Universidade Federal do ABC

PROFMAT

DINO CHIARELLI JUNIOR

PROBABILIDADE E REDES ELÉTRICAS

Santo André, 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

DINO CHIARELLI JUNIOR

PROBABILIDADE E REDES ELÉTRICAS

Orientador: Prof. Dr. Rafael de Mattos Grisi

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de Matemática, Computação e Cognição para obtenção do título de Mestre

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO DINO CHIARELLI JUNIOR, E ORIENTADA PELO PROF. DR. RAFAEL DE MATTOS GRISI.

SANTO ANDRÉ, 2014

Dedico esse trabalho a Ana Paula Rodrigues e Melissa Chiarelli Rodrigues, minha esposa e minha recém chegada filha.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Minha esposa pelo apoio e a minha filha por servir de motivação na busca do aprimoramento profissional. Sem elas este trabalho não seria possível. Agradeço também a meu orientador, Rafael de Mattos Grisi, em especial pela atenção e paciência comigo durante o desenvolvimento deste.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo relacionar o estudo de Passeios Aleatórios em uma e duas dimensões com o funcionamento de redes elétricas, por meio de modelagem matemática, para que tal relação possa ser aplicada ao estudo de conteúdos relativos ao ensino da matemática no Ensino Médio, em especial no que se refere a Probabilidade, Matrizes e Funções.

Visando uma melhor organização dos conceitos e conteúdos abordados, o trabalho foi dividido em quatro capítulos. No primeiro capítulo serão apresentados os conceitos de Passeios Aleatórios em uma e duas dimensões, abordando o estudo de funções hamrônicas e de representação matricial de uma função harmônica. No segundo capítulo veremos métodos de resolução de funções harmônicas, em especial os métodos de relaxamentos, fazendo uma descrição e gerando uma motivação para o estudo do método, e o método de reolução por cadeias de Markov. O terceiro capítulo relaciona os conceitos até então estudados com redes elétricas, apresentando redes elétricas em uma e em duas dimensões, e também dando uma interpretação de voltagem e corrente, para na sequência apresentar uma interpretação probabilística de ambos. Por fim, no quarto capítulo são apresentadas atividades que podem ser realizadas em sala de aula, com alunos do Ensino Médio, para o estudo de Passeios Aleatórios, de forma simples e rápida, visando sua efetiva utilização em sala de aula.

Palavras-chave: redes elétricas, funções harmônicas, passeio aleatório

ABSTRACT

This work aims to relate the Random Walks study in one and two dimensions with the operation of electrical networks, through mathematical modeling, that such a relationship can be applied to the study of material related to the teaching of mathematics in high school, in particular refers to Probability, Arrays and functions.

For a better organization of the concepts covered and content, the work was divided into four chapters. Random Walks in the first chapter of the concepts will be presented in one and two dimensions, addressing the study hamrÃ´nicas functions and matrix representation of a harmonic function. In the second chapter we resolution methods of harmonic functions, particularly the relaxation methods, thereby generating a description and a motivation for the study of the method and reoluÃ§Ã£o method of Markov chains. The third chapter lists the concepts studied hitherto grids, grids having in one and in two dimensions, and also giving an interpretation of voltage and current in response to forward a probabilistic interpretation of both. Finally, in the fourth chapter contains activities that can be performed in the classroom, with high school students to the study of Random Walks, simply and quickly, for their effective use in the classroom.

Keywords: electric network, harmonic functions, random walk

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO

Na matemática temos diversos exemplos de estudos que nos levam ao entendimento de temas aparentemente desconexos ao abordado. Mas essa noção de relação entre temas e formas de analisar contextos e situações a partir de modelagens matemáticas ainda é pouco abordada no Ensino Médio. Esse é um dos motivos de escolha do tema abordado: a relação entre probabilidade de caminhos aleatórios e o funcionamento de redes elétricas.

Entre os estudos de probabilidade vamos nos ater ao estudo de caminhos aleatórios em uma e duas dimensões, e sua posterior relação com o funcionamento de redes elétricas, baseado no trabalho de Peter G. Doyle [1], e buscando a interdisciplinaridade entre a Matemática e a Física, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, que defende:

"*Entre os desafios, para superar deficiências, carências e equívocos, aponta-se a necessidade da convergência de toda a comunidade escolar em torno de um projeto pedagógico que faça a articulação não só das disciplinas de cada área, mas também de todas as áreas, tendo como objetivo central a realização dos objetivos educacionais da escola, a qualificação e promoção de todos os alunos*".

E, ainda citando o PCN, temos referências de como deve se proceder para a aplicação eficaz da interdisciplinaridade:

"*A LDB/96, ao considerar o Ensino Médio como última e complementar etapa da Educação Básica, e a Resolução CNE/98, ao instituir as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, que organizam as áreas de conhecimento e orientam a educação à promoção de valores como a sensibilidade e a solidariedade, atributos da cidadania, apontam de que forma o aprendizado de Ciências e de Matemática, já iniciado no Ensino Fundamental, deve encontrar complementação e aprofundamento no Ensino Médio.(...) No nível médio, esses objetivos envolvem, de um lado, o aprofundamento dos saberes disciplinares em Biologia, Física, Química e Matemática, com procedimentos científicos pertinentes aos seus objetos de estudo, com metas formativas particulares, até mesmo com tratamentos didáticos específicos.* ***De outro lado, envolvem a articulação interdisciplinar desses saberes, propiciada por várias circunstâncias, dentre as quais se destacam***

os conteúdos tecnológicos *e práticos, já presentes junto a cada disciplina,* ***mas particularmente apropriados para serem tratados desde uma perspectiva integradora.*** *Além disso, o conhecimento científico disciplinar é parte tão essencial da cultura contemporânea que sua presença na Educação Básica e, consequentemente, no Ensino Médio, é indiscutível. (...) Ao se denominar a área como sendo não só de Ciências e Matemática, mas também de suas Tecnologias, sinaliza-se claramente que, em cada uma de suas disciplinas, pretende-se promover competências e habilidades que sirvam para o exercício de intervenções e julgamentos práticos."* *Grifos nossos.*

Temas matemáticos em trabalhos de conclusão de curso geralmente são mais bem aproveitados e apreciados por pessoas com certo nível de conhecimento na área de exatas, porém tendo em vista o objetivo principal do presente curso, que é aprimorar os conhecimentos matemáticos de professores da Educação Básica, em especial aqueles da rede pública, este trabalho em particular será mais voltado ao uso de conhecimentos adquiridos no decorrer do Ensino Médio, até para que possa ser utilizado como referência para aulas neste ciclo de ensino.

O presente trabalho será dividido em quatro capítulos. No primeiro iremos abordar o estudo de caminhos aleatórios em uma e duas dimensões, introduzindo o conceito de função harmônica, sua característica de unicidade e demonstrando sua relação com o estudo de passeios aleatórios. No segundo capítulo, alguns métodos de interpretação e resolução de situações de caminhos aleatórios em uma e duas dimensões, em especial, abordaremos o Método das Cadeias de Markov, por ser de grande utilidade no ensino de operações entre matrizes no Esnino Médio. No terceiro capítulo, faremos uma relação entre o tema estudado e o funcionamento de redes elétricas em uma e duas dimensões, estabelecendo as relações entre o estudo matemático da probabilidade em caminhos aleatórios e sua aplicação em redes elétricas, objeto de estudo no presente trabalho. Por fim, o quarto capítulo trará alguns exemplos de atividades que podem ser aplicados em sala de aula.

1

PASSEIOS ALEATÓRIOS EM UMA DIMENSÃO E DUAS DIMENSÕES

1.1 PASSEIOS ALEATÓRIOS

Considere o seguinte problema: um bêbado está na esquina de um de N quarteirões alinhados, sendo que em um extremo desta linha encontra-se o bar, e no outro extremo encontra-se sua casa. Cada vez que decide se mover, o bêbado anda exatamente um quarteirão. Mas dado seu estado de embriaguez, ele pode optar por ir para a direita ou para a esquerda, com iguais chances de escolha do lado a seguir. Assim que atinge a próxima esquina, repete o mesmo procedimento de escolha do caminho, novamente com iguais chances de escolhas entre direita ou esquerda. O procedimento se repete até que o bêbado consiga chegar em casa ou no bar, o que acontecer primeiro. Pergunta-se então: qual a probabilidade do bêbado chegar em casa antes de chegar ao bar? O problema acima é conhecido como "o andar do bêbado"(drunkard's walks), e é um exemplo do tipo de problemas do qual trataremos neste trabalho.

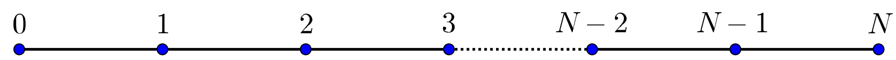

Figura 1: Sequência de ruas por onde caminha o bêbado.

Seja p_d a probabilidade do nosso andarilho ir para a direita a partir de uma dada esquina, e p_e a probabilidade de escolha pelo caminho contrário, ou seja, para a esquerda. Como as chances de escolhas são iguais e não há mais opções, temos que $p_e = p_d = 1/2$. Para melhor modelar o problema, consideremos como 0 a esquina onde se encontra o bar, 1 a esquina seguinte e assim sucessivamente até a esquina N, onde se encontra sua casa. Descrito deste modo, a cada movimento a posição do bêbado aumenta 1 com probabilidade $1/2$, ou diminui 1 também com probabilidade $1/2$.

O bêbado no exemplo acima é apenas um personagem, útil apenas para deixar o problema mais interessante, mas não tem nenhuma importância matemática. Podemos pensar o mesmo problema em diversas outras situações, como um jogo entre dois amigos, em que cada um aposta um real no resultado do lançamento de uma moeda não viciada. No caso de vitória, a pessoa ganha um real, e em caso de derrota perde este real para o adversário. Perde o jogo aquele que ficar sem dinheiro. Se o total de dinheiro dos dois jogadores for de N reais, e seguirmos ao longo do tempo a fortuna de um dos jogadores, perguntando qual a probabilidade deste jogador vencer, estamos então na mesma situação descrita pelo problema do bêbado.

Outro exemplo, que será melhor explorado no capítulo 3, está relacionado com o transporte de elétrons em uma rede elétrica. Considere uma rede de resistências em série, como por exemplo as lâmpadas colocadas para enfeitar uma árvore de natal. Para modelar o fluxo de energia elétrica ao longo da rede, considere que cada elétron se movimenta aleatoriamente entre os nós da rede (pontos entre resistências), escolhendo para onde ir com probabilidade inversamente proporcional a resistência naquele caminho. Se considerarmos que todas as resistências são iguais, então o elétron vai para um lado ou para o outro sempre com probabilidade $1/2$. Este exemplo, apesar de similar, possui diferenças para os exemplos anteriores, principalmente na decisão de quando acabar o passeio do elétron, e será explorado com maior profundidade no capítulo 3.

Voltando ao andar do bêbado, o que queremos determinar é a probabilidade $P(x)$ de, a partir de um ponto $x \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$, nosso amigo embriagado chegar em casa (ponto N) antes de alcançar o bar (ponto 0). Veremos a seguir que a função $P(x)$, com $x \in 0, 1, 2, 3, \ldots, N$, pode ser descrita da seguinte forma

$$\begin{cases} P(0) = 0; \\ P(N) = 1; \\ P(x) = \frac{1}{2}P(x-1) + \frac{1}{2}P(x+1), \quad \text{para } x = 1, 2, \ldots, N-1. \end{cases} \tag{1.1}$$

Como veremos, a solução deste problema em $P(x)$ sempre será $P(x) = x/N$, que possui todas as propriedades acima. De fato

- $P(0) = 0/N = 0$;
- $P(N) = N/N = 1$;

- E para $x = 1, 2, \ldots, N-1$

$$P(x) = \frac{x}{N} = \frac{1}{N}\left[\frac{x-1}{2} + \frac{x+1}{2}\right] = \frac{1}{2}P(x-1) + \frac{1}{2}P(x+1).$$

Mas não é necessário encontrarmos a solução para determinar tais propriedades. De fato, o que queremos fazer é utilizá-las para encontrar a solução do problema! Tentemos então determinar tais propriedades a partir apenas da descrição do modelo.

As duas primeiras propriedades em (1.1) são simples, e vem do fato de que os pontos 0 e N são pontos de encerramento do passeio, onde o bêbado permanece uma vez que os alcança. Portanto, se o bêbado começa o passeio no bar, ele nunca sairá de lá, e a probabilidade de chegar em casa é 0. Por outro lado, se ele começa em casa, a probabilidade de chegar em casa é claramente 1, uma vez que ele já está lá!

Já a terceira propriedade vem da seguinte argumentação: para chegar em casa a partir de um ponto x, o bêbado deve primeiro se mover para o ponto $x+1$ ou para o ponto $x-1$. Uma vez neste novo ponto, voltamos ao mesmo problema inicial, mudando apenas o ponto de início do passeio. Para deixar mais claro, defina os eventos

$$A_x = \{\text{chegar em casa antes do bar saindo da esquina } x\},$$

$$D = \{\text{primeiro movimento foi para a direita}\}$$

e

$$E = \{\text{primeiro movimento foi para a esquerda}\}.$$

Assim, como as probabilidades do bêbado se mover para $x+1$ ou $x-1$ são iguais a $1/2$, então

$$\mathbf{P}(A_x \cap D) = p_d \cdot \mathbf{P}(A_{x+1}) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{P}(A_{x+1}),$$

enquanto

$$\mathbf{P}(A_x \cap E) = p_e \cdot \mathbf{P}(A_{x-1}) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{P}(A_{x-1}).$$

Segue que

$$P(x) = \mathbf{P}(A_x) = \mathbf{P}(A_x \cap D) + \mathbf{P}(A_x \cap E) = \frac{1}{2}P(x-1) + \frac{1}{2}P(x+1),$$

como estávamos buscando.

Com isso estamos prontos para encontrar a função $P(x)$. Mas antes, para deixarmos tudo um pouco mais claro, consideraremos um exemplo particular.

Exemplo 1.1. Veremos agora uma outra forma de analisarmos um estudo de passeio aleatório, tanto para abordar outro conteúdo previsto no Ensino Médio, quanto para futura utilização nos capítulos seguintes. Para tanto voltemos ao nosso problema do bêbado, onde o caminho será composto de 4 quarteirões, com o bar localizado em 0 e a casa em 4. Assim, se $P(x)$ é a probabilidade do bêbado chegar em casa antes de chegar no bar, partindo da esquina x, então da equação (1.1), precisamos que

$$\begin{cases} P(0) = 0; \\ P(4) = 1; \\ P(x) = \frac{1}{2}P(x-1) + \frac{1}{2}P(x+1), \quad \text{para } x = 1, 2, 3. \end{cases}$$

De forma menos compacta, podemos escrever

$$\begin{cases} P(0) & = 0 \\ P(1) & = \frac{1}{2}P(0) + \frac{1}{2}P(2) \\ P(2) & = \frac{1}{2}P(1) + \frac{1}{2}P(3) \\ P(3) & = \frac{1}{2}P(2) + \frac{1}{2}P(4) \\ P(4) & = 1, \end{cases}$$

ou ainda,

$$\begin{cases} 2P(1) - P(2) & = 0 \\ -P(1) + 2P(2) - P(3) & = 0 \\ -P(2) + 2P(3) & = 1, \end{cases}$$

e resolvendo o sistema encontramos

$$P(1) = \frac{1}{4}; \ P(2) = \frac{1}{2} \text{ e } P(3) = \frac{3}{4}.$$

É interessante notar que no exemplo acima encontramos que $P(x) = x/4$, como comentamos anteriormente. E como o sistema linear acima possui apenas esta solução, não existem outras funções possíveis com as mesmas propriedades, ao menos para $N = 4$.

A seguir vamos resolver o problema no caso geral, usando uma técnica diferente da usada no exemplo. Para isso, note primeiro que, da equação (1.1) temos

$$\frac{1}{2}P(x) + \frac{1}{2}P(x) = \frac{1}{2}P(x-1) + \frac{1}{2}P(x+1),$$

e portanto

$$P(x) - P(x-1) = P(x+1) - P(x).$$

Assim, se $L(x) = P(x) - P(x-1)$ então

$$L(x) = L(x-1) = \cdots = L(1) = k,$$

para alguma constante k.

Segue que

$$P(x) = P(x-1) + k = P(x-2) + 2k = \cdots = P(0) + x \cdot k,$$

e portanto

$$P(x) = P(0) + x \cdot k.$$

Fazendo $x = N$, encontramos

$$P(N) = P(0) + N \cdot k,$$

de onde segue que

$$k = \frac{P(N) - P(0)}{N},$$

e

$$P(x) = P(0) + \left(\frac{P(N) - P(0)}{N}\right) x \tag{1.2}$$

Da equação (1.2), fazendo $P(0) = 0$ e $P(N) = 1$, temos

$$P(x) = \frac{x}{N}.$$

1.2 FUNÇÕES HARMÔNICAS

Funções com propriedades similares às de $P(x)$ aparecem em diversos outros modelos e problemas. No capítulo 2, por exemplo, explicaremos em detalhes um modelo discreto para transmissão de energia térmica, e mostraremos que a temperatura da barra após atingir o equilíbrio pode ser descrita de forma similar a $P(x)$. Por esta razão vamos dedicar esta seção a análise de tais funções, estudando suas principais características.

Definição 1.1. Seja $f(x)$ uma função definida em $S = \{0, 1, 2, 3, ..., N\}$. Os pontos do conjunto $I = \{1, 2, 3, ...N - 1\}$ são chamados de *pontos interiores* de S, enquanto $F = \{0, N\}$ são ditos *pontos extremos* ou *fronteira* de S. Diremos que $f(x)$ é **harmônica** em S se, fixados valores para $f(0)$ e $f(N)$, vale que

$$f(x) = \frac{f(x-1) + f(x+1)}{2}, \text{ para } x \in I. \tag{1.3}$$

Como vimos na seção anterior, a probabilidade $P(x)$ do bêbado chegar em casa antes de chegar ao bar tendo saído da esquina x é uma função harmônica.

Outros exemplos de funções harmônicas são as funções afim, dadas por $f(x) = ax + b,\ x \in S,\ a, b \in \mathbb{R}$. De fato, se $x \in I$ temos

$$\frac{f(x+1) + f(x-1)}{2} = \frac{a(x+1) + b + a(x-1) + b}{2} = ax + b = f(x),$$

e portanto $f(x)$ é harmônica em S.

Observação 1.2.1. *É possível darmos uma interpretação probabilística para funções harmônicas com condições de fronteira diferentes de* 0 *e* 1*. Para isso considere que nosso bêbado carrega no bolso um total de x_1 reais. Se ele consegue chegar em casa antes de chegar no bar, ele não gastará mais nem um centavo, mantendo assim todo o seu dinheiro. Mas se ele chegar ao bar ele acabará gastando mais dinheiro em bebida, e terminará a noite com apenas x_0 reais. Se $m(x)$ é a quantidade média de dinheiro que o bêbado termina a noite, dado que começou o passeio na esquina x, então*

$$m(x) = x_1 P(x) + x_0(1 - P(x)).$$

Isso porque com probabilidade $P(x)$, o bêbado acabará a noite em casa, permanecendo com x_1 reais, e com probabilidade $1 - P(x)$ ele voltará ao bar, e acabará a noite com x_0 reais.

Para mostrar que $m(x)$ é harmônica, reescreva $m(x)$ como

$$m(x) = (x_1 - x_0)P(x) + x_0,$$

e note que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left[m(x+1)+m(x-1)\right] &= \frac{1}{2}\left[(x_1-x_0)P(x+1)+x_0+(x_1-x_0)P(x-1)+x_0\right]\\ &= (x_1-x_0)\frac{1}{2}\left[P(x+1)+P(x-1)\right]+x_0\\ &= (x_1-x_0)P(x)+x_0\\ &= m(x).\end{aligned}$$

Além disso, temos

$$m(0) = (x_1-x_0)P(0)+x_0 = x_0$$

e

$$m(N) = (x_1-x_0)P(N)+x_0 = x_1.$$

Em resumo, $m(x)$ *é uma função harmônica com* $m(0) = x_0$ *e* $m(N) = x_1$.

Analisando a solução do problema do bêbado apresentada anteriormente notamos que ela se utilizou apenas das propriedades já conhecidas da função $P(x)$, deixando o uso dos valores em 0 e N apenas no final. Concluímos assim que toda função harmônica unidimensional deve ter a forma $f(x) = ax+b$ (ver equação (1.2)), onde as constantes a e b são determinadas de forma única pelos valores de f nos extremos de S. Infelizmente, quando passarmos para o caso bi-dimensional, a solução geral não possuirá mais uma expressão explícita tão clara, e precisaremos apelar para outros métodos se quisermos entender tais funções. Por esta razão, vamos dedicar os próximos parágrafos a estudar algumas propriedades das funções harmônicas, utilizando para isso apenas a definição de tais funções.

É interessante notar que funções afim são monótonas, e portanto os valores máximo e mínimo devem ser atingidos nos extremos do conjunto S. Esta é uma característica comum a todas as funções harmônicas, como vemos no resultado abaixo.

Teorema 1.2. *[Princípio do Máximo para Funções Harmônicas] Se* $f(x)$ *é uma função harmônica definida em* S*, então* f *assume seus valores máximo(*M*) e mínimo(*m*) nos extremos de* S*.*

Demonstração. Se $m = M$ então $f(x)$ é constante e a afirmativa é trivial.

Estudemos então o caso em que $m < M$. Tome $x \in S$ tal que $f(x) = M$ e suponha que $x \in I$. Neste caso, como $f(x)$ é a média aritmética entre $f(x-1)$ e $f(x+1)$, então M também deve ser o valor de $f(x-1)$ e $f(x+1)$, pois caso contrário teremos $f(x-1) > M$ ou $f(x+1) > M$, o que é absurdo, pois M é o valor máximo de $f(x)$. Usando o mesmo argumento para $x+1$ e $x-1$, encontramos que $f(x+2) = f(x-2) = M$, e seguindo da mesma forma até atingir os extremos, concluímos que $f(x) = M$ para todo x, e portanto $f(x)$ é constante, o que contradiz a afirmativa de que $m < M$. Segue portanto que x está no extremo de S.

A demonstração para m mínimo de $f(x)$ é análoga e pode ficar como exercício para o leitor. □

Como já comentamos, a solução apresentada anteriormente garante que toda função harmônica em S é do tipo $f(x) = ax + b$, com constantes a, b dependendo apenas dos valores de f nos extremos de S. Para garantirmos que f seja única precisamos fixar seu valor em 0 e N, e garantir que os valores de $f(x)$ nos extremos de S definam de forma única os valores de a e b. Mas assim como no princípio do máximo, apresentamos abaixo outra saída mais simples, e que pode ser estendida para outras redes.

Teorema 1.3. *Fixadas constantes $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ existe apenas uma função harmônica $f(x)$ em S tal que $f(0) = x_0$ e $f(N) = x_1$.*

Demonstração. Para mostrar existência, faça para $x \in S$

$$f(x) = \frac{(x_1 - x_0)}{N}x + x_0.$$

Já vimos anteriormente que toda função afim é harmônica, e portanto $f(x)$ é harmônica. Além disso, temos $f(0) = x_0$ e $f(N) = x_1$.

Para mostrar a unicidade, tome $g(x)$ uma função harmônica definida em S com $g(0) = x_0$ e $g(N) = x_1$, e defina $h(x) = f(x) - g(x)$.

Segue que

$$\begin{aligned} \frac{h(x+1)+h(x-1)}{2} &= \frac{f(x+1)+f(x-1)}{2} - \frac{g(x+1)+g(x-1)}{2} \\ &= f(x) - g(x) \\ &= h(x), \end{aligned} \tag{1.4}$$

e portanto $h(x)$ é harmônica.

Mas $h(0) = f(0) - g(0) = 0$ e $h(N) = f(N) - g(N) = 0$, e como o máximo e mínimo de toda função harmônica é atingido em 0 e N, então o mínimo e máximo de $h(x)$ são iguais a 0 e $h(x) = 0\ \forall x \in S$. De onde concluímos que $f(x) = g(x)$, e como g era arbitrária, o resultado segue. □

1.2.1 *Representação Matricial de Funções Harmônicas*

Nesta seção apresentaremos uma forma alternativa de representar funções harmônicas, bastante útil nas análises do próximo capítulo. Para tal, voltemos ao exemplo 1.1, onde temos o problema do bêbado para $N = 4$. Lembre-se que não queremos aqui apresentar uma nova solução para o problema, apenas mostrar uma nova forma de caracterizar funções harmônicas. Comecemos então por representar a função $P(x),\ x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, como uma matriz coluna. Ou seja,

$$P = \begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \\ P(3) \\ P(4) \end{bmatrix}.$$

Sabemos que $P(x)$ é uma função harmônica com $P(0) = 0$ e $P(4) = 1$, e portanto

$$\begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \\ P(3) \\ P(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(0) \\ \frac{1}{2}P(0) + \frac{1}{2}P(2) \\ \frac{1}{2}P(1) + \frac{1}{2}P(3) \\ \frac{1}{2}P(2) + \frac{1}{2}P(4) \\ P(4) \end{bmatrix}.$$

Mas a matriz do lado direito na igualdade acima por ser escrita da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} P(0) \\ \frac{1}{2}P(0) + \frac{1}{2}P(2) \\ \frac{1}{2}P(1) + \frac{1}{2}P(3) \\ \frac{1}{2}P(2) + \frac{1}{2}P(4) \\ P(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \\ P(3) \\ P(4) \end{bmatrix}.$$

Ou seja, se f é harmônica em S então

$$\begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \\ P(3) \\ P(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \\ P(3) \\ P(4) \end{bmatrix},$$

ou de forma mais curta

$$P = AP, \tag{1.5}$$

onde A é a matriz 5×5 construída acima.

Do mesmo modo, se f é uma função harmônica em $S = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$, então fazendo

$$f = \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N) \end{bmatrix}$$

e A a matriz $(N+1) \times (N+1)$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & & & \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

então f deve satisfazer a equação matricial

$$f = Af. \tag{1.6}$$

Representando desta forma, reduzimos a representação de uma função harmônica de um sistema de $N+1$ equações lineares, para uma equação matricial e duas equações fixando os valores da função nos extremos. As vantagens desta representação ficarão mais claras no próximo capítulo, quando apresentarmos novos métodos de solução baseados nesta representação.

1.3 PASSEIOS ALEATÓRIOS EM DUAS DIMENSÕES

Vamos agora tornar um pouco mais complexa nossa análise sobre caminhos aleatórios. Tomemos novamente nosso andarilho bêbado, mas para tornar a situação mais interessante (apenas neste trabalho, não faça isso ou permita que outro faça), vamos colocá-lo no controle de um automóvel, com o qual ele pode não só andar em uma única direção, escolhendo apenas entre direita e esquerda, mas em quatro sentidos, norte, sul, leste ou oeste. Porém, em várias esquinas do caminho ocorrem comandos policiais (que representaremos por 0), nos quais, caso o bêbado passe, terá seu veículo apreendido e será encaminhado para uma delegacia. Existem ainda caminhos pelos quais ele pode acessar uma avenida principal (representaremos por 1) e chegar em casa evitando a fiscalização, como exemplificado na figura 2 a seguir. Vamos supor que a cada esquina onde não haja policial ou acesso à avenida, nosso motorista pode optar, com iguais chances de escolha, entre qualquer um dos 4 sentidos citados, e assim que chega à próxima esquina faz novamente o mesmo tipo de escolha. O bêbado segue assim até chegar a uma avenida principal ou ser parado pela polícia.

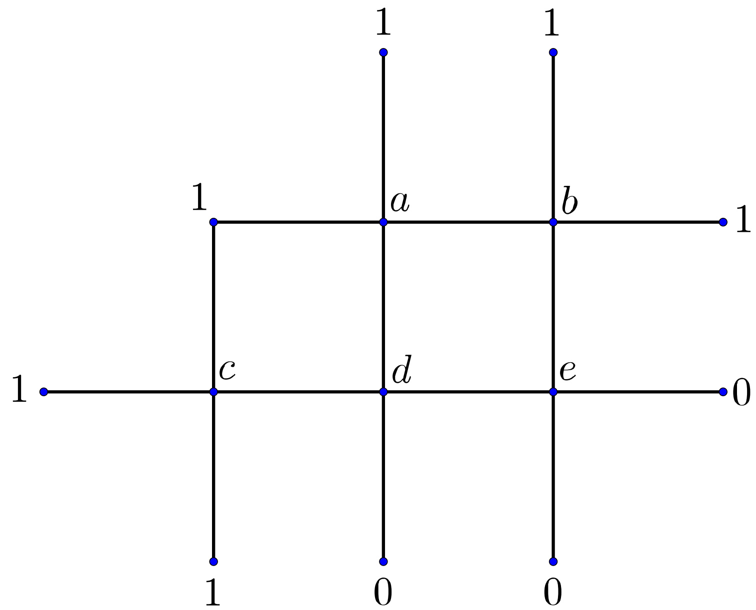

Figura 2: Caminhos possíveis para o bêbado ao volante.

As probabilidades de ir para leste, oeste, norte ou sul serão, respectivamente, p_l, p_o, p_n e p_s, e aqui serão todas iguais a $\frac{1}{4}$. E assim como no caso unidimensional estamos interessados em calcular a probabilidade do bêbado chegar a uma avenida principal antes de ser pego pela polícia.

Para isso, considerando ainda as ruas da figura 2, denote por I as esquinas onde o motorista ainda não escapou ou foi pego, por F_0 o conjunto de esquinas onde existe barreira policial, e F_1 aquelas que dão acesso à avenida, representados na figura pelos valores 0 e 1, respectivamente. Faça $S = I \cup F_0 \cup F_1$ e para $x, y \in S$ denote por $x \sim y$ o fato de existir uma rua entre x e y. Neste caso diremos que x, y são vizinhos.

Assim, seguindo os mesmos argumentos do caso unidimensional, podemos ver que cada sítio em I tem 4 vizinhos e portanto, se denotarmos por $P(x),\ x \in S$, a probabilidade do bêbado chegar à avenida, antes de ser pego pela polícia, então

$$\begin{cases} P(x) = 0 & \text{, se } x \in F_0 \\ P(x) = 1 & \text{, se } x \in F_1 \\ P(x) = \frac{1}{4} \sum\limits_{y \sim x} f(y) & \text{, se } x \in I. \end{cases} \tag{1.7}$$

Apresentamos a solução no seguinte exemplo.

Exemplo 1.2. Continuando com a rede viária descrita na Figura 2, as expressões em (1.7) são escritas como

$$\begin{cases} P(a) &= \frac{1}{4}(1 + 1 + P(b) + P(d)) \\ P(b) &= \frac{1}{4}(1 + 1 + P(a) + P(e)) \\ P(c) &= \frac{1}{4}(1 + 1 + 1 + P(d)) \\ P(d) &= \frac{1}{4}(0 + P(a) + P(c) + P(e)) \\ P(e) &= \frac{1}{4}(0 + 0 + P(b) + P(d)). \end{cases}$$

Ou ainda

$$\begin{cases} 4P(a) - P(b) - P(d) & = 2 \\ -P(a) + 4P(b) - P(e) & = 2 \\ 4P(c) - P(d) & = 3 \\ -P(a) - P(c) + 4P(d) - P(e) & = 0 \\ -P(b) - P(d) + 4P(e) & = 0. \end{cases}$$

E resolvendo o sistema, encontramos

$$P(a) = \frac{293}{356},\ P(b) = \frac{70}{89},\ P(c) = \frac{78}{89},\ P(d) = \frac{45}{89} \text{e} P(e) = \frac{115}{356}.$$

Mas nem sempre as redes das quais tratamos possuem esta estrutura de malha, onde cada ponto do conjunto I possui exatamente o mesmo número de vizinhos.

Considere, por exemplo, a rede da Figura 3.

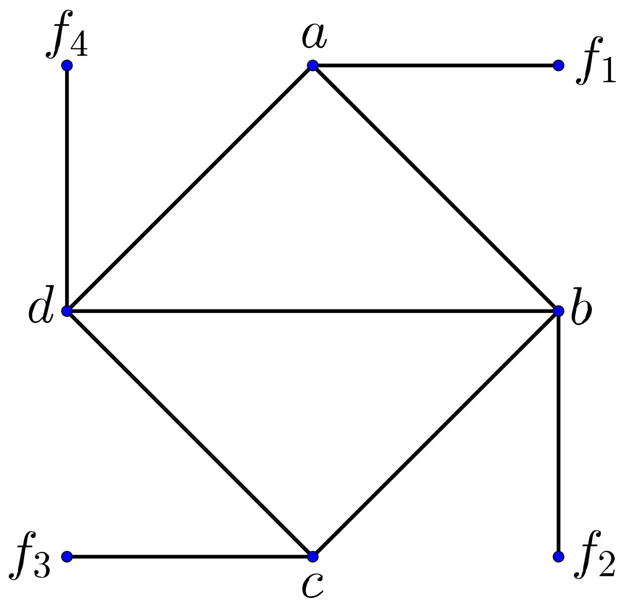

Figura 3: Exemplo de rede com número de vizinhos distintos em cada ponto.

Neste caso, definindo $I = \{a, b, c, d\}$ e $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, e denotando por $n(x)$ o número de vizinhos de um ponto x, teremos

$$n(a) = 3, \ n(b) = 4, \ n(c) = 3 \ \text{ e } \ n(d) = 4.$$

Para consolidar a ideia, considere o exemplo abaixo.

Exemplo 1.3. Considere agora um passeio aleatório nesta rede que, sempre que o andarilho (bêbado, elétron ou algo similar) estiver em um ponto $x \in I$, ele escolhe para que vizinho de x deve seguir com a mesma probabilidade para cada vizinho. Ou seja, se $x \sim y$ então a probabilidade P_{xy} de ir de x para y é $1/n(x)$.

Considere também que o passeio acaba quando atingir um ponto de F. Da mesma forma, se o andarilho começar em um ponto de F, ele permanece no mesmo lugar.

Nestas condições pergunta-se: qual probabilidade do andarilho atingir os pontos f_1, f_3 antes de chegar aos pontos f_2, f_4?

Usando o mesmo tipo de argumentos dos exemplos anteriores, vemos que $P(f_1) = P(f_3) = 1$, $P(f_2) = P(f_4) = 0$ e

$$\begin{cases} P(a) &= \frac{1}{n(a)}\left(P(f_1) + P(b) + P(d)\right) \\ P(b) &= \frac{1}{n(b)}\left(P(f_2) + P(a) + P(c) + P(d)\right) \\ P(c) &= \frac{1}{n(c)}\left(P(f_3) + P(b) + P(d)\right) \\ P(d) &= \frac{1}{n(d)}\left(P(f_4) + P(a) + P(b) + P(c)\right), \end{cases}$$

e portanto

$$\begin{cases} P(a) &= \frac{1}{3}\left(1 + P(b) + P(d)\right) \\ P(b) &= \frac{1}{4}\left(P(a) + P(c) + P(d)\right) \\ P(c) &= \frac{1}{3}\left(1 + P(b) + P(d)\right) \\ P(d) &= \frac{1}{4}\left(P(a) + P(b) + P(c)\right). \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos

$$P(a) = P(c) = \frac{3}{5} \quad \text{e} \quad P(b) = P(d) = \frac{2}{5}.$$

1.4 FUNÇÕES HARMÔNICAS EM DUAS DIMENSÕES

Assim como no caso unidimensional, a probabilidade P definida nos pontos S de uma rede bidimensional, são exemplos de uma classe importante de funções, que analogamente, chamaremos de *funções harmônicas*, definidas abaixo. Para isso, precisamos primeiro entender o que chamaremos de uma rede bidimensional.

Definição 1.4. Chamaremos de *rede bidimensional*, ou simplesmente rede, uma estrutura $\mathcal{R}$ formada por um conjunto de pontos S no plano e um conjunto de ligações entre estes pontos. Diremos que $x, y \in S$ são vizinhos na rede $\mathcal{R}$, se existir uma ligação entre eles, e denotaremos por $x \sim y$.

Um exemplo de rede é o conjunto de ruas e esquinas descritas no problema do motorista embriagado.

Para a definição que segue, dividiremos os pontos em S de uma rede $\mathcal{R}$ em dois conjuntos, I e F. O conjunto I será chamado de *interior* de S, e o conjunto F, por sua vez, será chamado de *fronteira* de S.

Definição 1.5. Seja $\mathcal{R}$ uma rede com pontos em $S = I \cup F$. Diremos que uma função $f(x)$ definida em S é **harmônica** na rede $\mathcal{R}$ se, fixados valores para $f(x),\ x \in F$, vale que

$$f(x) = \frac{1}{n(x)} \sum_{y:y\sim x} f(y), \text{ para } x \in I. \tag{1.8}$$

Assim como no caso unidimensional, funções harmônicas com valores na fronteira distintos de 0 e 1, também tem interpretação probabilística. Para isso se $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$, associe a cada $x_k \in F$ um valor a_k. Podemos pensar que a_k é algum prêmio recebido pelo motorista ao atingir x_k (multas nas barreiras policiais ou dinheiro economizado nas saídas para avenidas, por exemplo). Pergunta-se então qual o prêmio médio que o motorista espera levar.

Para responder esta pergunta, para cada $k = 1, \ldots, n$, defina $P_k(x)$ como a probabilidade do bêbado chegar a x_k antes de qualquer outro ponto da fronteira. Como vimos, $P_k(x)$ é uma função harmônica com $P_k(x_k) = 1$ e $P_k(x_i) = 0$ se $i \neq k$.

Agora, se $m(x)$ é o valor médio que o motorista espera levar, quando inicia o passeio em x, então

$$m(x) = a_1 P_1(x) + \cdots + a_n P_n(x).$$

Como $P_k(x)$ são funções harmônicas, um cálculo simples mostra que $m(x)$ é também harmônica, e que $m(x_k) = a_k$ para todo $k = 1, \ldots, n$.

Infelizmente, ao contrário do que acontece em uma dimensão, não temos como encontrar um expressão geral explícita para uma função harmônica em 2 dimensões. Isso por que a única real diferença entre duas redes em 1 dimensão é o seu total de pontos, enquanto em 2 dimensões a geometria da rede pode ser muito mais complexa.

Por esta razão faremos a seguir análises gerais, similares às já feitas no caso unidimensional, que não dependerão da geometria da rede em questão.

Para começar, analisemos o Princípio do Máximo para funções harmônicas em duas dimensões. Observe primeiro que, assim como em uma dimensão, se f é harmônica, seu valor em um ponto de I é a média aritmética do seu valor nos vizinhos do ponto, e portanto se o máximo fosse atingido neste ponto, o valor nos vizinhos deveria ser o mesmo. Com isso podemos repetir os mesmos argumentos utilizados na prova do Teorema 1.2 para mostrar que

Teorema 1.6. *[Princípio do Máximo para Funções Harmônicas] Seja $f(x)$ uma função harmônica definida nos pontos S de uma rede bidimensional. Se F denota a fronteira de S, então f assume seus valores máximo(M) e mínimo(m) em F.*

Tome agora duas funções harmônicas f e g em uma mesma rede $\mathcal{R}$, tal que f e g coincidam nos pontos de F. Se definirmos $h(x) = f(x) - g(x)$, para $x \in I$, vale que

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) \\ &= \frac{1}{n(x)} \sum_{y:y\sim x} f(y) - \frac{1}{n(x)} \sum_{y:y\sim x} g(y) \\ &= \frac{1}{n(x)} \sum_{y:y\sim x} [f(y) - g(y)] \\ &= \frac{1}{n(x)} \sum_{y:y\sim x} h(y). \end{aligned}$$

Segue que h é também harmônica. Assim, da mesma forma que na demonstração do Teorema 1.3, podemos mostrar que

Teorema 1.7. *Seja $F = \{x_1, \dots, x_n\}$ a fronteira de um conjuto de pontos S em uma rede e $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Nestas condições, existe apenas uma função harmônica $f(x)$ em S tal que $f(x_k) = a_k$ para todo $x_k \in F$.*

Demonstração. A existência de tais funções dependem de argumentos mais sofisticados, que serão apresentados com mais cuidado no próximo capítulo.

A unicidade segue da mesma forma que no caso unidimensional, usando os argumentos acima. $\square$

1.4.1 *Representação Matricial de Funções Harmônicas Bidimensionais*

Para a representação matricial de funções harmônicas em duas dimensões, façamos uma pequena alteração na figura 2, denotando por f os pontos de fuga e por s o pontos de fiscalização, ou seja, os pontos **sem saída** para nosso motorista. Colocaremos os pontos f e s em ordem no sentido horário, como mostrado na figura 4

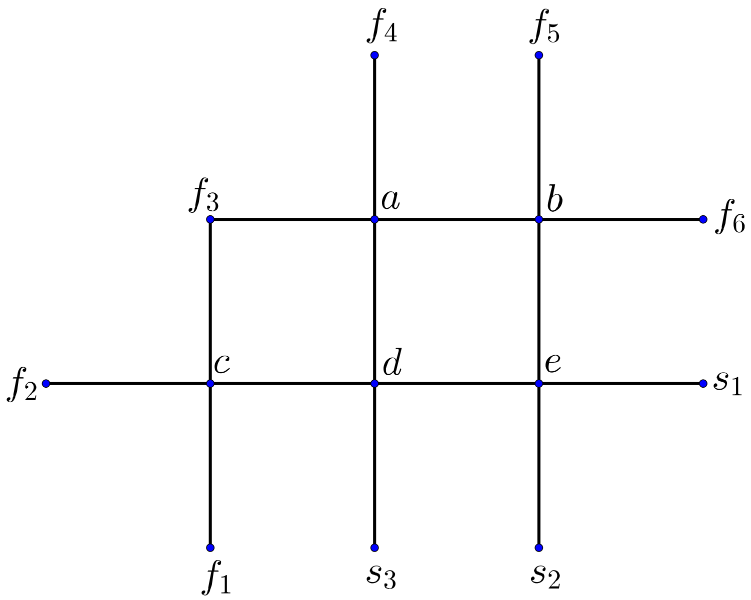

Figura 4: Caminhos possíveis para o bêbado ao volante.

Temos um passeio aleatório em duas dimensões, na qual a probabilidade de fuga em um dos pontos f_i é igual a 1, a probabilidade de fuga em um dos pontos s_i é nula, e a probabilidade de movimentação nos demais pontos é de $1/4$ para cada sentido. Assim a função $P(x)$, que dá a probabilidade de fuga quando o passeio inicia em x, é dada por uma função harmônica, que pode ser descrita por

$$\begin{cases} P(a) &= \frac{1}{4}P(f_3) + \frac{1}{4}P(f_4) + \frac{1}{4}P(b) + \frac{1}{4}P(d) \\ P(b) &= \frac{1}{4}P(f_5) + \frac{1}{4}P(f_6) + \frac{1}{4}P(a) + \frac{1}{4}P(e) \\ P(c) &= \frac{1}{4}P(f_1) + \frac{1}{4}P(f_2) + \frac{1}{4}P(f_3) + \frac{1}{4}P(d), \\ P(d) &= \frac{1}{4}P(s_3) + \frac{1}{4}P(a) + \frac{1}{4}P(c) + \frac{1}{4}P(e) \\ P(e) &= \frac{1}{4}P(s_1) + \frac{1}{4}P(s_2) + \frac{1}{4}P(b) + \frac{1}{4}P(d) \end{cases}$$

com condições de fronteira dadas por

$$P(f_1) = P(f_2) = P(f_3) = P(f_4) = P(f_5) = P(f_6) = 1$$

e

$$P(s_1) = P(s_2) = P(s_3) = 0.$$

Assim, do mesmo modo que no caso unidimensional, uma função harmônica h qualquer nesta mesma rede poderá ser descrita pelo seguinte sistema

$$\begin{cases} h(f_1) &= h(f_1) \\ h(f_2) &= h(f_2) \\ h(f_3) &= h(f_3) \\ h(f_4) &= h(f_4) \\ h(f_5) &= h(f_5) \\ h(f_6) &= h(f_6) \\ h(s_1) &= h(s_1) \\ h(s_2) &= h(s_2) \\ h(s_3) &= h(s_3) \\ h(a) &= \frac{1}{4}h(f_3) + \frac{1}{4}h(f_4) + \frac{1}{4}h(b) + \frac{1}{4}h(d) \\ h(b) &= \frac{1}{4}h(f_5) + \frac{1}{4}h(f_6) + \frac{1}{4}h(a) + \frac{1}{4}h(e) \\ h(c) &= \frac{1}{4}h(f_1) + \frac{1}{4}h(f_2) + \frac{1}{4}h(f_3) + \frac{1}{4}h(d) \\ h(d) &= \frac{1}{4}h(s_3) + \frac{1}{4}h(a) + \frac{1}{4}h(c) + \frac{1}{4}h(e) \\ h(e) &= \frac{1}{4}h(s_1) + \frac{1}{4}h(s_2) + \frac{1}{4}h(b) + \frac{1}{4}h(d). \end{cases}$$

E também como no caso unidimensional, se representarmos h por uma matriz coluna, dada por

$$h = \begin{pmatrix} h(f_1) \\ h(f_2) \\ h(f_3) \\ h(f_4) \\ h(f_5) \\ h(f_6) \\ h(s_1) \\ h(s_2) \\ h(s_3) \\ h(a) \\ h(b) \\ h(c) \\ h(d) \\ h(e) \end{pmatrix},$$

teremos que h deve satisfazer a equação matricial

$$h = Ah,$$

onde a matriz A é a matriz quadrada dada por

$$\begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccc} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 & s_1 & s_2 & s_3 & a & b & c & d & e \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\
1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}.$$

Note que a matriz A acima pode ser separada em quatro blocos menores, dados por uma Matriz I identidade de ordem 9, uma Matriz O nula de ordem $9x5$, e abaixo delas duas matrizes de ordens $5x9$ e $5x5$, aqui respectivamente denominadas R e Q. Ou seja,

$$\begin{pmatrix} I_{9x9} & 0_{9x5} \\ R_{5x9} & Q_{5x5} \end{pmatrix}.$$

Essa redução da matriz será de grande utilidade no capítulo seguinte, para o estudo de resoluções de funções harmônicas.

1.5 PASSEIOS ALEATÓRIOS E FUNÇÕES HARMÔNICAS NÃO SIMÉTRICAS

Até agora caracterizamos nossos passeios respeitando a condição de que a probabilidade de escolha entre os diversos caminhos disponíveis eram sempre iguais. No caso unidimensional, isso nos levava a probabilidade $1/2$ para a esquerda ou direta, enquanto em duas dimensões isso nos dava probabilidade $1/4$ em cada uma das quatro direções disponíveis, ou $1/3$ quando eram três os vizinhos de um dado ponto.

Mas isso nem sempre representará com precisão o problema que desejamos modelar. Para entender melhor, considere o exemplo abaixo.

Exemplo 1.4. Considere novamente o problema do bêbado, onde ele tenta voltar para casa antes chegar ao bar. Lembrando, as diversas esquinas são representadas pelos pontos $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, onde a casa está no ponto 4 e o bar no ponto 0.

Imagine agora que o caminho do bar para casa é levemente inclinado, subindo no sentido de casa. Isso faz com que o bêbado escolha subir com probabilidade menor do que escolhe descer. Assim se p_e e p_d são as probabilidades do bêbabo ir para a esquerda e para a direita, respectivamente, teríamos $p_e > p_d$, com $p_e + p_d = 1$.

Suponha então que $p_e = 2/3$ e $p_d = 1/3$. Assim, se $P(x)$ é a probabilidade do bêbado chegar em casa antes de voltar ao bar, podemos concluir seguindo o mesmo raciocínio do caso simétrico que

$$\begin{cases} P(0) = 0 \\ P(4) = 1 \\ P(x) = \frac{2}{3}P(x-1) + \frac{1}{3}P(x+1) \quad \text{,para } x \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

E resolvendo o sistema obtemos

$$P(1) = \frac{1}{15},\ P(2) = \frac{3}{15},\ P(3) = \frac{7}{15}.$$

Exemplos em duas dimensões podem ser contruídos se considerarmos um elétron se movendo em uma rede elétrica. Podemos supor que em cada nó da rede (ponto entre resistências) o elétron escolhe o caminho com probabilidade inversamente proporcional a resistência encontrada naquele caminho. Não é difícil perceber que em uma rede com resistências diferentes, tais probabilidades não serão sempre iguais. Este exemplo será melhor explorado no capítulo 3.

Este tipo de passeios são chamados de *passeios aleatórios não simétricos*, e assim como no caso simétrico, o estudo destes problemas leva ao estudo das chamadas funções harmônicas. Tais definições serão dadas a seguir.

1.5.1 *Funções Harmônicas Não Simétricas - Uma Dimensão*

Queremos agora estudar as funções harmônicas que nascem de problemas de passeios não simétricos. No caso de redes bidimensionais, dada a sua complexidade, deixaremos para apresentar tais conceitos no capítulo 3, onde trataremos da relações entre passeios aleatórios e redes elétricas, e o único momento do trabalho onde tais conceitos serão necessários.

Considere agora uma rede unidimensional. Ou seja, uma rede com pontos em $S = \{0, 1, \ldots, N\}$ e ligações apenas entre pontos sucessivos. Tome agora um passeio aleatório nesta rede no qual, a cada passo, o passeio segue para a esquerda com probabilidade q ou para a direita com probabilidade p, $p + q = 1$.

Diremos então que uma função $f(x)$ definida nos pontos de S é harmônica se fixamos os valores de $f(0)$ e $f(x)$, vale que

$$f(x) = q \cdot f(x-1) + p \cdot f(x+1),$$

para $x \in 1, 2, 3, ..., N-1$.

Seguindo ideias similares às usadas no cálculo da função harmônica no caso simétrico, podemos encontrar uma expressão explícita para tais funções.

Assim, fixando $f(0) = a$ e $f(N) = b$, temos para $x \in 1, 2, 3, ..., N-1$ que

$$\begin{aligned} f(x) &= q \cdot f(x-1) + p \cdot f(x+1) \\ q \cdot f(x) + p \cdot f(x) &= q \cdot f(x-1) + p \cdot f(x+1) \\ q \cdot (f(x) - f(x-1)) &= p \cdot (f(x+1) - f(x)) \end{aligned}$$

Utilizando $g(x) = f(x) - f(x-1)$, podemos escrever

$$q \cdot g(x) = p \cdot g(x+1)$$

e portanto

$$g(x+1) = \frac{q}{p} \cdot g(x).$$

Utilizando $\lambda = \frac{q}{p}$, temos

$$g(x+1) = \lambda \cdot g(x) = \lambda^2 \cdot g(x-1) = \lambda^3 \cdot g(x-2) = \cdots = \lambda^x \cdot g(1)$$

e assim

$$g(x) = \lambda^{x-1} \cdot g(1).$$

Mas como $g(x) = f(x) - f(x-1)$, segue que

$$\begin{aligned} f(x) - f(x-1) &= \lambda^{x-1} g(1) \\ f(x-1) - f(x-2) &= \lambda^{x-2} g(1) \\ f(x-2) - f(x-3) &= \lambda^{x-3} g(1) \\ &\vdots \\ f(1) - f(0) &= g(1) \end{aligned}$$

Somando todas as igualdades acima, obtemos

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= (1 + \lambda + \lambda^2 + . \cdots + \lambda^{x-1}) \cdot g(1) \\ f(x) - f(0) &= \frac{1 - \lambda^x}{1 - \lambda} \cdot g(1) \\ f(x) - f(0) &= \frac{1 - \lambda^x}{1 - \lambda} \cdot (f(1) - f(0)) \end{aligned}$$

e fazendo $f(0) = a$ segue que

$$f(x) = \frac{1 - \lambda^x}{1 - \lambda} \cdot f(1) + \frac{\lambda^x - \lambda}{1 - \lambda} \cdot a$$

Pela definição, temos $f(N) = b$, e portanto

$$f(1) = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^N} \cdot b + \frac{\lambda - \lambda^N}{1-\lambda^N} \cdot a$$

e assim

$$f(x) = \frac{1-\lambda^x}{1-\lambda^N} \cdot b + \frac{\lambda^x - \lambda^N}{1-\lambda^N} \cdot a,$$

ou ainda

$$f(x) = \frac{1}{1-\lambda^N} \left[(a-b) \cdot \lambda^x + b - \lambda^N \cdot a \right]$$

Como a função λ^x é monótona em x, segue que $f(x)$ também será monótona, mostrando que ainda vale o princípio do máximo para funções harmônicas não simétricas. Este princípio, assim como a unicidade de funções harmônicas, serão comentados em mais detalhes no capítulo 3.

2

MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE FUNÇÕES HARMÔNICAS EM DUAS DIMENSÕES

Ao solucionar situações que se configuram dentro dos parâmetros de uma função harmônica, podemos fazer a abordagem deste problema por alguns métodos, entre os quais veremos neste capítulo: o Método de Relaxamentos e a Cadeia de Markov, sendo este último de grande interesse em relação aos conteúdos de Ensino Médio, por sua possibilidade de abordagem por meio de matrizes e operações com matrizes. Vale ressaltar ainda que o método de Relaxamentos pode ser de grande valia para incentivar o uso de computação em sala de aula, por ser um método que, para ser ágil em seu uso, necessita de programas que possam fazer cálculos a partir de planilhas, como por exemplo o Excel.

2.1 MÉTODO DE RELAXAMENTOS

Para motivar e entender o funcionamento do método de relaxamento, vamos antes considerar uma aplicação para funções harmônicas diferente das tratadas até agora. O problema que estudaremos trata da transmissão de calor ao longo de uma barra, e será descrito a seguir.

2.1.1 *Motivando o Método*

Vamos agora abordar o problema da transmissão de calor ao longo de uma barra quando sujeita a fontes de calor distintas em suas extremidades. Considere então que uma barra metálica tem bordas mantidas a temperaturas 0 e 1 em uma determinada

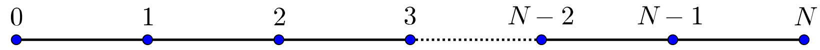

Figura 5: Barra metálica e os pontos onde mediremos a temperatura.

escala termométrica (note que os valores 0 e 1 aqui utilizados são apenas para efeito de facilitar nossa operacionalização do problema).

Para melhor comparação com os problemas do capítulo 1, vamos analisar o problema de forma discreta. Vamos então supor uma barra metálica de comprimento N, e divida a barra em pontos $x = 0, 1, 2, ..., N$ igualmente espaçados.

O modelo que consideraremos está baseado nas seguintes hipóteses:

- A cada intervalo unitário de tempo, cada ponto distribui toda a sua energia térmica de maneira equânime para seus vizinhos imediatos;
- Toda energia enviada aos extremos é perdida, e assim as temperaturas nos extremos 0 e N são constantes;
- A cada intervalo de tempo as fontes de calor localizadas nos extremos da barra, transmitem metade de sua temperatura para o ponto do interior adjacente.

Deste modo se a barra tem suas pontas colocadas sobre duas fontes, localizadas nos pontos 0 e N, de temperaturas constantes 0 e 1 respectivamente podemos traduzir as hipóteses acima do seguinte modo. Chame de $T_n(x)$ a temperatura no ponto x no instante n, de modo que $T_0(x)$ será a temperatura inicial no ponto x. Segue que $T_n(0) = 0$ e $T_n(N) = 1$ para todo $n \geq 0$, e para $x \in \{1, \ldots, N-1\}$

$$T_n(x) = \frac{T_{n-1}(x-1) + T_{n-1}(x+1)}{2}.$$

Isso porque entre o instante $n-1$ e n o ponto x transmite toda a sua energia, recebendo metade da energia de $x-1$ e metade da energia de $x+1$.

Em resumo, o que este processo faz é em cada instante n substituir a temperatura em x pela média das temperaturas de seus vizinhos no instante anterior.

Para exemplificar, considere $T_0(x) = 0$ para $x \in \{1, \cdots, N-1\}$. Teremos assim a seguinte sequência de temperaturas

$$\begin{aligned}
T_0 &= (0,0,0,\ldots,0,0,0,1)\\
T_1 &= (0,0,0,\ldots,0,0,\frac{1}{2},1)\\
T_2 &= (0,0,0,\ldots,0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},1)\\
T_3 &= (0,0,0,\ldots,\frac{1}{8},\frac{2}{8},\frac{5}{8},1)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Para representar de forma mais clara o desenvolvimento desta sequência vamos novamente nos valer da representação por matrizes. Assim, se representarmos as temperaturas T_n como matrizes coluna, podemos facilmente ver que

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \ldots & 0 \\ \ddots & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = A \cdot T_0$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1/4 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \ldots & 0 \\ \ddots & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = A \cdot T_1,$$

e do mesmo modo temos

$$T_n = A \cdot T_{n-1},$$

onde A é a matriz representada acima. É interessante notar que A é exatamente a mesma matriz que obtemos para representação matricial de funções harmônicas em uma dimensão.

Gostaríamos agora de entender o comportamento de T_n quando n cresce. Para isso perceba que

$$\begin{array}{rclcl} T_1 & = & A \cdot T_0 & & \\ T_2 & = & A \cdot T_1 & = & A^2 \cdot T_0 \\ & & \vdots & & \\ T_n & = & A \cdot T_{n-1} & = & \cdots & = & A^n \cdot T_0 \end{array}$$

Deste modo, o estudo do comportamento de T_n fica claramente ligado ao estudo das potências A^n da matriz A. Tal estudo será feito mais a frente, quando apresentarmos o método das Cadeias de Markov. Por enquanto façamos uma análise um pouco diferente, válida apenas para o nosso exemplo.

Não é difícil notar que, se toda a barra estiver a temperatura 0 no início do processo, então em qualquer instante e quaisquer pontos da barra, o valor de $T_{n-1}(x)$ será menor ou igual a $T_n(x)$. Além disso tais temperaturas nunca ultrapassarão o valor 1, ou serão negativas. Assim temos que $T_n(x)$, deve se aproximar de algum valor $T(x)$ quando n cresce, e como o mesmo ocorre com $T_{n-1}(x)$, concluímos que a matriz coluna T deve ser tal que $T(0) = 0$, $T(N) = 1$ e deve satisfazer a equação

$$T = A \cdot T.$$

Segue assim que T deve ser uma função harmônica.

Mostramos assim que, ao menos para este exemplo, se a cada iteração nós substituirmos os valores do interior da rede pela média dos valores de seus vizinhos, depois de algumas iterações os valores encontrados estão próximos dos valores de uma função harmônica nesta rede.

2.1.2 *Descrevendo o Método*

O método descrito no exemplo da transmissão de calor, quando passado para uma rede qualquer, pode ser descrito da seguinte forma.

- Tome uma rede $\mathcal{R}$ com pontos em $S = I \cup F$;
- Fixe os valores da função harmônica desejada nos pontos de F;
- Escolha um valor inicial qualquer para a função nos pontos de I, e chame esta função de f_0;

- Defina f_1 para cada ponto de I como a média aritmética dos valores de f_0 em seus vizinhos;
- Para encontrar f_n, repita a operação acima usando como base os valores de f_{n-1};
- Repita o item anterior quantas vezes achar necessário.

Seguindo a técnica descrita no problema do calor, podemos representar os passos acima usando matrizes. Para isso, seja A a matriz que descreve as funções harmônicas na rede $\mathcal{R}$. Ou seja, a matriz A tal que f é harmônica se satisfizer

$$f = A \cdot f.$$

Escolha agora uma função inicial f_0 que assuma nos pontos de F os valores da função harmônica que desejamos calcular. Feito isso defina a sequência $f_0, f_1, f_2, \ldots$ fazendo

$$f_n = A f_{n-1}.$$

Assim, se os valores de f_n convergirem para os valores de alguma função f, esta função deve ser tal que $f(x) = f_0(x)$ para todo $x \in F$ e

$$f = Af,$$

e assim f é a função harmônica que buscamos.

Observe que, assim como no caso do processo de transmissão de calor, vale que

$$f_n = A^n f_0,$$

de modo que a convergência desta sequência está ligada diretamente à convergência de A^n, que veremos com mais detalhes quando falarmos sobre cadeias de Markov.

O que chamaremos de *Método de Relaxamentos* é uma melhoria do processo descrito acima, onde ao invés de atualizarmos os valores de f_n usando apenas valores de f_{n-1}, faremos a atualização ponto a ponto, usando para cada ponto o valor já calculado para os pontos anteriores.

Vejamos como esse método opera a partir de um exemplo. Usaremos para isso o exemplo do motorista embriagado descrito no capítulo 1, porém com uma malha viária ligeiramente modificada, a qual mostramos na figura 6

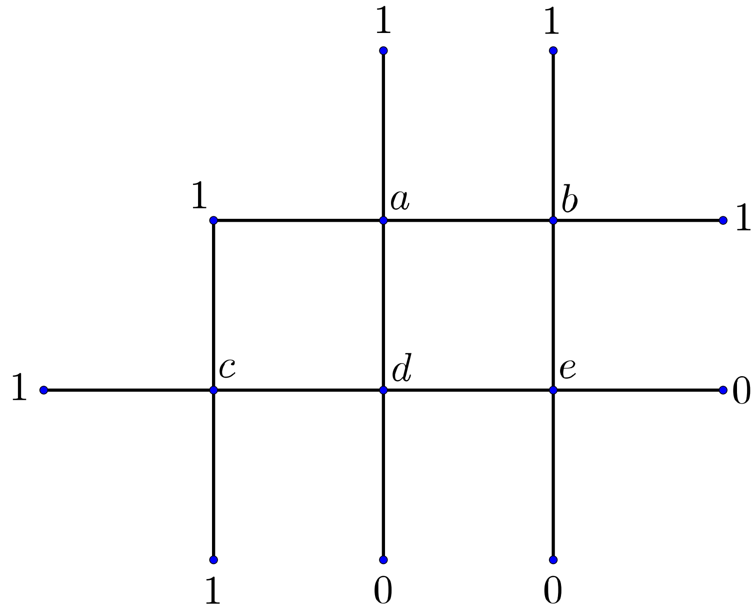

Figura 6: Exemplo de rede bidimensional.

Para cada um dos pontos a, b, c, d, e, usaremos inicialmente 0, e para os pontos extremos os valores já conhecidos

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & 1 & \\
 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

O que faremos agora é, a partir da esquerda para a direita, e de baixo para cima, para cada um dos pontos internos, tomarmos a média aritmética de seus vizinhos.

$$
\begin{aligned}
0,75 &= (1/4) \cdot (1 + 1 + 1 + 0) \\
0,1875 &= (1/4) \cdot (0,75 + 0 + 0 + 0) \\
0,5469 &= (1/4) \cdot (0,1875 + 1 + 1 + 0) \\
0,0469 &= (1/4) \cdot (0,1875 + 0 + 0 + 0) \\
0,64844 &= (1/4) \cdot (0,0469 + 0,5769 + 1 + 1)
\end{aligned}
$$

O que nos dá

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & 1 & \\
 & 1 & 0,547 & 0,648 & 1 \\
1 & 0,75 & 0,188 & 0,47 & 0 \\
 & 1 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

O resultado obtido não é uma função harmônica, mas o interessante é que, reptindo essas iterações, conseguimos obter uma função, que se não harmônica, ao menos é muito próxima da uma função harmônica como a desejada. Veja o que acontece entre as iterações 8 e 9.

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & 1 & \\ & 1 & 0,823 & 0,787 & 1 \\ 1 & 0,876 & 0,506 & 0,323 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & \end{array}$$

$a = 0,823$

$b = 0,787$

$c = 0,876$

$d = 0,506$

$e = 0,323$

Verificando o Método

Para verificar os resultados que acabamos de encontrar pelo método de relaxamentos, vamos encontrar os valores de x_a, x_b, x_c, x_d e x_e via sistemas lineares, como no capítulo anterior. Para isso note que

$$\begin{cases} x_a &= \frac{x_b+x_d+2}{4} \\ x_b &= \frac{x_a+x_c+2}{4} \\ x_c &= \frac{x_d+3}{4} \\ x_d &= \frac{x_a+x_c+x_e}{4} \\ x_e &= \frac{x_b+x_d}{4} \end{cases}$$

Rescrevendo temos ainda

$$\begin{cases} 4x_a - x_b - x_d &= 2 \\ -x_a + 4x_b - x_e &= 2 \\ 4x_c - x_d &= 3 \\ -x_a - x_c + 4x_d - x_e &= 0 \\ -x_b - x_d + 4x_e &= 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos

$$x_a = \frac{293}{356},\ x_b = \frac{70}{89},\ x_c = \frac{78}{89},\ x_d = \frac{45}{89},\ x_e = \frac{115}{356}.$$

Escrevendo as frações acima com 3 casas decimais de precisão encontramos

$$x_a = 0,823;\ x_b = 0,786;\ x_c = 0,876;\ x_d = 0,505;\ x_e = 0,323.$$

Isso mostra que o método de relaxamentos aproximou muito bem a função harmônica buscada.

2.2 CADEIAS DE MARKOV

O método que veremos a seguir é baseado no comportamento e propriedades das chamadas cadeias de Markov. A seguir vamos definir cadeias de Markov e estudar de maneira simplificada algumas de suas propriedades. Não apresentaremos uma definição formal, e não provaremos formalmente os resultados usados. Os leitores interessados em maiores detalhes sobre o assunto podem encontrar em [2, 3].

Uma cadeia de Markov é um processo aleatório onde, dado um conjunto $S = s_1; s_2; ...; s_r$ de possíveis estados para o modelo, sempre que o processo estiver em um estado s_i, ele se move com probabilidade Pij ao estado s_j. As probabilidades Pij são conhecidas como *probabilidades de transição* e podem ser representados por uma matriz P de ordem r denominada *matriz de transição* da cadeia. Dentre as propriedades importantes de uma matriz vale destacar que

- $P_{ij} \geq 0$ para quaisquer estados $s_i, s_j \in S$;
- $\sum_{j=1}^{r} P_{ij} = 1$.

A segunda propriedade vem direto da definição do processo, uma vez que o processo deve escolher obrigatoriamente um dos elementos de S para ir quando estiver em s_i.

Note que a probabilidade de transição descreve apenas como o processo varia. Para especificar o processo completamente devemos ter, além da matriz de transição, o modo como o processo se inicia.

Para entender melhor estas definições, e dar mais alguns passos no estudo de tais processos, considere o seguinte exemplo.

Exemplo 2.1. Suponha um local, que aqui chamaremos de ABClândia, onde existem somente três tipos de clima: chuva, agradável, e neve. Nunca há dois dias agradáveis em sequência. Quando chove ou neva, metade do tempo é o mesmo no dia seguinte. Se há mudanças climáticas, as chances são iguais para uma mudança a cada um dos outros dois tipos de tempo. Podemos então descrever o clima de ABClândia como uma cadeia de Markov com espaço de estados $S = \{c, a, n\}$ e matriz de transição

$$P = \begin{array}{c} \\ c \\ a \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c & a & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Dado agora que iniciamos a observação do processo em um dia chuva, queremos saber quais as probabilidades de estarmos em cada um dos três estados após n dias.

Para responder esta pergunta, denote por $P_{ij}^{(2)}$ a probabilidade de irmos de s_i para s_j em dois passos, e note que, por exemplo

$$P_{ca}^{(2)} = P_{ca}P_{aa} + P_{cc}P_{ca} + P_{cn}P_{na}.$$

Isto porque para se chegar ao estado a em dois passos, saindo de c a cadeia pode ir de c para a no primeiro passo e depois permanecer em a, ou ainda ficar em c para depois ir de c para a, ou ir de c para n e depois de n para a.

Mas observe que o lado direito da expressão acima é exatamente o valor correspondente à posição ca da matriz $P \cdot P = P^2$! Usando o mesmo raciocínio para os demais estados, descobrimos que

$$\begin{pmatrix} P_{cc}^{(2)} & P_{ca}^{(2)} & P_{cn}^{(2)} \end{pmatrix},$$

forma exatamente a segunda linha da matriz P^2.

Desta forma, podemos concluir que a matriz P^2 representa as transições em dois passos da cadeia, ou seja, seus elementos representam as probabilidade da cadeia ir de um estado ao outro em dois passos.

Usando este resultado, e repetindo o raciocínio acima podemos mostrar que P^3 representa as probabilidade de transição em 3 passos da cadeia. E seguindo desta forma, concluímos que para calcular as probabilidade de ir de um estado a outro da cadeia em n passos, tudo o que precisamos fazer é calcular a potência P^n.

Por exemplo, a quarta potência da matriz de transição P para o clima em ABClândia é

$$P^4 = \begin{array}{c} \\ C \\ A \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C & A & N \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,402 & 0,2 & 0,398 \\ 0,398 & 0,204 & 0,398 \\ 0,398 & 0,2 & 0,402 \end{pmatrix} \end{array}$$

Com isso, podemos dizer que, se hoje está chovendo em ABClândia, daqui a quatro dias a probabilidade de chuva daqui a quatro dias é de $40,2\%$. É interessante notar que a previsão de tempo daqui a quatro dias pouco depende do clima que se tem no dia de hoje. Comentaremos este fenômeno mais a frente.

Generalizando o método do exemplo acima, de uma cadeia de Markov com matriz de transição P, é possível determinarmos a probabilidade com a qual o processo passa de um estado a outro em um número n de passos. Basta para isso que calculemos a n-ésima potência da matriz P, que denotaremos por P^n. Assim, as entradas P_{ij}^n de P^n representam a probabilidade de que a cadeia passe do estado s_i para o estado s_j após n passos.

Observe que a matriz P^4 do exemplo acima tem todas as entradas não nulas. Matrizes com esta propriedade, isto é, matrizes que possuam alguma potência com todas as entradas não nulas, são conhecidas como *matriz de transição regular*, e a cadeia representada por ela de *cadeia de Markov Regular*. Matrizes de transição regulares tem a propriedade importante de que suas potências P^n convergem para uma matriz onde todas as linhas são iguais. Podemos interpretar este resultado dizendo que a cadeia "esquece" o estado no qual começou a medida que o tempo passa. A demostração deste resultado é técnica e foge muito aos objetivos deste trabalho.

Todos os exemplos tratados neste trabalho até agora são cadeias de Markov, mas diferente do exemplo 2.1, não são cadeias de Markov regulares. Para perceber isso considere novamente nosso andarilho embriagado, e tome $N = 4$. Considerando iguais as chances de caminhar para a direita ou para a esquerda, temos a matriz de transição

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Os quarteirões ou estados 0 e 4 funcionam como "armadilhas"para a cadeia, ou seja, uma vez em um destes estados, a cadeia permanece lá para sempre. Da mesma forma, se a cadeia tem 0 ou 4 como estado inicial, ela permanece no mesmo estado para todo instante de tempo. Matematicamente, isso significa que

$$P^n_{0i} = 0, \quad \text{para todo } n \text{ e todo } i \neq 0,$$

e

$$P^n_{4i} = 0, \quad \text{para todo } n \text{ e todo } i \neq 4.$$

É importante notar que, neste exemplo, a partir de qualquer estado $i \neq 0, 4$ é possível se chegar eventualmente em uma das armadilhas em 0 ou 4.

Estados com esta propriedade são chamados de *estados absorventes* ou *estados de absorção*. Uma Cadeia de Markov que possui pelo menos um estado de absorção e, a partir de qualquer outro estado, não necessariamente em uma única passagem, é possível atingir este estado absorvente, será chamada simplesmente de *cadeia de Markov com absorção*.

Uma propriedade importante é que uma cadeia de Markov com absorção que tenha início em um estado não absorvente, em algum momento terminará em um estado absorvente (para demonstração ver [2, 3]).

Isso tem algumas consequências interessantes para nosso modelo. Para entender tais consequências tomemos uma matriz de transição $\mathbf{P}$ para cadeia de Markov com absorção, com um total de l estados absorventes e k estados não absorventes. Vamos reorganizar a matriz de forma que os estados absorventes apareçam primeiro, e depois os não absorventes. No exemplo do bêbado teríamos

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\
P = \begin{array}{c} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Observe que, escrita desta forma temos no canto superior esquerdo da matriz um bloco dado por uma matriz identidade. Este bloco, que em nosso exemplo tem tamanho 2×2, representa as probabilidades da cadeia ir de um estado absorvente para outro estado absorvente. Logo ao lado, temos um bloco 2×3 completamente nulo, representado as probabilidades de se ir de um estado absorvente para um estado não absorvente da matriz. Abaixo da matriz identidade temos um bloco 3×2, com as probabilidades de a cadeia ir de um estado não absorvente para um estado de absorção. Finalmente, no canto inferior direito, abaixo do bloco nulo, temos uma matriz 3×3 representando as probabilidades da matriz permanecer entre os estados não absorventes.

Deste modo podemos rescrever a matriz **P** em blocos: uma matriz identidade $I_{l\times l}$, e uma nula $0_{l\times k}$, com todas as entradas iguais a 0, e duas matrizes $R_{k\times l}$ e $Q_{k\times k}$, o que nos dá

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}$$

A probabilidade de posicionamento da cadeia após n passos, dada por P^n, tem a forma

$$P^2 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ (R + QR) & Q^2 \end{pmatrix},$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ (R + QR + Q^2R) & Q^3 \end{pmatrix},$$

e para um n qualquer

$$P^n = \begin{pmatrix} I & 0 \\ (R + QR + \ldots + Q^{n-1}R) & Q^n \end{pmatrix}.$$

Antes de continuar nossa explanção sobre a cadeia absorvente de Markov, cabe aqui uma observação que se faz interessante sob o ponto de vista pedagógico. Escrever a Matriz P na forma acima e depois efetuar seu produto, serve como exemplos a alunos do Ensino Médio da possibilidade e das vantagens de se representar matriz em blocos.

Com relação à Q^n, como Q é a matriz que representa a probabilidade de transição entre estados não absorventes, Q^n representa simplesmente as probabilidades de se estar em estados não absorventes após n passos, tendo iniciado em um estado não absorvente. Mas como comentamos anteriormente, uma cadeia de Markov com estados absorventes será eventualmente absorvida, e portanto a probabilidade de se estar um estado não absorvente após n passos deve ir para 0, quando n cresce. Segue então que Q^n converge a uma matriz nula quando n tende ao infinito.

Posto isso observe que se

$$S_n = I_k + Q + Q^2 + \ldots + Q^{n-1},$$

com I uma matriz identidade de mesma ordem $k \times k$ (a mesma ordem de Q), então

$$QS_n = Q + Q^2 + \ldots + Q^n.$$

Segue que

$$S_n - QS_n = I_k - Q^n,$$

e portanto

$$(I_k - Q)S_n = I_k - Q^n.$$

Assim, se $(I_k - Q)$ for inversível, temos

$$I_k + Q + Q^2 + \ldots + Q^{n-1} = (I_k - Q)^{-1}(I_k - Q^n).$$

A matriz $(I_k - Q)$ ser inversível é equivalente à dizer que $(I_r - P)$ é inversível, mas a demonstração deste resultado é técnica e de pouco (ou nenhum) interesse para este trabalho. O leitor interessado pode buscar maiores informações em [2, 3], mas deste ponto em diante simplesmente aceitaremos este fato.

Note agora que

$$R + QR + Q^2R + \ldots + Q^{n-1}R = (I_k + Q + Q^2 + \ldots + Q^{n-1})R = (I_k - Q)^{-1}(I_k - Q^n)R,$$

e fazendo $n \to \infty$ temos

$$R + QR + Q^2R + \ldots + Q^{n-1}R \to (I_k - Q)^{-1}R.$$

A matriz $N = (I_k - Q)^{-1}$ é denominada *matriz fundamental* da matriz absorvente P, e suas entradas N_{ij} podem ser interpretadas como a expectativa do total de vezes que a cadeia passa no estado s_j antes de atingir um estado absorvente, quando iniciado o processo em s_i. Concluímos assim que quando n vai a infinito, a matriz P^n converge para uma matriz P^∞ dada por

$$P^\infty = \begin{pmatrix} I & 0 \\ NR & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, se

$$B = (I - Q)^{-1} R,$$

as entradas $B_i j$ representam a probabilidade da cadeia ser eventualmente absorvida em s_j tendo iniciado em s_i. Segue também que para saber a probabilidade de se terminar o processo em um estado absorvente, devemos adicionar a probabilidades de se chegar lá por todos os estados não absorventes, pesados pelo número de vezes que esperamos passar por estes estados não absorventes durante o processo.

Calculando estas matrizes para nosso exemplo temos

$$(I_3 - Q) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$N = (I_3 - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

e

$$B = NR = (I_3 - Q) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Segue que

$$P^\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vejamos agora como podemos usar estes resultados para encontrar funções harmônicas. Sabemos que se $f(x)$ é uma função harmônica em uma rede então

$$f = Pf,$$

onde f é uma matriz coluna com os valores de f nos distintos valores de S, e P é a matriz que representa o passeio aleatório correspondente.

Como vimos, passeios aleatórios relacionados a funções harmônicas são cadeias de Markov com estados absorventes nos pontos da fronteira em F. Assim, para usar os resultados acima, reescreveremos as entradas de f da mesma forma que P, colocando os valores nos pontos de fronteira primeiro. No nosso exemplo teríamos

$$f = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(4) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix}.$$

De modo geral escreveremos

$$f = \begin{pmatrix} f_B \\ f_D \end{pmatrix},$$

onde f_B representa os valores de f nos pontos da fronteira, e f_D nos pontos do interior.

Mas voltando, como f é harmônica então

$$f = Pf,$$

o que implica que

$$P^2 f = P \cdot Pf = Pf = f,$$

e seguindo obtemos que

$$P^n f = f.$$

Assim, fazendo $n \to \infty$ temos

$$P^\infty f = f.$$

Deste modo, temos

$$\begin{pmatrix} f_B \\ f_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_B \\ f_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_B \\ Bf_B \end{pmatrix}.$$

Concluímos assim que

$$f_D = Bf_B.$$

Como $B = NR$, e $N = (I_k - Q)^{-1}$, chegamos

$$f_D = (I - Q)^{-1}Rf_B.$$

Isso nos dá uma nova forma de encontrar os valores de uma função harmônica. Para terminar, voltemos ao nosso exemplo, e tomemos $f(0) = 0$ e $f(N) = 1$. Neste caso segue que

$$f = \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Note que deste modo, uma vez encontrada a matriz B, temos uma maneira simples e encontrar os valores da função harmônica para quaisquer condições de fronteira, sem termos que resolver um novo sistema linear para cada condição.

3

PASSEIOS ALEATÓRIOS E REDES ELÉTRICAS

Para finalizar o trabalho vamos agora tratar da relação entre redes elétricas elemetares e passeios aleatórios. Tentaremos aqui explicar de maneira simples como podemos ver o movimento de partículas carregadas ao longo de uma rede elétrica como um passeio aleatório, interpretando sob este prisma as grandezas comuns a este tipo de rede, como corrente e voltagem.

Começaremos lembrando os conceitos e leis básicas que governam o funcionamento de uma rede elétrica elementar. Estas leis servirão de base para definirmos o passeio aleatório usado para modelar uma rede elétrica.

3.1 REDES ELÉTRICAS

Uma rede elétrica elementar, como trataremos aqui neste trabalho, é apenas um conjunto de *resistores* conectados uns aos outros em forma de uma rede (uni ou bidimensional). A dois polos desta rede ligamos uma "bateria", criando assim uma *diferença de potencial* entre dois pontos da rede. Tal diferença provoca o movimento de partículas carregadas, criando assim o que conhecemos como *corrente elétrica*.

Na descrição acima aparecem três conceitos fundamentais neste tipo de redes: resistores, potencial e corrente. Tentaremos rapidamente explicar do que se trata cada um deles.

- A *corrente elétrica* i_{xy} entre dois pontos x, y de uma rede é uma maneira de medir o fluxo de partículas que passam pelo elo (x, y). Ou seja, uma espécie de diferença entre o total de partículas que passam por unidade de tempo em um sentido do elo, com o total que passa no sentido oposto. Deste modo, por ser esta uma medida de fluxo, vale que

$$i_{xy} = -i_{yx};$$

- A resistência elétrica de uma material mede o quão "difícil" é para uma partícula carregada passar por ele. Um resistor é portanto um componente colocado entre pontos de uma rede com o intuito de reduzir a corrente elétrica naquele elo. A resistência entre pontos x, y de uma rede será denotada por R_{xy}, e deve ser tal que

$$R_{xy} = R_{yx};$$

- O *potencial elétrico* ou *voltagem* em um dado ponto da rede é uma maneira de medir a quantidade de energia potencial elétrica que uma carga unitária possui quando está naquele nó. A *diferença de potencial (ddp)* ou *diferença de voltagem* entre dois pontos é quem provoca o movimento de cargas naquele elo, e mede o trabalho realizado por uma carga unitária ao se movimentar entre aqueles pontos. Neste trabalho denotaremos a voltagem em um ponto x da rede por $v(x)$.

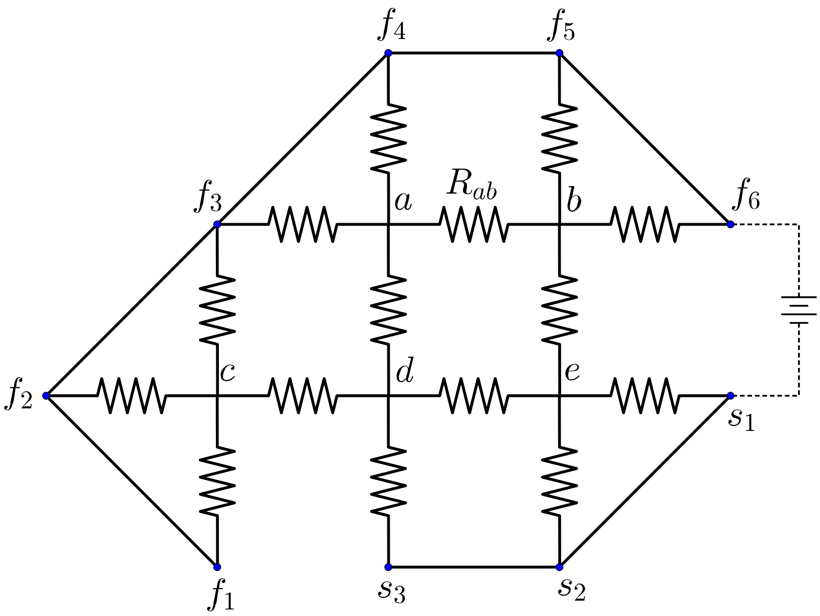

Figura 7: Rede elétrica elementar. Nesta rede o potencial nos pontos f_k são iguais. O mesmo ocorre para os pontos s_k.

Colocados os elementos principais de uma rede, precisamos entender como eles se relacionam. Tais relações são dadas por algumas leis físicas, e abaixo listaremos aquelas mais importantes para este trabalho.

Lembremos primeiro da chamada *Lei de Ohm*, que diz basicamente que a corrente que flui por um elo da rede é inversamente proporcional à resistência do elo, e diretamente proporcional à diferença de potencial naquele elo. Assim, se pontos x e y estão conectados por uma resistência de magnitude R_{xy}, então a corrente i_{xy} que flui de x para y é igual a

$$i_{xy} = \frac{v(x) - v(y)}{R_{xy}}, \tag{3.1}$$

onde $v(x)$ é a voltagem no ponto x.

É interessante notar que, da equação (3.1) acima, a corrente entre x e y será positiva quando $v(x) - v(y) > 0$, ou ainda, quando $v(x) > v(y)$. Isso é apenas um reflexo do fenômeno físico onde partículas positivamente carregadas caminham em um circuito elétrico tentando baixar seu nível de energia potencial, gerando assim um fluxo que prioriza quedas de potencial. No caso de redes elétricas seria mais realista falar do movimento de partículas negativamente carregadas, mas estas diferenças não influenciam no entendimento do problema. Por esta razão tentaremos nos referir apenas ao movimento de *partículas carregadas*, ou apenas *cargas* sem referência ao seu sinal.

Outro conjunto de leis importantes são as conhecidas *leis de Kirchhoff*, que trata da relação entre corrente e ddp nos diferentes elos de uma rede elétrica.

A *primeira lei de Kirchhoff*, ou lei das correntes, nasce do fato de que em uma rede elétrica ativa toda partícula carregada que chega a um ponto deve sair de lá, e assim o fluxo de entrada de cargas em um ponto da rede deve ser compensado pelo fluxo de saída deste ponto. Matematicamente, denotando por S o conjunto de pontos de uma rede, se i_{xy} é a corrente entre os pontos x e y, então para todo $x \in S$

$$\sum_{y \in S} i_{xy} = 0. \tag{3.2}$$

A *segunda lei de Kirchhoff*, ou lei da voltagem, não será usada ao longo deste trabalho, e por isso não a colocaremos de modo formal. De modo simplificado, ela diz que a ddp total ao longo de qualquer ciclo da rede deve ser nula. Assim, se tomarmos qualquer caminho na rede levando saindo e chegando em um mesmo ponto da rede, a soma das diferenças de potencial ao longo do caminho deve ser 0.

No caso de pontos ligados à uma bateria, as leis acima ainda funcionam, mas como não temos resistor entre estes polos, a lei de Ohm pode falhar neste trajeto.

Para exemplificar os conceitos acima, e começar a entender algumas propriedades destas quantidades, vamos agora considerar uma rede elétrica na qual N resistores elétricos, todos iguais com resistência R, estejam ligados em série.

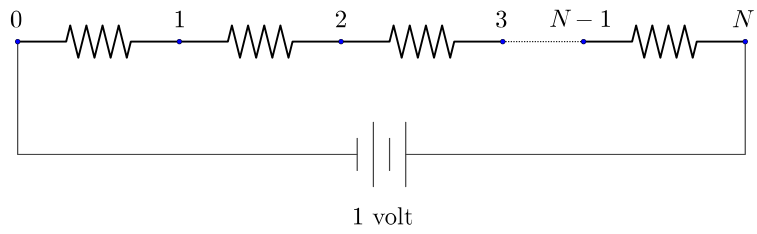

Figura 8: Rede elétrica com resistires em série.

Para determinar a voltagem $v(x)$ em um ponto x entre resistores, tomemos $v(0) = 0$ e $v(N) = 1$, e observe que pela primeira lei de Kirchhoff, para $x = 1, 2, \ldots, N-1$ segue que

$$\begin{aligned} \frac{v(x-1) - v(x)}{R} + \frac{v(x+1) - v(x)}{R} &= 0 \\ v(x-1) - v(x) + v(x+1) - v(x) &= 0 \\ v(x-1) + v(x+1) - 2v(x) &= 0, \end{aligned}$$

e portanto

$$v(x) = \frac{v(x+1) + v(x-1)}{2}.$$

Vemos assim que as diferentes voltagem ao longo da rede formam uma função harmônica na rede com $v(0) = 0$ e $v(N) = 1$. Segue então que

$$v(x) = \frac{x}{N}.$$

A pergunta natural agora é se esta é uma característica de toda rede, ou se vale apenas no exemplo acima. Assim, na tentativa de corroborar nossas suspeitas, vejamos o que acontece em duas dimensões, mas ainda com resistores iguais. Consideraremos aqui uma rede similar à da Figura 7 que, assim como nas redes dos capítulos 1 e 2, todos os pontos internos possuem 4 vizinhos na rede. Os pontos de fronteira serão aqueles ligados à bateria de 1 volt. Tirando proveito desta estrutura, identifique cada ponto por um par ordenado (m, n), de modo que os vizinhos de um ponto do (m, n) no interior são $(m-1, n)$, $(m+1, n)$, $(m, n-1)$ e $(m, n+1)$.

Temos então que, de acordo com a primeira lei de Kirchhoff, que

$$\frac{v(m+1,n) - v(m,n)}{R} + \frac{v(m-1,n) - v(m,n)}{R} + \frac{v(m,n+1) - v(m,n)}{R} + \frac{v(m,n-1) - v(m,n)}{R} = 0,$$

e portanto

$$v(m,n) = \frac{v(m+1,n) + v(m-1,n) + v(m,n+1 + v(m,n-1)}{4}.$$

Confirmamos assim que neste caso a função $v(x)$ que representa o potencial elétrico de um ponto x da rede é também uma função harmônica, com condições de fronteira dada por $v(f_k) = 1,\ k = 1,2,3,4,5,6$, e $v(s_k) = 0,\ k = 1,2,3$.

Tais exemplos nos sugerem a existência de uma relação entre passeios aleatórios e redes elétricas, dando a ideia de que de alguma forma podemos modelar o funcionamento de uma rede elétrica usando uma estrutura aleatória. Tal modelo será descrito na próxima sessão.

3.2 PASSEANDO EM UMA REDE ELÉTRICA

Na seção anterior vimos que a voltagem nos diferentes pontos de uma rede formam uma função harmônica nesta rede, e sabemos do capítulo 1 que funções harmônicas estão intimamente ligadas ao passeio aleatório naquela mesma rede.

Seguindo esta idéia considere um circuito elétrico com resistores iguais. Tal circuito pode ser representado por uma rede bidimensional ou unidimensional qualquer, mas para fins de exemplo, pense nas redes representadas nas Figuras 7 e 8. Vamos considerar agora que uma partícula carregada anda aleatoriamente pela rede da seguinte forma

- Como as resistências são todas iguais, quando em um dado ponto da rede, a partícula escolhe de com igual probabilidade dentre os caminhos possíveis, qual deles seguirá;
- Não existe movimentação entre pontos da fronteira. Assim, quando a partícula está em um ponto da fronteira (pontos conectados à bateria) ela volta ao interior, escolhendo com igual probabilidade para que ponto deverá retornar.

Observe que o passeio descrito acima possui uma pequena, mas vital diferença para os passeios do primeiro capítulo. Enquanto a partícula está andando pelos pontos do interior da rede, este modelo se comporta exatamente como os passeios que já estudamos, mas nos problemas do capítulo 1, o passeio acabava sempre que atingia a fronteira. No modelo da partícula carregada o passeio continua indefinidamente.

Recordando os conceitos do capítulo 2, o passeio da partícula descreve uma cadeia de Markov *sem* estados absorventes.

Não vamos gastar o tempo do leitor descrevendo os resultados apenas para estes tipos particulares de rede. Uma vez que circuitos elétricos tomam as mais diversas formas, restrições como resistência iguais ou número de vizinhos iguais são muito restritivos, e pouco representativos. Por outro lado, casos como o da Figura 7, onde vários pontos da rede estão conectados à um mesmo polo da bateria, apenas complicam os cálculos sem trazer nenhum benefício concreto. Por esta razão todas as redes consideradas a partir deste ponto terão apenas dois pontos conectados à bateria.

3.2.1 *Passeios em Redes Gerais*

Antes de passar para a descrição do passeio em uma rede elétrica, é importante introduzir um conceito ainda não trabalhado que será bastante útil na verificação da compatibilidade entre o estudo de caminhos aleatórios e circuitos elétricos, o conceito de condutância.

A grosso modo, a condutância de uma material mede sua capacidade de conduzir partículas carregadas. Matematicamente, a condutância é dada pela inversa da resistência, ou seja, se R_{xy} é a resistência entre pontos x a y de uma rede, a condutância para o mesmo percurso é dada por

$$C_{xy} = \frac{1}{R_{xy}}.$$

Com isso podemos rescrever lei de Ohm em termos da condutância, e obter

$$i_{xy} = \left(v(x) - v(y)\right) C_{xy}.$$

Para descrever agora o passeio da partícula carregada em um circuito elétrico qualquer, suponha que sempre que a partícula está em um ponto da rede, ela escolhe para onde segue escolhendo dentre os caminhos disponíveis com probabilidade proporcional à condutância daquele caminho.

Mais exatamente, faça

$$P_{xy} = \frac{C_{xy}}{Cx}$$

onde

$$C_x = \sum_{y \in S} C_{xy}$$

é a soma das condutâncias de todos os caminhos saindo de x. Assim, sempre que partícula se encontra em uma ponto x da rede, ela segue para um ponto y na rede com probabilidade P_{xy}.

O passeio assim colocado descreve uma cadeia de Markov, sem estados absorventes. Para melhor entender considere o circuito da Figura 9.

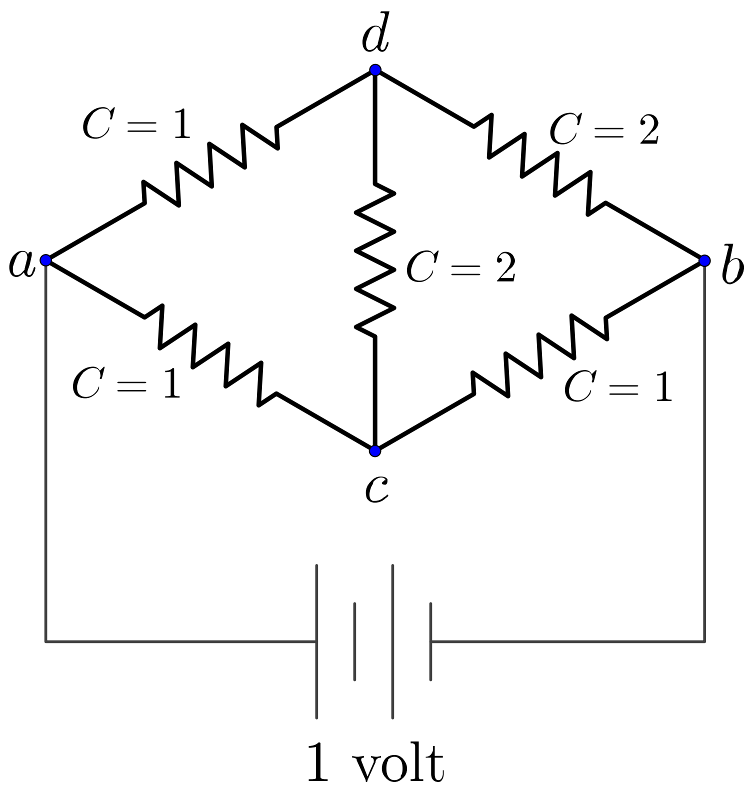

Figura 9: Exemplo de circuito elétrico.

Exemplo 3.1. Considerando o circuito da Figura 9, e tomando

$$R_{ac} = R_{ad} = R_{bc} = 1, \; R_{bd} = R_{cd} = \frac{1}{2},$$

obtemos

$$C_{ac} = C_{ad} = C_{bc} = 1, \; C_{bd} = C_{cd} = 2.$$

Assim, para este circuito temos

$$\begin{aligned} C_a &= C_{ac} + C_{ad} = 2 \\ C_b &= C_{bc} + C_{bd} = 3 \\ C_c &= C_{ac} + C_{bc} + C_{cd} = 4 \\ C_d &= C_{ad} + C_{bd} + C_{cd} = 5 \end{aligned}$$

Calculando agora as probabilidade P_{xy} obtemos a seguinte matriz de transição para a cadeia de Markov que representa o passeio de partículas por esta rede

$$P = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/5 & 2/5 & 2/5 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Como comentamos anteriormente, este tipo de cadeia de Markov é distinta daquelas descritas no capítulo 1. Nestas cadeias, apesar de podermos identificar pontos da rede como fronteira (pontos conectados à bateria), a partícula carregada não para de andar ao passar por estes pontos. Outra característica importante é que a partir de qualquer ponto x da rede , sempre é possível um elétron atingir outro ponto y qualquer pertencente ao circuito. Cadeias de Markov com esta propriedade recebem o nome de cadeias *ergódicas*, e possuem algumas propriedades importantes.

A propriedade que mais nos interessa está relacionada com a proporção média de vezes que uma partícula passa nos diferentes pontos da rede. Para um ponto x da rede defina tal proporção por w_x. Assim, como cada vez que a carga passa por x ela segue para um de seus vizinhos, podemos dizer que $w_x P_{xy}$ é a proporção de vezes que a partícula esteve em x e seguiu para y. Da mesma forma, uma partícula quando entra em y, deve necessariamente ter vindo de um de seus vizinhos, e portanto

$$w_y = \sum_{x \in S} w_x P_{xy}. \tag{3.3}$$

Agora, se escrevermos os valores de w_x em uma matriz linha, como

$$w = \begin{pmatrix} w_{x_1} & w_{x_2} & \cdots & w_{x_r} \end{pmatrix},$$

obtemos que w satisfaz

$$w = w \cdot P,$$

onde P é a matriz de transição da cadeia.

Para entender melhor a afirmativa acima, voltemos ao exemplo 3.1, onde tínhamos

$$P = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/5 & 2/5 & 2/5 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Fazendo então

$$w = \begin{pmatrix} w_a & w_b & w_c & w_d \end{pmatrix},$$

obtemos que

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} w_a & w_b & w_c & w_d \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} w_c P_{ca} + w_d P_{da} & w_c P_{cb} + w_d P_{db} & w_a P_{ac} + w_b P_{bc} + w_d P_{dc} & w_a P_{ad} + w_b P_{bd} + w_c P_{cd} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} w_c \frac{1}{4} + w_d \frac{1}{5} & w_c \frac{1}{4} + w_d \frac{2}{5} & w_a \frac{1}{2} + w_b \frac{1}{3} + w_d \frac{2}{5} & w_a \frac{1}{2} + w_b \frac{2}{3} + w_c \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} w_a & w_b & w_c & w_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/5 & 2/5 & 2/5 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$w = wP.$$

Para uma cadeia de Markov ergódica podemos sempre garantir que existe somente um vetor w nestas condições. O estudo da existência e unicidade de w para cadeias de Markov em geral foge muito do escopo deste trabalho, e o leitor interessado pode encontrar detalhes em [2,3]. No entanto, a existência de tais vetores para redes elétricas está ao nosso alcance, e podemos facilmente verificar.

Para isso note primeiro que

$$C_x P_{xy} = C_x \frac{C_{xy}}{C_x} = C_{xy} = C_{yx} = C_y \frac{C_{yx}}{C_y} = C_y P_{yx}. \tag{3.4}$$

Fazendo agora

$$C = \sum_{x \in S} C_x,$$

e dividindo a equação (3.4) por C, obtemos

$$\frac{C_x}{C} P_{xy} = \frac{C_y}{C} P_{yx}, \tag{3.5}$$

e portanto

$$\sum_{x \in S} \frac{C_x}{C} P_{xy} = \sum_{x \in S} \frac{C_y}{C} P_{yx} = \frac{C_y}{C} \sum_{x \in S} P_{yx}.$$

Lembre-se agora que por se tratar de uma cadeia de Markov, a soma dos elementos de uma linha de P deve ser 1, isto é,

$$\sum_{x \in S} P_{yx} = 1,$$

e portanto

$$\sum_{x \in S} \frac{C_x}{C} P_{xy} = \frac{C_y}{C}.$$

Assim, fazendo $w_x = C_x / C$, temos que

$$\sum_{x \in S} w_x P_{xy} = w_y,$$

satisfazendo assim a equação (3.3). Segue daí que $w = Pw$, como queríamos.

É interessante observar que

1. $w_x > 0$ para todo $x \in S$;
2. A soma de w_x é sempre 1. Ou seja,

$$\sum_{x \in S} w_x = \sum_{x \in S} \frac{C_x}{C} = \frac{1}{C} \sum_{x \in S} C_x = \frac{1}{C} C = 1.$$

Um vetor com as duas propriedades acima é chamado de *vetor de probabilidade*. Além disso, estas propriedades são compatíveis com nossa interpretação de w_x como a proporção média de vezes que a carga visita o ponto x. Primeiro porque a proporção de visitas deve ser um número positivo, e depois porque somando as proporções de visitas para todos os pontos, devemos encontrar a proporção de tempo passada na rede, que é exatamente 1.

Exemplo 3.2. Voltando ao exemplo 3.1, tínhamos uma rede elétrica com

$$C_a = 2, \; C_b = 3, \; C_c = 4 \; \text{ e } \; C_d = 5.$$

Isso nos dá $C = 14$, e

$$w_a = \frac{2}{14},\ w_b = \frac{3}{14},\ w_c = \frac{4}{14}\ \text{ e }\ w_d = \frac{5}{14}.$$

Deste modo temos

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{14} & \frac{3}{14} & \frac{4}{14} & \frac{5}{14} \end{pmatrix},$$

e com cálculos simples verificamos que

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{14} & \frac{3}{14} & \frac{4}{14} & \frac{5}{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/5 & 2/5 & 2/5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{14} & \frac{3}{14} & \frac{4}{14} & \frac{5}{14} \end{pmatrix}.$$

A propriedade que começamos a descrever em (3.4) e (3.4) é conhecida como reversibilidade, e tem um papel importante no estudo de cadeias de Markov. Abaixo definiremos mais formalmente o que vem a ser a reversibilidade, mas o leitor interessado em maiores detalhes pode procurar em [2, 3].

Diremos que uma cadeia de Markov com matriz de transição P é *reversível* se existir um vetor de probabilidades w tal que

$$w_x P_{xy} = w_y P_{yx},$$

para quaisquer pontos $x, y \in S$.

Para entender de forma intuitiva o que vem a ser reversibilidade, suponha que escolhamos aleatoriamente o ponto inicial onde a carga iniciará seu passeio, de acordo com o vetor w. Ou seja, a probabilidade de iniciarmos o passeio em x é w_x. Com isso a probabilidade da partícula seguir uma caminho $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ é dado por

$$w_{x_1} P_{x_1 x_2} P_{x_2 x_3} \cdots P_{x_{n-1} x_n}.$$

E se a cadeia for reversível, temos que

$$
\begin{aligned}
w_{x_1} P_{x_1x_2} P_{x_2x_3} \cdots P_{x_{n-1}x_n} &= P_{x_2x_1} w_{x_2} P_{x_2x_3} \cdots P_{x_{n-1}x_n} \\
&= P_{x_2x_1} P_{x_3x_2} w_{x_3} \cdots P_{x_{n-1}x_n} \\
&\vdots \\
&= P_{x_2x_1} P_{x_3x_2} \cdots w_{x_{n-1}} P_{x_{n-1}x_n} \\
&= P_{x_2x_1} P_{x_3x_2} \cdots P_{x_nx_{n-1}} w_{x_n} \\
&= w_{x_n} P_{x_nx_{n-1}} \cdots P_{x_3x_2} P_{x_2x_1}
\end{aligned}
$$

Isso mostra que a probabilidade da partícula seguir o caminho $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ é o mesmo de seguir o caminho reverso $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_1$, quando usamos o vetor w para escolher o estado inicial. o vetor w é conhecido também como *medida de equilíbrio* da cadeia, e se um passeio tem seu ponto inicial escolhido de acordo com w, diremos que o passeio está em equilíbrio.

Desta forma, uma cadeia reversível em equilíbrio é indistinguível do seu reverso temporal. Isto é, se observarmos uma cadeia reversível em equilíbrio, não saberemos dizer se ela está andando para frente ou para trás no tempo.

Para exemplificar, se tomarmos a rede elétrica do exemplo 3.1, a probabilidade do caminho c, b, d, a é

$$w_c P_{cb} P_{bd} P_{da} = \frac{4}{14}\frac{1}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{5} = \frac{1}{105},$$

E para caminho reverso, a, d, b, c temos

$$w_a P_{ad} P_{db} P_{bc} = \frac{2}{14}\frac{1}{2}\frac{2}{5}\frac{1}{3} = \frac{1}{105}.$$

3.3 INTERPRETANDO VOLTAGEM E CORRENTE

Até agora vimos que o passeio de uma partícula carregada por um circuito elétrico pode ser representado por um passeio aleatório. Entendemos o papel do resistor neste passeio, e estudamos algumas propriedades destes passeios, como reversibilidade. Nos resta agora entender como os conceitos de voltagem e corrente se encaixam nesta representação.

Já vimos que no caso de redes com resistências iguais, a voltagem é uma função harmônica, mas ainda não entendemos como interpretar isso do ponto de vista do passeio. Para terminar o capítulo vamos tentar entender como estas duas grandezas se encaixam neste modelo aleatório de redes elétricas.

Mas antes de completar nossa análise, vamos fazer um breve parêntese para definir o que entenderemos por função harmônica em uma rede geral.

Funções Harmônicas em Redes Gerais

Considere então uma rede $\mathcal{R}$ com pontos em $S = I \cup F$, onde I denotam os pontos do interior de S e F seus pontos de fronteira. Em cada elo (x, y) da rede coloque um peso $P_{xy} \geq 0$ de tal forma que $\sum_{y \in S} P_{xy} = 1$. Para os pontos da fronteira coloque peso zero em todo elo ligado a ele. Ou seja, se $x \in F$ e $y \neq x$, $P_{xy} = 0$, e para deixar o modelo consistente, faça $P_{xx} = 1$ se $x \in F$.

Definição 3.1. Nestas condições diremos que uma função h definida nos pontos S da rede é harmônica na rede $\mathcal{R}$ se

$$h(x) = \sum_{y \in S} P_{xy} h(y),$$

para todo $x \in S$.

Observe que, da definição acima, se $x \in F$ é um ponto da fronteira então

$$h(x) = \sum_{y \in S} P_{xy} h(y) = P_{xx} h(x) = h(x),$$

e nos demais pontos o valor da função é uma média ponderada do valor nos pontos vizinhos, assim como ocorre das redes um uma dimensão vistas no capítulo 1.

Podemos imaginar que nossa rede está modelando novamente as ruas de uma cidade, onde nosso motorista embriagado está tentando fugir da polícia. Mas agora estas ruas são muito distintas umas das outras. Algumas são mais estreitas, outras estão em uma ladeira. E este tipo de característica influencia na decisão do bêbado, aumentando ou diminuindo a probabilidade dele seguir um dado caminho. Assim, podemos dizer que quando ele está em um ponto x do mapa, ele decide ir para y com probabilidade P_{xy}. Assim, do mesmo modo que no primeiro capítulo, a probabilidade $p(x)$ do bêbado encontrar uma saída antes de cair em uma barreira policial é uma função harmônica com condições de fronteira dada por $p(x) = 1$ se $x \in F$ é um ponto de saída e $p(x) = 0$ se $x \in F$ é um ponto com barreira policial.

De fato, se o motorista está em um ponto x ele escolhe seu destino dentre os seus vizinhos, de acordo com as probabilidades da rede. Se ele segue para um ponto y (o que ocorre com probabilidade P_{xy}) o problema começa novamente, mas agora tendo y como ponto de saída, e a probabilidade buscada é agora $p(y)$. Com isso

$$p(x) = \sum_{y \in S} P_{xy} p(y).$$

É interessante notar que se $h(x)$ é uma função harmônica em uma rede $\mathcal{R}$, seu valor em um ponto $x \in I$ no interior de S é a média ponderada do valor nos vizinhos de x. Com isso, assim como no caso simétrico, $h(x)$ deve assumir um valor entre o menor e o maior valores de S nos vizinhos de x. Este era o principal argumento usado na demonstração do Princípio do Máximo para as redes do capítulo 1. Assim podemos provar que

Teorema 3.2 (Princípio do Máximo para Funções Harmônicas). *Se h é uma função harmônica nos pontos S de uma rede $\mathcal{R}$ com pesos $P_{xy}, x, y \in S$, então h assume seus valores máximo e mínimo nos pontos de F.*

Mas o princípio do máximo era a principal ferramenta na definição da unicidade das funções harmônicas. Segue assim que

Teorema 3.3. *Seja $S = I \cup F$, com $F = \{x_1, \dots, x_n\}$. Dada uma rede $\mathcal{R}$ com pontos em S e pesos P_{xy}, $x, y \in S$, fixados valores $a_1, \dots, a_n$, existe uma única função harmônica h em $\mathcal{R}$ tal que $h(x_k) = a_k$, $k = 1, \dots, n$.*

3.3.1 *Interpretação Probabilística de Voltagem*

Para entender o que é voltagem no contexto de passeios aleatórios, considere um circuito elétrico qualquer e coloque uma bateria de ddp unitária entre dois pontos da a, b da rede, de modo que $v(a) = 1$ e $v(b) = 0$.

Sabemos da primeira lei de Kirchhoff que para todo $x \in S$ com $x \neq a$ e $x \neq b$,

$$\sum_{y \in S} C_{xy}(v(x) - v(y)) = 0.$$

E portanto

$$\begin{aligned}\sum_{y\in S} C_{xy}(v(x) - v(y)) = 0&\\ \sum_{y\in S} C_{xy}v(x) &= \sum_{y\in S} C_{xy}v(y)\\ v(x)\sum_{y\in S} C_{xy} &= \sum_{y\in S} C_{xy}v(y)\\ v(x)C_x &= \sum_{y\in S} C_{xy}v(y)\\ v(x) &= \sum_{y\in S} \frac{C_{xy}}{C_x}v(y)\\ v(x) &= \sum_{y\in S} P_{xy}v(y),\end{aligned}$$

de onde segue que o potencial $v(x)$ define uma função harmônica na rede com valores de fronteira dados por $v(a) = 1$ e $v(b) = 0$.

Considerando agora uma carga se movendo aleatoriamente pela rede, nos perguntamos: qual a probabilidade desta partícula atingir a antes de atingir b, dado que o passeio foi iniciado em x?

Para responder esta pergunta perceba que só precisamos acompanhar o passeio até ele encontrar a ou b. Assim, se modificarmos o modelo de modo à partícula parar quando atingir a ou b, a resposta buscada permanecerá exatamente a mesma!

Como vimos anteriormente, a função $p(x)$ que dá a probabilidade da partícula atingir a antes de atingir b, dado que iniciou o passeio em x, é uma função harmônica com condição de fronteira dada por $p(a) = 1$ e $p(b) = 0$. Segue da unicidade do Teorema 3.3 que $p(x) = v(x)$ para todo $x \in S$.

Assim, se $v(a) = 1$ e $v(b) = 0$, podemos interpretar $v(x)$ como a probabilidade de um partícula carregada atingir a antes de atingir b, quando iniciou seu passeio em x.

Mesmo definindo voltagens diferentes em a e b, ainda podemos interpretar probabilisticamente o potencial elétrico em cada ponto. Se $v(a) = v_0$ e $v(b) = v_1$ por exemplo, faça

$$v(x) = v_0 p(x) + v_1 (1 - p(x)),$$

onde $p(x)$ é a função harmônica dada acima. Ou seja, a probabilidade de uma carga que inicia seu movimento em x, atingir a antes de b.

Como $p(x)$ é harmônica na rede, fazendo $v(x) = (v_0 - v_1)p(x) + v_1$

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in S} P_{xy} v(y) &= \sum_{x \in S} P_{xy} \left((v_0 - v_1)p(y) + v_1\right) \\
&= (v_0 - v_1) \sum_{x \in S} P_{xy} p(y) + v_1 \\
&= (v_0 - v_1)p(x) + v_1 \\
&= v(x),
\end{aligned}$$

e portanto $m(x)$ é harmônica com $m(a) = v_0$ e $m(b) = v_1$.

Desta forma $v(x)$ pode ser visto como o potencial médio ao final do passeio de uma partícula carregada que passeia aleatoriamente pela rede até ser absorvida em um dos pontos ligados à bateria.

Para ilustrar, voltemos ao exemplo 3.1. Lá consideravamos a rede da Figura 10, copiada abaixo para facilitar a leitura.

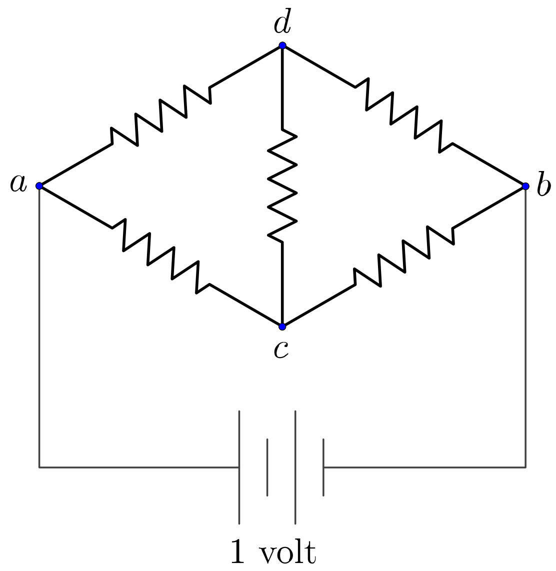

Figura 10: Circuito elétrico com bateria de 1 volt.

Tínhamos também que

$$C_{ac} = C_{ad} = C_{bc} = 1, \; C_{bd} = C_{cd} = 2.$$

dando

$$C_a = 2, \; C_b = 3, \; C_c = 4 \;\text{ e }\; C_d = 5,$$

e uma matriz de transição

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/5 & 2/5 & 2/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, para determinar as voltagens em c e d, fazemos

$$v(a) = 1 \quad \text{e} \quad v(b) = 0,$$

e

$$\begin{cases} v(c) & = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}v(d) \\ v(d) & = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}v(c) \end{cases}$$

o que nos dá

$$v(c) = \frac{7}{16} \quad \text{e} \quad v(c) = \frac{3}{8}.$$

Em outras palavras, a probabilidade de uma partícula carregada atingir a, antes de chegar a b, partindo de c, é de 7/16.

É interessante notar que os potenciais nos pontos da rede elétrica com diferentes potenciais nos pontos a e b estão diretamente relacionados com os potenciais para $v(a) = 1$ e $v(b) = 0$. Para ver isso, tome $A, B \in \mathbb{R}$ e faça

$$w(x) = (A - B)v(x) + B.$$

Observe que

$$w(a) = (A - B)v(a) + B = A,$$

e

$$w(b) = (A - B)v(b) + B = B.$$

Além disso

$$\begin{aligned} \sum_y P_{xy}w(y) &= \sum_y P_{xy}\left((A-B)v(y) + B\right) \\ &= \sum_y P_{xy}\left((A-B)v(y)\right) + \sum_y P_{xy}B \\ &= (A-B)\sum_y P_{xy}v(y) + B\sum_y P_{xy} \\ &= (A-B)v(x) + B \\ &= w(x), \end{aligned}$$

de onde segue que $w(x)$ é harmônica com $w(a) = A$ e $w(b) = B$. E assim, pela unicidade das funções harmônicas, $u(x)$ é a voltagem em x quando os potenciais em a e b são A e B, respectivamente.

Em particular, se $B = 0$, então $w(x) = Av(x)$.

Estas últimas observações serão essenciais na análise final deste capítulo.

3.3.2 *Interpretação Probabilística de Corrente*

Para entendermos o que é corrente elétrica em um passeio aleatório, lembre-se primeiro que corrente é uma medida do fluxo de elétrons por um resistor. Assim se pensarmos em milhares de elétrons andando pelo circuito, a corrente seria medida pelo número de partículas que passam pelo resistor em um sentido, menos o total de partículas que passou no sentido contrário.

Esta ideia ainda está um tanto obscura, e obviamente possui diversos problemas. O principal deles sendo que, como o elétron não deixa a rede, o total de vezes que ele passa no resistor é tão grande quanto queiramos, e isso pode certamente afetar o fluxo de partículas, podendo inclusive deixar a corrente também tão grande quanto se queira. Felizmente podemos corrigir tais problemas facilmente se apelarmos para nosso modelo aleatório.

Mas antes de continuar, lembre-se que, como comentamos anteriormente, os pontos que estão ligados à bateria tem um comportamento específico, e um tanto distinto dos demais nós da rede. Isso por que a bateria torna estes pontos vizinhos na rede, mas não com um resistor no elo correspondente. Apesar disso, existe uma corrente passando por ali, mas não podemos medi-la pela lei de Ohm. Por esta razão, precisamos fazer uma pequena modificação no passeio aleatório para que possamos entender o que chamaremos de corrente.

Para isso, imagine que a bateria é uma espécie de fonte de partículas, onde as partículas carregadas entram no sistema pelo polo de maior voltagem, e saem pelo de menor voltagem.

Assim, conectando uma bateria aos pontos a e b da rede, considere então que uma partícula carregada entre no circuito por um ponto a com voltagem $v(a)$, circule de modo aleatório por vários pontos do circuito, até que atinja o ponto b, com voltagem $v(b) = 0$, e deixe o circuito.

Agora sim, como cada partícula eventualmente chega ao ponto b, então o número de visitas de cada uma delas é finita. Note que cada uma destas partículas realiza um passeio aleatório independente das demais. Deste modo o comportamento médio destas partículas mede o que chamaremos de comportamento *esperado* de uma partícula. Assim se, por exemplo, contamos o número médio de vezes que estas partículas passam por um ponto x, medimos o número esperado de vezes que uma partícula passa por x antes de ser absorvida em b.

Isso é muito similar ao que acontece quando jogamos vários dados não viciados (ou um dado milhares de vezes). Neste caso, depois de várias jogadas, cada valor deverá aparecer aproximadamente $1/6$ das vezes, e a média dos valores observados deve estar próximo de

$$1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}.$$

Diremos então que $7/2$ é o *valor esperado* no lançamento de um dado.

Assim, para entender a corrente podemos seguir apenas uma partícula. Ao longo do percurso contemos sempre que esta partícula passa do ponto x para um ponto y, menos o total de vezes que fez o caminho inverso, isto até ser assimilada no ponto b. A este valor chamaremos de fluxo das passagens da partícula por (x, y). Vamos supor então que a corrente i_{xy} será o fluxo esperado das passagens de uma partícula pelo elo (x, y). Note que, assim como no caso do dado, apesar do fluxo ser um número inteiro, o fluxo esperado não necessariamente o será.

Para mostrar que a interpretação acima está correta, seja u_x o número esperado de vezes que a carga passa por x antes de chegar a b. Temos então que $u_b = 0$, e para $x \neq a, b$, e

$$u_x = \sum_y u_y P_{yx}.$$

Isto pois toda vez que a carga passa por x ela deve vir de algum outro ponto y. Observe que esta é a mesma argumentação que nos levou à equação (3.3).

Como a cadeia é reversível, temos que

$$C_x P_{xy} = C_y P_{yx},$$

e portanto

$$u_x = \sum_y u_y \frac{P_{xy} C_x}{C_y}$$

ou ainda

$$\frac{u_x}{C_x} = \sum_y P_{xy} \frac{u_y}{C_y}.$$

Segue daí que

$$v(x) = \frac{u_x}{C_x}$$

é uma função harmônica para $x \neq a, b$, com $v(b) = 0$ e $v(a) = \frac{u_a}{C_a}$. Mas pela unicidade das funções harmônicas, $v(x)$ é exatamente a voltagem em um ponto x quando uma bateria é ligada a um circuito entre a e b, estabelecendo uma voltagem $\frac{u_a}{C_a}$ em a e uma voltagem 0 em b.

Agora vejamos como se comporta a corrente que flui de x para y.

$$i_{xy} = (v_x - v_y)C_{xy} = \left(\frac{u_x}{C_x} - \frac{u_y}{C_y}\right) C_{xy} = \frac{u_x C_{xy}}{C_x} - \frac{u_y C_{yx}}{C_y} = u_x P_{xy} - u_y P_{yx}.$$

Mas $u_x P_{xy}$ é o exatamente o número esperado de vezes que a carga vai de x para y e $u_y P_{yx}$ o total esperado de vezes ela vai de y para x, como queríamos mostrar.

É importante notar que a corrente assim definida vale apenas para um circuito com d.d.p. específico, dado por u_a/C_a, que por sua vez é um valor difícil de se estimar.

Seria interessante então que conseguíssemos uma forma de encontrar a corrente a partir da corrente em uma rede com d.d.p unitária.

Para entender como fazer este cálculo, lembre do final da sessão anterior. Lá mostramos que se colocarmos potenciais $w(a) = A$ e $w(b) = 0$, então o potencial $w(x)$ no ponto x será dado por $w(x) = Av(x)$, onde $v(x)$ é potencial em x para $v(a) = 1$ e $v(b) = 0$. Assim se quisermos encontrar a corrente j_{xy} na rede com $w(a) = A$ basta fazer

$$j_{xy} = (w(x) - w(y))C_{xy} = (Av(x) - Av(y))C_{xy} = A(v(x) - v(y))C_{xy} = Ai_{xy}.$$

Assim a corrente dada pelo fluxo esperado de uma partícula é proporcional à corrente calculada para uma d.d.p. unitária. Para determinar a constante de proporcionalidade, note primeiro uma característica importante desta definição probabilística de corrente: a corrente total que flui para fora de a (e para dentro de b) é 1, ou seja

$$\sum_y i_{ay} = 1$$

e

$$\sum_y i_{yb} = 1.$$

De fato, na interpretação probabilística, o valor $\sum_y i_{ay}$ é a diferença esperada entre o número de vezes que a partícula sai de a para o número de vezes que retorna para a. Mas note que durante seu passeio, que inicia em a, a partícula retorna a a diversa vezes. Em cada retorno, a contagem de fluxo total é zerada, até que ela sai pela última vez, deixando o contador de fluxo em 1.

Assim, se denotarmos por i_{xy} a corrente dada pela interpretação probabilística acima e $\hat{i}_{xy}$ a corrente no circuito com d.d.p. unitária, teremos

$$i_{xy} = \frac{\hat{i}_{xy}}{\sum_y \hat{i}_{ay}},$$

pois neste caso vale

$$\sum_y i_{ay} = \sum_y \frac{\hat{i}_{ay}}{\sum_y \hat{i}_{ay}} = \frac{\sum_y \hat{i}_{ay}}{\sum_y \hat{i}_{ay}} = 1.$$

O valor $\sum_y i_{ay}$ é conhecido como *corrente total* do circuito.

Para esclarecer melhor, voltemos ao circuito dos exemplos anteriores.

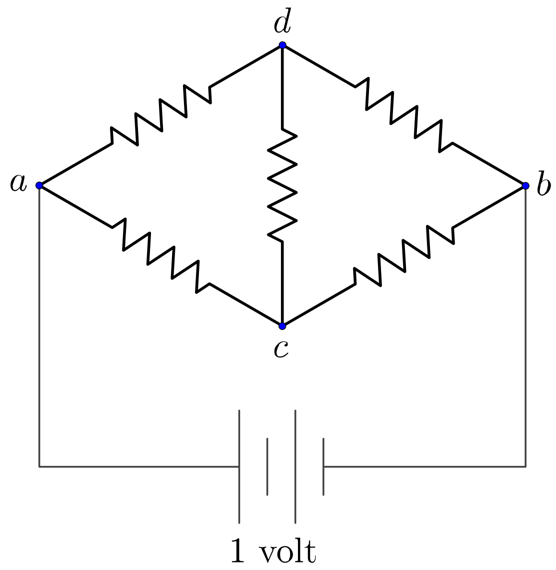

Figura 11: Circuito elétrico com bateria de 1 volt.

Lembrando, tínhamos

$$C_{ac} = C_{ad} = C_{bc} = 1, \; C_{bd} = C_{cd} = 2,$$

com

$$v(a) = 1, \; v(b) = 0, \; v(c) = \frac{7}{16} \quad \text{e} \quad v(d) = \frac{3}{8}.$$

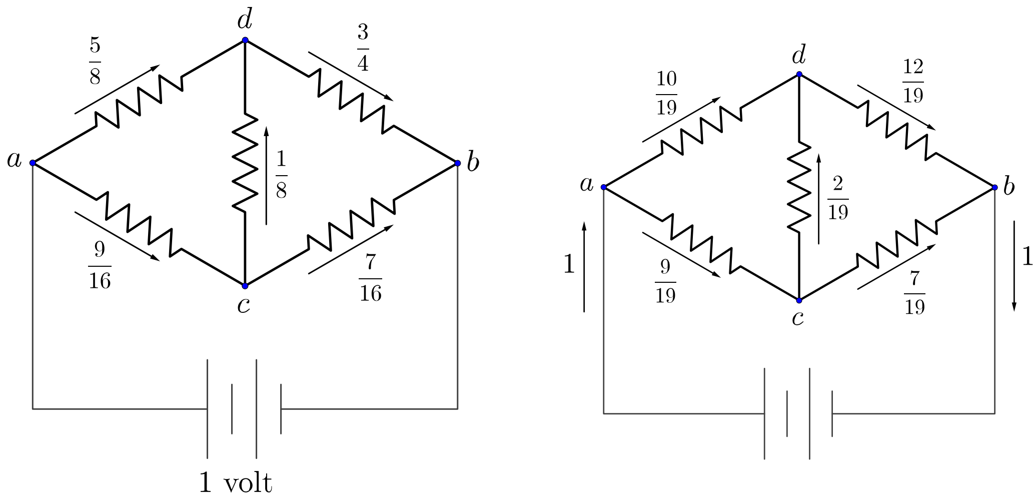

Figura 12: Circuito com d.d.p. unitária vs Circuito com corrente total unitária.

Deste modo segue que

$$\begin{aligned}
\hat{i}_{ac} &= (v(a) - v(c))C_{ac} = \left(1 - \frac{7}{16}\right) = \frac{9}{16} \\
\hat{i}_{ad} &= (v(a) - v(d))C_{ad} = \left(1 - \frac{3}{8}\right) = \frac{5}{8} \\
\hat{i}_{cd} &= (v(c) - v(d))C_{cd} = \left(\frac{7}{16} - \frac{3}{8}\right) 2 = \frac{1}{8} \\
\hat{i}_{cb} &= (v(c) - v(b))C_{cb} = \frac{7}{16} \\
\hat{i}_{db} &= (v(d) - v(b))C_{db} = \frac{3}{8} \cdot 2 = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

A corrente saindo de a é dada então por

$$K = \hat{i}_{ac} + \hat{i}_{ad} = \frac{19}{16},$$

e as correntes dadas pela interpretação probabilística são

$$\begin{aligned}
i_{ac} &= \frac{\hat{i}_{ac}}{K} = \frac{9}{19} \\
i_{ad} &= \frac{\hat{i}_{ad}}{K} = \frac{10}{19} \\
i_{cd} &= \frac{\hat{i}_{cd}}{K} = \frac{2}{19} \\
i_{cb} &= \frac{\hat{i}_{cb}}{K} = \frac{7}{19} \\
i_{db} &= \frac{\hat{i}_{db}}{K} = \frac{12}{19}.
\end{aligned}$$

4

ATIVIDADES SOBRE CAMINHOS ALEATÓRIOS

4.1 SUGESTÕES DE ATIVIDADES

Como vimos no decorrer deste trabalho, o objetivo era estudar a relação entre caminhos aleatórios e redes elétricas, com foco especialmente em conteúdos lecionados no Ensino Médio. Portanto, veremos agora algumas atividades que podem ser propostas e realizadas em sala de aula, com recusros bastante simples. Como sugestão, as atividades também podem ser operadas interdisciplinarmente, em especial nas aulas de física. Vejamos agora algumas possibilidades de atividades.

4.2 PASSEIO ALEATÓRIO COM MOEDAS

Objetivos: trabalhar com os alunos os conceitos básicos de probabilidade, além de estatística quanto a coleta e análise de dados.

Tempo estimado: duas a três aulas, sendo a primeira para que os alunos realizem o jogo, quantas vezes cada dupla conseguir, a segunda para coleta e análise de dados, e se possível uma terceira aula para explanação sobre caminhos aleatórios e comparação dos resultados obtidos com a expectativa dentro da análise do modelo por meio de uma função harmônica.

Conhecimentos prévios: para participar do jogo, não são necessários os requisitos que seguem, mas para a análise posterior é importante que o aluno tenha conhecimento básico sobre funções, probabilidade e estatística.

Como jogar: separe os alunos em duplas, cada dupla com uma moeda e folhas para anotações. A atividade consiste em simular uma função harmônica em uma dimensão, e para tanto fica a sugestão do seguinte roteiro (para se evitar citar o "caminhar do bêbado"em sala de aula): Uma pessoa está indecisa se quer tomar um sorvete ou comer um bolo, e por isso não consegue decidir se vai para a esquina da Rua 0 com a avenida principal, ou se vai à esquina da Rua 4, também com a avenida principal, onde fica a doceria que vende bolos. Essa pessoa se encontra na esquina da Rua 2 com a Avenida Principal, sendo que indo à direita ela chega à Rua 4, e indo à esquerda ele chega à esquina 0. Cada aluno participante é dono de uma das lojas, e para saber onde esse cliente vai deverá ser jogada uma moeda ao alto; se o resultado for coroa, o clinte irá para a direita, se der cara, vai para a esquerda. Mas como esse cliente é muito indeciso, a decisão de ir para a direita ou para a esquerda acontece a cada esquina. Portanto, a moeda é lançada a cada movimentação de esquina, e "ganha"o jogo o aluno que for dono da loja para a qual o cliente se dirigir.

Na primeira aula a ser utilizada para a atividade, mais importante do que verificar quem vence esse jogo, é que os alunos registrem todo o processo, ou seja, indiquem quanto passos foram necessários para se chegar ao resultado final, e isso deve ocorrer com todas as duplas, quantas forem as partidas realizadas.

Na segunda aula, peça aos alunos para que registrem todos os resultados obtidos, e calculem a porcentagem de resultados para a sorveteria ou para a doceria. Como visto no primeiro capítulo deste trabalho, se considerarmos uma das esquinas que encerram o jogo como 0 e a outra como 1,a função harmônica que modela essa situação nos dá a previsão de que, a partir de um ponto x, a probabilidade de se atingir a esquina 4 antes de se chegar à esquina 0 é de $\frac{x}{4}$, o que no caso específico da esquina 2 nos dá $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Nessa aula é interessante abordar técnicas básicas para análise de dados por meio estatístico.

Na possível terceira aula, podemos discutir o conceito de uma função harmônica em uma dimensão, e a partir daí discutir com os alunos se o resultado obtido é coerente com o esperado ou não, e porque a disparidade, se houver.

Sugestão: caso haja tempo para outra aula, convém refazer a atividade considerando uma saída aleatória do cliente, ou seja, partindo não necessariamente da esquina 2, para verificar novamente os resultados obtidos a partir da nova "regra".

4.3 PASSEIO ALEATÓRIO COM PROBABILIDADES DISTINTAS

Objetivos: assim como na atividade anterior, o objetivo é trabalhar com os alunos os conceitos básicos de probabilidade, além de estatística quanto a coleta e análise de dados, porém nesse caso veremos como operar com probabilidades diferentes entre opções de direita e esquerda.

Tempo estimado: duas a quatro aulas, sendo a primeira, ou se possível as duas primeiras, para que os alunos realizem o jogo (com variações de probabilidades caso ocorra a segunda aula), quantas vezes cada dupla conseguir, a segunda (ou terceira) para coleta e análise de dados, e se possível uma terceira (ou quarta) aula para explanação sobre caminhos aleatórios e comparação dos resultados obtidos com a expectativa dentro da análise do modelo por meio de uma função harmônica.

Conhecimentos prévios: novamente, para participar do jogo, não são necessários os requisitos que seguem, mas para a análise posterior é importante que o aluno tenha conhecimento básico sobre funções, probabilidade e estatística.

Como jogar: separe os alunos em duplas, cada dupla com folhas para anotações. Para realizar o jogo com uma ferramenta que permita diferentes probabilidades entre direita e esquerda, sugerimos um dado não viciado. Porém, cabe aqui sugerir a confecção de um roleta de dez ou doze divisões de igual tamanho (não comentaremos sobre a confecção da roleta e sua possibilidade de ser tratada de forma transdisciplinar, mas o assunto pode ser abordado tanto na matéria de Artes, como na de Desenho Geométrico, nas escolas que possuírem essa matéria em seu currículo). A atividade também consiste em simular uma função harmônica em uma dimensão, porém nesse caso, após decidir a história a ser utilizada como mote para o jogo, cabe decidir quais serão as probabilidades de movimentação para direita ou esquerda (ou para cima e para baixo, ou qualquer outra forma de representar sentidos opostos).No caso de um dado comum de seis faces, as probabilidades podem variar de $\frac{1}{6}$ para um lado e $\frac{5}{6}$ para o outro a até para $\frac{1}{2}$ cada lado; já no caso das roletas, as variações mínimas de probabilidade para um dos lados podem ser de $\frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{12}$. Novamente ganha o jogo o participante para o qual o andarilho tenha se dirijido.

É interessante testar com os alunos diferentes probabilidades, mas fica a sugestão de que vários grupos utilizem uma mesma probabilidade para o jogo, e somente após finalizarem a partida, os grupos mudem as probabilidades de forma conjunta. Essa estratégia permite que se façam comparações entre os resultados obtidos para uma mesma probabilidade em jogo.

Uma vez que as atividades de partidas tenham se realizados, com as respectivas anotações dos resultados e do número de tentativas para se chegar a um resultado, cabe discutir com os alunos sobre caminhos aleatórios, estimar os resultados esperados, e compará-los aos obtidos.

4.4 PASSEIOS ALEATÓRIOS COM TABULEIRO

Uma forma interessante de abordar o estudo de caminhos aleatórios, inclusive em duas dimensões, é utilizar um tabuleiro de damas ou de xadrez, que permite movimentações em mais do que dois sentidos. Com mesmo objetivos em termos de conteúdos dos jogos anteriores, cabe aqui destacar quais os pontos diferentes que existem, ao invés de novamente citar o que já foi descrito. Começando pela jogabilidade, podemos limitar nossa movimentação a apenas uma casa por vez, e somente nos sentidos norte/sul e leste/oeste. Para tal, pode ser utilizada uma moeda sendo lançada duas vezes por jogada, a primeira definindo se a movimentação será para norte/sul ou leste/oeste, e a segunda definindo o sentido da movimentação. Fica a sugestão a seguir: o primeiro lançamento determina que se o resultado for cara, a movimentação ocorrerá no sentido norte/sul, e caso seja coroa, o sentido será leste/oeste. O segundo lançamento define o sentido; se o primeiro foi cara e o segundo também, a personagem se dirige para o norte, caso coroa para o sul, e se o primeiro lançamento resultar em coroa, o segundo lançamento determina leste em caso de cara, e oeste em caso de coroa.

Cabem aqui algumas sugestões de regras que podem ser observadas para otimizar a aplicação e reduzir o tempo de duração de cada partida, pois caso contrário uma única partida de simulação de caminho aleatório em duas dimensões poderia ser demasiada longa para sua efetiva aplicação em sala de aula:

1 Escolha somente uma cor de casa do tabuleiro, diminuindo assim o número de movimentações necessárias para se atingir um ponto absorvente. Além disso, facilita a compreeensão dos alunos que não há possibilidade de movimentação em diagonal.

2 Para que não haja caminho sem possibilidade de ir adiante, e para uma maior celeridade do jogo, cada casa das linhas e colunas limites do tabuleiro devem conter um ponto absorvente, de preferência intercalando os pontos absorventes que dão vitória respectivamente a cada jogador.

4.5 PASSEIOS ALEATÓRIOS COM GEOGEBRA

Vamos propor por fim uma atividade com uso de ferramentas computacionais, para que tecnologias possam ser exploradas em salas de aula que tenham acesso a essa ferramenta. Para tanto, o professor que desejar tem à sua disposição alguns programas que permitem uma simulação de Passeio aleatório, gratuitos ou não.

No caso, recomendamos o programa Geogebra (de download gratuito para diversas plataformas em www.geogebra.org) para modelar um estudo de Passeio aleatório. A escolha deste programa se deve a sua gratuidade, facilidade de operação, inclusive com diversos tutoriais facilmente acessíveis pelo site www.youtube.com , e por possuir ferramentas que permitem simular um Passeio aleatório de forma simples e eficaz.

Como essa ferramente apresenta diversas possibilidades de uso, neste item não se pretende sugerir um modelo específico de atividade a ser realizada, pois cada professor e cada escola podem dispor de tempos diferentes para a execução de propostas no sentido de uso da informática para o estudo de Passeios aleatórios e, consequentemente, de funções harmônicas, probabilidade e matrizes. É possível praticar atividades com diferentes níveis de dificuldade e de análise de probabilidade, bem como é possível ainda inserir imagens de acordo com a necessidade de cada local de estudo. Vale ainda analisar a possibilidade de aplicação de estudo interdisciplinar, em especial relacionando a Física e a Matemática, posto que é possível inclusive simular um circuito elétrico simples com as ferramentas apresentadas.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. G. Doyle and J. L. Snell, *Random walks and electric networks*, 2000.

[2] P.A. Ferrari and J.A. Galves, *Acoplamento e processos estocásticos*, IMPA, 1997.

[3] Sheldon M. Ross, *Introduction to probability models*, Probability and Statistics, Academic Press, 2007.

[4] ______, *Probabilidade: Um curso moderno com aplicações*, 8 ed., Bookman, Porto Alegre, 2010.

[5] P. M. Soardi, *Potential theory on infinite networks*, Lecture Notes on Mathematics, no. 1590, Springer-Verlag Berlin Heideberg, New York, 1994.