

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Cristiano de Souza Vieira

**Condições necessárias e suficientes para que um
quadrilátero convexo seja um trapézio**

Santo André - SP
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

Condições necessárias e suficientes para que um quadrilátero convexo seja um trapézio

Cristiano de Souza Vieira
Orientador: Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva

Dissertação apresentada junto ao Programa de
Mestrado Profissional em Matemática da Univer-
sidade Federal do ABC, para obtenção do Título
de Mestre em Matemática.

Santo André - SP
Agosto de 2014.

Condições necessárias e suficientes para que um quadrilátero convexo seja um trapézio

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Cristiano de Souza Vieira e aprovada pela comissão julgadora.

Santo André, 27 de Agosto de 2014.

Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva
Orientador

Banca examinadora:

1. Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva (Orientador) - UFABC
2. Prof. Dr. Antônio Cândido Faleiros
3. Prof. Dr. Armando Traldi Júnior

Dissertação apresentada junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da UFABC, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Declaração de atendimento às observações

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, 17 de Outubro de 2014.

Cristiano de Souza Vieira
Autor

Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva
Orientador

Dedico este trabalho ao amigo Adamastor Amado Stoffel, por se tratar de um indivíduo que, detentor de tamanha sabedoria, jamais fazia uso da mesma com o intuito de humilhar aos demais, mas, com toda sua simplicidade, sempre aproveitou qualquer oportunidade de compartilhar seus conhecimentos. Com sua fala serena me ensinou, entre outras coisas, a jamais tratar os humildes com arrogância e nem os arrogantes com humildade. Tamanho é o orgulho que sinto em ter sido objeto de sua admiração, tratando-me como mestre quando eu não o era, e continuaria a tratar-me como tal, ainda que este título eu não conquistasse.

Agradecimentos

Apesar da possibilidade de se cometer injustiças ao listar pessoas que contribuíram de alguma forma para a conclusão deste curso, em função do esquecimento de alguns, não posso deixar de expressar minha gratidão a:

- Professor Márcio Fabiano da Silva, por ser um exemplo de professor a ser seguido, com dedicação, competência, responsabilidade e comprometimento. Não há palavras que expressem todo meu agradecimento e nem a tamanha honra que tive em adquirir parte de seu conhecimento;
- Renilze Geiss de Almeida, bem mais que amiga, por ter feito de sua casa a extensão da minha, onde pude encontrar paz e sossego por tantas vezes, desde os estudos de preparação para o Exame Nacional de Acesso até boa parte da elaboração deste trabalho;
- Willams Júnior Oliveira Andrade, grande amigo, pelos inúmeros momentos de apoio e incentivo, acreditando sempre no meu sucesso, assim como eu acredito no seu;
- Amigos de curso, por compartilharem seus conhecimentos. Em especial a Laércio Sangioratto pelo companheirismo e a Marcelo Melo Fernandes que, com sua serenidade nos momentos mais difíceis, tornou possível que nosso grupo de estudos permanecesse unido por tanto tempo;
- Elizabeth Vieira Kuhn, mãe. Querer ser objeto de seu orgulho sempre me motivou a estudar mais e mais.

Resumo

Baseados no artigo de M. Josefsson, fizemos nossos estudos dos quadriláteros convexos, mais precisamente dos trapézios, e buscamos por fundamentações que os caracterizassem. Estudamos seus ângulos, seus lados, as medidas de suas áreas e estabelecemos relações entre seus elementos, lançando mão de diversos teoremas, como o Postulado de Pasch, mas nossa principal fundamentação está no Postulado das Paralelas.

Palavras-Chave

Trapézios, Quadriláteros convexos.

Abstract

Based on the paper of M. Josefsson we have elaborated our studies on the convex quadrilaterals, more precisely the trapezoids, and searched for foundations which would characterize them. We have studied their angles, their sides, their areas and established relations to their elements, making use of several theorems as the Pasch's Postulate, however, our main foundation is on the Parallel Postulate.

Keywords

Trapezoids, Convex quadrilaterals.

Sumário

1	Resultados Preliminares	4
2	Caracterizações Fundamentais	16
2.1	Caracterizações dos trapézios envolvendo trigonometria	17
2.2	Caracterizações dos trapézios envolvendo áreas	20
2.3	Caracterizações que envolvem lados e distâncias	25
3	Proposta de Atividades	35
3.1	Questões	35
3.2	Proposta de Soluções	36
4	Considerações Finais	41
	Bibliografia	42

Lista de Figuras

0.1	Diagrama para a primeira definição	2
0.2	Diagrama para a segunda definição	2
1.1	Quadrilátero não convexo e quadrilátero convexo.	5
1.2	Ângulos alternos internos.	6
1.3	Soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer.	7
1.4	Ponto D pertencente à região interna de um ângulo.	8
1.5	Postulado de Pasch.	9
1.6	As diagonais de um quadrilátero convexo intersectam-se.	9
1.7	Ilustração do Teorema (1.2).	10
1.8	Ângulo externo de um triângulo.	11
1.9	Trapézio com A, B lo \overleftrightarrow{CD}	12
1.10	Trapézio $ABCD$	13
1.11	Trapézio e suas diagonais.	14
2.1	Ângulos correspondentes congruentes.	17
2.2	Trapézio com lados \overline{AB} e \overline{CD} não paralelos.	18
2.3	Bimediãna de um trapézio.	20
2.4	$S_1 + S_2 = S_3 + S_4$	21
2.5	Trapézio com bimediãna paralela às bases.	22
2.6	Quadrilátero convexo dividido em quatro triângulos pelas suas diagonais.	23
2.7	Produtos dos triângulos opostos de um quadrilátero convexo são iguais.	24
2.8	Caso 1.	26
2.9	Caso 2.	26

2.10	Caso 3.	27
2.11	Caso 4.	27
2.12	Ilustração auxiliar para o Lema (2.3).	29
2.13	Ilustração auxiliar para o Lema (2.4).	30
2.14	Ilustração para a demonstração da Proposição (2.4).	32
2.15	Mediana de Euler.	32
2.16	Diagonal p de um quadrilátero convexo $ABCD$	34
3.1	Ilustração para a questão 6	36
3.2	Ilustração 1 para a questão 1	37
3.3	Ilustração 2 para a questão 1	37
3.4	Ilustração para a questão 2	38
3.5	Ilustração para a questão 3	38
3.6	Ilustração para a questão 7	39
3.7	Ilustração para a questão 8	40

Introdução

Na busca de um tema para este trabalho de conclusão de curso e respeitando as normas do PROFMAT que determinam em seu capítulo VIII - TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO, Artigo 28: “*O Trabalho de Conclusão de Curso deve versar sobre temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática do Ensino Básico e que tenham impacto na prática didática em sala de aula*”, decidimos estudar a Geometria dos trapézios, que é um assunto muito abordado no Ensino Médio.

O ensino de Geometria vem sofrendo as consequências da exclusão da disciplina Desenho Geométrico dos currículos das escolas públicas, fato ocorrido na década de 90. Em Desenho Geométrico os alunos tinham a oportunidade de lidar na prática com os entes geométricos através de suas construções com régua e compasso, o que lhes permitiam maior familiaridade com tais entes. A exclusão de tal componente retirou dos alunos o aspecto prático da Geometria.

Neste trabalho, damos algumas caracterizações de trapézios, ou seja, condições necessárias e suficientes para que um quadrilátero convexo seja um trapézio. Muitas destas caracterizações são apresentadas nas aulas de Geometria no Ensino Básico como propriedades dos trapézios. Nem todas as ferramentas que usamos ao longo da dissertação são pertinentes aos alunos do Ensino Fundamental, mas são perfeitamente acessíveis aos alunos do Ensino Médio.

Este trabalho deve servir de inspiração para que outros entes geométricos sejam estudados de modo semelhante, buscando pelas fundamentações que os caracterizem, tornando o aprendizado mais consistente.

Esclarecemos que os autores de livros didáticos usam diferentes definições para “trapézio”. Os livros didáticos do Ensino Fundamental o definem como sendo um quadrilátero com *apenas* um par de lados opostos paralelos, enquanto que os livros do Ensino Médio o definem como sendo um quadrilátero com *pelo menos* um par de lados opostos paralelos. Particularmente, a obra “Matemática e Realidade”, de Gelson Iezzi e Antonio Machado, Atual Editora, São Paulo, 2005, define: *Trapézio é um quadrilátero que tem dois lados paralelos*. Outra definição é dada em [5], que adotamos em nosso trabalho. De acordo

com a primeira definição de trapézio, os paralelogramos não são trapézios, enquanto que, no segundo caso, os paralelogramos são trapézios.

Esquemáticamente, temos os seguintes diagramas que resumem a classificação dos quadriláteros convexos:

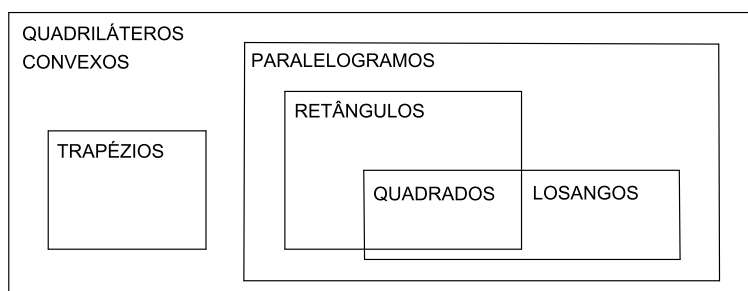


Figura 0.1: Diagrama para a primeira definição

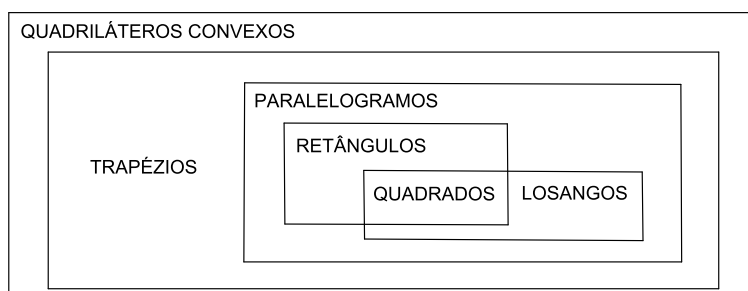


Figura 0.2: Diagrama para a segunda definição

Para o estudo dos trapézios, os seguintes fundamentos são necessários: paralelas, triângulos e seus ângulos, áreas de triângulos, ângulos complementares e suplementares, relações trigonométricas, semelhança de triângulos, entre outros.

Dividimos nosso trabalho em quatro capítulos. O segundo versa basicamente sobre as ferramentas que nos serão úteis na caracterização dos trapézios. O terceiro capítulo traz um conjunto de resultados com os quais os trapézios podem ser caracterizados. No último capítulo, apresentamos uma proposta de atividades para os alunos do Ensino Médio, a respeito dos resultados obtidos no capítulo anterior para os trapézios. Esperamos com esta

metodologia, oferecer aos professores da escola básica um material que possa auxiliá-los no ensino de seus alunos em relação às competências e habilidades geométricas.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Nosso objetivo principal neste trabalho é estabelecer condições necessárias e suficientes para que um quadrilátero convexo seja um trapézio. Uma destas condições será obtida adiante, no Teorema (1.5), página 13. Outras aparecerão ao longo do texto.

Começamos este capítulo apresentando alguns conceitos básicos da Geometria plana euclidiana sobre os quais nos fundamentaremos. Por exemplo, convexidade de quadrilátero, paralelismo e semelhança de triângulos. Indicamos como referência básica o livro de E. Moise [4], que apresenta um desenvolvimento axiomático da geometria plana neutra, destacando o papel do Postulado das Paralelas (Postulado (1.1), pág. 6) na geometria euclidiana, com o qual garante-se a unicidade de uma reta paralela a uma determinada reta passando por um ponto fora da reta dada. No nosso caso, admitiremos este postulado para alcançarmos nossos objetivos. Há algumas formas equivalentes para enunciá-lo, entretanto nós lançaremos mão de alguns conceitos, teoremas e definições para então estabelecermos a versão que tomaremos aqui.

A princípio trabalharemos com o conceito de convexidade de quadriláteros. Começamos definindo quadriláteros.

Definição 1.1. *Dados quatro pontos A, B, C e D coplanares, três a três não colineares, se os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DA} intersectam-se apenas em seus extremos, sua união é chamada **quadrilátero**.*

Definição 1.2. *Dada uma reta r , sejam H_1 e H_2 os semiplanos disjuntos determinados por r . Dizemos que os pontos A e B estão em lados opostos de r , e denotamos por A, B lo r , se $A \in H_1$ e $B \in H_2$ ou se $A \in H_2$ e $B \in H_1$. Dizemos que A e B estão no mesmo lado de r , e denotamos por A, B ml r , se $A \in H_1$ e $B \in H_1$ ou se $A \in H_2$ e $B \in H_2$.*

Definição 1.3. *Um quadrilátero é chamado **convexo**, se cada um de seus lados pertence ao mesmo semiplano determinado pelo lado oposto.*

Equivalentemente,

- A e B estão no mesmo semiplano determinado por \overleftrightarrow{CD} ;
- B e C estão no mesmo semiplano determinado por \overleftrightarrow{DA} ;
- C e D estão no mesmo semiplano determinado por \overleftrightarrow{AB} ;
- D e A estão no mesmo semiplano determinado por \overleftrightarrow{BC} .

Na figura (1.1), ilustramos um quadrilátero convexo $EFGH$ e um não convexo $ABCD$. Neste caso, A, B lo \overleftrightarrow{CD} .

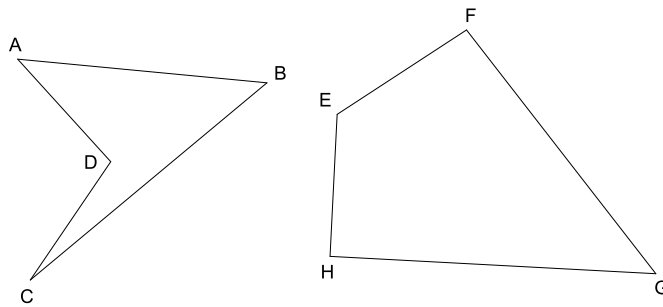


Figura 1.1: Quadrilátero não convexo e quadrilátero convexo.

Precisamos ainda de uma definição que será amplamente utilizada neste trabalho:

Definição 1.4. *Dois ângulos cuja soma seja igual a 180° são chamados **ângulos suplementares**.*

Daqui por diante usaremos as seguintes notações e representações nos elementos dos quadriláteros convexos:

- As medidas dos ângulos $\angle DAB, \angle ABC, \angle BCD$ e $\angle CDA$ do quadrilátero $ABCD$ serão denotados por $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ e \widehat{D} .
- $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ e \overline{DA} são os lados do quadrilátero $ABCD$;
- \overline{AC} e \overline{BD} são as diagonais do quadrilátero $ABCD$;
- Dois lados de uma quadrilátero $ABCD$ são adjacentes se sua intersecção ocorrer numa extremidade;
- Dois lados de um quadrilátero $ABCD$ são opostos se eles não se intersectam;

- Dois ângulos são adjacentes se eles possuem um lado comum;
- Dois ângulos de um quadrilátero $ABCD$ são opostos se eles não são adjacentes.

Em relação ao conceito de paralelismo de retas, admitimos a seguinte versão do Postulado das Paralelas:

Postulado 1.1. *Postulado das Paralelas.*

Por um ponto P não pertencente a uma dada reta r , passa uma única reta s paralela a r (fig.(1.2)).

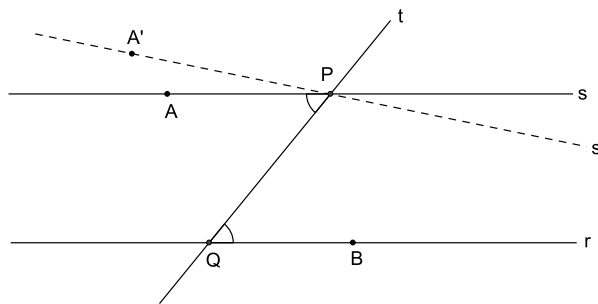


Figura 1.2: Ângulos alternos internos.

Também tomaremos por base o seguinte resultado, cuja prova é dada em [4], pág. 150.

Teorema 1.1. *Dadas duas retas e uma transversal, dois ângulos alternos internos são congruentes se as retas forem paralelas.*

A partir do Postulado das Paralelas temos as seguintes consequências:

- Dadas duas retas paralelas r e s e uma transversal t , os pares de ângulos alternos internos são congruentes;

Demonstração.

Sejam r e s duas retas paralelas e t a transversal comum a elas, de modo que $t \cap r = P$ e $t \cap s = Q$. Sejam A e B pontos tais que $A \in r$, $B \in s$, A, B lo t . Sejam r' uma reta que contém o ponto P e $A' \in r'$ com A', B lo t . Existe uma única reta r' por P para a qual os ângulos alternos internos são congruentes e, pelo Teorema 1.1, teremos $r' \parallel s$. Mas, como há uma única reta paralela a s por P , então $r' = r$ e $B\hat{Q}P \cong A\hat{P}Q$.

□

- Dadas duas retas e uma transversal, se as duas retas são paralelas, então os pares de ângulos correspondentes são congruentes (a demonstração é completamente análoga à anterior).
- Em qualquer triângulo $\triangle ABC$ temos $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180$ (fig. (1.3)).

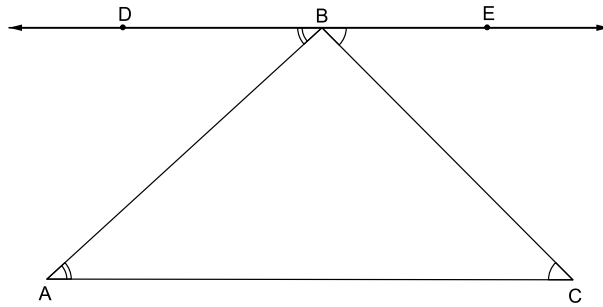


Figura 1.3: Soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer.

Demonstração.

Sejam $r \parallel \overline{AC}$ uma reta tal que $B, D, E \in r$ tais que $D - B - E$, isto é, B está entre D e E , de modo que D, A ml \overleftrightarrow{BC} . Então os ângulos $\angle DBC$ e $\angle CBE$ formam um par de ângulos suplementares.

Assim:

$$D\widehat{B}A + \widehat{B} = D\widehat{B}C \text{ e } D\widehat{B}C + C\widehat{B}E = 180^\circ.$$

Logo,

$$D\widehat{B}A + \widehat{B} + C\widehat{B}E = 180^\circ.$$

Mas $D\widehat{B}A$ e \widehat{A} são alternos internos, assim como $C\widehat{B}E$ e \widehat{C} .

Então,

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ. \tag{1.1}$$

□

Em muitas demonstrações ao longo do nosso texto, o resultado seguinte será fundamental.

Proposição 1.1. *As diagonais de uma quadrilátero convexo intersectam-se (fig. (1.6), pág. 9).*

Para apresentarmos a demonstração desta Proposição precisaremos de alguns conceitos:

Definição 1.5. *Seja um ângulo $\angle BAC$. Seu interior, ou sua região interna, é a intersecção do semiplano definido por \overleftrightarrow{AB} que contém o ponto C com o semiplano definido por \overleftrightarrow{AC} que contém o ponto B .*

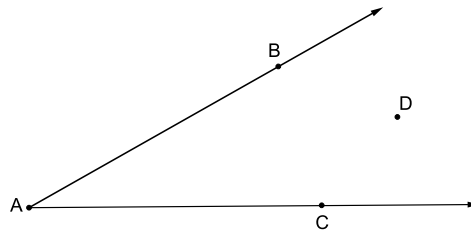


Figura 1.4: Ponto D pertencente à região interna de um ângulo.

Assim, um ponto D encontra-se no interior do ângulo $\angle BAC$ se B e D estão no mesmo semiplano definido por \overleftrightarrow{AC} e se C e D estão no mesmo semiplano definido por \overleftrightarrow{AB} (fig. (1.4)).

A proposição seguinte foi muito importante para o desenvolvimento da Geometria axiomática, uma vez que dela foram obtidos muitos outros resultados.

Proposição 1.2. *(Postulado de Pasch).*

Considere um triângulo $\triangle ABC$ e seja r uma reta contendo um ponto $P \in \overline{AC}$. Então r intersecta \overline{AB} ou \overline{BC} (fig.(1.5)).

Demonstração.

Suponha, por absurdo, que $r \cap \overline{AB} = \emptyset$ e $r \cap \overline{BC} = \emptyset$, então A, B ml r , assim como B, C ml r . Assim sendo, A, C ml r , o que é absurdo, já que $\{P\} = r \cap \overline{AC}$. \square

Passemos à demonstração da Proposição (1.1).

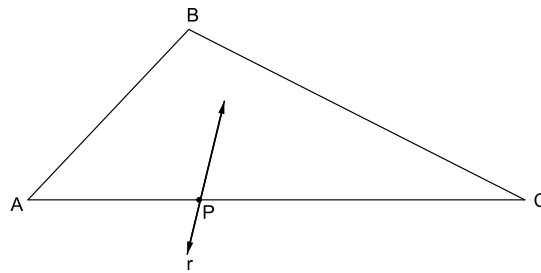


Figura 1.5: Postulado de Pasch.

Demonstração.

Seja o quadrilátero convexo $ABCD$ (fig. (1.6)). Como A, B ml DC e como B, C ml \overrightarrow{DA} , então B pertence à região interna do ângulo \widehat{ADC} . Assim, segue do Postulado de Pasch (Proposição (1.2), página 8) relativo ao triângulo $\triangle ADC$ que a reta suporte de \overline{BD} intersecta a diagonal \overline{AC} em um ponto P . Analogamente, a reta suporte de \overline{AC} intersecta a diagonal \overline{BD} em um ponto Q . Como $P, Q \in \overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{BD}$, então $P = Q$. \square

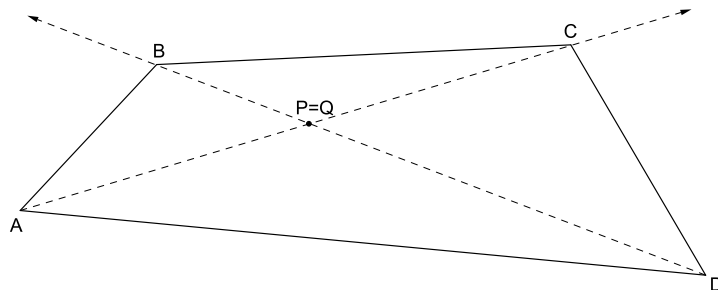


Figura 1.6: As diagonais de um quadrilátero convexo intersectam-se.

Nosso principal objeto de estudo nesta dissertação são os trapézios. Já observamos que alguns livros didáticos do ensino básico discordam quanto à definição de trapézios. A definição a seguir traz a escolha que fizemos aqui, que está de acordo com A.C. Muniz Neto [5] e E. Moise [4].

Definição 1.6. *Um trapézio é um quadrilátero que possui um par de lados opostos paralelos. Quando os dois pares de lados opostos do trapézio são paralelos, ele é chamado de*

paralelogramo.

Mostremos que os trapézios são quadriláteros convexos. Para isto, precisamos de alguns conceitos auxiliares.

Teorema 1.2. *Todo lado de um triângulo, com exceção de seus extremos, está contido no interior do ângulo oposto.*

Considere o triângulo $\triangle ABC$. Vamos provar que $\overline{BC} \setminus \{B, C\} \subset \text{int}(\angle BAC)$ (fig. (1.7)).

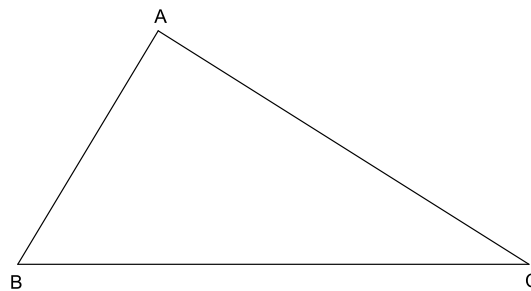


Figura 1.7: Ilustração do Teorema (1.2).

Demonstração.

Sabemos que $\overline{BC} \setminus C$ está contido no lado de \overleftrightarrow{AC} que contém B pois, caso contrário, B, C lo \overleftrightarrow{AC} , o que seria absurdo. Da mesma forma $\overline{BC} \setminus B$ está contido no lado de \overleftrightarrow{AB} que contém C . Então $\overline{BC} \setminus \{B, C\} \subset \text{int}(\angle BAC)$. \square

Teorema 1.3. *Teorema do Ângulo Externo.*

Em um triângulo qualquer, a medida de um ângulo externo é a soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele (fig. (1.8)).

Reformulando:

Dado um triângulo $\triangle ABC$, então:

$$\widehat{BCD} = \widehat{A} + \widehat{B}.$$

onde D é tal que $A - C - D$.

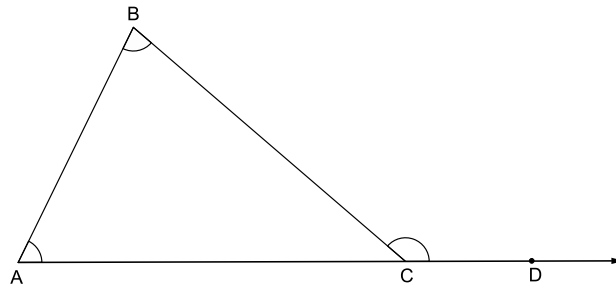


Figura 1.8: Ângulo externo de um triângulo.

Demonstração.

Sendo $A - C - D$, temos $\widehat{C} + \widehat{BCD} = 180^\circ$, já que são ângulos suplementares. Como $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$, então $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{C} + \widehat{BCD}$. Ou seja,

$$\widehat{BCD} = \widehat{A} + \widehat{B}. \quad (1.2)$$

□

Teorema 1.4. *Todo trapézio é um quadrilátero convexo.*

Reformulando:

Seja $ABCD$ um trapézio com $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$. Então $ABCD$ é um quadrilátero convexo, ou seja:

- A, B ml \overleftrightarrow{CD} ;
- B, C ml \overleftrightarrow{DA} ;
- C, D ml \overleftrightarrow{AB} ;
- D, A ml \overleftrightarrow{BC} .

Demonstração.

Como $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, então A, D ml \overleftrightarrow{BC} e o mesmo ocorre com B, C com relação a \overleftrightarrow{AD} . Nos resta mostrar que A, B ml \overleftrightarrow{CD} e que o mesmo ocorre com C, D com relação a \overleftrightarrow{AB} .

Vamos supor, por absurdo, que A, B lo \overleftrightarrow{CD} , ou seja, que pertençam a semiplanos distintos determinados pela reta suporte de \overline{CD} . Como $ABCD$ é um quadrilátero, deve ocorrer a existência de $X \in \overleftrightarrow{CD}$ com $X - C - D$.

Sabemos que A, C, D não são colineares (dado que $ABCD$ é quadrilátero), então, consideremos o triângulo $\triangle ACD$.

Como $X - C - D$, então \widehat{ACX} é externo ao triângulo $\triangle ACD$ e, pelo Teorema do Ângulo Externo (Teorema (1.3), página 10), temos que $\widehat{ACX} = \widehat{CAD} + \widehat{ADC}$. Assim, $\widehat{ACX} > \widehat{CAD}$.

Como $A - X - B$, $X \in \overleftrightarrow{CD}$, então A, B lo \overleftrightarrow{CD} . Pelo Teorema (1.2), página 10, $X \in \text{int}(\angle ACB)$. Consequentemente, $\widehat{ACX} + \widehat{XCB} = \widehat{ACB}$. Como $ABCD$ é trapézio com $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ e \overleftrightarrow{AC} é transversal, então $\angle CAD \cong \angle ACB$ (ângulos alternos internos). Logo $\widehat{CAD} < \widehat{ACX} < \widehat{ACB}$, implicando em $\widehat{CAD} < \widehat{ACB}$, o que é absurdo. Então A, B ml CD .

Analogamente, verifica-se que C, D ml \overleftrightarrow{AB} . □

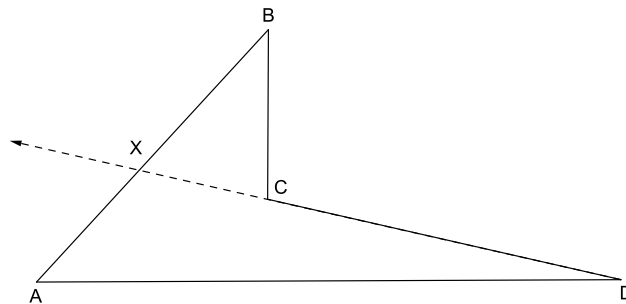


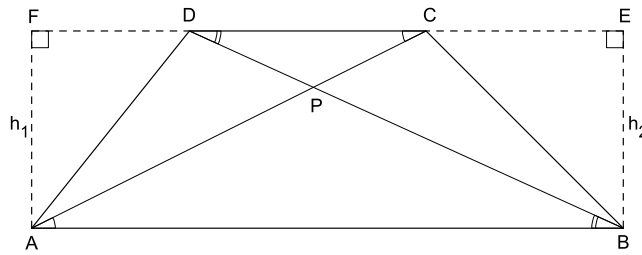
Figura 1.9: Trapézio com A, B lo \overleftrightarrow{CD} .

Embora termos dedicado o Capítulo 2 para apresentar as caracterizações de trapézio que consideramos as mais importantes, a seguir destacamos algumas, muito relacionadas à definição de trapézio.

A primeira delas está dada a seguir e é óbvia.

Se as retas suportes dos lados \overline{AB} e \overline{CD} (fig. (1.10), pág. 13) de um quadrilátero convexo $ABCD$ formam um ângulo α entre si, então o quadrilátero é um trapézio de lados opostos paralelos \overline{AB} e \overline{CD} se, e somente se, $\alpha = 0^\circ$.

Uma outra é dada a seguir e é consequência do paralelismo de retas.

Figura 1.10: Trapézio $ABCD$.

O quadrilátero $ABCD$ é um trapézio de lados opostos paralelos \overline{AB} e \overline{CD} se, e somente se, $\widehat{A}\widehat{B}D \cong \widehat{B}\widehat{D}C$ (*ângulos alternos internos*) (fig. (1.10)).

Desta condição chegamos a outra equivalente, fundamentados na relação de ângulos colaterais internos:

Teorema 1.5. *Um quadrilátero convexo $ABCD$ com lados opostos \overline{AB} e \overline{CD} paralelos é um trapézio se, e somente se,*

$$\widehat{A} + \widehat{D} = \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ. \quad (1.3)$$

Demonstração.

É uma consequência da relação entre ângulos correspondentes e o paralelismo de \overline{AB} e \overline{CD} . \square

Usando semelhança de triângulos, alcançamos uma importante relação entre os segmentos que formam as diagonais do trapézio $ABCD$ de lados paralelos \overline{AB} e \overline{CD} , que se intersectam no ponto P (fig. (1.10), pág. 13).

$$\triangle_{ABP} \sim \triangle_{CDP} \text{ (Caso AA),}$$

$$\frac{AP}{CP} = \frac{BP}{DP}. \quad (1.4)$$

Concluimos ainda que as duas diagonais em questão dividem o trapézio em 4 triângulos não sobrepostos sendo dois deles semelhantes (os que possuem lados formados pelas

bases do trapézio) e os outros dois com mesma área (fig. (1.11), pág. 14), conforme a Proposição (2.4).

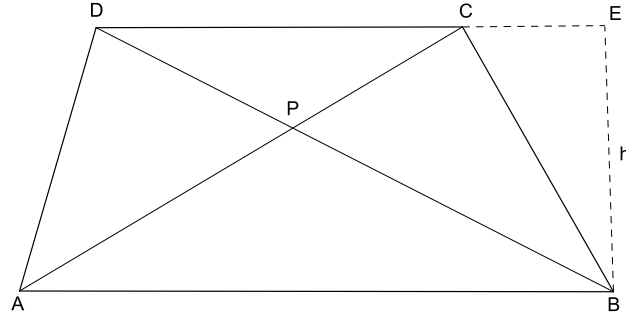


Figura 1.11: Trapézio e suas diagonais.

Proposição 1.3. *Sejam $ABCD$ um trapézio com lados paralelos \overline{AB} e \overline{CD} e $\{P\} = \overline{AC} \cap \overline{BD}$. Então, as áreas dos triângulos $\triangle APD$ e $\triangle BPC$ são congruentes.*

Demonstração.

Denote por S_{XYZ} a área de um triângulo qualquer com vértices X, Y e Z .

Como os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle ABC$ possuem a mesma base \overline{AB} e a mesma altura, então $S_{ABD} = S_{ABC}$.

Mas, $S_{ABD} = S_{APD} + S_{ABP}$ e $S_{ABC} = S_{ABP} + S_{BCP}$. Portanto $S_{APD} = S_{BCP}$.

□

As mesmas relações anteriores podem ser obtidas em termos trigonométricos. Para o trapézio $ABCD$ de lados paralelos \overline{AB} e \overline{CD} , temos, pelo Teorema (1.5), página 13, que:

$$\begin{cases} \widehat{\text{sen}} \widehat{A} = \widehat{\text{sen}} \widehat{D} & \text{e} & \widehat{\text{sen}} \widehat{C} = \widehat{\text{sen}} \widehat{B}, \\ \widehat{\text{cos}} \widehat{A} = -\widehat{\text{cos}} \widehat{D} & \text{e} & \widehat{\text{cos}} \widehat{C} = -\widehat{\text{cos}} \widehat{B}. \end{cases}$$

Logo,

$$\widehat{\text{sen}} \widehat{A} \cdot \widehat{\text{sen}} \widehat{C} = \widehat{\text{sen}} \widehat{B} \cdot \widehat{\text{sen}} \widehat{D}, \quad (1.5)$$

e

$$\cos \hat{A} \cdot \cos \hat{C} = \cos \hat{B} \cdot \cos \hat{D}. \quad (1.6)$$

Por (1.5) e (1.6) chegamos a:

$$\sin \hat{A} \cdot \sin \hat{C} + \cos \hat{A} \cdot \cos \hat{C} = \sin \hat{B} \cdot \sin \hat{D} + \cos \hat{B} \cdot \cos \hat{D}.$$

Ou seja,

$$\cos (\hat{A} - \hat{C}) = \cos (\hat{B} - \hat{D}). \quad (1.7)$$

Resumindo:

Proposição 1.4. *Se $ABCD$ for um trapézio de lados opostos \overline{AB} e \overline{CD} , então $\cos (\hat{A} - \hat{C}) = \cos (\hat{B} - \hat{D})$.*

Capítulo 2

Caracterizações Fundamentais

Neste capítulo apresentamos condições que caracterizam os trapézios, utilizando-se de relações trigonométricas, cálculo de área de triângulos, medidas de lados e distâncias.

Utilizaremos a notação S_{XYZ} para nos referir à área S do triângulo $\triangle XYZ$.

Dado o trapézio $ABCD$ de bases paralelas \overline{AB} e \overline{CD} (fig. (1.10), pág. 13), sua área S pode ser calculada pela soma das áreas dos triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle BCD$, respectivamente, ou seja,

$$S = S_{ABD} + S_{BCD}.$$

Como os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle BCD$ têm a mesma altura h relativa aos lados \overline{AB} e \overline{CD} , assim:

$$S = AB \cdot h \cdot \frac{1}{2} + CD \cdot h \cdot \frac{1}{2}.$$

Sendo $AB = a$ e $CD = b$, temos que:

$$S = \frac{a + b}{2} \cdot h. \tag{2.1}$$

Lembramos que a área S_{ABC} do triângulo $\triangle ABC$ também pode ser calculada pela expressão abaixo, que nos será útil na próxima seção:

$$S_{ABC} = \frac{\widehat{B} \cdot a \cdot c}{2}, \tag{2.2}$$

em que $a = AB$, $c = BC$ e \widehat{B} é a medida do ângulo interno $\angle ABC$ do triângulo $\triangle ABC$.

2.1 Caracterizações dos trapézios envolvendo trigonometria

O teorema a seguir nos dá uma caracterização de trapézios a partir da soma dos cossenos de ângulos adjacentes do quadrilátero.

Teorema 2.1. *Um quadrilátero convexo $ABCD$ é um trapézio de lados paralelos \overline{AB} e \overline{CD} se, e somente se:*

$$\cos \hat{A} + \cos \hat{D} = 0 \text{ e } \cos \hat{B} + \cos \hat{C} = 0. \quad (2.3)$$

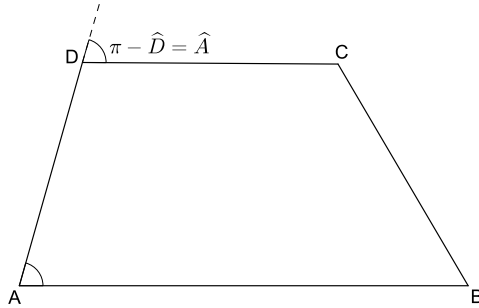


Figura 2.1: Ângulos correspondentes congruentes.

Demonstração.

Suponha que o quadrilátero convexo $ABCD$ seja um trapézio com $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Assim, do paralelismo entre \overline{AB} e \overline{CD} , segue que \hat{A} e \hat{D} são suplementares, conforme ilustrado na figura (2.1). Logo:

$$\cos \hat{A} + \cos \hat{D} = \cos \hat{A} + \cos(180^\circ - \hat{A}) = \cos \hat{A} - \cos \hat{A} = 0.$$

Analogamente, $\cos \hat{B} + \cos \hat{C} = 0$.

Reciprocamente, suponha que os ângulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ e \hat{D} do quadrilátero convexo $ABCD$ satisfaçam a relação (2.3).

Suponha, por absurdo, que $ABCD$ não seja um trapézio de lados paralelos \overline{AB} e \overline{CD} , conforme figura (2.2). Desta forma, $\hat{A} + \hat{D} \neq 180^\circ$ e $\hat{B} + \hat{C} \neq 180^\circ$. Sem perda de generalidade, suponha que $\hat{A} > 180^\circ - \hat{D}$, de acordo com a mesma figura (2.2).

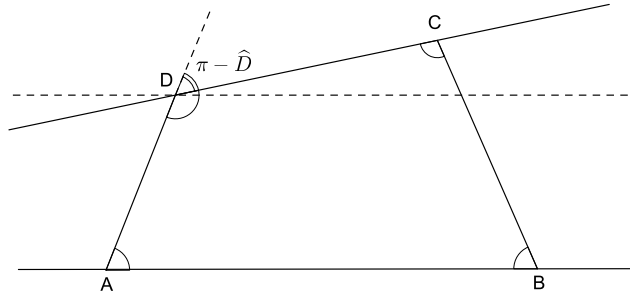


Figura 2.2: Trapézio com lados \overline{AB} e \overline{CD} não paralelos.

Como $ABCD$ é um quadrilátero convexo, então $0^\circ < \hat{A}, \hat{D} < 180^\circ$ e temos que a função $f(x) = \cos x$ é decrescente em $(0^\circ, 180^\circ)$. Logo, $\cos \hat{A} + \cos \hat{D} = \cos \hat{A} - \cos (180^\circ - \hat{D}) < 0$, o que contradiz a hipótese de que $\cos \hat{A} + \cos \hat{D} = 0$.

Portanto, $ABCD$ é um trapézio de lados paralelos \overline{AB} e \overline{CD} .

□

A seguinte Proposição estabelece uma relação entre os ângulos de um trapézio utilizando-se a função cotangente.

Proposição 2.1. *Um quadrilátero convexo $ABCD$ é um trapézio com lados paralelos \overline{AB} e \overline{CD} se, e somente se:*

$$\cot \hat{A} + \cot \hat{D} = \cot \hat{B} + \cot \hat{C} = 0.$$

A demonstração é análoga à anterior, já que a função cotangente é decrescente no intervalo $(0^\circ, 180^\circ)$ e $\cot x = -\cot (180^\circ - x)$.

Teorema 2.2. *Um quadrilátero convexo $ABCD$ é um trapézio com lados paralelos \overline{AB} e \overline{CD} se, e somente se:*

$$\tan \left(\frac{\hat{A}}{2} \right) \cdot \tan \left(\frac{\hat{D}}{2} \right) = \tan \left(\frac{\hat{B}}{2} \right) \cdot \tan \left(\frac{\hat{C}}{2} \right) = 1.$$

Demonstração.

Como $\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$, conforme a relação (1.3), página 13. Então $\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{D}}{2} = 90^\circ$, ou seja, $\frac{\hat{A}}{2}$ e $\frac{\hat{D}}{2}$ são ângulos complementares. Disto segue que:

$$\tan\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \frac{1}{\cot\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)} = \frac{1}{\cot\left(90^\circ - \frac{\hat{D}}{2}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{\hat{D}}{2}\right)} = \cot\left(\frac{\hat{D}}{2}\right).$$

e

$$\tan\left(\frac{\hat{D}}{2}\right) = \frac{1}{\cot\left(\frac{\hat{D}}{2}\right)} = \frac{1}{\cot\left(90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)} = \cot\left(\frac{\hat{A}}{2}\right).$$

Além disso, por definição de cotangente, temos que:

$$\tan\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) \cdot \cot\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = 1.$$

Consequentemente,

$$\tan\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{\hat{D}}{2}\right) = 1.$$

Analogamente, temos:

$$\tan\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) = 1.$$

Reciprocamente, suponha, por absurdo, que o quadrilátero $ABCD$ não seja um trapézio de bases paralelas \overline{AB} e \overline{CD} . Sem perda de generalidade, suponha que $\hat{A} + \hat{D} > 180^\circ$ e $\hat{B} + \hat{C} < 180^\circ$. Assim, $\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) + \left(\frac{\hat{D}}{2}\right) > 90^\circ$. Logo $\tan\left(\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{D}}{2}\right) < 0$.

Calculando-se $\tan\left(\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{D}}{2}\right) < 0$, temos:

$$0 > \tan\left(\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{D}}{2}\right) = \frac{\tan\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) + \tan\left(\frac{\hat{D}}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{\hat{D}}{2}\right)}. \quad (2.4)$$

Como os ângulos $\frac{\hat{A}}{2}$ e $\frac{\hat{D}}{2}$ são agudos, então o numerador de (2.4) é positivo. Logo devemos ter o denominador de (2.4) negativo. Ou seja $\tan\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{\hat{D}}{2}\right) > 1$.

Por hipótese, $\hat{B} + \hat{C} < 180^\circ$. Então, $\frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} < 90^\circ$, logo $\tan\left(\frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2}\right) > 0$. Calculando-se $\tan\left(\frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2}\right)$, temos:

$$0 < \tan\left(\frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2}\right) = \frac{\tan\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) + \tan\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)}. \quad (2.5)$$

Como os ângulos $\frac{\hat{B}}{2}$ e $\frac{\hat{C}}{2}$ são agudos, então o numerador de (2.5) é positivo. Logo devemos ter o denominador de (2.5) também positivo, o que ocorre quando $\tan\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) < 1$.

Assim, $\tan\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{\hat{D}}{2}\right) \neq \tan\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)$, o que contraria a hipótese. Portanto, $ABCD$ é um trapézio de lados paralelos \overline{AB} e \overline{CD} .

□

2.2 Caracterizações dos trapézios envolvendo áreas

Nesta seção, obteremos quatro caracterizações de trapézios a partir do cálculo de áreas. Numa delas será utilizado o conceito de bimediana, definido a seguir:

Definição 2.1. *Dado um quadrilátero convexo $ABCD$, uma bimediana é um segmento de reta com extremidades nos pontos médios de dois lados opostos desse quadrilátero.*

Proposição 2.2. *Um quadrilátero convexo $ABCD$ é um trapézio se, e somente se, uma bimediana o divide em dois quadriláteros de mesma área (fig. (2.3)).*

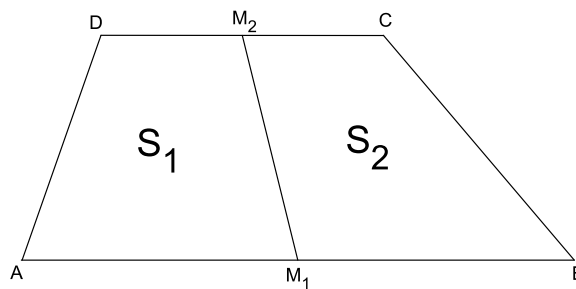


Figura 2.3: Bimediana de um trapézio.

Demonstração.

Consideremos que o trapézio $ABCD$ tenha lados paralelos \overline{AB} e \overline{CD} e sejam M_1 e M_2 os pontos médios de \overline{AB} e \overline{CD} , respectivamente. A bimediana $\overline{M_1M_2}$ divide o trapézio $ABCD$ (fig. (2.3)) em dois trapézios de bases de mesma medida e mesma altura h .

Calculando-se as áreas S_1 e S_2 dos trapézios AM_1M_2D e M_1BCM_2 , respectivamente, temos que

$$S_1 = \frac{AM_1 + DM_2}{2} \cdot h = \frac{BM_1 + CM_2}{2} \cdot h = S_2.$$

Reciprocamente, sejam $ABCD$ um quadrilátero convexo, M_1 e M_2 os pontos médios de \overline{AB} e \overline{CD} , respectivamente, e h a distância entre M_1 e M_2 . Denotemos por $S_1 = S_{ADM_1}$, $S_2 = S_{DM_1M_2}$, $S_3 = S_{CM_1M_2}$ e $S_4 = S_{BCM_1}$, conforme figura (2.4).

Observemos que $S_2 = S_3$, pois os triângulos $\triangle DM_1M_2$ e $\triangle CM_1M_2$ têm bases de mesma medida e têm a mesma altura. Mas, por hipótese,

$$S_1 + S_2 = S_3 + S_4.$$

Consequentemente, $S_1 = S_4$. Mas, as bases dos triângulos $\triangle AM_1D$ e $\triangle BM_1C$ têm a mesma medida. Assim, estes triângulos têm a mesma altura, de modo que a distância dos pontos C e D à reta \overleftrightarrow{AB} coincidem. Portanto, $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$ e $ABCD$ é um trapézio. \square

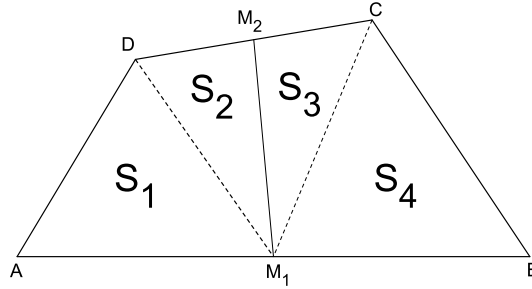


Figura 2.4: $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$.

Observação 2.1. A Proposição (2.2), página 20, aplica-se ao caso da bimediana com extremidades nos pontos médios dos lados paralelos do trapézio. Por exemplo, se M_1 e M_2 forem os pontos médios dos lados \overline{AD} e \overline{BC} , respectivamente, do trapézio $ABCD$, tais que $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. Então $M_1M_2 = \frac{AB+CD}{2}$, pois a bimediana M_1M_2 é a base média do trapézio $ABCD$, de modo que ABM_2M_1 e M_1M_2CD sejam trapézios. Assim, denotando-se por S_1 e S_2 as áreas dos trapézios ABM_2M_1 e M_1M_2CD , respectivamente, por h a altura do trapézio $ABCD$, $a = AB$, $b = CD$, conforme figura (2.5), temos que:

$$M_1M_2 = \frac{a+b}{2} \text{ e } S_1 = \frac{(a+3b) \cdot h}{8} \neq \frac{(3a+b) \cdot h}{8} = S_2.$$

Proposição 2.3. Se as diagonais de um quadrilátero convexo $ABCD$ se intersectam em P , então $ABCD$ é um trapézio de lados paralelos \overline{AB} e \overline{CD} se, e somente se, as áreas dos triângulos $\triangle APD$ e $\triangle BPC$ são iguais (fig. (1.11), pág. 14).

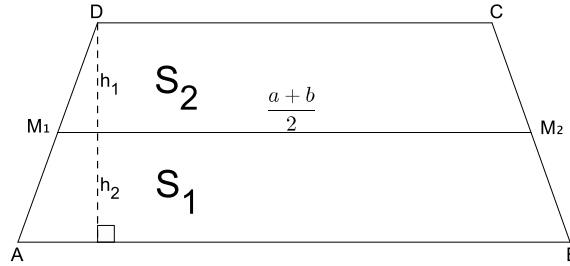


Figura 2.5: Trapézio com bimediana paralela às bases.

Demonstração.

Denotemos por h_{XYZ} a altura de um triângulo de vértices X , Y e Z .

$$S_{APD} = S_{BPC} \Leftrightarrow S_{APD} + S_{ABP} = S_{BPC} + S_{ABD} \Leftrightarrow S_{ABD} = S_{ABC} \Leftrightarrow h_{ABD} = h_{ABC},$$

visto que os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle ABC$ têm a mesma base \overline{AB} .

Mas, esta última igualdade ocorre se, e somente se, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, que, por sua vez, ocorre se, e somente se, o quadrilátero convexo $ABCD$ for um trapézio com lados paralelos \overline{AB} e \overline{CD} .

□

Teorema 2.3. *Um quadrilátero convexo $ABCD$ é um trapézio se, e somente se, o produto das áreas dos triângulos formados por uma diagonal for igual ao produto das áreas dos triângulos formados pela outra diagonal (fig. (2.6), pág. 23).*

Demonstração.

Seja P o ponto de intersecção das diagonais \overline{AC} e BD do quadrilátero $ABCD$. Denotemos por $S_1 = S_{APD}$, $S_2 = S_{CDP}$, $S_3 = S_{BCP}$ e $S_4 = S_{ABP}$. Observemos que $S_{ABD} = S_1 + S_4$, $S_{BCD} = S_2 + S_3$, $S_{ACD} = S_1 + S_2$ e $S_{ABC} = S_3 + S_4$. Assim,

$$(S_1 + S_4) \cdot (S_2 + S_3) = (S_1 + S_2) \cdot (S_3 + S_4) \Leftrightarrow S_1 \cdot S_2 + S_3 \cdot S_4 = S_1 \cdot S_4 + S_2 \cdot S_3 \Leftrightarrow (S_1 - S_3) \cdot (S_2 - S_4) = 0 \Leftrightarrow S_1 = S_3 \text{ ou } S_2 = S_4.$$

De acordo com a Proposição (2.3), página 21, esta última igualdade ocorre se, e somente se, o quadrilátero $ABCD$ for um trapézio. □

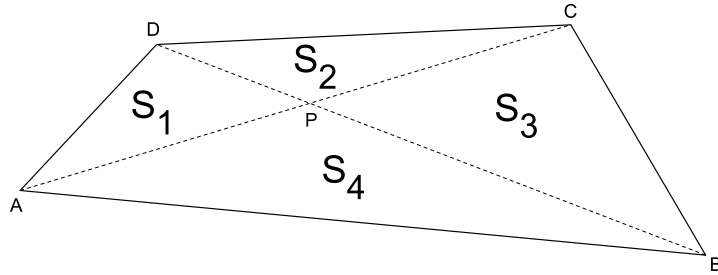


Figura 2.6: Quadrilátero convexo dividido em quatro triângulos pelas suas diagonais.

Lema 2.1. *As diagonais de um quadrilátero convexo o divide em quatro triângulos para os quais o produto das áreas de dois triângulos opostos é igual ao produto das áreas dos outros dois triângulos.*

Demonstração.

Considere o quadrilátero convexo $ABCD$. Sejam $\{P\} = \overline{AC} \cap \overline{BD}$, $S_1 = S_{APD}$, $S_2 = S_{CDP}$, $S_3 = S_{BCP}$, $S_4 = S_{ABP}$, θ o ângulo formado entre \overline{DP} e \overline{AP} , $AP = p$, $DP = r$, $CP = q$ e $BP = s$ (como na figura (2.7)). Assim:

$$S_1 \cdot S_3 = \frac{p \cdot r \cdot \sin \theta}{2} \cdot \frac{q \cdot s \cdot \sin \theta}{2} = \frac{p \cdot q \cdot r \cdot s \cdot \sin^2 \theta}{4},$$

$$S_2 \cdot S_4 = \frac{q \cdot r \cdot \sin (180^\circ - \theta)}{2} \cdot \frac{p \cdot s \cdot \sin (180^\circ - \theta)}{2} = \frac{p \cdot q \cdot r \cdot s \cdot \sin^2 \theta}{4}.$$

Logo,

$$S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4.$$

□

Outra maneira para se demonstrar este lema sem o auxílio da trigonometria é usar as alturas dos triângulos relativos a uma única diagonal. Assim, se h_1 é a altura dos triângulos $\triangle ADP$ e $\triangle ABP$ relativa à diagonal \overline{BD} e se h_2 é a altura dos triângulos $\triangle CDP$ e $\triangle BCP$ relativa também à diagonal \overline{BD} , então:

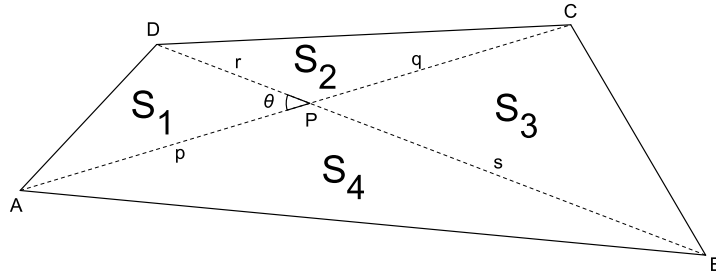


Figura 2.7: Produtos dos triângulos opostos de um quadrilátero convexo são iguais.

$$S_1 \cdot S_3 = \frac{r \cdot h_1}{2} \cdot \frac{s \cdot h_2}{2} = \frac{r \cdot s \cdot h_1 \cdot h_2}{4},$$

$$S_2 \cdot S_4 = \frac{r \cdot h_2}{2} \cdot \frac{s \cdot h_1}{2} = \frac{r \cdot s \cdot h_1 \cdot h_2}{4}.$$

O próximo resultado é uma caracterização de trapézios envolvendo uma relação entre áreas de dois triângulos opostos, obtidos a partir das diagonais do trapézio.

Teorema 2.4. *Com as notações introduzidas na demonstração do Lema (2.1), página 23, o quadrilátero tem área $K = (\sqrt{S_2} + \sqrt{S_4})^2$ se, e somente se, ele for um trapézio cujos lados paralelos são os lados dos triângulos cujas áreas são S_2 e S_4 .*

Demonstração.

O quadrilátero convexo (fig. (2.7), pág. 24) tem área $K = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$.

Pelo Lema (2.1), temos $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$. Então:

$$K = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + 2\sqrt{S_2 \cdot S_4} - 2\sqrt{S_1 \cdot S_3},$$

$$K = (\sqrt{S_2} + \sqrt{S_4})^2 + (\sqrt{S_1} - \sqrt{S_3})^2.$$

De acordo com a Proposição (2.3), página 21, o quadrilátero é um trapézio cujos lados paralelos são lados dos triângulos com áreas S_2 e S_4 se, e somente se, $S_1 = S_3$. Isto ocorre se, e somente se, $K = (\sqrt{S_2} + \sqrt{S_4})^2$.

□

2.3 Caracterizações que envolvem lados e distâncias

Nesta última seção, apresentamos algumas caracterizações de trapézios envolvendo basicamente os comprimentos de seus lados e os comprimentos de suas diagonais.

Teorema 2.5. *Um quadrilátero convexo $ABCD$ é um trapézio com lados paralelos \overline{AB} e \overline{CD} se, e somente se:*

$$\frac{AD}{BC} = \frac{\text{sen } \widehat{C}}{\text{sen } \widehat{D}}. \quad (2.6)$$

Demonstração.

O quadrilátero $ABCD$ é um trapézio com lados paralelos \overline{AB} e \overline{CD} se, e somente se, os triângulos $\triangle ACD$ e $\triangle BCD$ (fig. (1.11), pág. 14) têm mesma altura relativa ao lado \overline{CD} . Isto ocorre se, e somente se, $S_{ACD} = S_{BCD}$. Ou seja,

$$\frac{1}{2} \cdot CD \cdot AD \cdot \text{sen } \widehat{D} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot BC \cdot \text{sen } \widehat{C}.$$

Equivalentemente,

$$\frac{AD}{BC} = \frac{\text{sen } \widehat{C}}{\text{sen } \widehat{D}}. \quad (2.7)$$

□

Lema 2.2. *Para um quadrilátero convexo $ABCD$ com $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, e diagonais medindo $p = AC$ e $q = BD$, vale que:*

$$p^2 + q^2 = b^2 + d^2 + 2ac \cdot \cos \theta, \quad (2.8)$$

onde θ é o ângulo entre \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CD} .

Demonstração.

Seja θ o ângulo entre os prolongamentos de \overline{AB} e \overline{CD} . Se $\theta = 0$, então $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, de modo que o quadrilátero convexo $ABCD$ é um trapézio. Caso $\theta \neq 0$, existe um ponto J que é a intersecção de \overleftrightarrow{AB} com \overleftrightarrow{CD} .

Seja G o ponto tal que \overline{CG} é paralelo a \overline{AB} , \overline{CG} é perpendicular a \overline{DG} e seja E o ponto $\{E\} = \overleftrightarrow{GD} \cap \overleftrightarrow{AB}$ (como na figura (2.8), página 26).

Como $\angle BJC$ e $\angle DCG$ são ângulos alternos internos (nos casos 1 e 4) ou ângulos correspondentes (nos casos 2 e 3) formados entre a transversal \overleftrightarrow{JC} com as paralelas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CG} , então $B\hat{J}C = D\hat{C}G = \theta$.

Seja $F \in \overleftrightarrow{AB}$ tal que \overline{CF} é perpendicular a \overleftrightarrow{AB} . Então $GEFC$ é um retângulo, de modo que $EF = GC = c \cdot \cos \theta$, $DG = c \cdot \sin \theta$.

Logo, sendo $h = CF$ e $x = AE$, temos as seguintes possibilidades e suas respectivas representações nas figuras (2.8), (2.9), (2.10) e (2.11):

- $ED = h - c \cdot \sin \theta$, $FB = a - c \cdot \cos \theta - x$, para o Caso 1 ilustrado na figura (2.8),

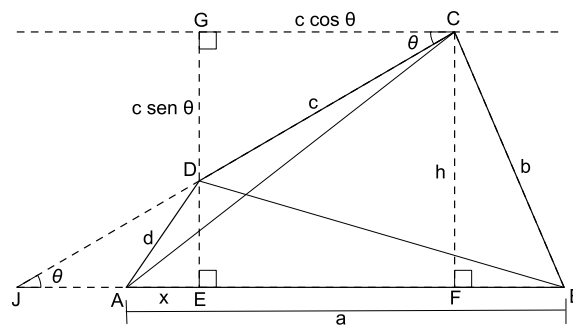


Figura 2.8: Caso 1.

- $ED = h + c \cdot \sin \theta$, $FB = a - c \cdot \cos \theta - x$, para o Caso 2 ilustrado na figura (2.9),

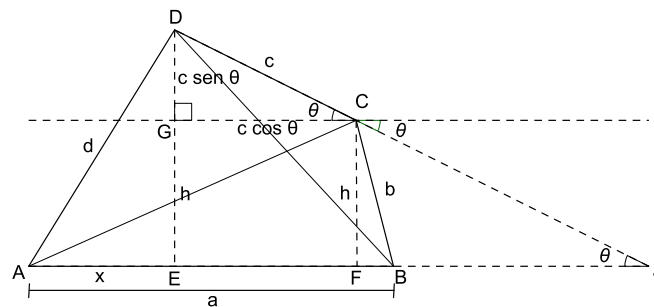


Figura 2.9: Caso 2.

- $ED = h + c \cdot \text{sen } \theta$, $FB = c \cdot \text{cos } \theta - a - x$, para o Caso 3 ilustrado na figura (2.10),

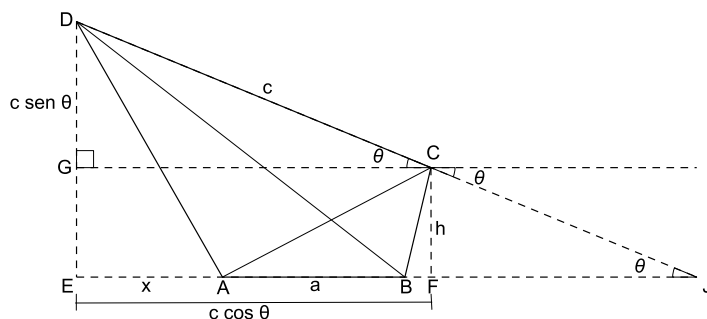


Figura 2.10: Caso 3.

- $ED = h - c \cdot \text{sen } \theta$, $FB = c \cdot \text{cos } \theta - x - a$, para o Caso 4 ilustrado na figura (2.11).

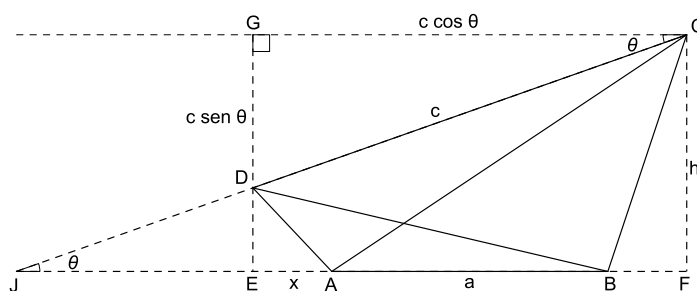


Figura 2.11: Caso 4.

Para prosseguirmos com a demonstração, adotaremos a situação representada no Caso 1. Os outros casos são análogos.

Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos $\triangle ACF$, $\triangle BDE$, $\triangle BCF$ e $\triangle AED$ temos, respectivamente:

$$p^2 = h^2 + (x + c \cdot \text{cos } \theta)^2,$$

$$q^2 = (a - x)^2 + (h - c \cdot \text{sen } \theta)^2,$$

$$b^2 = h^2 + (a - x - c \cdot \text{cos } \theta)^2,$$

$$d^2 = x^2 + (h - c \cdot \text{sen } \theta)^2.$$

Somando-se as equações anteriores convenientemente, temos:

$$\begin{cases} p^2 + q^2 = h^2 + (x + c \cdot \cos \theta)^2 + (a - x)^2 + (h - c \cdot \sin \theta)^2, \\ b^2 + d^2 = h^2 + (a - x - c \cdot \cos \theta)^2 + x^2 + (h - c \cdot \sin \theta)^2. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} p^2 + q^2 - (x + c \cdot \cos \theta)^2 - (a - x)^2 = h^2 + (h - c \cdot \sin \theta)^2, \\ b^2 + d^2 - (a - x - c \cdot \cos \theta)^2 - x^2 = h^2 + (h - c \cdot \sin \theta)^2. \end{cases}$$

Finalmente,

$$p^2 + q^2 - (x + c \cdot \cos \theta)^2 - (a - x)^2 = b^2 + d^2 - (a - x - c \cdot \cos \theta)^2 - x^2,$$

donde segue que:

$$p^2 + q^2 = b^2 + d^2 + 2ac \cdot \cos \theta.$$

□

Corolário 2.1. *Para um quadrilátero convexo $ABCD$ com $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ e diagonais \overline{AC} e \overline{BD} , medindo $p = AC$ e $q = BD$, temos que $ABCD$ é um trapézio com bases paralelas \overline{AB} e \overline{CD} .*

$$p^2 + q^2 = b^2 + d^2 + 2ac. \quad (2.9)$$

Demonstração.

Esta relação é consequência direta do Lema (2.2), página 25, já que o quadrilátero é um trapézio se, e somente se, $\theta = 0$. □

A seguir, definiremos Mediana de Euler de um quadrilátero convexo, que nos será útil na caracterização de trapézios do Teorema (2.6).

Definição 2.2. *Considere um quadrilátero convexo $ABCD$. Sejam P e Q os pontos médios de suas diagonais \overline{AC} e \overline{BD} , respectivamente. A medida $v = PQ$ é chamada de Mediana de Euler do quadrilátero $ABCD$.*

Antes de caracterizarmos os trapézios por meio de uma relação com a Mediana de Euler, apresentamos uma generalização da Regra do Paralelogramo para um quadrilátero convexo qualquer, que é chamada de **Relação de Euler para um Quadrilátero**:

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo com $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ e $DA = d$, diagonais \overline{AC} e \overline{BD} medindo $p = AC$ e $q = BD$. Se v denota a Mediana de Euler de $ABCD$, então:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = p^2 + q^2 + 4v^2. \quad (2.10)$$

cuja demonstração pode ser encontrada em [1], pág. 126. Necessitaremos, entretanto, de algumas fundamentações que nos conduzam a esta demonstração.

Lema 2.3. *Fixados os pontos A e B do plano, o lugar geométrico dos pontos M do plano cuja soma dos quadrados das distâncias de M a A e a B é uma circunferência que passa por M e cujo centro O é o ponto médio de \overline{AB} .*

Demonstração.

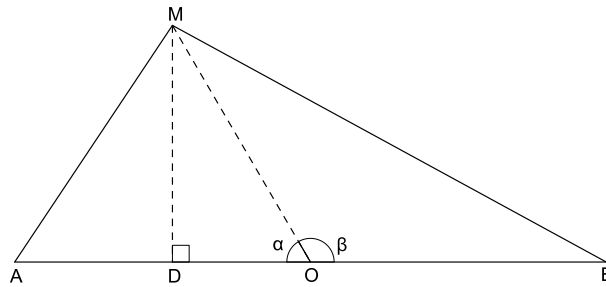


Figura 2.12: Ilustração auxiliar para o Lema (2.3).

Pela figura (2.12), temos que $\cos \alpha = \frac{OD}{OM}$ e $\cos \beta = -(\cos(\pi - \beta)) = -\frac{OD}{OM}$.

Pela Lei dos Cossenos:

$$(AM)^2 = (OM)^2 + (OA)^2 - 2 \cdot OM \cdot OA \cdot \frac{OD}{OM} = (OM)^2 + (OA)^2 + 2 \cdot OA \cdot OD.$$

E

$$(BM)^2 = (OM)^2 + (OB)^2 - 2 \cdot OM \cdot OB \cdot \left(-\frac{OD}{OM}\right) = (OM)^2 + (OB)^2 + 2 \cdot OB \cdot OD.$$

Mas:

$$OA = OB = \frac{1}{2}AB.$$

Logo,

$$(AM)^2 + (BM)^2 = 2(OM)^2 + 2(OA)^2.$$

Chamando-se $(AM)^2 + (BM)^2 = k^2$ e $AB = 2a$ (também constante), então:

$$(OM)^2 = \frac{1}{2}k^2 - a^2.$$

Portanto, M pertence a uma circunferência de centro O e raio $\sqrt{\frac{1}{2}k^2 - a^2}$.

□

Observação 2.2. Notemos que $\frac{1}{2}k^2 - a^2 = \frac{1}{2}((AM)^2 + (BM)^2) - \frac{(AB)^2}{4} \geq 0$. Caso contrário, $(AM)^2 + (BM)^2 < \frac{(AB)^2}{2}$. Mas, pela desigualdade triangular aplicada ao triângulo $\triangle ABM$, temos que $(AB)^2 \leq (AM)^2 + (BM)^2$. Assim, teríamos $(AB)^2 \leq (AM)^2 + (BM)^2 < \frac{(AB)^2}{2}$. O que seria absurdo.

Lema 2.4. Dado um triângulo $\triangle ABC$ e sejam $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, m_a , m_b e m_c as medianas relativas aos vértices A , B e C , respectivamente. Então:

$$\begin{cases} 2(m_a)^2 = b^2 + c^2 - \frac{1}{2}a^2, \\ 2(m_b)^2 = a^2 + c^2 - \frac{1}{2}b^2, \\ 2(m_c)^2 = a^2 + b^2 - \frac{1}{2}c^2. \end{cases}$$

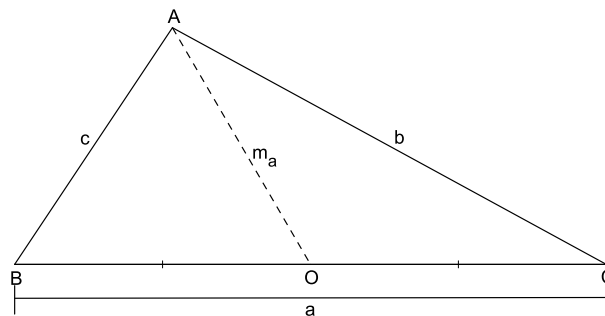


Figura 2.13: Ilustração auxiliar para o Lema (2.4).

Demonstração.

Seja O o ponto médio de \overline{BC} . Como $(AB)^2 + (AC)^2$ é igual a uma constante k , então, pelo Lema (2.3),

$$(AO)^2 = \frac{1}{2}k^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

(importante observar que na demonstração do Lema (2.3) temos $AB = 2a$ como base do triângulo $\triangle ABM$, figura (2.12), enquanto que na demonstração deste Lema (2.4) temos $BC = a$ como base do triângulo $\triangle ABC$, figura (2.13).

Ou seja,

$$(m_a)^2 = \frac{1}{2}(c^2 + b^2) - \frac{a^2}{4},$$

Consequentemente,

$$2(m_a)^2 = b^2 + c^2 - \frac{1}{2}a^2.$$

□

As outras duas equações são provadas de modo análogo.

Proposição 2.4. *Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo com $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$, $p = AC$ e $q = BD$. Sejam M_1 e M_2 os pontos médios das diagonais \overline{AC} e \overline{BD} , respectivamente, e $v = M_1M_2$. Então:*

$$p^2 + q^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 4v^2.$$

Demonstração.

Aplicando-se o Lema (2.4) aos triângulos $\triangle ABD$, $\triangle CBD$ e $\triangle M_2AC$, temos:

$$2(AM_2)^2 = a^2 + d^2 - \frac{1}{2}q^2, \quad (2.11)$$

$$2(CM_2)^2 = b^2 + c^2 - \frac{1}{2}q^2, \quad (2.12)$$

$$2(M_2M_1)^2 = (AM_2)^2 + (CM_2)^2 - \frac{1}{2}p^2. \quad (2.13)$$

Assim, multiplicando-se a relação (2.13) por 2, e substituindo-se as relações (2.11) e (2.12) neste produto, temos:

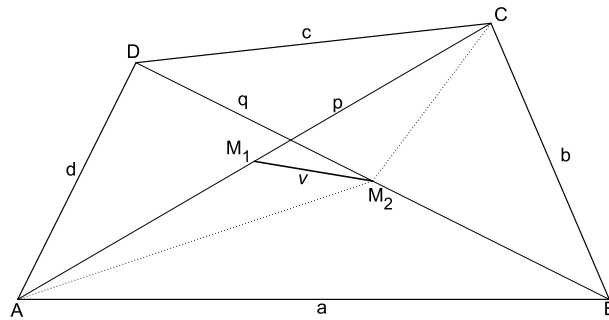


Figura 2.14: Ilustração para a demonstração da Proposição (2.4).

$$p^2 + q^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 4v^2.$$

□

Teorema 2.6. *Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo com $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ e $DA = d$. Sejam P e Q os pontos médios de \overline{AC} e \overline{BD} , respectivamente, e $v = PQ$. Então, $ABCD$ é um trapézio com bases paralelas \overline{AB} e \overline{CD} se, e somente se:*

$$v = \frac{|a - c|}{2} \tag{2.14}$$

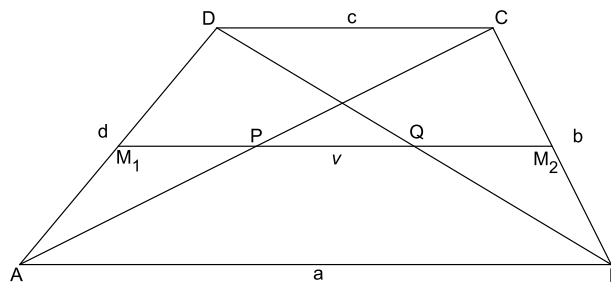


Figura 2.15: Mediana de Euler.

Demonstração.

De (2.10), temos que:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = p^2 + q^2 + 4v^2.$$

Mas, pelo Corolário (2.1), página 28, o quadrilátero convexo $ABCD$ é um trapézio se, e somente se, $p^2 + q^2 = b^2 + d^2 + 2ac$. Portanto, o quadrilátero convexo $ABCD$ é um trapézio se, e somente se:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = b^2 + d^2 + 2ac + 4v^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ac + c^2 = 4v^2 \Leftrightarrow v = \frac{|a - c|}{2}.$$

□

Observação 2.3. *As diagonais de um paralelogramo intersectam-se em seu ponto médio. Sendo $ABCD$ um paralelogramo com diagonais \overline{AC} e \overline{BD} e, sendo P e Q os pontos médios de \overline{AC} e \overline{BD} , respectivamente, temos P e Q coincidentes. Assim, sendo v a Mediana de Euler, temos $v = 0$, $AB = CD = a$ e $BC = DA = b$, cujas substituições na Relação de Euler para um Quadrilátero, resultam em $p^2 + q^2 = a^2 + b^2 + a^2 + b^2 - 4 \cdot 0^2$, ou seja, $p^2 + q^2 = 2a^2 + 2b^2$, que é a Regra do Paralelogramo.*

Teorema 2.7. *Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo com $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, e diagonais \overline{AC} e \overline{BD} medindo $p = AC$ e $q = BD$. Suponha que $a \neq c$. Então, $ABCD$ é um trapézio com bases paralelas \overline{AB} e \overline{CD} se, e somente se:*

$$p = \sqrt{\frac{ac(a - c) + ad^2 - cb^2}{a - c}},$$

$$q = \sqrt{\frac{ac(a - c) + ab^2 - cd^2}{a - c}}.$$

Demonstração.

Seja α o ângulo entre \overline{AC} e \overline{AB} e β o ângulo entre AC e \overline{CD} . Aplicando-se a Lei dos Cossenos aos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ACD$ (como na figura (2.16)), temos que:

$$\begin{cases} b^2 = a^2 + p^2 - 2ap \cdot \cos \alpha, \\ d^2 = c^2 + p^2 - 2cp \cdot \cos \beta. \end{cases}$$

O quadrilátero $ABCD$ é um trapézio se, e somente se, $\alpha = \beta$. Equivalentemente,

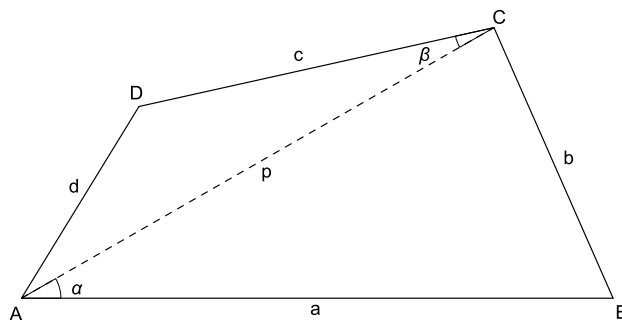


Figura 2.16: Diagonal p de um quadrilátero convexo $ABCD$.

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + p^2 - b^2}{2ap} &= \frac{c^2 + p^2 - d^2}{2cp} \Leftrightarrow \\ a^2c + cp^2 - b^2c &= ac^2 + ap^2 - ad^2 \Leftrightarrow \\ p^2(a - c) &= ac(a - c) + ad^2 - b^2c \Leftrightarrow \\ p &= \sqrt{\frac{ac(a - c) + ad^2 - b^2c}{a - c}}. \end{aligned}$$

□

A segunda relação é obtida de modo análogo.

Capítulo 3

Proposta de Atividades

Neste capítulo elaboramos algumas atividades a serem aplicadas aos alunos do Ensino Médio. Sugerimos a utilização do Geogebra como recurso para resolução de algumas delas, por se tratar de um software de uso livre. Sugerimos, além disso, que se utilizem régua e compasso nas construções sempre que possível, como ferramentas adicionais.

Este capítulo está dividido em duas seções sendo que, na primeira, encontram-se os enunciados das questões propostas, enquanto que na segunda há algumas soluções possíveis.

3.1 Questões

1. Construa o trapézio $ABCD$ com $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ no Geogebra e trace suas diagonais \overline{AC} e \overline{BD} , com intersecção em P . Utilize o medidor de áreas do Geogebra para verificar que as áreas dos triângulos $\triangle APD$ e $\triangle BPC$ são iguais, de acordo com a Proposição (2.3), página 21.
2. Utilize o medidor de áreas do Geogebra para verificar que a bimediana de um trapézio o divide em dois trapézios de mesma área, caso esta bimediana tenha extremidades nos pontos médios dos lados paralelos, de acordo com a Proposição (2.2), página 20.
3. Construa um trapézio $ABCD$, com $AB \neq CD$, e trace a bimediana com extremidades nos pontos médios dos lados não paralelos (base média). Calcule as áreas dos trapézios obtidos e verifique se são iguais, de acordo com a Observação (2.1), página 21.
4. Dados os segmentos de reta paralelos \overline{AB} e \overline{CD} , tais que $AB = 9$ e $CD = 5$, A, C lo \overline{BD} , calcule a comprimento do segmento determinado pelos pontos médios de \overline{AC} e \overline{BD} , de acordo com o Teorema (2.6), página 32.

5. Um trapézio $ABCD$ de lados paralelos \overline{AB} e \overline{CD} é tal que sua diagonais \overline{AC} e \overline{BD} intersectam-se em P determinando os comprimentos $AP = 9$, $CP = 6$ e $DP = 8$.
- Determine a medida de \overline{BP} ;
 - Sendo $AB = 12$, determine a medida de \overline{CD} ;
 - Determine a altura h do trapézio $ABCD$.
6. Um trapézio com bases $a = 9$ e $b = 6$ é dividido em quatro triângulos pelas suas diagonais, como ilustrado na figura (3.1).

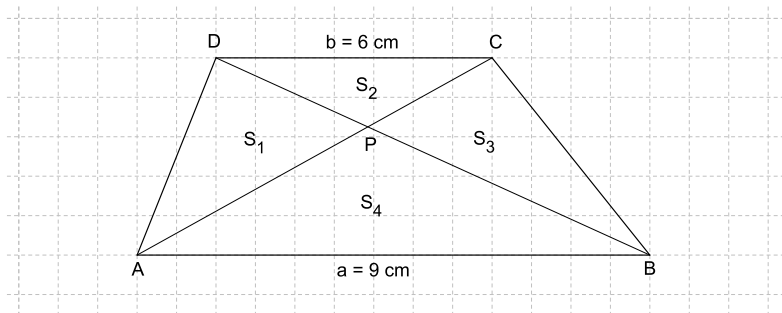


Figura 3.1: Ilustração para a questão 6

- Sabendo-se que $S_2 = 12$, determine:
- a altura h do trapézio;
 - as medidas das áreas S_1 , S_3 e S_4 .
7. (Questão extraída da Avaliação 3 - 2011 de MA13 - Geometria I - PROFMAT)
Um trapézio $ABCD$ tem altura h e bases $AB = a$ e $CD = b$. Seja F o ponto de intersecção das diagonais:
- Calcule as distância de F às duas bases:
 - Calcule as áreas dos triângulos ADF e BCF :
8. Dado o trapézio $ABCD$ de lado paralelos \overline{AB} e \overline{CD} , área $S = 24\sqrt{3}$, $AB = 10$, $AD = 6$, $\widehat{A} = 120^\circ$ e $\widehat{B} = 45^\circ$, determine:
- a medida do lado \overline{BC} ;
 - a medida do lado \overline{CD} .

3.2 Proposta de Soluções

Nesta seção apresentamos algumas propostas de soluções das questões contidas na seção anterior, entretanto lembramos que trata-se apenas de propostas, pois as soluções podem

ser diversas.

- Questão 1

Há infinitas possibilidades de solução. Sugerimos ao professor discutir algumas delas, considerando-se alguns tipos de trapézios. Para exemplificar, apresentamos as seguintes soluções:

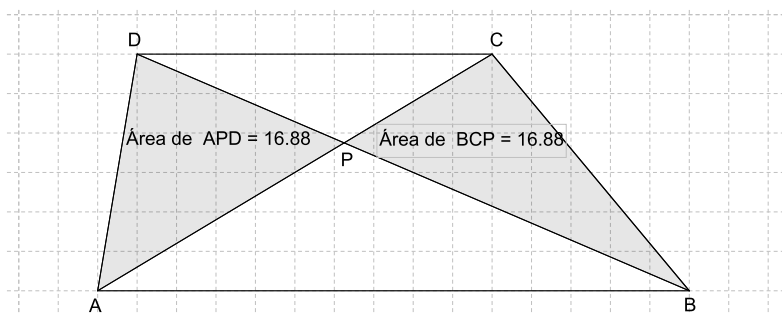


Figura 3.2: Ilustração 1 para a questão 1

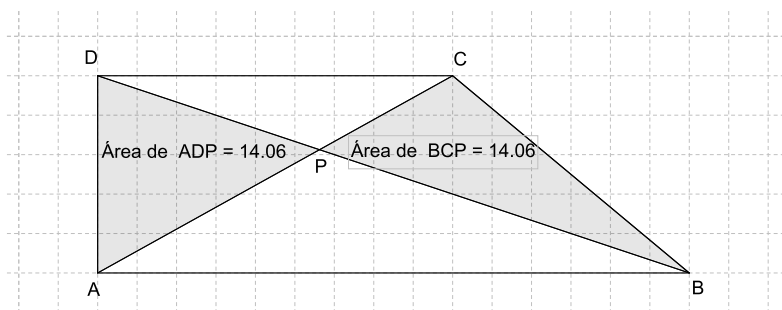


Figura 3.3: Ilustração 2 para a questão 1

- Questão 2

Esta questão admite infinitas possibilidades, assim, construa um trapézio qualquer e utilize a ferramenta do Geogebra para definir os pontos médios de suas bases. Em seguida, utilize o medidor de áreas do Geogebra para verificar que as áreas dos trapézios obtidos são iguais, conforme o seguinte exemplo:

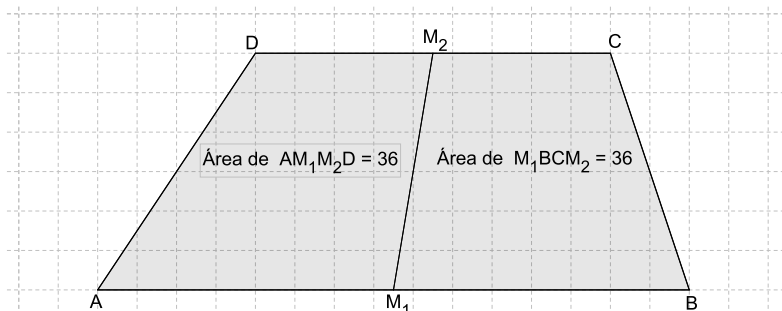


Figura 3.4: Ilustração para a questão 2

• Questão 3

Observe na figura (2.5), página 22 que a bimediana com extremidades nos lados não paralelos de um trapézio é, na verdade, sua base média. Calcule as áreas S_1 e S_2 e verifique que são diferentes, salvo se $a = b$.

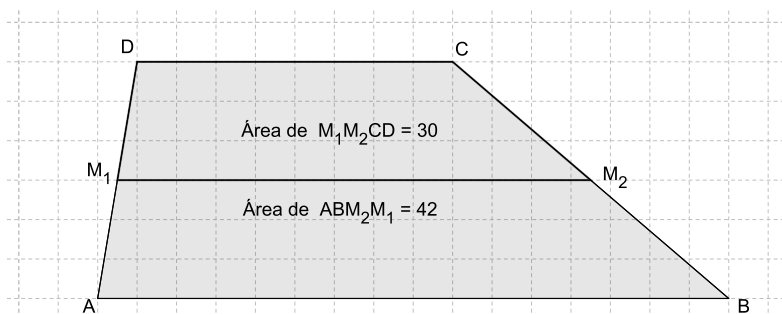


Figura 3.5: Ilustração para a questão 3

• Questão 4

Os pontos A, B, C, D determinam um trapézio, já que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Pela Relação (2.14), página 32.

$$v = \frac{9 - 5}{2} = 2$$

• Questão 5

(a) Por (1.4), na página 13, obtemos $BP = 12$.

- (b) Utilizando-se semelhança dos triângulos $\triangle ABP$ e $\triangle CDP$, chegamos a $CD = 8$.
- (c) Sabemos que o triângulo $\triangle CDP$ é isósceles de base 6. Então sua área é $3\sqrt{55}$. Como a razão de semelhança entre os triângulos $\triangle CDP$ e $\triangle ABP$ é $\frac{2}{3}$, então a razão de suas áreas é $\frac{4}{9}$, o que implica que a área do triângulo $\triangle ABP$ é $\frac{27\sqrt{55}}{4}$.
- Sendo S_2 a área do triângulo $\triangle CDP$ e S_4 a área do triângulo $\triangle ABP$ e K a área do trapézio $ABCD$, pelo Teorema (2.4), página 24, $K = (\sqrt{S_2} + \sqrt{S_4})^2$. Assim, $K = \frac{75\sqrt{55}}{4}$. Logo, a altura do trapézio é $h = \frac{15\sqrt{55}}{8}$.

• Questão 6

- (a) Sendo $S_2 = 12$ a área de um triângulo de base 6, então a altura de S_2 é $h_1 = 4$. Como o triângulo de área S_4 é semelhante ao triângulo de área S_2 , então sua altura é $h_2 = 6$. Logo a altura do trapézio é $h = 10$.
- (b) $S_4 = 27$, já que, pelo item anterior, trata-se de um triângulo de base 9 e altura 6.
- O trapézio tem área $S = 75$, então, como $S_1 = S_3$ (Proposição (2.3), pág. 21), temos $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 75$, que implica em $S_1 + 12 + S_1 + 27 = 75$, logo $S_1 = S_3 = 18$.

• Questão 7

- (a) Sabemos que os triângulos $\triangle ABF$ e $\triangle CDF$ são semelhantes. Sendo x a altura do primeiro triângulo e y a altura do segundo, conforme figura 3.6, temos $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{a+b}{h}$ de onde chegamos a $x = \frac{ah}{a+b}$ e $y = \frac{bh}{a+b}$.

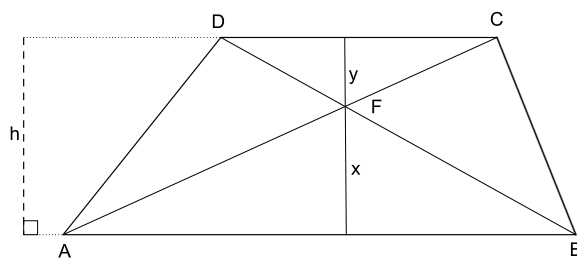


Figura 3.6: Ilustração para a questão 7

- (b) De acordo com a Proposição (2.3), página 21, os triângulos $\triangle ADF$ e $\triangle CBF$ têm áreas iguais. Logo,

$$S_{ADF} = S_{BCF} = S_{ABC} - S_{ABF} = \frac{ah}{2} - \frac{ax}{2}.$$

Substituindo x por $\frac{ah}{a+b}$, chegamos a $S_{ADF} = S_{BCF} = \frac{abh}{2(a+b)}$.

• Questão 8

- (a) Por (2.6), página 25, $\frac{AD}{BC} = \frac{\widehat{\text{sen } \hat{C}}}{\widehat{\text{sen } \hat{D}}}$. Assim, $BC = 2\sqrt{6}$.
- (b) Baixando D ortogonalmente sobre a reta suporte de \overline{AB} obtemos um triângulo-retângulo com hipotenusa 6. Com o auxílio da trigonometria encontramos a altura do trapézio $h = 3\sqrt{3}$. Aplicando-se a fórmula da área do trapézio encontraremos $DC = 6$.

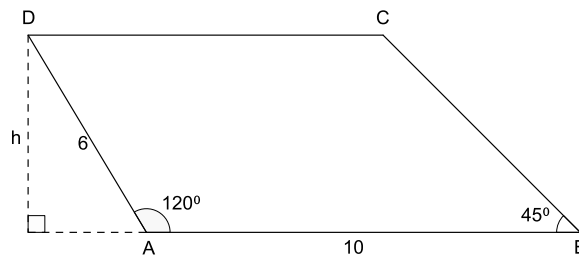


Figura 3.7: Ilustração para a questão 8

Capítulo 4

Considerações Finais

Durante a elaboração deste trabalho de conclusão de curso, tivemos a oportunidade de alcançar mais resultados do que pretendíamos diante do artigo que nos inspirou. Percebemos a real necessidade de se buscar por demonstrações consistentes em obras em língua estrangeira, como em [1] e [4], já que tais demonstrações não foram encontradas em português, como a demonstração da Relação de Euler para um Quadrilátero.

Mais importante que elaborar um trabalho de conclusão de curso é certificar-se de que este trabalho possa causar impacto em sua prática profissional.

O ensino da Geometria assumiu um papel secundário com a reforma de 1971, sendo seu uso resumido a exemplos dos conteúdos de Teoria dos Conjuntos. Tal reforma nos trouxe a proposta de currículo da Matemática Moderna que, na década de 1980, já apresentava fortes indícios de seu fracasso e os prejuízos causados na formação dos professores na parte de Geometria foram sentidos até o final dos anos 1990.

Ao longo do desenvolvimento de nosso trabalho, procuramos buscar não simplesmente por ferramentas que nos auxiliassem no processo de construção do conhecimento de nossos alunos, mas por ferramentas consistentes, que procurassem garantir a eles, além de conhecimento profundo das caracterizações dos trapézios, autonomia para a busca de recursos que os auxiliassem no aprendizado de conhecimentos geométricos diversos.

Com este trabalho pretendemos oferecer contribuições para a busca do resgate da prática de um ensino bem fundamentado, através de boas definições e demonstrações oferecendo a nossos alunos a educação com a qualidade que lhes é de direito.

Referências Bibliográficas

- [1] ALTSHILLER-COURT, N., *College Geometry - An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*, USA, Dover reprint, 2007.
- [2] JOSEFSSON, M., *Characterizations of Trapezoids*, USA, Paul Yiu, 2013.
- [3] MASTROCHIRICO, R., *Condições para que um Quadrilátero Convexo seja um Quadrilátero Pipa*, Dissertação de Mestrado, PROFMAT, Santo André (SP), UFABC, 2013.
- [4] MOISE, E., *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*, USA, The Book Company, 1990.
- [5] MUNIZ NETO, A. C., *Tópicos da Matemática Elementar Vol. 2*, Geometria Euclidiana Plana, Rio de Janeiro (RJ), SBM, 2012.