UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
CENTRO DE MATEMÁTICA COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

EMANOEL FABIANO MENEZES PEREIRA

TEORIA DOS JOGOS COM APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

Santo André-SP
2014

EMANOEL FABIANO MENEZES PEREIRA

TEORIA DOS JOGOS COM APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada no Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) na Universidade Federal do ABC, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Sinuê Dayan Barbero Lodovici

Santo André-SP

2014

Agradecimentos

- A Deus, sem O Qual nada poderia ser feito.
- Aos meus pais, pessoas inspiradoras.
- A minha amada esposa, companheira de todos os momentos, a força que me foi dada por Deus.
- A minha tia Zeza, pelo primeiro presente quando passei no vestibulinho da Escola Técnica Federal de São Paulo, o primeiro grande reconhecimento e incentivo aos estudos de alguém que ainda hoje não sabe ler.
- A minha tia Ana pela preocupação e carinho.
- Aos meus filhos, meus maiores presentes.
- A toda minha família, meu grande tesouro.
- Aos meus antigos gerentes e supervisores Luiz Carlos Gomes, Edy Hayashida e Cristina Campoi pelo incentivo aos estudos e por acreditarem em mim.
- Aos eternos amigos Marcio Oliveira e Adriana Prioste, sempre presentes.
- Ao grande amigo Ronaldo Rodrigues Chaves, pelo apoio, pelo tempo que estudamos juntos desde a graduação, certamente muito do que sei devo a ele.
- A minha primeira professora inspiradora, Dona Amália da terceira série primária da Escola Estadual Walfredo Arantes Caldas, incrível e inesquecível.
- A Doutora Maria Cristina Bonomi pela didática impecável em sala de aula, inspiradora.
- A Universidade Federal de Santo André pela qualidade de ensino e pelo trabalho sério.

- Ao meu orientador Sinuê Dayan Barbero Lodovici pelo apoio, pela atenção e por acreditar no projeto.
- A todos que me ajudaram direta ou indiretamente sou muito grato.

Resumo

Os jogos encantam a humanidade desde os tempos mais remotos. Especialmente, os jogos abstratos (ou matemáticos) atraíram a atenção de matemáticos ilustres como Bernoulli, dentre tantos. E esta atração deu origem a novas áreas da matemática, em destaque, surgiu também a Teoria dos Jogos. Esta teoria trás a beleza de transformar interações humanas em jogos, modelando fenômenos que podem ser observados quando dois ou mais “agentes de decisão” interagem entre si com conflitos e/ou cooperação.

O estudo da Teoria dos Jogos utiliza recursos da modelagem matemática equacionando diferentes situações de diferentes campos de estudo e é esta característica interdisciplinar que inspirou este trabalho. A Teoria dos Jogos vem sendo utilizada em várias áreas, como economia, biologia, sociologia, etc.

Neste trabalho pretende-se passar as noções básicas da Teoria dos Jogos para professores do ensino básico como uma possível ferramenta para fomentar entre os educandos o interesse pela matemática aplicada além deles serem beneficiados pelo desenvolvimento do pensamento estratégico, da atenção, raciocínio lógico, planejamento de ação e sequenciamento, habilidades muito úteis na competência de resolver problemas.

Almeja-se que aconteça a construção do conhecimento dos alunos de uma forma mais atraente.

Palavras chave: Teoria de Jogos, Jogos estáticos, Equlíbrio de Nash

Abstract

The games enchanted mankind since ancient times. Especially, abstract games (or mathematical) attracted the attention of illustrious mathematicians like Bernoulli, among many. And this attraction gave rise to new areas of mathematics, highlighted, also appeared to Game Theory. The theory behind the beauty of transforming human interactions in games, modeling phenomena that can be observed when two or more "decision-makers" interact with conflict and / or cooperation.

The study of Game's Theory uses mathematical modeling resources equating different situations of different fields of study and this interdisciplinary characteristic that inspired this work. The Game's Theory has been used in various areas, such as economics, biology, sociology, etc.

This paper intends spending the basics of Game's Theory to elementary school teachers as a possible tool to foster among the students, the interest in applied mathematics and these be benefited by the development of strategic thinking, attention, logical reasoning, planning action and sequencing, very useful skills in problem-solving competence.

It's desire to happen the construction of students' knowledge in a more attractive way.

key words: Game Theory, Static Games, Nash Equilibrium

Sumário

1 Conceitos Básicos da Teoria dos Jogos **12**

1.1 Breve Histórico . . . 12

1.2 Definições . . . 15

1.3 Matriz de Resultado e Matriz de Recompensa . . . 24

2 Racionalidade e Utilidade **30**

2.1 Comportamento Estratégico . . . 31

2.2 Racionalidade . . . 33

2.2.1 A escolha racional. . . . 33

2.3 Função Utilidade e Função Recompensa . . . 35

3 Jogos Estáticos **39**

3.1 Descrição de Jogos Estáticos . . . 42

3.2 Solução de um jogo . . . 48

3.2.1 Resolvendo Jogos usando dominância . . . 48

3.2.2 Deleção Iterativa de Estratégias Dominadas . . . 58

3.2.3 Equilíbrio de Nash . . . 68

3.2.4 Existência do Equilíbrio de Nash . . . 76

4 Experiências de Campo **78**

4.1 Jogo das Notas e dois tipos de jogadores . . . 79

4.2 A Batalha de Bismarck e a tomada de decisão da rota de ataque. . . 79

4.3 Jogo da Escolha e a Deleção Iterativa de Estratégias Dominadas . . . 81

4.4 O Dilema do Prisioneiro . . . 82

4.5 Respostas de exercícios . . . 83

5 Considerações finais **84**

Notação

u_i	:	Função utilidade do jogador i
a_i	:	Ação do jogador i
S_i	:	Espaço de estratégias do jogador i
s_i	:	Estratégia pura do jogador i
s_{-i}	:	Uma combinação de estratégia de todos jogadores exceto i
S_{-i}	:	Espaço de estratégias do jogo, exceto do jogador i
S	:	Espaço de estratégias do jogo
s	:	Perfil de estratégia ou vetor de estratégia
$\succsim$	:	Ao menos tão bom quanto
$\succ$	:	É estritamente preferível a
$\sim$	:	É indiferente a
δ_i	:	Estratégia mista do jogador i
Δ_i	:	Conjunto das possíveis estratégias mistas do jogador i
$p(s_i^j)$	:	Probabilidade do jogador i utilizar sua estratégia j-ésima estratégia
δ	:	Perfil de estratégia mista
Δ	:	Espaço de estratégias mistas
$B_i(s_{-i})$	:	Melhor resposta do jogador i para s_{-i}.

Introdução

Este trabalho foi desenvolvido como tese do Mestrado profissional em Matemática da Universidade Federal de Santo André. Ele traz discussões de caráter teórico, prático e reflexões sobre a utilização da Teoria dos Jogos no auxílio a atividades lúdicas que visam o desenvolvimento sistematizado do raciocínio lógico e de conceitos matemáticos.

A sistematização do pensamento lógico beneficia as decisões que são tomadas a todo instante nas relações inter- pessoais e defende-se que faça parte do cotidiano do aluno.

Atividades pedagógicas que utilizam jogos como metodologia do ensino da matemática estão sendo amplamente apontadas e discutidas por diferentes autores e já aceitas em muitas escolas. Nessas usa-se a sala de aula como um ambiente propício à reflexão e a análise do jogo a partir de intervenção pedagógica do professor responsável pelo grupo de alunos. Além disso, aproveitar o ambiente competitivo e colaborativo natural da sociedade do século XX é um outro caminho no processo educativo. É uma tendência em Educação Matemática.

Uma atividade lúdica com intuito de ensinar conceitos matemáticos, pode ser paralelamente usada para desenvolver a capacidade de tomada de decisões com isso o conhecimento do professor em Teoria dos Jogos será importante na modelagem e na orientação da resolução ou desenvolvimento da mesma.

Além disso a descentralização no aprendizado do conceito, a priori, deixará por vezes de oferecer obstáculos a execução do mesmo, uma vez que as táticas poderão ser mais atrativas àqueles que não tem afinidade com os mecanismos tradicionais da matemática. Não se pretende tirar a importância desses mecanismos mas apoiá-los indiretamente, desmistificando a dificuldade de aprender matemática. A exemplo disso, e afirmando o que aqui se diz, usamos alguns jogos na prática, focando as estratégias e indiretamente se ensinando algum conceito matemático com a intervenção do professor no processo.

Na Teoria dos Jogos o educando poderá não somente jogar mas também modelar um jogo.

A utilização jogos tem uma potencialidade no desenvolvimento do pensar matemático, da criatividade e da autonomia dos educandos. A modelagem por sua vez desenvolve a formulação e resolução de problemas abrangendo ideias e conceitos matemáticos.[5]

Na análise de um jogo há um processo lógico, modelagem, métodos de inferência, análise de argumentos, tabelas, combinatória entre outros, assuntos considerados difíceis no ensino médio e reforçados aqui.

A reflexão desenvolvida pelos alunos sobre os procedimentos utilizados na elaboração de estratégias e resolução de situações-problema presentes no jogo ou definidos a partir dele é um momento de aprendizagem dentro da análise de um jogo.

Por estudar as tomadas de decisões estratégicas e a lógica das interações humanas, a Teoria dos Jogos tem também característica interdisciplinar que é requisitada no plano nacional do ensino.

Esse novo ramo da matemática tem grande aceitação nos cursos de administração e economia e vem sendo aplicada nas ciências políticas, ciências militares, filosofia, jornalismo, ciências biológicas e até mesmo na ciência da computação em aplicações na inteligência artificial e cibernética.

Capítulo 1

Conceitos Básicos da Teoria dos Jogos

1.1 Breve Histórico

A Teoria dos Jogos teve inicio em 1920 com os estudos de John Von Neumann (1903-1957) para desenvolver uma abordagem científica que pudesse ser utilizada em uma partida de pôquer. Em seus estudos Neumann percebeu que as estratégias aplicadas neste jogo poderiam ser utilizadas também no mundo dos negócios. Nascido na Hungria, emigrou para os Estados Unidos na década de 1930. Em 1928 publicou "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele", *Mathematische Annalen*, onde mostra que jogos de soma-zero (onde há um perdedor sempre que há um vencedor) tem solução determinada por técnicas matemáticas.

No entanto é importante falar de precursores da ideia, citamo-los abaixo:

- No século XVIII, James Waldegrave em correspondência dirigida a Nicolas Bernoulli, analisa um jogo de cartas chamado Le Her e fornece uma solução que é um equilíbrio de estratégia mista, contudo, Waldegrave não estendeu sua abordagem para uma teoria geral.

- Antoine Augustin Cournot, matemático francês que viveu entre 1801 e 1877, publicou, em 1838, Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses, pesquisas sobre os Princípios Matemáticos da Teoria da Riqueza. Nesta obra, Cournot estabeleceu os princípios teóricos da teoria dos jogos, apresentando o modelo de duopólio onde duas empresas que competiam entre si comercializando um mesmo produto, decidiam quais as quantidades que maximizariam seus lucros, sabendo que a produção de cada uma influenciava nos lucros da outra.(O Dupolio de Cournot). Os elementos apresentados por Cournot são considerados precursores do desenvolvimento da Teoria dos Jogos, por isso algumas referências na literatura chamam ao equilíbrio de Nash de equilíbrio de Cournot-Nash, embora há discordância quanto a isso alguns argumentam que Cournot não propunha uma teoria das interações estratégicas mas apenas possuía características de um método que mais tarde fora utilizadas em jogos não cooperativos, outros creditam aos trabalhos de Nash um aperfeiçoamento na interpretação de Cournot.

- Em 1913 o matemático alemão Ernest Friedrich Ferdinand Zermelo (1871-1953) demonstrou que o jogo de xadrez sempre tem uma solução, significando que para qualquer jogada de um participante, seu oponente tem uma estratégia vencedora. Esta demonstração foi importante pois utilizava um método que antecipava a técnica de solução, posteriormente conhecida como a técnica da indução reversa.

  Félix Edouard Justin Emile Borel (1871-1956), outro matemático francês disse:

  "Os problemas de probabilidade e análise que se propõem com relação à arte da guerra, ou especulações econômicas e financeiras, não são isentos de analogia com os problemas que dizem respeito a jogos, embora possuam um maior grau de complexidade."

  Com isso utiliza de forma pioneira o conceito moderno de estratégia. Para cada circunstância possível (finitas em números), Borel mostrava o que o agente deve fazer, chamou isso de "método de jogo". O termo "jogos" utilizado por ele refere-se especificamente a jogos estratégicos.

Em 1944, surge formalmente a Teoria dos Jogos com a publicação do livro Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico (The Theory of Games and Economic Behavior) do matemático húngaro John Von Neumann em co-autoria com o economista alemão Oskar Morgenstern (1902-1977).

Nesta obra os autores desenvolveram a análise dos jogos de soma zero, definiram a representação dos jogos em forma extensiva além de discutirem a cooperação e a formação de coalização entre os jogadores.

Considerada um marco no estudo da teoria dos jogos, a obra mostrou-se bastante restritiva pois focava-se na análise dos jogos de soma zero, que não refletia todas as das situações de interação entre indivíduos ou entre organizações. Era necessário ferramentas teóricas mais abrangentes que fossem capazes de analisar outros modelos de interação estratégica.

Essas ferramentas surgiram partir de 1950 com a contribuição do matemático John F. Nash Jr, do economista John C. Harsanyi e do matemático e economista Reinhard Selten, que possibilitaram a análise de uma maior variedade de modelos de interação.

Nash mostrou o equilíbrio para jogos que não fossem de soma zero. Este conceito ficou conhecido como equilíbrio de Nash, situação em que a jogada de um agente será sempre a melhor resposta a estratégia adotada pelos demais jogadores.

O economista húngaro John C. Harsanyi (1920-2000) formulou o modelo de informação incompleta que mostrava que em situações onde apareciam informações assimétricas (como algum jogador ter informações privilegiadas) poderiam ser aplicados o conceito de equilíbrio de Nash. Isso foi de especial importância em economia pois antes disso os economistas modelavam estas situações inadequadamente.

Em 1965 Selten publicou um artigo responsável pelo refinamento da noção de equilíbrio cujo conteúdo principal é o modelo equilíbrio perfeito em subjogos. A partir deste conceito, Selten, diz que uma estratégia para ser ótima tem que levar em consideração todos os possíveis desdobramentos do processo de interação estratégica. A importância da contribuição de Selten foi significativa, principalmente para a análise daqueles jogos que envolvem ameaças e compromissos, pois permitiu avaliar quais compromissos ou ameaças poderiam ser cumpridas.

Robert J. Aumann, matemático cujos estudos possibilitaram entender que as relações entre indivíduos ou organizações tem uma boa chance de durar por tempo indeterminado. Esta ideia está vinculada as 12 premissas de cooperação, tempo de realização dos ganhos e respeito a um contrato. Como exemplos de situações que podem ser estudadas a partir da contribuição de Aumann podemos citar a formação de cartéis. Nesta estrutura de mercado as empresas abrem mão de parte da sua oferta para que o preço de mercado se eleve, mas existirá sempre a tentação de que uma ou todas empresas aumentem suas ofertas e, consequentemente, seus lucros decretando o fim do cartel.

Durante a a Guerra Fria entre os EUA e a extinta União Soviética, Thomas C. Schelling publicou o "The Strategy of Conflit". Neste livro Schelling, aplicando os preceitos da Teoria dos Jogos, mostra que uma forma convincente para anular uma ameaça é tornar a resposta a mesma imprevisível. Se o agente ameaçador não pode prever a reação a sua agressão, então seus riscos de perda aumentam de modo que ele irá preferir cessar a ameaça. Naquele momento estava em pauta a corrida armamentista e o temor a guerra nuclear. Seu trabalho tratou também de coordenação de decisões entre indivíduos de forma a promover um resultado melhor para todos.

Hoje a teoria dos jogos é aplicada a economia, administração, direito, ciência política, questões de natureza militar e biologia, é essencial no estudo de situações que envolvam interações estratégicas.

1.2 Definições

Teoria dos Jogos reúne ferramentas matemáticas para estudo e modelagem de problemas que envolvam conflito de interesses por parte de dois ou mais tomadores de decisões. Estas ferramentas são um conjunto de regras mentais que tornam o raciocínio mais rápido e direcionado, ajudando a escolher para cada situação a estratégia mais adequada, é a potencialização do pensamento estratégico. Sua rigorosa linguagem matemática oferece precisão nas ideias afastando ambiguidades.

De origem relativamente recente, a Teoria dos Jogos é uma modelagem matemática onde os objetos de estudo a serem modelados são as situações que envolvam interações entre agentes racionais com comportamento estratégico. A **interação** se dá quando as escolhas ou ações de cada agente afetam os resultados dos demais agentes envolvidos.

Essas situações colaborativas ou competitivas, não determinadas pelo acaso, podem ser expressadas matematicamente e analisadas dando um norteamento de qual resultado deverá prevalecer, caso as decisões estratégicas sejam tomadas racionalmente. A essas situações chamamos de "**jogos**" e aos **agentes** participantes chamamos de **"jogadores"**.

A palavra "**jogos**″ é utilizada pois assim como em muitos jogos tradicionais você precisa tomar uma decisão enquanto imagina a decisão do outro.

Cada jogador tem um conjunto de ações em cada momento do jogo. A forma como escolhe e ordena essas ações é a estratégia. Quando todos os jogadores escolhem uma estratégia para si, temos então uma situação ou perfil, (quando todos jogam de uma das maneiras possíveis). Ocorrido o jogo, o comportamento final da situação é o resultado da estratégia (ou resultado do jogo para esta específica situação). Por último cada jogador tem interesse ou preferências por cada situação (ou por cada resultado) e isto estabelece o ganho ou pagamento deste jogador. Vamos colocar uma linguagem comum para a compreensão geral de um jogo.

Definição 1.1. ***Jogos*** *são situações onde haja interação estratégica e conflitos de interesses entre dois ou mais participantes.*

Definição 1.2. ***Agentes*** *ou* ***Jogadores*** *são indivíduo ou grupo de indivíduos que participam das situações estratégicas e cujas decisões e interações podem influenciar o resultado do jogo.*

Podemos representá-los por i*, onde* $i \in N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$*, conjunto dos jogadores. Em jogos de dois jogadores é comum serem usadas as denominações Uno e Due ou* i *e* j*.*

No decorrer desse trabalho as diferenças entre "jogos" no seu sentido mais geral e "jogos" em teoria dos jogos será evidenciado, no entanto daremos alguns exemplos aqui para ilustrarmos a ideia.

Exemplo 1.1. *Um casal de idosos vão a um bingo todo final de semana. O esposo sempre compra duas cartelas (pois acha que terá mais chances de ganhar) a esposa por sua vez compra apenas uma cartela. Está evidente que a estratégia do esposo em ter mais cartelas não influencia no resultado positivo ou negativo de sua esposa que preferiu economizar ao comprar apenas uma cartela. Embora os dois tivessem uma estratégia, não houve interação e esta situação dependia apenas da sorte, por isso* ***não é um jogo*** *na "teoria dos jogos".*

Exemplo 1.2. *Uma prefeitura cogita diminuir os impostos fiscais para tentar atrair as empresas, gerando empregos e aumentando a arrecadação. No entanto teme que isso seja feito também pelas cidades vizinhas e se assim ocorrer corre o risco de ver sua arrecadação diminuída pois as empresas que lá já estão também pagariam menos impostos e novas empresas acabariam por não se instalarem nessa cidade.*

Há uma interação entre as decisões das cidades envolvidas e isso é uma situação de jogos em teoria dos jogos.

Exemplo 1.3. *Cliente de um banco temem por sua falência e decidem se devem correr ao banco para tentar retirar suas economia, se todos solicitarem a retirada, o banco fatalmente irá falir e é muito provável que não conseguirá pagar a todos os credores e clientes além de gerar um crise que resultará em prejuízos a população. Caso resolvam confiar, há chance que o banco saia da crise. Aqui também vemos interações nas ações, nesta teoria isto é um jogo.*

Outros exemplos de jogos nessa teoria são:

- Casais escolhendo onde vão jantar.
- Empresas competindo em um mercado.
- Diplomatas negociando um tratado.
- Apostadores em um jogo de cartas.

As técnicas adequadas para a análise de decisões interdependentes diferem significativamente daquelas para as decisões individuais. Mesmo para jogos estritamente competitivos, o objetivo é simplesmente identificar uma estratégia ideal e não propriamente vencer como ocorre em outros jogos.

Definição 1.3. *Cada decisão ou escolha de um jogador em um dado momento do jogo é denominado de **ação**. O conjunto de ações disponíveis será denotado A. Pode ser um conjunto discreto, por exemplo, $\{a_1, a_2, a_3, ...\}$, ou um conjunto contínuo, por exemplo, o intervalo de unidade de $[0, 1]$. Ao fazer a escolha da ação dizemos que o jogador efetuou um **movimento** ou **lance**.*

O papel de análise da teoria dos jogos é o de identificar a sequência de movimentos que deverá ser usada, isto é, a estratégia que deverá ser usada.[1]

[1] A palavra estratégia é derivada da palavra grega *strategos* ($\sigma\tau\rho\alpha\tau\epsilon\gamma o\varsigma$)

Definição 1.4. ***Estratégia*** *é a sequência de movimentos de um agente em um jogo, é uma regra para a escolha de uma ação em cada ponto que uma decisão pode ter que ser feita. Uma* ***estratégia pura*** *é aquela em que não há nenhuma distribuição aleatória.*

A ***melhor estratégia***[2] *é uma sequência de movimentos que resulta em um melhor resultado. É comum, como faz Ben Polak* [3] *no seu curso Teoria dos Jogos na Universidade De Yale, chamar cada ação de estratégia quando tratamos de jogos simples com decisões simultâneas.*

Definição 1.5. *Dado um jogo, chamamos de S_i ao* ***espaço de estratégia*** *do jogador i que é o conjunto de todas as escolhas possíveis para o jogador i, ou seja, S_i é um conjunto que compreende cada uma das possíveis estratégias de jogador i no jogo. Usamos s_i para determinar uma particular escolha ou estratégia do jogador i, assim $s_i \in S_i$ também é chamada de estratégia pura do jogador i.*

Definição 1.6. *Um* ***perfil de estratégia*** *ou* ***vetor de estratégia*** *é a reunião de todas as escolhas efetivadas em um jogo, isto é, o perfil de estratégia descreve a estratégia utilizada por todos os jogadores em um jogo. Cada jogador i utiliza uma de suas estratégias $s_i \in S_i$, uma vez escolhido uma estratégia por cada jogador temos uma* ***situação*** *ou* ***perfil*** *no espaço de todas as possíveis situações ou perfis. Um perfil de estratégia é então o vetor $s = (s_1, s_2, ..., s_i, ..., s_n)$, onde s_i é uma estratégia pura do jogador i e s uma combinação das estratégias de todos os jogadores. Também é denominado perfil de estratégia pura.*

Dado um jogador qualquer i, podemos falar das estratégias escolhidas pelos demais jogadores no jogo. Neste caso utilizaremos a notação por s_{-i} para represnetar uma combinação das estratégias de todos jogadores exceto do jogador i, também chamado de perfil de estratégia para todos os jogadores exceto o jogador i:

[2] Muitas vezes diferentes estratégias podem levar a resultados iguais, e se estes iguais resultados são os melhores, todas serão melhor estratégia, desde que nenhuma outra estratégia resulte em um retorno mais alto.

[3] Ben Polak é Professor de Economia e Gerenciamento no Departamento de Economia e da Escola de Gerenciamento da Universidade de Yale, formado em Ph.D. da Universidade de Harvard.

$$s = (s_1, s_2, ..., s_{i-1}, s_{i+1}..., s_n)$$

Eventualmente representamos como $-i$ o conjunto formado por todos os oponentes[4] do jogador i, podemos ainda representar perfil de estratégia s separando a estratégia s_i do jogador i e s_{-i} o perfil de estratégia dos demais jogadores, assim:

$$s = (s_1, s_2, ..., s_i, ..., s_n) = (s_i, s_{-i})$$

Definição 1.7. *Chamamos de* ***espaço de estratégias pura*** *do jogo ao conjunto de todos os perfis de estratégias puras de todos jogadores.*

$S = \prod_{i=1}^{n} S_i = S_1 \times S_2 \times ... \times S_i \times ... \times S_n$, *assim* $(s_1, s_2, ..., s_i, ..., s_n) \in S$ *onde cada* s_i *é uma estratégia pura do jogador* i *e o símbolo* $\times$ *denota o produto cartesiano.*

O conjunto formado por todos os possíveis s_{-i} é representado por S_{-i}.

Para tomar a decisão ou escolher sua estratégia, o jogador utiliza as informações que tem sobre o jogo.

Definição 1.8. ***Informações*** *são os dados disponíveis para cada jogador no momento que este vai efetuar um lance, estes dados serão utilizados na análise e tomada de decisões.*

Quando todos os jogadores fizeram todas suas escolhas (ou quando um perfil de estratégia acontece) o jogo terminou e obviamente há uma consequência.

Definição 1.9. ***Resultados*** [5] *são as possíveis consequências das interações, acontece quando cada jogador envolvido age, isto é, escolhe e executa suas estratégias ou quando um jogo é encerrado. O resultado depende apenas do desenvolvimento do jogo e não do jogador, assim, se trocarmos os jogadores e mantivermos as mesmas ações, o resultado é o mesmo. Cada perfil de estratégia tem seu próprio resultado (embora alguns perfis possam levar ao mesmo resultado. Cada perfil de estratégia*

[4] Em jogos cooperativos esta notação não é bem aceita assim como a palavra "oponente".

[5] do inglês "outcome".

descreve o caminho do jogo escolha a escolha, ção a ação tomada pelos participantes até que haja um produto final, o resultado do jogo.

Se agirem da mesma forma (tomarem as as mesmas estratégias) diferentes tipos de jogadores (egocêntricos ou altruístas, por exemplo) chegarão ao mesmo resultado mas poderão ter diferentes expectativas frente a estes.

Definição 1.10. ***Recompensa***[6] *é a forma como um jogador recebe o resultado de um jogo. Ela traduz a expectativa que cada jogador tem de um resultado comparado a outro resultado e por isso determina como um jogador avalia um determinado resultado de um jogo. A grosso modo a recompensa é o valor*[7] *que cada jogador dá a um determinado resultado do jogo.*

Os próximos exemplos pontuam as diferenças entre resultado e recompensa.

Exemplo 1.4. *Em um jogo de futebol em um campeonato de pontos corridos, em caso de empate por número de pontos os critérios de desempate são: maior saldo de gols (SG) seguido de gols pró. Os times A e B farão o último jogo enquanto C aguarda o resultado. A Tabela 1.1 a seguir mostra como estava o campeonato antes desse jogo:*

Clubes	Pontos	SG	GP
A	39	11	28
B	37	9	24
C	40	10	26

Tabela 1.1: Tabela de Pontuação

O time A precisa de um empate para ser campeão(empate vale 1 ponto), ficando C em segundo e B em terceiro. O time B precisa vencer por uma diferença de 2 gols (vitória vale 3 pontos), se empatar fica em terceiro, se vencer por uma diferença de um gol fica em segundo e vê o time C ser campeão.

[6] também chamada de retorno, compensação ou pagamento, este termo em inglês é payoff, podendo ser monetária ou em termos de utilidade, termo que será melhor explicado no decorrer deste artigo

[7] A atribuição de um valor numérico que informa como o jogador avalia um determinado jogo é a função recompensa. Veremos *função recompensa* mais adiante.

Temos aqui três possíveis resultados para o campeonato, esses resultados dependem apenas de como termina o último jogo entre A e B:

1. *Time A campeão - C vice - B terceiro lugar (Resultado 1 - R_1)*
2. *Time B campeão - C vice - A terceiro lugar (Resultado 2 - R_2)*
3. *Time C campeão - B vice - A terceiro lugar (Resultado 3 - R_3)*

Vamos mostrar o retorno de cada resultado pode depender da rivalidade entre os times B e C, isto é, a preferência de cada time pode não estar ligada apenas a sua classificação. Vamos considerar algumas informações importantes para analisar a recompensa de cada time mediante os possíveis resultados:

O campeonato dá aos times pontos no ***ranking geral***[8] *conforme sua classificação:*

- *Campeão - 100 pontos*
- *Vice-campeão - 50 pontos*
- *Terceiro lugar - 30 pontos*

Suponha que o time A se importa apenas com sua posição no campeonato, podemos dizer que A, prefere o resultado R_1 sobre todos os outros e é indiferente entre R_2 e R_3 (pois nesse caso é melhor terminar em primeiro do que em terceiro). Em termos de recompensa, a recompensa de A pode ser considerada os pontos obtidos no ranking, pois estes mostram suas preferências. O time A não tem muita tradição e ser campeão não trará grandes mudanças no ranking entre os times.

O time B e C são rivais e disputam o título e a posição no ranking. A ***rivalidade*** *entre B e C influencia diretamente suas preferências quanto aos resultados (e consequentemente suas recompensas), pois além de sua classificação, o time B, por exemplo, preocupa-se com a pontuação do time C no ranking geral, em especial se B está mais preocupado com a pontuação no ranking, podemos colocar como recompensa de B a diferença entre os pontos que ele obtém no ranking e os pontos que C obtém.*

A próxima tabela reúne as recompensas de A e B, que dependem do resultado do último jogo.

[8] Entenda como ranking geral, um ranking externo ao campeonato, como é o caso do Ranking da Fifa que atribui pontos aos times de acordo com sua performance em campeonatos oficiais.

Resultado Final	Recompensa de A	Recompensa de B
R_1	100	30-50=-20
R_2	30	50-100=-50
R_3	30	100-50=50

Tabela 1.2: Tabela de Pontuação

Com base nessas informações vamos analisar possíveis recompensas em decorrência dos possíveis resultados do jogo entre A e B:

- ***Resultado 1: Empate entre A e B****(observe que o retorno é o mesmo caso A vença B, pois A será campeão e B terminará em terceiro do mesmo jeito):*
  - ***Retorno de B****: B recebe 30 pontos por sua posição no ranking, mas vê seu adversário receber 50, pontos, isso na sua visão significa um retorno de -20, considerando negativo seu adversário e principal rival receber 20 pontos a mais no ranking.*

- ***Resultado 2: B vence A por uma diferença de 1 gol****:*
  - ***Retorno de B****: B recebe 50 pontos por sua posição no ranking, mas vê seu adversário receber 100 pontos e ser campeão, como no critério anterior seu retorno é de -50.*

- ***Resultado 3: B vence A por uma diferença maior que 1 gol****:*
  - ***Retorno de B****: B é campeão recebe 100 pontos por sua posição no ranking, seu principal rival e adversário no ranking fica em segundo recebendo 50 pontos, seu retorno é de 50.*

Observe que para B vencer por diferença de 1 é pior do que empatar pois embora a vitória simples lhe assegure uma melhor posição neste campeonato do que se B vir a empatar, do ponto de vista de recompensa, B é melhor recompensado com este segundo resultado, pois em sua ponderação impede a vitória de C no *campeonato. Logo, B preferir o empate a vitória simples é do ponto de vista da Teoria dos Jogos, um comportamento estratégico e uma ação racional*[9].

Não seria estranho se aos 48 minutos do segundo tempo, em um jogo com resultado empatado, se B não tentasse mais fazer o gol da vitória (quem sabe até errar uma cobrança de penalidade)[10].

O valor numérico atribuído a recompensa é uma representação numérica da preferência de cada jogador e tem como propósito a ordenação das preferências e será melhor explicado adiante.

Conclusão

Há diversas maneiras de descrever jogos matematicamente. Os seguintes elementos. A representação formal tem como elementos:

- Uma lista de agentes (ou jogadores), a entidade de tomada de decisão, racional e auto-interessado.
- Uma descrição do que os jogadores podem fazer (suas possíveis ações).
- Uma descrição do que os jogadores sabem quando jogam (suas informações).
- Uma regra que dizque a ação escolher a cada instante do jogo.
- A especificação das consequências das ações realizadas pelos jogadores (os resultados).
- Informações sobre as preferências dos jogadores sobre os resultados. A satisfação pessoal obtida a partir de um determinado resultado (o pagamento ou recompensa).

Neste nível de abstração, a representação matemática de um jogo é semelhante à descrição de jogos de lazer. Para exemplificar vamos usar as regras do jogo de tabuleiro de xadrez

[9] será revisto quando for falado de escolha racional

[10] Este comentário reafirma que não se discute em Teoria dos Jogos, conceitos éticos ou morais,nesta teoria, através da modelagem e análise de um jogo, procura-se determinar as possíveis consequências das interações nele contidas, em outras palavras, os possíveis resultados, que retorno esses resultados trarão aos agentes ou jogadores e qual a melhor escolha para obter a melhor recompensa.

- há dois jogadores;
- os jogadores se alternam no movimento das peças no tabuleiro sujeitos a regras pré estabelecidas;
- os jogadores podem observar movimentos um do outro, de modo que cada um sabe toda a progressão do jogo;
- um jogador que der check mate no rei do outro jogador ganha o jogo, de outra forma, um empate é declarado (há também casos de vitória por jogadas ilegais do oponente);
- de maneira geral podemos assumir que jogadores preferem vitória a empate e conquistar um empate ao invés de derrota.

Existem duas formas comuns onde jogos são representados matematicamente: a forma extensiva e a forma normal (estratégica). Iniciaremos com uma descrição não-técnica da forma estratégica, neste momento apenas para reforçar a diferença entre resultado e recompensa. Em unidades posteriores reforçaremos essas representações.

1.3 Matriz de Resultado e Matriz de Recompensa

Uma das formas de apresentar os resultados e as recompensas de um jogo dado as escolhas feitas pelos jogadores é através de tabelas. A essas Tabelas chamamos, respectivamente, de **Matriz de Resultado** e **Matriz de Recompensas** de um jogo. A compreensão das diferenças entre essas matrizes passa pelo entendimento das diferenças entre **Resultado** e **Recompensa**

Ilustraremos o uso dessas tabelas modelando um jogo que chamaremos de ***Jogo das Notas***.[11].

Jogo 1.1. ***Jogo das Notas***

Dois jogadores, UNO e DUE, escolhem simultaneamente entre α *ou* β
Cada jogador receberá uma nota resultante da combinação (ou interação) de suas

[11] A base desse jogo foi utilizado na aula 1 do curso de Teoria dos Jogos da Universidade de Yale, ministrado pelo Professor Doutor Ben Polak. Aqui fizemos algumas adaptações por conveniência

escolhas (ou estratégias). Por hipótese assumamos que nenhum deles saiba o que o outro vai escolher.

*As possíveis interações (neste caso a combinação entre as escolhas) e seus respectivos **resultados** são:*

- ***Combinação 1**: Se ambos escolherem β então os dois recebem **B***
- ***Combinação 2**: Se ambos escolherem α os dois recebem **C***
- ***Combinação 3**: UNO escolhe α e DUE escolhe β , nesse caso UNO recebe **A** e DUE recebe **D** .*
- ***Combinação 4**: DUE escolhe α e UNO escolhe β , nesse caso o UNO recebe **D** e o DUE recebe **A** .*

As tabelas 1.3 e 1.4 representam as notas recebidas respectivamente pelos jogadores UNO e DUE, em função das combinações das estratégias utilizadas por cada um deles.

		DUE	
		α	β
UNO	α	C	A
	β	D	B

Tabela 1.3: Notas de UNO

		DUE	
		α	β
UNO	α	C	D
	β	A	B

Tabela 1.4: Notas de DUE

*As combinações das notas recebidas por UNO e por DUE resultam na Tabela 1.5 , por conter todos os resultados do jogo, esta tabela também leva o nome de **Matriz de Resultados**.*

Nas linha 1 e coluna 1 estão os jogadores Uno e Due, na linha 2, as estratégias do jogador Due e na coluna 2 as estratégias do jogador UNO. No interior da Tabela

		DUE	
		α	β
UNO	α	(C,C)	(A,D)
	β	(D,A)	(B,B)

Tabela 1.5: Matriz de Resultados

são registrados os Resultados dos Jogos como um par (i,j) de informações, onde i é a nota recebida por UNO e j a nota recebida por Due.

Assumimos que de modo geral é melhor tirar ***A*** *a* ***B****,* ***B*** *a* ***C*** *e* ***C*** *a* ***D****. Os valores numéricos dados às notas na tabela 1.6 buscam refletir de maneira simplória esse resultado.*

NOTA	*VALOR*
A	*3*
B	*1*
C	*0*
D	*-1*

Tabela 1.6: Valor atribuído a nota

Embora tenhamos atribuído valores às notas, ainda não podemos dizer que esses valores representam a recompensa de cada jogador pois outros aspecto podem influenciar na importância que cada jogador dá a cada resultado e é essa "importância" que deve definir sua recompensa. Neste momento sabemos que a recompensa depende do resultado do jogo e não é necessariamente igual quando mudamos o jogador pois seus anseios podem ser diferentes logo:

Seja X o conjunto ordenado dos pares ***(i,j)*** *dos resultados do jogo onde i é a nota tirada pelo jogador UNO e j a nota tirada pelo jogador DUE*

Definição 1.11. *A recompensa*[12] r_n *do jogador n é a função* $r_n\colon X \to \mathbb{R}$ *que ordena as preferências do jogador n por cada resultado obtido.*

Estudaremos as características de alguns jogadores e escolheremos uma função

[12] A função recompensa está sendo definida com o propósito de estudar este tipo de jogo, posteriormente falaremos de função utilidade e daremos uma definição mais geral para a função recompensa.

r_n *que descreva as preferências do jogador* n *analisado.*

- ***Jogador Egocêntrico***:

  Este jogador se preocupa apenas com sua nota, para ele sua recompensa pode ser representada pelo valores obtidos na tabela 1.1 já que essa representa numericamente qual nota é melhor.

  Logo, supondo que este jogador seja Uno teremos:

$$\boldsymbol{r}_{Uno}(\mathbf{i},\mathbf{j}) = \mathbf{k} \textit{ onde } \mathbf{k} \textit{ é o valor da nota } i \textit{ tirada por } Uno.$$

  A Tabela 1.7 a seguir representa a recompensa de um jogador egocêntrico em função da nota tirada.

NOTA TIRADA	*RECOMPENSA*
A	*3*
B	*1*
C	*0*
D	*-1*

Tabela 1.7: Recompensa de um Jogador Egocêntrico

- ***Jogador Socialista***[13]:

  Para este jogador ter bom resultado (tirar boa nota) é importante mas considera que os jogadores devem receber a mesma nota e por isso vê a diferença entre os valores de sua nota e do outro jogador como algo negativo.

  Supondo agora, UNO um jogador socialista podemos definir uma função recompensa $r_{Uno}(i,j)$[14] *em função dos valores das notas dos dois jogadores que considera o valor da nota que recebe (i) e subtrai desta a diferença entre os valores da nota que recebe e da nota que o outro jogador recebe:*

[13] O nome "Socialista" não deve ser empregado no seu sentido mais complexo, trata-se apenas de um cognome criado para este fictício tipo de jogador, a rigor poderia ser dado outro nome. Apropriamos deste pois esta designação dada a doutrina politico-econômica cujos princípios se baseiam na coletividade dos mecanismos de distribuição, na propriedade coletiva e na organização de uma sociedade sem a separação por classes sociais, de certo modo caracteriza um pouco os anseios deste jogador

[14] Observe que este é um jogador fictício cuja função recompensa é modelada para este jogador.

$$r_{Uno}(\mathbf{k},\mathbf{l}) = \mathbf{k} - |\mathbf{k}-\mathbf{l}| \quad \textit{onde } \mathbf{k} \textit{ é o valor da nota } \mathbf{i} \textit{ tirada por Uno e } \mathbf{l} \textit{ é o valor da nota } \mathbf{j} \textit{ tirada por Due.}$$

Abaixo a tabela 1.8 com a Recompensa do Jogador Socialista em função do par de notas da Matriz de Resultado. (A primeira nota é a do jogador Socialista e a segunda do outro jogador).

PAR DE NOTAS	*VALORES DAS NOTAS*	*RECOMPENSA*
(A,D)	*(3,-1)*	*-1*
(B,B)	*(1,1)*	*1*
(C,C)	*(0,0)*	*0*
(D,A)	*(-1,3)*	*-5*

Tabela 1.8: Tabela das Recompensas do Jogador Socialista

Temos agora um jogo onde conhecemos sua Matriz de Resultados e temos a recompensa para dois tipos de jogadores, caso os jogadores sejam um dos dois tipos estudados é possível construir a Matriz de Recompensas. Observe que há apenas uma Matriz de Resultados mas pode haver mais de uma Matriz de Recompensa pois esta depende de como o jogador recebe um resultado de um jogo. A tabela a seguir mostra possíveis diferentes matrizes de recompensa de acordo com os tipos de jogadores para este jogo.

MATRIZ DE RECOMPENSAS	*UNO*	*DUE*
DUPLA 1	*EGOCÊNTRICO*	*EGOCÊNTRICO*
DUPLA 2	*EGOCÊNTRICO*	*SOCIALISTA*
DUPLA 3	*SOCIALISTA*	*SOCIALISTA*

Tabela 1.9: Tabela de Possibilidades de Matrizes de Recompensas.

Veremos as três diferentes Matrizes de Recompensas de acordo com as duplas da tabela 1.9. São tabelas que mostram os jogadores, estratégias, e pagamentos (ou recompensas).

O jogador UNO escolherá as linhas e o jogador DUE escolherá as colunas. Os pagamentos são registrados no seu interior.

O primeiro número é o pagamento recebido pelo jogador da linha (UNO em nosso exemplo); e o segundo é o pagamento para o jogador da coluna (DUE em nosso *exemplo). Presume-se que cada jogador atue simultaneamente ou, ao menos, sem conhecer a ação dos outros.*

		DUE	
		α	β
UNO	α	(0,0)	(3,-1)
	β	(-1,3)	(1,1)

Tabela 1.10: Matriz de Recompensas - Egocêntrico X Egocêntrico

		DUE	
		α	β
UNO	α	(0,0)	(3,-5)
	β	(-1,-1)	(1,1)

Tabela 1.11: Matriz de Recompensas - Egocêntrico X Socialista

		DUE	
		α	β
UNO	α	(0,0)	(-1,-5)
	β	(-5,-1)	(1,1)

Tabela 1.12: Matriz de Recompensas - Socialista X Socialista

Capítulo 2

Racionalidade e Utilidade

O conto do idiota e a escolha entre as moedas.[1]

Numa cidade do interior vivia um pobre coitado, de pouca inteligência, cuja sobrevivência baseava-se de pequenos biscates e esmolas.

O pobre homem era motivo de atenção quando era frequentemente chamado por grupos de pessoas que o chamavam e ofereciam a ele a escolha entre duas moedas, uma grande de 25 centavos de reais (25 mm de diâmetro) e a outra menor de 50 centavos de reais (23 mm de diâmetro).

Ele sempre escolhia a de 25 centavos e provocava risos pois era para todos muito cômico alguém cometer o erro de atrelar o valor da moeda ao seu tamanho.

Certo dia, o padre da cidade, se compadeceu e disse para o pobre homem que a maior moeda era também menos valiosa. Surpreendentemente o padre foi surpreendido com a resposta que o suposto tolo lhe deu:

"Sempre soube disso, meu bom padre. Prefiro receber metade do que acabar com a brincadeira."

A história ilustra dois componentes do que é considerado ser o comportamento estratégico. Primeiro, recompensas imediatas são dispensadas na expectativa de um retorno no futuro, faz-se o necessário para uma melhor recompensa. Em segundo lugar, o comportamento dos outros é levado em conta. Então, como podemos definir a racionalidade? A primeira coisa a notar é que a racionalidade não deve ser equiparado com o raciocínio desapaixonado. Os desejos de um indivíduo devem levar a um

[1]Esse conto pode ser encontrado em várias fontes com diferentes personagens, aqui foi contado adaptando-se a moeda nacional e a costumes de pequenas cidades brasileiras. Não foi possível encontra a primeira versão. A bibliografia [2] na página 23 tem uma diferente versão desse conto.

ranking de resultados em termos de preferência. Estas preferências não precisam conferir com os de outra pessoa; no entanto, eles devem ser consistentes internamente, para que possam constituir a base para a escolha. Assim, vamos definir uma pessoa racional como aquele que tem preferências consistentes dos resultados e vai tentar alcançar um resultado preferido.

2.1 Comportamento Estratégico

Conta a lenda que na Copa de 1958, durante a preleção antes do jogo contra a antiga União Soviética, o técnico brasileiro Vicente Feola reuniu os jogadores e combinou a estratégia da partida. Segundo Nelson Correa, foi algo assim:
No dia do jogo o técnico Vicente Feola tentava enfiar na cabeça de Garrincha um esquema tático mortal que seria usado pela primeira vez na Seleção, contra os russos: "No meio de campo" - dizia Feola - Nilson Santos, Zito e Didi trocariam passes curtos para atrair a atenção dos russos... Vavá puxaria a marcação da defesa deles caindo para o lado esquerdo do campo... Depois da troca de passes no meio do campo, repentinamente a bola seria lançada por Nilton Santos nas costas do marcador de Garrincha. Garrincha venceria facilmente seu marcador na corrida e com a bola dominada iria até à área do adversário, sempre pela direita, e ao chegar à linha de fundo cruzaria a bola na direção da marca de pênalti; Mazzola viria de frente em grande velocidade já sabendo onde a bola seria lançada e faria o gol!
Garrincha com a camisa jogada no ombro, ouvia sem muito interesse a preleção, entre divertido e distraído, e em sua natural simplicidade pergunto ao técnico: "Tá legal, Seu Feola!... Mas o senhor já combinou tudo isso com os russos?". [4]

Garrincha, gênio do futebol e tido por muitos como alguém com escasso raciocínio, mostra que para uma estratégia ser bem sucedida deve considerar todas as reações do seu adversário.

Definição 2.1. ***Comportamento estratégico*** *é quando cada agente no tomar de sua decisão, sabe que sua decisão influenciará na decisão dos demais agentes, e vice-versa. Portanto o que um agente decide, depende do que acha que o outro decidirá, assim como a decisão de outrem dependerá do que acha que este agente fará, e assim por diante.*

O comportamento estratégico leva em consideração que há uma interdependência de decisões, de forma que a decisão estratégica visa um resultado que depende da combinação de escolhas dos demais agentes tomadores de decisão.

Exemplo 2.1. ***A Estratégia da escolha do campeonato escolar.***

Precisava-se decidir qual campeonato será disputado na escola. A direção apoia o grêmio que, por interesses, tem uma preferência diferente dos meninos e das meninas. O Quadro mostra a ordem de preferência da direção, meninos e meninas:

Preferências	Meninas	Meninos	Direção
1ª Opção	Voleibol	Futebol	Handebol
2ª Opção	Futebol	Handebol	Futebol
3ª Opção	Handebol	Voleibol	Voleibol

Tabela 2.1: Quadro de preferência entre os esportes.

A eleição deveria ser feita em dois turnos onde disputariam dois esportes no primeiro turno (pois assim, um necessariamente teria dois votos contra o outro) e o ganhador disputaria contra esporte que não participou do primeiro turno.

A direção estrategicamente, conhecendo o quadro 2.1, organizou e agiu da seguinte forma:

- *No primeiro turno participariam os esportes voleibol e futebol.*
- *Mesmo preferindo futebol a voleibol, o voto da direção no primeiro turno foi para voleibol pois no segundo turno, voleibol perderia para handebol que era a primeira opção da direção.*

Aqui está um exemplo de comportamento estratégico, a direção levou em consideração a influencia da decisão dos demais agentes e com isso fez uma escolha estratégica visando o resultado de sua preferência.

Exercício 2.1. *No exemplo 2.1 as meninas foram as mais prejudicadas, uma vez que o campeonato escolhido era sua terceira opção. Caso a líder das meninas tenha previsto a estratégia da direção, sugira o que elas poderiam fazer para serem menos prejudicadas.*

2.2 Racionalidade

Aqui a ação racional é tida como aquela que utiliza os melhores meios tendo em vista os seus objetivos. A racionalidade está ligada ao meio que um agente utiliza para alcançar seus fins e não com os fins em sim mesmo. Não se discute se o objetivo do jogador é bom ou ruim, não há julgamento ético ou moral, o que se discute é que uma vez conhecido seu objetivo, a melhor decisão é a que melhor pode alcançá-lo.[2]

Exemplo 2.2. *Dois investidores A e B recebem um relatório com todas as informações relevantes sobre as decisões dos demais investidores, o comportamento das empresas e a situação dos mercados de capitais. O investidor A resolve aplicar seu dinheiro em ações das empresas com melhores perspectivas de ganho, enquanto o investidor B aplica seu dinheiro nas empresas que tem maior comprometimento com causas ambientais*[3]*. Segue que B estaria agindo tão racionalmente quanto A uma vez que objetivo de A era obter melhores ganhos e o de B investir considerando o comportamento ambiental da empresa. Ambas escolhas foram feitas com análises, considerando seus objetivos e o fato de uma ser egoísta e a outra altruísta não muda o fato de serem racionais. Para entender as tomadas de decisões é importante verificar as preferências desses jogadores.*

O agente racional considera todas as informações disponíveis para tomar suas decisões. Ele escolherá uma alternativa que lhe dá o maior ganho , ou ainda, uma alternativa que terá a consequência que considere melhor, segundo suas preferências.

2.2.1 A escolha racional.

A escolha racional parte do princípio que os jogadores são racionais, suas decisões são tomadas segundo suas preferências e além disso suas preferências são racionais. Para entender o que são preferências racionais primeiramente vamos definir as seguintes relações:

[2] A racionalidade é a suposição de que os agentes buscam a maximização de sua utilidade, para tanto será definido o termo utilidade.

[3] A racionalidade nem sempre leva aos melhores ganhos de um jogador, uma vez que pode não ser este seu objetivo, por vezes um jogador pode preferir que um outro ganhe mais será considerado racional se tomar as ações necessárias para garantir essa sua preferência.

Definição 2.2. *Dado um conjunto O, agora denominado conjunto opções de escolhas do jogador i então $\succsim$, lê-se "ao menos tão bom quanto", é a relação de preferência entre os elementos de O.*

Assim se x e y são elementos do conjunto O então:

$$x \succsim y \text{ se } x \text{ é para } i \text{ uma opção ao menos tão boa quanto } y.$$

$$(\text{ ou } x \text{ é fracamente preferível a } y)$$

Exemplo 2.3. *Seja A o cardápio de opções de almoço de um restaurante, e f =feijoada e m =macarronada opções desse cardápio. Se para João:*

$$f \succsim m$$

Então para João almoçar feijoada é pelo menos tão bom quanto almoçar macarronada.

Definição 2.3. *Dados x e y elementos do conjunto O, opções de escolha do jogador i, a relação de preferência estrita, representada por $\succ$ é tal que:*

$$x \succ y \Leftrightarrow x \succsim y \text{ mas não } y \succsim x.$$

$$x \succ y, \text{ lê-se } x \text{ é estritamente preferível a } y.$$

$$(\text{ ou } x \text{ é sempre preferível a } y)$$

Para o jogador i, a escolha de de x é tão boa quanto a escolha de y, mas a escolha de y não é tão boa quanto a escolha de x.

Definição 2.4. *Dados x e y elementos do conjunto O, opções de escolha do jogador i, a relação de indiferença, representada por $\sim$ é tal que:*

$$x \sim y \Leftrightarrow x \succsim y \text{ e } y \succsim x.$$

$$x \sim y, \text{ lê-se } x \text{ é indiferente a } y.$$

$$(\text{ ou } x \text{ é equivalente a } y)$$

Nesse caso o jogador i é indiferente a escolha de x ou de y.

Por fim:

Definição 2.5. *A **relação de preferêcia** $\succsim$ sobre um conjunto O de possíveis escolhas é **racional** se para todo $x, y, z \in O$ temos que:*

- *a relação de preferêcia $\succsim$ sobre um conjunto O é **completa**, isto é, ocorre $x \succsim y, y \succsim x$ ou ambos (significa que o agente é sempre capaz de definir suas preferências).*

- *a relação $\succsim$ é transitiva, ou seja, se $x \succsim y$ e $y \succsim z$ então $x \succsim z$ (há consistência na ordem entre as escolhas).*

As preferências completas e transitivas são chamadas de preferências ordinais pois ordenam as preferências de um jogador em relação a um conjunto de resultados.

No ato de uma decisão, um agente racional fará sua escolha de acordo com suas relações de preferência.

2.3 Função Utilidade e Função Recompensa

No decorrer dos jogo, todos os jogadores fazem sua escolha até que um resultado seja obtido. O objetivo da teoria dos jogos é analisar os possíveis resultados e apontar qual a estratégia mais adequada para se obter o melhor desses. Para isso deve-se modelar o jogo matematicamente e em especial, modelar os resultados é encontrar uma função que determine como um jogador avalia os resultados, segundo suas preferências. A ideia é que o valor que maximiza essa função seja o valor atribuído a preferência do jogador entre os resultados.

Na unidade 2.2.1 vimos sobre escolha racional e preferência, a função recompensa está relacionada com o processo de escolha. O agente tem uma ordem de preferência em relação aos possíveis resultados e esses resultados que a priore não são necessariamente números passam a ser representada por números. Mais precisamente esperamos que uma função possa descrever uma situação onde, para quaisquer dois eventos alternativos que são colocadas diante de um agente como possibilidades e o agente seja capaz de dizer qual dos dois prefere, isto é, a função deva descrever numericamente a ordem de preferência.

Definição 2.6. *Seja A o conjunto de resultados de uma interação estratégica, a **função recompensa** para um jogador obedece a seguinte relação:*

$f : A \to \mathrm{R}$

$f(x) \geq f(y) \Leftrightarrow x \succsim y$, *com* $x, y \in A$[4]

[4] A preferência de um jogador se dá pelo resultado de um jogo, por isso para uma melhor compreensão

Assim, se um agente prefere o resultado x em detrimento do resultado y, atribuímos um número para x maior do que atribuímos a y. Chamamos este número de utilidade.

Definição 2.7. *A* ***utilidade*** *é a representação numérica da preferência que nos permite classificar as escolhas dos agentes.*

É uma extensão muito natural que a função recompensa possa permitir comparar não só os eventos, mas também combinações de eventos com probabilidades declaradas.

Por utilizar a utilidade de cada resultado, a função recompensa também recebe o nome de função utilidade, embora alguns autores façam uma pequena distinção entre as duas.

O termo recompensa e função recompensa são muito utilizado quando se estuda teoria das decisões, que não necessariamente fazem parte da Teoria dos Jogos pois nem todas as decisões são advindas de interações estratégicas. Em [2], a função recompensa é definida no estudo das decisões simples como uma função que associa um valor numérico a uma ação tomada por um agente (dentro de um conjunto de possíveis ações)e a função utilidade é definida como uma função que associa um valor numérico a cada resultado de uma interação estratégica. Assim para Webb:

Se uma ação a produz um resultado $w(a)$, e f e g são respectivamente as funções recompensa e utilidade então $f(a) = g(w(a))$

Já Neumann em [9] não utiliza o termo recompensa (payoff em inglês) e trata o assunto utilizando apenas utilidade (utility).

Por sua vez, Ronaldo Fiani em [1] fala sobre utilidade mas utiliza apenas a função recompensa, com a mesma definição da função utilidade feita por Webb em [2].

Observe que a função recompensa da definição 2.6 está associando número ao resultado de um jogo(assim como é definido a função utilidade em [2]), no entanto o estudo da teoria dos jogos procura analisar a maneira como se chega a um resultado ou qual a estratégia para se alcançar uma determinada recompensa. Um outro fato importante é que embora a utilidade é feita de acordo as preferências dos possíveis

desta propriedade a função recompensa foi definida em função do resultado. No entanto, ao estudarmos um jogo avaliamos como chegar a um determinado resultado preferido e por esse motivo é mais comum relacionar a função recompensa em função do perfil de estratégia, uma vez que para cada perfil há sempre um resultado.

resultados, estamos interessados em estudar as estratégias para se chegar a um determinado resultado, o que nos leva a pensar em uma função pagamento que tenha como domínio o espaço de estratégias.

Cada perfil de estratégia s descreve totalmente a forma como o jogo é jogado. Ou seja, um perfil de estratégia nos diz exatamente o caminho do jogo que é seguido e, de forma equivalente, qual é o resultado alcançado ao fim do jogo. Associado a cada perfil de estratégia há um resultado e a cada resultado ha diferentes recompensas, uma para cada jogador, de acordo com suas preferências entre os possíveis resultados, podemos dizer que a cada perfil de estratégia s temos um vetor de recompensa específico.

Definição 2.8. *Em um jogo com n jogadores e $N = (1, ..., i, ...n)$, o conjunto desses jogadores, o* ***vetor de recompensa*** *é o vetor $(p_1, ..., p_i, ..., p_n)$ onde p_i é a recompensa do jogador $i \in N$ associado a um resultado do jogo. Logo para cada perfil estratégia s temos um vetor de recompensas $(p_1, ..., p_i, ..., p_n)$.*

Nesse momento podemos definir uma nova função que associa diretamente o perfil de estratégia s a recompensa do jogador i e usaremos em muitos casos essa função como função recompensa de i em detrimento da função definida em 2.6.

Definição 2.9. *Para cada jogador i, a função $u_i : S \to \mathbb{R}$ que associa cada perfil de estratégia $s \in S$ a um número real que representa a utilidade do resultado do jogo quando s é desenvolvido. A função u_i é chamada de função recompensa do jogador i e $u_i(s)$ é sua recompensa.*

Atente que $u_i(s) = u_i(s_1, s_2, ..., s_i, ..., s_n) = u_i(s_i, s_{-i})$ (pagamento ou recompensa do jogador i caso os jogadores 1,2,3,...,i,...,n, tenham usado as respectivas estratégias s_1,s_2,s_3,...s_i,...,s_n).

Podemos ainda definir satisfação de um jogador, assim:

Definição 2.10. *Um jogador i está* ***satisfeito*** *com $s = (s_1, s_2, ..., s_i, ..., s_n)$ se:*

$u_i(s) = u_i(s_i, s_{-i}) = u_i(s_1, s_2, s_3, ...s_i, ..., s_n) \geqslant u_i(s'_i, s_{-i})$ *, para toda estratégia s'_i em S_i .*

Vamos aplicar a notação até aqui desenvolvida no jogo do próximo exemplo.

Jogo 2.1. ***Jogo das Posições***

Esse jogo possui uma única rodada e a recompensa de cada jogador depende da combinação das escolhas feitas simultaneamente por ambos jogadores. A próxima tabela é a Matriz de Recompensas para esse jogo. Observe que o número de estratégias para cada jogador é diferente [5]

		DUE		
		Esq	**Cent**	**Dir**
UNO	**Sup**	(2, 5)	(4, 3)	(7, 0)
	Inf	(3 , 3)	(4, 4)	(6, 0)

Tabela 2.2: Matriz de Recompensas (Jogo assimétrico)

Descrição

- *Jogadores: Uno e Due*
- *Conjunto de Estratégias:* S_{Uno} = *{Sup, Inf}* e S_{Due}= *{Esq, Cent, Dir}*
- *Pagamento. Exemplos:* u_{Uno}*(Sup,Esq)= 2* e u_{Due}*(Sup,Esq)= 5*
- *O jogador Uno está satisfeito com* $s = (Inf, Esq)$ *pois:*
  $u_{Uno}(Inf, Esq) = 3 \geq u_{Uno}(Sup, Esq) = 2$
- *O jogador Due está satisfeito com* $s = (Sup, Esq)$ *pois:*
  $u_{Due}(Sup, Esq) = 5 \geq u_{Due}(Sup, Cent) = 3$ *e* $u_{Due}(Sup, Esq) = 5 \geq u_{Due}(Sup, Dir) = 0$.

[5]Um jogo é denominado assimétrico quando o número de estratégias dos jogadores são diferentes.

Capítulo 3

Jogos Estáticos

Jogos estáticos são aqueles em que é feita uma única decisão por cada jogador, e cada jogador não tem conhecimento da decisão tomada pelos outros jogadores antes de tomar sua própria decisão, é a forma mais simples de interdependência estratégica que prevalece em contextos nos quais as ações são tomadas, quer simultaneamente ou sem o conhecimento das escolhas dos outros jogadores de ação.

São também chamados de jogos de decisão simultâneos porque qualquer ordem real em que são feitas as decisões é irrelevante, uma vez que um jogador não sabe qual foi a decisão do outro. O exemplo mais famoso de um problema de decisão interativa é, provavelmente, o **Dilema dos Prisioneiros**.

Trata-se de um jogo aplicável a várias situações onde as pessoas têm que tomar decisões que signifiquem *cooperar* ou *desertar* simultaneamente.

O Dilema do Prisioneiro foi originalmente formulado por Merrill Flood e Melvin Dresher e apresentado pela primeira vez em 1950 na Universidade de Princeton[1], tornando-se um clássico problema da Teoria dos Jogos. Mais tarde, Albert W. Tucker adaptou o problema original, adicionando a questão do tempo da sentença de prisão, e deu ao problema o nome pelo qual é conhecido hoje.

O interesse por este jogo surge da observação que ambos os jogadores, seguindo seu próprio interesse individual, acabam pior do que se tivessem se mantido quietos. Este resultado aparentemente paradoxal encapsula uma grande diferença entre os modelos de decisão não-interativos e interativos, pois na tentativa de maximização individual há um prejuízo coletivo.

Existem várias versões do problema, com diferenças no tempo de sentença ou na forma de apresentação da situação, mantendo-se a análise dos resultados.

Uma versão do Dilema do Prisioneiro clássico funciona como no exemplo a seguir:

[1] John Nash foi Matemático Sénior de Investigação nesta Universidade.

Exemplo 3.1. *A polícia prende dois indivíduos suspeitos de cometerem um crime e os coloca em duas celas separadas, sem possibilidade de comunicação entre eles. O detetive suspeita que tenham cometido também outro crime mais grave oferece a ambos o mesmo acordo:*

- *Se algum dos parceiros confessar o crime e o outro não, o traidor fica livre da prisão, enquanto o outro pega sete anos de cadeia.*
- *Se os dois se acusarem mutuamente, os dois pegam cinco anos, pelo segundo crime.*
- *Se ambos ficarem em silêncio, só poderão ser acusados do primeiro crime pegando dois anos de cadeia cada um.*

Nessa forma apresentada, é dado perdão pelo primeiro crime ao traidor e a pena pelo segundo crime ao traído. Cada prisioneiro faz a sua decisão sem saber que decisão o outro vai tomar. A tabela 3.1 é a matriz de recompensa para este jogo.

		P_2	
		Nega	**Delata**
P_1	**Nega**	(2, 2)	(8, 0)
	Delata	(0 , 8)	(5, 5)

Tabela 3.1: Matriz de Recompensas do Exemplo 3.1, P_1 e P_2 são os prisioneiros.

Uma vez que nenhum deles pode ter a certeza da cooperação do outro, a tendência é que ambos irão optar por denunciar o colega pois na pior das hipóteses, cumprirão uma pena de 5 anos e, na melhor, sairão em liberdade. Caso tivessem cooperado um com o outro, teriam tido melhor resultado, mas:

- Confiarão no cúmplice e negarão o crime, mesmo correndo o risco de serem colocados numa situação ainda pior se o outro falar?
- Ou confessam e esperam ser libertados, arriscando, se o outro fizer o mesmo, a ambos ficarem numa situação pior do que se permanecessem calados?

Pode-se argumentar que eles deveriam ter tido um acordo antes de serem presos que iriam se calar. No entanto, cada prisioneiro não tem nenhuma maneira de garantir que o outro segue este acordo. É claro que um prisioneiro poderia se vingar no futuro - mas isso é um outro jogo (com diferentes recompensas).

Definição 3.1. *A solução é dito ótimo de Pareto(do economista italiano Vilfredo Pareto) se nenhum retorno de um jogador pode ser aumentada sem reduzir a recompensa para um outro jogador. Tais soluções são também denominados socialmente eficiente ou apenas eficiente.*

De um ponto de vista puramente egocêntrico é racional para cada prisioneiro, confessar. Mas esta escolha dá a cada um pior resultado do que se pensassem coletivamente.

Observemos que, no Dilema do Prisioneiro, a combinação de estratégias (Delatar, Delatar), não parece proporcionar um resultado muito satisfatório pois tanto o P_1 quanto P_2 lucrariam mais se escolhessem (Negar, Negar), ora, levariam 2 anos de prisão em vez de 5. Dizemos, então, que (Delatar, Delatar) não é ótimo de Pareto. Uma combinação de estratégias é ótimo de Pareto, se não se puder mudar para uma outra combinação de modo que nenhum jogador fique prejudicado e pelo menos um seja beneficiado. Trata-se de um conceito que analisa a eficiência social, isto é, a busca da maximização dos ganhos coletivos. Neste aspecto o perfil de estratégia (negar,negar) é a indicada sob o ponto de vista social ao passo que o perfil de estratégia (Delatar, Delatar) é a indicada sob o ponto de vista individual.

Casos como este são recorrentes em diversas áreas da sociedade, e em diversas e complexas situações. O Dilema dos Prisioneiros é frequentemente usado como o ponto de partida para uma discussão sobre o contrato social (ou seja, como as sociedades se formam e como eles se sustentam) porque a natureza socialmente ineficiente de sua solução é uma reminiscência de muitos recursos da sociedade. Por exemplo, considere a utilização de um recurso natural como uma pesca. Quanto mais você pescar, economicamente é melhor. No entanto, se não houver controle e todos pescarem indiscriminadamente o recurso pode sessar (porque, como você, todos estão seguindo seu próprio interesse próprio), então pode não haver mais o recurso no futuro e todo mundo está pior do que se todos tivessem controlado sua exploração ao recurso.

Este jogo ilustra a contradição entre a procura do bem individual e a procura do bem coletivo.

Na sua versão clássica (jogado uma única vez) ou em sua versão modificada (possibilidade de interação, é jogado mais de uma vez), tem sido usado para estudar o problema da cooperação entre indivíduos, grupos e nações em diversos tipos de problemas.

Exemplo 3.2. ***Dilema dos Prisioneiros normalizado***

De maneira geral um jogo é chamado de Dilema dos Prisioneiros se tiverem uma matriz de resultado similar a tabela 3.2 com $t > r > p > s$.

		P_2	
		C	D
P_1	C	(r, r)	(s, t)
	D	(t, s)	(p, p)

Tabela 3.2: Matriz de Recompensas do Dilema dos Prisioneiros normalizado

A letra C representa cooperar e a letra D representa desertar(ou trair). Pelo exemplo 3.1 devemos esperar que ambos jogadores acabem por trair se buscarem a maximização de ganhos individuais, no caso teriam como recompensa p *mas esta solução é socialmente ineficiente, uma vez que a solução (C,C) é melhor para ambos, uma vez que* $r > p$.

3.1 Descrição de Jogos Estáticos

Para descrição de um jogo estático são necessários:

- Um conjunto de jogadores, representados por $i \in N = 1, 2, ..., i, ..., n$.
- Um conjunto de estratégias pura, S_i, para cada jogador i.
- As recompensas para cada jogador em cada possível situação de jogo, ou seja, para cada combinação de estratégias puras de todos jogadores. A recompensa do jogador i será representada por uma das similares notações:

  $u_i(s) = u_i(s_i, s_{-i}) = u_i(s_i, s_1, s_2, ..., s_i, ..., s_n)$, onde:

  s é o perfil de estratégia dos n jogadores pertencentes a N.[2]

Definição 3.2. *Uma apresentação em tabula de um jogo, usando estratégias puras, é chamado de* ***forma normal*** *de* ***forma estratégica*** *de um jogo. A matriz de*

[2]Veja definição 1.6

recompensas descrita na seção 1.3 é uma forma normal de representação de um jogo.

Especificamente para jogos estáticos não há distinção entre as estratégias puras e ações dos jogadores, na definição de forma estratégica utiliza-se estratégias puras pois esta representação pode ser usada em outros jogos onde esta distinção é evidente.

Exemplo 3.3. *A "batalha dos sexo" é um jogo em que um casal de namorados têm que decidir se quer ver um filme ou ir à ópera. Infelizmente, eles trabalham em diferentes partes da cidade e, devido a problema de telefonia, encontram-se em regime de incomunicabilidade. Eles devem simultaneamente e independentemente selecionar um evento para participar. Há apenas uma sala de cinema e apenas um local de ópera, de modo que o casal vão conhecer um aos outro se eles conseguem coordenar suas decisões. Ambos preferem estar juntos, independentemente de qual evento que eles frequentam. No entanto, o jogador 1(a namorada) prefere a ópera e o jogador 2(o namorado) prefere o filme.*[3]

A tabela 3.3 é a forma normal que representa este jogo.

		Namorado	
		Ópera(O)	**Filme(F)**
Namorada	**Ópera(O)**	(4, 2)	(1, 1)
	Filme(F)	(−1, −1)	(2, 4)

Tabela 3.3: Matriz de Recompensas da Batalha dos Sexos

As recompensas da tabela respeitam as preferências:

"Estar junto em seu evento favorito" $\succ$ *"Estar junto no evento favorito do parceiro"* $\succ$ *"Estar sozinho em seu evento favorito"* $\succ$ *"Estar sozinho no evento favorito do parceiro."*

Pois sendo a namadora o jogador 1 e o namorado o jogador 2 temos que:

$$S_1 = S_2 = \{O, F\}$$
$$u_1(O,O) = 4 > u_1(F,F) = 2 > u_1(O,F) = 1 > u_1(F,O) = -1$$
$$u_2(F,F) = 4 > u_2(O,O) = 2 > u_2(F,O) = 1 > u_2(O,F) = -1$$

[3] Assim como no Dilema dos Prisioneiros, há várias formas de contar essa história.

Resumindo, definimos formalmente um jogo de forma estratégica como a tripla:

$$(N, \{S_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N}).$$

Em particular se é um jogo de dois jogadores(com N=1,2) precisamos exatamente de 4 informações:

$$(S_1, S_2, u_1, u_2).$$

Definição 3.3. *A estratégia mista para o jogador i é uma distribuição de probabilidade sobre suas estratégias puras, ou seja, dá as probabilidades de que cada estratégia pura $s_i \in S_i$ do jogador i será jogada. A estratégia mista será denotado δ_i e o conjunto de todas as possíveis estratégias mistas para o jogador i será denotado por Δ_i.*

Seja $S_i = \{s_i^1, s_i^2, ..., s_i^j, ..., s_i^{m_i}\}$ o conjunto das m_i estratégias puras do jogador i então uma estratégia mista pode ser representada por um vetor de probabilidades:

$\delta_i = (p(s_i^1), p(s_i^2), ..., p(s_i^j), ..., p(s_i^{m_i}))$ e $\sum_{j=1}^{m_i} p(s_i^j) = 1$ onde $p(s_i^j)$ é a probabilidade da estratégia pura s_i^j ser jogada.

Podemos ainda representar o conjunto de todas as estratégias mistas do jogador i por:

$\Delta_i = \{(p(s_i^1), p(s_i^2), ..., p(s_i^j), ..., p(s_i^{m_i})) \in \mathbf{R}^{m_i} \mid p(s_i^1) \geq 0, ..., p(s_i^{m_i}) \geq 0$ e $\sum_{j=1}^{m_i} p(s_i^j) = 1\}$

Uma estratégia pura s_i^k com $k \in \{1, 2, ..., m_i\}$ pode ser representada por um vetor:

$\delta_i = (p(s_i^1), p(s_i^2), ..., p(s_i^j), ..., p(s_i^{m_i})),\ p(s_i^k) = 1$ e $p(s_i^j) = 0$ para todo $j \neq k$.

Em outras palavras uma estratégia pura é um vetor onde todas as entradas são zero exceto uma.

Estratégias mistas podem, portanto, serem representadas como combinações lineares de estratégias puras:

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{m_i} p(s_i^j) s_i^j$$

Definição 3.4. *Um perfil de estratégia mista ou vetor de estratégia mista é a combinação das estratégias mistas, uma de cada jogador, descreve a estratégia mista usada por todos os jogadores em um jogo, isto é, cada jogador i utiliza uma estratégia δ_i. Um perfil de estratégia mista pode ser representado pelo vetor $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, ..., \delta_i, ..., \delta_n)$ onde δ_i é uma estratégia mista do jogador i.*

Definição 3.5. *O espaço de todos os perfis de estratégia mista é o produto cartesiano:*

$$\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \times ... \times \Delta_n$$

Usaremos a notação δ_{-i} para para determinar a estratégia de todos os jogadores com exceção de i e Δ_{-i} para o espaço de estratégias de todos os jogadores, exceto i, isto é, $\Delta_{-i} = \Delta_1 \times \Delta_2 \times ... \times \Delta_{i-1} \times \Delta_{i+1} \times ... \times \Delta_n$.

Cada perfil de estratégia mista $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, ..., \delta_i, ..., \delta_n) \in \Delta$ determina uma **recompensa esperada**. Sabendo que $\delta_i = (p(s_i^1), p(s_i^2), ..., p(s_i^j), ..., p(s_i^n))$ e m_i é o número de estratégias puras do jogador i podemos definir utilidade esperada como:

Definição 3.6. *Utilidade esperada de um perfil de estratégia δ é uma média das recompensas ponderadas pelas distribuições de probabilidades $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_i, ..., \delta_n$, isto é:*

$$u_i(\delta) = \sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} ... \sum_{j_n=1}^{m_n} [(\prod_{k=1}^{n} p(s_k^{j_k})) u_i(s_1^{j_1}, s_2^{j_2}, ..., s_n^{j_n})]$$

ou

$$u_i(\delta) = \sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} ... \sum_{j_n=1}^{m_n} [p(s_1^{j_1}) p(s_2^{j_2}) ... p(s_n^{j_n}) . u_i(s_1^{j_1}, s_2^{j_2}, ..., s_n^{j_n})]$$

A utilidade esperada de um jogador da definição 3.6 para um jogo com 2 jogadores pode ser reescrita como $u_i(\delta) = \sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} (\prod_{k=1}^{2} p(s_k^{j_k}) u_i(s_1^{j_1}, s_2^{j_2})$, em especial quando cada jogador tem apenas duas estratégias puras, isto é, $S_i = \{s_i^1, s_i^2\}$ para cada jogador i, a expressão desenvolvida pode ser transformada em pruduto de matrizes.

$$u_i(\delta) = \sum_{j_1=1}^{2} \sum_{j_2=1}^{2} (\prod_{k=1}^{2} p(s_k^{j_k})) u_i(s_1^{j_1}, s_2^{j_2}) =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{2} \sum_{j_2=1}^{2} (p(s_1^{j_1}) p(s_2^{j_2}) . u_i(s_1^{j_1}, s_2^{j_2})) =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{2}[(p(s_1^{j_1})p(s_2^1).u_i(s_1^{j_1}, s_2^1)) + (p(s_1^{j_1})p(s_2^2).u_i(s_1^{j_1}, s_2^2))] =$$
$$= \sum_{j_1=1}^{2}(p(s_1^{j_1})p(s_2^1).u_i(s_1^{j_1}, s_2^1)) + \sum_{j_1=1}^{2}(p(s_1^{j_1})p(s_2^2).u_i(s_1^{j_1}, s_2^2)) =$$
$$= p(s_2^1)\sum_{j_1=1}^{2}(p(s_1^{j_1}).u_i(s_1^{j_1}, s_2^1)) + p(s_2^2)\sum_{j_1=1}^{2}(p(s_1^{j_1}).u_i(s_1^{j_1}, s_2^2))$$

$$= [\sum_{j_1=1}^{2}(p(s_1^{j_1}).u_i(s_1^{j_1}, s_2^1))]p(s_2^1) + [\sum_{j_1=1}^{2}(p(s_1^{j_1}).u_i(s_1^{j_1}, s_2^2))]p(s_2^2)$$

Vamos colocar este resultado parcial em forma matricial.

$u_i(\delta) = \sum_{j_1=1}^{2}\sum_{j_2=1}^{2}(\prod_{k=1}^{2} p(s_k^{j_k}))u_i(s_1^{j_1}, s_2^{j_2}) =$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j_1=1}^{2}(p(s_1^{j_1}).u_i(s_1^{j_1}, s_2^1)) & \sum_{j_1=1}^{2}(p(s_1^{j_1}).u_i(s_1^{j_1}, s_2^2)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(s_2^1) \\ p(s_2^2) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \{p(s_1^1).u_i(s_1^1, s_2^1) + p(s_1^2).u_i(s_1^2, s_2^1)\} & \{p(s_1^1).u_i(s_1^1, s_2^2) + p(s_1^2).u_i(s_1^2, s_2^2)\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(s_2^1) \\ p(s_2^2) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} p(s_2^1) & p(s_2^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(s_1^1, s_2^1) & u_i(s_1^1, s_2^1) \\ u_i(s_1^2, s_2^2) & u_i(s_1^2, s_2^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(s_2^1) \\ p(s_2^2) \end{bmatrix} =$$

No caso em que $p(s_1^1) = p$ e $p(s_2^1) = q$ então $p(s_1^2) = 1 - p$ e $p(s_2^2) = 1 - q$, segue que $\delta = (p, q)$ com $1 \geq p \geq 0$ e $1 \geq q \geq 0$.

$$u_i(\delta) = u_i(p, q) = \begin{bmatrix} p & 1-p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(s_1^1, s_2^1) & u_i(s_1^1, s_2^1) \\ u_i(s_1^2, s_2^2) & u_i(s_1^2, s_2^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} p.q.u_i(s_1^1, s_2^1) + (1-p).q.u_i(s_1^2, s_2^1) + p.(1-q).u_i(s_1^1, s_2^2) + (1-p).(1-q).u_i(s_1^2, s_2^2) \end{bmatrix}$$

Exercício 3.1. *Jogo de par ou ímpar. Nesse jogo, dois jogadores exibem, ao mesmo tempo, uma das mãos mostrando de 0 a 5 dedos. Se a soma dos dedos apresentados pelos dois jogadores der par o primeiro jogador ganha, se der ímpar o segundo ganha. Por simplicidade, basta saber se o número apresentado por cada jogador foi par ou ímpar (não há necessidade de saber a quantidade de dedos apresentados) já que cada um tem três possibilidades de escolher par e três de escolher ímpar (supondo que entre*

			q	$1-q$
			J_2	
			s_2^1	s_2^2
p	J_1	s_1^1	$(u_1(s_1^1, s_2^1), u_2(s_1^1, s_2^1))$	$(u_1(s_1^1, s_2^2), u_2(s_1^1, s_2^2))$
$1-p$		s_1^2	$(u_1(s_1^2, s_2^1), u_2(s_1^2, s_2^1))$	$(u_1(s_1^2, s_2^2), u_2(s_1^2, s_2^2))$

Tabela 3.4: Matriz de Recompensas

as três opções de pares a probabilidade de escolha é a mesma, assim como entre as três opções de ímpar). Assim podemos separar o conjunto de estratégias de cada jogador i em $S_i = \{par, impar\}$. A seguir apresentamos a tabela de recompensas:

			1/3	2/3
			Jogador 2	
			Par	**Ímpar**
1/4	***Jogador 1***	**Par**	$(+1, -1)$	$(-1, +1)$
3/4		**Ímpar**	$(-1, +1)$	$(+1, -1)$

Tabela 3.5: Matriz de Recompensas do Par e Ímpar

$\delta_1 = (1/4, 3/4)$ *e* $\delta_2 = (1/3, 2/3))$, *vamos calcular a utilidade esperada para o jogador 1:*

$u_1(\delta) = \sum_{j_1=1}^{2} \sum_{j_2=1}^{2} (\prod_{k=1}^{2} p(s_k^{j_k}) u_1(s_1^{j_1}, s_2^{j_2}))$

$u_1(\delta) = \sum_{j_1=1}^{2} \sum_{j_2=1}^{2} (p(s_1^{j_1}).p(s_2^{j_2}).u_1(s_1^{j_1}, s_2^{j_2}))$

$u_1(\delta) = \sum_{j_1=1}^{2} [(p(s_1^{j_1}).p(s_2^1).u_1(s_1^{j_1}, s_2^1)) + (p(s_1^{j_1}).p(s_2^2).u_1(s_1^{j_1}, s_2^2))]$

$u_1(\delta) = \{[(p(s_1^1).p(s_2^1).u_1(s_1^1, s_2^1)) + (p(s_1^1).p(s_2^2).u_1(s_1^1, s_2^2))] + [(p(s_1^2).p(s_2^1).u_1(s_1^2, s_2^1)) + (p(s_1^2).p(s_2^2).u_1(s_1^2, s_2^2))]\}$

$u_1(\delta) = \{[(1/4.1/3.(+1) + 1/4.2/3.(-1))] + [3/4.1/3.(-1) + 3/4.2/3.(+1)]\}$

$u_1(\delta) = 1/4(1/3 - 2/3) + 3/4(-1/3 + 2/3) = -1/12 + 3/12 = 1/6$

ou

$$u_1(\delta) = u_1(\delta_1, \delta_2) = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & +1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\ 1/6\ \right]$$

3.2 Solução de um jogo

Uma solução de um jogo é um perfil de estratégia[4] s (não necessariamente único) que n jogadores racionais podem usar. Em jogos de dois jogadores, soluções serão indicadas colocando um par de estratégias entre parênteses, como (A, B) ou (λ_1, λ_2), onde vamos colocar a estratégia adotada pelo jogador 1 primeiro. Por exemplo, a solução da Batalha dos Sexos do exemplo 3.3 pode ser representada por (O,O).

3.2.1 Resolvendo Jogos usando dominância

Ao estudarmos o Dilema dos Prisioneiros de forma intuitiva simples, observamos que a estratégia para o jogador 1 de "delatar" era sempre melhor do que "manter o silêncio", para cada estratégia escolhida pelo jogador 2, parece razoável tentar resolver jogos, eliminando estratégias pobres para cada jogador, isto é, estratégias que não sejam as melhores.

Em alguns casos estudaremos interações estratégicas que envolvam apenas dois agentes estratégicos (por simplicidade), por isso algumas definições estarão contemplando apenas esses casos.

Definição 3.7. *Dizemos que uma estratégia s_i de um jogador é* ***estritamente dominante*** *sobre uma estratégia s'_i deste jogador se o retorno obtido com a escolha de s_i é estritamente maior que o retorno ao se escolher s'_i independente das escolhas ou estratégias utilizadas pelos demais jogadores.*

Assim, a estratégia s_i do jogador i domina estritamente a estratégia s'_i do jogador i se:

$$u_i(s_i,s_{-i})>u_i(s'_i,s_{-i}) \text{ para todo } s_{-i}$$

Definição 3.8. *A estratégia s_i do jogador i é* ***fracamente dominante*** *sobre a estratégia s'_i do jogador i se:*

[4] Veja definição 1.6 de perfil de estratégia.

$u_i(s_i{,}s_{-i}) \geqslant u_i(s'_i{,}s_{-i})$ *para todo* s_{-i}

$u_i(s_i{,}s_{-i}) > u_i(s'_i{,}s_{-i})$ *para algum* s_{-i}

Queremos dizer que uma estratégia s_i domina fracamente outra estratégia s'_i para o jogador i, se independentemente do que os outros jogadores façam, a recompensa obtida por s_i é , pelo menos, tão boa quanto a recompensa obtida pela estratégia s'_ii, e para algum perfil dos outros jogadores s_i tem recompensa melhor do que a recompensa de s'_i. Se ao escolher a estratégia s_i, o jogador obtém recompensa estritamente maior do que quando escolhe s'_i, independentemente do que os outros jogadores fazem, então dizemos que s_i domina estritamente s'_i.

Definição 3.9. *Uma estratégia s_i é fracamente dominante se domina fracamente todas as estratégias em S_i. E é chamada de estritamente dominante se domina estritamente todas as estratégias em S_i.*

A estratégia estritamente dominante é única.

Demonstração. (i) Seja s_i uma estratégia estritamente dominante de S_i, isto é, para todo $s_i^j \in S_i$ (exceto s_i, obviamente) temos que $\mathrm{u}_i(\mathrm{s}_i,\mathrm{s}_{-i}) > \mathrm{u}_i(\mathrm{s}_i^j,\mathrm{s}_{-i})$ para todo s_{-i}. (ii) Suponha que $s_i^k \in S_i$ seja também uma estratégia estritamente dominante de S_i, segue que $\mathrm{u}_i(\mathrm{s}_i^k,\mathrm{s}_{-i}) > \mathrm{u}_i(\mathrm{s}_i,\mathrm{s}_{-i})$ contradizendo (i)

□

Definição 3.10. *A estratégia pura s'_i do jogador i é estritamente dominada pela estratégia s_i do jogador i se:*

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i}) \text{ para todo } s_{-i}$$

A próxima definição contempla o caso de dois jogadores com estratégias mistas.

Definição 3.11. *A estratégia δ_1^j do jogador 1 é estritamente dominada pela estratégia δ_1 do jogador 1 se:*

$$u_i(\delta_1, \delta_2) > u_i(\delta_1^j, \delta_2) \text{ para todo } \delta_2 \in \Delta_2$$

Ou seja, qualquer que seja a estratégia mista do jogador 2 , é sempre melhor para o jogador usar δ_1 *ao invés de* δ_1^j *. Da mesma forma, uma estratégia* δ_2^k *para o jogador 2 é estritamente dominada por* δ_2 *se:*

$$u_i(\delta_1, \delta_2) > u_i(\delta_1, \delta_2^k) \text{ para todo } \delta_1 \in \Delta_1$$

Definição 3.12. *A estratégia* s'_i *do jogador* i *é fracamente dominada pela estratégia* s_i *do jogador* i *se:*

$u_i(s_i,s_{-i}) \geqslant u_i(s'_i,s_{-i})$ *para todo* s_{-i}

e

$u_i(s_i,s_{-i}) > u_i(s'_i,s_{-i})$ *para algum* s_{-i}

Do mesmo modo, como fizemos anteriormente vamos refazer a definição anterior para o caso de dois jogadores utilizando estratégias mistas.

Definição 3.13. *A estratégia* δ_1^j *do jogador* 1 *é fracamente dominada pela estratégia* δ_1 *do jogador* 1 *se:*

$u_i(\delta_1, \delta_2) \geqslant u_i(\delta_1^j, \delta_2)$ *para todo* $\delta_2 \in \Delta_2$

e

$u_i(\delta_1, \delta_2) > u_i(\delta_1^j, \delta_2)$ *para algum* $\delta_2 \in \Delta_2$

Definição 3.14. *Uma estratégia* s_i *é fracamente dominada se é domina fracamente por todas as estratégias em* S_i*. E é chamada de estritamente dominada se é dominada estritamente por todas as estratégias em* S_i*.*

Fica evidente que não há motivos para um agente racional utilizar uma estratégia s'_i sabendo que esta tem sempre uma recompensa pior ou igual a qualquer outra estratégia s_i, uma vez que se pretende maximizar os ganhos.

Ao não usarmos estratégias estritamente ou fracamente dominadas estamos eliminando piores recompensas.

A eliminação de estratégias dominadas, seja fracamente ou estritamente é uma ferramenta utilizada para resolvermos jogos em Teoria dos Jogos.

O Dilema dos Prisioneiros é um exemplo de jogos que resolvemos eliminando as estratégias estritamente dominadas. O próximo exemplo ilustra um jogo que é resolvido eliminando-se as estratégias fracamente dominadas.

Exemplo 3.4. *Considere o jogo representado pela seguinte forma estratégica:*

		Jogador 2	
		Esq	**Dir**
Jogador 1	**Sup**	(2, 2)	(1, 1)
	Inf	(1 , 0)	(1, 0)

Tabela 3.6: Matriz de Recompensas do exemplo 3.4

Para o jogador 1, Sup domina fracamente Inf e, para o jogador 2, Esq domina fracamente Dir. Consequentemente, espera-se que o jogador 1 não jogue Inf e o jogador 2 não jogue Dir, e a solução do jogo usando dominância é (Sup, Dir).

Há jogos em que não é possível obter uma solução por dominância. Veja um exemplo a seguir.

Exemplo 3.5. *Vamos verificar a Matriz de Recompensas da tabela 1.12 para determinar se algum dos jogadores, UNO ou DUE, possui uma estratégia estritamente dominada.*

		DUE	
		α	β
UNO	α	(0,0)	(-1,-5)
	β	(-5,-1)	(1,1)

$u_{UNO}(\beta, \beta) = 1 > u_{UNO}(\alpha, \beta) = -1,$

$u_{UNO}(\alpha, \alpha) = 0 > u_{UNO}(\beta, \alpha) = -5$

Para UNO escolher β é melhor que escolher α quando DUE escolhe β ao passo que quando DUE escolhe α, a melhor escolha para UNO é α. Logo, verificamos que UNO não possui uma estratégia estritamente dominante.

Vejamos o que ocorre com DUE:

$$u_{DUE}(\beta,\beta) = 1 > u_{DUE}(\beta,\alpha) = -1,$$
$$u_{DUE}(\alpha,\alpha) = 0 > u_{DUE}(\alpha,\beta) = -5$$

Assim como para UNO, não há uma estratégia estritamente dominante para DUE. Neste jogo, entre dois jogadores socialistas, a melhor escolha de um depende da escolha feita pelo outro. Observe que neste caso, uma coordenação entre os jogadores, poderia levar ao melhor resultado para ambos, não haveria incentivo para que um mudasse a escolha acordada com o outro. Jogos com coordenação serão estudados adiante.[5]

Exemplo 3.6. *Da Matriz de Recompensas da tabela 1.11 observamos que:*

$$u_{UNO}(\alpha,\alpha) = 0 > u_{UNO}(\beta,\alpha) = -1,$$
$$u_{UNO}(\alpha,\beta) = 3 > u_{UNO}(\beta,\beta) = 1$$
e
$$u_{DUE}(\alpha,\alpha) = 0 > u_{DUE}(\alpha,\beta) = -5,$$
$$u_{DUE}(\beta,\beta) = 1 > u_{DUE}(\beta,\alpha) = -1$$

		DUE	
		α	β
UNO	α	(0,0)	(3,-5)
	β	(-1,-1)	(1,1)

Não é difícil de ver nesse caso que para o UNO a estratégia dominante é escolher α, e para DUE a melhor estratégia[6] *é escolher α quando UNO escolhe α e escolher β quando DUE escolher β.*
Escolher β é para UNO uma estratégia estritamente dominante, não há porque escolher algo que lhe dará pior resultado. Para DUE, a melhor escolha está condicionada na escolha feita por UNO, como poderia DUE fazer uso dessa informação? Quando

[5] obviamente, a segunda instrução que será dada poderia resolver o problema, se os jogadores são racionais, poderiam observar que escolher β é a melhor escolha para ambos, nos limitamos aqui a análise apenas em ter ou não uma estratégia estritamente dominante (ou dominada)

[6] Entenda como melhor estratégia aquela que dá a melhor recompensa.

estudarmos quão importante é colocar-se no lugar do outro, responderemos a esta questão, no momento se supormos que Due saiba que Uno é racional e que Uno irá, portanto, escolher β por ser estritamente dominante, então certamente Due irá também β já que é melhor escolha quando Uno escolhe β. A solução deste jogo é (β,β).

Exemplo 3.7. *No Jogo das Notas, no caso em que UNO e DUE eram jogadores egocêntricos, chegamos na Matriz de Recompensas da tabela 1.10. Note que ao escolher a estratégia α, UNO tem seu retorno maior independente da escolha feita por DUE pois:*

$$u_{UNO}(\alpha,\beta) = 3 > u_{UNO}(\beta,\beta) = 1,$$ [7]

$$u_{UNO}(\alpha,\alpha) = 0 > u_{UNO}(\beta,\alpha) = -1$$ [8]

		DUE	
		α	β
UNO	α	(0,0)	(3,-1)
	β	(-1,3)	(1,1)

Concluímos então que UNO possui uma estratégia estritamente dominada. A mesma observação pode ser feita quando analisamos a Matriz de Recompensa da desta tabela e vemos que DUE também tem uma estratégia estritamente dominada.

*A saber, escolher β é uma estratégia estritamente dominada tanto para UNO quanto para DUE. Ora, UNO e DUE são jogadores racionais, buscando maiores recompensas, é então razoável que ambos escolham α e recebam portanto **0** como recompensa. Estranhamente, vemos que se ambos escolhessem β cada um dos jogadores receberia **1**, o que mostra que escolhas racionais feitas por jogadores racionais nem sempre levam a melhores recompensas*[9]*.*

O leitor deve achar que seria interesse ambos jogadores escolherem β, suas recompensas seriam maiores do que se ambos escolhessem α. O leitor então proporia a ambos jogadores que assim o fizessem, o problema é que o jogo é simultâneo e

[7] Uno tem recompensa maior ao escolher α quando Due escolhe β

[8] Uno tem recompensa maior ao escolher α quando Due escolhe α

[9] Em seu curso de Teoria dos Jogos, Ben Polak, dá uma grande importância a essa informação, colocando-a como uma das 5 primeiras lições da Teoria dos Jogos, saiba mais em [6]

se um dos jogadores souber que o outro escolherá β, terá um motivo ainda maior para escolher α pois neste caso receberá 3 como recompensa, levando aquele que escolheu β a recompensa de -1. Lembre-se que são jogadores preocupados apenas em maximizar seus ganhos.

Vemos no último exemplo a contradição entre emprego da racionalidade individual e da coletiva. Este tipo de situação onde jogadores egoístas agindo racionalmente, têm pior retorno do que se ambos tivessem agindo com como racionalidade coletiva[10] é o já conhecido "Dilema dos Prisioneiros".

No jogo das posições cuja matriz de resultados é representado pela tabela 2.2 não há uma estratégia estritamente dominada para UNO pois:

$$u_{UNO}(Inf, Esq) = 3 > u_{UNO}(Sup, Esq) = 2$$
$$u_{UNO}(Sup, Dir) = 7 > u_{UNO}(Inf, Dir) = 6$$

Por outro lado, a estratégia Dir não deverá ser usada por Due uma vez que é uma estratégia estritamente dominada.

$$u_{DUE}(Inf, Cent) = 4 > u_{DUE}(Inf, Dir) = 0$$
$$u_{DUE}(Sup, Cent) = 3 > u_{DUE}(Sup, Dir) = 0$$

$$u_{DUE}(Inf, Esq) = 3 > u_{DUE}(Inf, Dir) = 0$$

$$u_{DUE}(Sup, Esq) = 5 > u_{DUE}(Sup, Dir) = 0$$

Uno, colocando-se no lugar de Due, sabe que não é viável que Due escolha Dir e re-analisa a tabela 2.2 que pode ser reescrita como abaixo:

Sup é agora fracamente dominada pela estratégia Inf e Uno racionalmente adota a estratégia Inf.

Na tab. 3.7, Due continua sem uma estratégia estritamente (ou fracamente) do-

[10]racionalidade coletiva é quando jogadores agem racionalmente procurando o melhor resultado coletivo

		DUE	
		Esq	**Cent**
UNO	**Sup**	(2, 5)	(4, 3)
	Inf	(3 , 3)	(4, 4)

Tabela 3.7: Matriz de Recompensas da Tab. 2.2 eliminado a estratégia Dir

minada, sua melhor escolha depende da escolha de UNO, no entanto, colocando-se no lugar de UNO, sua escolha será *Cent* pois:

$$u_{DUE}(Inf, Cent) = 4 > u_{DUE}(Inf, Esq) = 3$$

Resumidamente temos que inicialmente o jogador Uno não tem nenhuma estratégia dominada pois escolher *sup* é melhor quando Due escolhe *dir*(sua recompensa é 7 ao invés de 6) mas para as demais escolhas de Due, Uno tem uma recompensa tão boa ou melhor quando escolhe inf em detrimento da escolha de *sup*. Mas para Due a escolha de *Dir* é estritamente dominada e por isso eliminada. Em seguida para Uno a eliminação da estratégia *Dir* faz com que a estratégia *sup* seja fracamente dominada pela estratégia inf e também é eliminada por Uno, com isso a melhor escolha para Due passa a ser *cent* levando a $(Inf, Cent)$ como única solução.

Colocar-se no lugar do adversário é a segunda importante ferramenta utilizada em Teoria dos Jogos. No entanto para resolvermos o jogo anterior assumimos que Uno e Due além de serem racionais, sabiam que os dois envolvidos eram racionais e tinham conhecimento que ambos tinham essa informação.

Exemplo 3.8. *Anibal, general e estrategista cartaginês nascido em Cartago, filho do fundador do Império Púnico na Espanha, Amilcar Barca, fundador do império cartaginês na Espanha e comandante da primeira guerra púnica contra os romanos. Famoso por sua genialidade, é ainda hoje considerado por muitos o maior estrategista da Antiguidade, cujas manobras bélicas são ainda hoje estudadas.*

De maneira simplista vamos analisar uma ofensiva militar dos cartagos contra os romanos. Nessa havia dois caminhos, um fácil pela costa e o outro difícil atravessando os Alpes, pelos quais Anibal tentaria atingir Roma utilizando duas tropas.

- *pelo caminho difícil: Anibal, perderia 1 tropa no caminho e, se por lá estivessem os Romanos esperando, perderia a outra e não chegaria a Roma.*

- *pelo caminho fácil: poderia chegar com 2 tropas no alvo ou, caso interceptados pelos romanos, teriam ainda uma tropa chegando ao alvo.*

Os Romanos precisavam decidir por qual caminho deveria esperar e defender-se dos cartagos.

Na linguagem da Teoria dos Jogos a recompensa para os romanos é o número de tropas inimigas abatidas e a recompensa para os Cartagos é o número de tropas que chegam ao alvo.

A Tabela a seguir é a Matriz de recompensa para este jogo.

		Cartagos	
		Fácil	**Difícil**
Romanos	Fácil	(1,1)	(1,1)
	Difícil	(0,2)	(2,0)

Tabela 3.8: Prêmios da Estratégia

Para os romanos não há uma estratégia estritamente dominada , defender pela via fácil é melhor quando atacado pela via fácil, assim como defender pela via difícil é melhor quando atacado pela via difícil. No entanto a segunda instrução (ou ferramenta) nos ensina a colocar-se no lugar do oponente e desse modo, os romanos sabem que para Anibal, atacar pela via fácil lhe dá vantagem caso os Romanos defendam-se pela via difícil e caso os romanos defendam-se pela via fácil, a escolha dos cartagos torna-se indiferente (sob o aspecto do prêmio adotado).

Não é difícil para os romanos optar por defender a via fácil ao perceber que atacar pela via difícil era para Anibal, uma estratégia fracamente dominada.[11]

Algumas vezes em um jogo não há diretamente uma estratégia dominada (seja estritamente ou fracamente)para um jogador mas, ao colocar-se no lugar do outro, e excluir a estratégia dominada deste outro jogador, estratégias dominadas surgem.

Colocar-se no lugar das outras pessoas pensando nas recompensas delas e mais que isso, saber como essas pessoas são sofisticadas ao jogar, se especialmente essas

[11] Embora a história mostra que Anibal optou por atacar pela via difícil.

pessoas sabem como você joga e como se colocarão no seu lugar muda completamente o resultado de um jogo.

Para se resolver um jogo por estratégias dominadas, assumindo que:

1. Os jogadores são racionais.
2. Cada jogador sabe que todos os agentes do jogo são racionais.
3. Os jogadores sabem que os outros jogadores sabem do fato que todos os agentes do jogo são racionais.
4. Os jogadores sabem que todos jogadores tem conhecimento do fato de que todos os agentes do jogo saberem que todos sabem que os envolvidos são racionais.
5. e assim por diante, até o infinito.

Esta cadeia de premissas é chamado de Conhecimento Comum sobre a racionalidade[12](chamaremos de CCR) . Ao aplicar o pressuposto CCR como hipótese, podemos resolver um jogo por deleção iterativa de estratégias dominadas.

A ideia que sustenta esta solução é que não há nenhuma razão, qualquer que seja o que pensa o jogador i a cerca da estratégia que o jogador j escolherá, para i utilizar a estratégia s_i' sabendo que qualquer outra estratégia s_i dê um resultado melhor para i, independente da escolha de j.

Exemplo 3.9 (Conhecimento mútuo e Conhecimento comum). *João e Maria vão a um parque onde as pessoas que lá adentram recebem um carimbo na testa, não é possível ver a cor que carimbaram em si próprio. Ambos receberam um carimbo verde na testa e ao se olharem, ambos sabiam que pelo menos uma pessoa havia recebido um carimbo verde na testa (ora, um pode ver a testa do outro). Saber que "pelo menos uma pessoa havia recebido um carimbo verde na testa" era um conhecimento mútuo mas, um não sabe o que o outro está vendo, não sabe a cor do próprio carimbo e portanto não sabe que o outro tem o conhecimento que há pelo menos uma pessoa com carimbo verde na testa. Esse conhecimento portanto embora seja mútuo, não é um conhecimento comum.*

[12]conhecimento comum: Eu sei de algo, você também sabe, eu sei que você sabe disso, você sabe que eu sei disso, eu sei que você sabe que eu sei disso, você sabe que eu sei que você sabe disso, eu sei que você sabe que eu sei que você sabe disso, você sabe que eu sei que você sabe que eu sei disso.

Afirmar que as recompensas dos jogadores são de conhecimento comum significa dizer que nenhum jogador tem dúvidas sobre o resultado buscado pelos demais jogadores, isto é, cada jogador sabe os objetivos dos demais jogadores.

Definição 3.15. ***Jogos de Informação completa*** *são jogos onde as recompensas dos jogadores são de conhecimento comum.*

3.2.2 Deleção Iterativa de Estratégias Dominadas

Jogo 3.1. ***Jogo da Escolha*** [13]

Os n jogadores escolhem, sem que os outros saibam, um número entre 1 *e* 100. *Vence aquele que escolheu o número mais próximo da metade da média, recebendo* 1 *(o mesmo valor em caso de empate), os demais jogadores nada recebem.*

Vamos verificar se há alguma estratégia dominada (fracamente ou estritamente).

Podemos definir a função $f_i : A \to \mathbb{R}$ definida em $A = \{1, 2, 3, ..., 100\}$, conjunto das escolhas do jogador i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, tal que:

$$f_i(s_i) = |s_i - m|$$
$$m = \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{2n}$$

A função f_i dá a distância do número s_i escolhido pelo jogador i à metade da média aritmética de s, onde s é a combinação das escolhas de todos n jogadores. Logo:

$$u(s_i, s_{-i}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \exists s_j \in s\_i \text{ tal que } f_i(s_i) > f_j(s_j) \\ 1 & \text{se } \forall s_j \in s\_i,\ f_j(s_j) \geqslant f_i(s_i) \end{cases}$$

Sendo M a média entre as escolhas dos n jogadores então:

$100 \geqslant M \geqslant 1 \Rightarrow 50 \geqslant m \geqslant 0,5$ [14]

[13] Jogo baseado no exemplo dado na aula 1 e depois trabalhado na aula 2 do curso de Teoria dos Jogos da Universidade de Yale nos Estados Unidos, o curso está disponível em *www.veduca.com.br* .

[14] Os extremos correspondem aos casos onde todos os jogadores escolhem 1 ou todos escolhem 100.

Sendo s_i=50 uma estratégia de um jogador i e s'$_i$ uma outra estratégia de i, onde s'$_i$ $\geqslant$ 51 então s'$_i$ é uma estratégia fracamente dominada pela estratégia s_i=50.

Demonstração: Queremos mostrar que:

$$\begin{cases} u_i(50, s_{-i}) \geqslant u_i(s'_i, s_{-i}) & \text{para todo } s_{-i}, \text{ com } s'_i \geqslant 51 \\ u_i(50, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i}) & \text{para algum } s_{-i} \end{cases}$$

s'$_i$>50$\geqslant m$ e portanto:

$(s'_i - m) > (50 - m) \geqslant 0 \Rightarrow f_i(s'_i) > f_i(50)$

Se:

1. $u_i(50, s_{-i}) = 1$ como ou $u_i(s'_i, s_{-i}) = 1$ ou $u_i(s'_i, s_{-i}) = 0$ temos que $u_i(50, s_{-i}) \geqslant u_i(s'_i, s_{-i})$

2. $u_i(50, s_{-i}) = 0$ então $\exists s_j \in s_-i$ tal que $f_i(50) > f_j(s_j)$ disso e do fato que $f_i(s'_i) > f_i(50)$ temos que $u_i(s'_i, s_{-i}) = 0$ pois $f_i(s'_i) > f_j(s_j)$

3. Seja $s_j \geqslant s_i = 50$ para $\forall s_j \in s_{-i}$ como $50 \geqslant m$ segue que:
   $s_j - m \geqslant 50 - m \Rightarrow f_j(s_j) \geqslant f_i(50) \Rightarrow u_i(50, s_{-i}) = 1$
   em particular se $s_j = s_i = 50$, como $(s'_i - m) > (50 - m)$
   temos que $f_i(s'_i) > f_j(s_j) = f_i(50) \Rightarrow u_i(50, s_{-i}) = 1 > u_i(s'_i, s_{-i})$=0 .

De 1 e 2 temos que $u_i(50, s_{-i}) \geqslant u_i(s'_i, s_{-i})$
De 3 temos que existe pelo menos um s_{-i} tal que $u_i(50, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i})$.

Por 1,2 e 3 mostramos que as estratégias $s'_i > 50$ são fracamente dominadas pela estratégia $s_i = 50$. $\square$

Se conhecemos os demais jogadores e sabemos que estes também pensam racionalmente, ao colocar-se no lugar deles chegaremos a conclusão que nenhum escolherá um número superior a 50, por ser uma estratégia fracamente dominada. É fácil constar que o novo valor máximo de m, supondo a exclusão da estratégia fracamente dominada por todos os jogadores, será 25.

Fazendo uma nova iteração, isto é, analisando de forma análoga como feito anteriormente, substituindo o valor máximo de m de 50 por 25, surgirão novas estratégias fracamente dominadas.

A próxima tabela mostra deleções iterativas, deletamos estratégias dominadas, refazemos a análise e deletamos novas estratégias dominadas que aparecem após a deleção das estratégias dominadas da primeira análise. A deleção iterativa nos leva a concluir que a melhor escolha seria o número 1, tendo como hipótese que todos os jogadores são racionais e utilizam estratégias racionais.

Raciocínios	Motivação	Excluo
1	Eliminar estratégias fracamente dominadas	>50
2	Colocar-se no lugar do outro, supondo que este utiliza 1	>25
3	Colocar-se no lugar do outro, supondo que este utiliza 2	>12
4	Colocar-se no lugar do outro, supondo que este utiliza 3	>6
5	Colocar-se no lugar do outro, supondo que este utiliza 4	>3
6	Colocar-se no lugar do outro, supondo que este utiliza 5	>1

Tabela 3.9: Deleção Iterativa de Estratégias Dominadas

Percebemos pela tabela 3.9 que a deleção iterativa mostra que a melhor escolha seria 1, mais resultados obtidos em experimentos em sala de aula mostram que 1 acaba não sendo o melhor resultado pois não todos os jogadores reais agem estrategicamente e mais uma vez escolhas racionais por pessoas racionais podem não levar aos melhores resultados.

Obviamente que para o jogo transcorrer como na tabela 3.9 é necessário que algumas coisas aconteçam:

- Dado um jogador i, no passo 1 da tabela, i deve ser racional[15] e portanto, não escolherá uma estratégia fracamente dominada.
- No passo 2, i deve saber que os demais jogadores são racionais e por isso também não utilizaram uma estratégia fracamente dominada.
- Para o passo 3, deve ser do conhecimento de i que os demais jogadores sabem que os jogadores envolvidos são racionais, por isso além de não utilizarem uma estratégia fracamente dominada, sabem que os outros também não utilizarão.

[15]Entendemos como jogador racional, aquele que está tentando maximizar seus ganhos e que tomará as melhores atitudes para isto.

- Todos os jogadores devem ter conhecimento que todos os jogadores são racionais;
- Para a completa iteração é necessário o **conhecimento comum** sobre a racionalidade dos envolvidos.

Um experimento semelhante foi feito pela Universidade de Yale durante alguns anos, lá ganhava aquele que escolhesse o número que ficasse mais próximo de 2/3 da média, as médias dos números escolhidos foram:

Ano de 2003: Média de 18,4.

Ano de 2004: Média de 21,5.

Ano de 2005: Média de 23.

Ano de 2006: Média de 13.

A Deleção Iterativa e o Teorema do Eleitor Mediano

Um processo eleitoral pode ser visto como um jogo estratégico, em que os candidatos fazem "promessas" para conquistar eleitores.

Em 1957, o economista Anthony Downs, autor do clássico "Uma teoria econômica da democracia", concretizou o teorema do eleitor mediano, segundo o qual num eleitorado distribuído de forma normal por um conjunto de preferências (nessa distribuição, o grosso do eleitorado ficaria no centro) e numa eleição majoritária, espera-se que vença aquele que conquistar o eleitor mediano. O eleitor mediano, nessa distribuição, tem metade dos eleitores a sua esquerda e a outra metade a sua direita.

De forma simplória podemos entender que os eleitores são colocados em uma fila imaginária de acordo com o maior ou menor interesse desse eleitor em determinada proposta do candidato. Digamos que a proposta seja, por exemplo, a mudança da maioridade penal [16], então o primeiro da fila seria o candidato que mais apoiasse essa ideia, em segundo na fila ficaria o segundo eleitor que mais apoiasse a ideia,

[16] Obviamente em uma eleição são muitas propostas e a mesma análise deve ser feita para cada proposta.

assim por diante, até que o último da fila seria o eleitor que fosse mais contra a mudança da maioridade penal.

O Teorema diz que cada candidato deve sempre se aproximar, com suas propostas, ao eleitor colocado mais ao centro da fila,aproximando-se mais de um maior número de eleitores, e afastando-se da posição que deixaria mais insatisfeito aqueles eleitores mais radicais, isto é, que se encontrem nos extremos da fila. Uma promessa muito radical pode perder completamente os votos dos eleitores que se encontram na outra ponta da fila.

Jogo 3.2. ***: Jogo da Política***

Dois candidatos disputam uma eleição e consequentemente os votos do eleitorado. Para isso, precisa tomar sua posição política. Sabe-se que há dez posições políticas, da extrema esquerda à extrema direita e supõem-se que o eleitorado dividi-se equitativamente entre as dez posições.

O conjunto de posições políticas da esquerda para a direita são: P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9 *e* P_{10}. *Cada posição tem* 10% *do eleitorado, além disso o eleitor vota no candidato que está mais próximo de sua posição política. Em caso de dois políticos estarem a mesma distância de um grupo de eleitorado, este grupo se dividirá igualmente entre os candidatos.*

A recompensa de um político são seus votos obtidos, que aqui estamos representando percentualmente em relação ao total de eleitores.

Exemplo 3.10.

O candidato 1 se posiciona em P1 e o candidato 2 se posiciona em P3, então:

- *Os eleitores de P1 votam em massa no candidato 1 que recebe* 10% *do total.*
- *Os eleitores de P2 estão a mesma distância de P1 e de P3, por isso se dividem igualmente entre os dois candidatos, isto é, O candidato 1 recebe* 5% *e o candidato 2 recebe* 5%.

- *Os eleitores de P_3 a P_{10} estão mais próximos de P_3 e todos esses votam no candidato 2 que recebem 70% dos votos.*

Neste caso o candidato 1 recebe 15% e o candidato 2 recebe 85% dos votos.

A próxima tabela trás a porcentagem dos votos do candidato 1 em função das posições escolhidas pelos candidatos 1 e 2. Assume-se que o eleitorado necessariamente os eleitores votem em algum dos candidatos (não há brancos e nulos)logo a recompensa do candidato 2 pode ser facilmente obtida fazendo 100% menos a recompensa do candidato 1.

		Candidato 2									
		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}
Candidato 1	P_1	50%	10%	15%	20%	25%	30%	35%	40%	45%	50%
	P_2	90%	50%	20%	25%	30%	35%	40%	45%	50%	55%
	P_3	85%	80%	50%	30%	35%	40%	45%	50%	55%	60%
	P_4	80%	75%	70%	50%	40%	45%	50%	55%	60%	65%
	P_5	75%	70%	65%	60%	50%	50%	55%	60%	65%	70%
	P_6	70%	65%	60%	55%	50%	50%	60%	65%	70%	75%
	P_7	65%	60%	55%	50%	45%	40%	50%	70%	75%	80%
	P_8	60%	55%	50%	45%	40%	35%	30%	50%	80%	85%
	P_9	55%	50%	45%	40%	35%	30%	25%	20%	50%	90%
	P_{10}	50%	45%	40%	35%	30%	25%	20%	15%	10%	50%

Tabela 3.10: Tabela da Recompensa do Candidato 1

Observe que para C_1 (chamaremos o candidato 1 de C_1 e candidato 2 de C_2) a escolha P_1 é estritamente dominada pela escolha de P_2 pois $u_{C_1}(P_2, P_i) > u_{C_1}(P_1, P_i), \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Do mesmo modo a estratégia P_{10} é estritamente dominada pela estratégia P_9. O raciocínio estratégico faz com que C_1 não adote as estratégias P_1 e P_{10} por serem estritamente dominadas.

O mesmo raciocínio pode ser feito para C_2 e quando C_1, coloca-se no lugar de C_2 e elimina também a possibilidade de C_2 utilizar suas estratégias estritamente dominadas. Com isso construímos uma nova tabela ignorando as estratégias estritamente dominadas de C_1 e C_2.

A tabela 3.11 mostra que uma vez excluídos as estratégias P_1 e P_{10}, as estratégias P_2 e P_9 passam a ser estritamente dominadas respectivamente pelas estratégias P_3

		Candidato 2							
		P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9
Candidato 1	P_2	50%	20%	25%	30%	35%	40%	45%	50%
	P_3	80%	50%	30%	35%	40%	45%	50%	55%
	P_4	75%	70%	50%	40%	45%	50%	55%	60%
	P_5	70%	65%	60%	50%	50%	55%	60%	65%
	P_6	65%	60%	55%	50%	50%	60%	65%	70%
	P_7	60%	55%	50%	45%	40%	50%	70%	75%
	P_8	55%	50%	45%	40%	35%	30%	50%	80%
	P_9	50%	45%	40%	35%	30%	25%	20%	50%

Tabela 3.11: Tabela de Recompensa de C_1, excluidos P_1 e P_{10} de C_1 e de C_2

e P_8.

Observe que P_2 é estritamente dominada por P_3 apenas depois de ter sido elimado a estratégia P_1 pois $u_{C_1}(P_3, P_1) < u_{C_1}(P_2, P_1)$. Assim usando a deleção iterativa de estratégias estritamente dominadas podemos deletar novas estratégias que são dominadas apenas depois de eliminarmos a possibilidade da utilização das estratégias estritamente dominadas inicialmente.

Após uma iteração chegamos a tabela 3.12, continuando o raciocínio a segunda iteração nos levará a tabela 3.13 e finalmente, depois da terceira iteração, apresentamos a matriz de recompensas dos candidatos na tabela 3.14.

Na tabela 3.14 os Canditatos C_1 e de C_2 concentram-se próximo aos eleitores P_5 e P_6, aí já não há mais uma estratégia dominante, este modelo onde os candidatos se aglomeram no centro é chamado na Ciência Política de Teorema do Eleitor Mediano. [17]

[17] Desenvolvido inicialmente por Bowen (1943), Black (1948), Donws (1957), entre outros, o Modelo do Eleitor Mediano diz que em um sistema eleitoral majoritário, os eleitores escolherão o candidato cuja cesta ofertada de bens e serviços públicos mais se aproxime da cesta demandada pelo eleitor mediano. Podemos imaginar todos os eleitores disponíveis em um local colocados em uma fila de acordo com o maior ou menor interesse desse eleitor em determinada proposta do candidato. O primeiro da fila seria o eleitor mais satisfeito com essa proposta, até que no último lugar dessa fila ficaria o eleitor mais radicalmente contra. Cada candidato deve sempre se aproximar, com suas promessas de campanha, ao eleitor colocado mais ao meio da fila, pois assim poderá se aproximar mais de um maior número de eleitores, deixando de de estar muito distante dos eleitores muito contrários a determinada proposta. Esse modelo é bastante razoável, e muito utilizado em economia.

		Candidato 2					
		P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
Candidato 1	P_3	50%	30%	35%	40%	45%	50%
	P_4	70%	50%	40%	45%	50%	55%
	P_5	65%	60%	50%	50%	55%	60%
	P_6	60%	55%	50%	50%	60%	65%
	P_7	55%	50%	45%	40%	50%	70%
	P_8	50%	45%	40%	35%	30%	50%

Tabela 3.12: Tabela da Recompensa do Candidato 1

		Candidato 2			
		P_4	P_5	P_6	P_7
Candidato 1	P_4	50%	40%	45%	50%
	P_5	60%	50%	50%	55%
	P_6	55%	50%	50%	60%
	P_7	50%	45%	40%	50%

Tabela 3.13: Tabela da Recompensa do Candidato 1

		Candidato 2	
		P_5	P_6
Candidato 1	P_5	(50%,50%)	(50%,50%)
	P_6	(50%,50%)	(50%,50%)

Tabela 3.14: Matriz de Recompensa dos Candidato C_1 e C_2

Dizemos que um jogo é **solucionável por dominância** quando após a eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas restar apenas uma estratégia para cada jogador.

Dominância estrita iterada nada mais é do que um processo onde se eliminam as estratégias que são estritamente dominadas.

Exemplo 3.11. *Paradoxo do Presidente [7]*

Considere-se um comitê de três pessoas, Diretor 1, Diretor 2 e Presidente, cuja tarefa é escolher uma forma alternativa do conjunto de escolha $\{\alpha, \beta, \gamma\}$*, por meio de votação. A alternativa será escolhida com base na maioria. Em caso de empate então o presidente do comitê vai decidir unilateralmente sobre o resultado da eleição, segundo suas preferências. Este não é um jogo simétrico, verifica-se que a posição do jogador é 3 estrategicamente superior ao resto dos jogadores.*

O quadro abaixo representa a preferência dos eleitores:

Preferências	Diretor 1	Diretor 2	Presidente
1ª Opção	α	β	γ
2ª Opção	β	γ	α
3ª Opção	γ	α	β

Tabela 3.15: Quadro de preferência dos eleitores.

Obviamente se todos os eleitores votassem em sua primeira preferência haveria um empate e a decisão passaria para o presidente que supondo-o racional escolheria γ*. Vamos agora modelar este jogo com a forma estratégica, para isso vamos colocar que a recompensa para cada jogador será 2, 1 ou 0 segundo suas preferências, isto é, esses valores serão a utilidade para cada jogador de cada possível resultado.*

		Diretor 2		
		α	β	γ
Diretor 1	α	(2,0,1)	(0,1,2)	(0,1,2)
	β	(0,1,2)	(1,2,0)	(0,1,2)
	γ	(0,1,2)	(0,1,2)	(0,1,2)

Tabela 3.16: Matriz de Recompensas caso o presidente vote γ

Como exemplo, em (0,1,2) temos que a recompensa do diretor 1 é 0, do diretor 2 é 1 e do presidente é 2, que é como se o que acontece quando as escolhas são

		Diretor 2		
		α	β	γ
Diretor 1	α	(2,0,1)	(2,0,1)	(2,0,1)
	β	(2,0,1)	(1,2,0)	(0,1,2)
	γ	(2,0,1)	(0,1,2)	(0,1,2)

Tabela 3.17: Matriz de Recompensas caso o presidente vote α

		Diretor 2		
		α	β	γ
Diretor 1	α	(2,0,1)	(1,2,0)	(0,1,2)
	β	(1,2,0)	(1,2,0)	(1,2,0)
	γ	(2,0,1)	(1,2,0)	(0,1,2)

Tabela 3.18: Matriz de Recompensas caso o presidente vote α

respectivamente, α, β *e* γ*.*

Aplicando a deleção iterativa de estratégias dominadas (neste caso, fracamente dominadas) neste jogo, teremos:

1. *Eliminar* γ *para o diretor 1;*
2. *Eliminar* α *e* γ *para o diretor 2;*
3. *Eliminar* α *e* β *para o presidente;*
4. *Eliminar* α *para o diretor 1.*

Estas ações levam ao resultado $(\beta\ ,\ \beta\ ,\ \gamma)$ *o que significa que o vencedor da eleição é* γ*. Este resultado contrasta com o resultado, no caso de votação sincera. Com voto estratégico, observa-se que o pior resultado é eleito para presidente que supostamente é um jogador mais poderoso do que os outros; é por isso que o presente jogo é às vezes chamado paradoxo do presidente.*

Definimos a eliminação iterada de ações fracamente dominadas de forma análoga a dominância estrita iterada. Mas este é um conceito um pouco mais problemático do que ações o primeiro, a solução pode depender da ordem em que as estratégias são eliminados, isto não acontece com as soluções com a eliminação de estratégias estritamente dominadas. Veja o exemplo:

		P_2		
		E	**C**	**D**
P_1	**S**	(1,3)	(0,4)	(4,4)
	I	(0,2)	(1,1)	(4,2)

Tabela 3.19: Matriz de Recompensas - Solução conforme ordem de iteração

- ORDEM 1:
  1. P_2 elimina **E** por ser fracamente dominada;
  2. P_1 então elimina **S**;
  3. P_2 elimina **C** solução é (**I,D**).
- ORDEM 2:
  1. P_2 elimina **C** por ser fracamente dominada;
  2. P_1 então elimina **I**;
  3. P_2 elimina **E** solução é (**S,D**).

Portanto a ordem de eliminação importa em caso de eliminação de estratégias fracamente dominadas.

3.2.3 Equilíbrio de Nash

Como vimos em exemplos anteriores nem todos os jogos apresentam estratégias dominadas tornando isto uma limitação para o método da eliminação iterativa de estratégias dominadas.

Há jogos onde nenhum jogador tem todas as estratégias dominadas levando à previsão imprecisa de que qualquer coisa pode acontecer.

Observe o jogo abaixo onde duas pessoas estão escolhendo o local para uma atividade.

		J_2	
		Local 1	**Local 2**
J_1	**Local 1**	(4, 1)	(1, 2)
	Local 2	$(0, 4)$	(3, 3)

Tabela 3.20: Matriz de Recompensas Escolha do Local

Não há uma solução por dominância no entanto, existe uma solução de “evidente” para este jogo, ou seja, (Local 2, Local 2), que maximiza o resultado de ambos os jogadores, fixado a escolha do outro. É possível definir uma solução em termos de algo que não seja a (iterada) eliminação de estratégias dominadas que, tanto identifica essas soluções óbvias e mantém muitos dos resultados obtidos através de técnicas de dominação, tal solução pode ser fornecido pela definição de um equilíbrio de Nash.

Observe que se ambos jogadores estiverem com a estratégia Local 2, não há porque um deles mudar de estratégia sozinho.

Uma solução estratégica ou **equilíbrio de Nash** de um jogo é um ponto onde cada jogador não tem incentivo de mudar sua estratégia se os demais jogadores não o fizerem.

Equilíbrio de Nash é um perfil de estratégia (um conjunto de estratégias, uma para cada jogador) de tal forma que cada estratégia é uma melhor resposta (maximiza a recompensa) para todas as outras estratégias.

A tomada de decisão resume-se a resolver o problema de maximizar a recompensa, o que torna uma situação de um jogo estratégico, no entanto, é o fato de que o que é melhor para uma pessoa, em geral, depende de ações de outros indivíduos. O problema de decisão de um indivíduo deve ser formulada considerando como as escolhas de outros indivíduos afetam o retorno deste, ou seja, achar para cada jogador i, $\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i})$. A principal dificuldade com este problema é o fato de que o indivíduo não conhecer as escolhas dos outros jogadores. Portanto, determinar a melhor ação para um indivíduo requer uma análise conjunta de todos os indivíduos envolvidos.

Há situações em que este problema pode ser contornado, e, portanto, podemos analisar o problema, apenas considerando-o do ponto de vista de um único indivíduo. É o caso onde, independente das ações dos outros jogadores, o indivíduo em questão tem uma ação ideal, então a racionalidade requer tomar essa ação, e, portanto, podemos analisar de forma isolada da decisão de outras pessoas. Se cada indivíduo está em uma situação semelhante isso leva ao equilíbrio de estratégia (fracamente ou estritamente) dominante. Lembre-se que, as únicas premissas que usamos para atingir o equilíbrio de estratégia dominante é a racionalidade dos jogadores que requer o conhecimento da função própria recompensa. Infelizmente, muitos jogos interessantes não têm um equilíbrio de estratégia dominante e isso nos obriga a aumentar as exigências de racionalidade para os indivíduos. O segundo conceito solução é a eliminação iterada de estratégias dominadas. É necessário não só a racionalidade de cada indivíduo e os conhecimentos de funções próprias de recompensa, mas também o conhecimento (comum) de racionalidade e de recompensa funções de outros jogadores. No entanto, neste caso, nos deparamos com outros problemas: pode diferentes resultados podem surgir como resultado dependendo da ordem de eliminação(no caso de estratégias fracamente dominadas) ou há casos onde não há estratégias dominadas.

O conceito de equilíbrio de Nash é o conceito de equilíbrio mais comumente usado, supera alguns dos problemas dos conceitos de solução introduzidas antes. A presença de interação entre os jogadores requer que cada indivíduo forme uma crença sobre as possíveis ações de outros indivíduos. Equilíbrio de Nash é baseada nas premissas de que: cada indivíduo age racionalmente dadas suas crenças sobre as ações dos outros jogadores, e que essas crenças são corretas. É o segundo elemento que torna este um conceito de equilíbrio. Neste sentido podemos considerar o resultado de equilíbrio de Nash como um estado constante de uma interação estratégica. Uma vez que cada indivíduo está agindo de acordo com o equilíbrio de Nash, ninguém tem incentivo para desviar-se de forma unilateral e tomar outra ação. Mais formalmente, temos a seguinte definição:

Definição 3.16. *Um perfil de estratégia $(s'_1, s'_2, ..., s'_i, ..., s'_n)$ de um jogo J é um* ***Equilíbrio de Nash*** *se para cada jogador i:*

$$u_i(s'_i, s'_{-i}) \geqslant u_i(s_i, s'_{-i}) \text{ para todo } s_i \in S_i.$$

O conjunto de todos os equilíbrios de Nash do jogo J é representado por $N(J)$. O Equilíbrio de Nash é auto-impositivo: nenhum jogador tem um incentivo para desviar unilateralmente.

Definição 3.17. *Seja $x \in X$ e $f(x)$ uma função definida para qualquer $x \in X$. O conjunto dos argumentos x que maximizam a função $f(x)$ é representado por $argmax$ e definido pela seguinte equivalência :*

$$x^* \in \arg max_{x \in X} f(x) \Leftrightarrow f(x^*) = max_{x \in X} f(x).$$

Em um jogo de dois jogadores, por exemplo, um perfil de estratégia (s_1^*, s_2^*) é um equilíbrio de Nash se as duas condições seguintes são asseguradas:

$$s_1^* \in \arg max_{s_1 \in S_1} u_1(s_1, s_2^*)$$
$$s_2^* \in \arg max_{s_2 \in S_2} u_2(s_1^*, s_2)$$

Portanto, podemos dizer que, em um equilíbrio de Nash, a escolha de cada estratégia de um jogador é a melhor resposta para as ações realmente tomadas por seus oponentes. Isto sugere, e às vezes mais útil, a definição de equilíbrio de Nash, baseado na noção de **melhor resposta**.

Definição 3.18. *A melhor resposta do jogador i em um jogo de forma estratégica pela correspondência*[18]

$B_i : S_{-i} \rightrightarrows S_i$ *dada por:*

$$B_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i : u_i(s_i, s\_i) \geq u_i(s_i', s\_i)\ \forall s_i' \in S_i\}$$

Na matriz de resultado3.19 podemos destacar os seguintes melhores resultados:

$B_{P_1}(E) = \{S\}$, $B_{P_1}(C) = \{I\}, B_{P_1}(D) = \{S, I\}$
$B_{P_2}(S) = \{C, D\}$, $B_{P_2}(I) = \{E, D\}$

No caso de um jogo com dois jogadores com estratégias mistas: [19]

Definição 3.19. *Uma estratégia para o jogador 1, δ_1^*, é a melhor resposta para alguma fixada estratégia do jogador 2, δ_2, se:*

$$\delta_1^* \in \arg max_{\delta_1 \in \Delta_1} u_1(\delta_1, \delta_2).$$

Similarmente δ_2^* é a melhor resposta para δ_1 se:

$$\delta_2^* \in \arg max_{\delta_2 \in \Delta_2} u_1(\delta_1, \delta_2).$$

No caso em que as estratégias de cada jogador são mistas podemos redefinir o equilíbrio de Nash como:

[18] Uma correspondência f do conjunto A no conjunto B associa cada $x \in A$ a um subconjunto de B e neste caso escrevemos $f : A \rightrightarrows B$, em particular caso a correspondência seja um conjunto unitário ela pode ser representada por uma função.

[19] Ou puras, uma vez que toda estratégia pura é também uma estratégia mista.

Definição 3.20. *Equilíbrio de Nash é um perfil de estratégia (uma conjunto de estratégias, uma para cada jogador) onde cada estratégia do jogador i tem a maior recompensa em relação a todas as outras estratégias do jogador i. Considere o perfil de estratégia* $\delta = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_i, ..., \delta_n)$ *onde* $\delta_i \in \Delta_i$ *para todo jogador i. O perfil* δ *é um Equilíbrio de Nash se e somente se:*

$$u_i(\delta_i, \delta\_i) \geq u_i(s_i, \delta\_i) \text{ para todo } s_i \in S_i \text{ de cada jogador } i.$$

Segue que δ_i *é a melhor resposta para* δ_{-i}.

Podemos ainda definir equilíbrio de Nash para n jogadores utilizando as melhores respostas dos jogadores:

Definição 3.21. *O perfil de estratégias mistas* $\delta^* = (\delta_1^*, \delta_2^*, ..., \delta_n^*)$ *é um equilíbrio de Nash para um jogo de n jogadores se:*

$$\delta_i^* \in \arg max_{\delta_i \in \Delta_i} u_i(\delta_i, \delta_{-i}^*), \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$$

Vamos definir para dois jogadores com estratégias mistas:

Definição 3.22. *Um equilíbrio de Nash para dois jogadores é um par de estratégias* (δ_1^*, δ_2^*) *tal que:*

$$u_1(\delta_1^*, \delta_2^*) \geq u_1(\delta_1, \delta_2^*) \quad \forall \delta_1 \in \Delta_1$$
$$e$$
$$u_2(\delta_1^*, \delta_2^*) \geq u_2(\delta_1^*, \delta_2) \quad \forall \delta_2 \in \Delta_2$$

Em outras palavras, dada a estratégia adotada pelo outro jogador, nenhum jogador poderia fazer estritamente melhor (ou seja, aumentar a sua recompensa) ao adotar outra estratégia.

Podemos encontrar o equilíbrio de Nash mais facilmente para um jogo de dois jogadores através as melhores respostas, focalizando nas estratégias em vez de nas recompensas:

Definição 3.23. *Um par de estratégias* (δ_1^*, δ_2^*) *é um equilíbrio de Nash se:*

$$\delta_1^* \in \arg max_{\delta_1 \in \Delta_1} u_1(\delta_1, \delta_2^*)$$
$$e$$
$$\delta_2^* \in \arg max_{\delta_2 \in \Delta_2} u_1(\delta_1^*, \delta_2).$$

Para encontrar equilíbrio de Nash usando esta definição encontramos, para cada jogador, o conjunto de melhores respostas para todas as estratégias possíveis do outro jogador. Em seguida, procurar pares de estratégias que são melhores respostas para ambos.

Existem jogos que não possuem equilíbrios de Nash em estratégias puras no entanto podemos encontrar um equilíbrio de Nash para estratégias mistas.

Exemplo 3.12. ***O jogo de combinar moedas (matching pennies)***[20]

Nesse jogo, dois jogadores exibem, ao mesmo tempo, a moeda que cada um esconde em sua mão. Se ambas as moedas apresentam cara ou coroa, o primeiro jogador recebe fica com as duas moedas. Se uma das moedas apresenta cara, enquanto a outra apresenta coroa, o segundo jogador fica com as duas moedas (ou ganha a moeda do jogador 1, e continua com a sua). Considerando a recompensa +1 quando ganha e -1 quando perde a moeda temos:

		$Jogador2$	
		Cara	**Coroa**
$Jogador1$	**Cara**	$(+1, -1)$	$(-1, +1)$
	Coroa	$(-1, +1)$	$(+1, -1)$

Tabela 3.21: Matriz de Recompensas do Matching Pennies

Podemos facilmente verificar que não existe par estratégia pura que é um equilíbrio de Nash:

- *(Cara,Cara) não é um equilíbrio porque o Jogador 2 teria um incentivo para mudar para Coroa (seu ganho mudaria de -1 para +1);*
- *(Cara,Coroa) também não é um incentivo pois para o jogador 1 seria melhor mudar para Coroa;*
- *(Coroa,Coroa) igualmente não é um equilíbrio pois nesse caso o jogador 2 teria como preferência mudar para Cara;*
- *(Coroa,Cara) desta vez é o Jogador 1 que deve mudar para Cara.*

Vamos considerar as estratégias mistas $\delta_1 = (p, 1-p)$ *para o jogador 1 e* $\delta_2 =$

[20] Esse exemplo é citado em várias das bibliografias consultadas, em especial a análise feita é semelhante a de [2].

$(q, 1-q)$ para o jogador 2, isto é, o Jogador 1 tira "Cara", com probabilidade p e jogador 2 tira "Coroa", com probabilidade q. Segue disso que:

$$u_1(\delta_1, \delta_2) = pq - p(1-q) - (1-p)q + (1-p)(1-q) = 1 - 2q + 2p(2q-1)$$

e

$$u_2(\delta_1, \delta_2) = -pq + p(1-q) + (1-p)q - (1-p)(1-q) = -1 + 2p + 2q(1-2q)$$

Neste caso, analisando $u_1(\delta_1, \delta_2)$, se $q < \frac{1}{2}$ como $p \geq 0$ a função é maximizada com $p = 0$, isto é $\delta_1 = (0, 1)$ (tirar Coroa). Por outro lado se $q > \frac{1}{2}$ então $p = 1$ maximiza u_1, logo $\delta_1 = (1, 0)$ (tirar cara). No caso em que $q = \frac{1}{2}$ temos que a recompensa do jogador 1 será a mesma para qualquer valor de p, pela definição qualquer valor será então a melhor resposta.

Quanto a $u_2(\delta_1, \delta_2)$, se $p < \frac{1}{2}$ a melhor resposta para o jogador 2 é $q = 1$, $\delta_2 = (1, 0)$ (tirar Cara). Para $p > \frac{1}{2}$ a melhor resposta para o jogador 2 é $q = 0$, $\delta_2 = (0, 1)$ (tirar Coroa). Finalmente caso $p = \frac{1}{2}$ qualquer estratégia mista(ou pura) será melhor resposta.

Logo o par de estratégia $\delta_1^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $\delta_2^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ é solução, isto é, (δ_1^*, δ_2^*) é equilíbrio de Nash.

Neste caso a expectativa de utilidade para cada jogador é:

$$u_1(\delta_1^*, \delta_2^*) = u_2(\delta_1^*, \delta_2^*) = 0$$

Iremos estudar como encontra o Equilíbrio de Nash para jogos com dois jogadores fazendo uso dos dois próximos teoremas, o primeiro deles é especialmente utilizado para encontrar equilíbrio de Nash de estratégias puras.

Teorema 3.1. [21]*Suponha que exista um par de estratégias puras (s_1^*, s_2^*) tal que:*

$u_1(s_1^*, s_2^*) \geq u_1(s_1, s_2^*) \quad \forall s_1 \in S_1$

e

$u_1(s_1^*, s_2^*) \geq u_1(s_1^*, s_2) \quad \forall s_2 \in S_2$

Então (s_1^*, s_2^*) é equilíbrio de Nash.

[21]Observe que a definição de equilíbrio de Nash foi feita para estratégia mista, a demonstração está em [2]pg. 73

Caça ao Veado (CV)

Exemplo 3.13. *Dois caçadores famintos foram para a floresta com o objetivo de pegar um veado, ou, pelo menos, uma lebre. Eles podem pegar um veado somente se ambos permanecerem alertas e dedicarem seus tempos e energias para capturá-lo. Pegar uma lebre é menos exigente e não requer a cooperação do outro caçador. Cada caçador prefere dividir um veado do que ter uma lebre. V denota a ação de ir atrás do veado, e L a ação de pegar uma lebre, podemos representar este jogo pela matriz de recompensas da tabela 3.22.*

		Caçador 2	
		V	**L**
Caçador 1	**V**	$(+\mathbf{2},+\mathbf{2})$	$(0,+1)$
	L	$(+1,0)$	$(+\mathbf{1},+\mathbf{1})$

Tabela 3.22: Matriz de Recompensas do Caçadores

Uma recompensa de um jogador, correspondente a uma estratégia pura, que é melhor resposta para uma das estratégias puras do adversário é colocadas em negrito. Um par de recompensas, uma de cada jogador, onde ambas recompensas estão em negrito significa que o par de estratégias que geram estas recompensas é o equilíbrio de Nash pois uma estratégia é melhor resposta para a outra. Neste caso os pares (V,V) e (L,L) são equilíbrio de Nash. $N(CV) = \{(V,V),(L,L)\}$.

Definição 3.24. *O suporte de uma estratégia* $\delta_i = \sum_{j=1}^{m_i} p(s_i^j)s_i^j$ *é o conjunto* $S_i(\delta_i) \subseteq S_i$ *de todas as estratégias puras* s_i^j *de* δ_i *tal que* $p(s_i^j) > 0$.

Exemplo 3.14. *Dado o conjunto de estratégias puras* $S_1 = \{E, C, D\}$, *e a estratégia mista* $\delta_1 = (p, 0, 1-p)$, *onde as probabilidades são listadas na mesma ordem que aparece no conjunto* S_1 *e* $0 < p < 1$. *Então* $S_i(\delta_i) = \{E, D\}$.

Teorema 3.2. ***Igualdade de recompensas.***[22]

Seja (δ_1^*, δ_2^*) *um equilíbrio de Nash,* $S(\delta_1^*)$ *o suporte de* δ_1^* *e* $S(\delta_2^*)$ *o suporte de* δ_2^*. *Então:*

$$u_1(s_1, \delta_2^*) = u_1(\delta_1^*, \delta_2^*),\ \forall s_1 \in S(\delta_1^*)$$

[22]Demonstração pode ser encontrada na página 75 de[2]

$$e$$

$$u_2(\delta_1^*, s_2) = u_2(\delta_1^*, \delta_2^*), \ \forall s_2 \in S(\delta_2^*)$$

Vamos resolver agora o Exemplo 3.12 utilizando este teorema. Suponha que o jogador 2 joga "Cara", chamaremos de K com probabilidade q e portanto "Cora", chamaremos de C com probabilidade $1 - q$. Se o jogador 1 está jogando uma estratégia mista do equilíbrio de Nash, $S(\delta_1^*) = \{K, C\}$, temos:

$u_1(K, \delta_2^*) = u_1(C, \delta_2^*) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow q.u_1(K,K) + (1-q).u_1(K,C) = q.u_1(C,K) + (1-q).u_1(C,C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow q.1 + (1-q).0 = q.0 + (1-q).1 \Leftrightarrow q = \frac{1}{2}$

Neste caso $\delta_2^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, semelhantemente achamos $\delta_1^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

3.2.4 Existência do Equilíbrio de Nash

O próximo teorema foi provado por John Forbes Nash Jr. em 1950, como parte da tese de seu doutorado, dado sua importância, soluções de equilíbrio para jogos de interação são chamados de "Equilíbrio de Nash".

Teorema 3.3. ***Teorema de Nash:*** [23] *Todo jogo finito, isto é, com finitos jogadores em forma estratégica e um conjunto limitado de estratégias, tem uma solução em estratégias mistas.*

		$J2$	
		E	**D**
$J1$	**S**	(α, β)	(γ, λ)
	I	(μ, σ)	(τ, φ)

Tabela 3.23: Matriz de Recompensas-Representação Normal

1. Consideramos primeiro os casos em que há equilíbrio de Nash de estratégias puras:

[23] A prova geral do teorema de Nash se baseia no uso do teorema de ponto fixo (por exemplo, de Brouwer ou de Kakutani). A grosso modo, estes teoremas de ponto fixo afirmam que para um conjunto compacto S e um mapa $f : S \to S$ que satisfazem várias condições, o mapa tem um ponto fixo, isto é, que $f(p) = p$ para algum $p \in S$. A prova do Teorema de Nash, em seguida mostra que a "melhor resposta do mapa" satisfaz as condições necessárias para que ele tenha um ponto fixo. Uma demonstração detalhada pode ser encontrada em [8].

- se $\alpha \geq \mu$ e $\beta \geq \lambda$ então (S, E) é um equilíbrio de Nash de estratégias puras;
- se $\mu \geq \alpha$ e $\sigma \geq \varphi$ então (I, E) é um equilíbrio de Nash de estratégias puras.
- se $\gamma \geq \tau$ e $\lambda \geq \beta$ então (S, D) é um equilíbrio de Nash de estratégias puras;
- se $\tau \geq \gamma$ e $\varphi \geq \sigma$ então (I, D) é um equilíbrio de Nash de estratégias puras;

2. Quando não há equilíbrio de Nash em estratégias puras usaremos o Teorema das Igualdades de Recompensas (Teorema 3.2).

   Seja $N(J) = (\delta^*1, \delta^*1), \delta^*1 = (p, 1-p)$ e $\delta^*2 = (q, 1-q)$, então:

   $u_1(S, \delta_2^*) = u_1(I, \delta_2^*) \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow q.\alpha + (1-q).\gamma = q.\mu + (1-q).\tau \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow q = \frac{\tau-\gamma}{\alpha-\mu+\tau-\gamma}$

   e

   $u_2(\delta_1^*, E) = u_2(\delta_1^*, D) \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow p.\beta + (1-p).\sigma = p.\lambda + (1-p).\varphi \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow p = \frac{\varphi-\sigma}{\beta-\lambda+\varphi-\sigma}$

   Observe que $0 < p, q < 1$.

Capítulo 4

Experiências de Campo

Sugestão: 1. *Atividade para Introduzir a Teoria dos Jogos*

Passar Vídeo disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1123 Aqui você pode baixar o vídeo e o seu respectivo Guia do Professor com alguns aprofundamentos de conteúdo e sugestões de atividades que podem ser utilizadas antes ou depois a exibição do vídeo.

Conteúdos: *TEORIA DOS JOGOS*

Objetivos: *Apresentar conceitos básicos e classificação da Teoria dos Jogos*

Autores

CONTEUDO: Ernesto Kemp

ROTEIRO: Marta Nehring

GUIA: Luiz Antonio Mesquiari

Revisores

CONTEUDO: Margarida Mello, Samuel Rocha de Oliveira

ROTEIRO: Frederico Gualberto de Souza, Sarah Yakhni

GUIA: José Plinio de Oliveira Santos

GRAFICOS: Raphael Garcia

4.1 Jogo das Notas e dois tipos de jogadores

Experimento 4.1. *Foi apresentado a alunos do ensino fundamental, o Jogo das notas com os Resultados de acordo a escolha feita, e foi lhes perguntado qual seria sua estratégia e o porquê. Selecionamos dois diferentes alunos com perfis distintos:*

- ***Lorenzo - 6ºano do Ensino Fundamental**: Escolho β pois se meu amigo escolher β, nós dois ficamos com $B+$.*
- ***Rebecca - 9º ano do Ensino Fundamental**: Escolho α pois terei chance de receber um A.*

Motivos diferentes levaram a escolhas diferentes, obviamente não foi pensado estrategicamente em como obter o resultado esperado mas, podemos perceber que os resultados tem diferentes retornos para esses alunos.

Lorenzo tem pensamento altruísta, quer receber uma boa nota mas se preocupa com a nota do outro jogador, ele enxerga este jogo como um jogo de cooperação.

Já Rebecca se preocupou em maximizar sua nota, quer ter nota A e sabe que sua chance de receber A passa pela estratégia de escolher α.

A experiência acima mostra duas possibilidades de perfis que caracterizam dois tipos de jogadores. Do ponto de vista de seus objetivos, o resultado do jogo pode ter diferentes recompensas.

4.2 A Batalha de Bismarck e a tomada de decisão da rota de ataque.

Experimento 4.2. *A BATALHA DO MAR DE BISMARCK*

Em dezembro 1942 o Japão decidiu transferir um substancial reforço, da China e do Japão, para Nova Guiné. O comboio japonês dispunha de duas rotas para alcançar seu destino:

- *A rota sul, que normalmente tinha tempo bom e boa visibilidade.*
- *A rota norte, frequentemente com tempo ruim e péssima visibilidade.*

As forças aliadas tinham aviões para pesquisar uma rota por vez, isto é, levava um dia inteiro de buscas em qualquer das rotas de modo que se a busca fosse mal sucedida os aliados perderiam um dia de ataque. Caso obtivesse sucesso no primeiro dia de busca, os aliados conseguiriam 3 dias de bombardeiros na rota sul ou 2 dias de bombardeiro na rota norte. Dadas estas premissas qual foi a escolha do comandante das tropas aliadas e qual a rota escolhida pelo comboio do Japão?

A história acima foi contada a um grupo de 6 alunos, com ajuda de mapas e globos. Em seguida os alunos foram divididos em duas equipes que representariam respectivamente os aliados e os japoneses.

Como objetivo principal para cada equipe foi discutido que os japoneses deveriam evitar o maior número de dias de bombardeio e os aliados deveriam tentar acertar a rota correta para ganhar um dia de ataque.

As duas equipes chegaram a mesma conclusão, a que a melhor rota deveria ser a rota norte, tanto para o Japão, quanto para os aliados.

Para os japoneses a rota norte era a melhor das escolhas caso os aliados escolhessem o sul e era uma opção tão boa quanto a rota sul se os aliados escolhessem o norte. Dentre os argumentos apresentados pelos alunos que representavam os japoneses, destacamos que no máximo levariam 2 dias de bombardeio. Já os alunos que representavam os aliados, argumentaram, entre outros, que se buscassem inicialmente pela rota Norte garantiriam pelo menos dois dias de ataques. Os argumentos dos alunos foi muito próximo da critério de minmax ou maxmin [1].

Em seguida os alunos foram orientados a construírem uma tabela com as informações dos dias dos bombardeios (basicamente uma matriz de recompensas e a partira dela foi discutido como analisar metodicamente as respostas ou soluções do problema.

[1] Desenvolvido originalmente por John von Neumann, consiste no fato de cada jogador quer maximizar seu ganho mínimo ou equivalentemente minimizar sua perda máxima esperada

4.3 Jogo da Escolha e a Deleção Iterativa de Estratégias Dominadas

Experimento 4.3. *Jogo da Escolha*

Solicitado a um grupo de pessoas que escolhessem um número entre 1 e 100, ganharia o aluno que escolhesse o número mais próximo de metade da média. A recompensa seria 1 para o ganhador (ou para dividir entre os ganhadores, em caso de empate) e 0 para os demais.

Foram pesquisadas 62 pessoas e de acordo suas justificativas foram divididas em 3 grupos:

1. *Grupo 1 - pessoas que fizeram escolhas aleatórias*
2. *Grupo 2 - pessoas que utilizaram a informação matemática para de algum modo fazer sua escolha*
3. *Grupo 3 - pessoas que utilizaram a informação matemática e o raciocínio estratégico.*

As seguintes observações foram tiradas deste experimento:

- *45 pessoas deram respostas aleatórias como número de sorte e data importante. 72,58% não utilizaram nenhuma racionalidade, a média entre os números escolhidos por esse grupo foi 32,06.*
- *12 pessoas (19,35% dos entrevistados) tentaram utilizar algum raciocínio matemático na escolha do número. A média desse grupo foi 30,37.*
- *5 pessoas (8,06% dos entrevistados) fizeram suas escolhas baseadas em raciocínio estratégico. A média das escolhas deste grupo foi 16,4.*
- *A média geral foi 30,47 e ganhador escolheu o número 15, que foi o mais próximo da metade da média.*

4.4 O Dilema do Prisioneiro

Experimento 4.4. *O Dilema do Prisioneiro entre alunos do ensino fundamental.*

Foi contado contado o exemplo 3.1 a um grupo de alunos e em seguida foram separados em duplas. Depois disso as duplas foram separadas e tinham que tomar a decisão de denunciar ou de se calar, conforme sugerido no exemplo. Abaixo alguns resultados:

- *Dupla 1: Geovanna e Ithaniely.*
  Geovanna: - Não denuncio. Somos unidas e isso seria melhor pras duas.
  Ithaniely: - Não denuncio. Não é justo a outra pagar sozinha.

- *Dupla 2: Caio e Denis.*
  Geovanna: - Confesso. É melhor confessar que mentir.
  Ithaniely: - Confesso. Ou estou livre ou me ferro.

- *Dupla 3: Julia e Thais.*
  Julia: - Denuncio. Tenho chance de sair livre.
  Thais: - Denuncio. Não quero ficar muito tempo presa.

- *Dupla 4: Camile e Vinicius Silva.*
  Camile: - Denuncio. (...risos...) Quero sair livre.
  Vinicius Silva: - Não denuncio. Eu pensei nos dois.

- *Dupla 5: Jeferson e Vinicius Darisi.*
  Jeferson: - Não confesso. Confio no Vinícius.
  Vinicius Darisi: - Denuncio. É sempre a melhor opção.

Depois de passado o resultado aos alunos e refeito o processo, as duplas onde um delatou o parceiro houve mudança de comportamento, levando aos dois delatarem.

4.5 Respostas de exercícios

Exercício 2.1: As meninas mudam seu voto no primeiro turno para futebol, desse modo, ao preterirem sua primeira opção, garantem que ao menos sua segunda opção vença.

Capítulo 5

Considerações finais

O conhecimento humano cresce através da observação do mundo e da geração de abstrações do mesmo, isto, geralmente, se dá construindo modelos, sejam eles modelos mentais ou definidos através de algum tipo de linguagem, para representar e analisar os problemas. Naturalmente qualquer que seja a linguagem[1] adotada requer algum tipo de formalismo que seja simples e claro o suficiente para representar o problema. Neste sentido as linguagens naturais as vezes apresentam ambiguidade ou imprecisão podem tornar as observações inadequadas ou errôneas. A construção de modelos matemáticos naturalmente têm um rigor formal maior e caracterizam-se por uma precisão semântica.

Neste aspecto este trabalho é caracterizado por uma utilização um tanto quanto exagerada da linguagem verbal seguida pela formulação, curta e simples, matemática. A contraposição entre as duas linguagens deixa claro o poder que a segunda tem em ser concisa e objetiva.

A teoria dos jogos é a aplicação da **lógica matemática** no processo de tomada de decisões nos jogos, utilizada, na economia, na política, na guerra e caracterizadas, como nos jogos, por conflitos de interesse determinando a melhor estratégia para cada jogador. O desafio é tornar esta teoria uma auxiliadora no desenvolvimento do raciocínio lógico e do pensamento estratégico para alunos da educação básica.

Os jogos de tabuleiros, dados, cartas, os jogos de salão, entre outros, divertem a humanidade desde a formação das primeiras civilizações, por colocarem as pessoas em situações nas quais vencer ou perder, competir ou colaborar, dependem das escolhas feitas no início das partidas, de modo que o jogo se tornou uma ferramenta para o desenvolvimento das pessoas. Em especial, a teoria dos jogos coloca situações

[1] Linguagem é o sistema através do qual o homem comunica suas ideias e sentimentos, seja através da fala, da escrita ou de outros signos convencionais.

novas, reais ou não, como jogos, despertando o interesse de um estudo sistematizado onde coloca a matemática como uma ferramenta de análise das interações humanas.A teoria dos jogos é um tema da matemática aplicada.

Referências Bibliográficas

[1] FIANI, Ronaldo. **Teoria dos Jogos**. *Com Aplicações em Economia, Administração e Ciências Sociais.* 3 ed. Rio de Janeiro: CAMPUS 2009

[2] WEBB, James N. **Game Theory**. *Decisions, Interaction and Evolution.* New York, USA: SPRINGER, 2007

[3] WATSON, Joel. **Strategy**. *An Introduction to Game Theory.* 3 ed. California, USA: NORTON 2013.

[4] BARRICHELO, Fernando. **A Ciência da Estratégia**. *Insights da Teoria dos Jogos para Competir e Colaborar.* Disponível em: <http://www.cienciadaestrategia.com.br/teoriadosjogos/capitulo.asp?cap=i2> Acesso em 20 de fevereiro de 2014.

[5] RIBEIRO, Flávia D. **Jogos e Modelagem na Educação Matemática**. São Paulo: SARAIVA 2009

[6] POLAK, Ben. **Curso: Teoria dos Jogos e Estratégia**.*Vídeo aulas da Universidade de Yale.* Disponível em: <http://http://www.veduca.com.br/play/4873> Acesso em 10 de abril de 2014.

[7] KESEN, Levent Koc. **Curso: An Introduction to Game Theory-ECON 333**.*Notas de Aula.* Disponível em Levent Koçkesen's Web Page: <http://home.ku.edu.tr/ lkockesen/teaching.html> Acesso em 20 de maio de 2014.

[8] FUDENBERG, D. TIROLE, J. **Game Theory**. *The MIT Press.* CAMBRIDGE: 2013.

[9] NEUMANN, John Von. MORGENSTERN, Oskar. **Theory of Games and Economic Behavior**. 3 ed. Princeton University Press, USA: PRINCETON 1953.

Índice Remissivo

ação, 13
agentes, 12

Comportamento estratégico, 26
conhecimento comum sobre a racionalidade, 50

dilema dos prisioneiros, 34

equilíbrio de Nash, 60
espaço de estratégia, 14
estratégia, 13
estritamente dominante, 42

forma estratégica, 19, 37
forma extensiva, 19
forma normal, 19, 37
fracamente dominante, 42
função recompensa, 30

informações, 15

jogadores, 12
jogos, 12
  estáticos, 34
jogos de informação completa, 50

matriz de recompensa, 20
matriz de resultado, 20
melhor resposta, 62

perfil de estratégia pura, 14

recompensa, 15
resultados, 15

satisfeito, 32
situação, 14

Teorema de Nash, 67

utilidade, 30

vetor de recompensa, 31