.

Manipulando o triângulo retângulo formado, chega-se às seguintes relações trigonométricas:

1) sen β = $\frac{\|\overrightarrow{Vy}\|}{\|\overrightarrow{V}\|} \Rightarrow \|\overrightarrow{Vy}\| = \text{sen}\ \beta \cdot \|\vec{v}\|$;

2) cos β = $\frac{\|\overrightarrow{Vx}\|}{\|\overrightarrow{V}\|} \Rightarrow \|\overrightarrow{Vx}\| = \cos\beta \cdot \|\vec{v}\|$;

3) sen θ = $\frac{\|\overrightarrow{Vx}\|}{\|\overrightarrow{V}\|} \Rightarrow \|\overrightarrow{Vx}\| = \text{sen}\ \theta \cdot \|\vec{v}\|$;

4) cos θ = $\frac{\|\overrightarrow{Vy}\|}{\|\overrightarrow{V}\|} \Rightarrow \|\overrightarrow{Vy}\| = \cos\theta \cdot \|\vec{v}\|$, onde o símbolo || || representa a norma (comprimento) de um vetor.

3.4. ADIÇÃO DE VETORES NA MALHA QUADRICULADA

Dois vetores são adicionados movendo um vetor, de modo que o início deste coincida com a extremidade final daquele. Observe a figura a seguir e, em seguida observe as instruções para que tais passos possam ser seguidos.

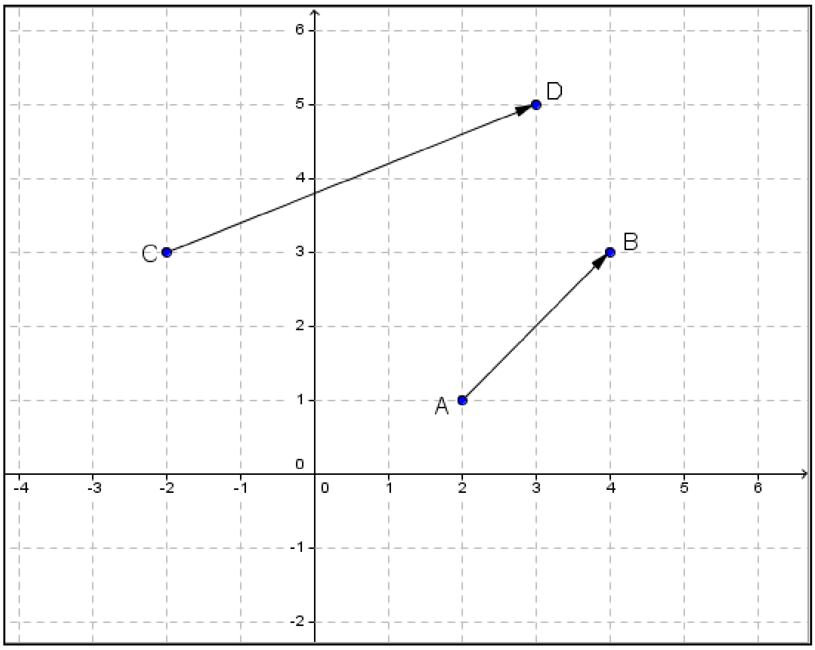


Figura 53: Adição de vetores na malha quadriculada do geogebra

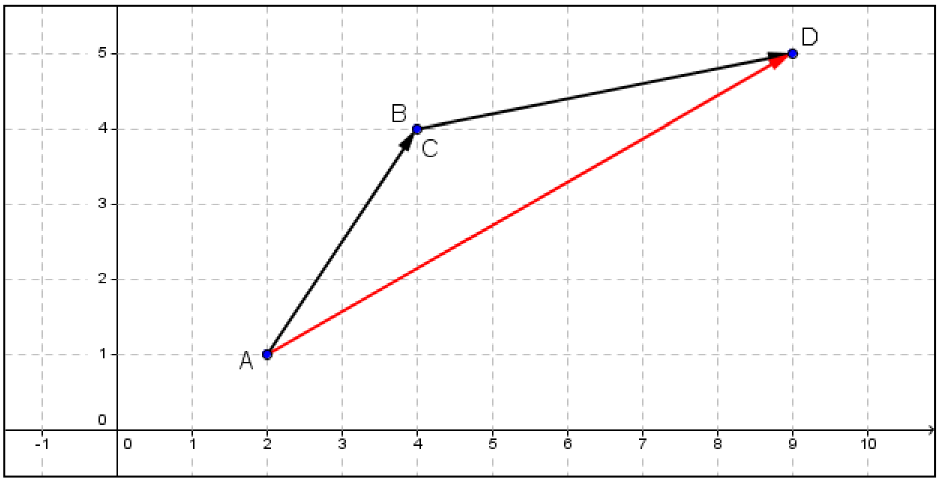


Figura 54: Adição de vetores na malha quadriculada do geogebra

1) O aluno deve desenhar dois vetores quaisquer no plano;
2) Fixando, por exemplo, o vetor $\overrightarrow{AB}$ o aluno deverá deslocar o vetor $\overrightarrow{CD}$ de modo que a extremidade B do vetor $\overrightarrow{AB}$ coincida com o início C do vetor $\overrightarrow{CD}$;
3) Logo, temos que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$.

Outra maneira usada para obter o vetor soma de outros dois vetores é o método do paralelogramo. Nesse, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são posicionados de modo que o início dos dois vetores seja coincidente no plano. A partir daí, partindo da extremidade de cada vetor, desenham-se os vetores paralelos aos vetores dados, de modo que formem um paralelogramo.

Essa maneira é mais bem representada da seguinte maneira.

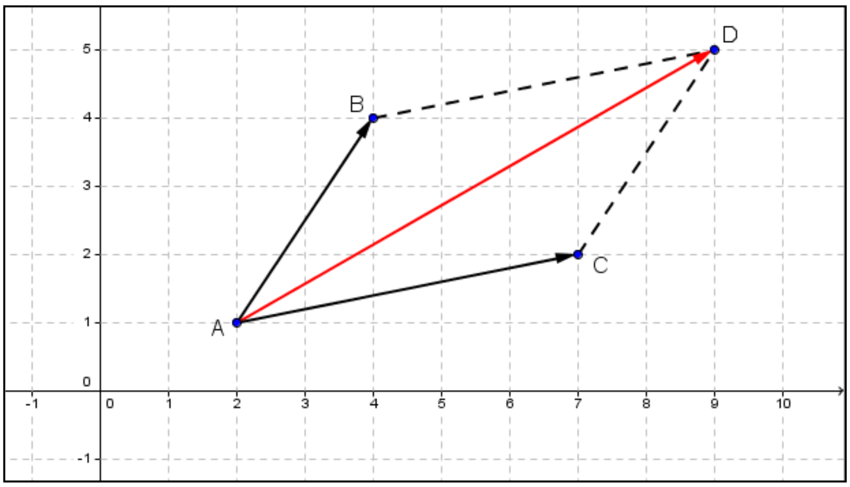


Figura 55: Adição de vetores na malha quadriculada do geogebra

3.5. DIFERENÇA DE VETORES NA MALHA QUADRICULADA

Na subtração de vetores, o processo é semelhante à adição de vetores, basta reescrever a diferença entre dois vetores na forma de adição entre um vetor e o oposto do outro vetor dado.

Exemplo: Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. A diferença entre os mesmos é dada pela expressão $\vec{u}$ - $\vec{v}$, a qual pode ser reescrita como se segue.

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}), \text{ onde } -\vec{v} \text{ é o oposto do vetor } \vec{v}.$$

Usando a malha quadriculada, procede-se do seguinte modo.

1°) Após desenhar o plano cartesiano, desenhe os dois vetores, sobre os quais quer se calcular a diferença entre eles.

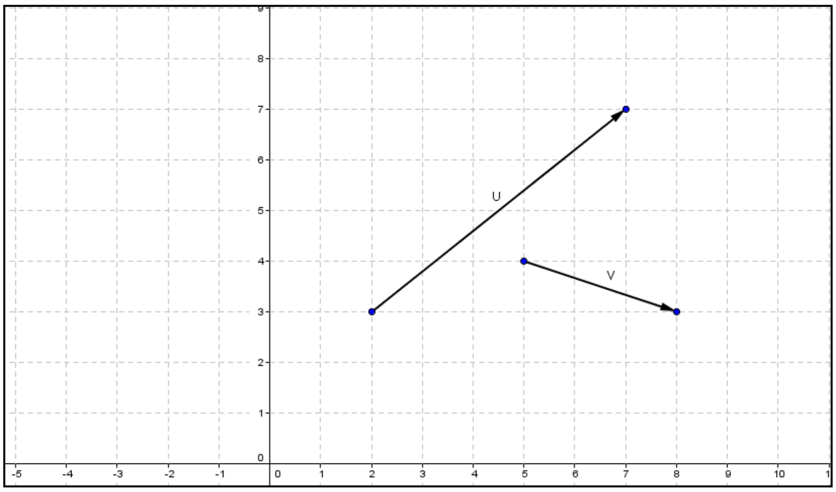


Figura 56: Diferença de vetores na malha quadriculada do geogebra

2°) Representar na mesma figura o oposto do vetor $\vec{v}$.

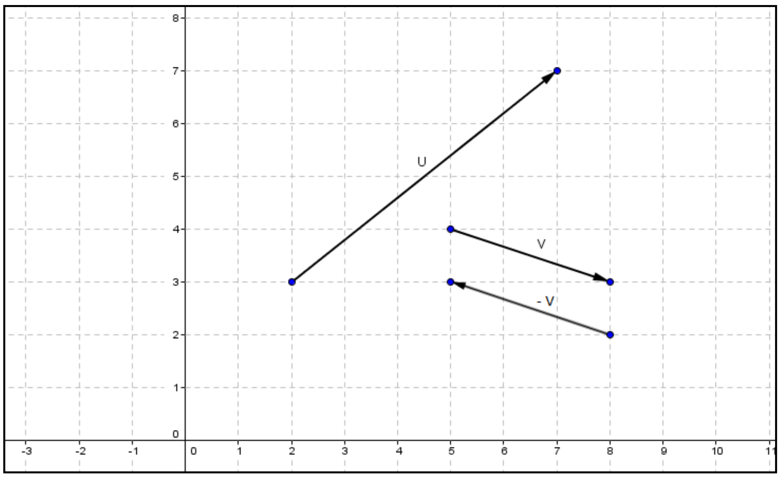


Figura 57: Diferença de vetores na malha quadriculada do geogebra

3°) Desloca-se o vetor $-\vec{v}$, de modo que seu início coincida com o final do vetor $\vec{u}$.

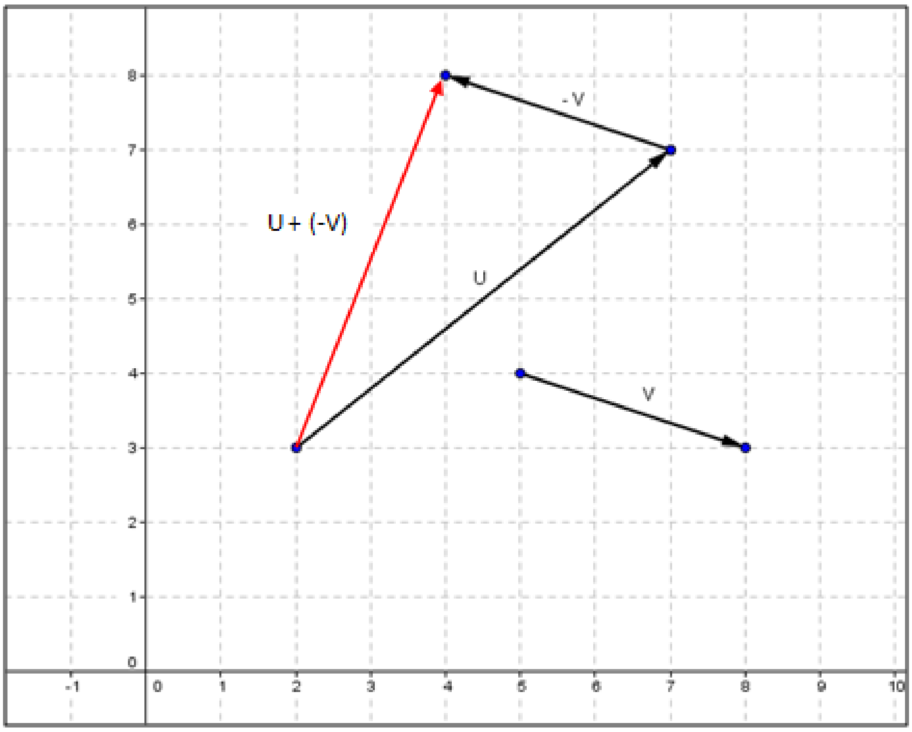


Figura 58: Diferença de vetores na malha quadriculada do geogebra

4°) Ligando o início do vetor u e o fim do vetor -v, obtemos o vetor diferença (resultante) u + (-v).

3.6. MULTIPLICAÇÃO DE UM VETOR POR UM NÚMERO REAL NA MALHA QUADRICULADA

Dado um vetor qualquer, não importa sua direção ou sentido, basta multiplicar um número real por cada coordenada do vetor em questão para obter um vetor múltiplo.

Exemplo:

Dado um vetor $\vec{v} = (2,-3)$, obtém-se o vetor $3\vec{v}$ por

$$3.\vec{v} = 3.(2,-3) = (3.2,3.(-3)) = (6,-9)$$

A seguir veja as ilustrações do exemplo citado acima.

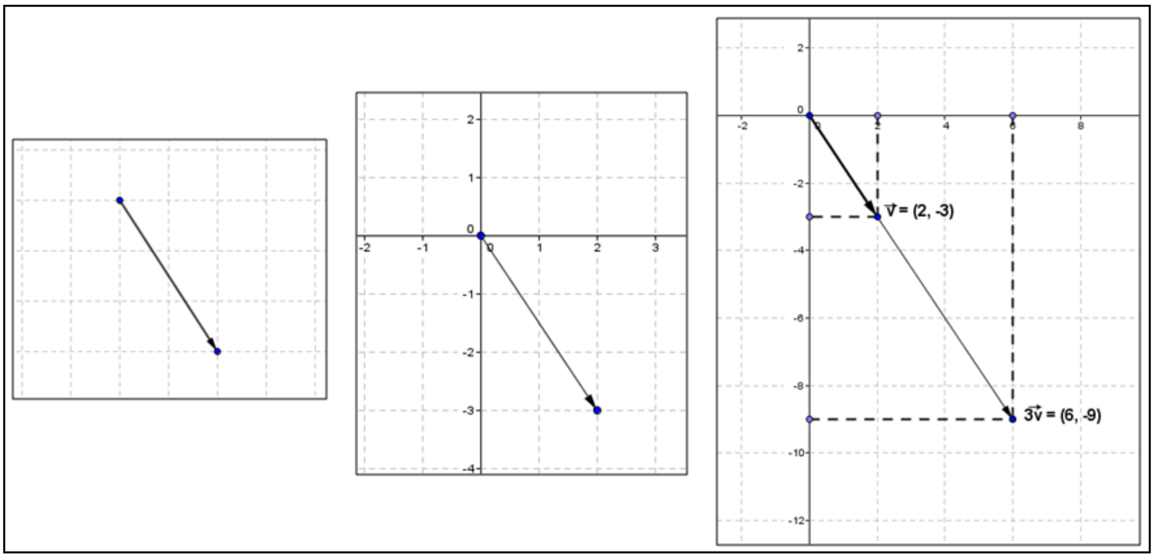


Figura 59: Multiplicação de um vetor por um número real

Se a constante for negativa o vetor resultante será o vetor oposto ao vetor resultante obtido com a constante positiva.

Considerando a constante negativa no exemplo anterior temos $-3\vec{v} = (-6,9)$, que é oposto do vetor $3\vec{v} = (6,-9)$.

Caso a constante seja zero, o vetor resultante é o vetor nulo $\vec{v} = (0,0)$. O vetor nulo é múltiplo de qualquer vetor dado.

3.7. ÂNGULO ENTRE DOIS VETORES

Na maioria das situações ilustradas nos livros didáticos que envolvem vetores, eles são representados como se tivessem origem no mesmo ponto. É o caso da análise das forças que atuam sobre um corpo num determinado instante, como mostra a figura 60.

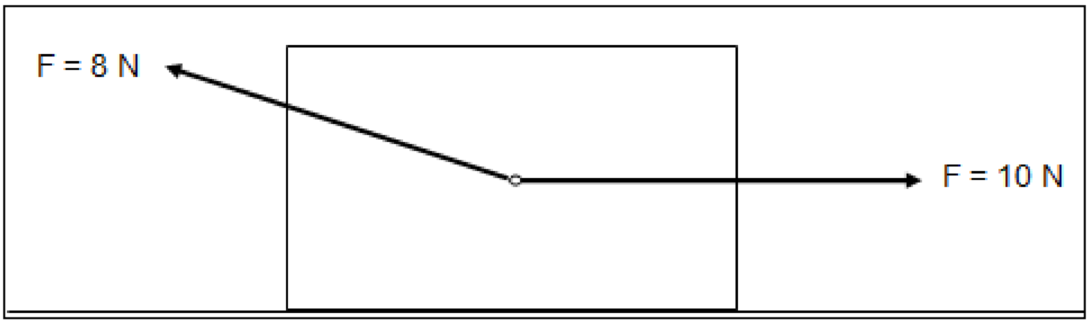


Figura 60: Forças opostas atuando sobre um corpo

Na prática a maioria das forças não é aplicada sobre o mesmo ponto de um corpo. Porém são assim representadas para facilitar a manipulação dos vetores que as representam. Dois vetores que não têm origem no mesmo ponto podem sofrer translações para que sejam representados com origens coincidentes. Observe figuras 61 e 62.

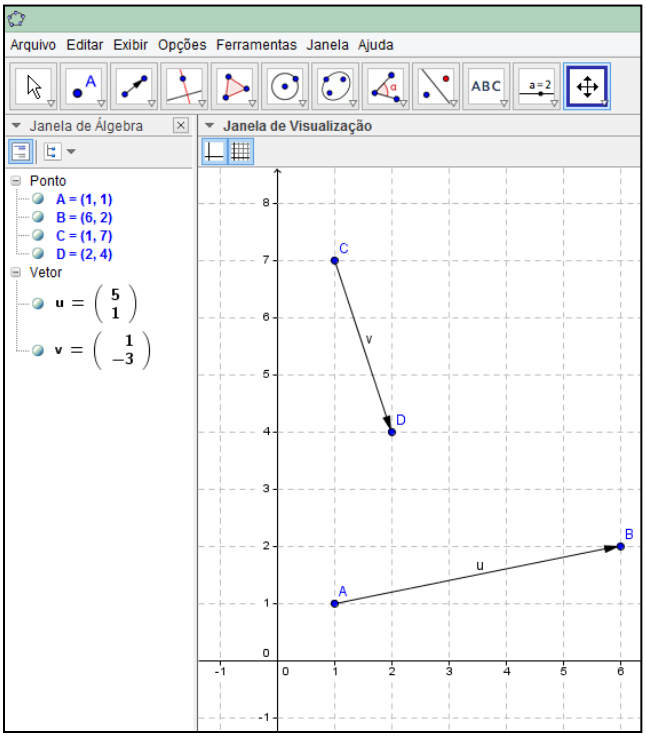


Figura 61: Dois vetores no plano

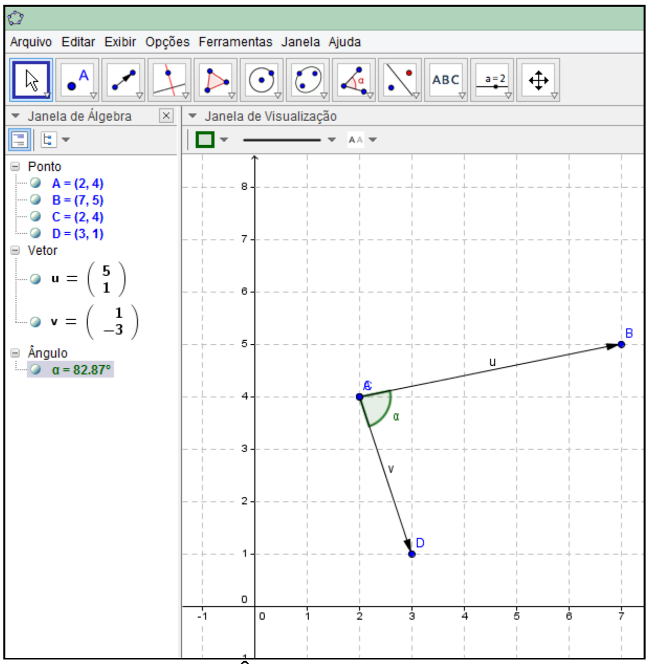


Figura 62: Ângulo entre dois vetores

Observe as janelas algébricas das duas figuras anteriores. Os vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ sofreram translações, mas seus registros numéricos $\vec{v}$=(1,-3) e $\vec{u}$=(5,1) permaneceram inalterados.

Transladando os vetores para que sejam representados com mesma origem, deve ser traçado um segmento que une as extremidades dos dois vetores formando um triângulo.

Após decompor os vetores dados e o segmento que une as extremidades dos mesmos, obtém-se facilmente, usando o Teorema de Pitágoras o módulo de cada vetor e do segmento construído, como ilustrado na figura a seguir.

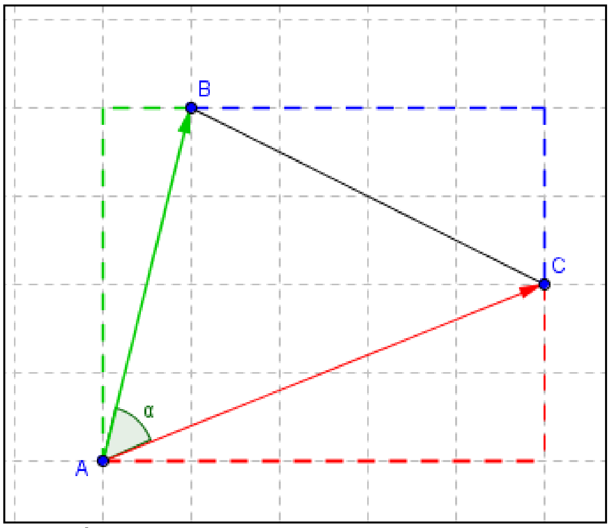


Figura 63: Ângulo entre vetores usando a Lei dos Cossenos

Logo, basta aplicar a Lei dos cossenos para chegar ao valor do ângulo preterido.

$$||\overline{BC}||^2 = ||\overline{AB}||^2 + ||\overline{AC}||^2 - 2.||\overline{AB}||.||\overline{AC}||.\cos\alpha$$

$$||\overline{BC}||^2 - ||\overline{AB}||^2 - ||\overline{AC}||^2 = - 2.||\overline{AB}||.||\overline{AC}||.\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{||\overline{BC}||^2 - ||\overline{AB}||^2 - ||\overline{AC}||^2}{-2.||\overline{AB}||.||\overline{AC}||}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{||\overline{BC}||^2 - ||\overline{AB}||^2 - ||\overline{AC}||^2}{-2.||\overline{AB}||.||\overline{AC}||}\right)$$

Aplicando o arco cosseno no valor encontrado, obtém-se o ângulo entre os vetores dados.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A possibilidade de utilizar o geoplano e o geogebra para ensinar vetores foi a mola propulsora para a realização deste trabalho.

O desafio de usar um recurso pedagógico para conceitos abordar um conceito já abordado de outras maneiras é satisfatório, pois facilita a apropriação, desenvolvimento e aplicação dos conceitos estudados pelos alunos.

Além de auxiliar os professores de física no ensino de vetores aos alunos das séries finais do Ensino Fundamental e aos alunos do Ensino Médio, compreende um desafio aos professores de matemática trabalhar os conceitos de vetores no decorrer das suas aulas ou em projetos de extensão, o que pode facilitar o uso desses conceitos nas outras disciplinas, como física e química.

Espera-se que este trabalho contribua de significativamente no processo de ensino e aprendizagem, em especial, no estudo de vetores. Que alunos e professores possam trilhar caminhos de sucesso nesse processo.

Lembre-se, no caminho existem dificuldades, mas todas elas podem ser rompidas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS NBR 6023: Informação e Documentação - Referências - Elaboração. Rio de Janeiro: 2002. 24 p.

ASSIS, Leonardo. **A modelagem como motivação e instrumento para o processo de ensino/aprendizagem da matemática**. Monografia de Especialização em Educação Matemática. Ouro Preto: UFOP, 2006. 76 p.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica. PCN Ensino Médio: **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais de Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Secretaria de Educação Básica. Brasília: MEC/SEB, 2002. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em 15 de março de 2014.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa, S.C.P., 1975.

FIORENTINI, Dário, MIORIM, Maria A. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática**. Boletim SBEM, São Paulo, v.4, n.7, 1996.

KNIJNIK, Gelsa; BASSO, Vinicius de Azevedo Basso; KLÜSENER, Renita. **Aprendendo e ensinando matemática com o geoplano**. Ijui – RS: Unijui, 2004.

LIMA, Elon Lages. et al. **A Matemática do Ensino Médio Vol. 3**. Rio de Janeiro, SBM-2006.

PATRÍCIO, R.; ALMEIDA, M. **AS MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES NO ENSINO DE VETORES.** Disponível em: <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cnem/cnem/principal/cc/DOC/CC43.doc>. Acesso em 18 de junho de 2014.

ROCHA, Cristiane de Arimatéa. **USO DO GEOPLANO PARA O ENSINO DE GEOMETRIA: UMA ABORDAGEM ATRAVÉS DE MALHAS QUARICULADAS**. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/02/MC03069646433.pdf >. Acesso em 18 de junho de 2014.

VIERIA, Carmem Rosilene. **Usando o geoplano e o geogebra para trabalhar o conceito de área**. Disponível em: <http://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/produtos_2010/Produto_%20Carmem.pdf>. Acesso em 21 de julho de 2014.