Universidade Federal de Juiz de Fora
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Karolyne Cerqueira Costa Rozendo

Aprofundando o estudo de Áreas

Juiz de Fora

2013

Karolyne Cerqueira Costa Rozendo

Aprofundando o estudo de Áreas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Sofia Carolina da Costa Melo

Juiz de Fora

2013

Rozendo, Karolyne Cerqueira Costa.

Aprofundando o estudo de Áreas / Karolyne Cerqueira Costa Rozendo. – 2013.

52f. : il.

Orientadora: Sofia Carolina da Costa Melo

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, 2013.

1. Matemática. 2. Áreas. 3. Decomposição. 4. Aproximação. I. Melo, Sofia Carolina da Costa, orient. I. Título.

Karolyne Cerqueira Costa Rozendo

Aprofundando o estudo de Áreas

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal de Juiz de Fora.

Prof[a]. Dra. Sofia Carolina da Costa Melo
(Orientadora)
UFJF

Prof[a]. Dra. Aline Mauricio Barbosa
UFRRJ

Prof. Dr. José Barbosa Gomes
UFJF

Juiz de Fora, 19 de março de 2013.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por sempre estar presente em minha vida, me dando coragem, força e fé para seguir em frente e nunca desistir.

Agradeço aos meus pais, Wantuil e Cristina, que são minha base, meus exemplos de vida, que me ensinaram tudo o que eu sei e que me dão amor incondicional.

A minha irmã Karyne, obrigada por ser mais que uma irmã, por ser uma amiga, minha melhor amiga.

Ao meu marido, meu amigo, companheiro, conselheiro, que está sempre ao meu lado, nos momentos fáceis e difíceis, me apoiando e me ajudando, só tenho a dizer obrigada, muito obrigada. Amo você!

Agradeço a minha amada filha, meu maior presente de Deus, que me acompanha desde a barriga nessa caminhada, detentora do meu amor incondicional. A ela, também peço desculpas pelos dias de ausência, a saudade foi grande e a dor de ter que deixá-la maior ainda.

Agradeço a minha professora/orientadora, que me ajudou não só nessa dissertação, mas ao longo do curso, em um momento que estava prestes a desistir de tudo. Muito obrigada por acreditar em mim!

Agradeço a uma amiga muito querida, que apesar de não estar mais presente aqui entre nós, sei que torce e acredita em mim. Ana Raquel ("Kekel"), você faz muita falta.

Agradeço aos professores José Barbosa Gomes e Aline Mauricio Barbosa por aceitarem participar da minha banca de defesa e contribuirem para a conclusão do meu tão sonhado mestrado.

Agradeço à Capes, pelo apoio financeiro.

Agradeço a todos, que de uma forma direta ou indereta contribuiram para a realização desse sonho.

RESUMO

Este trabalho trata de uma proposta de estudo da área de figuras planas para alunos do ensino médio. Começaremos demonstrando fórmulas para o cálculo de área de figuras como paralelogramo e trapézio partindo do conhecimento da área de um retângulo. Em seguida, faremos uma aproximação do valor da área de uma região plana delimitada em parte pelo gráfico de uma função. Esta aproximação será feita utilizando a área de retângulos.

Palavras-Chave: Áreas. Decomposição. Aproximação.

ABSTRACT

This work is a proposal to study the area of plane figures for high school students. We begin by showing formulas for the calculation of area of figures as the pallelogram and the trapezoid, starting from knowledged of the area of a rectangle. Next, we make an approximation of the value of the area of a plane figure bounded, in part, by the graph of a function. This approximation will be done using the area of retangles.
Keywords: Areas. Decomposition. Approximation.

Sumário

INTRODUÇÃO

O tema de uma dissertação não é algo fácil de decidir, principalmente quando este tem que ter uma aplicação, tem que ser utilizado no ensino de matemática da educação básica. Mas, levando em consideração minha prática docente, resolvi falar sobre a teoria de áreas vista no ensino médio. O assunto além de ser tratado de uma forma muito superficial, expondo somente as fórmulas, é pouco explorado pelos professores.

Assim, nesta dissertação iremos aprofundar o estudo de áreas para alunos do primeiro e segundo anos do ensino médio. Faremos isso através de uma atividade que enriquecerá a teoria das áreas básicas (quadrado, triângulo, trapézio, paralelogramo, losango e círculo), mostrando como chegar até elas através da decomposição por outras figuras de áreas já estudadas, utilizando como material de apoio figuras desenhadas em material EVA. Além disso, essa atividade vai também nos possibilitar calcular um valor aproximado para áreas de figuras desconhecidas conhecendo a função geradora da figura. Para isso, utilizaremos um método de aproximação, introduzindo, assim, para os alunos a ideia de limite.

O Capítulo 1 contém uma descrição geral do trabalho, dizendo os objetivos que queremos atingir, o público alvo, os materiais utilizados, as recomendações metodológicas, as dificuldades previstas, como a atividade será desenvolvida e possíveis continuações para o trabalho aqui proposto. No Capítulo 2, colocamos como o assunto área é tratado no ensino médio. Ainda neste capítulo, desenvolvemos as quatro etapas da atividade: enriquecimento de teoria, introdução de algumas áreas não conhecidas, apresentação do método do cálculo de aproximação de áreas e alguns exemplos propostos para os alunos. No Capítulo 3, temos a base teórica das demonstrações dadas, bem como a formalização de limite e integrais usadas no cálculo de áreas. Finalmente, no Apêndice deste trabalho, temos as fotos com materiais concretos que serão utilizados para o auxílio do ensino de áreas.

1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Nesse capítulo falaremos dos objetivos, público alvo e demais considerações para que a atividade proposta seja desenvolvida. Também sugeriremos possíveis continuações para a mesma.

1.1 OBJETIVOS

O objetivo desse trabalho é melhorar a concepção do cálculo de área que o aluno do ensino médio traz consigo, fazendo com que ele seja capaz não só de obter áreas básicas mas também estimaar algumas áreas que não são consideradas básicas, nas quais somente o processo de decomposição em áreas conhecidas não é suficiente.

Primeiro vamos fazer um enriquecimento da teoria, demonstrando como chegar as fórmulas de áreas dadas, através da decomposição em figuras já conhecidas, com o auxílio de material feito em EVA (ver Apêndice), já que elas apenas são oferecidas sem nenhum tipo de demonstração (evidenciado o processo de decorar), apesar das mesmas virem expostas nos livros didáticos. Queremos que os alunos entendam o que está sendo ensinado e como tais fórmulas surgem.

Em seguida, usando funções conhecidas pelos alunos, tais como afim, quadrática, exponencial e logarítmica, vamos apresentar algumas figuras nas quais nem sempre é possível o cálculo de área apenas por decomposição em outras figuras planas, como visto anteriomente na etapa de enriquecimento de teoria. Faremos um cálculo aproximado do valor dessas áreas usando um método de aproximação.

1.2 PÚBLICO ALVO

A atividade será elabadorada para alunos que estão no final do primeiro ano e início do segundo ano do ensino médio. A escolha desses alunos se dá pelo fato que no final do primeiro ano eles já terão estudado as funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica, além de também terem estudado a respeito de áreas. Os alunos precisarão desses conhecimentos prévios para que a atividade possa ser aplicada.

1.3 MATERIAIS E TECNOLOGIAS

Para o desenvolvimento da primeira etapa da atividade, vamos utilizar figuras feitas em EVA (ver Apêndice), as figuras serão apresentadas inteiras e decompostas, para que o aluno perceba o método utilizado. *Softwares* matemáticos também poderão ser usados para auxiliar o processo de enriquecimento de teoria.

1.4 RECOMENDAÇÕES METODOLÓGICAS

Para a aplicação da atividade descrita na seção 1.6 será preciso dividir a turma em grupos, de no máximo 4 alunos, para que discussões possam ser realizadas e a atividade possa ser desenvolvida de maneira clara.

Além disso, materiais podem ser oferecidos aos alunos para que eles confeccionem os polígonos utilizados na etapa de enriquecimento de teoria, como os feitos em EVA.

1.5 DIFICULDADES PREVISTAS

No decorrer da atividade, espera-se que o aluno tenha dificuldade apenas para perceber que a área pode ser calculada pelo método de aproximação, pois dois novos conceitos serão introduzidos, o de limite e o de Soma de Riemann, mesmo que de uma maneira informal.

1.6 DESCRIÇÃO GERAL

A atividade proposta será desenvolvida em quatro etapas. A primeira delas será a de Enriquecimento de Teoria. A segunda será a de apresentação das áreas não conhecidas. A terceira, a de apresentação do método da aproximação. E, finalmente, a quarta etapa será a de aplicação do método pelos alunos. No próximo capítulo, elas serão apresentadas de forma mais clara.

1.7 POSSÍVEIS CONTINUAÇÕES E DESDOBRAMENTOS

A atividade pode ser aplicada com auxÍlio de alguns recursos computacionais, como *softwares* matemáticos capazes de desenvolver gráficos e animações. Assim, as figuras poderiam ser construídas com mais facilidade e o método de aproximação desenvolvido com mais precisão, o que faria com que os alunos percebessem com mais rapidez que quanto maior a quantidade de retângulos usados no método, melhor é a aproximação do valor da área.

2 DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE

Neste capítulo iremos descrever a atividade proposta passo-a-passo. Começaremos apresentando como alguns livros didáticos abordam o estudo de áreas no ensino médio e depois passaremos às etapas da atividade.

2.1 UMA ABORDAGEM PARA O ESTUDO DE ÁREAS NO ENSINO MÉDIO

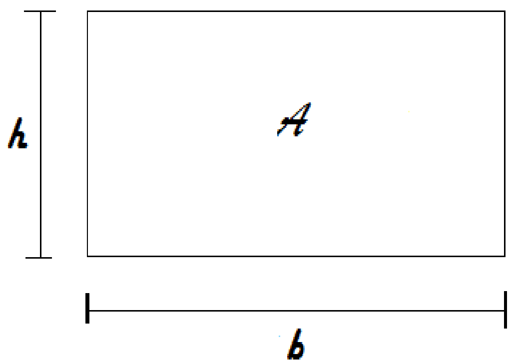
A teoria a seguir é a encontrada em alguns livros didáticos do ensino médio, como, por exemplo, em [2] e em [4].

Podemos ver que as demonstrações de algumas áreas até são feitas nos livros, mas além de nem sempre estarem muito claras e detalhadas, na prática raramente são trabalhadas em sala de aula. As fórmulas costumam ser dadas sem nenhum tipo de explicação, evidenciando o processo de decorar, o que pode prejudicar o entendimento do aluno.

Vejamos, agora, algumas definições e demonstrações encontradas em [4], no capítulo 23, página 357, que trata de áreas.

Definição 2.1. Área do retângulo

Área do retângulo é igual ao produto da medida da base pela altura.

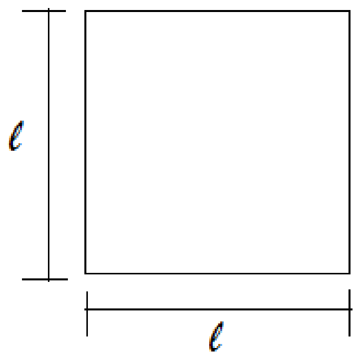


Indicamos: área $= \mathcal{A}$, base $= b$, altura $= h$. Temos:

$$A = b \cdot h$$

Definição 2.2. Área do quadrado

Vamos representar por l o lado do quadrado.

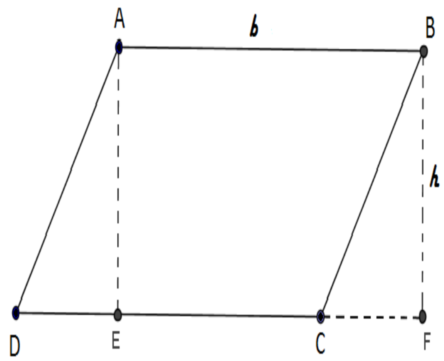


Aplicando a fórmula da área do retângulo, para $b = l$ e $h = l$, temos:

$$A = b \cdot h = l \cdot l = l^2$$

Definição 2.3. Área do paralelogramo

Dado o paralelogramo $P(b, h)$, ele é equivalente a um retângulo cuja base mede b e a altura mede h. Logo:



$$A_P = A_R \Longrightarrow A_P = b \cdot h$$

Definição 2.4. Área do triângulo

Dado o triângulo $T(b, h)$, ele é equivalente a um paralelogramo cuja base mede b e a altura mede $\dfrac{h}{2}$(ver figura 1). Logo, sendo A_T a área do triângulo:

$$A_T = A_{paralelogramo} \Longrightarrow A_T = b \cdot \frac{h}{2} \Longrightarrow A_T = \frac{b \cdot h}{2}$$

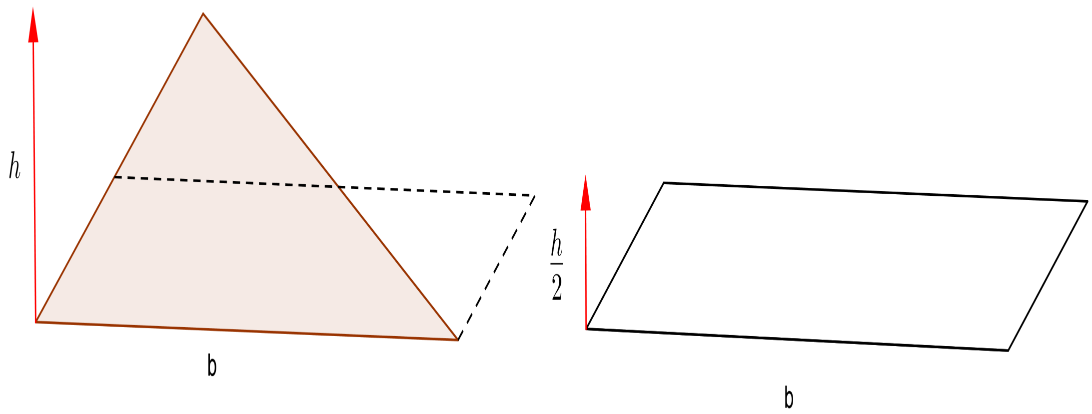
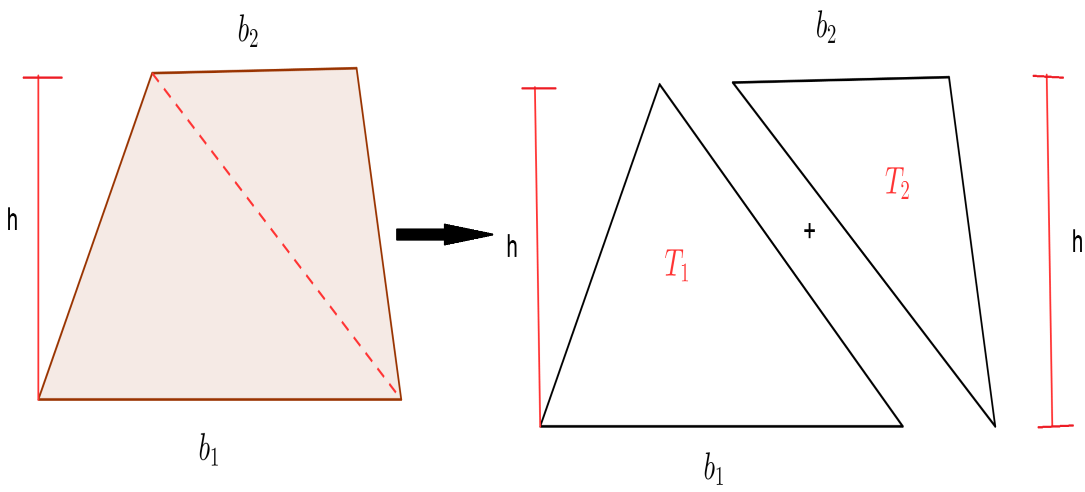


Figura 1: Área do triângulo

Definição 2.5. Área do trapézio

Dado o trapézio $T_{ra}(b_1, b_2, h)$, ele é a soma de dois triângulos $T_1(b_1, h)$ e $T_2(b_2, h)$.

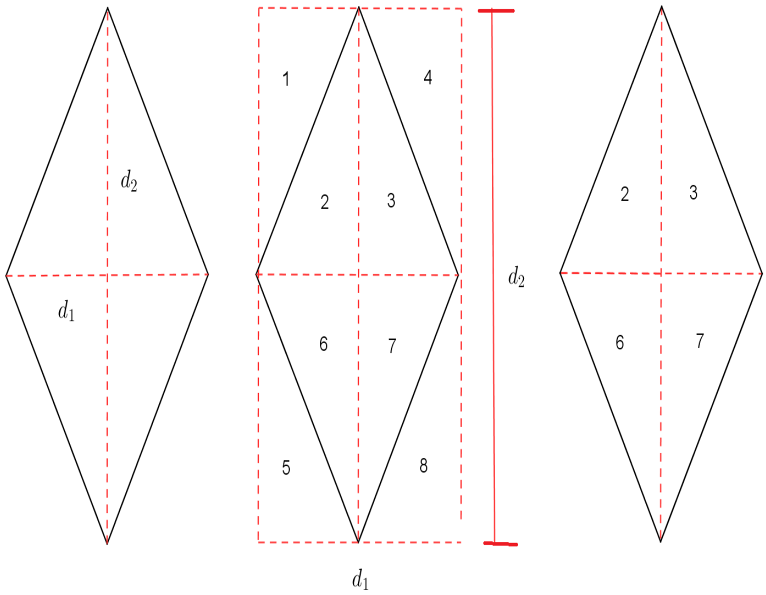
$$A_{T_{ra}} = \frac{b_1 \cdot h}{2} + \frac{b_2 \cdot h}{2} \Longrightarrow A_{T_{ra}} = \frac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2}$$



Definição 2.6. Área do losango

Dado o losango $L(d_1, d_2)$, conduzimos as diagonais e, pelos vértices, as paralelas às diagonais.

$$A_L = A_{(4\triangle)} = \frac{A_{(8\triangle)}}{2} \Longrightarrow A_L = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

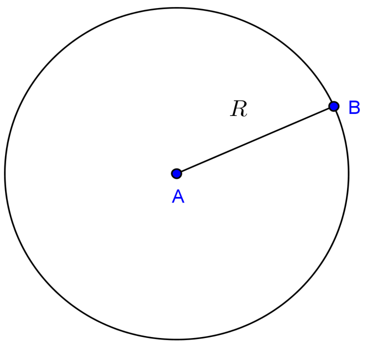


Definição 2.7. Área do círculo

Fixado um círculo, de raio R (diâmetro D), considerando os polígonos regulares inscritos e os circunscritos nesse círculo, com o crescimento do número de lados as áreas dos polígonos se aproximam da área do círculo, assim como os seus perímetros se aproximam do perímetro do círculo e os apótemas se aproximam do raio do círculo. Podemos então colocar, por extensão:

A área do círculo é o produto de seu semiperímetro pelo raio.

$$A_C = \pi R \cdot R = \pi R^2$$



Então:

$$A_C = \pi \cdot R^2 \text{ ou } A_C = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\pi D^2}{4}.$$

2.2 PRIMEIRA ETAPA

A primeira etapa consiste no enriquecimento da teoria sobre áreas já vista pelos alunos em séries passadas, pois geralmente há uma introdução no ensino fundamental e um aprofundamento no ensino médio.

As fórmulas de áreas serão apresentadas e demonstradas para eles através de decomposição, ou seja, a figura será decomposta em figuras de áreas já conhecidas, vistas e estudadas. Isso será feito com o auxílio de um material concreto confeccionado em EVA, composto das figuras inteiras e decompostas, que irá auxiliar no entendimento de que a área procurada será a soma das áreas usadas na decomposição. As fotos com o material físico feito em EVA podem ser vistas no Apêndice.

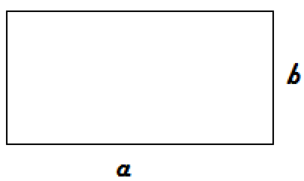
E, para chegarmos a uma teoria adequada ao nosso ponto de vista, passamos pelas teorias abordadas em livros didáticos do ensino médio, vendo o que falta nela e em livros do ensino superior, vendo o que podemos apresentar para os alunos. Assim, juntando seus melhores conceitos e demonstrações na parte de enriquecimento de teoria, que será dada para o aluno.

2.2.1 Enriquecimento de Teoria

O estudo de áreas vista no ensino médio costuma ser feito de uma maneira muito superficial, apresentando apenas as fórmulas aos alunos, como pode ser visto no livro [4]. Em outros casos as demonstrações até são feitas, porém não de maneira clara para que os alunos possam entender, como em [2]. O que queremos fazer é enriquecer esse conhecimento, fazendo com que os alunos saibam como surgiram as fórmulas. Para isso, vamos começar enunciando a teoria e fazendo as demonstrações devidas, como encontrado em alguns livros de Geometria, por exemplo, em [7] e [8]. Além disso, vamos ilustrar cada etapa das demonstrações com as figuras feitas em material EVA, para que os alunos possam perceber o que está sendo feito.

Começaremos com a área do retângulo que servirá de base para o cálculo das outras áreas.

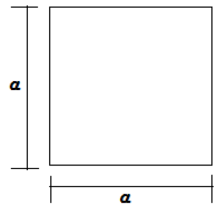
Definição 2.8. Um retângulo de lados a e b tem área ab.



Dada a definição acima, temos os seguintes resultados sobre o cálculo de áreas.

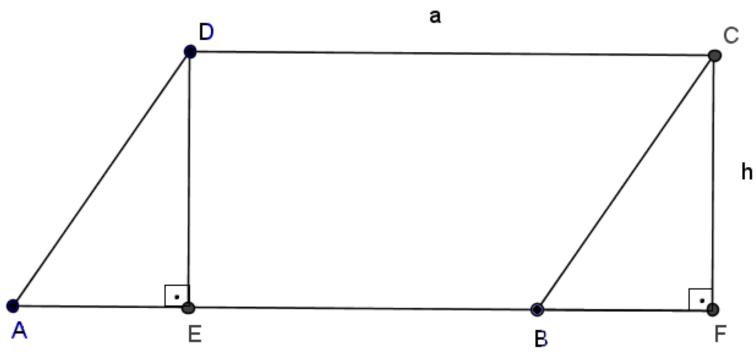
Teorema 2.9. Um quadrado de lado a tem área a^2.

Demonstração. O quadrado é um retângulo de lados iguais, sendo assim, sua área é $a.a = a^2$. □



Para as seguintes definições e demonstrações, vamos usar $\mathcal{A}$ para expressar a área de uma região.

Teorema 2.10. A área de um paralelogramo de base a e altura h é igual a ah.



Demonstração. Seja $ABCD$ um paralelogramo e seja $\mathcal{A}(ABCD)$ sua área. Tomemos respectivamente E e F os pés das perpendiculares baixadas de D e C à reta $\overleftrightarrow{AB}$. Podemos verificar que os triângulos ADE e BCF são congruentes pelo caso ALA, pois $\hat{E} = \hat{F} = 90°$, $\overline{DE} = \overline{CF} = h$ e $\hat{D} = \hat{C}$. De modo que $\overline{AE} = \overline{BF}$ e $\mathcal{A}(ADE) = \mathcal{A}(BCF)$. Podemos observar que a área $\mathcal{A}(ABCD)$ do paralelogramo é a soma da área do triângulo ADE com a área da figura $BEDC$. Então, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(ABCD) &= \mathcal{A}(ADE) + \mathcal{A}(BEDC) \\ &= \mathcal{A}(BCF) + \mathcal{A}(BEDC) \\ &= \mathcal{A}(EFCD). \end{aligned}$$

Como, $EFCD$ é um retângulo de altura h e base $\overline{EF} = \overline{DC} = a$, segue

$$\mathcal{A}(ABCD) = \mathcal{A}(EFCD) = ah.$$

□

Teorema 2.11. Seja ABC um triângulo de lados $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ e alturas h_a, h_b, h_c respectivamente relativas aos lados a, b, c (figura 2). Então sua área é dada pelo produto entre uma base e a altura relativa a ela, dividindo esse produto por dois. Ou seja,

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}.$$

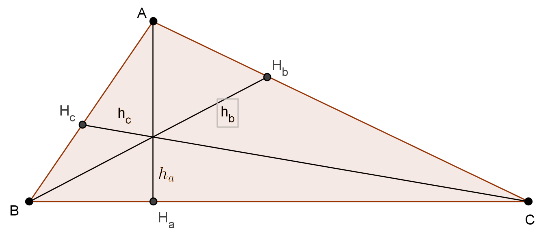


Figura 2: Triângulo

Demonstração. Para encontrarmos a fórmula para a área de um triângulo, vamos construir um paralelogramo, pois sabemos como calcular sua área. Então, seja $S = \mathcal{A}(ABC)$. Tracemos uma reta paralela a $\overleftrightarrow{BC}$ passando por A e uma reta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ passando por C, chamemos de D o ponto de interseção dessas duas retas paralelas (figura 3).

Assim, temos que $ABCD$ é um paralelogramo e que sua área é $2S$, vemos que os triângulos ABC e ACD são congruentes, pelo caso LLL, pois $\overline{AC}$ é um lado comum aos dois, $\overline{BC} = \overline{AD}$ e $\overline{AB} = \overline{DC}$. Assim,

$$\mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(ACD) = \mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(ABC) = 2 \cdot \mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(ABCD) = a.h_a.$$

Logo,

$$\mathcal{A}(ABCD) = 2 \cdot \mathcal{A}(ABC) \Longrightarrow a \cdot h_a = 2 \cdot \mathcal{A}(ABC) \Longrightarrow \mathcal{A}(ABC) = \frac{a \cdot h_a}{2},$$

donde segue a primeira igualdade. As outras duas igualdades podem ser obtidas de modo análogo.

□

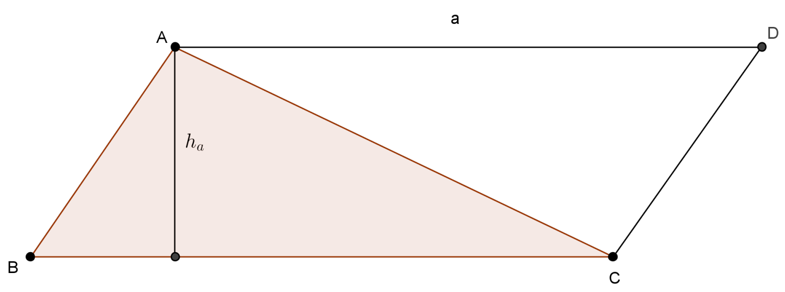


Figura 3: Área do triângulo

Teorema 2.12. Seja $ABCD$ um trapézio de bases $\overline{AB} = b_1$, $\overline{CD} = b_2$ e altura h. Então

$$\mathcal{A}(ABCD) = \frac{(b_1 + b_2)h}{2}.$$

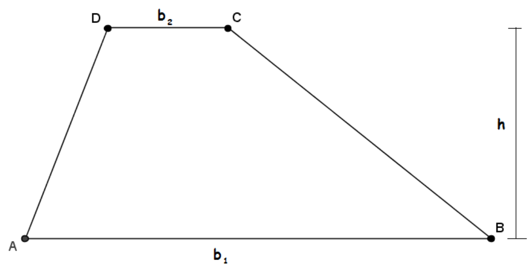
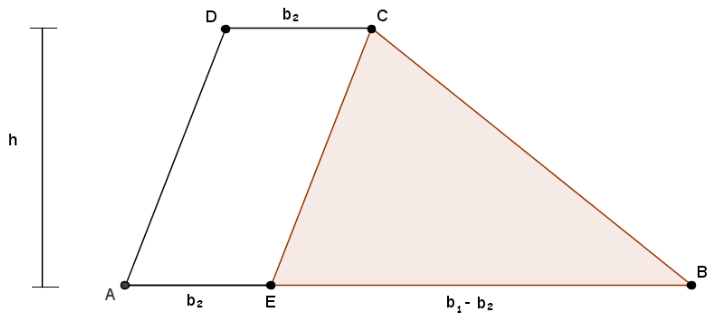


Figura 4: Trapézio

Demonstração. Vamos supor que $b_1 > b_2$. Tracemos uma reta paralela a reta $\overleftrightarrow{AD}$ passando por C e marcando o ponto $E \in \overline{AB}$, que é uma interseção dessa reta com o lado $\overline{AB}$ do trapézio.

Temos que o quadrilátero $AECD$ é um paralelogramo, pois tem dois pares de lados paralelos de comprimentos iguais. Assim, o segmento $\overline{BE}$ é igual a $b_1 - b_2$ e segue que a área do trapézio é a soma da área do paralelogramo $AECD$ com o triângulo EBC, ou seja,

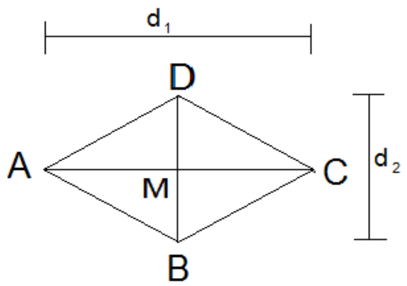
$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(ABCD) &= \mathcal{A}(AECD) + \mathcal{A}(EBC) \\
&= b_2 \cdot h + \frac{(b_1 - b_2) \cdot h}{2} \\
&= \frac{2 \cdot b_2 \cdot h + b_1 \cdot h - b_2 \cdot h}{2} \\
&= \frac{b_2 \cdot h + b_1 \cdot h}{2} = \frac{(b_1 + b_2)h}{2}.
\end{aligned}$$



□

Teorema 2.13. Seja $ABCD$ um losango de diagonais $\overline{AC} = d_1$ e $\overline{BD} = d_2$, então

$$\mathcal{A}(ABCD) = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2$$



Demonstração. No losango $ABCD$ vemos que as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são perpendiculares. Vamos chamar de M o ponto de encontro dessas diagonais.

Assim, podemos dizer que a área do losango $ABCD$ é a soma das áreas dos triângulos ABC e ACD, ou seja,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(ABCD) &= \mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(ACD) \\
&= \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{BM} + \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{DM} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot (\overline{BM} + \overline{DM}) \\
&= \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{BD} \\
&= \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2.
\end{aligned}$$

□

Para a área do círculo resolvemos não fazer uma demonstração formal para os alunos, somente vamos mostrar a aproximação da área do círculo com polígonos inscritos e circunscritos a ele. Veja figuras 5, 6 e 7.

Se algum aluno se interessar a saber mais a respeito do assunto, o professor poderá sugerir a leitura da apostila 3, do programa de Iniciação Científica 2012 da OBMEP, [10], que faz a definição do número π e a demonstração da área do círculo.

Assim, para definir tal área, consideremos um círculo de raio R.

Teorema 2.14. A área do círculo é o produto de seu semiperímetro pelo raio.

$$\mathcal{A}_C = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{2} \cdot R = \pi R^2$$

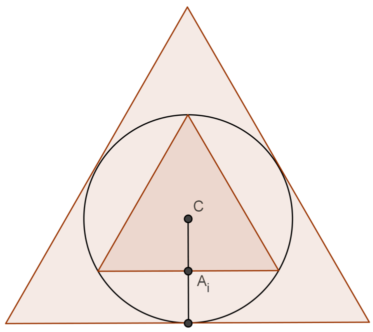


Figura 5: Triângulo inscrito e circunscrito

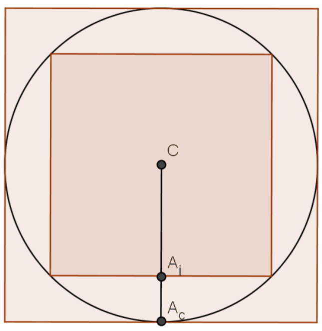


Figura 6: Quadrado inscrito e circunscrito

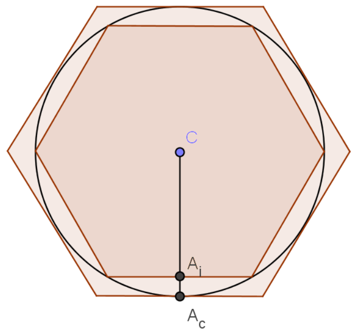


Figura 7: Hexágono inscrito e circunscrito

Com isso, finalizamos nossa primeira etapa e podemos avançar para a segunda parte da atividade.

2.3 SEGUNDA ETAPA

A segunda etapa será uma etapa de apresentação. Quatro figuras serão colocadas no quadro para que os alunos discutam como calcular a área delas. Essas áreas não serão calculadas pelo método da decomposição apresentado anteriormente e a ideia é que eles percebam isso e gere uma discussão a respeito do cálculo dessas áreas.

2.3.1 Áreas não conhecidas

A primeira figura é uma região delimitada pelo gráfico de uma função afim definida no intervalo $[0, 4]$, pelo eixo x, pelo eixo y e pela reta $x = 4$ (veja figura 8). A ideia é que os alunos percebam que a área dessa figura também pode ser calculada pelo método visto anteriormente, pois ela nada mais é que um trapézio ou a junção de um retângulo com um triângulo.

A segunda figura apresentada será delimitada pelo gráfico da função $f(x) = x^2$, no intervalo $[0, 4]$, pelo eixo x, eixo y e pela reta $x = 4$ (veja figura 9). Nessa figura a ideia é que eles percebam que a área da região não pode ser calculada através da decomposição em outras áreas conhecidas, que será preciso mais, um outro método. Então, a discussão estará aberta.

Após o início da discussão mais duas figuras serão expostas aos alunos, uma delas é uma região sob a parte do gráfico de uma função exponencial e a outra é uma região sob a parte do gráfico de uma função logarítmica. Veja as figuras 10 e 11.

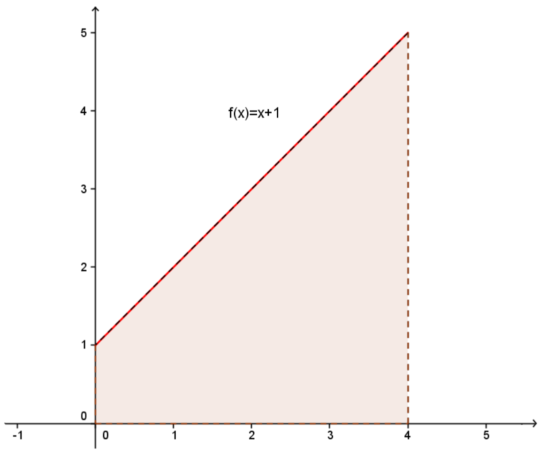


Figura 8: Função Afim

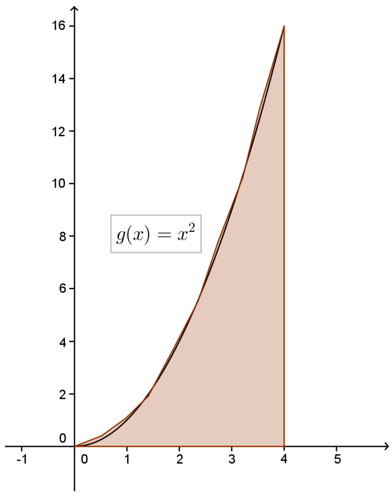


Figura 9: Função Quadrática

2.4 TERCEIRA ETAPA

A terceira etapa consistirá na apresentação do método de aproximação. A teoria não poderá ser apresentada para os alunos da maneira como é colocada nos livros de cálculo e análise, porém essa parte servirá como orientação aos professores que desenvolverão a atividade. O método será apresentado de uma maneira simples e clara, através de exemplos, sem entrar nos detalhes de limite e soma de Riemann para que os alunos possam compreendê-lo e utilizá-lo.

2.4.1 Teoria para os alunos

Nessa seção iremos abordar como calcular as áreas vistas na seção anterior de uma maneira simples e objetiva, para que alunos do ensino médio possam entender o que será feito. Para isto,

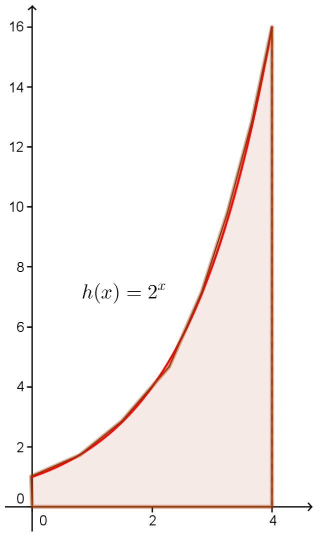


Figura 10: Função Exponencial

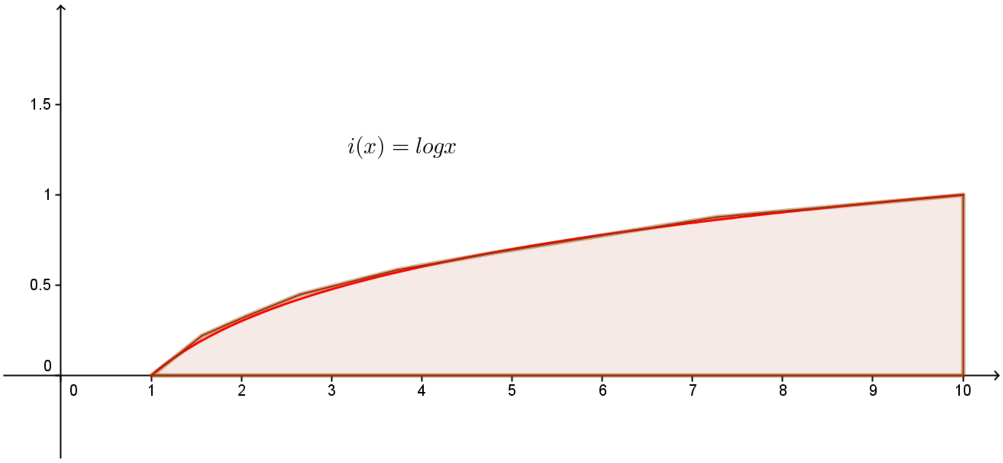


Figura 11: Função Logarítmica

vamos trabalhar com exemplos numéricos, introduzindo a noção intuitiva de limite e vamos fazer uma aproximação das quatro áreas propostas na seção 2.3.1.

Começaremos dando uma noção intuitiva de limite através de um exemplo.

Exemplo 2.15. Noção intuitiva de limite

O exemplo seguinte foi retirado do livro [3], com algumas modificações.

Seja a função $f(x) = \dfrac{(2x+1)(x-1)}{x-1}$ definida para todo número real x, com $x \neq 1$. Podemos dividir o numerador e o denominador por $x - 1$, obtendo $f(x) = 2x + 1$.

Vamos estudar os valores da função f quando x está próximo de 1, mas x é diferente de 1.

Iniciamos atribuindo a x valores próximos de 1, porém menores que 1, assim:

x	0	$0,5$	$0,75$	$0,9$	$0,99$	$0,999$
$f(x)$	1	2	$2,5$	$2,8$	$2,98$	$2,998$

Agora, se atribuirmos a x valores próximos de 1, porém maiores que 1, temos:

x	2	$1,5$	$1,25$	$1,1$	$1,01$	$1,001$
$f(x)$	5	4	$3,5$	$3,2$	$3,02$	$3,002$

Podemos observar na primeira tabela que quando x se aproxima de 1, por valores menores que 1, $f(x)$ aproxima-se cada vez mais de 3, por valores menores que 3. Neste caso, dizemos que $f(x)$ aproxima-se por baixo de 3. Já, na segunda tabela, percebemos que quando x se aproxima de 1, por valores maiores que 1, $f(x)$ aproxima-se de 3, por valores maiores que 3. Neste caso, dizemos que $f(x)$ aproxima-se por cima de 3. Isto é, quanto mais próximo de 1 estiver x, mais próximo de 3 estará $f(x)$.

Temos, então, a noção intuitiva de limite, ou seja, podemos pegar valores tão próximos de um número não necessariamente pertencente ao domínio da função e suas imagens convergirem para um único valor.

Com base nessa noção de limite, vamos obter uma aproximação das áreas das regiões apresentadas na seção 2.3.1, pelo método da aproximação por retângulos. Esse método consiste em dividir o intervalo onde a função está definida em diversos subintervalos e, com esses, formar retângulos de alturas iguais aos valores que os extremos dos subintervalos assumem na função. Desse modo, para cada divisão da região, teremos dois cálculos a fazer: o primeiro será uma aproximação por baixo do valor da área com as alturas tomadas pelos valores do menor extremo dos subintervalos e, o segundo será a aproximação por cima do valor da área tomando a altura pelos valores do maior extremo dos subintervalos.

Exemplo 2.16. Área de uma região delimitada pelo gráfico de $f(x) = x + 1$ no intervalo $[0, 4]$, pelo eixo x, pelo eixo y e pela reta $x = 4$

Para o cálculo da área da região definida pelo primeiro gráfico, vamos dividir a região em duas, quatro e oito partes.

Na divisão da região em duas partes, temos:

1. Aproximação por baixo - Figura 12

   Na divisão da região em duas partes, utilizando a aproximação por baixo, formamos dois retângulos de base 2 e alturas 1 e 3, ver figura 12. Assim, a área da região será aproximada pela área desses retângulos. Ou seja, $\mathcal{A} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 8$.

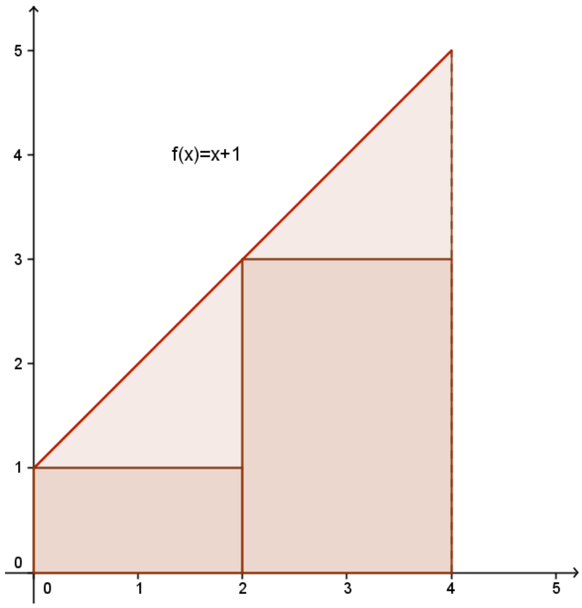


Figura 12: Função Afim

2. Aproximação por cima - Figura 13

   Quando dividimos a região em duas partes e utilizamos a aproximação por cima, formamos dois retângulos de base 2 e alturas 3 e 5. Assim, a área procurada, será aproximada por:

$$\mathcal{A} = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 16$$

Assim, temos que a área da região é maior que 8 e menor que 16.

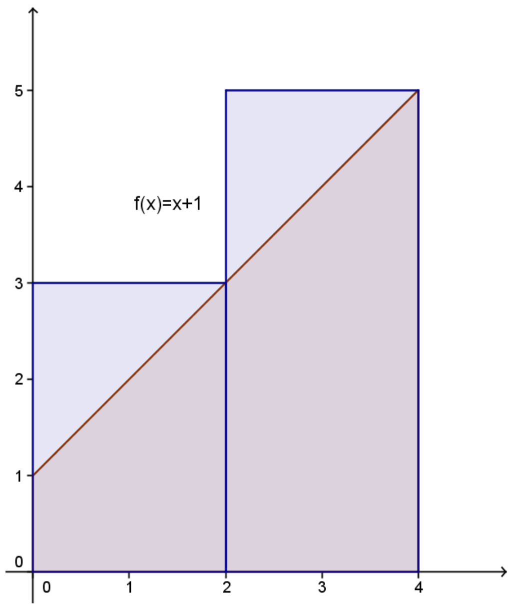


Figura 13: Função Afim

Agora vamos fazer a divisão da região em quatro partes.

1. Aproximação por baixo - Figura 14

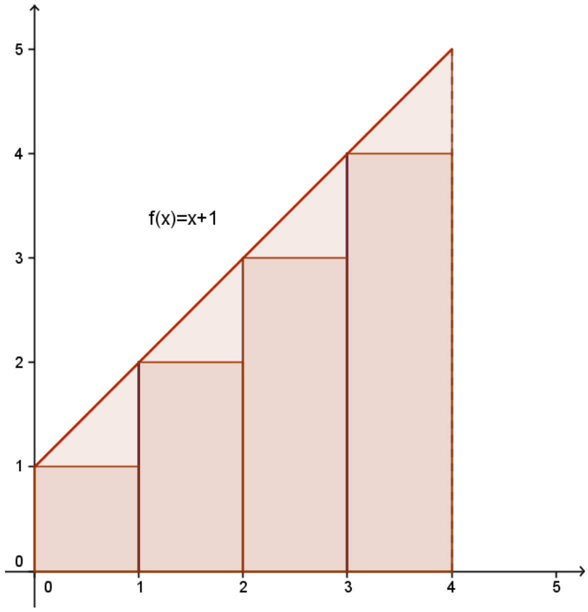


Figura 14: Função Afim

Efetuando essa divisão da região, podemos formar quatro retângulos de base 1 e alturas 1, 2, 3 e 4. A área procurada é a soma das áreas desses quatro retângulos. Desse modo, temos:

$$\mathcal{A} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

2. Aproximação por cima - Figura 15

   Ao fazermos a aproximação por cima, encontramos quatro retângulos de base 1 e alturas 2, 3, 4 e 5. Sendo assim, a área procurada é próxima de:

$$\mathcal{A} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 2 + 3 + 4 + 5 = 14$$

Agora temos que o valor da área em questão está entre 10 e 14.

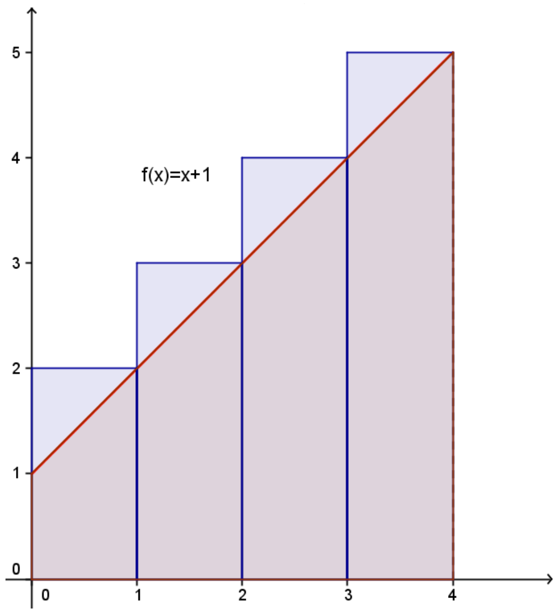


Figura 15: Função Afim

E, para a divisão da região em oito partes, segue que:

1. Aproximação por baixo - Figura 16

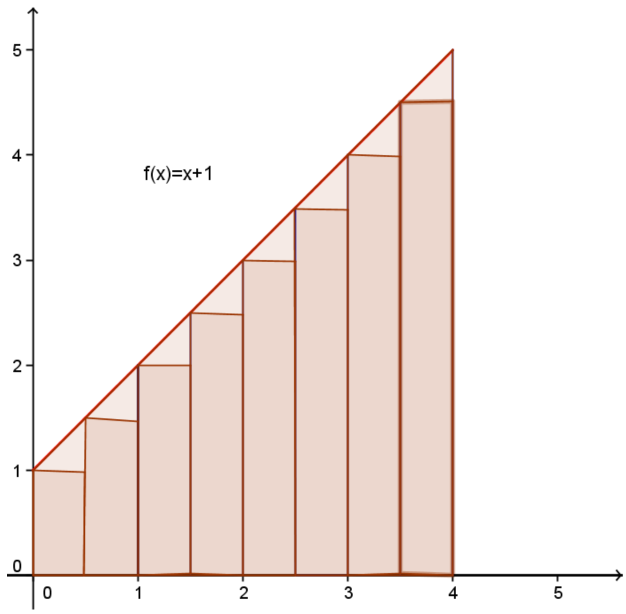


Figura 16: Função Afim

Quando efetuamos oito divisões na região, os retângulos formados terão $\frac{1}{2}$ de base e suas alturas serão variáveis de acordo com o extremo de menor valor do intervalo. Assim:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2}\\
&= \frac{1}{2}+\frac{3}{4}+1+\frac{5}{4}+\frac{3}{2}+\frac{7}{4}+2+\frac{9}{4}\\
&= 2+6+3\\
&= 11
\end{aligned}$$

2. Aproximação por cima - Figura 17

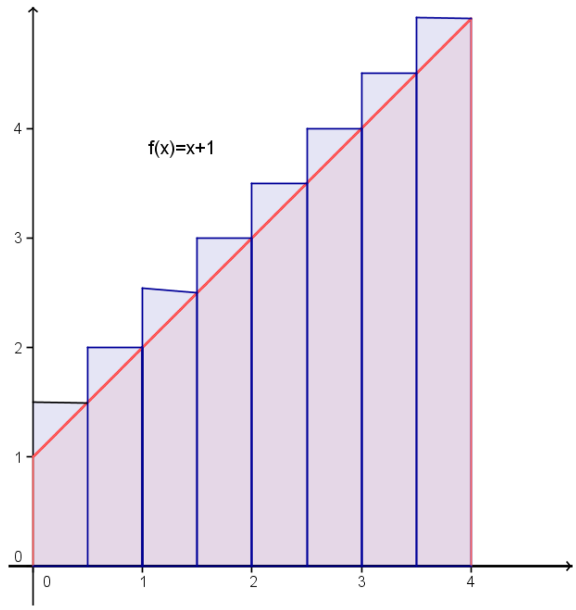


Figura 17: Função Afim

Na aproximação por cima, quando a área da região está dividida em oito partes, temos que os retângulos têm base $\frac{1}{2}$ e alturas variáveis de acordo com o extremo maior do intervalo da divisão. Assim, segue que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\cdot 5\\
&= \frac{3}{4}+1+\frac{5}{4}+\frac{3}{2}+\frac{7}{4}+2+\frac{9}{4}+\frac{5}{2}\\
&= 6+3+4\\
&= 13
\end{aligned}$$

Com esta outra divisão, obtemos que o valor da área está entre 11 e 13.

Neste caso, particularmente, a área é 12. Pois, ela nada mais é que a soma de um retângulo de base 4 e altura 1 com um triângulo de base 4 e altura 4 (Veja figura 18).

Desse modo, $\mathcal{A} = 4\cdot 1+\frac{4\cdot 4}{2} = 4+8 = 12.$

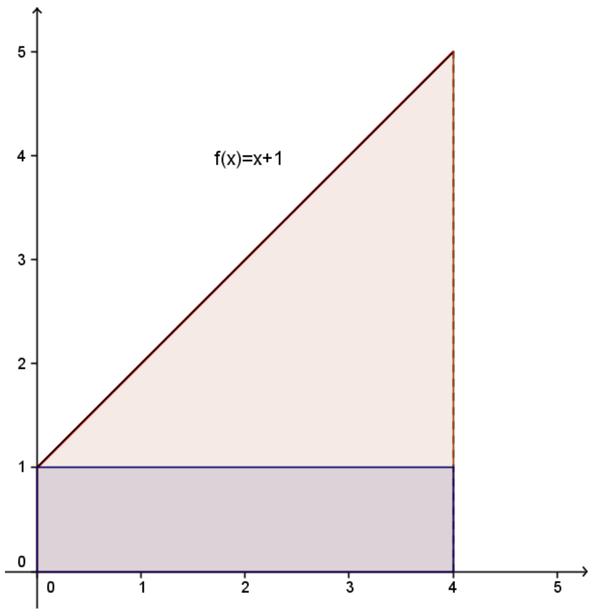


Figura 18: Função Afim

Podemos perceber que quanto maior for o número de retângulos melhor fica a aproximação do valor da área.

Exemplo 2.17. Área de uma região definida pelo gráfico de $g(x) = x^2$ no intervalo $[0, 4]$ e pelo eixo x

Para o cálculo da área da região, vamos dividí-la em duas, quatro e oito outras regiões, a fim de que o valor da área procurada se torne mais próximo possível do valor exato.

Quando dividimos a região em duas, temos:

1. Aproximação por baixo - Figura 19

   Aproximando por baixo a área da região quando ela está dividida em duas partes, temos que:

   $$\mathcal{A} = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = 0 + 8 = 8$$

2. Aproximação por cima - Figura 20

   Aproximando por cima a área da região quando efetuamos duas divisões, segue que:

   $$\mathcal{A} = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 16 = 8 + 32 = 40$$

Neste caso temos que o valor da área é maior que 8 e menor que 40.

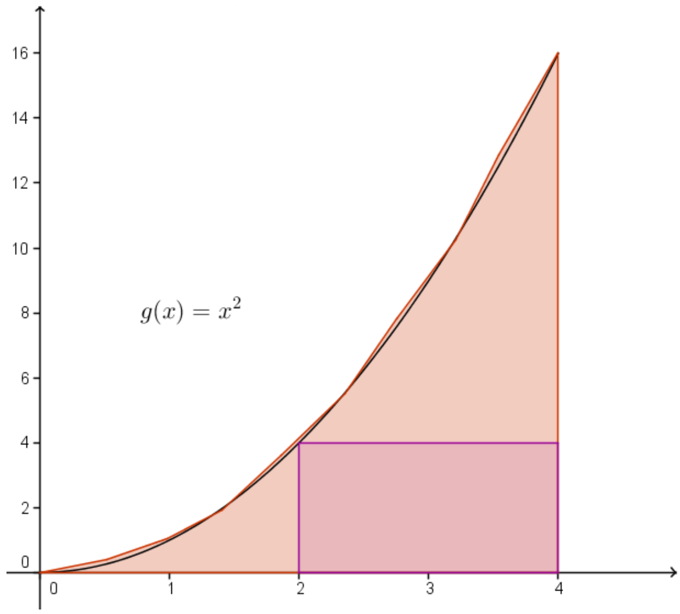


Figura 19: Função Quadrática

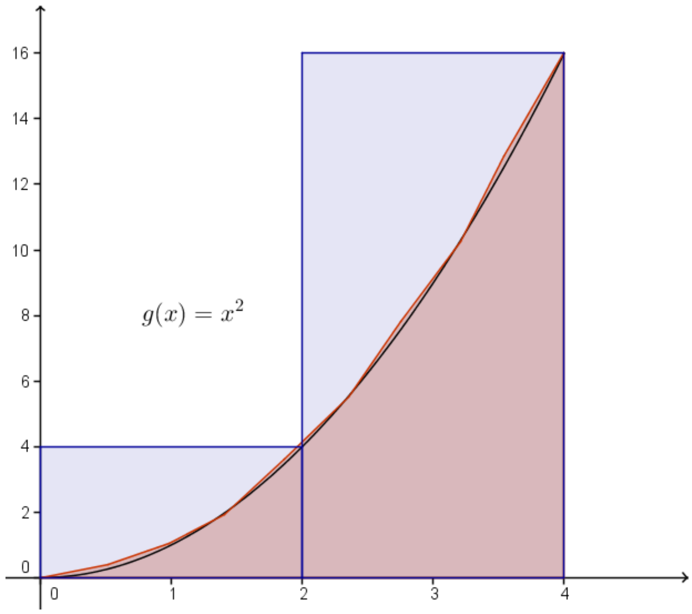


Figura 20: Função Quadrática

Fazendo agora a divisão do intervalo em quatro partes, segue que:

1. Aproximação por baixo - Figura 21

   Considerando quatro divisões na região, temos que sua área pode ser aproximada por baixo, pela área de quatro retângulos de base 1 e alturas variáveis de acordo com o valor da função no menor extremo do intervalo. Deste modo, temos:

$$\mathcal{A} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 9 = 0 + 1 + 4 + 9 = 14$$

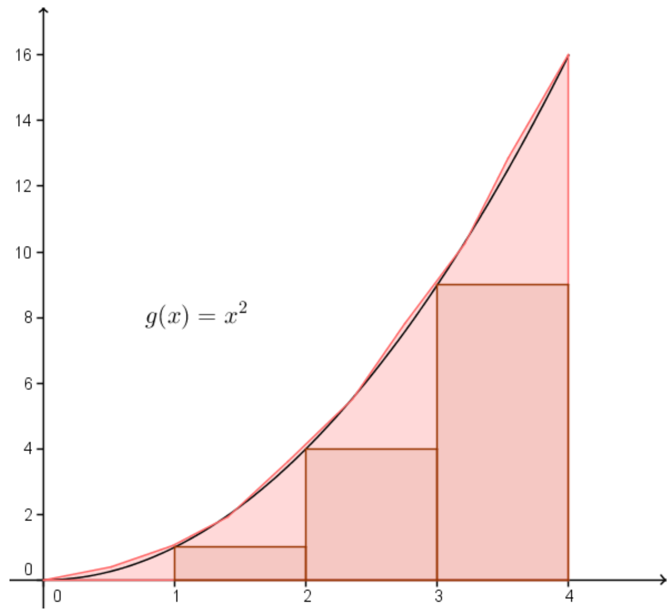


Figura 21: Função Quadrática

2. Aproximação por cima - Figura 22

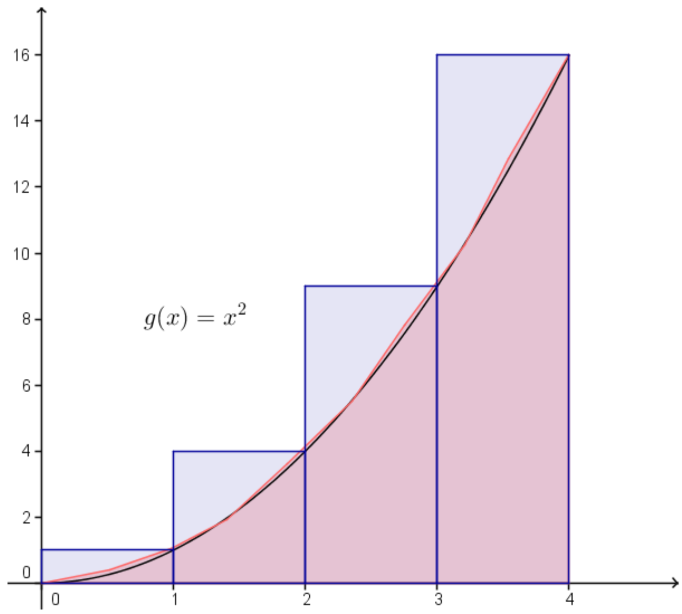


Figura 22: Função Quadrática

Ao efetuarmos quatro divisões na região e, considerarmos a aproximação por cima, segue que:

$$\mathcal{A} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 9 + 1 \cdot 16 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

Vimos aqui que o valor da área está entre 14 e 30.

Agora, considerando oito divisões na região, temos que:

1. Aproximação por baixo - Figura 23

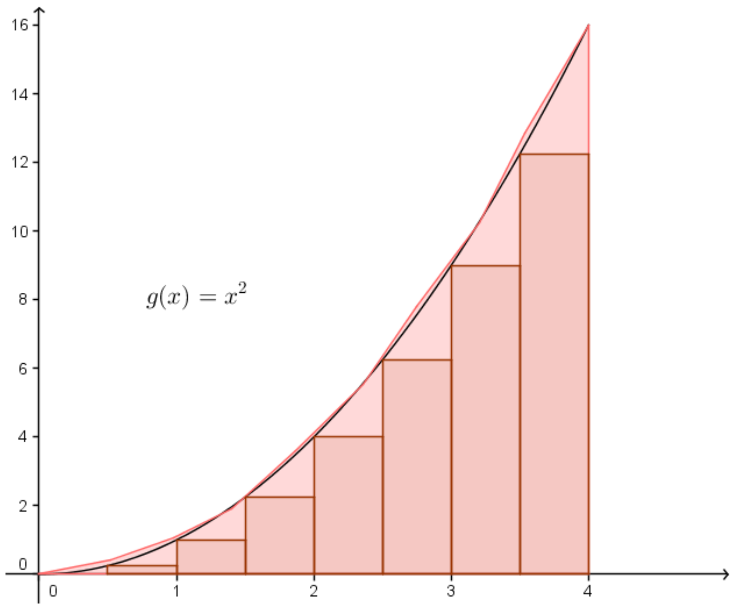


Figura 23: Função Quadrática

Na aproximação por baixo, temos oito retângulos de base $\frac{1}{2}$ e alturas variáveis. E a área procurada se aproxima da soma das áreas desses oito retângulos. Sendo assim, temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot 9+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^2\\ &= 0+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{9}{8}+2+\frac{25}{8}+\frac{9}{2}+\frac{49}{8}\\ &= \frac{84}{8}+7\\ &= 17,5\end{aligned}$$

2. Aproximação por cima - Figura 24

Ao efetuarmos oito divisões e considerarmos a aproximação por retângulos acima do gráfico da função que determina a região, segue que:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot 9+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot 16\\ &= \frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{9}{8}+2+\frac{25}{8}+\frac{9}{2}+\frac{49}{8}+8\\ &= \frac{84}{8}+15\\ &= 25,5\end{aligned}$$

Agora, vimos que o valor da área está entre 17,5 e 25,5.

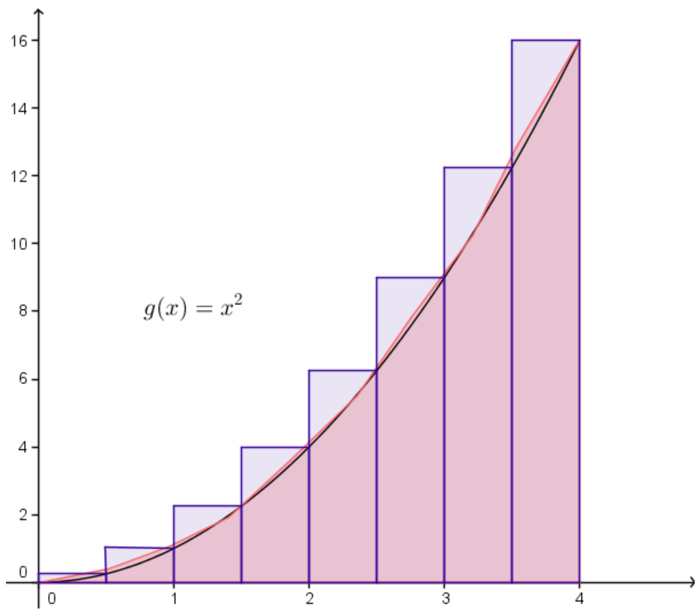


Figura 24: Função Quadrática

Exemplo 2.18. Área da região delimitada pelo gráfico $h(x) = 2^x$ no intervalo $[0, 4]$, pelo eixo x, pelo eixo y e pela reta $x = 4$

Para calcularmos uma aproximação da área da região definida pelo gráfico da função $h(x) = 2^x$, no intervalo $[0, 4]$, vamos dividi-la em duas, quatro e oito partes e, em cada uma delas, faremos a aproximação por retângulos abaixo e acima do gráfico da função.

Começaremos com a divisão da área em duas partes:

1. Aproximação por baixo - Figura 25

   Para essa aproximação, temos o valor a seguir:

$$\mathcal{A} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 2 + 8 = 10$$

2. Aproximação por cima - Figura 26

   Para duas divisões da área da região, usando aproximação por cima, obtemos:

$$\mathcal{A} = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 16 = 8 + 32 = 40$$

Temos que, neste caso, o valor da área está entre 10 e 40.

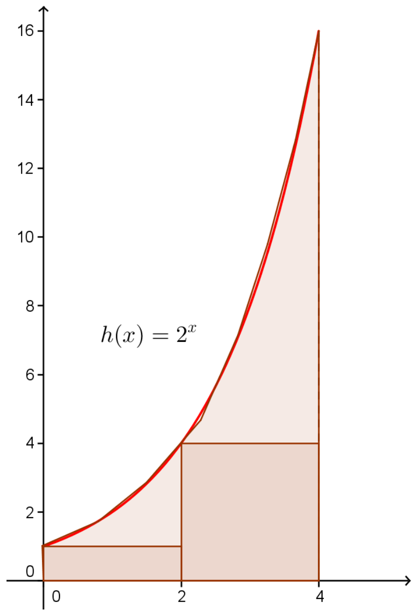


Figura 25: Função Exponencial

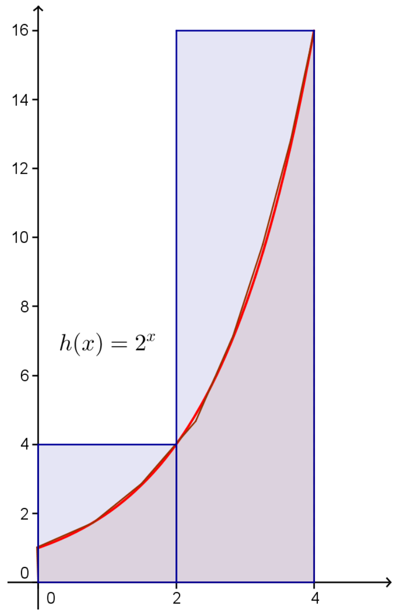


Figura 26: Função Exponencial

Agora, vamos calcular uma aproximação da área quando a região é dividida em quatro partes.

1. Aproximação por baixo - Figura 27

   Na divisão da região em quatro partes, podemos formar quatro retângulos de base 1 e altura variável de acordo com o extremo de menor valor do intervalo da região. Sendo assim, a aproximação da área é dada por:

$$\mathcal{A} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 8 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$$

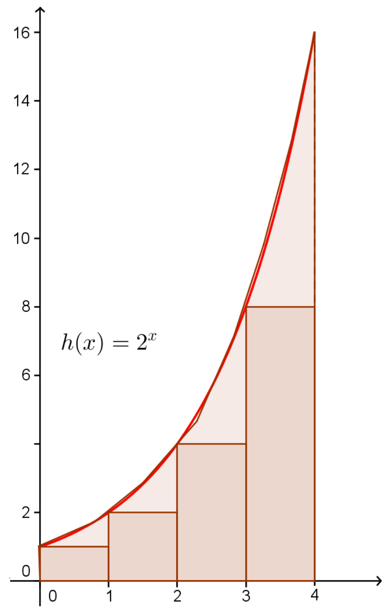


Figura 27: Função Exponencial

2. Aproximação por cima - Figura 28

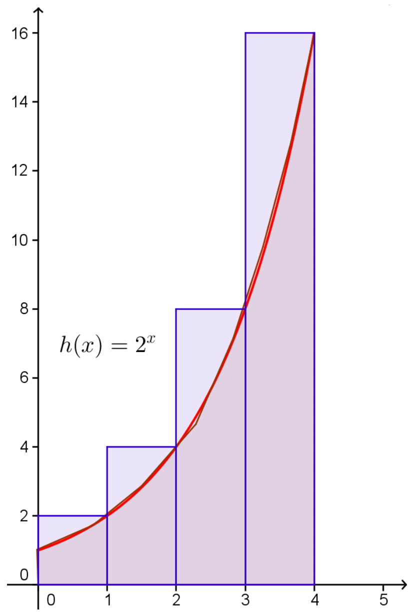


Figura 28: Função Exponencial

Já, na aproximação por cima, vamos considerar as alturas variáveis de acordo com o extremo de maior valor do intervalo de divisão. Logo,

$$\mathcal{A} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 16 = 2 + 4 + 8 + 16 = 30$$

Vimos aqui que o valor da área é maior que 15 e menor que 30.

Agora, vamos considerar a região dividida em oito partes.

1. Aproximação por baixo - Figura 29

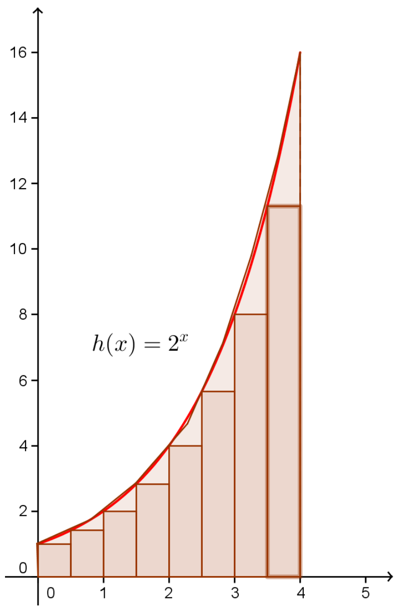


Figura 29: Função Exponencial

Ao efetuarmos oito divisões e aproximarmos a área da região pela soma de áreas de retângulos considerados abaixo do gráfico da função, temos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{2}\cdot 8+\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{7}{2}}\\
&= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+1+\frac{2\cdot\sqrt{2}}{2}+2+\frac{4\cdot\sqrt{2}}{2}+4+\frac{8\cdot\sqrt{2}}{2}\\
&= \frac{15}{2}+\frac{15\cdot\sqrt{2}}{2}\\
&\cong 18,11
\end{aligned}$$

2. Aproximação por cima - Figura 30

Ao efetuarmos oito divisões e aproximarmos a área da região pela soma de áreas de retângulos considerados acima do gráfico da função, vamos obter:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{2}\cdot 8+\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{7}{2}}+\frac{1}{2}\cdot 16\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}+1+\frac{2\cdot\sqrt{2}}{2}+2+\frac{4\cdot\sqrt{2}}{2}+4+\frac{8\cdot\sqrt{2}}{2}+8\\
&= \frac{30}{2}+\frac{15\cdot\sqrt{2}}{2}\\
&\cong 25,61
\end{aligned}$$

Com oito divisões a nossa aproximação ficou melhor, o valor da área está entre 18,11 e 25,61.

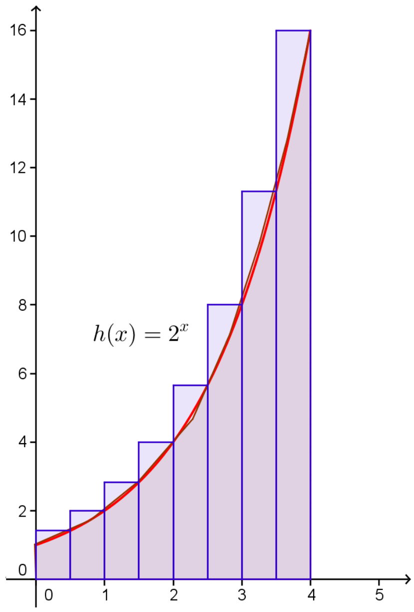


Figura 30: Função Exponencial

E, com esses cálculos, percebemos que fazendo a aproximação da área por retângulos, a medida que o número de retângulos aumenta a área se aproxima mais de 21.

Exemplo 2.19. Área da região delimitada pelo gráfico da função $i(x) = logx$ no intervalo $[1, 10]$, pelo eixo x e pela reta $x = 10$

Para obtermos uma aproximação da área definida pelo gráfico da função $i(x) = logx$, no intervalo $[1, 10]$, vamos dividir a região em três e nove partes, formando assim, para cada divisão, três retângulos diferentes.

Começaremos com a divisão da região em três partes.

1. Aproximação por baixo - Figura 31

   Considerando a região dividida em três partes e os retângulos formados abaixo do gráfico da função, temos:

$$\mathcal{A} = 3 \cdot 0 + 3 \cdot log4 + 3 \cdot log7 \cong 4,34$$

2. Aproximação por cima - Figura 32

   Na aproximação por cima da região, vamos considerar os retângulos formados acima do gráfico da função. Assim,

$$\mathcal{A} = 3 \cdot log4 + 3 \cdot log7 + 3 \cdot 1 \cong 7,34$$

Para esse quantidade de retângulos o valor da área está entre 4,34 e 7,34.

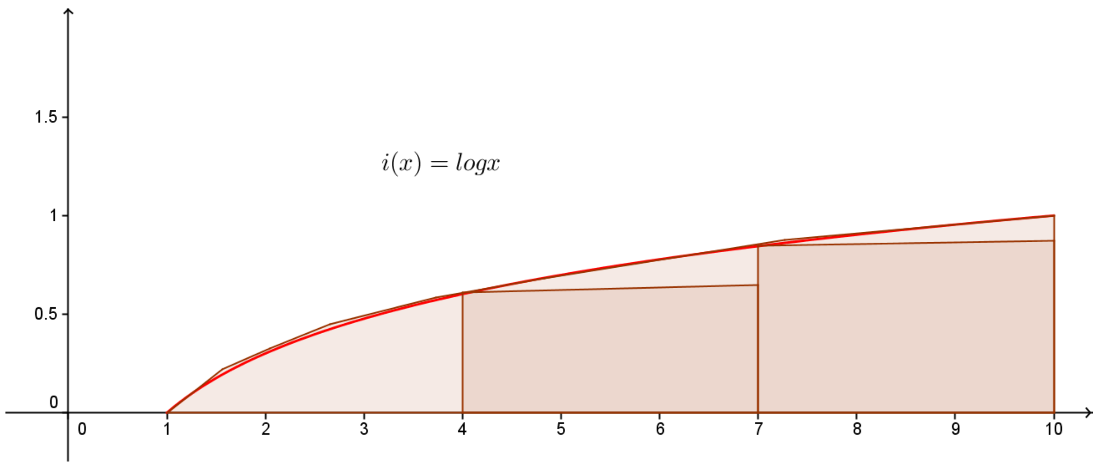


Figura 31: Função Logarítmica

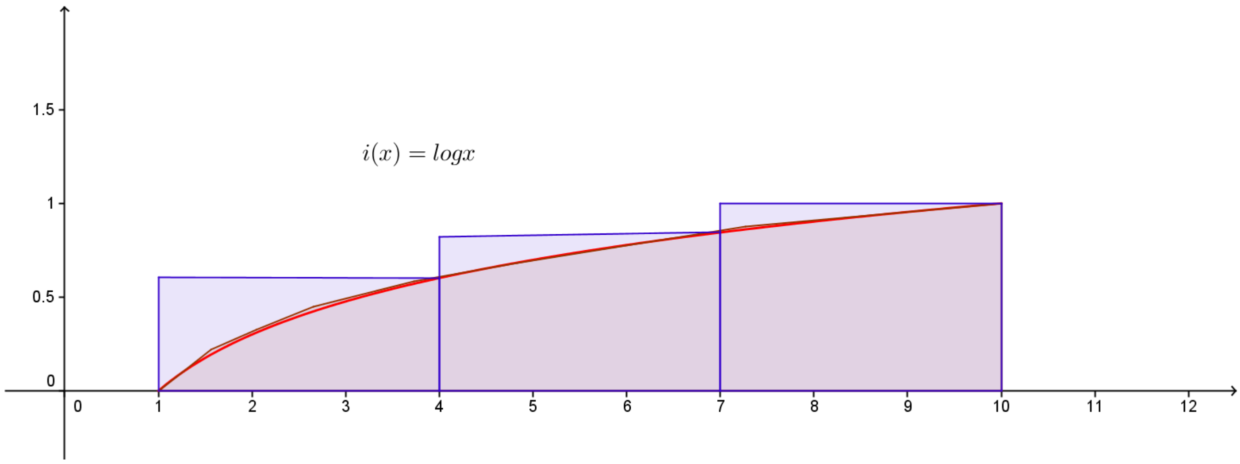


Figura 32: Função Logarítmica

Considerando agora a região dividida em nove partes, segue que:

1. Aproximação por baixo - Figura 33

   Como dividimos a região em nove partes, podemos formar nove retângulos de base 1 e alturas variáveis de acordo com o menor valor extremo do intervalo. Sendo assim, a área pode ser aproximada por baixo por:

   $\mathcal{A} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot log2 + 1 \cdot log3 + 1 \cdot log4 + 1 \cdot log5 + 1 \cdot log6 + 1 \cdot log7 + 1 \cdot log8 + 1 \cdot log9 \cong 5,56$

2. Aproximação por cima - Figura 34

   Considerando, agora, a região dividida em nove partes e tomando os retângulos formados acima do gráfico, temos:

   $\mathcal{A} = 1 \cdot log2 + 1 \cdot log3 + 1 \cdot log4 + 1 \cdot log5 + 1 \cdot log6 + 1 \cdot log7 + 1 \cdot log8 + 1 \cdot log9 + 1 \cong 6,56$

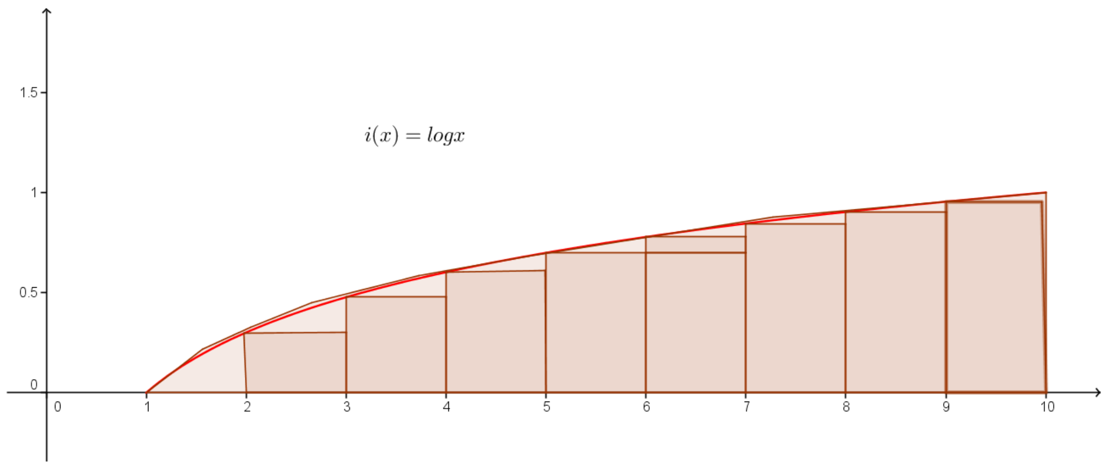


Figura 33: Função Logarítmica

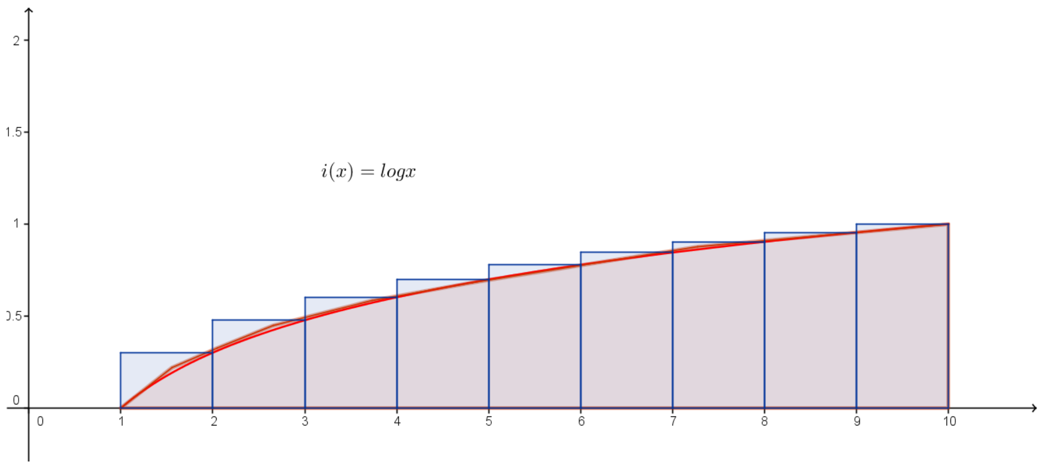


Figura 34: Função Logarítmica

Com uma quantidade maior de retângulos, teremos uma aproximação melhor do valor da área que agora está entre 5,56 e 6,56.

Para o gráfico de outras funções $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ podemos calcular uma aproximação da área entre o gráfico e o eixo x do mesmo modo feito anteriormente.

Caso tenhamos a função $f(x)$ negativa, ou seja, seu gráfico esteja abaixo do eixo x, podemos calcular uma aproximação da área entre o eixo x e o gráfico da função, usando retângulos, tomando a altura dos retângulos como módulo dos valores da função.

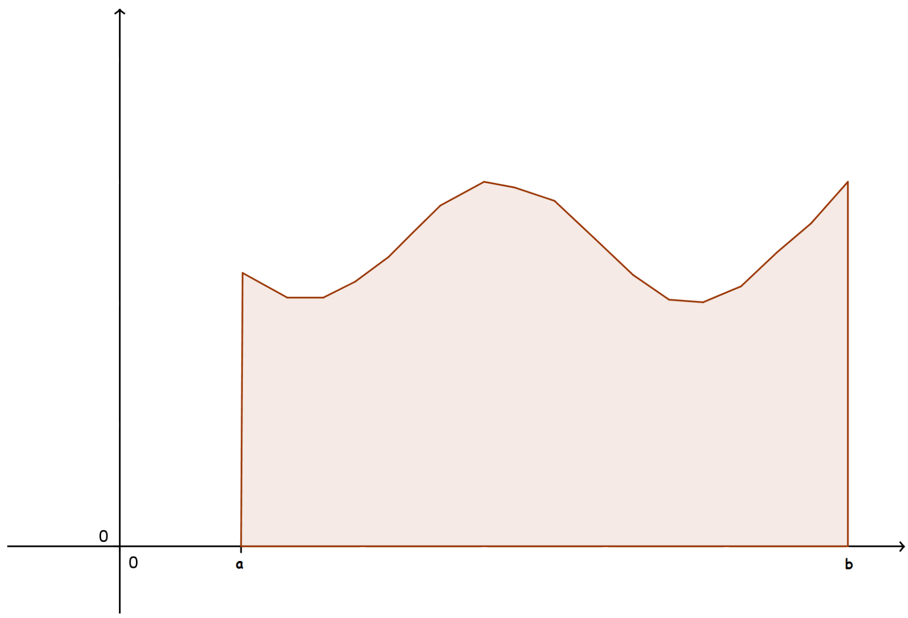


Figura 35: Área de uma região qualquer

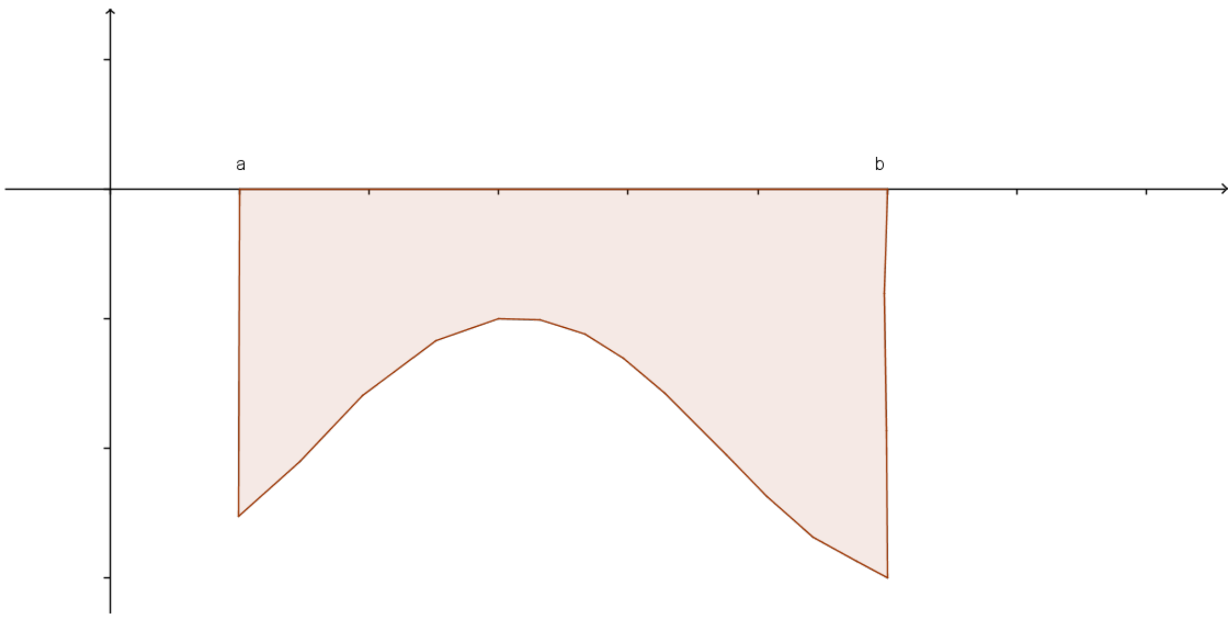


Figura 36: Área de uma região qualquer abaixo do eixo x

2.5 QUARTA ETAPA

Essa é a etapa na qual os próprios alunos desenvolverão o método visto anteriormente. Sugerimos, a seguir, algumas figuras para que eles possam desenvolver o método e chegar a um valor aproximado das áreas das regiões.

1. Área da região delimitada pelo gráfico da função $f(x) = x - 1$ aplicada no intervalo $[1, 5]$ e o eixo x - Figura 37

   Espera-se que o aluno chegue em valores próximos a 8 para a aproximação da área. Neste caso, particularmente, não é uma aproximação, é o valor exato, pois a área na verdade é a área de um triângulo de base 4 e altura 4.

2. Área da região delimitada pelo gráfico da função $g(x) = x^2 + 1$ aplicada no intervalo $[0, 3]$ e o eixo x - Figura 38

   Nesse exemplo, o valor encontrado pelo aluno deve estar próximo de 12.

3. Área da região delimitada pelo gráfico da função $h(x) = 2^x - 1$ no intervalo $[0, 2]$ e o eixo x - Figura 39

   Aqui, o aluno deverá encontar uma aproximação de área em torno de $2, 3$.

4. Área de uma região delimitada pelo gráfico da função $i(x) = log_2 x$ no intervalo $[2, 16]$ e o eixo x - Figura 40

   Neste último exemplo sugerido, espera-se que o aluno chegue a um valor próximo de 41,80.

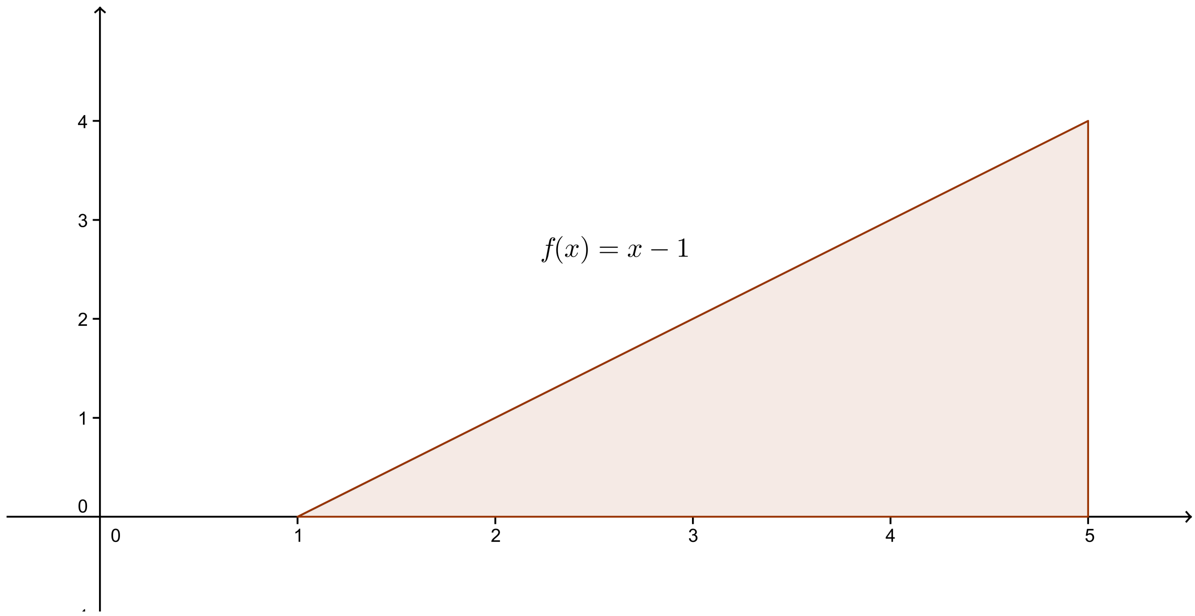


Figura 37: Exemplo 1

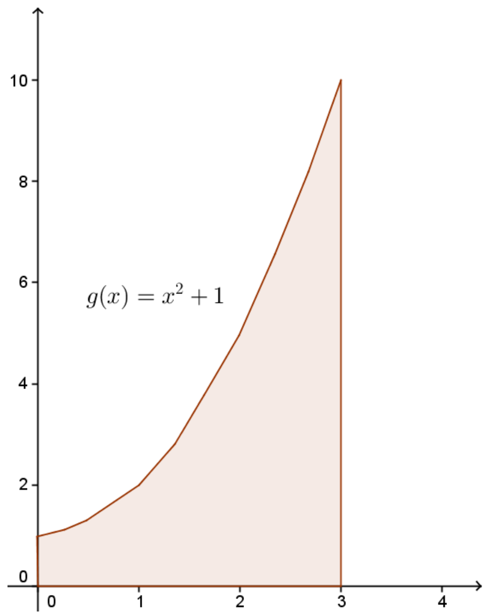


Figura 38: Exemplo 2

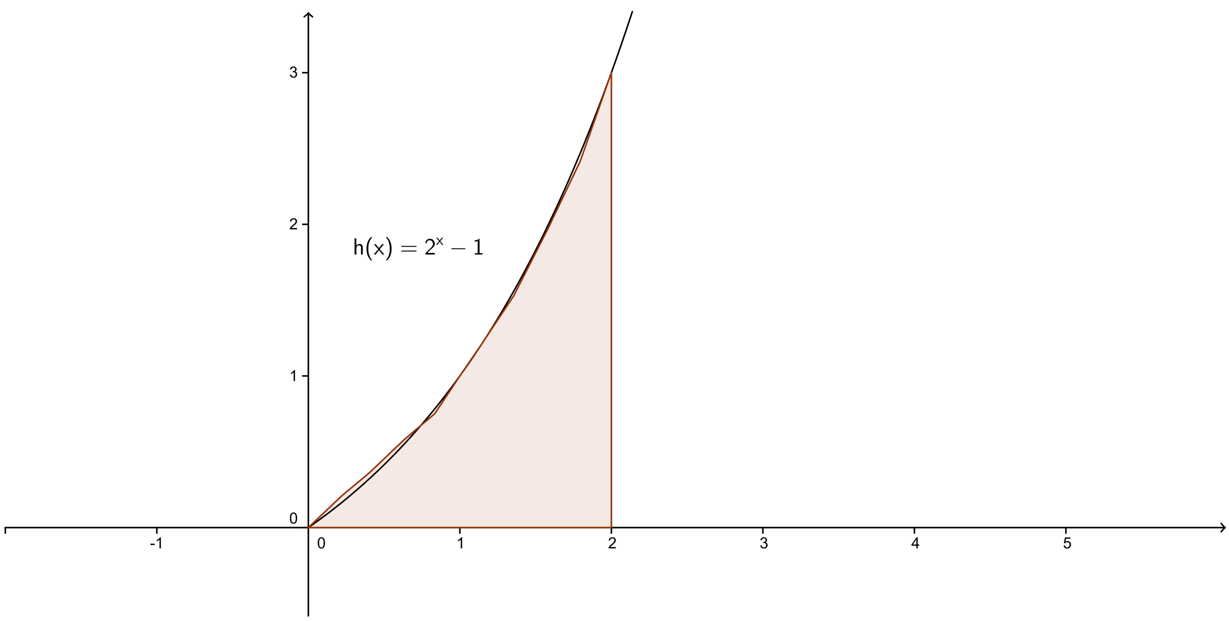


Figura 39: Exemplo 3

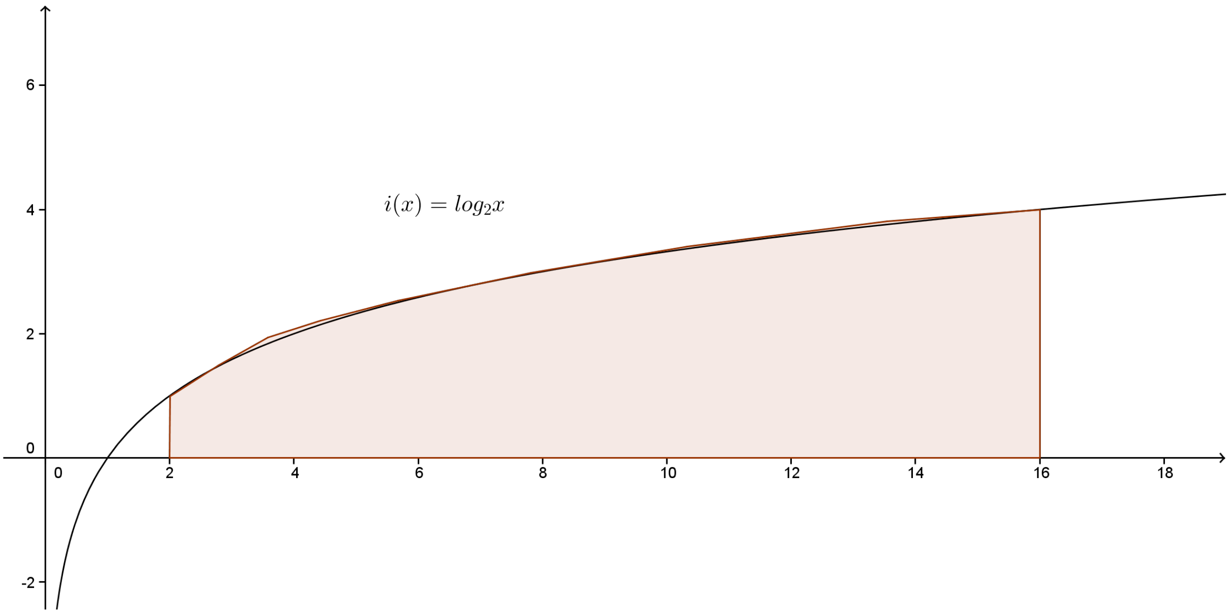


Figura 40: Exemplo 4

3 BASE TEÓRICA

Neste capítulo vamos colocar a base teórica para o desenvolvimento do trabalho, abordando a teoria de cálculo usada no cálculo de aproximação de áreas.

Neste capítulo foram usados resultados de [5], [6], [7] e [9].

3.1 CÁLCULO DE ÁREAS - INTEGRAIS

A teoria a seguir é a encontrada em livros de cálculo e análise, como, por exemplo, em [5]. Ela servirá de base teórica para os professores que irão desenvolver a atividade.

Começaremos com as definições de sequência e limite de uma sequência.

Definição 3.1. Sequência de número real

De acordo com [6], p. 22, "Uma *sequência* de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número real n um número real x_n, chamado o *n-ésimo termo* da sequência."

Ainda em consonância com [6], p.23, temos a seguinte definição de limite de sequência.

Definição 3.2. Limite de uma sequência

Diz-se que o número real a é *limite* da sequência x_n, quando para todo real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n com índice $n > n_0$ cumprem a condição $|x_n - a| < \varepsilon$. Escreve-se então $a = \lim x_n$.

Em consonância com as definições apresentadas acima, temos os conceitos de limite de função e integral, abordados em [9], no capítulo 3, p. 4 e no capítulo 17, p. 5. Vejamos:

Definição 3.3. Limite de uma função

Sejam $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, onde D é o domínio de f, $a \in \mathbb{R}$ tal que todo intervalo aberto contendo a intersecta $D \setminus \{a\}$ e $l \in \mathbb{R}$. Diz-se que $f(x)$ tende para l quando x tende para a, e escreve-se

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, (lê-se: limite de $f(x)$ quando x tende para a é igual a l) quando para toda sequência (x_n) de elementos de $D \setminus \{a\}$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, tem-se $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$.

Definição 3.4. Partições do intervalo $[a,b]$

Seja $[a,b]$ um intervalo fechado e limitado da reta. Chamamos uma partição P de $[a,b]$ um conjunto finito de pontos $x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n$, ordenado da seguinte forma:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Note que uma tal partição divide o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos $[x_{n-1}, x_n]$. Cada um destes subintervalos tem comprimento $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e a soma destes comprimento é igual a $b-a$, o comprimento do intervalo original:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + ... + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = b - a$$

Chamamos *norma* da partição P o comprimento do seu subintervalo mais longo:

$$||P|| = max\{\Delta x_i; i = 1, 2, ..., n\}.$$

Definição 3.5. Somas de Riemann

Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no intervalo fechado e limitado $[a,b]$ e seja P uma partição de $[a,b]$. Para cada $i = 1, 2, ..., n$, escolhemos um ponto $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Definimos a *Soma de Riemann* de f, relativa à partição P e à escolha dos pontos c_i por

$$S(f,P) := \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \bigtriangleup x_i.$$

Definição 3.6. Integral Definida

A integral definida da função $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é o *limite* das suas Somas de Riemann quando as normas das partições tendem à zero:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{||P|| \to 0} S(f,P).$$

Posto as definições acima, de acordo com [5], capítulo 5, p. 328, temos que:

Definição 3.7. Área de uma região R

Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a,b]$. Seja R a região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. Então, a medida $\mathcal{A}$ da área da região R é dada por

$$\mathcal{A} = \lim_{||\Delta x|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x \Longleftrightarrow \mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx$$

De acordo com a teoria formal vista, podemos calcular a área das quatro regiões apresentadas na seção 2.3.1.

Exemplo 3.8. Área da região definida por uma função afim

A primeira área é definida no intervalo $[0,4]$, pela função $f(x) = x + 1$. Então, temos:

$$\mathcal{A} = \int_0^4 (x+1)dx = \left.\frac{(x+1)^2}{2}\right|_0^4 = \frac{25}{2} - \frac{1}{2} = 12$$

Exemplo 3.9. A segunda área é definida no intervalo $[0,4]$, pela função $g(x) = x^2$. Sendo assim, temos:

$$\mathcal{A} = \int_0^4 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^4 = \frac{64}{3} \cong 21,34$$

Exemplo 3.10. A terceira região é definida pelo gráfico da função $h(x) = 2^x$, no intervalo $[0,4]$. E seu valor é dado por:

$$\mathcal{A} = \int_0^4 2^x dx = \left.\left(\frac{1}{ln2}.2^x\right)\right|_0^4 = \frac{16}{ln2} - \frac{1}{ln2} \cong 21,64$$

Exemplo 3.11. A quarta e última região é definida pelo gráfico da função $i(x) = logx$, no intervalo $[1,10]$. Sendo assim, o valor de sua área é dado por:

$$\mathcal{A} = \int_1^{10} logxdx = \left.\left[\frac{1}{ln10}(xlnx - x)\right]\right|_1^{10} \cong 6,09$$

REFERÊNCIAS

[1] BARBOSA, JOÃO LUCAS MARQUES. **Geometria Euclidiana Plana** - Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[2] DOLCE, OSVALDO; POMPEO, JOSÉ NICOLAU. **Fundamentos de Matemática Elementar** - Volume 9. São Paulo: Atual, 1993.

[3] IEZZI, GELSON; MURAKAMI, CARLOS; MACHADO, NILSON JOSÉ. **Fundamentos de Matemática Elementar** - Volume 8. São Paulo: Atual, 2005.

[4] IEZZI, GELSON; DOLCE, OSVALDO; DEGENSZANJN, DAVID; PÉRIGO, ROBERTO. **Matématica:** volume único. São Paulo: Atual, 2011.

[5] LEITHOLD, LOUIS. **O Cálculo com Geometria Analítica** - Volume 1. São Paulo: Harbra, 1994.

[6] LIMA, ELON LAGES. **Análise Real** - Volume 1. Rio de Janeiro: IMPA, CNPq, 1989.

[7] MUNIZ NETO, ANTONIO CAMINHA. **Notas de Geometria**, a ser publicado pela SBM. (PROFMAT)

[8] MUNIZ NETO, ANTONIO CAMINHA. **Tópicos de Matemática Elementar:** geometria euclidiana plana - Volume 2. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[9] Notas de Fundamentos de Cálculo preparadas por A. Hefez, L.M.Figueiredo, com a colaboração de P. Gusmão. (PROFMAT)

[10] WAGNER, EDUARDO. **Teorema de Pitágoras e Áreas**. Apostila PIC 2012, disponível em <http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos/296653.o>. Acesso em 01 de março de 2013.

APÊNDICE

Aqui estão as fotos dos materiais confeccionados em EVA sugeridos como auxílio na aplicação da atividade descrita.

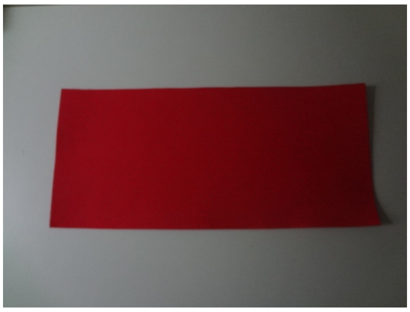


Figura 41: Retângulo

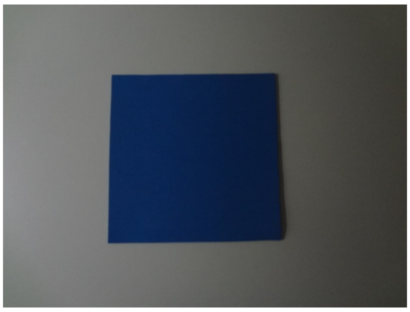


Figura 42: Quadrado

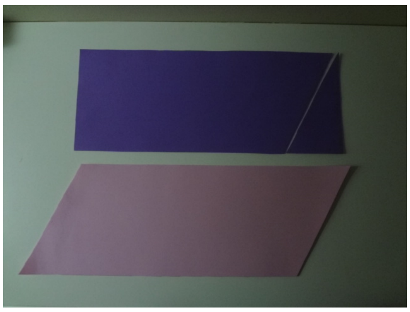


Figura 43: Paralelogramo

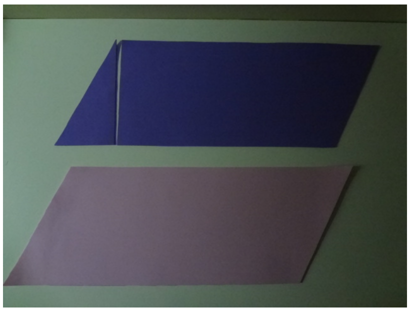


Figura 44: Paralelogramo

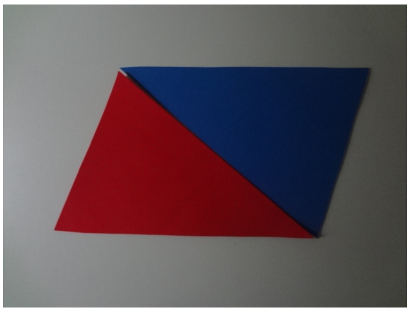


Figura 45: Triângulo

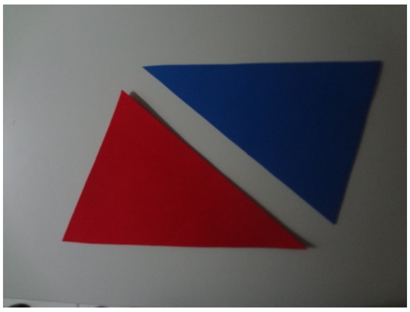


Figura 46: Triângulo

Figura 47: Trapézio

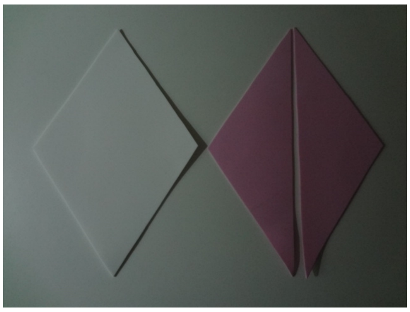


Figura 48: Losango