UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
Curso de Pós-Graduação em Matemática

Dissertação de Mestrado

FABRICIO CARDOSO MAIMONE

A IMPORTÂNCIA DA FORMALIZAÇÃO MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES NO ENSINO MÉDIO

SANTO ANDRÉ
2014

Curso de Pós-Graduação em Matemática

Dissertação de Mestrado

FABRICIO CARDOSO MAIMONE

A IMPORTÂNCIA DA FORMALIZAÇÃO MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES NO ENSINO MÉDIO

Trabalho apresentado como requesito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, sob orientação do Professor Doutor André Ricardo Oliveira da Fonseca.

SANTO ANDRÉ

2014

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Rua Abolição, s/nº – Vila São Pedro – Santo André – SP
CEP 09210-180 · Fone: (11) 4996-0017
profmat@ufabc.edu.br

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Fabricio Cardoso Maimone, realizada em 27 de agosto de 2014:

André Fonseca

Prof.(a) Dr.(a) **André Ricardo Oliveira da Fonseca** (UFABC) – Presidente

Faleiros

Prof.(a) Dr.(a) **Antonio Cândido Faleiros** (UFABC) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Paulo Henrique Trentin** (FEI) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Rafael de Mattos Grisi** (UFABC) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Birajara Soares Machado** (INCE-IIEP) – Membro Suplente

Declaração de atendimento às observações

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com anuência de seu orientador.

Santo André, _____ de _________________________ 2014.

Assinatura do autor: ____

Assinatura do orientador: ____

RESUMO

Este trabalho busca chamar a atenção para a necessidade do uso da formalização matemática como etapa a se cumprir na aprendizagem do conceito de função para o Ensino Médio, sendo este o principal objetivo. O problema da pesquisa constitui-se em: qual a necessidade do ensino ser contextualizado e a relevância da evolução histórica de conceitos, culminando na necessidade do uso da formalização matemática para o ensino de funções. Este estudo fundamenta-se em BOYER (1974), FIORENTIN (1994), SCHREINER (2004), MACIEL (2011), CARAÇA (1951), LOBEIRO (2000), LIMA (2005, 2006, 2012), FERREIRA (2013), COSTA (1971), DAVIS (1986). Esta pesquisa tem caráter qualitativo e utiliza como instrumentos: **questionários** para seis voluntários, sendo metade deles oriundos de escola pública ainda cursando o 2º ano do Ensino Médio e os demais, de escola privada e já cursando o 1º semestre do Ensino Superior. **Aula direcionada** baseada nos dados colhidos a partir dos questionários e como última etapa do processo, **enquete** sobre o reconhecimento da importância da formalização matemática. Os resultados apontam para uma preocupação com a qualidade das aulas ministradas sobre funções, de maneira que a formalização deva ser trabalhada de modo consistente, equilibrada, e principalmente, provida de significado ao educando. Em síntese o ponto inicial para o sucesso é uma alfabetização matemática de qualidade, promovendo situações de desafios e estímulos que facilitem o uso de abstrações. Sendo fundamental a qualificação e aperfeiçoamento dos professores de todos os níveis de ensino.

Palavras-chave: Formalização – Função – Saber matemático – Contextualização – Evolução de conceitos – Alfabetização matemática

ABSTRACT

This work seeks to call attention to the need of the use of the mathematical formalization as a phase to go through the learning of the concept of function for secondary school (High School), being this its main goal. The problem of the research lies in: what the need of the contextualized teaching is and the relevance of the historical evolution of concepts, culminating on the need of the use of the mathematical formalization for the teaching of functions. This study is based on BOYER (1974), FIORENTINI (1974), SCHREINER (2004), MACIEL (2011), CARAÇA (1951), LOBEIRO (2000), LIMA (2005, 2006, 2012), FERREIRA (2013), COSTA (1971), DAVIS (1986). This research has a qualitative character and utilizes as instruments: questions for six volunteers, being half of them public school still coursing the 2^{nd} year of High School and the others, from private school and already in the first semester of college or university. Directed class based on the data picked from the questions and as the last phase in the process, a survey about the acknowledgement of the importance of the mathematical formalization. The results point to a concern with the quality of the classes ministrated on functions, so that the formalization should be worked in a consistent, balanced way, and mainly provided with the meaning to the learner. Summing up, the start to success is a qualified mathematical literacy, promoting situations of challenges and stimuli which facilitate the use of abstractions. Being fundamental the qualificaon and perfectioning of teachers in all levels of teaching.

Key-words: Formalization – Function – Mathematical – Knowledge – Contextualization – Evolution of concepts – Mathematical Literacy

Dedico este trabalho a meus pais que muito contribuíram para minha formação, em especial à minha mãe por todo incentivo incondicional oferecido à minha pessoa.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente à Deus, que sempre está presente, mesmo nos momentos mais difíceis.

À minha mãe, pelo incentivo e dedicação dispensada.

Ao Professor Doutor André Ricardo Oliveira da Fonseca, pela orientação e contribuição em minha formação durante o curso e, principalmente pelo incentivo oferecido.

À Direção da U.M.E. Padre Manoel da Nóbrega, pela compreensão e ajuda nos momentos mais turbulentos.

Ao Professor Mestre Ronaldo Penna Saraiva, pelo incentivo, colaboração e compreensão nos momentos difíceis.

Ao Professor Especialista Antônio Tadeu Frutuoso Amado, Professor Mestre José Xavier Batista e Professor Celso Marcellini pelo incentivo e colaboração.

Às pessoas que foram voluntárias na pesquisa e colegas de mestrado.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

INTRODUÇÃO

O Brasil, nos últimos anos, tem sido alvo de muitas críticas no que se refere à qualidade de ensino, em particular o ensino de matemática. Isso tem levado muitos pesquisadores a desenvolverem trabalhos na área de educação matemática, que de modo geral priorizam o ensino da mesma por meio de contextualizações, bem como destacam a importância da história da matemática, a fim de consolidar os temas a serem estudados, conforme mencionado em trecho abaixo:

> Dentre os argumentos utilizados para justificar a importância da história para a educação matemática busca-se ao mesmo tempo refletir e responder como utilizar pedagogicamente a história da matemática. Para tanto, segundo MENDES et al. (2006), é necessário primeiramente discutir-se a função da história na construção da matemática, considerando-a como princípio unificador entre os aspectos cotidiano, escolar e científico da matemática como também as possibilidades de conexão entre a história e a matemática produzida.(ROCHA ,2008, p.48)

Mas em sua grande maioria, mencionam o processo pedagógico de ensino, em que trazem para a discussão metodologias e estratégias que facilitem o aprendizado da matemática propriamente dita, ou de determinado tema da mesma. Dentre tais recursos, os mais citados são os softwares educacionais voltados para o ensino de matemática, o que Siqueira (2013) argumenta com propriedade sobre tal importância no ensino de funções para alunos do Ensino Médio em que utilizou o software Geogebra em sua pesquisa:

> Portanto, a “Elaboração de atividades de ensino de funções utilizando recursos computacionais no Ensino Médio” poderá colaborar de forma significativa no processo ensino aprendizagem, minimizado as dificuldades apontadas, enriquecendo a dinâmica das aulas, estimulando o aluno a (re) descobrir o conceito de funções, em que os alunos possam perceber as correspondências, as transformações, as dependências (uma grandeza em função de outra) e os resultados dos movimentos das curvas descritas em cada função. (SIQUEIRA, 2013, p.20)

Outra linha pedagógica para o ensino de matemática se refere à investigação matemática, isto é, fazer com que os alunos investiguem os assuntos a serem abordados sob orientação e mediação de seu professor, em que Santos (2002) destaca a ideia de que *"aprender matemática deve consistir, essencialmente, em fazer Matemática."*, afirmando além disso:

> De facto, a actividade de investigação permite proporcionar aos alunos uma experiência matemática significativa envolvendo a realização de experiências iniciais com o objetivo de clarificar o foco da investigação, a formulação, o teste e a reformulação de conjecturas, e a procura de argumentos que possam validar as conjecturas que resistiram a sucessivos testes. (p.20)

Contrapondo-se a tudo o que foi exposto até aqui, temos os noticiários de jornais e artigos publicados em sites renomados que chamam à atenção para algumas estatísticas, como fica evidenciado por Gonzatto (2012) ao afirmar:

> **Por que 89% dos estudantes chegam ao final do Ensino Médio sem aprender matemática?** Relatório De Olho nas Metas 2011 aponta precariedade do ensino de matemática no Brasil.

Em sua reportagem ao jornal Zero Hora do Rio Grande do Sul, Gonzatto (2012), menciona a 57ª posição que o Brasil se encontra no ranking mundial de aprendizagem de matemática em uma lista de 65 países contemplados pelo Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa), de modo que resume toda problemática na seguinte fórmula:

> Aulas pouco dinâmicas + alunos pouco motivados + professores com formação deficiente = resultados pífios do ensino de matemática no Brasil. Essa fórmula, que contém elementos bastante conhecidos pela comunidade escolar, por gestores e especialistas em educação, continua a ser reproduzida diariamente nas salas de aula de colégios em todo o país.

Outro agravante também apontado em noticiários faz menção ao fato de um comprometimento da qualidade de ensino de matemática no nível médio devido à deficiência do ensino em nível fundamental, conforme Takahashi (2013) menciona em sua reportagem à Folha de São Paulo de título: "*Rendimento dos alunos de matemática piora entre o 5º e o 9º ano"* e que para o momento destacam-se dois trechos*:*

> O percentual de estudantes com nível adequado em matemática na rede pública do país cai ao longo dos anos do ensino fundamental, mostra estudos que comparou a evolução de alunos entre 2007 e 2011).

> Ou seja, 88% deles não sabiam calcular porcentagens ou a área de uma figura plana ou mesmo ler informações em um gráfico de colunas. E levam essas defasagens para o ensino médio e superior.

Mais recentemente, em reportagem do Jornal Nacional de 03/12/2013, fomos mais uma vez alvo de notícia com a seguinte manchete:

> Brasil melhora a qualidade do ensino de matemática: Apesar do resultado positivo, o Brasil ainda ocupa as últimas colocações na principal avaliação internacional sobre o desempenho de alunos, feita pela Organização de Cooperação para o Desenvolvimento Econômico.

Ainda desta reportagem há de se ressaltar outros pontos também importantes:

> [...] Matemática foi a área em que o Brasil mais melhorou desde 2003. Mesmo assim, o país está na posição 58, atrás do Chile, Uruguai e de países pobres como o Cazaquistão. Isso significa que os adolescentes sabem apenas somar, subtrair, multiplicar e dividir. Não conseguem calcular médias, porcentagens ou probabilidades [...]
>
> [...] Por exemplo, formação de professores. É uma das políticas mais fundamentais. A gente precisa ter professores preparados pra realmente garantir que todos os seus alunos aprendam", explica Priscila Cruz, dir. exec. Mov. Todos pela Educação. [...]

As questões pedagógicas voltadas à prática de ensino, metodologias e estratégias no que diz respeito ao ensino de matemática já são bastante difundidas em nosso País.

Este estudo não é algo recente e se mistura a própria evolução do processo ensino-aprendizagem de matemática e também com o surgimento de pesquisas na área de educação matemática. Isto fica muito evidente na tese de doutorado de Fiorentini (1994), em que realizou um trabalho sobre os rumos da pesquisa brasileira em educação matemática, analisando mais de 200 estudos/pesquisas das décadas de 70 e 80 e que para o momento destaca-se o seguinte trecho:

> Até 1982, foram produzidas/defendidas 80 dissertações ou teses de mestrado e doutorado, envolvendo basicamente quatro focos temáticos:
> (1) estudo, desenvolvimento e testagem/validação de "novos" métodos/técnicas de ensino e de materiais instrucionais ou de propostas metodológicas "inovadoras" de ensino de matemática;
> (2) estudos exploratórias/descritivos do currículo escolar e/ou do processo ensino/aprendizagem da matemática;
> (3) estudos de natureza psicológica e/ou cognitiva; e
> (4) projetos/programas de formação de professor de matemática.

> Como vimos no capítulo 4, o problema mais comum perseguido por esses estudos dizia respeito ao fracasso escolar no ensino da matemática." (FIORENTINI,1994, p.284)

Mais especificamente, um dos conteúdos de matemática que se traduzem numa problemática no que diz respeito ao seu entendimento é o estudo de funções no Ensino Médio. Também se tratando de um tema relevante para os dias atuais, devido às suas várias aplicações em diversas áreas do conhecimento, bem como proporcionar o avanço do desenvolvimento do conhecimento científico, a proposta deste trabalho é discutir sobre a importância da formalização para o aprendizado de funções no Ensino Médio e, indiretamente, também comentar sobre os benefícios que tal formalização pode trazer para o ensino básico de maneira geral.

Porém, para se desenvolver tal investigação, deve-se antes, discutir metodologias usadas no ensino da matemática, de modo que é necessário que um professor tenha um "certo saber" em sua formação, que aqui será denominado como "*o saber para ensinar",* pois entende-se que sem este saber não se tem sentido fazer discussões sobre: *o quê, para quê e como ensinar,* fato este que Druck (2003), em artigo à Folha de São Paulo de 25 de março de 2003, compactua da seguinte ideia:

> Nos últimos 30 anos, implementou-se no Brasil a política da supervalorização de métodos pedagógicos em detrimento do conteúdo matemático na formação dos professores. Comprovamos, agora, os efeitos danosos dessa política sobre boa parte dos nossos professores. Sem entender o conteúdo do que lecionam, procuram facilitar o aprendizado utilizando técnicas pedagógicas e modismos de mérito questionável.

Esta preocupação não se trata de um pensamento isolado, uma vez que outros autores já investigam acerca da linguagem matemática que os professores utilizam em sala de aula no ensino da mesma, o que pode ser constatado na seguinte fala:

> No caso do ensino da Matemática, muitos pontos críticos e "ruídos" têm sido detectados na comunicação entre alunos e professores, nas salas de aula. Um destes pontos pode residir nos tipos de exemplos e analogias que os professores têm usado em sua linguagem, para proporcionar aos alunos maior compreensão de conceitos específicos em Matemática, de uma maneira que isso pode estar gerando visões limitadas ou distorcidas destes conceitos. (ZUFFI, 2000, p.8)

Ressalta-se desde já, que este trabalho não trata de mais uma metodologia para o ensino de matemática e sim, falar sobre o que se entende como ser o essencial para a formação de novos conceitos matemáticos por parte dos alunos, ou seja, saber fazer uso da escrita matemática na construção do conhecimento, uma vez, que a matemática possui sua linguagem própria, que valoriza clareza de ideias, conforme será explicitado no transcorrer deste.

Sendo assim, este trabalho tem como objetivo geral:

- “Ressaltar a importância da formalização da escrita matemática para o ensino de funções no Ensino Médio”

E, por objetivos específicos:

- Fazer uma discussão da maneira como ocorre a formalização da escrita matemática nos ensinos fundamental e médio;
- Avaliar as vantagens que tal formalização proporciona na formação dos alunos, bem como da sociedade científica.

Salientamos que este trabalho está organizado em seis capítulos, de modo que no primeiro será apresentada uma discussão do formalismo, bem como pontos de vistas (positivos e negativos) de autores diversos, sobre o assunto. O segundo capítulo aborda uma compreensão sobre o tema funções, mediante uma breve discussão de sua evolução histórica, no sentido de entender a matemática como um conhecimento historicamente em construção. O terceiro capítulo trata da construção dos conjuntos numéricos, em que se destaca o raciocínio axiomático e o princípio de extensão dos conjuntos numéricos. O quarto capítulo trata das vantagens da formalização, em termos de simplicidade de escrita para compreensão da evolução dos conceitos matemáticos, fazendo-se discussão sobre conjuntos e funções, destacando a importância de certos teoremas referentes às funções contínuas. No capítulo cinco será discutida a metodologia deste trabalho constando de suas diferentes etapas de realização, bem como justificativas para as mesmas. O sexto e último capítulo, tratará dos resultados alcançados durante a realização da pesquisa e ao final da mesma, com as devidas discussões sobre os resultados obtidos nos questionários investigativos.

1. FORMALISMO É NECESSÁRIO?

Um dos pontos de maior discussão sobre a educação no mundo se refere ao ensino de matemática. No Brasil, qualquer cidadão que seja minimamente “ciente” no que diz respeito ao ensino saberá expressar rapidamente sua opinião sobre o ensino de matemática em nosso País.

Este inconformismo, mais do que a condição de cidadão consciente, parte da vivência profissional em que nos encontramos inserido. Neste trabalho não se pretende fazer discussão sobre políticas educacionais, salvo quando for muito necessário. Pelo contrário, a ideia é discutir o ensino da matemática objetivando dois focos: o professor e o aluno, mais particularmente, a relação entre o ensinar e o aprender.

Neste sentido, será destacada a “qualidade do ensino de matemática” somente na perspectiva do “ensinar e aprender”, sabendo que para isso é primordial que o professor possua o saber, que denominaremos de “saber matemático”.

A construção deste saber matemático se inicia muito antes do ingresso no ensino superior, pois um estudante quando ingressa na universidade já passou por 12 anos de pré-requisitos matemáticos. E como a progressiva decadência da qualidade de ensino da Matemática já atinge a própria Licenciatura, temos um círculo vicioso por completo, em que a má formação dos professores traz sérias consequências ao ensino da Matemática em nosso País.(DRUCK, 2004).

Desse modo, a afirmativa de Davis (1986) ao escrever sobre: “*Quanta Matemática se Conhece Hoje?”* chama a atenção:

> A mesma afirmativa não seria feita hoje. No fim da década dos 40, John Von Neumann estimou que um matemático hábil poderia saber, essencialmente, dez por cento do que estava disponível. Há um dito popular de que o conhecimento sempre se adiciona, nunca subtrai [...] A matemática cresce a partir dela própria; é agregativa. (p.43)

Neste sentido, outro ponto de possível discussão é o fato de que, segundo Druck (2004), não basta melhorar o nível das licenciaturas, uma vez que existe um enorme contingente de “professores mal formados” e atuantes no ensino básico, mas sugere como tentativa de solução a criação de um projeto nacional para a Matemática.

É evidente que todos ganhariam com tal proposta e assim, estaria assegurada aos alunos a compreensão dos conhecimentos matemáticos a fim de serem aplicados na sociedade de maneira eficaz. E conhecimento produz conhecimento, como fica evidenciado na maneira como Davis (1986) vê a matemática:

> A matemática é frequentemente imaginada como uma árvore poderosa com suas raízes, tronco, galhos e brotos assinalados com os nomes de certas subdisciplinas. É uma árvore que cresce com o tempo.(p.44)

Observa-se na citação acima que o autor entende a matemática como uma função no momento em que a compara com uma árvore que cresce com o tempo. Neste sentido, precisamos apenas garantir que isso de fato ocorra, de modo que nossos alunos tenham compreensão de que os conhecimentos matemáticos sejam de fato uma função crescente, contínua e preferencialmente ilimitada, não permitindo em nenhuma hipótese a morte desta “árvore”.

Desta maneira não se pode deixar de destacar mais uma vez a importância do tema função para a sociedade em que vivemos, o que também fica evidenciado conforme citação abaixo:

> A escolha das “funções”, mostrou-se bastante fértil, não apenas pelas várias possibilidades de notação simbólica existentes para este conceito, mas também pelos aspectos singulares de sua gênese na História da Matemática, e pela relevância científica e social que a ele se atribui. (ZUFFI, 2000, p.10)

Sendo assim, entende-se mais uma vez o objetivo principal a que este trabalho se propõe, ou seja, ressaltar a importância da formalização matemática para o ensino de funções no Ensino Médio.

Este tema também é mostrado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Médio, que menciona a preocupação com a maneira como os conteúdos são apresentados, não podendo, portanto, ser feito de forma fragmentada, mesmo que seja feito de forma completa e aprofundada.

Souza (2006), afirma que um dos grandes desafios é o de tornar a matemática mais interessante de modo que seja mais próxima da realidade dos alunos. Em seus trabalhos, o conceito de função é colocado como um dos mais importantes, uma vez que é o instrumento para o estudo das leis matemáticas. Destacam ainda a necessidade de se fazer alterações que vão desde políticas governamentais até o cotidiano das salas de aula, a fim de obter tal objetivo.

Tão importante quanto o conhecimento das aplicações de função nos dias atuais é a realização de uma discussão voltada para a grande dificuldade que os alunos possuem em “aprender” este conceito. E sem redundância, explicita-se desde já, que a palavra aprender foi colocada entre aspas a fim de enfatizar o sentido de aprendizado com compreensão do conceito e não apenas usá-lo mediante um raciocínio mecanizado, preocupação esta que Garbi (2009) também compartilha ao afirmar:

> Eu ainda insisti sobre o absurdo que é fazer jovens, que têm plena capacidade de entender a Matemática dedutiva, apenas decorarem “leis” com as quais resolvem problemas, embora desconhecendo os raciocínios que as justificam. Mas foi em vão. (p.2) (...)
>
> Lamento ter que externar minha opinião com palavras fortes, mas aqui estamos diante de um quadro grave de ‘hipocrisia pedagógica’, algo análogo ao que fazem certas pessoas que, após uma refeição exagerada, pedem o café com adoçante. (p.3)

Mediante tais preocupações, muitos estudos têm sido realizados na linha de pesquisa sobre o ensino e aprendizagem da matemática do ensino básico, diferindo um do outro, por especificidade de algum conceito, ou por metodologias e estratégias de ensino aplicadas, etc., conforme fica evidenciado em:

> Há, entretanto, diferentes modos de conceber e ver a questão do ensino da Matemática. Alguns podem relacioná-la ao nível de rigor e formalização dos conteúdos matemáticos trabalhados na escola. Outros, ao emprego de técnicas de ensino e ao controle do processo ensino/aprendizagem com o propósito de reduzir as reprovações. Há ainda aqueles que a relacionam ao uso de uma matemática ligada ao cotidiano ou à realidade do aluno. Ou aqueles que colocam a Educação Matemática a serviço da formação da cidadania. (FIORENTINI, 1995, p.2)

Souza (2006), por exemplo, enfatiza o uso de computadores como ferramenta educacional em sala de aula sob a justificativa de que os alunos devem ter acesso a essas novas tecnologias, principalmente para explorar novos conceitos e sob vários enfoques. E como facilitadores, os softwares gráficos produzem, em segundos, esboços de gráficos de funções, oferecendo maior escolha das funções a serem trabalhadas e superando limitações do cálculo e de desenhos feitos à mão livre.

Porém, em complemento ao que já foi exposto, segundo Druck (2004), acredita-se que estamos diante de uma carência de subsídios teóricos adequados, em que Cálculos diversos, teoremas básicos e axiomas devem ser muito bem conhecidos por quem se propõe a utilizar a Matemática corretamente, ressaltando ainda:

> É preciso entender que, assim como é necessário saber conjugar verbos e construir frases para se comunicar, também é imperioso dominar as estruturas próprias da Matemática para usá-las de forma útil e nas situações pertinentes.

Neste sentido, Garbi (2009) enfatiza a necessidade da reintrodução de doses equilibradas de demonstrações no ensino da Matemática.

Para Ávila (1993), na década de sessenta, a reforma do ensino de matemática, que veio a culminar na Matemática Moderna, originou novas dificuldades para se aprender matemática. Segundo o autor, a reforma trouxe inovações desastrosas, dentre estas, ressalta o excesso de simbolismo e linguagem de conjuntos que mais atrapalham do que ajudam o aluno em seu esforço de aprendizagem, porém considera que a linguagem e o simbolismo de matemática sejam um mal necessário ao afirmar:

> A Matemática, em particular, depende muito de sua linguagem e simbolismo específicos. Mas é também a linguagem e o simbolismo próprios da Matemática que a fazem tão inacessível, principalmente ao leigo, mesmo ao "leigo erudito". Assim, podemos dizer, em certo sentido, que a linguagem e o simbolismo da Matemática são um "mal necessário". (ÁVILA,1993, p.2)

Sendo assim, presume-se que o segredo esteja na dosagem do uso dessa linguagem e simbolismo, já que são úteis e indispensáveis enquanto ajudam na transmissão e na agilização das ideias, que para Ávila (1993) é o objetivo de todo ensino, não apenas o de matemática.

Outra ideia adotada no ensino básico a fim de melhorar a qualidade do ensino de matemática é a “contextualização”. Esta ideia, segundo Garbi (2009) possui seu valor, uma vez que sua diretriz pedagógica associa exemplos da vida prática aos vários campos da Matemática elementar que é ensinada aos jovens. Porém, também considera que essa mesma contextualização passou dos limites do razoável em nosso País, tornando-se algo obsessivo e, não raramente, ridículo.

Para Garbi (2009) os contextualizadores compulsivos, devem ser lembrados de que:

> - A matemática, embora tenha incontáveis aplicações práticas, é uma ciência abstrata, ou seja, seus objetos de estudos lógico-dedutivos são imateriais.
> - Embora seja possível, em muitos casos, associar (com admirável sucesso) os objetos da Matemática a entes encontráveis no mundo físico, muita coisa importante da Rainha das Ciências não é ‘contextualizável’ e mesmo assim merece ser estudada. A Teoria dos Números e os Números Complexos, dentre tantos outros, são exemplos flagrantes.
> - A exclusiva apresentação de questões matemáticas “contextualizáveis” restringe sobremaneira o raciocínio dos alunos, dificultando-lhes a aquisição da capacidade de pensar de forma genérica e abstrata, tão importante às pessoas verdadeiramente cultas. (A propósito, conforme noticiado pelo New York Times e comentado pelo O Estado de S. Paulo, há pesquisas indicando que a contextualização em demasia tem inconvenientes, dentre os quais a perda da generalidade).
> - O dogma da contextualização acabou por produzir uma filha nociva, a tese de que só se deve ensinar a Matemática útil aos alunos no ambiente em que vivem. Se os gregos tivessem seguido esse pensamento, não nos teríamos legado a admirável Matemática que criaram porque, à época, pouquíssimo dela era utilizável. Se os grandes gênios não tivessem feito Matemática por puro amor à arte, a civilização estaria muitos séculos atrasada em relação ao que já atingiu. Se a Coreia e a Finlândia do pós-guerra tivessem adotado essa linha de ensino, não estariam hoje na vanguarda tecnológica mundial. (p.4 e 5)

Segundo Lima (2005), deve existir uma preocupação em utilizar o conhecimento matemático que se adquire na escola para interpretar melhor os fatos e as experiências da vida, de modo que a estrutura matemática que se ensina deve ser montada em três pilares: conceituação, manipulação e aplicação, em que este último é a contextualização. Porém ressalta que só se pode aplicar um instrumento matemático a partir do momento em que se entende seu conceito e se sabe operar com ele (manipulação). Sendo assim, não se pode negligenciar o papel fundamental da conceituação, sem o qual ele não será possível saber que instrumento matemático deve ser usado na resolução de um problema.

Neste sentido, a boa contextualização, deve conter justificativa e explicação convincente de que o modelo matemático utilizado é de fato adequado ao problema e dessa forma, contribui para despertar o interesse pela Matemática, mostrando que, não é apenas uma matéria trabalhosa e árida, estando intimamente ligada às nossas vidas. (LIMA, 2005)

Logo, acredita-se que a proposta da contextualização deveria vir ao encontro em se promover uma postura mais crítica e abrangente por parte do educando, postura essa que, segundo Bassanezi (2011), é necessário a procura de uma linguagem adequada que facilite e racionalize o pensamento, lembrando ainda que:

> [...] o objetivo fundamental do "uso" de matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. (p.18)

Desse modo, o ensino de matemática deve propiciar aos educandos condições de raciocínio intelectual de maneira que possibilite a formalização das ideias que estão sendo estudadas.

Com isso, desperta-se o olhar para o estudo de funções, que possui inúmeras aplicações, mas que mesmo, se apresentadas em aulas, precisa-se verificar se estão sendo devidamente contextualizadas, ou seja, se a etapa necessária da conceituação mediante a formalização está sendo cumprida, em que Lima (2005) deixa claro ao afirmar:

> É preciso mostrar aos jovens que os cientistas não são mágicos que tiram da cartola uma fórmula matemática que responde as suas perguntas. No caso, por que a função $y = ba^t$ é um modelo que serve para descrever a eliminação de uma droga no corpo humano melhor, por exemplo, do que $y = at + b$? Sem responder a essa pergunta, a contextualização fica capenga. O aluno aprende a resolver esse problema, mas não será capaz de lidar com situações análogas. (p.32)

Para Ávila (1993), foi a Matemática Moderna quem proporcionou um ensino de funções excessivamente formal, abstrato, longo e afastado das aplicações que podem se constituir em boa motivação. Ele considera ainda que, em razão dos matemáticos profissionais terem levado quase dois séculos para chegarem à definição geral de função, também no ensino os conceitos só devem ser introduzidos à medida que vão sendo solicitados no desenvolvimento dos tópicos ensinados, em que os alunos estejam em condições para apreciar criticamente a importância daquilo que estão aprendendo.

Até agora, pode-se perceber que a raiz do problema do ensino de funções não é o excesso de formalismo e sim, a necessidade dele, de maneira equilibrada na construção do conceito de função, de modo a garantir a evolução do conhecimento científico, o que pode ser observado em:

> A aplicação correta da matemática nas ciências factuais deve aliar de maneira equilibrada a abstração e a formalização, não perdendo de vista a fonte que originou tal processo.
> [...] O reconhecimento de uma teoria científica passou a ter como condição necessária o fato de poder ser expressa em uma linguagem matemática. (BASSANEZI, 2011, p.18-19)

De acordo com que foi exposto até o momento, pôde-se perceber que todas as citações têm uma preocupação única que é a melhoria da qualidade de ensino da matemática. É certo que apresentam caminhos diferentes e do mesmo modo, também é certo afirmarmos que todos se enquadram em algum momento aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio.

O que se pretende, não é fazer juízo das citações apresentadas e sim, oferecer um ponto de vista que talvez esteja sendo negligenciado no que diz respeito ao grau de sua importância para o ensino não apenas de funções, mas também da matemática como um todo.

Em conformidade ao objetivo deste trabalho, já explicitado anteriormente, ressalta-se que a discussão será focada e direcionada para a formalização e que outras ideias com suas respectivas e reconhecidas importâncias não serão desconsideradas, mas entende-se que não sejam pertinentes para o momento fazer tal análise, sendo que seria necessário um estudo mais aprofundado e que buscasse um ponto de equilíbrio e maior respeito entre a matemática pura, a matemática aplicada e a educação matemática, a fim de oferecer uma solução ao aprendizado de vários conceitos da matemática.

Sendo assim, para direcionar tal discussão, algumas ideias serão retiradas dos PCN (Ensino Médio), o que de nenhuma maneira substituirá a compreensão do mesmo quando lido na íntegra. Portando, sugere-se que, para melhor compreensão das argumentações que se seguem, se faça a leitura do mesmo.

O PCN (Ensino Médio) se apresenta como uma proposta que se relaciona às competências indicadas na Base Nacional Comum, que caracteriza o currículo escolar estabelecido a partir da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) de 1996, correspondentes à área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, explicitando as habilidades básicas e competências específicas que os alunos devam desenvolver em cada área no respectivo nível escolar. Busca o desenvolvimento de um trabalho voltado à contextualização e interdisciplinaridade, além é claro, do aprendizado efetivo.

Como já foi mencionado anteriormente, o uso dessa contextualização deve ser feito de forma equilibrada, a fim de se praticar, o que LIMA (2005), intitulou de "*boa contextualização*".

A preocupação no presente estudo está exatamente no aprendizado efetivo do aluno, conforme se constata em trecho do PCN:

> Referenda-se uma visão do Ensino Médio de caráter amplo, de forma que os aspectos e conteúdos tecnológicos associados ao aprendizado científico e matemático sejam parte essencial da formação cidadã de sentido universal e não somente de sentido profissionalizante. (p.4)

Conforme citação acima, percebe-se que o aprendizado efetivo está vinculado ao aprendizado científico e matemático, uma vez que são essenciais para a formação cidadã do aluno. Sendo assim, deve ser oferecido aos alunos condições de continuarem os estudos de maneira a contribuir com a evolução do conhecimento e deste modo, melhorar a sociedade em que vivem, conforme evidenciado em trecho do próprio PCN (Ensino Médio):

> [...] pois a crescente valorização do conhecimento e da capacidade de inovar demanda cidadãos capazes de aprender continuamente, para o que é essencial uma formação geral e não apenas um treinamento específico. (p.6)

Para alcançar tal objetivo, o PCN (Ensino Médio) sugere como ponto de partida para o aprendizado matemático, elementos vivenciais dos educandos, escola e comunidade imediata, o que colaboraria com a obtenção de um significado ao aprendizado e garantiria um diálogo efetivo. A partir daí, seria possível desenvolver conhecimentos de alcance mais universal.

Note que em nossa prática docente não nos encontramos engessados à realidade da comunidade em que atuamos. O próprio PCN sugere esse *algo a mais*, a fim de favorecer a evolução do conhecimento, porém isto deve ser feito de maneira adequada. Com isso, no PCN é ressaltada de maneira indireta, a importância da formalização matemática, conforme pode ser observado no seguinte trecho:

> Contudo, a Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. (p.40-41)

Neste sentido, quando se fala em ressaltar a importância da formalização matemática para o ensino de função, não se sugere a ideia de que se tenha que iniciar este estudo apresentando o conceito de maneira formal pronta e acabada. Isto só mostraria o lado negativo da formalização e colaboraria ainda mais com aversão ao aprendizado de matemática pelos alunos e desse modo compactuando com a seguinte afirmação:

> Nos últimos anos, tem crescido uma reação contra o formalismo. Na pesquisa matemática recente, há um retorno em direção ao concreto e ao aplicável. Nos textos e tratados, há mais respeito por exemplo, menos rigor na exposição formal. A filosofia formalista da matemática é a origem intelectual do estilo formalista no trabalho matemático. Os indícios parecem mostrar que a filosofia formalista poderá em breve perder seu status privilegiado. (DAVIS, 1986, p.386)

Muito pelo contrário, o que se sugere é que esta etapa de convívio com linguagem específica, bem como, com o uso da formalização, também faz parte do processo para a obtenção do aprendizado efetivo citado nos PCN, devendo, portanto ser trabalhado com os alunos. Porém cabe ressaltar, que isto nos levaria à outra discussão, no que se refere a pratica docente e que está diretamente relacionada à formação do professor, assim como suas expectativas e experiências docentes, não cabendo, portanto, fazermos tal discussão neste momento.

Ávila (1985) apresentou dois tipos de preocupações com o formalismo. Uma é a preocupação excessiva com as apresentações formais, que segundo ele, "*obscurece o que há de mais importante na Matemática, que são as ideias*". A outra é a preocupação prematura com o rigor, que *"atropela o desenvolvimento natural do aluno".* Ambas são classificadas pelo mesmo, como sendo um grave erro do ensino.

Neste sentido, percebe-se que o problema em si não se encontra na maneira de formalizar a matemática e sim, na maneira de equilibrar a necessidade e o uso da mesma, o que segundo Ávila (1985):

> O aprendizado é também um processo lento e gradual; ele não ocorre de uma só vez, mas por várias etapas sucessivas, a cada uma das quais se vai consolidando mais e mais. Não pode, pois, o professor, apresentar conceitos e resultado em forma final e acabada, mas deve atentar para esses aspectos do desenvolvimento científico e do mecanismo de aprendizado, para adequar convenientemente suas tarefas de ensino. (p.43)

É, portanto, nessa linha de raciocínio que se enfatiza a importância do aprendizado do conceito de função de maneira significativa para o aluno, uma vez que deve ser parte ativa da sociedade que se encontra inserido. Sendo assim, esse grau de evolução do pensamento matemático, que leva um aluno a fazer abstrações, elaborar conjecturas e, por que não dizer, a desenvolver novos conhecimentos matemáticos, deve ser oferecido e trabalhado de maneira eficaz no ensino, ideias estas que também fazem parte do PCN, conforme segue:

> No Ensino Médio, quando nas ciências torna-se essencial uma construção abstrata mais elaborada, os instrumentos matemáticos são especialmente importantes. Mas não é só nesse sentido que a Matemática é fundamental. Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, freqüências e quantas outras variáveis houver. A Matemática ciência, com seus processos de construção e validação de conceitos e argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são

> característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações. As formas de pensar dessa ciência possibilitam ir além da descrição da realidade e da elaboração de modelos. (p.9)

Então, investigações precisam ser feitas nessa linha de pesquisa, a fim de verificar se a formalização está sendo trabalhada de maneira adequada, de modo a tornar o aluno capaz de desenvolver pensamentos científicos da realidade, de serem pessoas autônomas motivadas pelo processo de investigação e que tenham confiança suficiente em si mesmos para desenvolverem tais tarefas, o que fica bastante evidenciado no caráter formativo da matemática apresentado no PCN conforme trecho abaixo:

> A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. (p.40)

Além desse papel formativo, também é mencionado no PCN, o caráter instrumental da matemática no Ensino Médio, então encarado como um *“conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional”*. Tal ideia consiste em tornar os alunos capazes de fazer uso de estratégias a fim de desenvolver a iniciativa e a segurança para adaptá-las a diferentes contextos, ou seja, presume-se o desenvolvimento de uma percepção por parte dos alunos em saber o momento oportuno para se fazer uso adequado de determinado conhecimento, ideia esta, que já fora mencionada anteriormente por Lima (2005) ao falar da contextualização.

Outro aspecto essencial para se desenvolver essa capacidade nos alunos no Ensino Médio é ter a qualificação necessária para tais fins quando os mesmos terminam o Ensino Fundamental. Talvez, essa etapa não esteja sendo cumprida devidamente, ocasionando o comprometimento do aprendizado de funções no Ensino Médio. De acordo com o PCN (Ensino Médio), ao se concluir o Ensino Fundamental, os alunos já deveriam ter se aproximado dos mais variados campos do conhecimento matemático, a fim de estarem preparados para utilizá-los e ampliá-los, desenvolvendo assim de maneira mais ampla, as abstrações, investigações, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade, cabendo, portanto, ao Ensino Médio levar o aluno a conhecer novas informações e instrumentos necessários para a continuação de seu aprendizado, tornando-o assim um ser autônomo com capacidade de realizar pesquisa, conforme segue:

> Saber aprender é a condição básica para prosseguir aperfeiçoando-se ao longo da vida. Sem dúvida, cabe a todas as áreas do Ensino Médio auxiliar no desenvolvimento da autonomia e da capacidade de pesquisa, para que cada aluno possa confiar em seu próprio conhecimento. (PCN, p.41)

A obtenção de tal nível de aprendizado, de acordo com o PCN (Ensino Médio) é um processo lento e trabalhoso, que culmina no domínio de um *saber fazer Matemática* e de um *saber pensar matemático*, apresentando em uma de suas etapas de construção, a formalização do conceito matemático, conforme descrito abaixo:

> Esse domínio passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões, a capacidade de argumentação, elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento. (PCN, p.41-42)

E neste aspecto, nos vemos inseridos em um processo de ensinar aos alunos o “saber pensar matemático”. Como já mencionado anteriormente, para a obtenção deste saber, é essencial para o professor, o “saber matemático”, ou seja, é necessário que o professor tenha domínio dos conceitos a que se propõe ensinar. Porém, note que este saber (saber matemático) do professor é necessário, mas não é suficiente para a obtenção do primeiro. Em igualdade de importância, é fundamental ao professor outro saber, o “saber ensinar”, de modo que recaímos em outra discussão, voltada à atividade comunicacional, que segundo Habermas (1987, p.33) apud Tardif (2005, p. 248):

> envolve a interação entre, ao menos dois sujeitos capazes de falar e agir que iniciam uma relação interpessoal (seja por meios verbais ou não verbais). Os agentes buscam um entendimento sobre uma determinada situação, para estabelecer consensualmente seus planos de ação e, consequentemente, suas ações. O conceito central de interpretação diz respeito, antes de tudo, à negociação de definições para as situações suscetíveis de um consenso. Nesse modelo de ação, a linguagem ocupa um lugar proeminente.

Sendo assim, o professor tem uma missão em mãos, que a de fazer com que seus alunos adquiram significados daquilo que lhes é ensinado, de modo que, por ensinar, se entende:

> [...] ensinar não é, tanto, fazer alguma coisa, mas fazer com alguém alguma coisa significativa: o sentido que perpassa e se permuta em classe, as significações comunicadas, reconhecidas e partilhadas, são, assim, o meio de interação pedagógica. (TARDIF, 2005, p. 249)

Paralelamente ao que foi exposto, temos o dever de ensinar conceitos muitas vezes abstratos para os alunos e, que segundo Soares (1995), "*quanto mais abstrato é o conceito em questão maior a probabilidade de imprecisão. Como consequência, o entendimento do que é dito ou escrito é dificultado". Neste sentido, Soares (1995), ainda menciona, que por meio da formalização é possível evitar as incertezas que procedem da ambiguidade, de maneira a conseguir mais precisão e rigor, mediante seu uso, o que justifica a importância da formalização para o ensino e quando comparada às ideias intuitivas, comenta:

> [...] é possível dizer que as ideias intuitivas formam a etapa inicial do raciocínio. Nesse sentido, devem ser valorizadas. No entanto é fundamental estar atento para o fato de que, numa primeira etapa, as ideias intuitivas devem ser submetidas ao processo de formalização, que é o caminho para se decidir sobre o grau de veracidade da intuição, dentro do contexto em que ela é considerada. (...) Desse modo, a formalização, mesmo parecendo apenas um jogo, enquanto age de acordo com determinadas regras, é um bom método para desvendar as intuições. (p. 70)

A necessidade da formalização matemática, mais especificamente ao que é proposto neste trabalho, para o ensino de funções, também pode ser observada no PCN, quando são mencionados os objetivos das finalidades do ensino de matemática no ensino médio:

> As finalidades do ensino de Matemática no nível médio indicam como objetivos levar o aluno a:

> • compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
> • aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
> • analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
> • desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
> • utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
> • expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
> • estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
> • reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
> • promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.(p.42)

Sendo assim, o tema *funções* é citado no PCN como um exemplo clássico em que se pode trabalhar a contextualização e interdisciplinaridade, pois permite fazer conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático e que, além de sua relevância cultural ainda é destacada sua importância histórica para o desenvolvimento da ciência. Nesse sentido, a capacidade do aluno para se comunicar matematicamente é fundamental, presumindo-se portanto, ser essencial a formalização como etapa em seu processo de formação, conforme segue em trecho retirado do PCN:

> O currículo do Ensino Médio deve garantir também espaço para que os alunos possam estender e aprofundar seus conhecimentos sobre números e álgebra, mas não isoladamente de outros conceitos, nem em separado dos problemas e da perspectiva sócio-histórica que está na origem desses temas. Estes conteúdos estão diretamente relacionados ao desenvolvimento de habilidades que dizem respeito à resolução de problemas, à apropriação da linguagem simbólica, à validação de argumentos, à descrição de modelos e à capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real. (p.44)

Ao que tudo indica, a dificuldade de se ensinar matemática e em particular, as funções, não é o uso do formalismo e, sim a prática que está sendo realizada para tal fim. Neste sentido, é fundamental que o educador busque um equilíbrio entre a formalização, contextualização e interdisciplinaridade.

Segundo essa linha de pensamento, a formalização pode estar sendo colocada em segundo plano ou simplesmente não sendo trabalhada de forma efetiva e/ou, a contextualização esteja sendo oferecida de maneira distorcida. Nesse sentido, o aluno perde no momento em que sai da escola com visões distorcidas da matemática, sem compreensão dos conteúdos e deste modo não podendo contribuir com o avanço do conhecimento científico e, o que talvez seja a situação mais triste, é o fato de saírem da escola sem ter a noção daquilo que perderam ou daquilo que não foi oferecido.

Presume-se, portanto, que para se fazer esta correção, muitos investimentos devem ser feitos para melhor qualificar os professores, conforme fica explicitada tal necessidade no PCN, quando se fala sobre a democratização do conhecimento científico na década de 70, em que ocorreu um crescimento da parcela da população atendida pela rede escolar:

> Esse crescimento, especialmente no tocante ao Ensino Médio, não foi acompanhado pela necessária formação docente, resultando assim em acentuada carência de professores qualificados, carência que só tem se agravado até a atualidade. (p.47-48)

Cabe ressaltar que, em igualdade de importância ao que já foi apresentado e discutido, no PCN também é destacada a necessidade de mudanças na própria escola para que se promova um desenvolvimento científico e pedagógico mais eficaz, que possibilite a formação de novas atitudes nos alunos e na comunidade, evitando assim a superficialidade e o empobrecimento cognitivo.

Também não se pode desconsiderar a possibilidade do ensino de funções estar sendo oferecido mediante simples constatações e verificações através de processos mecânicos, mesmo que se utilize recursos tecnológicos que facilitem estas assimilações, onde se ressalta mais uma vez a importância do objetivo deste trabalho.

É evidente que tais metodologias fazem parte do processo de construção do conhecimento de funções, mas percebe-se que também se faz necessária, a discussão sobre a consistência matemática, que é a responsável em dar a fundamentação teórica e que vem a proporcionar a possibilidade de abstração do educando, bem como a aplicabilidade do conceito aprendido a outras situações parecidas.

Neste sentido, é passível de entendimento uma breve discussão sobre as origens do formalismo, que segundo Davis (1986), provém como uma resposta ao destronamento da geometria euclidiana, em que nesta, para Euclides, os axiomas não eram hipóteses e sim, "verdades evidentes por si próprias". E é da rejeição à essas verdades evidentes que surge a visão formalista.

Neste sentido, Davis (1986) ressalta o mito de Euclides, em que é definido como uma *"crença de que os livros de Euclides contêm verdades sobre o universo, claras e indubitáveis",* de modo que Euclides, a partir de verdades evidentes e procedendo por demonstrações rigorosas, chegava a conhecimento certo, objetivo e eterno e que, a maior parte das pessoas com instrução acredita neste mito.

Para Barker (1969), a investigação da consistência fez com que David Hilbert (1862-1943) criasse um método que passou a ser conhecido como Metamatemática. Nesse método encara-se o sistema de um modo integralmente formalizado, em que se dá atenção apenas ao arranjo de cadeias de sinais que constituem os teoremas do sistema e negligencia-se por completo, o significado de qualquer dos sinais e a verdade daquilo que, eventualmente, poderiam querer dizer.

Para tanto, segundo Barker (1969), para descrever tal sistema formalizado, inicialmente é preciso especificar as "regras de formação" do sistema, isto é, as regras que determinam que combinações de sinais serão permissíveis e constituirão as fórmulas bem formadas do sistema. Algumas destas fórmulas devem ser os teoremas e para bem caracterizá-los, também é necessário especificar quais dessas fórmulas bem formadas serão os axiomas, sendo também preciso especificar as "regras de transformação" que o sistema possui, ou seja, que regras existem para obter, a partir das fórmulas de que se dispõe, novas fórmulas.

Hilbert e outros matemáticos e lógicos da época esperavam que fosse possível, com o tempo, apresentar cada ramo da Matemática na forma de um sistema axiomático, que se revelaria consistente e completo. Porém, tal atitude foi derrubada por Gödel em 1931, que empregou uma engenhosa cadeia de raciocínios metamatemáticos, demonstrando que a consistência é incompatível com a complementação, nos sistemas de maior importância. (BARKER, 1969)

Descendente do formalismo de Hilbert surge o formalismo contemporâneo, que define a matemática como a ciência das demonstrações rigorosas, em que o matemático deve partir de alguns termos não definidos, bem como algumas afirmativas não definidas sobre estes termos, chamando a estas de “hipóteses” ou “axiomas”.

Segundo Davis (1986), a matemática não é vista como uma ciência, pois não tem objeto de estudo. É vista como uma linguagem própria para outras ciências. Para Barker (1969), a Matemática pode ser considerada apenas um jogo em que as peças não tem significado, mas com enorme utilidade para as ciências, de modo que esse jogo de sinais sem significado possui grande valor para a Física, a Engenharia e outras disciplinas.

Neste sentido, Davis (1986), de maneira bastante simples e didática define formalização como sendo “*o processo de adaptar a matemática ao processamento mecânico”*, exemplificando do seguinte modo:

> Um programa de computador é um exemplo de um texto formalizado. A fim de programar um computador para manter atualizada sua conta bancária, você deve conhecer o vocabulário do sistema de programas do computador. Você deverá conhecer as regras gramaticais do sistema de programas do computador. [...] Em verdade, acredita-se que qualquer texto matemático pode ser formalizado no contexto de uma única linguagem formal. Esta linguagem é a linguagem da teoria formal dos conjuntos. (p.167)

Desse modo, um sistema formalizado é importante para a ciência quando nos permite a deduzir enunciados empíricos de outros enunciados empíricos, justificando-se assim, a relevância da discussão deste trabalho.

2. EVOLUÇÃO HISTÓRICA DO CONCEITO DE FUNÇÃO

O desenvolvimento da ciência é decorrente de inúmeros experimentos, que muitas vezes não deram certo, mas que serviram como ponto de partida para próximas descobertas. Além disso, o que tomamos como verdade na atualidade, mediante uma definição ou teoria, pode vir a se tornar algo equivocado em sua parcialidade ou mesmo em sua totalidade, bastando para isso, um estudo mais detalhado que derrube o conceito anterior. É dessa forma que se desenvolve a matemática e que, na maioria das vezes, este processo de evolução envolvendo sucessos e fracassos não se torna conhecido pelos discentes ou passa de forma despercebida no ensino.

Neste sentido, para a compreensão dos conceitos matemáticos, faz-se necessária a discussão da evolução dos mesmos no contexto histórico, bem como justificar a necessidade de tal estudo na atualidade.

Quanto à necessidade, o estudo de funções é bastante abrangente, de modo que é aplicado em diferentes áreas do conhecimento. Por exemplo: o processo de decisão do melhor investimento a se fazer numa operação financeira, estudar o movimento de corpos em relação ao tempo, analisar o crescimento populacional no mundo, entre outros. Por esta razão, tem sido tema de grande interesse de pesquisa, principalmente no que se refere ao processo ensino-aprendizagem.

De modo curioso e que se pode imaginar não ser do conhecimento de muitos, as funções auxiliam até em estimativas de produção de leite de vacas, como descrito abaixo:

> Os objetivos deste trabalho foram identificar as funções matemáticas que melhor se ajustam à produção de leite de vacas da raça Guzerá, avaliar os efeitos dos fatores de ambiente sobre a forma da curva de lactação e estimar parâmetros genéticos para a produção de leite e para os componentes responsáveis pela forma da curva de lactação. [...] Os modelos $y = a.n.e^{-cn}$, $y = a - cn + \ln(n)$, $y = a - cn$ e $y = a.e^{-cn}$ foram os que melhor se ajustaram à curva de lactação das vacas. (COBUCI, 2000, p.1332)

Há de se ressaltar, que em nível educacional, muitos discentes não fazem qualquer relação do conceito de função com tais aplicações no cotidiano, ou seja, o ensino da mesma, talvez esteja sendo feito de forma estática e não dinâmica, o que a própria ideia de função sugere enquanto conceito, como afirmativa: "*Considero esta concepção estática como sendo um dos obstáculos à construção do conceito dinâmico de função.*" (SCHREINER, 2004, p.2)

No âmbito da evolução histórica, será abordado o desenvolvimento do conceito até a obtenção de sua formalização matemática, que possui uma linguagem própria e passível de compreensão no Ensino Médio, desde que os discentes sejam e os docentes estejam devidamente preparados para tal. Sendo assim, ressalta-se desde já, a importância da formalização da escrita matemática para o ensino de funções no Ensino Médio, principal objetivo deste trabalho.

Segundo Schreiner (2004), suas aulas ficaram mais interessantes e participativas quando passou a focá-las na história e na modelagem do estudo das funções para desenvolver o pensamento variacional, o que, segundo ele, ainda não foi suficiente para a compreensão do conceito de função, ressaltando a importância da linguagem matemática com sua representação simbólica e sua leitura, intitulada pelo mesmo, de alfabetização funcional, como o próprio afirma:

> Destaco acima dois instrumentos imprescindíveis na construção do conceito de função: o pensamento variacional desenvolvido através da construção de modelos mentais de funções e a alfabetização funcional desenvolvida através da representação simbólica do pensamento variacional com sua leitura. Estes dois instrumentos, quando não forem desenvolvidos pelos alunos, certamente serão um obstáculo à construção do conceito de função. (p.3)

Segundo Silva (1999), o conceito de função de caráter mais geral e formal data do ano de 1939. No entanto, aspectos muitos simples deste conceito podem ser encontrados em épocas anteriores, como é o caso da operação de contagem, uma das primeiras descobertas do homem, que por necessidade, passou a fazer o controle de seu rebanho através de uma associação entre quantidade de pedras e quantidade de animais, longe é claro de qualquer conceito matemático formalizado. Tal raciocínio mostra uma primeira ideia intuitiva de função, onde fica caracterizada uma relação de dependência e, portanto, de relação funcional. Ideia esta de associação que Boyer (1974) ressalta ao abordar as origens primitivas:

> Quando os dedos humanos eram inadequados, podiam ser usados montes de pedras para representar uma correspondência com os elementos de um outro conjunto. Quando o homem primitivo usava tal método de representação, ele frequentemente amontoava as pedras em grupos de cinco, pois(...) (p.2)

No período da Idade Média, Nicole Oresme (1323-1382) desenvolveu a teoria de “latitude de formas”, o que hoje seria considerada como a representação gráfica de uma função, conforme Boyer descreve abaixo sobre o tal feito de Oresme:

> Ao longo de uma reta horizontal ele marcou pontos representando instantes de tempo (ou longitudes), e para cada instante ele traçou perpendicularmente à reta de longitudes um segmento de reta (latitude) cujo comprimento representava a velocidade. As extremidades desses segmentos ele percebeu, jazem ao longo de uma reta; e se o movimento uniformemente acelerado parte do repouso, a totalidade do segmento velocidade (que chamamos ordenadas) preencherá um triângulo retângulo. Como a área desse triângulo retângulo representa a distância percorrida, Oresme forneceu assim uma verificação geométrica da regra de Merton, pois a velocidade do ponto médio no intervalo de tempo é a metade da velocidade final. (p.192-193)

Convém ressaltar que, segundo Boyer (1974), o que foi acima mencionado leva à lei de movimento usualmente atribuída a Galileu no século XVII. Observemos ainda, que os termos latitude e longitude utilizados por Oresme são equivalentes às nossas ordenada e abscissa, e sua representação gráfica assemelha-se com nossa geometria analítica.

Porém, o que de fato caracterizou a evolução do conhecimento, culminando na definição de função que hoje conhecemos foi a constante busca do homem pela compreensão dos fenômenos naturais que regem o universo. Com isso, o conceito de funções se tornou o instrumento próprio para o estudo das leis naturais, conforme afirmativa:

> Esse conceito tem aplicações em várias áreas do conhecimento, mas foi nas ciências naturais que teve origem, pois ele é o instrumento próprio para o estudo das leis naturais. É pelo estudo dessas leis que o homem pode dominar melhor os fenômenos naturais e defender-se ou aproveitar-se deles conforme sua necessidade. (SILVA, 1999, p.29)

Segundo Caraça (1951), essas leis naturais podem ser de dois tipos: lei qualitativa e lei quantitativa. A primeira diz respeito à variação de qualidade, ou seja, que é inerente ao objeto estudado. A segunda, diz respeito à variação de quantidade, em que tudo pode ser comparado ou medido.

Surge assim uma tendência ao quantitativo, de maneira tal que o estado propriamente científico de cada ramo do conhecimento só começa quando nele se introduz *a medida* e o estudo da variação quantitativa como explicação da evolução qualitativa.

A partir do Renascimento, um novo rumo foi dado à construção do conhecimento científico, em que se priorizou a observação e experimentação dos fenômenos naturais na tentativa de medi-los e explicá-los por variações de quantidade. Deste modo, surgem as leis quantitativas, como por exemplo, a lei da gravitação de Newton. E paralelamente, nesta busca por regularidades, inicia-se a gênese do instrumento matemático capaz de codificar tais leis.

No século XVI, François Viéte (1540-1603), fez contribuições à aritmética, álgebra, trigonometria, e geometria, mas segundo Boyer (1974), foi à álgebra que Viéte deu suas mais importantes contribuições e que chegou mais perto das ideias modernas, em que fez distinção clara entre o importante conceito de parâmetro e a ideia de uma quantidade desconhecida, conforme afirma:

> Aqui Viéte introduziu uma convenção tão simples quanto fecunda. Usou uma vogal para representar, em álgebra, uma quantidade suposta desconhecida, ou indeterminada, e uma consoante para representar uma grandeza ou número supostos conhecidos ou dados. Aqui encontramos, pela primeira vez na álgebra, uma distinção clara entre o importante conceito de parâmetro e a ideia de uma quantidade desconhecida. (p.223)

Ainda neste mesmo século, Galileu Galilei (1564-1642) despertou o interesse em entender como os fenômenos ocorriam, principalmente o movimento, fato este constatado em :

> Porém Galileu organizou as ideias de Oresme e deu-lhes uma precisão matemática que lhes faltava. Entre as contribuições novas de Galileu à dinâmica estava sua analise do movimento dos projéteis numa componente horizontal uniforme e uma componente vertical uniformemente acelerada. Pode assim mostrar que a trajetória de um projétil, desprezando a resistência do ar, é uma parábola. (BOYER, 1974, p. 239)

E, mesmo sem ter formalizado explicitamente a palavra função, segundo Kline, 1972, p. 338, apud Mendes,1994, p. 22, apud Sá, 2003, p.5, foi o estudo do movimento que originou o conceito de uma função ou de uma relação entre variáveis.

Desse modo Galileu iniciou uma nova abordagem para a Física, em que buscava a observação, a quantificação e o estabelecimento de relações entre grandezas envolvidas nos fenômenos. Daí, segundo Silva (1999), o conceito de função foi então introduzido como o instrumento necessário para o estudo da nova realidade da ciência.

Já no século XVII, pode-se destacar René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665). O primeiro, segundo Boyer (1974), teve como sua principal contribuição à matemática, a fundação da geometria analítica, mediante uma tentativa de voltar ao passado, já que, apesar de sua filosofia e ciência ser considerada quase revolucionária em sua ruptura com o passado, sua matemática tinha fortes elos com a tradição anterior, de maneira em que se destaca:

> A matemática cresce por acreções, com pouca necessidade de descartar irrelevâncias, ao passo que a ciência cresce em grande parte por substituições quando coisas melhores são encontradas. (BOYER, 1974, p.246)

Foi René Descartes quem escreveu a obra *La géométrie*, que levou a geometria analítica o conhecimento de seus contemporâneos, obra esta, que para Boyer (1974), foi o auge da álgebra formal:

> Descartes ia mais longe em sua álgebra simbólica, e na interpretação geométrica da álgebra, do que qualquer de seus predecessores. “A álgebra formal vinha progredindo desde a Renascença, e encontrou seu auge na La géométrie de Descartes, o texto matemático mais antigo que um estudante de hoje possa seguir sem encontrar dificuldades com a notação. (p.247-248)

Porém convém ressaltar que, segundo Boyer (1974), embora a teoria das funções viesse a tirar grande proveito da obra de Descartes, a noção de forma ou função não teve papel aparente no desenvolvimento da geometria cartesiana, isso por que, não há nada na forma de Descartes pensar que indicasse ter percebido qualquer semelhança entre a finalidade da latitude de formas e sua própria classificação das construções geométricas.

Paralelamente, Fermat que não era matemático profissional, mas se dedicava à literatura clássica da mesma por prazer, usou esse tempo para a restauração de obras perdidas da antiguidade com base em informação encontrada nos tratados clássicos preservados. Um de seus esforços, citado por Boyer (1974) foi a descoberta, não anterior a 1636, do princípio fundamental da geometria analítica:

> Sempre que numa equação final encontram-se duas incógnitas, temos um lugar, a extremidade de uma delas descrevendo uma linha, reta ou curva. (p.253)

Tal enunciado, segundo Boyer (1974), data de um ano antes do aparecimento da Geometria de Descartes e, assim como para este, o uso de coordenadas não veio de considerações práticas, nem da representação gráfica medieval de funções, e sim, da aplicação da álgebra de Renascença a problemas geométricos da antiguidade.

No século XVIII, destacam-se Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1727). Segundo Botelho (2007), a primeira contribuição de Newton para o desenvolvimento do conceito de função, foi seu trabalho com séries infinitas, em que verificou que a análise de séries infinitas possuía tanta consistência quanto a álgebra aplicada a quantidades finitas. E com seu interesse nos problemas de física, desenvolveu ideias que atualmente utilizamos ao estudar funções, como por exemplo: variável e taxa de variação, conforme segue mencionado:

> As séries infinitas não seriam mais consideradas instrumentos de aproximação, mas uma outra maneira de escrever as funções que representavam. A primeira publicação, em 1687, envolvendo suas idéias sobre o Cálculo foi Princípios Matemáticos da Filosofia Natural. Apesar de não ser uma obra estritamente matemática, segundo Kline (1990), o que Newton desenvolveu no Cálculo foi em grade parte motivado pelo seu interesse nos problemas de física tratados neste livro. Em três obras escritas anteriormente e que seriam publicadas apenas no século XVIII, Newton já havia iniciado o desenvolvimento do cálculo: Análise através de Equações com um Número Infinito de Termos, escrita em 1669, O Método de Fluxões e Séries Infinitas, escrita em 1671, e Quadratura de Curvas, em 1676. Na primeira obra, Newton mostrou que a área sob uma curva poderia ser determinada pelo processo inverso do cálculo da taxa de variação. Apesar de a validade deste resultado ter sido observada anteriormente, Newton foi o primeiro que percebeu sua generalidade. O Método dos Fluxões foi aplicado a variáveis (fluentes) para o cálculo da taxa de variação (fluxos). O que chamamos hoje de

> expressão algébrica de uma função era para Newton a relação entre os fluentes.(BOTELHO, 2007, p.69-70)

Leibniz, assim como Newton, também forneceu grande contribuição para o cálculo. Sá (2003) ressalta que a análise infinitesimal desenvolvida até então tinha como principal objetivo o estudo das curvas geométricas, e que Newton e Leibniz não visavam, exatamente às funções, de modo que os problemas que deram origem ao cálculo eram geométricos e cinemáticos.

Segundo Botelho (2007), uma das primeiras notas de Leibniz mostrava uma forma de relacionar somas e diferenças entre termos de uma sequência, que veio a ser a base para o estabelecimento de seu *Calculus Summatorius* ou *Calculus Integralis* e o *Calculus Differentiallis*, expressões estas, criadas por Leibniz. Boyer (1974) discorre em vários momentos em suas notas sobre a facilidade que Leibniz possuía em desenvolver escritas matemáticas adequadas a cada nova situação, o que se pode perceber em duas afirmações que seguem:

> Leibniz sempre teve uma percepção aguda da importância de boas notações como ajuda ao pensamento, e sua escolha no caso do cálculo foi particularmente feliz. (p.295)
> Leibniz, na verdade, foi um dos maiores formadores de notação, inferior apenas a Euler nesse ponto. (p.297)

Boyer (1974) ainda comenta que Leibniz não fora o responsável pela moderna notação de função, mas é a ele que se deve a palavra “função”, no mesmo sentido em que é usada hoje. Segundo Botelho (2007), Leibniz foi quem utilizou pela primeira vez a palavra “função” a fim de indicar quantidades que variavam ao longo de uma curva, em que cita a tangente como exemplo.

Segundo Kliner (1989) apud Botelho (2007), o interesse em curvas fez com que matemáticos voltassem sua atenção para os símbolos que apareciam nas fórmulas e equações. Independente das curvas originais que estas equações representavam.

Mendes (1994, p. 27), apud Sá (2003) destaca que James Gregory, em Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura (1667), conceituou função sem utilizar a palavra propriamente dita:

> Nós chamamos uma quantidade x composta de outras quantidades a, b,... se x resulta de a, b,... pelas quatro operações elementares, por extração de raízes ou por qualquer outra operação imaginável. (SÁ, 2003, p.6)

Outro matemático que colaborou com a história do conceito das funções foi Jean Bernoulli (1667-1748). Fato interessante, que segundo Boyer (1974), além de ser discípulo de Leibniz, provinha de uma família de matemáticos, a maior de todas na história da matemática.

Jean Bernoulli, segundo Silva (1999), foi quem chegou na notação *fx*, notação mais próxima da moderna. Ainda se destacou, pois usava expressões analíticas que envolvia apenas uma variável para identificar funções, de modo que para Bernoulli, função era uma única expressão analítica, não podendo ser representada por duas expressões analíticas distintas. Silva (1999) cita a maneira como Bernoulli definia função: (...) função duma grandeza variável a uma quantidade composta de qualquer maneira dessa grandeza variável e de constantes.(p.30)

Desta definição, Botelho (2007) observa o conceito de função como combinação de símbolos algébricos.

Em continuidade à presente pesquisa histórica sobre o conceito de função pode-se destacar considerável importância a Leonhard Euler (1707-1783), que foi aluno de Jean Bernoulli. Segundo Boyer (1974), Euler foi o construtor de notação mais bem sucedido de todos os tempos, não sendo nenhum outro indivíduo tão grandemente responsável pela forma da matemática de nível universtitário atualmente utilizada, destacando como a mais importante, o símbolo f(x) para uma função de x:

> ... a notação f(x) para uma função de x (usada nos Comentários de Petersburgo para 1734-1735) são outras notações de Euler aparentadas às nossas. Nossas notações são hoje assim mais por causa de Euler do que de qualquer outro matemático. (BOYER,1974, p.326)

Segundo Boyer (1974), Euler foi quem a partir do cálculo diferencial e do método dos fluxos deu origem à "análise", ramo mais geral da matemática, em que se faz estudo de processos infinitos. Em seu tratado "*Introductio in analysin infinitorum"*, no quarto parágrafo, define função de uma quantidade variável como *“qualquer expressão analítica formada daquela quantidade variável e de números ou quantidades constantes”.*

Observa-se que na definição de função dada por Euler aparece o termo *“expressões analíticas”.* Embora Euler não tenha definido *“expressão analítica”*, Boyer (1974) menciona que Euler tinha em mente funções algébricas e as funções transcendentes elementares (exponenciais, logarítmicas e trigonométricas). Em seu tratado Introductio in Analysin Infinitorum, em 1748, deu um tratamento estritamente analítico das funções trigonométricas, em que, o seno, por exemplo, já não era simplesmente um segmento de reta, mas um número ou uma razão:

$$senx = \frac{e^{\sqrt{-1}x} - e^{-\sqrt{-1}x}}{2\sqrt{-1}}$$

Do ponto de vista da evolução, segundo Silva (1999), percebe-se que Euler ao definir função através de expressões analíticas, trabalhou com fórmulas e relações entre elas.

Segundo Vazquez, Rey e Boubée (2008) apud Maciel (2011), Euler enfrentava outro problema:

> se cada função possui uma curva para representá-la, então toda curva pode ser representada por uma função, ele também faz distinção entre função contínua e descontínua que teriam significados diferentes dos de hoje. Aquela seria representada por uma equação, enquanto esta seria composta por mais de uma expressão, mas com um único gráfico. (MACIEL, 2011, p.15)

Outro problema que surgiu e que muito colaborou neste processo de evolução do conceito de função foi o problema das cordas vibrantes. Tal problema, segundo Correia (1999) apud Maciel (2011), consistia em:

> Uma corda elástica é presa em dois pontos A e B a uma distância l um do outro. Considera-se o referencial cartesiano em que A é a origem, AB é o eixo Ox e a linha perpendicular a AB por A é o eixo Oy. A corda assume sua posição de equilíbrio ao longodo eixo Ox. Se desloca a corda da sua posição inicial, ela inicia um movimento vibratório, em virtude das tensões que se exercem em seus pontos.Considera-se que esse movimento consiste de pequenas oscilações, ou seja, que os pontos da corda sofrem pequenos desvios da sua posição inicial. Podemos, portanto admitir que, durante o movimento, cada ponto P da corda permanece na mesma recta vertical, perpendicular ao eixo Ox, isto é, tem abscissa x constante (resumidamente, podemos dizer que as oscilações são transversais).
>
> Também podemos supor que a força de tensão é idêntica em cada ponto da corda. Pretende-se encontrar uma equação que represente o movimento ondulatório da corda, sendo o deslocamento y de cada ponto uma função da abscissa x e do tempo l; de seguida,

> resolver a equação de modo a encontrar explicitamente uma expressão para y. (MACIEL, 2011, p.15 e 16)

Ainda segundo Correia (1999) apud Maciel (2011), este problema veio a reformular o conceito de função, sendo a idéia de que uma função poderia ser pensada como uma expressão analítica definida por uma série de potências era bem restrita na resolução de problemas de matemática aplicada do conceito como dependência funcional.

Para Botelho (2007), tal problema gerou longo debate sobre o conceito de função envolvendo Euler, d'Alembert, Daniel Bernoulli e Lagrange, culminando em importantes consequências, de modo que segundo Kliner (1989) apud Botelho (2007):

> O conceito foi estendido de modo a abranger:
> a) Funções definidas por expressões analíticas diferentes em diferentes intervalos.
> b) Funções desenhadas a mão livre e que, possivelmente, não eram dadas por combinações de símbolos algébricos. (p.71)

Segundo Boyer (1974), toda motivação da obra Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) sobre função era não tornar o cálculo mais utilitário, e sim mais logicamente satisfatório. Em sua obra Théorie des Functions Analytiques (1797), Lagrange define função do seguinte modo:

> Chama-se função de uma ou de várias quantidades a toda expressão de cálculo na qual essas quantidades entrem de alguma maneira, combinadas ou não com outras quantidades cujos os valores são dados e invariáveis, enquanto que as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis. Assim, nas funções são consideradas apenas as quantidades assumidas como variáveis e não as constantes que aparecem combinadas a elas.
> (MENDES 1994, p. 37 apud SÁ 2003, p.).

E mais tarde, de acordo com Sá (2003), Lagrange aprimora o conceito na sua obra Lecons sur le calcul des fuctions (1806):

> Funções representavam diferentes operações que deviam ser realizadas em quantidades conhecidas para obterem-se valores de quantidades desconhecidas, e estas quantidades desconhecidas eram, propriamente, o último resultado do cálculo. (MENDES,1994, p.37).

A partir de então, muitos matemáticos buscaram modelos explicativos variados, já que, até o momento, não havia uma formalização para o conceito de função e, nem tão pouco, um consenso. (MACIEL , 2011)

Neste contexto, Ponte (1992) apud Maciel (2011) ressalta a importância do trabalho de Joseph Fourier (1768-1830) sobre a propagação de calor, uma vez que considerou a temperatura como uma função de duas variáveis.

Em 1822, Fourier publica *Théorie analytique de la chaleur*, que segundo BOYER (1974), tal livro fora descrito por Kelvin como "um grande poema matemático". Nesta obra, segundo SÁ (2003), Fourier afirmou que qualquer função poderia ser expressa por uma série trigonométrica da seguinte forma:

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty}\left[a_n.\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n.sen\frac{n\pi x}{l}\right]$, onde:

$$a_n = \frac{1}{l}.\int_{-l}^{l} f(t).\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt$$

$$bn = \frac{1}{l}.\int_{-l}^{l} f(t).sen\frac{n\pi t}{l}\,dt$$

Segue abaixo a definição de função dada por Fourier:

> Acima de tudo deve ser destacado que a função f(x), para a qual esta prova se aplica, é inteiramente arbitrária, e não sujeita a uma lei de continuidade...Em geral, a função f(x) representa uma sucessão de valores que são dados à abscissa x, e existe um número igual de ordenadas f(x)... Nós não supomos estas ordenadas sujeitas a uma lei comum; elas se sucedem de qualquer maneira que seja, e cada uma delas é dada como se fosse uma quantidade única. (MENDES,1994, p.40, apud SÁ, 2003).

Segundo Ávila (1985) apud SÁ (2003), os argumentos de Fourier não foram convincentes na prova de tal possibilidade, devido a utilização de procedimentos formais cuja justificativa rigorosa era de todo impossível na época.

Em Sá (2003) é mencionado que, em decorrência do emprego descontrolado da intuição e do formalismo do século anterior fez-se necessário um exame das bases da análise, a fim de dar fundamentação à mesma, o que veio a culminar em estudos sobre noção de limite, continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade, para que estas fossem cuidadosamente definidas.

Neste processo de busca pela fundamentação das bases da análise, eis que se destaca um padre tcheco com nome de Bernhard Bolzano (1781-1848), cujas opiniões teológicas desagradavam a sua igreja. Em 1817 publicou o livro *Rein analytischer Beweis,* devotado a uma prova puramente aritmética do teorema de locação da álgebra, o que exigiria um conceito não geométrico de continuidade de uma curva ou função. Além disso, enunciou algumas propriedades importantes dos conjuntos infinitos em uma obra postuma de 1850 denominada por Paradoxien des Unendlichen. (BOYER, 1974)

Segundo Boyer (1974), Bolzano, por volta de 1840, parece ter percebido que a infinidade de números reais é de tipo diferente da infinidade de números inteiros, sendo não enumerável. Muitos de seus trabalhos tiveram que ser redescobertos e, dentre estes destacou a percepção que fez sobre a existência de funções patológicas que não se comportam como os matemáticos costumavam esperar que se comportassem, conforme segue:

> [...]; mas durante a primeira metade do século dezenove supunha-se em geral que uma função real contínua deve ter derivada em quase todos os pontos. Mas em 1834 Bolzano tinha imaginado uma função contínua num intervalo que, apesar da intuição física em contrário, não tinha derivada em nenhum ponto do intervalo. (p.382)

Sá (2003), ainda cita Bolzano como sendo o pioneiro na formalização das bases de análise e que em sua publicação *Functionlehre* conceituou continuidade de modo muito próximo do conceito atual. E dessa familiaridade com os conceitos atuais, ressalta-se a demonstração que fez do teorema do valor médio, conceito este muito utilizado em cursos de cálculo na atualidade.

Outro matemáticio que no mesmo período de Bolzano se destacou na busca pela formalização foi Augustin Louis Cauchy (1789-1857), que segundo Boyer (1974), muito colaborou fornecendo definições mais precisas dos conceitos, tanto para variáveis reais quanto para complexas, conforme percebe-se no trecho que se segue:

> Por isso a teoria de variáveis complexas traz necessariamente um grau mais alto de abstração que a de funções de uma variável real. As definições e regras de diferenciação, por exemplo, não podem ser transformadas imediatamente, e a derivada no caso complexo não é mais interpretada como inclinação da tangente a uma curva. Sem o apoio da visualização, sente-se a necessidade de definições mais precisas e cuidadosas dos conceitos.(p.380)

Sá (2003) observa que, Cauchy definiu função em *Cours d'analyse* da seguinte maneira:

> Quando quantidades variáveis estão ligadas entre si de tal forma que, o valor de uma delas sendo dado, pode-se determinar o valor das outras quantidades expressas por meio da variável independente são o que chamamos de funções dessa variável. (p.11)

Outra contribuição na análise proveio de Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) que, para Boyer (1974), antes de qualquer outro, foi o homem que mais fez para entender as *Disquisitiones* e seu nome ainda é preservado no critério de Dirichlet para convergência uniforme de séries.

Em 1837, Dirichlet sugeriu uma definição mais ampla para função:

> se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a x, existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então diz-se que y é função da variável indepencente x. (BOYER,1974, p.405)

Esta definição, afirma Boyer (1974), mesmo não sendo estabelecidos os conceitos de "conjunto" e de "número real", chega perto da noção moderna de uma correspondência entre dois conjuntos de números.

Segundo Botelho (2007), Dirichlet foi o primeiro a estabelecer o conceito de função como uma relação arbitrária entre as variáveis, independente de fórmulas algébricas.

A fim de indicar a natureza completamente arbitrária da regra de correspondência, Dirichlet propôs uma função "muito mal comportada": *"Quando x é racional, ponha-se y = c, e quando x ´irracional seja y = d ≠ c".* Tal função é conhecida como funcão de Dirichlet, em que nela não há valor de x para o qual seja contínua. (BOYER, 1974, p.405)

Para Botelho (2007), este foi o primeiro exemplo de uma função que não era representada por uma fórmula – combinação de símbolos matemáticos.

Seguindo a evolução dos conceitos e na sucessão de Dirichlet aparece Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), que para Boyer (1974), era um matemático de múltiplos interesses e mente fértil, de modo que não contribuiu apenas para a geometria e teoria dos números, mas também para a análise. E nesta, é lembrado devido ao seu refinamento da definição de integral, pela ênfase que deu às equações de Cauchy-Riemanm, e pelas superfícies de Riemanm.

Outro matemático que também influenciou as bases da análise foi Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918), que desenvolveu a teoria dos conjuntos mesmo não tendo a credibilidade de muitos matemáticos de sua época para tal feito. (SÁ ,2003)

O alemão Karl Weierstrass (1815-1897), para Boyer (1974) também foi responsável na direção da aritmetização da análise e uma de suas contribuições ocorreu ao definir uma função analítica como uma série de potências juntamente com todas as que podem ser obtidas dela por prolongamento analítico.

O físico G.G. Stokes (1819-1903), segundo Silva (1999), de maneira contrária aos seus antecessores, procurou pensar em funções que não necessitavam ser expressas por uma combinação de símbolos algébricos e ressalta a afirmativa de Stokes: *"Realmente, parece-me de grande importância, pensar em funções independentes de todas as idéias de expressão algébrica".*

De acordo com Botelho (2007), o matemático George Boole (1815-1864), apresenta uma nova interpretação ao conceito de função, passando a ser vista como transformação, onde cada elemento x é transformado no elemento f(x):

> Qualquer expressão algébrica envolvendo o símbolo x é chamada uma função de x e pode ser representada sob a forma geral abreviada f(x). ... Nestes mesmos princípios de notação, se em alguma função transformarmos x em 1, o resultado será expresso pela forma f(1); se na mesma função transformarmos x em 0, o resultado será expresso pela forma f(0) (Rüthing, 1984).(p.73)

Boyer (1974) comenta sobre as objeções que Boole fazia frente à concepção então corrente da matemática como ciência da grandeza e do número, em que defendia uma visão mais ampla conforme segue:

> Poderíamos com justiça tomar como característica definitiva de um verdadeiro Cálculo, que é um método que se apóia no uso de Símbolos, cujas leis de combinação são conhecidas e gerais, e cujos resultados admitem uma interpretação consistente... É com base nesse princípio geral que eu pretendo estabelecer o Cálculo da Lógica, e que reinvidico para ele um lugar entre as formas reconhecidas da Análise Matemática. (p.428)

Boyer (1974) destaca um grupo de cinco matemáticos, onde quatro eram alemães e dentre estes temos J.W.R. Dedekind (1831-1960) e George Cantor

(1845-1918). Estes dois estavam entre os matemáticos mais notáveis e mais originais de sua época e o grupo dos cinco representou o clímax de meio século de investigação sobre a natureza da função.

Segundo Silva (1999), Dedekind, em 1887 definiu função utilizando ideia de "aplicação":

> Por uma aplicação de um sistema S, uma lei entendida de acordo com o qual a cada determinado s de S existe associado a um determinado objeto o qual é chamado imagem de s e é denotado por f(s); dizemos, também que o f(s) corresponde ao elemento s, que f(s) é causado ou generalizado pela aplicação f sobre s e que é transformado pela aplicação f para f(s).(SILVA, 1999, p.31)

Silva (1999) também menciona o matemático Hardy (1877-1947) que em 1908 definiu função de maneira mais geral, utilizando para isto a ideia de relação entre quantidades variáveis com três características básicas conforme segue:

> 1. y é sempre determinado por um valor de x;
> 2. para cada valor de x, para qual y é dado, corresponde um e somente um valor y;
> 3. a relação entre x e y é expressa por meio de uma fórmula analítica na qual o valor de y corresponde a um dado valor de x e pode ser calculado por substituição direta de x. (p.31)

Tal definição foi traduzida em 1911 por Giuseppe Peano (1858-1932) para uma linguagem simbólica, que segundo este: *"Função = Relação u / {(y,x) Îu, (z,x) Îu, ""x, y, z; y = z}"*

Boyer (1974) ressalta que durante os últimos anos do século dezenove houveram matemáticos italianos que se interessaram profundamente pela lógica matemática, sendo o mais conhecido, Peano. Este tinha por objetivo em seu "*Formulaire de mathématiques*" uma linguagem formalizada que contivesse não só a lógica matemática como todos os ramos mais importantes da matemática. Dentre seus trabalhos, destaca-se para o momento os axiomas de Peano, dos quais dependem tantas construções rigorosas da álgebra e da análise.

Observa Silva (1999), de uma tradução da definição de Hardy para o contexto da teoria dos conjuntos, Bourbaki, em 1939, atingiu o carater mais geral e formal para o conceito de função:

> Sejam E e F dois conjuntos, os quais podem ou não podem ser distintos. A relação entre o elemento variável x de E e o elemento variável y de F é chamado relação funcional em y, se para todo x ÎE existe um único y ÎF, o qual é dado pela relação com x. Damos o nome de função para a operação a qual deste modo associamos sempre um elemento x ÎE o elemento y ÎF o qual é dado pela relação com x; y é dito ser o valor da função para o elemento x, e a função é dita ser determinada pela relação dada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função.(p.31)

A titulo de curiosidade, Sá (2003) ressalta o nome Nicolas Bourbaki como nome de um suposto autor francês, nascido em Nancy e que assinou várias obras, porém acredita-se que fora um grupo de matemáticos que utilizou tal nome como pseudônimo.

Silva (1999), nessa construção do conceito de função, afirma que os matemáticos envolvidos na mesma utilizaram três idéias básicas para conceituar função, sendo estas: *"a de relação entre quantidades variáveis (Lagrange, por exemplo), a de relação entre conjuntos (Bourbaki) e a de transformação (Boole)".*(p.31)

Nesta parte histórica do trabalho, é conveniente concluir que a todo momento houve uma busca pelo aperfeiçoamento da linguagem matemática, culminado na utilização de símbolos. Logo a utilização destes símbolos, na linguagem matemática não pode ser perdido, uma vez que teve papel relevante na elaboração de conceitos e são utilizados na identificação de objetos e suas propriedades, bem como suas relações com outros objetos.

Cabe ressaltar que no presente capítulo decidimos seguir a ordem cronológica delineada na obra de Boyer (1974), porém não descartamos a importância do movimento da historiografia matemática,que segundo Nobre (2007), neste busca-se o entendimento da construção teórica da história da matemática de maneira mais dinâmica, destacando a constribuição de outros personagens que perderam seus postos na hierarquia da matemática no decorrer dos tempos, por exemplo. Para mais detalhes, Nobre recomenda a leitura dos verbetes biográficos presentes em "*Enciclopédia Universal de Zedler"* e "*Dicionário Poggendorff".*

3. CONSTRUÇÃO DOS CONJUNTOS NUMÉRICOS

Considerando a importância que os números reais representam na evolução do conceito de função, bem como sua utilização em âmbito educacional, optou-se em se fazer uma breve referência à construção dos mesmos. As definições e teoremas que serão apresentados foram baseados nas obras de Ferreira (2013), Guidorizzi (1987) e Monteiro (1969).

Destaca-se ainda, que o presente estudo foca o que é relevante ao aprendizado de funções, sabendo é claro, que se trata de uma pequena abordagem quando comparada à problemática do ensino de matemática nos dias atuais. Para este fim, seriam necessárias pesquisas mais aprofundadas e que envolveriam estudos voltados para o ensino de matemática ainda no processo de formação da criança no ciclo I da educação básica.

Sendo assim, será apresentada uma discussão sobre a evolução dos conjuntos numéricos na seguinte ordem: naturais, inteiros, racionais, e reais.

A escolha desta ordem de apresentação é devida ao fato de que foi a partir do conjunto dos números naturais que os demais foram obtidos, fazendo-se suas devidas ampliações. (LIMA, 2012)

Para Ferreira (2013), esta ordem é logicamente coerente, rápida e elegante, condizente aos raciocínios matemáticos apresentados nos séculos XIX e XX.

Porém, antes de discorrer sobre os conjuntos numéricos, algumas definições e teoremas se fazem necessários, uma vez que serão utilizados no decorrer deste capítulo em algumas demonstrações.

Definição 1: Seja A um conjunto. O conjunto das partes de A, ou conjunto potência de A, denotado por $P(A)$, é o conjunto cujos elementos são os subconjuntos de A. Exemplos:

a) Se $A = \{a,b\}$, então $P(A) = \{\emptyset,\{a\},\{b\},A\}$;

b) Se $A = \emptyset$, então $P(A) = \{\emptyset\}$.

Definição 2: Dados um conjunto não vazio A e $a,b \in A$, definimos o par ordenado (a,b) como sendo o conjunto $\{\{a\},\{a,b\}\}$. Note que $(a,b) \subset P(A)$.

Segundo Ferreira (2013), a definição 2 tem por objetivo fornecer precisão matemática ao conceito intuitivo de par ordenado que é ensinado desde o ensino fundamental como "*uma par de objetos onde a ordem tem importância".* E com esta definição pode-se provar o seguinte teorema:

Teorema 1: Sejam A um conjunto e $a,b,c,d \in A$. Temos que:

$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$.

Demonstração: Se $a = c$ e $b = d$, então é claro que $(a,b) = (c,d)$. Reciprocamente, suponhamos que $(a,b) = (c,d)$, isto é, que $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$. Consideremos então, dois casos:

1º caso: $a = b$. Nesta situação, $(a,b) = (a,a) = \{\{a\},\{a\}\} = \{\{a\}\}$. Assim, a hipótese fica $\{\{a\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$. Então, o conjunto $\{c,d\}$ é um elemento de $\{\{a\}\}$, logo só pode ser igual a $\{a\}$, o que acarreta $c = d = a$. Como $a = b$, obtemos $a = c$ e $b = d$ (todos iguais a a).

2º caso: $a \neq b$. Analisemos a igualdade $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$. Se fosse $\{a,b\} = \{c\}$, teríamos $a = b = c$, o que contradiz a hipótese $a \neq b$. Logo, $\{a,b\} = \{c,d\}$, de onde pode-se concluir que $c \neq d$. Daí, o elemento $\{a\}$ não pode ser $\{c,d\}$, logo $\{a\} = \{c\}$, de onde obtemos que $a = c$. De $\{a,b\} = \{c,d\}$, como $b \neq a = c \neq d$, segue-se que $b = d$.

Definição 3: Dado um conjunto A, o produto cartesiano de A por A, denotado por $A \times A$, é o conjunto de todos os pares ordenados compostos por elementos de A, isto é, $A \times A = \{(x,y) \mid x,y \in A\}$. Exemplos:

a) Se $A = \{1,2\}$, então $A \times A = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

b) Se $A = \emptyset$, então $A \times A = \emptyset$.

Definição 4: Dados dois conjuntos A e B, se $x \in A$ e $y \in B$ então $x,y \in A \cup B$, e pode-se considerar (x,y) como na definição 2, isto é, $(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\} \subset P(A \cup B)$. Sendo assim, definimos o produto cartesiano de A por B como sendo o conjunto $A \times B = \{(x,y) \mid x \in A$ e $y \in B\}$.

Definição 5: Uma relação binária R num conjunto A é qualquer subconjunto do produto cartesiano A x A, isto é, $R \subset A \times A$.

Exemplo: Se $A = \{1,2,3\}$, então $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(3,1),(3,3)\}$ é uma relação binária em A. Notação: Se R é uma relação binária em A e se $(a,b) \in R$, escreve-se aRb, isto é, $(a,b) \in R \Leftrightarrow aRb$. Lê-se: a está relacionado com b (via R).

Definição 6: Uma relação R em A diz-se *relação de equivalência* se possuir as seguintes propriedades:

i) reflexiva: aRa, para todo $a \in A$;

ii) simétrica: se $a,b \in A$ e aRb, então bRa;

iii) transitiva: para $a,b,c \in A$, se aRb e bRc, então aRc.

Definição 7: Seja R uma relação de equivalência num conjunto A e $a \in A$ um elemento fixado arbitrariamente. O conjunto $\bar{a} = \{x \in A \mid xRa\}$ chama-se classe de equivalência de a pela relação R. Ou seja, $\bar{a}$ é o conjunto constituído por todos os elementos de A que são equivalentes a a.

Teorema 2: Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A e a e b elementos quaisquer de A, então:

i) $a \in \bar{a}$;

ii) $\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow aRb$;

iii) $\bar{a} \neq \bar{b} \Rightarrow \bar{a} \cap \bar{b} = \varnothing$.

Demonstração:

i) Da propriedade reflexiva da relação de equivalência sabemos que aRa para todo $a \in A$, logo $a \in \bar{a}$.

ii) $(\Rightarrow)$ Como $\bar{a} = \bar{b}$, da definição de classe de equivalência sabemos que $\{x \in A \mid xRa\} = \{x \in A \mid xRb\}$. Então xRa e xRb, que pela propriedade simétrica da relação de equivalência temos que aRx e xRb e, finalmente pela propriedade transitiva da relação de equivalência chegamos em aRb.

$(\Leftarrow)$Como *aRb* por hipótese, pela propriedade simétrica de relação de equivalência temos que *bRa*. Sendo *a*,*b* $\in A$, pela definição de classe de equivalência conclui-se que $\overline{a} = \overline{b}$.

iii) Suponhamos que exista *c* $\in \overline{a} \cap \overline{b}$. Então, *aRc* e *cRb*. Pela transitividade, *aRb* e, consequentemente, por (ii),segue que $\overline{a} = \overline{b}$, contrariando a hipótese.

Note que a propriedade (iii) do teorema apresentado nos mostra que duas classes de equivalência distintas são disjuntas.

3.1 OS NÚMEROS NATURAIS

Oliveira (1968) faz distinção entre dois processos na construção da Aritmética, principalmente no que se refere aos conjuntos numéricos. Estes processos são: o sintético e o analítico.

O processo sintético tem como característica a construção do conhecimento de acordo com as diversas necessidades dos povos, conforme aconteceu com o aparecimento dos números e, de modo mais geral, necessidades determinadas impuseram a criação de conjuntos numéricos. Porém quando necessário, mediante o surgimento de mais uma necessidade, novos números são criados e sua teoria é posteriormente desenvolvida, sendo que nestas se acham as necessidades que impuseram sua criação. Exemplo disso, podemos citar a necessidade que os hindus tiveram de representar a coluna vazia do ábaco por um novo símbolo, daí a criação do zero. Outra necessidade que impôs tal criação foi a de tornar possível a subtração de um número natural dele mesmo.

O processo analítico ou processo axiomático analítico tem como característica um modo de “purificação” da teoria criada e desenvolvida pelo processo sintético, no sentido de eliminar causas estranhas à matemática, que de alguma forma, impuseram o desenvolvimento da teoria. Esta atitude é consequência da benéfica influência que a matemática passou no século XIX.

De acordo com Costa (1971), os números naturais nasceram da necessidade de se compararem umas às outras as grandezas discretas. Esta ideia de número natural é bastante semelhante às ideias de número que são apresentadas em compêndios antigos como por exemplo:

> Numero é o resultado da comparação entre uma grandeza e a unidade. Se a grandeza é discreta chama-se uma contagem e o resultado é um número inteiro; se a grandeza é contínua, a comparação chama-se uma medição e o resultado é um número real. (LIMA, 2012, p.28-29)

Mas, segundo Lima (2012), se considerarmos os padrões atuais de rigor matemático, tal trecho não pode ser considerado uma definição, já que são utilizadas ideias (grandeza, por exemplo) e processos (comparação, por exemplo) de significado não estabelecido.

Para Lima (2012), os números naturais representam um modelo de contagem (um, dois, três,...) que a humanidade apoderou-se à medida que se civilizava. Em decorrência das necessidades provocadas por um sistema social cada vez mais complexo e longas reflexões, trazidas pelo progresso econômico, eis que surge o conjunto dos números naturais, que é representado por IN.

Oliveira (1968) observa que o processo sintético dos números naturais se deu até o século XVIII e logo surgiu a necessidade de purificar a Aritmética, o que deu origem ao estudo axiomático dos números naturais, que apareceu por volta de 1894.

Em conformidade com o rigor matemático, será adotada a formalização do conceito de números naturais de maneira axiomática, não construtiva, que consiste simplesmente em assumir a existência do conjunto dos números naturais de modo a satisfazer a certos axiomas que lhe proporcionam sua caracterização por completo, conforme ideia exposta por:

> “Caracterizar completamente” significa que um conjunto obedecendo tais axiomas é uma “cópia” daquilo que já conhecemos intuitivamente como conjunto dos números naturais. (FERREIRA, 2013, p.15)

Neste sentido, não se pode deixar de citar e ressaltar a importância de Giuseppe Peano (1858-1932), que em seus fundamentos da aritmética escolheu três conceitos primitivos (*zero*, *número*, isto é, inteiros não-negativos, e a relação “*é sucessor de*”) satisfazendo aos cinco postulados (proposições não demonstradas ou axiomas) que se seguem:

> 1. Zero é um número.
> 2. Se *a* é um número, o sucessor de *a* é um número.
> 3. Zero não é o sucessor de um número.
> 4. Dois números cujos sucessores são iguais são eles próprios iguais.
> 5. Se um conjunto S de números contém o zero e também o sucessor de todo número de S, então todo número está em S. (BOYER, 1974, p.436-437)

Lima (2012) afirma que a essência da caracterização de IN reside na palavra “sucessor”, em que o termo primitivo da mesma não é definido explicitamente. Segundo o autor, seu uso e suas propriedades são regidos por algumas regras conforme segue:

> a) Todo número natural tem um único sucessor;
> b) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;
> c) Existe um único número natural, chamado um e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro;
> d) Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset$ IN). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então $X =$ IN. (LIMA, 2012, p.34)

Note que as duas citações anteriores são semelhantes, diferindo apenas no que diz respeito ao primeiro elemento do conjunto, o que seria outra discussão. Mas, para o momento será adotada a ideia de pensarmos no conjunto dos números naturais como o “conjunto que começa no zero e prossegue de um em um”. Sendo assim, a sequência de raciocínio seguirá conforme a primeira citação.

Essas regras/postulados são conhecidos como os axiomas de Peano e segundo Lima (2012), tudo o que se sabe a respeito dos números naturais pode ser demonstrado como consequência deles. Logo, os axiomas de Peano são uma apresentação rigorosa das ideias intuitivas que temos de números naturais.

Com maior precisão dos fatos, observa-se que os axiomas de Peano exibem os números naturais como “números ordinais”, ou seja, como objetos que ocupam lugares determinados numa sequência ordenada. Neste sentido é conveniente considerar os números naturais começando do 1, em que 1 é o primeiro número natural, 2 vem logo depois do 1, 3 vem em seguida do 2, etc. (LIMA, 2012)

No entanto, os números naturais podem ocorrer como resultados de uma operação de contagem e desse modo são denominados como números cardinais. Por esta razão são empregados para a contagem de conjuntos finitos.

O último axioma de Peano merece considerável destaque, pois é a base de um método de demonstração de proposições referentes a números naturais. Estas demonstrações são denominadas por *demonstrações por indução*, ou *por recorrência*, e o axioma em questão é chamado de axioma de indução, cujo enunciado, adaptado de modo a ter o zero como primeiro elemento, sob a forma de propriedades é dado por:

> Seja *P(n)* uma propriedade relativa *ao número natural n.* Suponhamos que:
> *i) P(0)* é válida;
> *ii)* Para todo $n \in$ IN, a validez de *P(n)* implica a validez de *P(n'),* onde *n'* é o sucessor de *n.*
> Então *P(n)* é válida qualquer que seja o número natural *n.* (LIMA, 2012, p.37)

Note que se considerarmos o conjunto X o conjunto dos números naturais n para os quais P(n) é válida, teremos em decorrência de i) que $0 \in$ IN e que $n \in$ IN $\Rightarrow n' \in$ IN em razão de ii). Segue-se, portanto, pelo axioma de indução, que X = IN. Sendo assim, este axioma fornece uma maneira operacional de obter qualquer número natural *n* partido-se do 0 e repetindo suficientemente a operação de tomar o sucessor de um número. (LIMA, 2012)

Segue do exposto que o conjunto IN = {0,1,2,3,...} dos números naturais é uma sequência de objetos que, em princípio, são vazios de significado, sendo que cada um desses objetos tem apenas um lugar nesta sequência e, portanto, nenhuma outra propriedade lhe serve de definição.

No conjunto dos números naturais estão definidas duas operações fundamentais: a *adição*, que aos números naturais *m*, *n* faz-se corresponder a soma *m* + *n* e a *multiplicação,* que lhes associa o produto *mn*.

Definição 3.1.1: A adição de dois números naturais, *m* e *n* é designada por *m* + *n* e definida *recursivamente* do seguinte modo:

$$\begin{cases} m+0=m; \\ m+s(n)=s(m+n) \end{cases}$$; onde *s(n)* é o sucessor de *n.*

Tal definição fornece a soma de um número arbitrário *m* com 0: *m* + 0 = *m*, bem como a soma de *m* com *s*(0)*: m* + *s*(0) = *s*(*m* + 0) = *s*(*m*)*.*

Consequentemente, ainda temos que: $m + s(s(0)) = s(m + s(0)) = s(s(m))$ e assim por diante.

A formalização de tal processo mostra que a soma $m + n$ está definida para todo par m, n de naturais. De fato, para cada m natural fixado arbitrariamente, define-se o conjunto $S_m = \{n \in \mathrm{IN} |\ m + n$ está definida$\}$. Tem-se que $0 \in S_m$ e se $k \in S_m$, então $s(k) \in S_m$, pois $m + s(k) = s(m + k)$ e, como m é arbitrário, segue pelo princípio de indução finita que $S_m = \mathrm{IN}$.

Definição 3.1.2: Indicaremos por 1 (lê-se "um") o número natural que é sucessor de 0, ou seja, $1 = s(0)$.

Proposição 3.1.1: Para todo natural m, tem-se $s(m) = m + 1$ *e* $s(m) = 1 + m$. Portanto, $m + 1 = 1 + m$.

Demonstração: Para a primeira igualdade, temos: $m + 1 = m+s(0) =$ $= s(m + 0) = s(m)$. Para a segunda igualdade, consideremos o conjunto $A = \{m \in \mathrm{IN} |\ s(m)= 1+m\}$. Note que $0 \in A$, pois $s(0) = 1 = 1 + 0$. Sejam $m \in A$, mostremos que $s(m) \in A$. De fato, como $s(m) = 1 + m$, temos que: $s(s(m)) = s(1 + m) = 1+ s(m)$, isto é, $s(m) \in A$ e segue pelo princípio de indução finita que $A = \mathrm{IN}$.

Até o momento, conhecemos os símbolos 0 e $1 = s(0)$. Definimos então:

$s(1) = 2$ (lê-se: dois);

$s(2) = 3$ (lê-se: três);

$s(3) = 4$ (lê-se: quatro);

$s(4) = 5$ (lê-se: cinco); e assim por diante.

Então, observamos que IN contém o conjunto $\{0, s(0), s(s(0)), s(s(s(0))),...\} = \{0,1,2,3,...\}$.

Teorema 3.1.1: $\mathrm{IN} = \{0,1,2,3,...\}$

Demonstração: Seja S o conjunto $\{0,1,2,3,...\}$, conjunto que foi então construído como um subconjunto de IN que contém o 0 e o sucessor de qualquer elemento nele contido. Pelo princípio da Indução, $S = \mathrm{IN}$.

Baseando-nos ainda nos axiomas de Peano, podemos demonstrar propriedades da adição que são apresentadas no currículo do ensino básico de maneira intuitiva. Sendo assim, consideremos o teorema a seguir:

Teorema 3.1.2: Para m, n e p naturais arbitrários, valem as proposições abaixo:

i) associatividade: $m + (n + p) = (m + n) + p$;

ii) comutatividade: $m + n = n + m;$

iii) lei do cancelamento da adição: $m + n = m + p \Rightarrow n = p$;

iv) integridade: $m + n = 0 \Rightarrow m = n = 0$.

Demonstração:

Associatividade: Fixemos m e n e apliquemos indução sobre p. Se $p = 0$, então $m + (n + 0) = m + n = (m + n) + 0$, pela definição de adição. Supondo $m + (n + p) = (m + n) + p$ e utilizando a definição de adição, temos: $(m + n) + s(\text{p}) = s((m + n) + p) = s(m + (n + p)) = m + s(n + p)$, que por sua vez é igual a $m + (n + s(p))$. Pelo princípio de indução matemática, temos que $m + (n + p) = (m + n) + p$, para todo m,n, p naturais.

ii) Comutatividade: Fixemos n e utilizaremos indução sobre m. Se $m = 0$, então $0 + n = n = n + 0$. Supondo $m + n = n +m$, temos que $s(m + n) = \text{s}(n + m)$, pois todo número natural tem sucessor, o que implica em $s(m) + n = n + s(m)$. Pelo princípio de indução matemática, tem-se que pela definição de adição que $m + n = n + m$, para todo m,n natural.

iii) Lei do cancelamento da adição: Fixemos n e p e utilizaremos indução sobre m. Se $m = 0$, então $0 + n = 0 + p$, implicando em $n = p$. Supondo que $m + n = m + p$ implique em $n = p$. Assumindo $s(m) + n = s(m) + p$, temos $s(m + n) = s(m + p)$. Como números naturais com mesmo sucessor são iguais, segue-se que $m + n = m + p.$ Logo, pelo princípio de indução finita, temos que $m + n = m + p$ implica em $n = p$, para todo m, n, p natural.

iv) Integridade: Supondo $n \neq 0$, concluímos que $n = s(x)$, para algum x natural. Segue-se então que $0 = m + n = m + s(x) = s(m + x)$, o que é impossível, pois zero não é sucessor de um número natural. Logo $n = 0$. Note que isto implica diretamente que $m = 0$, o que conclui a demonstração.

No entanto, a multiplicação de dois números naturais, *m* e *n* é designada por *m.n* e definida recursivamente como:

$\begin{cases} m.0 = 0; \\ m.(n+1) = m.n + m \end{cases}$, de modo que será adotada a notação *m.n* = *mn.*

Observemos que a definição apresentada fornece a multiplicação de um número natural *m* por 0, bem como nos dá indícios da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Teorema 3.1.3: Para *m*, *n* e *p* naturais arbitrários, valem as proposições abaixo:

i) *mn* $\in$ IN, isto é, a multiplicação de fato é uma operação em IN;
ii) existência do elemento neutro multiplicativo: 1.*n* = *n*.1 = *n*;
iii) distributividade: *m*(*n*+*p*) = *mn* + *mp* e (*m* + *n*)*p* = *mp* + *np;*
iv) associatividade: *m*(*np*) = (*mn*)*p*;
v) integridade: *mn* = 0 $\Rightarrow$ *m* = 0 ou *n* = 0;
vi) comutatividade: *nm* = *mn.*

Demonstração:

i) Fixando *m* $\in$ IN, mostremos que *mn* $\in$ IN aplicando-se indução sobre *n*. Note que para *n* = 0, temos *mn* = *m*.0 = 0 e 0 $\in$ IN. Supondo *mn* $\in$ IN, mostremos que *m.s*(*n*) também é natural. De fato, *m.s*(*n*) = *mn* + *m* e, como *mn* é natural por hipótese de indução e adição de números naturais também é natural, segue-se que *m.s*(*n*) $\in$ IN. Sendo assim, pelo princípio de indução, temos que *mn* é natural para todo *m,n natural.*

ii) Existência do elemento neutro multiplicativo: Mostremos inicialmente que *n.*1 = *n*. Temos que *n*.1 = *n*.(0+1) = *n*.0 + *n* = 0 + *n* = *n*. Agora, por indução em *n*, mostremos que 1.*n* = *n*. Temos: 1.0 = 0, por definição e, sob hipótese de que 1.*n* = *n*, obtemos: 1.(*n* + 1) = 1.*n* + 1 = *n* + 1. Logo pelo princípio de indução segue-se que 1.*n* = *n*, para todo *n* natural.

iii) Distributividade: Sejam *m* e *n* naturais fixados arbitrariamente e usemos indução sobre *p*. Seja $P_{m,n}(p)$ a afirmação *m*(*n*+*p*) = *mn* + *mp*. Mostremos que o conjunto $A_{m,n}$ = {*p* $\in$ IN| $P_{m,n}(p)$ é verdadeira} é IN. Temos:

1) $P_{m,n}(0)$ é verdadeira: *m*(*n* + 0) = *mn* e *mn* + 0 = *mn*. Logo, *m*(*n* + 0) = *mn* + *m*.0, isto é, $P_{m,n}(0)$ é verdadeira.

2) Mostremos que $P_{m,n}(k+1)$ pode se obter de $P_{m,n}(k)$, isto é, que $k \in A_{m,n}$ acarreta $k + 1 \in A_{m,n}$. Cada igualdade que se segue se justifica com base em propriedades já estabelecidas:

$m(n+(p+1)) = m((n+p)+1)) = m(n+p)+m = (mn+mp)+m = mn+(mp+m) =$
$= mn + (m(p+1))$.

De 1) e 2), conclui-se, por indução, que $A_{m,n}$ =IN e de forma similar, também usando indução sobre *p*, prova-se que $(m + n)p = mp + np$, para todo *m,n,p* naturais.

iv) Associatividade: Fixemos *m* e *n* e utilizaremos indução sobre *p*. Se $p = 0$, então $m(n.0) = m.0 = 0 = (mn).0$. Supondo $m(np) = (mn)p$, temos pela definição de multiplicação, que $m(n.s(p)) = m(np + n)$. Pela propriedade distributiva, isto é igual a $mnp + mn$. Também temos pela definição de multiplicação que $(mn).s(p) = mnp + mn$. Logo, $m(n.s(p)) = (mn).s(p)$. Por indução matemática concluímos que $m(np) = (mn)p$, para todo *m,n,p* naturais.

v) Integridade: Supondo que *m* seja diferente de 0, temos que *m* será o sucessor de algum x ∈ IN. Podemos então, escrever $0 = mn$, que por sua vez é $s(x).n= nx + n$. Assim $nx + n = 0$, que pela propriedade (iv) da adição nos naturais (integridade), temos que $nx = n = 0$. Repetido o processo para *n*, chegaremos que $mx = m = 0$. Logo, $mn = 0$ implica em $m = 0$ ou $n = 0$.

vi) Comutatividade: Fixemos *n* e utilizaremos indução sobre *m*. Se $m = 0$, constatamos que $0.n = 0 = n.0$. Supondo que $mn = nm$, temos que $s(m).n = mn + n = nm + n$. Pela lei do cancelamento da adição, $mn = nm$. Por indução matemática, temos que $mn = nm$, para todo *m,n* natural.

Outro conceito muito importante na construção dos números naturais é o de relação de ordem, que permitirá fazer comparação com números naturais.

Definição 3.1.3: Uma relação binária *R* em um conjunto não vazio *A* diz-se uma relação de ordem em *A* quando satisfizer as condições seguintes, para quaisquer $x,y,z \in A$:

i) Reflexividade: *xRx.*

ii) Antissimetria: se *xRy* e *yRx*, então $x = y$.

iii) Transitividade: se *xRy* e *yRz*, então *xRz.*

Definição 3.1.4: Para $m,n \in$ IN, se mRn, onde R é a relação de ordem da definição anteriormente descrita, dizemos que *m é menor do que ou igual a n* e passaremos a escrever o símbolo $\leq$ no lugar de R: assim, $m \leq n$ significará mRn.

Do ponto de vista de notação, ressaltamos algumas observações:

1) Se $m \leq n$, mas $m \neq n$, escrevemos $m < n$ e dizemos que *m é menor do que n.*
2) Escrevemos $n \geq m$ como alternativa a $m \leq n$. Leremos *n é maior do que ou igual a m.*
3) Escrevemos $n > m$ como alternativa a $m < n$. Leremos *n é maior do que m*.

De modo mais fácil de compreensão LIMA (2012), define a relação de ordem do seguinte modo:

> Dados $m,n \in$ IN, diz-se que m é menor do que n, e escreve-se $m < n$, para significar que existe algum $p \in$ IN tal que $n = m + p$. (Isto quer dizer que n é o sucessor do sucessor... do sucessor de m, o ato de tomar o sucessor sendo iterado p vezes.). (LIMA, 2012, p.39)

Além disso, a relação $m < n$ tem as seguintes propriedades:

- *Transitividade*: Se $m < n$ *e* $n < p$ então $m < p$;

Prova: Como $m < n$, então existe $q' \in$ IN* tal que $n = m + q'$ e, sendo $n < p$, analogamente existe $q'' \in$ IN* tal que $p = n + q''$. Substituindo a primeira igualdade na segunda, temos que $p = n + q'' = (m + q') + q'' = m + (q' + q'')$. Logo, $m < p$.

- Tricotomia: Dados $m,n \in$ IN, vale uma, e somente uma, das alternativas: $m = n$, $m < n$ ou $n < m$;

Prova: Note que $m = n$ e $m < n$, bem como $m = n$ e $n < m$, são incompatíveis por definição, logo não podem ocorrer simultaneamente. A ocorrência simultânea de $m < n$ e $n < m$, ocasionaria que: $n = m + p$ e $m = n + p'$, com p, p' diferentes de zero, de onde obtemos: $n + 0 = n = m + p =$ $= (n + p') + p = n + (p' + p)$. Cancelando n, chegamos em $p + p' = 0$, o que implica em: $p = p' = 0$, o que é uma contradição. De fato: $p + p' = 0 \Rightarrow p = p' =$ $= 0$, com p e p' naturais. Para isto, suponhamos $p' \neq 0$. Então $p' = s(p'') =$ $= p'' + 1$, para algum $p'' \in$ IN. Temos: $0 = p + p' = p + (p'' + 1) = (p + p'') + 1 =$

$= s(p + p'')$, o que é um absurdo, pois zero não é sucessor de nenhum número natural. Sendo assim, $p' = 0$ e obtemos: $p = p + 0 = p + p' = 0$, como queríamos.

Retomando, será mostrado agora que uma das três relações acontece. Seja m um número arbitrário e consideremos o conjunto $M = \{x \in \mathrm{IN} |\ x = m$ ou $x > m$ ou $x < m\}$. Provemos, por indução sobre x, que $M = \mathrm{IN}$. Temos que $0 \in M$, pois $0 = m$ ou $0 \neq m$. Agora, mostremos que a hipótese $k \in M$ acarreta $k + 1 \in M$. Devemos então, considerar três situações:

1) $k = m$. Neste caso, $k + 1 = m + 1$, de onde $k + 1 > m$ e, portanto, $k + 1 \in M$.
2) $K > m$. Neste caso, existe $p \in \mathrm{IN}^*$ (conjunto de números naturais exceto o zero) tal que $k = m + p$. Então, $K + 1 = (m + p) + 1 = = m + (p + 1)$, de onde $K + 1 > m$ e, daí, $k + 1 \in M$.
3) $K < m$. Neste caso, existe $p \in \mathrm{IN}$ tal que $m = k + p$. Como $p \neq 0$, então $p = p' + 1$, $p' \in \mathrm{IN}^*$. Logo $m = k + (p' + 1) = k + (1 + p') = (k + 1) + p'$. Se $p' = 0$, então $m = k + 1$ e $k + 1 \in M$. Se $p' \neq 0$, então $m > k + 1$ e $k + 1 \in M$. Assim, pelo Princípio da Indução, $M = \mathrm{IN}$.

Cabe ainda destacar que, dado ao que foi exposto na demonstração da propriedade de tricotomia, constata-se que dados $m,n \in \mathrm{IN}$, tem-se necessariamente $m \leq n$ ou $n \leq m$. Deste modo, quaisquer dois naturais sempre podem ser comparados pela relação de ordem então definida. Ainda mais, quando uma relação de ordem satisfaz à lei da tricotomia é chamada de relação de ordem total.

- Monotonicidade: Sejam m, n e p naturais quaisquer. São válidas as seguintes implicações:

i) $m < n \Rightarrow m + p < n + p$;

ii) $m < n \Rightarrow mp < np$.

Prova: (i) $m < n \Leftrightarrow$ existe $q \in \mathrm{IN}^*$ tal que $n = m + q$. Segue-se daí que: $n + p = (m + q) + p = m + (q + p) = m + (p + q) = (m + p) + q$, de onde obtemos $n + p > m + p$.

(ii) $m < n \Leftrightarrow$ existe $q \in \mathrm{IN}^*$ tal que $n = m + q$. Considerando $p \in \mathrm{IN}$ e a proposição (i) do teorema 3.1.3, a igualdade anterior pode ser escrita como $np = (m + q)p$, daí $np = mp + qp$, pela propriedade distributiva, concluindo-se então que $mp < np$.

- Boa ordenação: Todo subconjunto não vazio $S \subset$ IN possui um menor elemento $m_0 \in S$ que é menor do que todos os demais elementos de S.

Prova: Seja S um tal subconjunto não vazio de IN e consideremos o conjunto $M = \{n \in \text{IN} | \; n \leq x, \; \forall x \in S\}$. Observe que $0 \in M$. Como $S \neq \varnothing$, tomemos $s \in S$. Então $s + 1 \notin M$, pois $s + 1$ não é menor ou igual a s. Assim, $M \neq$ IN. Como $0 \in M$ e $M \neq$ IN, deve existir $m \in M$ tal que $m + 1 \notin M$, caso contrário, pelo princípio da indução, M deveria ser IN. Afirmamos que $m_0 = m$ é o menor elemento de S, isto é, $m_0 = \min S$. Como $m \in M$, então $m \leq x, \; \forall \; x \in S$. Só falta verificar que $m \in S$. Para isto, suponhamos o contrário, ou seja, que $m \notin S$. Então $m < x, \; \forall \; x \in S$. Segue-se daí que, $m + 1 \leq x, \; \forall \; x \in S$, do que resultaria $m + 1 \in M$, em contradição com a escolha de m. Logo, $m \in S$ conforme queríamos.

Com estas definições, podemos introduzir a ideia de conjunto ordenado, que se refere a qualquer conjunto não vazio A munido de uma relação de ordem. E com isso, ressaltar que o conjunto IN através da operação da adição é um conjunto ordenado.

3.2 OS NÚMEROS INTEIROS

Conforme exposto anteriormente, o processo sintético surge de alguma necessidade do povo. Neste sentido, os números negativos e suas propriedades foram introduzidos para dar significado a certas subtrações que não eram permitidas nos naturais, como por exemplo: 8 – 14, 3 – 5 etc.

Do ponto de vista do formalismo, será desenvolvida a construção dos números negativos a partir da estrutura aritmética de IN, através de operações básicas de Teoria dos Conjuntos e de relações de equivalência.

Num primeiro momento, definamos uma relação de equivalência no conjunto IN x IN:

Teorema 3.2.1: A relação ~ em IN x IN definida por $(a,b) \sim (c,d)$ quando $a + d = b + c$ é de equivalência.

Demonstração:

(i) Reflexividade: $(a,b) \sim (a,b)$, pois $a + b = b + a$. Assim, a reflexividade de $\sim$ é herança da comutatividade da adição em IN.

(ii) Simetria: $(a,b) \sim (c,d) \Rightarrow (c,d) \sim (a,b)$. Basta observar que tal implicação equivale à implicação $a + d = b + c \Rightarrow c + b = d + a$, que decorre da comutatividade da adição em IN.

(iii) Transitividade: $(a,b) \sim (c,d)$ e $(c,d) \sim (e,f) \Rightarrow (a,b) \sim (e,f)$. Temos que: $(a,b) \sim (c,d) \Rightarrow a + d = b + c$, e $(c,d) \sim (e,f) \Rightarrow c + f = d + e.$ Somando f aos dois membros da primeira igualdade e b aos dois membros da segunda igualdade, obtemos: $(a + d) + f = (b + c) + f$, e $(c + f) + b = (d + e) + b$, que por associatividade e comutatividade em IN obtemos: $(a + f) + d = (b + c) + + f$ e $(b + c) + f = (b + e) + d.$ Agora, aplicando a propriedade transitiva em IN chegamos em $(a + f) + d = (b + e) + d$, e pela lei do cancelamento da adição em IN temos que $a + f = b + e$, implicando em: $(a,b) \sim (e,f)$, o que se queria mostrar.

Convém ressaltar que de maneira intuitiva podemos escrever a seguinte equivalência: $a + d = b + c \Leftrightarrow a - b = c - d$, isto é, dois pares ordenados são equivalentes segundo a definição apresentada no teorema acima, quando a diferença entre suas coordenadas, na mesma ordem, coincidem. E segundo Ferreira (2013), foi desta forma que os matemáticos do século XIX iniciaram a construção do conjunto Z sem mencionar subtração, trazendo em sua essência o germe dessa operação e, tendo como ponto de partida o conjunto IN e suas operações, bem como noções de produto cartesiano e de relação de equivalência.

Neste contexto denotaremos por $\overline{(a,b)}$ a classe de equivalência do par ordenado (a,b) pela relação $\sim$, isto é, $\overline{(a,b)} = \{(x,y) \in \text{IN x IN} \mid (x,y) \sim (a,b)\}$. A título de exemplificação temos:

(i) $\overline{(0,3)} = \{(0,3),(1,4),(2,5),(3,6),...\}$;

(ii) $\overline{(3,0)} = \{(3,0),(4,1),(5,2),(6,3),...\}$;

(iii) $\overline{(5,2)} = \{(3,0),(4,1),(5,2),(6,3),...\}$.

Pode-se observar através dos exemplos dados que $\overline{(5,2)} = \overline{(3,0)}$.

E é a partir de classes de equivalência do conjunto quociente (IN x IN/ ~) = {$\overline{(a,b)}$/(*a*,*b*) $\in$ IN x IN}, que o conjunto dos números inteiros será construído no que se segue neste capítulo.

De posse ao que já foi exposto, definiremos agora, as operações de adição (+) e multiplicação (.) nos inteiros:

Para a adição de números inteiros devemos buscar uma definição para $\overline{(a,b)}$ + $\overline{(c,d)}$, mas antes de dar a definição é interessante uma abordagem de maneira intuitiva a fim de facilitar a compreensão. Já foi exposto anteriormente que (*a*,*b*) ~ (x,*y*), o que é equivalente a dizer: $\overline{(a,b)}$ = $\overline{(x,y)}$ e que ainda, em essência, expressa o fato de que *a* – *b* = *x* – *y*. Sendo assim, se $\overline{(a,b)}$ expressa a diferença (*a* – *b*) e $\overline{(c,d)}$ expressa (*c* – *d*), temos que $\overline{(a,b)}$ + $\overline{(c,d)}$ expressa (*a* – *b*) + (*c* – *d*) = (*a* + *c*) – (*b* + *d*), sendo esta última expressão, em nosso contexto, a tradução de $\overline{(a+c,b+d)}$. E é essa a ideia de adição de números inteiros que será exposta na definição que segue.

Definição 3.2.1: Dados $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$ em Z, definimos a soma $\overline{(a,b)}$ + $\overline{(c,d)}$ como sendo o inteiro $\overline{(a+c,b+d)}$.

Um aspecto muito importante da definição acima é que ela não depende de como as classes de equivalência são representadas. Note, por exemplo, que sendo $\overline{(2,4)}$ = $\overline{(3,5)}$ e $\overline{(3,0)}$ = $\overline{(4,1)}$, deveríamos ter $\overline{(2,4)}$ + $\overline{(3,0)}$ = $\overline{(7,6)}$, uma vez que $\overline{(3,5)}$ + $\overline{(4,1)}$ = $\overline{(7,6)}$, mas de acordo com a definição apresentada, temos que $\overline{(2,4)}$ + $\overline{(3,0)}$ = $\overline{(5,4)}$. No entanto, $\overline{(5,4)}$ = $\overline{(7,6)}$. Sendo assim, a definição dada não depende dos representantes das classes de equivalência envolvidas, podendo-se afirmar neste caso que a adição está bem definida. Porém, o teorema abaixo confirma o que foi descrito:

Teorema 3.2.2: Se $\overline{(a,b)}$ = $\overline{(a',b')}$ e $\overline{(c,d)}$ = $\overline{(c',d')}$, então $\overline{(a,b)}$ + $\overline{(c,d)}$ = $\overline{(a',b')}$ + $\overline{(c',d')}$, isto é, a adição de números inteiros está bem definida.

Desmonstração: Sabemos do teorema 2- (ii) que, como $\overline{(a,b)}$ = $\overline{(a',b')}$, então (*a*,*b*) ~ (*a’*,*b’*), isto é, *a* + *b’* = *b* + *a’* (I). Analogamente, como $\overline{(c,d)}$ = $\overline{(c',d')}$, então (*c*,*d*) ~ (*c’*,*d’*), isto é, *c* + *d’* = *d* + *c’* (II).

Temos: $\overline{(a,b)}$ + $\overline{(c,d)}$ = $\overline{(a+c,b+d)}$ e $\overline{(a',b')}$ + $\overline{(c',d')}$ = $\overline{(a'+c',b'+d')}$.

Basta agora mostrar que os dois segundos membros acima coincidem, o que equivale a mostrar que (*a* + *c*) + (*b’* + *d’*) = (*b* + *d*) + (*a’* + *c’*). Usando os resultados das sentenças (I) e (II) nesta última igualdade temos:

(*a* + *c*) + (*b’* + *d’*) = (*a* + *b’*) + (c + *d’*) = (*b* + *a’*) + (*d* + *c’*) = (*b* + *d*) + (*a’* + *c’*), o que se queria demonstrar.

Teorema 3.2.3: A operação de adição em Z é associativa, comutativa, tem $\overline{(0,0)}$ como elemento neutro e vale a lei do cancelamento, como em IN. Além disso, vale a propriedade do elemento oposto (ou simétrico, ou inverso aditivo): dado $\overline{(a,b)} \in$ Z, existe um único $\overline{(c,d)}$ $\in$ Z, tal que $\overline{(a,b)}$ + $\overline{(c,d)}$ = $\overline{(0,0)}$. Este $\overline{(c,d)}$ é o elemento $\overline{(b,a)}$.

Associativa: Sejam $\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)}, \overline{(e,f)}$ $\in$ Z, temos $\left[\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)}\right]+\overline{(e,f)}$ = $=\overline{(a,b)}+\left[\overline{(b,c)}+\overline{(e,f)}\right]$. De fato, por definição de adição em Z temos:

$\left[\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)}\right]+\overline{(e,f)}$ = $\overline{(a+c,b+d)}+\overline{(e,f)}$ = $\overline{((a+c)+e,(b+d)+f)}$. Agora, aplicando a propriedade associativa em IN e em seguida, novamente a definição de adição em Z, a igualdade anterior ficará como:

$\overline{((a+c)+e,(b+d)+f)}$ = $\overline{(a+(c+e),b+(d+f))}$ = $\overline{(a,b)}+\overline{(c+e,d+f)}$ = = $\overline{(a,b)}$ + $\left[\overline{(c,d)}+\overline{(e,f)}\right]$, conforme se queria demonstrar.

Comutativa: Sejam $\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)}$ $\in$ Z, temos $\overline{(a,b)}$+ $\overline{(c,d)}$ = $\overline{(c,d)}$ + $\overline{(a,b)}$. De fato, aplicando a definição de adição em Z obtemos: $\overline{(a,b)}$ + $\overline{(c,d)}$ = = $\overline{(a+c,b+d)}$. Em seguida, fazendo-se uso da comutatividade em IN e novamente a definição de adição em Z, a igualdade anterior ficará expressa por: $\overline{(a+c,b+d)}$ = $\overline{(c+a,d+b)}$ = $\overline{(c,d)}$ + $\overline{(a,b)}$, conforme se queria mostrar.

Elemento neutro: Para todo $\overline{(a,b)}$ $\in$ Z, existe $\overline{(0,0)}$em Z tal que $\overline{(a,b)}$ + $\overline{(0,0)}$ = $\overline{(0,0)}$ + $\overline{(a,b)}$ = $\overline{(a,b)}$. De fato, basta provarmos a igualdade

$\overline{(a,b)}$ + $\overline{(0,0)}$ = $\overline{(a,b)}$, já que foi provada a propriedade comutativa em Z. Sendo assim, temos pela definição de adição em Z que $\overline{(a,b)}$ + $\overline{(0,0)}$ = $\overline{(a+0,b+0)}$ = = $\overline{(a,b)}$, pela propriedade de elemento neutro em IN, conforme se queria mostrar.

Lei do cancelamento da adição: Sejam $\overline{(a,b)},\overline{(c,d)},\overline{(e,f)}$ $\in$ Z, temos que: se $\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)}$ = $\overline{(a,b)}+\overline{(e,f)}$, então $\overline{(c,d)}$ = $\overline{(e,f)}$. De fato, fixemos $\overline{(c,d)}$ e $\overline{(e,f)}$e apliquemos indução sobre $\overline{(a,b)}$. Se $\overline{(a,b)}$ = $\overline{(0,0)}$, então $\overline{(0,0)}$+ $\overline{(c,d)}$= $\overline{(0,0)}$+ $\overline{(e,f)}$, implicando em $\overline{(c,d)}$ = $\overline{(e,f)}$. Agora, supondo que $\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)}$ = $\overline{(a,b)}+\overline{(e,f)}$ implique em $\overline{(c,d)}$ = $\overline{(e,f)}$. Assumindo *s*($\overline{(a,b)}$) + $\overline{(c,d)}$ = *s*($\overline{(a,b)}$) + $\overline{(e,f)}$, temos *s*($\overline{(a,b)}$ + $\overline{(c,d)}$) = *s*($\overline{(a,b)}$) + $\overline{(e,f)}$). Como números naturais com mesmo sucessor são iguais, segue-se que $\overline{(a,b)}$ + $\overline{(c,d)}$ = $\overline{(a,b)}$+ $\overline{(e,f)}$. Logo, pelo princípio de indução finita, temos que $\overline{(a,b)}$ + $\overline{(c,d)}$ = $\overline{(a,b)}$+ $\overline{(e,f)}$ implica em $\overline{(c,d)}$ = $\overline{(e,f)}$, para todo $\overline{(a,b)}$, $\overline{(c,d)}$, $\overline{(e,f)}$ inteiros.

Elemento oposto: Dado $\overline{(a,b)}\in$Z, existe um único $\overline{(c,d)}\in$Z tal que $\overline{(a,b)}$ + $\overline{(c,d)}$ = $\overline{(0,0)}$. Este $\overline{(c,d)}$ é o elemento $\overline{(b,a)}$. Por definição de adição em Z temos que $\overline{(a,b)}$ + $\overline{(c,d)}$ = $\overline{(0,0)}$ é o mesmo que $\overline{(a+c,b+d)}$ = $\overline{(0,0)}$, e considerando os teoremas (2 (ii) e 3.2.1), temos que (a + c) + 0 = (b + d) + 0. Aplicando a propriedade do elemento neutro da adição em IN chegamos em a + c = b + d e, novamente fazendo-se uso dos mesmos teoremas (2 (ii) e 3.2.1), obtemos $\overline{(c,d)}$ = $\overline{(b,a)}$. Mostremos agora que este elemento $\overline{(c,d)}$ é único. Suponhamos então que, dado$\overline{(a,b)}\in$Z, existam dois elementos $\overline{(c,d)}$ e $\overline{(c',d')}$ diferentes entre si e pertencentes em Z que satisfaçam as mesmas condições, ou seja, $\overline{(a,b)}$ + $\overline{(c,d)}$ = $\overline{(0,0)}$ e $\overline{(a,b)}$ + $\overline{(c',d')}$ = $\overline{(0,0)}$. Por definição de adição em Z, as duas igualdades ficam escritas do seguinte modo: $\overline{(a+c,b+d)}$ = $\overline{(0,0)}$ e $\overline{(a+c',b+d')}$ = $\overline{(0,0)}$, donde obtemos $\overline{(a+c,b+d)}$= = $\overline{(a+c',b+d')}$. E aplicando-se os teoremas (2 (ii) e 3.2.1) vem que: (a + c) + (b + d') = (b + d) + (a + c'), que pelas propriedades associativa e comutativa em IN podemos escrever: (*a* + *b*) + (*c* + *d'*) = (*a* + *b*) + (d + *c'*), que pela lei do cancelamento da adição em IN chegamos em: *c* + *d'* = *d* + *c'*. Finalmente, aplicando-se novamente os teoremas (2 (ii) e 3.2.1)na última igualdade, escrevemos $\overline{(c,d)}$ = $\overline{(c',d')}$, o que contradiz a hipótese de serem diferentes. Logo, $\overline{(c,d)}$ e $\overline{(c',d')}$ são únicos.

Convém ressaltar que a unicidade do elemento oposto em Z permite o uso de um símbolo para o mesmo, então dado $\alpha \in$Z, o único $\beta \in$Z tal que $\alpha + \beta$ = $\overline{(0,0)}$ chama-se simétrico de α e será denotado por: - α (lê-se "menos α).

Definição 3.2.2: A subtração em Z, denotada por (-), é a operação definida da seguinte forma: Se α , β $\in$Z, então α - β = α + (-β). Assim, a subtração α - β nada mais é do que a soma de α com o simétrico de β.

Proposição 3.2.1: Para α , β , $\gamma \in$Z, vale:

i) - (-α) = α ;

ii) - α + β = β - α ;

iii) α - (-β) = α + β ;

iv) -α - β = -(α + β);

v) α - (β + γ) = α - β - γ ;

Demonstrações:

i) Se $\alpha = \overline{(a,b)}$, então - (-$\alpha$) = - $\overline{(b,a)}$ = $\overline{(a,b)}$ = α ;

ii) Se $\alpha = \overline{(a,b)}$ e $\beta = \overline{(c,d)}$, então - α + β = - $\overline{(a,b)}$ + $\overline{(c,d)}$ =

= $\overline{(b,a)}$ + $\overline{(c,d)}$ = $\overline{(b+c,a+d)}$= $\overline{(c+b,d+a)}$ = $\overline{(c,d)}$ + $\overline{(b,a)}$ = β - α

iii) Se $\alpha = \overline{(a,b)}$ e $\beta = \overline{(c,d)}$, então α - (-β) = α + β por (i);

iv) Se $\alpha = \overline{(a,b)}$ e $\beta = \overline{(c,d)}$, então -α - β = - $\overline{(a,b)}$ - $\overline{(c,d)}$ =

= $\overline{(b,a)}$ + $\overline{(d,c)}$ = $\overline{(b+d,a+c)}$ = - $\overline{(a+c,b+d)}$ = - [$\overline{(a,b)}$ + $\overline{(c,d)}$] =

= - (α + β);

v) Se $\alpha = \overline{(a,b)}$, $\beta = \overline{(c,d)}$ e $\gamma = \overline{(e,f)}$, então α - (β + γ) =

= $\overline{(a,b)}$ - [$\overline{(c,d)}$+ $\overline{(e,f)}$] = $\overline{(a,b)}$ - [$\overline{(c+e,d+f)}$] = $\overline{(a,b)}$ + $\overline{(d+f,c+e)}$ =

= $\overline{(a,b)}$ + $\overline{(d,c)}$ + $\overline{(f,e)}$ = $\overline{(a,b)}$ - $\overline{(c,d)}$ - $\overline{(e,f)}$ = α - β - γ.

Definição 3.2.3: Dados $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$ em Z, definimos o produto $\overline{(a,b)}.\overline{(c,d)}$ como sendo o inteiro $\overline{(ac+bd,ad+bc)}$.

Assim como ocorreu na adição, a definição dada para multiplicação de números inteiros não depende dos representantes das classes de equivalência envolvidas, podendo-se afirmar neste caso, que a multiplicação também está bem definida. Note que $\overline{(3,5)}$ = $\overline{(4,6)}$ e, pela definição dada para multiplicação temos que: $\overline{(3,5)}.\overline{(10,7)}$ = $\overline{(3.10+5.7,3.7+5.10)}$= $\overline{(65,71)}$ e $\overline{(4,6)}.\overline{(10,7)}$ = = $\overline{(4.10+6.7,4.7+6.10)}$ = $\overline{(82,88)}$, sendo que $\overline{(65,71)}$ = $\overline{(82,88)}$. Tal fato pode ser comprovado através do teorema que segue:

Teorema 3.2.4: A multiplicação em Z está bem definida, isto é, se $\overline{(a,b)}$ = $\overline{(a',b')}$ e $\overline{(c,d)}$ = $\overline{(c',d')}$, então $\overline{(a,b)}$. $\overline{(c,d)}$ = $\overline{(a',b')}$. $\overline{(c',d')}$.

Desmonstração: Como $\overline{(a,b)}$ = $\overline{(a',b')}$ por hipótese, temos que $\overline{(a,b)}$. $\overline{(c,d)}$ = $\overline{(a',b')}.\overline{(c,d)}$, pois a multiplicação em Z é fechada[1] e por definição de multiplicação em Z é igual a $\overline{(a'c+b'd,a'd+b'c)}$. Chamemos tal resultado de (I). Analogamente, como $\overline{(c',d')}$ = $\overline{(c,d)}$por hipótese, temos que $\overline{(a',b')}.\overline{(c',d')}$ = $\overline{(a',b')}.\overline{(c,d)}$, que por definição de multiplicação em Z é igual a $\overline{(a'c+b'd,a'd+b'c)}$e, chamemos este resultado de (II). Note que os resultados

---

1.Prova de que a multiplicação é fechada em Z: Se $\left(\overline{a,b}\right),\left(\overline{c,d}\right) \in$ **Z, então** $\left(\overline{a,b}\right).\left(\overline{c,d}\right) \in$ **Z. De fato, fixando** $\left(\overline{a,b}\right)$ **e aplicando indução sobre** $\left(\overline{c,d}\right)$ **temos que: se** $\left(\overline{c,d}\right)$ **=** $\left(\overline{0,0}\right)$**, então** $\left(\overline{a,b}\right).\left(\overline{0,0}\right)$ **= =** $\left(\overline{a.0+b.0,a.0+b.0}\right)$ **=** $\left(\overline{0,0}\right) \in$ **Z. Supondo** $\left(\overline{a,b}\right).\left(\overline{c,d}\right) \in$ **Z, mostremos que** $\left(\overline{a,b}\right).s\left(\left(\overline{c,d}\right)\right) \in$ **Z. Note que,** $\left(\overline{a,b}\right).s\left(\left(\overline{c,d}\right)\right)$ **=** $\left(\overline{a,b}\right).\left[\left(\overline{c,d}\right)+\left(\overline{1,0}\right)\right]$ **=** $\left(\overline{a,b}\right).\left(\overline{c+1,d}\right)$ **=** $\left(\overline{a.(c+1)+bd,ad+b.(c+1)}\right)$ **=** $\left(\overline{a+(ac+bd),b+(ad+bc)}\right)$**=** $\left(\overline{a,b}\right)$**+** $\left(\overline{aac+bd,ad+bc}\right)$**=** $\left(\overline{a,b}\right)$**+** $\left[\left(\overline{a,b}\right)\left(\overline{c,d}\right)\right] \in$ **Z, pois por hipótese de indução** $\left(\overline{a,b}\right).\left(\overline{c,d}\right) \in$ **Z e adição de inteiros também é inteiro. Logo, pelo princípio de indução segue-se que** $\left(\overline{a,b}\right).\left(\overline{c,d}\right) \in$ **Z, para todo** $\left(\overline{a,b}\right),\left(\overline{c,d}\right) \in$ **Z.**

obtidos (I) e (II) são iguais, logo conclui-se que $\overline{(a,b)}$. $\overline{(c,d)}$ = $\overline{(a',b')}$. $\overline{(c',d')}$, o que se queria mostrar.

Teorema 3.2.5: A multiplicação em Z é comutativa, associativa, tem $\overline{(1,0)}$ como neutro multiplicativo e é distributiva em relação à adição. Além disso, vale a propriedade do cancelamento multiplicativo, isto é, se α, β, $\gamma \in$ Z, com $\gamma \neq \overline{(0,0)}$ e $\alpha\,\gamma$ = $\beta\,\gamma$, então $\alpha = \beta$.

Demonstrações:

Associativa: Se $\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)}, \overline{(e,f)}$ $\in$ Z, então $[\overline{(a,b)}.\overline{(c,d)}].\overline{(e,f)}$ = = $\overline{(a,b)}.[\overline{(c,d)}.\overline{(e,f)}]$. De fato, aplicando a definição de multiplicação de números inteiros temos: $[\overline{(a,b)}.\overline{(c,d)}].\overline{(e,f)}$ = $\overline{(ac+bd, ad+bc)}.\overline{(e,f)}$ = = $\overline{((ac+bd).e+(ad+bc).f, (ac+bd).f+(ad+bc).e)}$, que pela propriedade distributiva em IN vem: $\overline{((ac).e+(bd).e+(ad).f+(bc).f, (ac).f+(bd).f+(ad).e+(bc).e)}$. Aplicando a propriedade associativa em IN no segundo membro da última igualdade obtemos: $\overline{(a.(ce)+b.(de)+a.(df)+b.(cf), a.(cf)+b.(df)+a.(de)+b.(ce))}$, que pela propriedade distributiva e comutativa em IN segue-se que: $\overline{(a.(ce+df)+b.(de+cf), a.(de+cf)+b.(ce+df))}$ e, pela definição de multiplicação nos inteiros é igual a: $\overline{(a,b)}.\overline{(ce+df, de+cf)}$ = $\overline{(a,b)}.\left[\overline{(c,d)}\overline{(e,f)}\right]$, o que se queria demonstrar.

Comutativa: Se $\overline{(a,b)}$, $\overline{(c,d)}$ $\in$ Z, então $\overline{(a,b)}.\overline{(c,d)}$ = $\overline{(c,d)}.\overline{(a,b)}$. De fato, aplicando primeiramente a definição de multiplicação de números inteiros e depois a comutatividade da adição e multiplicação em IN temos: $\overline{(a,b)}.\overline{(c,d)}$= =$\overline{(ac+bd, ad+bc)}$ = $\overline{(bd+ac, bc+ad)}$ = $\overline{(db+ca, cb+da)}$ = $\overline{(ca+db, cb+da)}$ = =$\overline{(c,d)}.\overline{(a,b)}$, o que se queria demonstrar.

Elemento neutro: Para todo $\overline{(a,b)} \in$ Z, existe $\overline{(1,0)} \in$ Z tal que $\overline{(a,b)}.\overline{(1,0)}$ = = $\overline{(1,0)}.\overline{(a,b)}$ = $\overline{(a,b)}$. De fato, pela definição de multiplicação de números inteiros, temos que: $\overline{(a,b)}.\overline{(1,0)}$ = $\overline{(a.1+b.0, a.0+b.1)}$, que pela definição de multiplicação e propriedade do elemento neutro multiplicativo em IN, a última igualdade pode ser escrita como: $\overline{(a,b)}.\overline{(1,0)}$ = $\overline{(a+0,0+b)}$ = $\overline{(a,b)}$, pela definição de adição de números naturais, o que se queria demonstrar.

Resultado análogo, também é obtido para mostrar que $\overline{(1,0)}.\overline{(a,b)}$ = = $\overline{(a,b)}$, tendo em vista que já foi provado que a comutatividade na multiplicação de números inteiros é válida.

Distributiva em relação à adição: Se $\overline{(a,b)}$, $\overline{(c,d)}, \overline{(e,f)} \in$ Z, então $\overline{(a,b)}$.[$\overline{(c,d)}$ + $\overline{(e,f)}$] = $\overline{(a,b)}.\overline{(c,d)}$ + $\overline{(a,b)}.\overline{(e,f)}$. De fato, aplicando a definição de adição ao primeiro membro da igualdade, obtemos: $\overline{(a,b)}$.[$\overline{(c,d)}$ + $\overline{(e,f)}$] = = $\overline{(a,b)}.\overline{(c+e,d+f)}$. E pela definição de multiplicação em Z temos: $\overline{(a,b)}$.[$\overline{(c,d)}$+$\overline{(e,f)}$] = $\overline{(a,b)}.\overline{(c+e,d+f)}$ = $\overline{(a.(c+e)+b.(d+f),a(d+f)+b.(c+e))}$. Aplicando a propriedade distributiva em IN ao último membro da igualdade vem: $\overline{(ac+ae)+(bd+bf),(ad+af)+(bc+be))}$, que por associatividade e comutatividade em IN obtemos: $\overline{(ac+bd)+(ae+bf),(ad+bc)+(af+be))}$ = = $\overline{(ac+bd,ad+bc)}+\overline{(ae+bf,af+be)}$, pela definição de adição em Z. E por fim, aplicando-se a definição de multiplicação em Z chegamos ao desejado, ou seja: $\overline{(a,b)}$.[$\overline{(c,d)}$ + $\overline{(e,f)}$] = $\overline{(a,b)}.\overline{(c,d)}$ + $\overline{(a,b)}.\overline{(e,f)}$, conforme se queria demonstrar.

Cancelamento multiplicativo: Sejam $\alpha =$ $\overline{(a,b)}$, $\beta =$ $\overline{(c,d)}$ e $\gamma =$ $\overline{(e,f)}$ $\neq$ $\overline{(0,0)}$ tais que $\alpha\ \gamma$ = $\beta\ \gamma$, isto é, $\overline{(ae+bf,af+be)}$ = $\overline{(ce+df,cf+de)}$, que equivale a: *ae* + *bf* + *cf* + *de* = *af* + *be* + *ce* + *df.* Agora, usando-se a aritmética dos naturais nessa igualdade, obtemos: *e*(*a*+*d*) + *f*(*b*+*c*) = = *e*(*b*+*c*) +*f*(*a*+*d*). Como $\overline{(e,f)} \neq \overline{(0,0)}$, então $e \neq f$. Suponhamos *e* > *f*, sem perda de generalidade, o que equivale a *e* = *f* + *g*, para algum $g \in \mathrm{IN}^*$. Substituindo *e* por *f* + *g* na penúltima igualdade, obtemos: *f*(*a*+*d*) + *g*(*a*+*d*) + *f*(*b*+*c*) = *f*(*b*+*c*) + + *g*(*b*+*c*) + *f*(*a*+*d*). Usando o cancelamento aditivo em IN, vem: *g*(*a*+*d*) = *g*(*b*+*c*). Como $g \in \mathrm{IN}^*$, segue o cancelamento multiplicativo em IN que *a*+*d* = *b*+*c*, ou seja, $\overline{(a,b)}$ = $\overline{(c,d)}$ e, portanto, α = β, o que se queria demonstrar.

Assim como nos naturais, também é possível comparar os elementos de Z através de uma relação de ordem, conforme definição:

Definição 3.2.4: Dados os inteiros $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$, escrevemos $\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)}$ (lê-se $\overline{(a,b)}$ é menor do que ou igual a $\overline{(c,d)}$, quando $a + d \leq b + c$.

Teorema 3.2.6: A relação $\leq$ definida acima é uma relação de ordem em Z, ou seja, é reflexiva, antissimétrica e transitiva. Além disso, essa relação é compatível com as operações em Z, isto é, para α , β , $\gamma \in$ Z arbitrários, vale:

i) $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$;

ii) $\alpha \leq \beta$ e $\gamma \geq \overline{(0,0)} \Rightarrow \alpha\,\gamma \leq \beta\,\gamma$;

iii) (Lei da Tricotomia): Apenas uma das situações seguintes ocorre: $\alpha = \overline{(0,0)}$ ou $\alpha < \overline{(0,0)}$ ou $\alpha > \overline{(0,0)}$.

Demonstração:

Reflexividade: De fato $\overline{(a,b)} \leq \overline{(a,b)}$, pois $a + b \leq b + a$, o que segue da reflexividade dos números naturais.

Antissimétrica: De fato, $\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)}$ implica que $a + d \leq b + c$ e $\overline{(c,d)} \leq \overline{(a,b)}$ implica que $c + b \leq d + a$. Por comutatividade em IN, a segunda desigualdade pode ser escrita como $b + c \leq a + d$. Considerando agora a condição de antissimetria nos naturais, temos que $a + d$ = b + c, donde $\overline{(a,b)} = \overline{(c,d)}$.

Transitividade: De fato, $\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)}$ implica que $a + d \leq b + c$ e $\overline{(c,d)} \leq \overline{(e,f)}$ implica que $c + f \leq d + e$. Pela monotonicidade da adição nos naturais, nas duas desigualdades anteriores, temos que: $(a+d) + f \leq (b+c) + f$ e, $(c + f) + \mathrm{b} \leq (d + e) + \mathrm{b}$. Aplicando as propriedades comutativa e associativa nos naturais, as desigualdades acima ficam escritas como: $(a+f) + d \leq (b+c) + f$ e $(b+c) + f \leq (b+e) + d$, que pela transitividade em IN, obtemos: $(a+f) + d \leq (b+e) + d$. Por fim, considerando a monotonicidade da adição em IN, chegamos em $(a + f) \leq (b + e)$, que por definição é o mesmo que $\overline{(a,b)} \leq \overline{(e,f)}$, o que se queria mostrar.

Agora devemos mostrar que para α , β , $\gamma \in$ Z temos:

i) $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha+\gamma \leq \beta + \gamma$. De fato, sejam $\alpha = \overline{(a,b)}$, $\beta = \overline{(c,d)}$ e $\gamma = \overline{(e,f)}$.

Temos que $\alpha \leq \beta \Rightarrow \overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)} \Rightarrow a+d \leq b+c$. Fazendo uso da monotonicidade da adição em IN nesta última desigualdade, chegamos em: (a+d) + (e+f) $\leq$ (b+c) + (e+f), que por comutatividade e associatividade em IN, obtemos: (a+e) + (d+f) $\leq$ (b+f) + (c+e). Por definição de relação de ordem escrevemos: $\overline{(a+e,b+f)} \leq \overline{(c+e,d+f)}$. Agora, por definição de adição em Z temos: $\overline{(a,b)}$ + $\overline{(e,f)} \leq \overline{(c,d)}$ + $\overline{(e,f)}$, ou seja, conclui-se então que $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha+\gamma \leq \beta + \gamma$.

ii) $\alpha \leq \beta$ e $\gamma \geq \overline{(0,0)} \Rightarrow \alpha\,\gamma \leq \beta\,\gamma$. De fato, sejam $\alpha = \overline{(a,b)}$, $\beta = \overline{(c,d)}$ e $\gamma = \overline{(e,f)}$. Temos que $\alpha \leq \beta \Rightarrow \overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)} \Rightarrow$ a+d $\leq$ b+c e, $\gamma \geq \overline{(0,0)} \Rightarrow \overline{(e,f)} \geq \overline{(0,0)} \Rightarrow f \leq e$. Logo, existem números naturais não nulos g e h tais que: $b+c = a+d+g$ e $e = f+h$. Destas igualdades concluímos que: $be + ce = ae + de + ge$, $bf + cf = af + df + gf$ e $ge = gf + gh$. Logo, $ae + de + ge + bf + cf = af + df + gf + be + ce$. Como $ge = gf + gh$, temos: $ae + de + gf + gh + bf + cf = af + df + gf + be + ce$. Aplicando a lei do cancelamento da adição em IN nesta última igualdade obtemos: $ae + de + gh + bf + cf = af + df + be + ce$, ou ($ae$ + bf) + (cf + de)+ gh = = (af + be) + (ce + df), donde (ae + bf) + (cf + de) $\leq$ (af + be) + (ce + df), que por definição de relação de ordem em Z, implica em $\overline{(ae+bf,af+be)} \leq \overline{(ce+df,cf+de)}$ e, que por definição de multiplicação em Z temos: $\overline{(a,b)}.\overline{(e,f)} \leq \overline{(c,d)}.\overline{(e,f)}$, concluindo-se daí que $\alpha\,\gamma \leq \beta\,\gamma$, conforme se queria provar.

iii) Dado $\alpha = \overline{(a,b)} \in$ Z arbitrariamente, temos que apenas uma das situações seguintes ocorre: $\alpha = \overline{(0,0)}$ ou $\alpha < \overline{(0,0)}$ ou $\alpha > \overline{(0,0)}$. De fato, da propriedade de tricotomia em IN sabemos que dados $a,b \in$ IN, vale uma e somente uma, das alternativas: $a = b$, $a < b$ ou $b < a$. Note que, da igualdade $a = b$, podemos escrever $a + 0 = b + 0$, donde $\overline{(a,b)} = \overline{(0,0)}$ e, portanto, $\alpha = \overline{(0,0)}$. Da desigualdade $a < b$, podemos escrever $a + 0 < b + 0$, donde $\overline{(a,b)} < \overline{(0,0)}$ e, portanto, $\alpha < \overline{(0,0)}$. Analogamente obtemos $\alpha > \overline{(0,0)}$ a partir da desigualdade $b < a$, comprovando assim o que se queria.

Definição 3.2.5: Dado $\overline{(a,b)} \in$ Z, dizemos que:

i) $\overline{(a,b)}$ é positivo quando $\overline{(a,b)} > \overline{(0,0)}$;

ii) $\overline{(a,b)}$ é não negativo quando $\overline{(a,b)} \geq \overline{(0,0)}$;

iii) $\overline{(a,b)}$ é negativo quando $\overline{(a,b)} < \overline{(0,0)}$;

iv) $\overline{(a,b)}$ é não positivo quando $\overline{(a,b)} \leq \overline{(0,0)}$.

Desta definição podemos observar que $\overline{(a,b)} \geq \overline{(0,0)}$ significa que $a + 0 \geq b + 0$, isto é, $a \geq b$. De modo análogo, temos também que: $\overline{(a,b)} > \overline{(0,0)} \Leftrightarrow a > b$, $\overline{(a,b)} \leq \overline{(0,0)} \Leftrightarrow a \leq b$ e $\overline{(a,b)} < \overline{(0,0)} \Leftrightarrow a < b$. Ressalta-se ainda, que esta observação vem ao encontro da ideia de que a classe de equivalência $\overline{(a,b)}$ representa a "diferença *a* – *b*". Note que, se $\overline{(a,b)}$ é positivo, como $a > b$, então existe $m \in$ IN* tal que $a = b + m$, igualdade que é equivalente a $\overline{(a,b)} = \overline{(m,0)}$. Do mesmo modo, se $\overline{(a,b)} < \overline{(0,0)}$, então existe $m \in$ IN* tal que $\overline{(a,b)} = \overline{(0,m)}$.

De posse destas observações e considerando a tricotomia em Z, pode-se afirmar que:

Z = $\{\overline{(0,m)} \mid m \in$ IN$^*\} \cup \{\overline{(0,0)}\} \cup \{\overline{(m,0)} \mid m \in$ IN$^*\}$, sendo a união disjunta, tendo-se portanto, efetivada a construção dos inteiros.

3.3 OS NÚMEROS RACIONAIS, IRRACIONAIS E REAIS

Seguindo a linha de evolução de acordo com o aparecimento de uma nova necessidade, temos que os números inteiros nem sempre são suficientes quando se trata de se resolver problemas que envolvem medidas. Para o momento, antes mesmo de conceituar os números racionais, será enfatizada de maneira intuitiva, sua importância, bem como a necessidade de seu surgimento.

Para isto, primeiramente é necessário o entendimento do que significa medir, o que segundo Oliveira (1968), é "*comparar duas grandezas de mesma espécie – área com área, volume com volume, comprimento com comprimento, velocidade com velocidade, etc.*".

Neste processo de comparação, uma das grandezas deve ser tomada como termo de comparação, sendo então chamada de unidade.

Para efetuar a medição é necessário:

> 1º) Estabelecer um único termo de comparação para todas as grandezas de mesma espécie – a unidade.
> 2º) Procurar responder a pergunta – quantas vezes? – a fim de obter um número, que é a medida da grandeza dada, na unidade adotada. (OLIVEIRA, 1968, p.113)

No entanto, a escolha da unidade deve ser feito de modo a obedecer ao aspecto de comodidade e praticidade. Por exemplo, não seria conveniente escolher *mm*² para medir a área de um terreno.

De uma maneira geral, se uma grandeza, medida com uma unidade *u*, mede *m*, e sendo *u* subdividida em *n* partes (*u’* = *u/n*) iguais, a medida *m* será dada por $\frac{m.n}{n}$. Porém, o problema surge quando a unidade escolhida não couber um número (inteiro) de vezes dentro da outra grandeza que se pretende medir, conforme representação abaixo:

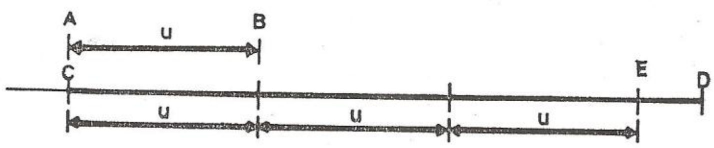


FIGURA 1 (OLIVEIRA,1968, p.115)

Observando a figura, percebe-se que $\overline{AB}$ não cabe um número inteiro de vezes em $\overline{CD}$, pois sobra um pedaço que corresponde à $\overline{ED}$. A fim de se resolver tal problema pode-se fazer uma subdivisão de $\overline{AB}$ em partes tais que caibam perfeitamente em $\overline{CD}$. Conforme indicação na figura, $\overline{AB}$ foi dividida em 3 partes iguais.

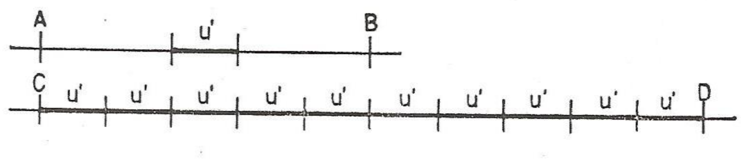


FIGURA 2 (OLIVEIRA, 1968, p.115)

Pode-se também observar que a nova unidade *u’* se acha contida em $\overline{CD}$ 10 vezes, isto é, $\overline{CD}$ = 10.*u’*. Então temos que: $\overline{CD}$ = 10.*u’* e $\overline{AB}$ = 3.*u’*. Porém a medida de $\overline{CD}$ em relação a $\overline{AB}$ ficará como: $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{10.u'}{3.u'} = \frac{10}{3}$, donde $\overline{CD}$ = $\frac{10}{3}\overline{AB}$, e como a razão $\frac{10}{3}$ não resulta em número inteiro, e diante de tal dificuldade, eis que surge a necessidade de novos números. Desse modo, o conjunto dos números inteiros é insuficiente para resolver o problema de medida e, portanto, deveremos criar novos tipos de números da espécie $\frac{10}{3}$ ou $\frac{a}{b}$.

Neste sentido, tal construção será feita através de um princípio denominado “princípio da extensão”, que de acordo com Oliveira (1968), fora criado por um matemático alemão chamado Hermann Hankel. Este princípio da extensão consiste em:

> 1º) Os novos números criados devem ser suficientes, isto é, resolver por completo a dificuldade que exigiu a sua construção.
> 2º) Os novos números não devem ser inconsistentes com os já existentes, mas, pelo contrário, devem contê-los como um caso particular. (OLIVEIRA, 1968, p.117)

Observemos que na segunda regra mencionada, está sendo ressaltado que, quando a unidade se achar um certo número inteiro de vezes contida na grandeza a ser medida os novos números devem se reduzir a números inteiros.

Sendo assim, os números que satisfazem o princípio de extensão apresentado e que são escritos de uma maneira geral na forma $\frac{a}{b}$ (onde $b \neq 0$), são chamados de números racionais. Desta forma, $\frac{a}{b}$ deverá ser entendido como um só número (que é o quociente de *a* dividido por *b*) e não como dois números.

Então, destaca-se desde já, que a essência da definição de número racional está na aceitação da possibilidade de se efetuar a divisão em qualquer caso, salvo quando o divisor for nulo.

Agora, do ponto de vista da formalização, devemos considerar o conjunto Z x Z* = {(*a*,*b*)|$a \in$ Z e $b \in$ Z*} e, definimos deste a relação: (*a*,*b*) ~ (*c*,*d*) quando *ad* = *bc*.

Teorema 3.3.1: A relação ~ em Z x Z* = {(*a,b*)|*a*$\in$Z e *b*$\in$ Z*} definida por (*a,b*) ~ (*c,d*) quando *ad* = *bc* é de equivalência.

Demonstração: Devemos provar que a relação ~ tem as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva. Temos:

i) Reflexividade: (*a,b*) ~ (*a,b*), pois *ab* = *ba,* que provém da comutatividade em Z;

ii) Simetria: (*a*,*b*) ~ (*c*,*d*) $\Rightarrow$ (*c*,*d*) ~ (*a*,*b*). De fato, de (*a*,*b*) ~ (*c*,*d*) temos que *ad* = *bc, que* resulta em *cb* = *da*, o que implica em (*c*,*d*) ~ (*a*,*b*).

iii) Transitividade: Se (*a*,*b*) ~ (*c*,*d*) e (*c*,*d*) ~ (*e*,*f*), então (*a*,*b*) ~ (*e*,*f*), isto é, se *ad* = *bc* e *cf* = *de*, então *af* = *be.* De fato, multiplicando ambos os membros da primeira igualdade por *f* e da segunda igualdade por *b*, obtemos *adf* = *bcf* e *bcf* = *bde*, de onde segue que *adf* = *bde*. Cancelando o fator *d*$\neq$0, obtemos o que se queria.

Cabe salientar que é devido à necessidade de *d*$\neq$0 na última etapa da demonstração acima, que é considerado Z x Z* e não Z x Z.

Definição 3.3.1: Dado (*a,b*) $\in$ Z x Z*, denotamos por $\frac{a}{b}$(que se lê "*a sobre b"*) a classe de equivalência do par (*a,b*) pela relação ~ acima. Assim,
$\frac{a}{b} = \{(x,y) \in ZxZ^* \mid (x,y) \sim (a,b)\}$

Teorema 3.3.2: (Propriedade fundamental das frações) Se (*a,b*) e (*c,d*) são elementos de Z x Z*, então $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se, $ad = bc$.

Demonstração: Temos, pelo teorema 2 – (ii):

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow (a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$, o que prova o resultado.

Desse modo, agora sim, é possível dar um significado preciso para o símbolo de fração $\frac{a}{b}$, tratando-se, portanto, de uma classe de equivalência com respeito à relação de equivalência que foi introduzida até aqui.

Definição 3.3.2: Denotamos por Q, e denominamos *conjunto dos números racionais*, o conjunto quociente de Z x Z^* pela relação de equivalência, isto é, Q = (Z x Z^*) / ~ = {$\frac{a}{b}$| a$\in$Z e b$\in Z^*$}

De posse da definição do conjunto dos números racionais, podemos iniciar a discussão sobre suas operações.

Definição 3.3.3: Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ números racionais, isto é, elementos de Q. Definimos as operações chamadas de adição e de multiplicação, respectivamente, por:

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ e $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$, em que, por simplicidade de notação, $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}$ será denotada por $\frac{a}{b}\frac{c}{d}$.

Convém ressaltar para o momento que as definições acima possuem sempre certa coerência, de modo que, se $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$ e $\frac{c}{d}=\frac{c'}{d'}$, então $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a'}{b'}+\frac{c'}{d'}$ e $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{a'}{b'}.\frac{c'}{d'}$, o que pode ser constatado por meio dos exemplos abaixo:

Note que $\frac{1}{2}+\frac{5}{3}=\frac{1.3+2.5}{2.3}=\frac{13}{6}$ e que $\frac{2}{4}+\frac{5}{3}=\frac{2.3+4.5}{4.3}=\frac{26}{12}=\frac{13}{6}$. Semelhantemente, também temos que: $\frac{1}{2}.\frac{5}{3}=\frac{1.5}{2.3}=\frac{5}{6}$ e $\frac{2}{4}.\frac{5}{3}=\frac{2.5}{4.3}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$. Isto tudo devido ao fato de que $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$, já que cumpre o teorema da propriedade fundamental das frações. Mas, o rigor pode ser comprovado pelo teorema a seguir:

Teorema 3.3.3: As operações em Q estão bem definidas.

Demonstração: Como $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$ e $\frac{c}{d}=\frac{c'}{d'}$ temos, por hipótese, que *ab' = ba'* e *cd' = dc'*. Considerando primeiramente a adição temos: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$, $\frac{a'}{b'}+\frac{c'}{d'}=\frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$. Então, devemos provar que as duas somas são iguais, isto é, que $(ad+bc)b'd'=(a'd'+b'c')bd$, ou seja, $adb'd'+bcb'd'=a'd'bd+b'c'bd$, ou ainda, $(ab')(dd')+(bb')(cd')=(a'b)(dd')+(bb')(c'd)$, o que segue imediatamente de nossa hipótese.

Agora, considerando a multiplicação temos: $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$, $\frac{a'}{b'}.\frac{c'}{d'}=\frac{a'c'}{b'd'}$. Então, devemos provar que os dois produtos são iguais, isto é, que $(ac).(b'd')=(a'c').(bd)$, ou seja, $(ab').(cd')=(ba').(dc')$, o que também segue imediatamente de nossa hipótese.

Concluímos assim, que as operações de adição e multiplicação em Q estão bem definidas.

Teorema 3.3.4: O conjunto Q, munido das operações acima, tem as propriedades algébricas de Z, onde o elemento neutro aditivo é $\frac{0}{1}$ e o neutro multiplicativo é $\frac{1}{1}$. Além disso, dado um racional $\frac{a}{b}\neq\frac{0}{1}$, existe $\frac{c}{d}$ em Q tal que $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{1}{1}$, isto é, todo elemento não nulo de Q (ou seja, diferente do neutro aditivo $\frac{0}{1}$) possui inverso multiplicativo.

Demonstração: Devemos mostrar que, para elementos arbitrários $r,s,t\in$ Q, vale:

1) $r + s = s + r$;
2) $(r + s) + t = r + (s + t)$;
3) $r + \frac{0}{1} = r$;
4) Existe r' tal que $r + r' = \frac{0}{1}$;
5) $rs = sr$;
6) $(rs)t = r(st)$;
7) $r.\frac{1}{1} = r$;
8) Se $r \neq \frac{0}{1}$, existe r'' tal que $rr'' = \frac{1}{1}$;

9) $r(s+t) = rs + rt$.

Provas:

1) Sejam $r = \frac{a}{b}$ e $s = \frac{c}{d}$, onde a e $c \in \mathbb{Z}$ e b e $d \in \mathbb{Z}^*$. Temos:

$r + s = \frac{ad+bc}{bd}$ e $s + r = \frac{cb+da}{db}$. A igualdade $r + s = s + r$ segue então da comutatividade da adição e da multiplicação em Z.

2) Sejam $r = \frac{a}{b}$, $s = \frac{c}{d}$ e $t = \frac{e}{f}$, onde a, c e $e \in \mathbb{Z}$ e b, d e $f \in \mathbb{Z}^*$. Temos:

$(r + s) + t = \left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f} = \left(\frac{ad+bc}{bd}\right)+\frac{e}{f} = \left(\frac{(ad+bc)f+(bd)e}{(bd)f}\right) =$

$= \left(\frac{(ad)f+(bc)f+(bd)e}{(bd)f}\right) = \left(\frac{a(df)+b(cf)+b(de)}{b(df)}\right) = \left(\frac{a(df)+b(cf+de)}{b(df)}\right) =$

$= \frac{a}{b}+\left(\frac{cf+de}{df}\right) = \frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right) = r + (s + t)$, o que se queria provar.

3) Sejam $r = \frac{a}{b}$ onde $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$. Temos: $r + \frac{0}{1} = \frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a.1+b.0}{b.1} =$

$= \frac{a+0}{b} = \frac{a}{b} = r$, o que se queria provar.

4) Seja $r = \frac{a}{b}$ onde $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, basta considerar $r' = \frac{-a}{b}$ onde $-a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$. Temos: $r + r' = \frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{ab+(-a).b}{b.b} = \frac{ab+(-ab)}{b.b} = \frac{0}{b.b} = \frac{0}{1}$, o que se queria provar.

5) Sejam $r = \frac{a}{b}$ e $s = \frac{c}{d}$, onde a e $c \in \mathbb{Z}$ e b e $d \in \mathbb{Z}^*$. Temos:

$r.s = \frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{ca}{db} = \frac{c}{d}.\frac{a}{b} = s.r$, o que se queria provar.

6) Sejam $r = \frac{a}{b}$, $s = \frac{c}{d}$ e $t = \frac{e}{f}$, onde a, c e $e \in \mathbb{Z}$ e b, d e $f \in \mathbb{Z}^*$. Temos:

$(rs)t = \left(\frac{a}{b}.\frac{c}{d}\right).\frac{e}{f} = \left(\frac{ac}{bd}\right).\frac{e}{f} = \frac{(ac).e}{(bd).f} = \frac{(ac).e}{(bd).f} = \frac{a.(ce)}{b(df)} = \frac{a}{b}.\left(\frac{ce}{df}\right) =$

$= \frac{a}{b}.\left(\frac{c}{d}.\frac{e}{f}\right) = r(st)$, o que se queria provar.

7) Seja $r = \frac{a}{b}$, onde $a \in$ Z e $b \in Z^*$. Temos: $r.\ \frac{1}{1} = \frac{a}{b}\ .\ \frac{1}{1} = \frac{a.1}{b.1} = \frac{a}{b} = r$, o que se queria provar.

8) Seja $r = \frac{a}{b}$, onde *a, b* $\in Z^*$, basta considerar $r'' = \frac{b}{a}$. Temos que $r.r'' = \frac{a}{b}.\frac{b}{a} = \frac{a.b}{b.a} = \frac{b.a}{b.a} = \frac{1}{1}$, o que se queria provar.

9) Sejam $r = \frac{a}{b}$,$s = \frac{c}{d}$ e $t = \frac{e}{f}$, onde *a*, *c e e*$\in$Z e *b*, *d* e $f \in Z^*$. Temos que $r(s+t) = \frac{a}{b}.\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b}.\left(\frac{cf+ed}{df}\right) = \frac{a.(cf+ed)}{b.(df)} = \frac{a.(cf)+a.(ed)}{b.(df)} = \frac{(ac).(bf)+(bd).(ae)}{(bd).(bf)} = \frac{ac}{bd}+\frac{ae}{bf} = \frac{a}{b}.\frac{c}{d} + \frac{a}{b}.\frac{e}{f} = rs + rt$, o que se queria provar.

Definição 3.3.4: Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ números racionais com $b,d > 0$. Escrevemos $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ quando $ad \leq bc$ e dizemos que $\frac{a}{b}$ é menor do que ou igual a $\frac{c}{d}$.

Teorema 3.3.5: A relação $\leq$, apresentada acima, está bem definida e é uma relação de ordem em Q.

Demonstração: Devemos mostrar que a relação $\leq$ definida acima é reflexiva, antissimétrica e transitiva. De fato:

Reflexividade: $\frac{a}{b} \leq \frac{a}{b}$, pela definição acima temos que $ab \leq ba$, que é verdadeira dada a comutatividade e relação de ordem em Z.

Antissimetria: Se $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ e $\frac{c}{d} \leq \frac{a}{b}$, então $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. De fato, pois $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ implica que $ad \leq bc$ e $\frac{c}{d} \leq \frac{a}{b}$ implica que $cb \leq ad$. Por comutatividade em Z, as duas desigualdades ficam expressas por: $ad \leq bc$ e $bc \leq ad$. Logo, considerando a antissimetria em Z, temos que $ad = bc$, donde pelo Teorema (propriedade fundamental das frações) conclui-se que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, conforme se queria provar.

Transitividade: Se $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ e $\frac{c}{d} \leq \frac{e}{f}$, então $\frac{a}{b} \leq \frac{e}{f}$. De fato, de $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ sabemos que $ad \leq bc$ e de $\frac{c}{d} \leq \frac{e}{f}$ sabemos que $cf \leq ed$. Dessas duas últimas desigualdades, considerando $f > 0$ e o teorema 3.2.6 (ii), escrevemos: $(ad)f \leq (bc)f$ e $b(cf) \leq b(ed)$, que por transitividade em Z obtemos: $(ad)f \leq b(ed)$. Considerando a comutatividade e associatividade em Z chegamos em: $(af)d \leq (eb)d$, que aplicando-se a lei do cancelamento multiplicativo em Z é equivalente à $af \leq eb$, que por definição de relação de ordem, conclui-se que $\frac{a}{b} \leq \frac{e}{f}$, conforme se queria mostrar.

Outro teorema de muita importância na apresentação dos números racionais é o que se refere à densidade do conjunto dos números racionais, cujo enunciado é dado por:

Teorema 3.3.6: (Densidade de Q) Se r e s, com $r < s$, são dois números racionais, existe um número racional t tal que $r < t < s$.

Demonstração: Como $r < s$, temos que $2r = r+r < r+s$ e $r+s < s+s = 2s$. Logo, $2r < r+s < 2s \Rightarrow r < \frac{1}{2}(r+s) < s$. Portanto, $\frac{1}{2}(r+s)$ satisfaz a condição para ser t.

Vale a pena ressaltar que, segundo Lobeiro (2000), com a definição de relações de equivalência foi possível sanar as imperfeições de cada conjunto, construindo assim, a partir dos naturais, os inteiros e os racionais, de modo a ter IN $\subset$ Z $\subset$ Q, em que Z é o menor conjunto no qual a equação $m + x = s$ sempre possui solução para elementos m e s inteiros arbitrários, e Q é o menor conjunto que garante solução para a equação $m.x = s$, para $m \neq 0$ e s inteiros arbitrários.

No entanto, não se pode dar o caso por encerrado, pois o conjunto dos racionais ainda apresenta imperfeições. Por exemplo, a equação $x^2 = 2$ não possui solução em Q. Para provar esse fato, suponhamos que o racional $\frac{a}{b}$, reduzido a uma forma irredutível, seja tal que $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$. Como *a² = 2b²*, logo *a²* é um número inteiro par, o que implica que *a* é par, isto é $a = 2.a_1$, onde $a_1 \in$ Z. Portanto $(2a_1)^2 = 2b^2$, isto é $b^2 = 2{a_1}^2$, de onde segue que b^2 é par, ou seja, b também é par, o que contradiz a hipótese de que $\frac{a}{b}$ era uma fração irredutível.

Esse tipo de inconsistência é decorrente do fato de que o conjunto dos números racionais não é completo, ou seja, apresenta descontinuidades. Sendo assim, o referido conjunto pode ser dividido em duas partes disjuntas que não possuem elementos de fronteira. Com isso, pode-se construir subconjuntos de números racionais, de modo que um subconjunto não contenha supremo e nem seu complementar contenha ínfimo.

O objetivo a ser seguido é o de se completar o conjunto dos números racionais, o que se pode alcançar, mediante a noção de corte no conjunto dos números racionais. Essa ideia é conhecida como "Cortes de Dedekind", tendo sido introduzida por Richard Dedekind (1831-1916) e é definida como:

Definição 3.3.5: Um conjunto α de números racionais diz-se um corte se satisfizer as seguintes condições:

i) Ø $\neq \alpha \neq$ Q;

ii) se *r* $\in \alpha$ e *s* < *r* (*s* racional), então *s* $\in \alpha$;

iii) em α não existe elemento máximo.

Proposição 3.3.1: Sejam α um corte e *r* $\in$Q. Então, *r* é cota superior de α se, e somente se, *r* $\in$Q\\α.

Demonstração: Se *r* é cota superior de α, então *r* não pode pertencer a α, caso contrário *r* seria elemento máximo de α, contradizendo o item (iii) da definição de corte. Reciprocamente, se *r* $\in$Q\\α, então *r* é cota superior de α, pois caso contrário, haveria *s* $\in \alpha$ tal que *r* < *s*, o que pelo item (ii) da definição de corte, obrigaria *r* a pertencer a α, uma contradição.

Proposição 3.3.2: Se $r \in$Q e α = {$x \in$Q| $x < r$}, então α é um corte e r é a menor cota superior de α.

Demonstração: Primeiramente deve-se mostrar que α satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) da definição de corte (def. 3.3.5). No caso da condição (i), note que ela já é satisfeita, a partir da própria hipótese, já que $r \in$Q\ α. Sendo assim, Ø $\neq \alpha \neq$Q. A condição (ii) é trivialmente satisfeita pela hipótese da proposição em questão. Quanto a (iii), basta observar que se $s \in \alpha$, então $s < \frac{s+r}{2} < r$ e, como $\frac{s+r}{2} \in$Q, então $\frac{s+r}{2} \in \alpha$. Assim, s não é elemento máximo de α. O que também mostra que r é a menor cota superior de α.

Definição 3.3.6: Os cortes do tipo da proposição anterior são denominados cortes racionais e se representam por r^*.

A fim de melhor compreensão da definição acima, cabe ressaltar algumas observações a respeito do que já foi apresentado acerca da teoria dos cortes. Então, sendo o conjunto α de números racionais um corte, temos que tal conjunto será denominado de minorante, enquanto seu complementar Q\ α de majorante do corte, de modo que seus respectivos elementos serão denominados números minorantes e números majorantes. Sendo assim, dá-se o nome de corte racional quando o conjunto majorante do corte possui elemento mínimo e, reciprocamente, todo corte racional é determinado por um número racional.

No entanto, existem cortes que não possuem cota superior mínima e, portanto não são racionais, conforme fica exposto no teorema que segue:

Teorema 3.3.7: Seja α = {$x \in$ Q| $x^2 < 2$ ou x < 0}. Então α é um corte que não é racional.

Demonstração: A condição (i) é verificada, pois é claro que α e Q\ α são conjuntos não vazios e, como não existe um número racional r tal que $r^2 = 2$, segue que dado um número racional arbitrário, pela Lei da Tricotomia, teremos $r \in \alpha$ ou $r \in$ Q\ α, donde $\alpha \cup$ Q\ α = Q, logo Ø$\neq \alpha \neq$Q é satisfeita. Quanto à condição (ii), temos que tomando arbitrariamente dois números racionais $r \in \alpha$ e s, sendo $s < r$, implica em dizer que $r^2 < 2$ ou $r < 0$ e, $s^2 < r^2$. Logo, $s^2 < 2$ e, portanto, $s \in \alpha$. Para a condição (iii), deve-se provar que se

$x \in \alpha$, então existe $y \in \alpha$, com $y > x$, o que é óbvio se $x \leq 0$. Suponhamos então $x > 0$ com $x^2 < 2$. Para encontrar um y nestas condições, basta encontrar $h \in \mathbb{Q}_+^*$ tal que $(x + h)^2 < 2$ e pôr $y = x + h$. Nestas condições, temos $x^2 + 2xh + h^2 < 2$, de modo que a resolução desta inequação em h conduziria expressões indesejáveis para o presente contexto. Sendo assim, busquemos sem perda de generalidade, $h < 1$, obtendo-se, portanto: $x^2 + 2xh + h^2 < x^2 + 2xh + h$ (pois $h < 1$), que fica menor do que 2 se tomarmos $h < \dfrac{2-x^2}{2x+1}$ (que faz sentido, pois $x > 0$). Como a expressão $\dfrac{2-x^2}{2x+1}$ é positiva, tomando $h < \min\left\{1, \dfrac{2-x^2}{2x+1}\right\}$, $h \in \mathbb{Q}_+^*$ e $y = x + h$, obtemos $y^2 = (x + h)^2 < 2$, isto é, $y \in \alpha$ e $y > x$, de modo que a existência de um tal h é garantida pelo fato de Q ser arquimediano. Sendo assim, α é um corte.

Agora, verifiquemos que α não possui cota superior mínima. Note que os racionais que não pertencem a α são os positivos que tem quadrado ≥ 2. Sabe-se que não existe racional cujo quadrado é 2. Logo $y \in \mathbb{Q}\backslash\alpha$ se, e somente se, $y > 0$ e $y^2 > 2$. Da proposição 3.3.1, sabemos que todo elemento y de $\mathbb{Q}\backslash\alpha$ é maior que qualquer elemento $x \in \alpha$. Então mostremos que dado $y \in \mathbb{Q}\backslash\alpha$, existe $z \in \mathbb{Q}\backslash\alpha$ com $z < y$, de onde decorre o que queríamos provar. Novamente, busquemos h racional positivo tal que $(y - h)^2 > 2$ e façamos $z = y - h$. Não perdendo a generalidade se supusermos $h < 1$. A condição $(y - h)^2 > 2$ equivale a $y^2 - 2hy + h^2 > 2$ ou $y^2 - h(2y - h) > 2$ ou $h < \dfrac{y^2-2}{2y-h}$, já que $2y - h > 0$ (pois $y > 1$ e $h < 1$). Como $h > 0$, então $\dfrac{y^2-2}{2y-h}$ é maior do que $\dfrac{y^2-2}{2y}$. Assim, tomando $h < \min\left\{1, \dfrac{y^2-2}{2y}\right\}$ em $\mathbb{Q}_+^*$, o que é possível pois Q é arquimediano, obtemos: $(y - h)^2 = y^2 - 2hy + h^2 > y^2 - 2y\dfrac{y^2-2}{2y} + h^2 =$ $= 2 + h^2 > 2$.

Definição 3.3.7: O conjunto IR formado por todos os cortes, racionais ou irracionais, é chamado de o conjunto dos números reais e seus elementos de números reais.

De posse desta definição, um número real é um corte. Caso o corte seja racional diremos que o número real é racional e caso o corte seja irracional diremos que o número real é irracional. E ainda, denotaremos por *C* o conjunto de todos os cortes.

Prosseguindo a ideia de evolução dos conceitos, outras definições se fazem necessárias, dentre as quais começaremos com a de relação de ordem e em seguida, apresentaremos as operações “+” e “.”.

Definição 3.3.8: Sejam α e $\beta \in C$. Dizemos que α é menor do que β e escrevemos $\alpha < \beta$ quando $\beta \setminus \alpha \neq \varnothing$.

Definição 3.3.9: Se $\alpha \in C$ e $\alpha > 0^*$, α chama-se corte positivo. Se $\alpha < 0^*$, α é dito corte negativo. Se $\alpha \geq 0^*$, α chama-se corte não negativo e se $\alpha \leq 0^*$, α chama-se não positivo.

Teorema 3.3.8: (Tricotomia) Para α, $\beta \in C$, temos que uma e apenas uma das possibilidades a seguir ocorre: $\alpha = \beta$ ou $\alpha < \beta$ ou $\alpha > \beta$.

Demonstração: É claro que $\alpha = \beta$ exclui as outras duas possibilidades, pela definição de igualdade de conjuntos. De modo análogo, as possibilidades $\alpha < \beta$ ou $\alpha > \beta$ claramente excluem $\alpha = \beta$. Então mostremos que as desigualdades também se excluem mutuamente. Para isto, suponhamos o contrário, isto é, que $\alpha < \beta$ e $\alpha > \beta$ ocorram simultaneamente. Então, existem $r \in \beta \setminus \alpha$ e $s \in \alpha \setminus \beta$. De $r \in \beta$ e $s \notin \beta$ resulta $r < s$, e de $s \in \alpha$ e $r \notin \alpha$ resulta $s < r$, contradizendo a lei da tricotomia em Q. Concluímos então, que no máximo uma das três possibilidades ocorre. Agora, para mostrar que uma delas necessariamente ocorre, temos que $\alpha = \beta$ ou $\alpha \neq \beta$. Se $\alpha = \beta$, nada há a provar. Suponhamos $\alpha \neq \beta$. Então, $\alpha \setminus \beta \neq \varnothing$ ou $\beta \setminus \alpha \neq \varnothing$ (pois caso contrário, $\alpha = \beta$). No primeiro caso, $\beta < \alpha$ e, no segundo caso, $\alpha < \beta$.

Teorema 3.3.9: A relação $\leq$ é uma relação de ordem em *C.*

Demonstração: Devemos mostrar que a reflexividade, a antissimetria e a transitividade são válidas. Consideremos α, β e γ cortes. Segue:

(i) (Reflexividade): $\alpha \geq \alpha$. Nada a demonstrar.

(ii) (Antissimetria): $\alpha \geq \beta$ e $\beta \geq \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$. De fato, por hipótese, temos que $\alpha \geq \beta \Rightarrow \alpha > \beta$ ou $\alpha = \beta$ e, de $\beta \geq \alpha \Rightarrow \beta > \alpha$ ou $\beta = \alpha$. Temos, portanto, quatro casos a analisar:

1º caso: Se $\alpha > \beta$ e $\beta > \alpha$, absurdo.

2º caso: Se $\alpha > \beta$ e $\beta = \alpha$, temos $\alpha > \alpha$, absurdo.

3º caso: Se $\alpha = \beta$ e $\beta > \alpha$, então $\alpha > \alpha$, absurdo.

4º caso: Se $\alpha = \beta$ e $\beta = \alpha$, então $\alpha = \beta$.

(iii) (Transitiva): $\alpha \geq \beta$ e $\beta \geq \gamma \Rightarrow \alpha \geq \gamma$. De fato, por hipótese, temos que $\alpha \geq \beta \Rightarrow \alpha > \beta$ ou $\alpha = \beta$ e, de $\beta \geq \gamma \Rightarrow \beta > \gamma$ ou $\beta = \gamma$. Temos, portanto, quatro casos a analisar:

1º caso: Se $\alpha > \beta$ e $\beta > \gamma \Rightarrow \alpha > \gamma$. Se $\alpha = \gamma$, então $\gamma > \beta$ e $\beta > \gamma$ (absurdo). Se $\alpha < \gamma$, então $\beta < \alpha < \gamma$ e $\beta > \gamma$ (absurdo). Logo, $\alpha > \gamma$.

2º caso: Se $\alpha > \beta$ e $\beta = \gamma \Rightarrow \alpha > \gamma$. (Trivial)

3º caso: Se $\alpha = \beta$ e $\beta > \gamma \Rightarrow \alpha > \gamma$. (Trivial)

4º caso: Se $\alpha = \beta$ e $\beta = \gamma \Rightarrow \alpha = \gamma$. (Trivial)

O teorema que segue define a operação de adição em *C*.

Teorema 3.3.10: Sejam α, $\beta \in C$. Se $\gamma = \{r + s \mid r \in \alpha \text{ e } s \in \beta\}$, então $\gamma \in C$.

Demonstração: Mostremos que γ satisfaz as três condições da definição de corte:

i) É claro que $\gamma \neq \emptyset$. Sejam $t \in \mathbb{Q} \backslash \alpha$ e $u \in \mathbb{Q} \backslash \beta$. Como $t > r$, $\forall r \in \alpha$ e $u > s$, $\forall s \in \beta$, então $t + u > r + s$, $\forall r \in \alpha$, $\forall s \in \beta$, isto é, $t + u \notin \gamma$, logo $\gamma \neq \mathbb{Q}$.

ii) Sejam $r \in \gamma$ e $s < r$ (s racional). Mostremos que $s \in \gamma$; r é do tipo $p + q$, com $p \in \alpha$ e $q \in \beta$, Então, de $s < p + q$, podemos escrever $s = p + q'$ com $q' < q$ e, portanto, $q' \in \beta$. Logo, $s = p + q'$, com $p \in \alpha$ e $q' \in \beta$, isto é, $s \in \gamma$.

iii) Vamos mostrar que em γ não há elemento máximo, isto é, se $r \in \gamma$, existe $s \in \gamma$ com $s > r$. Temos: $r = p + q$, $p \in \alpha$ e $q \in \beta$. Como existe $p' > p$, o racional $s = p' + q \in \gamma$ e é maior do que r.

Definição 3.3.10: Para $\alpha, \beta \in C$, definimos $\alpha + \beta$ como sendo o corte do teorema anterior, ou seja, $\alpha + \beta = \{ r + s | \, r \in \alpha \text{ e } s \in \beta \}$.

Agora provaremos que a adição satisfaz as seguintes propriedades: associativa, comutativa, existência do elemento neutro, existência de oposto e compatibilidade da adição com a ordem.

- Associativa: $\forall \alpha, \beta, \gamma \in C$, temos: $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$. De fato, pela definição acima temos que $\alpha + (\beta + \gamma) = \{r + (s+t) | \, r \in \alpha, s \in \beta \text{ e } t \in \gamma\}$ = $= \{ (r + s)+t | \, r \in \alpha, s \in \beta \text{ e } t \in \gamma \} = (\alpha + \beta) + \gamma$.

- Comutativa: $\forall \alpha, \beta \in C$, temos: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$. De fato, pela definição anterior, temos que $\alpha + \beta = \{r + s | \, r \in \alpha \text{ e } s \in \beta\} = \{s + r | \, r \in \alpha$ e $s \in \beta\} = \beta + \alpha$.

- Existência de elemento neutro: $\forall \alpha \in C$, temos: $\alpha + 0^* = \alpha$. Para provar tal propriedade serão verificadas duas inclusões: $\alpha + 0^* \subset \alpha$ e $\alpha \subset \alpha + 0^*$. Seja $r \in \alpha + 0^*$. Então $r = p + q$, com $p \in \alpha$ e $q \in 0^*$, isto é $q < 0$. Assim, $r < p \in \alpha$ e, portanto, $r \in \alpha$. Logo, $\alpha + 0^* \subset \alpha$. Seja agora $r \in \alpha$. Tomemos $s \in \alpha$ com $s > r$, podemos expressar r como $r = s + (r - s)$, onde $r – s < 0$ e, portanto, ele pertence a 0^*. Assim, $r \in \alpha + 0^*$ e $\alpha \subset \alpha + 0^*$.

- Existência de oposto: Para todo $\alpha \in C$, existe um único $\beta \in C$ tal que $\alpha + \beta = 0^*$. Convém ressaltar que, da mesma maneira como nos casos dos inteiros e racionais, tal β denota-se por $-\alpha$ e se chama simétrico (ou inverso aditivo) de α. Suponhamos $\alpha + \beta_1 = \alpha + \beta_2 = 0^*$. Obtemos: $\beta_2 = \beta_2 + 0^* =$ $= \beta_2 + (\alpha + \beta_1) = (\beta_2 + \alpha) + \beta_1 = 0^* + \beta_1 = \beta_1$. Agora, para a demonstração da existência do simétrico, temos que dado $\alpha \in C$, o candidato a $-\alpha$ é o conjunto obtido pelos opostos dos elementos que estão fora de α, com exceção do oposto da cota superior mínima de α. Mais precisamente, seja $\beta = \{p \in \mathbb{Q} | \, -p$ é cota superior NÃO mínima de $\alpha\}$. Mostremos que β é um corte e que

$\alpha+\beta$ = 0^*. Para isto, verifiquemos as três condições da definição de corte (i), (ii) e (iii), conforme segue:

(i) Trivial pela definição de β em relação ao corte α.

(ii) Se $r \in \beta$, -r é cota superior NÃO mínima de α. Logo, se $s < r$ (s racional), então -s > -r e, desta forma -s também é cota superior NÃO mínima de α. Logo, $s \in \beta$.

(iii) Seja $r \in \beta$. Queremos encontrar $s > r$ em β. Como -r é cota superior de α, mas não é mínima, então existe $t \in$ Q, -t < -r, tal que -t é cota superior de α e, portanto, -$t \notin \alpha$. Seja $s = \dfrac{r+t}{2}$. Temos: -t < -s < -r, de modo que -s é cota superior de α mas não é mínima, logo $s \in \beta$ e $s > r$, como queríamos.

Agora, verifiquemos que $\alpha+\beta = 0^*$. Seja $t \in \alpha+\beta$. Então $t = r + s$, com $r \in \alpha$ e $s \in \beta$. Como $-s \notin \alpha$, então $-s > r$, de modo que $0 > r + s = t$, e portanto, $t \in 0^*$. Sejam $r \in \alpha$ e $r' \notin \alpha$ (r' não sendo cota superior mínima de α), tais que $r' - r = -t$. Segue que $t = r + (-r')$, com $r \in \alpha$ e $-r' \in \beta$, ou seja, $t \in \alpha+\beta$.

- Compatibilidade da adição com a ordem: $\forall\, \alpha, \beta, \gamma \in C$, temos: $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha+\gamma \leq \beta+\gamma$. Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in C$, com $\alpha \leq \beta$; vamos provar que $\alpha+\gamma \leq \beta+\gamma$. Temos: $t \in \alpha+\gamma \Rightarrow t = r + s$, com $r \in \alpha$ e $s \in \gamma$. Como $\alpha \leq \beta$, temos $\alpha \subset \beta$, donde obtemos que $r \in \alpha \Rightarrow r \in \beta$ e, sendo $t = r + s \in \beta+\gamma$, vem que $\alpha+\gamma \subset \beta+\gamma$. Portanto $\alpha+\gamma \leq \beta+\gamma$.

Para a multiplicação em C consideraremos o seguinte teorema que segue.

Teorema 3.3.11: Para $\alpha, \beta \in C$ com $\alpha \geq 0^*$ e $\beta \geq 0^*$, seja γ = $Q_-^* \cup \{r \in Q \mid r = pq$, com $p \in \alpha$, $q \in \beta$, $p \geq 0$ e $q \geq 0\}$. Então γ é um corte e $\gamma \geq 0$.

Demonstração: Devemos mostrar que as três condições da definição de corte são satisfeitas, conforme segue:

(i) Note que $\gamma \neq \emptyset$, pois $Q_- \subset \gamma$. Para provar que $\gamma \neq Q$, procederemos assim: como $\alpha, \beta \in C$, então existem racionais m e n com $m \notin \alpha$ e $n \notin \beta$, daí:

$\forall\, r \in \alpha$, com $r \geq 0$, $r \leq m$ e $\forall\, s \in \beta$, com $s \geq 0$, $s \leq n$. Logo, $rs \leq mn$ para todo $r \in \alpha$, $r \geq 0$, para todo $s \in \beta$, $s \geq 0$, portanto, $mn \notin \gamma$. O que prova a condição Ø $\neq \gamma \neq C$.

(ii) Sejam *p, q* racionais com $p \in \gamma$ e $q < p$, precisamos provar que $q \in \gamma$. Então: (a) se $p \leq 0$, então $q < 0$, logo $q \in \gamma$;

(b) se $p > 0$ e $q \leq 0$, $q \in \gamma$;

(c) se $p > 0$ e $q > 0$, vem: $p \in \gamma$ e $p > 0 \Rightarrow p = rs$ para algum $r \in \alpha$, $r \geq 0$, e para algum $s \in \beta$, $s \geq 0$. De $0 < q < p = rs$, vem $\frac{q}{r} < s$, assim $\frac{q}{r} \in \beta$ e $\frac{q}{r} > 0$; logo, $q = r \cdot \frac{q}{r}$ com $r \in \alpha$, $r \geq 0$ e $\frac{q}{r} \in \beta$, $\frac{q}{r} > 0$. Portanto, $q \in \gamma$.

(iii) Agora, para provarmos que γ não tem máximo, basta provarmos que, se $p \in \gamma$ e $p > 0$, então existe $q \in \gamma$ com $q > p$. Temos: $p \in \gamma$ e $p > 0 \Rightarrow p = rs$ para algum $r \in \alpha$, $r \geq 0$ e algum $s \in \beta$, $s \geq 0$. Como α e β são números em *C*, existem $r' > r$, com $r' \in \alpha$, $s' > s$, com $s' \in \beta$; daí $r's' > rs = p$, com $r's' \in \gamma$.

Definimos agora, a noção de valor absoluto de um corte, que servirá de apoio na definição de produto de cortes.

Definição 3.3.11: Dado $\alpha \in C$, definimos o valor absoluto de α (ou módulo de α), representado por $|\alpha|$, do seguinte modo:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, se \alpha \geq 0^*; \\ -\alpha, se \alpha < 0^*. \end{cases}$$

Definição 3.3.12: Se $\alpha, \beta \in C$, definimos o produto α por β por:

$$\alpha\beta = \begin{cases} -(|\alpha||\beta|), se \alpha \leq 0^*, \beta \geq 0^*; \\ -(|\alpha||\beta|), se \alpha \geq 0^*, \beta \leq 0^*; \\ |\alpha||\beta|, se \alpha < 0^*, \beta < 0^*. \end{cases}$$

De posse das definições anteriores enunciaremos, através do teorema que se segue, as propriedades da multiplicação de modo que serão apresentadas algumas de suas demonstrações.

Teorema 3.3.12: Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in C$. A multiplicação verifica as seguintes propriedades:

- (Associativa): $(\alpha\,\beta)\,\gamma = \alpha\,(\beta\,\gamma)$;
- (Comutativa): $\alpha\,\beta = \beta\,\alpha$;
- (Elemento neutro multiplicativo): $\alpha.1^* = \alpha$;
- (Inverso multiplicativo): se $\alpha \neq 0^*$ em C, existe um único $\beta \in C$ tal que $\alpha\,\beta = 1^*$. Esse corte é denotado por α^{-1}.
- (Distributividade): $\alpha\,(\beta + \gamma) = \alpha\,\beta + \alpha\,\gamma$;
- Se $\alpha \leq \beta$ e $\gamma \geq 0^*$, então $\alpha\,\gamma \leq \beta\,\gamma$;
- Se $\alpha \leq \beta$ e $\gamma < 0^*$, então $\alpha\,\gamma \geq \beta\,\gamma$.

A seguir, algumas demonstrações das propriedades apresentadas:

Demonstração: (elemento neutro multiplicativo): Suponhamos, inicialmente $\alpha > 0^*$. Precisamos provar que: $\alpha.1^* \subset \alpha$ e $\alpha \subset \alpha.1^*$.

Para o 1º caso ($\alpha.1^* \subset \alpha$), lembremos inicialmente, que $\alpha.1^* = Q_- \cup \{rs |\, r \in \alpha,\, r > 0,\, 0 < s < 1\}$.

$x \in \alpha.1^*$ e $x \leq 0 \Rightarrow x \in \alpha$.

$x \in \alpha.1^*$ e $x > 0 \Rightarrow x = r.t$, com $r \in \alpha$, $r > 0$, e $0 < t < 1$.

De $t < 1$ e $r > 0$, segue que $r.t < r$ e, portanto, $x = r.t \in \alpha$. Fica provado assim, que $\alpha.1^* \subset \alpha$.

Agora, para o segundo caso ($\alpha \subset \alpha.1^*$) temos:

$x \in \alpha$ e $x \leq 0 \Rightarrow x \in \alpha.1^*$.

$x \in \alpha$ e $x > 0 \Rightarrow \exists r \in \alpha$, com $x < r$.

Assim, $x = \text{r}.\,\frac{x}{r} \in \alpha.1^*$, pois, $r \in \alpha$, $r > 0$, e $\frac{x}{r} < 1$, com $\frac{x}{r} > 0$. Portanto, $\alpha \subset \alpha.1^*$.

Provamos assim, que se $\alpha > 0^*$, então $\alpha.1^* = \alpha$. Se $\alpha = 0^*$, pela definição de produto, $\alpha.1^* = 0^*.1 = 0^* = \alpha$. E, se $\alpha < 0^*$, $\alpha.1^* = -[(-\alpha).1^*] = -[-\alpha] = \alpha$. Segue-se então que, para todo $\alpha \in C$, $\alpha.1^* = \alpha$.

Antes de apresentar a definição do conjunto de números reais, faz-se necessário mencionar o teorema que se segue, pois tem grande importância nas conclusões pós-definição.

Teorema 3.3.13: Se α, $\beta \in C$ e $\alpha < \beta$, então existe um corte racional r^* tal que $\alpha < r^* < \beta$.

Demonstração: *1º caso:* α é um corte racional, digamos, $\alpha = s^*$. Como $\alpha < \beta$, existe $r \in \beta \backslash \alpha$ (r racional), com $r > s$. (Caso contrário, $\beta \backslash \alpha = \{s\}$, isto é, $\beta = \alpha \cup \{s\}$, contrariando a condição (iii) da definição de corte). De $r \in \beta$ e $r \notin r^*$, obtemos $r^* < \beta$. Como $s < r$, então $\alpha = s^* < r^*$.

2º caso: α não é um corte racional. Como $\alpha < \beta$, existe $r \in \beta \backslash \alpha$ (r racional). De $r \in \beta \backslash r^*$, obtemos $r^* < \beta$. Como r é cota superior de α e α não é corte racional, então r não é cota superior mínima de α e, daí, existe $s \in r^* \backslash \alpha$, ou seja, $\alpha < r^*$.

Definição 3.3.13: O conjunto C dos cortes será, a partir de agora, denominado de conjunto dos números reais e denotado por IR. Os cortes racionais serão identificados, via a injeção *j*, com os números racionais. Todo corte que não for racional será denominado número irracional.

Considerando todas as definições apresentadas na construção dos conjuntos numéricos, será apresentado como desfecho deste capítulo um último teorema, que conterá toda a essência da diferença entre os conjuntos de números racionais e de números reais.

Teorema 3.3.14: (Dedekind) Sejam A e B subconjuntos de IR tais que:

i) IR = $A \cup B$;

ii) $A \cap B = \emptyset$;

iii) $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$;

iv) Se $\alpha \in A$ e $\beta \in B$, então $\alpha < \beta$.

Nessas condições existe um, e apenas um, número real γ tal que $\alpha \leq \gamma \leq \beta$, para todo $\alpha \in A$ e para todo $\beta \in B$.

Demonstração: (Unicidade): Suponhamos que existam dois números γ_1 e γ_2, com $\gamma_1 < \gamma_2$ nas condições do enunciado. Consideremos γ_3 tal que

$\gamma_1 < \gamma_3 < \gamma_2$, o que é possível pelo Teorema 3.3.13. De $\gamma_3 < \gamma_2$ resulta $\gamma_3 \in A$, pois $\beta \geq \gamma_2$ ($> \gamma_3$), para todo $\beta \in B$ e $A \cup B$ = IR. Analogamente, de $\gamma_1 < \gamma_3$, resulta $\gamma_3 \in B$. Obtemos então $\gamma_3 \in A \cap B$, uma contradição.

(Existência): Seja γ = {$r \in$ Q|$r \in \alpha$, para algum $\alpha \in A$}. Mostraremos que γ é um corte nas condições requeridas.

i) Ø $\neq \gamma \neq$ Q: a desigualdade Ø $\neq \gamma$ resulta imediatamente de $A \neq$ Ø. Para mostrar que $\gamma \neq$ Q, tomemos $\beta \in B$. Seja $s \notin \beta$ um racional. Como $\alpha \subset \beta$, $\forall\ \alpha \in A$, então $s \notin A$, $\forall\ \alpha \in A$, de onde resulta $s \notin \gamma$.

ii) Se $r \in \gamma$ e $s < r$, então $s \in \gamma$: temos que $r \in \alpha$ para algum $\alpha \in A$ e, como $s < r$, então $s \in \alpha$ de onde segue que $s \in \gamma$.

iii) Se $r \in \gamma$, então existe $s > r$ com $s \in \gamma$: temos que $r \in \alpha$ para algum $\alpha \in A$ e, como α é um corte, existe $s > r$ em α, logo s $\in \gamma$.

Assim γ é um número real e temos que $\alpha \leq \gamma$, $\forall\ \alpha \in A$, pois, pela definição de γ, sabemos que $\alpha \subset \gamma$, $\forall\ \alpha \in A$. Agora, mostremos que $\gamma \leq \beta$, $\forall\ \beta \in B$. Suponhamos que exista $\beta \in B$ com $\beta < \gamma$. Neste caso, existe um racional $r \in \gamma \setminus \beta$. Por pertencer a γ, r é um elemento de algum $\alpha \in A$ e, não sendo elemento de β, obtemos $\beta < \alpha$, contrariando a hipótese.

Conclui-se dessa maneira a construção dos conjuntos numéricos. Cabe observar que neste capítulo foi destacado o que era de mais essencial para a compreensão do mesmo. Sendo assim, é recomendável, para os mais interessados no assunto, fazerem leituras das bibliografias que ajudaram na formação deste texto.

4 VANTAGEM DA FORMALIZAÇÃO: Entendimento das Propriedades

Neste capítulo serão enfatizados alguns conceitos e definições. A sequência de raciocínios apresentada é uma proposta ao entendimento do conceito de função e de suas propriedades.

Tendo em vista que se preza pela formalização e bom uso da mesma no ensino básico de matemática, será apresentada inicialmente uma revisão de Conjuntos, devido a sua simplicidade de escrita de grande precisão de conceitos, conforme segue o exposto:

> [...] se queremos iniciar os jovens em Matemática, é necessário que os familiarizemos com os rudimentos da linguagem e da notação dos conjuntos. Isto, inclusive, vai facilitar nosso próprio trabalho, pois a precisão dos conceitos é uma ajuda indispensável para a clareza das ideias. (LIMA, 2006, p.21)

Deve-se observar que a teoria apresentada e discutida a seguir é baseada na obra de Lima (2006), por se tratar de um matemático de referência reconhecida em âmbito do ensino da matemática.

4.1. CONJUNTO

Um conjunto é formado por elementos e Lima (2006) coloca que tal noção é a mais fundamental, pois a partir dela os conceitos matemáticos podem ser expressos, sendo também a mais simples das ideias matemáticas.

Dados um conjunto A e um objeto a, a única pergunta cabível em relação a ele é: a é ou não um elemento do conjunto A? No caso afirmativo, diz-se que a pertence ao conjunto A e escreve-se $a \in A$. Caso contrário, põe-se $a \notin A$ e diz que a não pertence ao conjunto A. Neste sentido, pode-se dizer que um conjunto A fica definido quando se dá uma regra que permita decidir se um objeto arbitrário x pertence ou não a A.

Em termos de notação, usaremos $X = \{a, b, c,...\}$ para representar o conjunto X cujos elementos são os objetos a, b, c, etc.

Os conjuntos mais frequentemente estudados são os conjuntos numéricos, as figuras geométricas e os conjuntos que se derivam destes, como os conjuntos de matrizes, de funções (sendo estas, o foco desse estudo) etc.

Foi com o objetivo de discutir o entendimento de funções reais de uma variável real por parte dos alunos, que no capítulo anterior, enfatizou-se a construção dos números reais de maneira formalizada. Sendo assim, na discussão que se segue, bastará as ideias iniciais que conhecemos de conjuntos numéricos.

O conjunto dos *números naturais* 0,1, 2, 3,... será representado pelo símbolo IN. Portanto, IN = {0,1, 2, 3,...}. Desde já, note que optou-se por considerar o conjunto de números naturais iniciando pelo zero.

O conjunto dos números inteiros (positivos, negativos e zero) será indicado pelo símbolo Z. Assim, Z = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...}.

O conjunto Q, dos números racionais, é formado pelas frações p/q, onde p e q pertencem a Z, sendo q $\neq 0$. Em símbolos temos: Q = {p/q; p $\in$ Z, q $\in$ Z, q $\neq 0$}. Para não ser contraditório no discurso deste trabalho é essencial que comecemos a ter rigor com as interpretações das simbologias matemáticas. Sendo assim, a escrita simbólica dos números racionais deve ser lida da seguinte forma: "Q é o conjunto das frações p/q tais que p pertence a Z, q pertence a Z e q é diferente de zero".

Convém destacar a importância do reconhecimento de símbolos matemáticos e interpretação de escritas envolvendo os mesmos desde o ensino fundamental. Quantos alunos chegam ao ensino médio não reconhecendo o símbolo de pertinência, ou até mesmo o uso de "chaves" para representar um conjunto? Por aí já se pode imaginar, o quanto a linguagem de funções é abstrata e desprovida de significado para os mesmos.

Observamos assim, que um ponto chave no estudo de conjuntos, está em mostrar aos alunos que tal estudo, nem sempre é definido de maneira a especificar um a um, os seus elementos, sendo através de uma propriedade comum e exclusiva dos seus elementos, o método mais frequente de se definir um conjunto. Lima (2006)

Portanto, podemos focar o estudo de conjuntos voltando-se inicialmente para as propriedades que os elementos estudados possuem. Por exemplo, seja IN o conjunto dos números naturais e considerando a seguinte propriedade, que se refere a um elemento genérico $x \in$ IN: "x é maior do que 7". Note que a propriedade mencionada de um número natural ser maior do que 7, define um conjunto $X = \{8, 9, 10, ...\}$, ou seja, $X = \{x \in \text{IN}; x > 7\}$, cuja leitura é: "$X$ é o conjunto dos x pertencentes a IN tais que x é maior do que 7".

Não se pode ignorar o caso em que nenhum elemento de um certo conjunto E goza da propriedade P. E nesta situação, pode-se dizer que o conjunto $\{x \in E;\ x$ goza de P$\}$ não possui elemento algum. Isto é o que se chama conjunto vazio, cujo símbolo é Ø. Portanto, o *conjunto vazio* é definido como: "qualquer que seja x, tem-se $x \notin$ Ø". Por exemplo, temos $\{x \in \text{IN}; 1 < x < 2\} = Ø$, bem como $\{ x ; x \neq x\} = Ø$.

Muitas vezes, na prática de sala de aula, acabamos enfatizando mais a representação e as operações envolvidas com conjuntos e esquecemos ou não damos a devida importância de mostrar aos alunos que tal estudo fornece precisão e generalidade aos conceitos e proposições da matemática, o que pode ser observado na seguinte fala:

> Os conjuntos substituem as "propriedades" e as "condições". Assim, em vez de dizermos que o "objeto x goza da propriedade P" ou o "objeto y satisfaz a condição C", podemos escrever x ϵ A e y ϵ B, onde A é o conjunto dos objetos que gozam da propriedade P e B é o conjunto dos objetos que satisfazem a condição C. (LIMA, 2006, p.2)

Uma vez compreendida a linguagem e notação de conjuntos, os alunos entenderão com mais facilidade toda álgebra que existe sobre as operações de reunião ($A \cup B$), interseção ($A \cap B$), além da relação de inclusão ($A \subset B$), que resumidamente descreveremos abaixo:

- Relação de Inclusão: Sejam A e B conjuntos. Se todo elemento de A for também elemento de B, diz-se que A é um *subconjunto* de B, que A está *contido* em B ou que A é *parte* de B. Para indicar este fato, usa-se a notação $A \subset B$. No caso em que A não é um subconjunto de B, escreve-se $A \not\subset B$, o que significa que nem todo elemento de A pertence a B, ou seja, existe pelo menos um objeto a tal que $a \notin B$. Neste conceito, cabe ressaltar a existência de duas inclusões extremas, em que a segunda, quando passada aos alunos, muitas vezes é aceita, mas não compreendida, talvez pela falta de argumentação teórica por parte do professor, o que chama atenção pela necessidade que temos mais uma vez de ressaltar a importância da linguagem matemática e familiarização com a mesma. Assim, são elas:

- Para todo conjunto *A*, vale $A \subset A$, uma vez que obviamente todo elemento de *A* pertence a *A;*
- $\varnothing \subset A$, seja qual for o conjunto *A.* De fato, para mostrar que $\varnothing \not\subset A$, teríamos que obter um objeto *x* tal que $x \in \varnothing$, mas $x \notin A$. Como $x \in \varnothing$ é impossível, somos levados a concluir que $\varnothing \subset A$, ou seja, que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer outro.

Dizemos ainda que *A* é um *subconjunto próprio* de *B* quando se tem $A \subset B$ com $A \neq \varnothing$ e $A \neq B$.

Neste ponto, podemos destacar três propriedades fundamentais da relação de inclusão, válidas para quaisquer conjuntos *A*, *B* e *C*:

Reflexividade: $A \subset A$;

Anti-simétrica: se $A \subset B$ e $B \subset A$ *então* $A = B$. Propriedade esta, muito utilizada quando se deseja mostrar que os conjuntos *A* e *B* são iguais, provando-se para isto que $A \subset B$ e $B \subset A$;

Transitividade: se $A \subset B$ e $B \subset C$ *então* $A \subset C$. Esta, por sua vez é a base do raciocínio dedutivo, sob a forma que classicamente se chama de *silogismo* (tipicamente aristotélico).

Considerando os conjuntos numéricos IN, Z e Q mencionados até agora neste capítulo, por cumprirem as relações de inclusão, podemos escrever IN $\subset$ Z $\subset$ Q.

- Reunião de conjuntos: Dados os conjuntos *A* e *B*, a reunião $A \cup B$ é o conjunto formado pelos elementos de *A* mais os elementos de *B*. Logo se considerarmos as afirmações $x \in A$ e $x \in B$, veremos que $x \in A \cup B$ quando pelo menos uma dessas afirmações for verdadeira. Segue disso que, $x \in A \cup B$ significa "$x \in A$ ou $x \in B$".

- Interseção de conjuntos: Dados os conjuntos *A* e *B*, a interseção $A \cap B$ é o conjunto dos objetos que são ao mesmo tempo elementos de *A* e de *B*. Logo se considerarmos as afirmações $x \in A$ e $x \in B$, veremos que $x \in A \cap B$ quando ambas as afirmações forem verdadeiras. Segue disso que, $x \in A \cap B$ significa "$x \in A$ e $x \in B$".

- Diferença entre conjuntos: A diferença entre os conjuntos A e B é o conjunto $A - B$, formado pelos elementos de A que não pertencem a B. Em símbolos temos: $A - B = \{x;\ x \in A \text{ e } x \notin B\}$. No caso em que A e B são disjuntos, nenhum elemento de A pertence a B, portanto $A - B = A$. Então, em qualquer caso tem-se $A - B = A - (A \cap B)$.

Neste momento, em que se constroem as operações $A \cup B$ e $A \cap B$ entre conjuntos e estas passam a ser conhecimento dos alunos, pode-se dizer que os mesmos perceberão com muito mais clareza a diferença entre os conectivos lógicos “ou” e “e”, tão utilizado nos estudos de funções. Ressaltamos que ao dizer “passando a ser conhecimento dos alunos”, fica subtendido que é provido de significado, uma vez que sem este não se pode dizer que é conhecimento. E nesta discussão sobre os conectivos lógicos mencionados, destacam-se seus usos de maneiras individual ou combinada, o que se pode notar ao compreender a validade das propriedades associativa, comutativa nas operações de união e interseção, bem como da propriedade distributiva de uma em relação à outra, conforme segue:

- Comutativa: $A \cup B = B \cup A$ *e* $A \cap B = B \cap A$;
- Associativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- Distributiva: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Outras equivalências envolvendo as operações de conjuntos podem ser obtidas na obra de Lima (2006), não sendo mencionadas neste trabalho por entender que para a finalidade deste, o que foi apresentado já é o suficiente.

Outros dois assuntos de suma importância para se discutir e, que muito contribuem para a formalização do conceito de função, são: *Complementar de um conjunto* e *Igualdade de conjuntos*.

Para se entender complementar de um conjunto, primeiramente faz-se necessária compreensão do conjunto *U,* chamado de *universo do discurso*, ou mais popularmente conhecido como *conjunto-universo.* Muitas vezes, os alunos encontram dificuldade em entender o complementar de um conjunto porque o conjunto-universo que está sendo considerado não está claro em suas ideias ou não é devidamente interpretado.

Seria interessante que ao invés de se começar a discussão com exemplos numéricos ou já com os conjuntos numéricos conhecidos propriamente ditos, que se começasse dizendo que *U* poderia ser chamado o assunto da discussão ou o tema em pauta. Logo, estaremos falando dos elementos de *U*. Uma vez fixado *U*, todos os elementos a serem considerados pertencerão a *U* e todos os conjuntos serão subconjuntos de *U,* ou derivados destes. No caso da geometria plana, por exemplo, *U* é o plano.

Deste modo, dado um conjunto *A* (subconjunto de *U*), chama-se complementar de *A* ao conjunto A^c formado pelos objetos de *U* que não pertencem a *A*.

Dos conceitos até agora apresentados, podemos ressaltar dois importantes princípios. Um decorre do fato de que, para todo x $\in U$, não existe outra opção além de $x \in A$ ou $x \notin A$. Este princípio é conhecido em Lógica como o *princípio do terceiro excluído*. O outro provém do fato de que as alternativas $x \in A$ e $x \notin A$ não podem ser verdadeiras ao mesmo tempo. Tal conceito é chamado de *princípio da não-contradição.*

Destes princípios, destacam-se as seguintes regras operatórias referentes ao complementar:

- Para todo conjunto $A \subset U$, tem-se $(A^c)^c = A$. (Todo conjunto é complementar de seu complementar).

- Se $A \subset B$ então $B^c \subset A^c$ (Se um conjunto está contido noutro, seu complementar contém esse outro). Enfatizando um pouco mais sobre a escrita matemática, esta segunda regra apresentada, ainda pode ser escrita com a notação $\Rightarrow$ (lê-se: implica) da seguinte forma: $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$.

- $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$, que do ponto de vista da lógica, pode-se entender os conjuntos em termos das propriedades que os definem. Por exemplo, o conjunto *A* é formado pelos elementos de *U* que gozam da propriedade *P* e, o conjunto *B* é formado pelos elementos de *U* que gozam da propriedade *Q*. Sendo assim, os conjuntos A^c e B^c são definidos pelas negações das propriedades *P e* Q, então representadas por *P'* e *Q'*, respectivamente. Deste modo, ao afirmar que *x* goza da propriedade *P'* é o mesmo que afirmar que *x* não goza da propriedade *P* e, o mesmo valendo para *Q.*

- $P \Rightarrow Q$ se, e somente se, $Q' \Rightarrow P'$. Esta propriedade expressa duas maneiras diferentes de se dizer a mesma coisa e a implicação $Q' \Rightarrow P'$ é denominada *contrapositiva* da implicação $P \Rightarrow Q$, o que para exemplificar, pode-se citar que a afirmação de que todo número primo maior do que 2 é impar equivale a dizer que um número par maior do que 2 não é primo. Logo, faz-se uso de diferentes termos para expressar a mesma ideia, valendo ainda observar, que a equivalência entre uma implicação e sua contrapositiva é a base das *demonstrações por absurdo*.

Do ponto de vista da igualdade de conjuntos, pretende-se chamar a atenção primeiramente para o significado da palavra igual, melhor dizendo, deve-se compreender o significado que nossos alunos dão ao se deparar com o símbolo de igualdade (=). É sabido por todos que tal símbolo é de uso corriqueiro na linguagem que os alunos se utilizam para finalizar, por exemplo, qualquer procedimento operatório envolvendo números.

Mas pensemos na maneira como um professor introduz a álgebra para um aluno de sétimo ano, estágio este, que de modo geral é feita tal iniciação. É claro que são duas discussões a serem consideradas. Uma condiz com uma abordagem na maneira como o professor ensina tal assunto, a outra condiz com uma abordagem de como o aluno entende o que lhe foi apresentado. Não se fará aqui essa discussão, uma vez que foge ao escopo deste trabalho. Pensemos apenas na seguinte ideia: *utilizar letras diferentes para representar valores diferentes*. Aprofundando um pouco mais, pensemos na possibilidade dos alunos terem essa ideia fixa em suas mentes, como um conceito formalizado. Esse aluno, muito provavelmente chegará ao ensino médio e aí, a discussão a ser feita é exatamente outra, ou seja, este processo terá que ser revertido e, será extremamente difícil, para não dizer impossível.

É evidente que uma criança minimamente alfabetizada compreende o significado do símbolo de igualdade. Mas a questão levantada é saber que interpretação é dada ao se deparar com a escrita $a = b$, por exemplo. Em situações como essa, em sala de aula, é muito comum escutarmos frases prontas de que a matemática é muito difícil, de modo a percebermos a primeira aversão pela álgebra.

O significado de $a = b$ é bastante simples, quando devidamente apresentado e principalmente discutido, bastando dizer que: "*significa que a e b são símbolos usados para designar o mesmo objeto*" (LIMA, 2006). Note aqui, que o autor ao estabelecer significado à igualdade, se utiliza da palavra *objeto*, termo este que quando empregado no momento certo, evita enormes confusões e erros de raciocínios futuros, como acontece por exemplo, ao expressar uma função inversa de uma função *f* dada, em que se isola x em função de y, mas escreve a função inversa dependendo de *x*. Enfim, o que se pretende é ressaltar o teor de importância que os símbolos (o de igualdade, no exemplo citado) possuem na comunicação matemática, conforme segue exemplo do autor:

> Na linguagem corrente, às vezes se diz que duas pessoas ou objetos são iguais quando um certo atributo, ao que se refere o discurso naquele momento, é possuído igualmente pelas pessoas ou objetos em questão. Assim, por exemplo, quando dizemos que “todos são iguais perante a lei”, isto significa que dois cidadãos quaisquer têm os mesmos direitos e deveres legais. (LIMA, 2006, p.20)

A relação “*a é igual a b”*, que se escreve *a* = *b*, goza das seguintes propriedades:

- *Reflexividade*: *a* = *a*;
- *Simetria*: se a = *b* então *b* = *a*;
- *Transitividade*: se a = *b* e *b* = *c* então a = *c*;

Sendo assim, dizemos que um conjunto *A* é igual a um conjunto *B*, quando ambos possuem os mesmos elementos, isto é, se cada elemento que pertence a *A* também pertence a *B* e vice-versa.

Outro tema, muitas vezes caracterizados pelos próprios alunos como sendo fácil é o *produto cartesiano*, porém considerando a prática de sala de aula, a classificação em “fácil” quer dizer “fácil de fazer o que se pede”, “fácil de acertar”, e na maioria das vezes, desprovido de significados. Já começa pelo fato dos alunos, muitas vezes, não diferenciarem {a,b} de (a,b). Na primeira escrita temos um conjunto composto de dois objetos: *a* e *b*, enquanto na segunda, temos um par ordenado, que trata apenas de uma representação para dispor dois objetos numa certa ordem. No caso descrito, o primeiro objeto *a* é a *primeira coordenada* e o objeto *b,* a segunda coordenada. Tal definição foi melhor apresentada no capítulo anterior sobre a construção dos números reais, mas para o momento, adotaremos os conceitos básicos.

Tendo em vista que dois conjuntos que possuem os mesmos elementos são iguais, temos {a,b} = {b,a}. Comparando tal raciocínio com os pares ordenados (a,b) e (b,a), só poderemos afirmar que (a,b) = (b,a) quando a = b, o que segue da própria definição de pares ordenados: (a,b) = (a’,b’) $\Leftrightarrow$ a = a’ e b = b’.

Reforçamos ainda que {a,a} = {a}, enquanto (a,a) é um par ordenado legítimo. Uma vez discutida tal diferença, enfatizamos mais uma vez a necessidade de se ter rigor na formalização matemática, podendo assim, apresentar o conceito de produto cartesiano.

Por definição, o *produto cartesiano dos conjuntos A* e *B* é o conjunto *A* x *B* cujos elementos são todos pares ordenados (a,b) cuja primeira coordenada pertence a *A* e a segunda coordenada pertence a *B.* Em linguagem simbólica: $A \times B = \{(a,b);\ a \in A \text{ e } b \in B\}$.

4.2 FUNÇÕES

Sem dúvida, a palavra *função* expressa uma das ideias mais significativas da história da matemática. O surgimento do conceito que hoje é ensinado é fruto de um longo processo de evolução do conhecimento, conforme fora descrito no capítulo 2.

A discussão do conceito que se segue partirá da etapa em que se apresenta a relação entre duas variáveis, culminando para uma formulação abstrata.

Quando duas variáveis estão relacionadas de modo tal que o valor da primeira é conhecido quando se dá o valor da segunda, diz-se que a primeira variável é uma *função* da segunda. Praticamente em todos os problemas científicos intervêm grandezas e relações desta espécie e no cotidiano encontramos continuamente situações ilustrando essa dependência. Por exemplo, o peso que um homem pode levantar depende de sua força, a distância que um garoto percorre depende do tempo gasto no percurso, o volume de uma esfera é função do seu diâmetro, etc.

Chegamos ao foco de discussão do trabalho. Neste momento, procura-se apenas conceituar funções e discutir mais detalhadamente suas formas de representação. A maneira como é ensinada ou pelo menos, se propõe a ensinar será abordada em posterior discussão.

Mas, para o momento é cabível dizer que se trata de um assunto bastante abstrato para os alunos, que muitas vezes não desenvolvem as atividades propostas em sala de aula por falta de compreensão ou simplesmente fazem réplicas de raciocínios ou modelos feitos pelo professor durante explicação, sem a noção do que de fato estão fazendo. Pensam que entenderam, simplesmente porque estão repetindo raciocínios de maneira mecânica. Frente a isso, muitos professores pensam que ensinaram. O final dessa história imagina-se não ser desconhecido. Fato este que pode ser evidenciado no seguinte trecho:

> Os dados obtidos mostraram que as definições formais para as funções têm um papel de pouco destaque na expressão do professor do Ensino Médio. As "regras" e os "procedimentos" estabelecidos pela comunidade escolar e pelos livros didáticos, para o tema "funções", têm um destaque maior, fazendo predominar uma linguagem matemática pautada na sintaxe, e em detrimento de aspectos semânticos ou sócio-culturais. (ZUFFI, 2000, p.26)

Neste contexto uma das dificuldades apresentadas pelos alunos é a compreensão do significado da palavra variável, de modo que, segundo Costa (1971), apresentá-la como "*um número que varia*" é uma ideia pouco satisfatória, ressaltando ainda que o fundamental para a noção desse conceito é "*o fato de se considerar um conjunto de valores e não um elemento ou valor que se transforma*", conforme segue sua definição:

> Uma variável é um símbolo que representa os diversos elementos de um conjunto dado, chamado *domínio* da variável. Cada elemento individual do conjunto é um valor da variável, e se o conjunto possui apenas um elemento, diz-se que a variável se reduz a uma constante. (COSTA, 1971, p.258)

Uma vez compreendida tal definição, bem como a representação de conjuntos, suas linguagens e operações, apresentadas anteriormente, o conceito de função não deveria ser tão abstrato para os alunos. Porém, não é sugerido que se inicie o assunto em sala de aula com a definição pronta e acabada, como é visto em muitos livros, pois desta forma acredita-se que o conceito também não será absorvido, como percebemos em:

> Essas abordagens que encontramos nos livros didáticos contribuem para a construção e uma concepção de função como algo estático. (SCHREINER, 2004, p.2)

Embora este trabalho vise ressaltar a importância da formalização no ensino de função, o que se propõe investigar é a maneira pela qual a formalização facilita a compreensão do conceito. E neste sentido, a preocupação é a maneira como os alunos se comunicam em matemática, ou seja, se faz necessário uma compreensão do grau de alfabetização matemática dos alunos como podemos perceber em:

> Destaco acima dois instrumentos imprescindíveis na construção do conceito de função: o pensamento variacional desenvolvido através da construção de modelos mentais de funções e a alfabetização funcional desenvolvida através da representação simbólica do pensamento variacional com sua leitura. Estes dois instrumentos, quando não forem desenvolvidos pelos alunos, certamente serão um obstáculo à construção do conceito de função. (SCHREINER, 2004, p.3)

Um dos instrumentos imprescindíveis que o autor se refere na citação acima foi o de seus alunos não conseguirem encontrar uma fórmula $y = f(x)$ ou um gráfico cartesiano que descrevesse o comportamento variacional das grandezas envolvidas em seu estudo. O outro foi o fato deles não conseguirem construir um modelo mental das funções representadas pelas equações, que lhes permitisse imaginar como as grandezas variam e fazer previsões futuras e passadas.

Neste sentido, Schreiner (2004) aponta para um obstáculo à construção de uma linguagem matemática para as funções, que segundo ele, denominou de alfabetização funcional, englobando a construção de tal linguagem, sua representação e sua leitura.

Convém salientar que neste trabalho, concordamos com a proposta da discussão das ideias envolvidas sobre o tema, bem como uma abordagem histórica da evolução do mesmo, antes de definir uma função. Apresentando a escrita propriamente dita, segue-se a definição de função: Dados os conjuntos X, Y, uma função $f: X \to Y$ (lê-se "uma função de *X em Y*") é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto *X chama-se domínio e* Y *é o contra-domínio* da função *f*. Para cada elemento $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se imagem de x pela função f, ou o *valor* assumido pela função f no ponto $x \in X$. Escreve-se $x \mapsto f(x)$ para indicar que f transforma (ou leva) x em $f(x)$. (LIMA, 2006, p.43)

Neste conceito é fundamental destacar aos alunos que uma função consta de três partes: um conjunto *X*, chamado o *domínio* da função (ou o conjunto onde a função é definida), um conjunto *Y*, chamado o *contradomínio* da função, ou o conjunto onde a função toma valores, e uma regra que permite associar, de modo bem determinado, a cada elemento $x \in X$, um único elemento $f(x) \in Y$, chamado o valor que a função assume em *x* (ou ponto *x*).

Neste sentido, acredita-se que a discussão sobre os três elementos citados acima seja mais importante nos primeiros contatos com o tema (funções) do que enfatizar exemplos ou mesmo resolução de exercícios, que só favorece a memorização e não o entendimento esperado sobre o assunto.

Na tentativa de facilitar a compreensão do conceito de funções, muitos professores se referem à mesma como a função $f(x)$. E a partir desse momento gera-se um conflito de conceito, onde já não é dada a devida importância aos três elementos que a caracterizam e já não se faz mais distinção entre o que de fato é a função e o que é a imagem de *x* pela função *f.* Mas esta, é outra discussão que não é pertinente neste capítulo, por se tratar de uma discussão mais profunda e que não se descarta a possibilidade de tal dificuldade ser do professor.

A natureza da regra que ensina como obter o valor $f(x) \in Y$ quando *é dado* $x \in X$ é inteiramente arbitrária, sendo sujeita apenas a duas condições:

1) Não deve haver exceções: a fim de que *f* tenha o conjunto *X* como domínio, a regra deve fornecer $f(x)$ para todo $x \in X$;

2) Não deve haver ambiguidades: a cada $x \in X$, a regra deve fazer corresponder um *único* $f(x)$ em *Y.*

Sendo assim, duas funções $f: X \to Y$ e $g: X' \to Y'$ são iguais se, e somente se, $X = X'$, $Y = Y'$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$. Ou seja, duas funções só são iguais quando têm o mesmo domínio, o mesmo contradomínio e a mesma regra de correspondência.

O *gráfico* de uma função $f: X \to Y$ é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $X \times Y$ formado por todos os pares ordenados $(x, f(x))$, onde *x* é um ponto qualquer de *X* e $y = f(x)$. Assim, $G(f) = \{(x, y) \in X \times Y;\ y = f(x)\} = \{(x, f(x));\ x \in X\}$. (LIMA, 2006, p.90)

Para que um subconjunto $G \subset X \times Y$ seja o gráfico de uma função $f: X \to Y$, é necessário e suficiente que, para cada $x \in X$, exista um único ponto

$(x,y) \in$ G cuja primeira coordenada seja x. Para funções $f: X \to Y$, onde X e Y são subconjuntos de números reais, esta condição significa que toda paralela ao eixo das ordenadas, traçada por um ponto de X, deve cortar o gráfico G num e num só ponto.

Segue-se, portanto, da definição de igualdade entre duas funções que duas funções são iguais se, e somente se, possuem o mesmo gráfico.

Outro ponto importante no estudo de funções é o entendimento de função injetiva, função sobrejetiva e função bijetiva. Tão importante quanto o entendimento, é a aplicação.

Na maioria dos livros de ensino médio, nos deparamos com tais tópicos feitos de maneira isolada, culminando apenas na identificação/reconhecimento de funções com tais características. Depois disso, o assunto simplesmente não volta a ser mencionado. Mas, para o momento, a discussão é limitada às definições.

Sendo assim, uma função $f: X \to Y$ chama-se *injetiva* (ou *biunívoca*) quando elementos diferentes em X são transformados por f em elementos diferentes em Y. Ou seja, f é *injetiva* quando $x \neq x'$ em $X \Rightarrow f(x) \neq f(x')$. Que na forma contrapositiva, pode ser expressa por: $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$. LIMA (2006)

Uma função $f: X \to Y$ chama-se *sobrejetiva* quando, para qualquer elemento $y \in Y$, pode-se encontrar (pelo menos) um elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$.(LIMA, 2006)

Uma função $f: X \to Y$ chama-se uma *bijeção*, ou uma *corespondência biunívoca* entre X e Y quando é injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo. (LIMA, 2006)

Outra definição de pouca assimilação dos alunos é a de composição de funções. Talvez, para o ensino médio, seja interessante trabalhar a ideia e aplicações, com o devido reconhecimento da escrita, tendo em vista que este é essencial para os aprendizados futuros de instância superior.

Sejam $f: X \to Y$ e g: Y $\to Z$ funções tais que o domínio de g é igual ao contradomínio de f. Neste caso, podemos definir a *função composta* $g \circ f: X \to Z$, que consiste em aplicar primeiro f e depois g. Mais precisamente, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para todo $x \in X$. (LIMA, 2012)

Esse conceito é de fundamental importância para o desenvolvimento das aplicações de funções, pois segundo Lima (2012), existem muitos problemas matemáticos importantes que se reduzem a estender uma ou várias funções de tal modo que as extensões satisfaçam a certas condições adicionais (continuidade, analiticidade, etc.), que serão tratados posteriormente de maneira breve em demonstrações de teoremas envolvendo a continuidade.

Dadas as funções f: $X \rightarrow Y$ e g: $Y \rightarrow X$, diremos que g é uma *inversa à esquerda* para a função f quando $g \circ f = id_X : X \rightarrow X$, ou seja, quando $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$.

Por exemplo, sejam A o conjunto dos números reais ≥ 0 e IR conjunto de todos os números reais. Consideremos $f: A \rightarrow IR$, definida por $f(x) = x^2$, e g: IR $\rightarrow A$, definida por $g(y) = \sqrt{y}$ se $y \geq 0$ e, $g(y) = 0$ se $y < 0$. Para todo $x \in A$, temos $g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = x$. Logo $g \circ f = id_X$, e, portanto, g é uma inversa de f.

Proposição 4.2.1: Uma função f: $X \rightarrow Y$ possui inversa à esquerda se, e somente se, é *injetiva.*

Demonstração: Se f *é injetiva,* para cada $y \in f(X)$ existe um único $x \in X$ tal que $y = f(x)$. Escrevamos $x = g(y)$. Isto define uma função g: $f(X) \rightarrow X$ tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$. Completamos a definição de g: $Y \rightarrow X$ pondo, por exemplo, $g(y) = x_0$ (elemento que fixamos em X) para $y \in Y - f(X)$. Obtemos g: $Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f = id_X$. Reciprocamente, se existe g: $Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f = id_X$ então, dados x', x'' em X, $f(x') = f(x'') \Rightarrow x' = g(f(x')) = g(f(x'')) = x''$, e, portanto, f é injetiva. (LIMA, 2012, p.22)

Uma função g: $Y \rightarrow X$, chama-se *inversa à direita* de uma função f: $X \rightarrow Y$ quando $f \circ g = id_Y : Y \rightarrow Y$, ou seja, quando $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$.

Por exemplo, seja f: IN $\rightarrow$ IN definida por $f(1) = 1$ e, se $x > 1$, $f(x)$ = número de fatores primos distintos que entram na composição de x. Definamos g: IN $\rightarrow$ IN pondo $g(y)$ = menor número natural que é o produto de y fatores primos distintos. Então, para todo número natural y, temos $f(g(y)) = y$. Logo $f \circ g = id_{IN}$ e, portanto, g é uma inversa à direita para f. (LIMA, 2012,p.22)

Proposição 4.2.2: Uma função f: $X \rightarrow Y$ possui inversa à direita se, e somente se, é *sobrejetiva.*

Demonstração: Seja f: $X \rightarrow Y$ sobrejetiva. Então, para cada $y \in Y$, o conjunto $f^{-1}(y)$ não é vazio. Escolhamos para cada $y \in Y$, um $x \in X$ tal que $f(x) = y$ e ponhamos $g(y) = x$. Isto define uma função g: $Y \rightarrow X$ tal que $f(g(y)) = y$. Logo g é uma inversa à direita de f. Reciprocamente, se existe g: $Y \rightarrow X$ com $f \text{ o } g = id_Y$ então, para cada $y \in Y$, pondo $x = g(y)$, temos $f(x) = f(g(y)) = y$. Logo f é sobrejetiva. (LIMA, 2012, p.22)

Considerando-se as duas proposições acima, conclui-se que uma função g: $Y \rightarrow X$ chama-se *inversa* da função f: $X \rightarrow Y$ quando $g \text{ o } f = id_X$ e $f \text{ o } g = id_Y$, isto é, quando g é inversa à esquerda e à direita para f. (LIMA, 2012, p.22)

Em termos de notação, adota-se f^{-1}: $X \rightarrow Y$ para indicar a inversa de f: $X \rightarrow Y$.

Outro ponto crucial ao conceituar funções é a compreensão de suas diferentes formas de representação, o que também requer certos cuidados quando ensinados aos alunos, para que esta construção não seja feita de forma seccionada e indiferente com a linguagem formal, o que pode proporcionar um “aprendizado mecanizado” e consequentemente desprovido de significado, remetendo-nos à seguinte fala:

> E voltamos ao problema da Matemática dos ensinos fundamental e médio, que, em vez de incentivar a criatividade, a experimentação e o raciocínio, enfatiza mais as atividades mecânicas e repetitivas. (BUFFARA, 2010, p. 33)

Uma das maneiras de entender o conceito de funções é através do seu gráfico ou de sua expressão analítica, o que já fora definido anteriormente. Outra maneira, não menos importante para o estudo, é o uso de tabelas, de modo que seu uso muitas vezes fica restringido como etapa que se cumpre para efetivar a construção de um gráfico, o que de maneira geral, já estamos familiarizados com esta utilização, ou seja, restrita à obtenção de informações. Porém, há de se ressaltar que as tabelas são exemplos importantes de funções que dificilmente se expressam por meio de uma fórmula, além de que, quando bem trabalhadas permite o ensino pela busca de regularidades matemáticas, sendo portanto, fundamentais na construção do conceito de função, como pode ser observado em:

> a identificação de regularidades em situações reais, em seqüências numéricas (...) é uma habilidade essencial à construção do conceito de função. Por meio da produção e interpretação de tabelas, os alunos podem construir o conceito de função como uma série de operações aritméticas realizáveis sobre quantidades dispostas horizontal e verticalmente na tabela. Podem calcular imagem de números dados, números que têm dadas imagens, e até procurar a regra que determina a relação entre os valores dados e as imagens desses valores. Atividades com tabelas são portanto, de fundamental importância para o aprendizado de funções. (Trindade e Moretti, 2000, p.46-47). (CHAVES, 2004, p. 10-11)

Ainda neste contexto, Palis (2013), chama a atenção para a riqueza em se usar exemplos de situações funcionais subjacentes a gráficos estatísticos, bem como a problemas de otimização, que não podem ser expressas por fórmulas algébricas. Em seu trabalho, buscou desenvolver atividades que proporcionassem um desenvolvimento mais amplo da concepção de função, abrangendo interpretações qualitativas de aspectos covariacionais da situação funcional estudada, conforme evidenciado abaixo:

> Funções são criadas para estudar fenômenos variados, sejam eles matemáticos, do cotidiano, físicos, biológicos, econômicos etc. É importante lembrar que relações funcionais que ocorrem na realidade são raramente descritas com exatidão por fórmulas algébricas, gráficos ou tabelas. No entanto, essas relações são frequentemente, modeladas por expressões algébricas, gráficos e tabelas. Esses, como modelos, são aproximações das situações em estudo. Tabelas numéricas que as aproximam em configuração finita são frequentemente modelos convenientes para estudá-las. Representações gráficas também são criadas para estudar diversas situações funcionais da realidade: dentre os exemplos mais conhecidos podemos citar os eletrocardiogramas, eletroencefalogramas e sismogramas. (p. 3-4)

Outra abordagem bastante interessante é a correlação que se faz com transformações e máquinas, isto é, de encarar função como sendo uma máquina que faz transformações. Essa ideia é muito simples de ser explicada e produz enormes significados aos conceitos mais estranhos aos alunos, como por exemplo, identificação do que seja domínio, contra-domínio e imagem de uma função, além de que faz uma distinção definitiva entre *f* e *f*(*x*). (DANTE,1999 apud CHAVES, 2004)

Sendo assim, ficou evidenciada uma noção fundamental em qualquer ramo das ciências matemáticas, que é a noção de correspondência. Esta relação de correspondência forma um elo em um par de objetos e, que segundo Costa (1971):

> Fazer corresponder um antecedente x um consequente y, é uma operação mental elementar, cuja significação se aprende imediatamente. (p.226)

Com intuito de se fundamentar o conceito de função é essencial que ainda se faça uma discussão sobre conjuntos finitos e infinitos, além de passar noções de ordem e de continuidade.

Um conjunto X é chamado de finito quando é vazio ou quando existe para algum $n \in$ IN, uma bijeção φ: $I_n \rightarrow X$, onde I_n = {$p \in$ IN\| $1 \leq p \leq n$}. Para o primeiro caso, diz-se que X tem zero elementos, enquanto para o segundo, diz-se que $n \in$ IN é o número de elementos de X, ou seja, X possui n elementos. Tais fatos são decorrentes das seguintes definições:

a) cada conjunto I_n é finito e possui n elementos;

b) se f: $X \rightarrow Y$ é uma bijeção, um de seus conjuntos é finito se, e somente se, o outro é.

De maneira intuitiva, uma bijeção φ: $I_n \rightarrow X$, significa uma contagem dos elementos de X, em que se coloca $\varphi(1) = x_1$, $\varphi(2) = x_2, \ldots, \varphi(n) = x_n$, onde $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, sendo portanto, uma representação ordinária de um conjunto finito.

Assim, percebe-se o que pode ser chamada de uma correspondência perfeita entre dois conjuntos, em que, a cada elemento de um deles faz-se corresponder a um e único elemento do outro, com reciprocidade, de modo que pode-se chamar os conjuntos envolvidos de conjuntos equivalentes, culminando na ideia de número cardinal.

Aqui se chega a um ponto que nos leva à abstração e que, segundo Costa (1971,p.226), pode-se citar a definição a respeito de número cardinal que foi dada por Russel: *"... o número cardeal de um conjunto A é o conjunto de A e de todos os conjuntos equivalentes a A",* o que passa a ideia de que o número de um conjunto *A* é um símbolo ligado ao conjunto de todos os conjuntos equivalentes a *A*. Desse modo, pode-se dizer que, dois conjuntos não equivalentes têm números cardinais diferentes.

Contudo, a palavra conjunto é muito mais abrangente do que se possa imaginar, pois além de uma coleção de um número finito de elementos, também se aplica às coleções com uma infinidade de elementos, como é o caso das retas de um plano.

Sendo assim, um conjunto *X* é infinito quando ele não for finito, isto é, *X* não é vazio e, não importando qual seja $n \in$ IN, não existe correspondência biunívoca $\varphi: I_n \rightarrow X$.

A título de exemplo, pode-se verificar que o conjunto IN dos números naturais é infinito. De fato, dada qualquer função $\varphi: I_n \rightarrow$ IN, não importa qual *n* se fixou, pomos $k = \varphi(1) + \varphi(2) + ... + \varphi(n)$, temos que $\varphi(x) < k$, para todo $x \in I_n$. Logo não existe $x \in I_n$ tal que $\varphi(x) = k$, o que torna impossível cumprir a condição (b) da definição de correspondência biunívoca.

Porém ao tratar de conjuntos infinitos, outros cuidados devem ser tomados, para que não ocorram divergências conceituais futuras, mais especificamente, no âmbito de conceito de funções.

Para exemplificar esses cuidados, consideremos a seguinte afirmação retirada de Caraça (1951): *"o conjunto dos pontos da recta é infinito".* A preocupação em se fazer tal afirmação dá origem a seguinte pergunta: "Quantos pontos tem uma reta?"

Para responder a esta questão, tomemos dois pontos quaisquer (A e B) sobre esta reta, o que definirá um segmento de reta $\overline{AB}$. De posse desse segmento, marquemos sucessivamente os pontos: $A_1, A_2, ..., A_n, ...$; então pontos médios dos segmentos $\overline{AB}, \overline{AA_1}, \overline{AA_2}, ...$ respectivamente. Deste modo, percebe-se que entre os pontos A e B existirá uma infinidade de pontos $A_1, A_2, ..., A_n, ...$. Porém, o fato interessante é que, além da infinidade de pontos $A_1, A_2, ..., A_n, ...$, existentes entre os pontos A e B, também existirá, pelo mesmo raciocínio, uma infinidade de pontos entre os pontos A_1 e A_2, A_2 e A_3, etc., o que sugere, segundo Caraça (1951), o surgimento de um infinito de natureza diferente do infinito da sucessão.

Para obter uma compreensão sobre os diferentes tipos de infinito, tomemos como exemplo, o conjunto IN dos números naturais e o conjunto P dos números naturais pares maiores que zero. Note que ambos os conjuntos são infinitos e, curiosamente, é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre eles conforme explicitado abaixo:

> [...] a cada número de IN corresponde um de P, e um só – o seu dobro; a cada número de P corresponde um número de IN, e um só – a sua metade. (CARAÇA, 1951, p.15)

Sabendo-se que P$\subset$IN, é possível perceber uma correspondência entre o todo (IN) e a parte (P), ou seja, *o todo e a parte são conjuntos equivalentes,* fato este que não era possível para conjuntos finitos.

Com isso, essa discussão, que consiste em saber se entre dois pontos existe ou não uma infinidade de pontos e que, de maneira análoga, nos remete a saber, se entre dois números existe ou não uma infinidade de números, nos sugere a introdução de um novo conceito, a densidade de um conjunto. Se a resposta a tal questionamento for afirmativa, diz-se que o conjunto em questão é denso.

Sendo assim,segundo Caraça (1951) todo conjunto em que entre dois de seus elementos quaisquer, existe uma infinidade de elementos do mesmo conjunto, diz-se um conjunto denso, o que pode ser imediatamente percebido comparando o conjunto dos números inteiros com o conjunto dos números racionais, em que o primeiro não é exemplo de conjunto denso e o segundo sim. Este raciocínio baseia-se num postulado, que segundo Costa (1971) é enunciado por: *“Se a e b são elementos quaisquer de K, existe um elemento de k entre a e b”*, em que *K* é um conjunto linearmente ordenado.

Neste sentido, é essencial uma discussão sobre os diferentes tipos de infinito, o que nos remete a apresentar novas definições e discussões sobre conjuntos enumeráveis e não enumeráveis, que se seguem.

Um conjunto *X* diz-se *enumerável* quando é finito ou quando existe uma bijeção φ: IN$\rightarrow$*X.* Neste segundo caso, *X* diz-se *infinito enumerável* e, pondo-se $x_1 = \varphi(1)$, $x_2 = \varphi(2)$,..., $x_n = \varphi(n)$,..., tem-se *X* = {$x_1, x_2, ..., x_n, ...$}. Note que cada bijeção φ: IN$\rightarrow$*X* chama-se uma *enumeração* (dos elementos) de *X*. (LIMA, 2012)

Uma vez apresentada a discussão e definição sobre conjuntos infinitos enumeráveis, é conveniente ressaltar que no exemplo anteriormente citado, o conjunto P, dos números naturais pares maiores do que zero é um exemplo de conjunto infinito enumerável.

Um resultado importante de tal definição é dado pelo teorema que se segue:

Teorema 4.2.1: Todo conjunto infinito *X* contém um subconjunto infinito enumerável.

Demonstração: Basta definir uma função injetiva φ: IN$\to$*X*. Para isso, começamos escolhendo, em cada subconjunto não-vazio A$\subset$*X*, um elemento $x_A \in$A. Em seguida, definimos φ por indução. Pomos $\varphi(1) = x_x$ e, supondo já definidos $\varphi(1),...,\varphi(n)$, escrevemos A $_n$ = *X* – $\{\varphi(1),...,\varphi(n)\}$. Como *X* não é finito, A $_n$ não é vazio. Poremos então $\varphi(n+1) = x_{A_n}$. Isto completa a definição indutiva da função φ: IN$\to$*X*. Afirmamos que φ é injetiva. Com efeito, dados $m \neq n$ em IN tem-se, digamos $m < n$. Então $\varphi(m) \in \{\varphi(1),...,\varphi(n-1)\}$ enquanto que $\varphi(n) \in$C$\{\varphi(1),...,\varphi(n-1)\}$. Logo $\varphi(m) \neq \varphi(n)$. A imagem φ (IN) é, portanto, um subconjunto infinito enumerável de *X*.

A discussão de um conjunto *X* ser ou não enumerável está relacionada ao número cardinal desse conjunto, de modo que se escreve card(*X*) para representar esse número. Sendo assim, dizemos que dois conjuntos *X* e *Y* tem o mesmo número cardinal quando card(*X*) = card(*Y*). Dizemos ainda que, dois conjuntos finitos tem o mesmo número cardinal se, e somente se, possuírem o mesmo número de elementos e, caso *X* seja infinito enumerável, tem-se card(*X*) = card(*Y*) se, e somente se, *Y* for infinito enumerável. (LIMA, 2012)

Note que o teorema acima mostra que, para todo conjunto infinito *X*, tem-se card(IN) $\leq$ card(*X*), de modo que o número cardinal de um conjunto infinito enumerável é o menor dos números cardinais dos conjuntos infinitos.

Neste sentido, dados dois conjuntos *X*, *Y,* diz-se que card(*X*) < card(*Y*) quando existir uma função injetiva φ: $X \to Y$ mas não existir uma função sobrejetiva φ: $X \to Y$*.* Tal fato nos sugere a ideia de conjunto infinito não-enumerável, de modo que, neste trabalho, o principal exemplo é o conjunto dos números reais.

Nesta discussão, do ponto de vista pedagógico, enfatiza-se a preocupação em saber se os alunos têm essas concepções sobre que seja finito ou infinito o que nos sugere um forte aliado conceitual nas distinções entre conjuntos numéricos, domínios e gráficos de funções, por exemplo.

Sendo assim, ressalta-se desde já, pelo rigor que se deve fazer em tais distinções e que são possíveis como foco de discussão em uma aula sobre o assunto. Por exemplo, parece ser compreensível de entendimento em nível de Ensino Médio colocar em pauta de discussão o que se segue:

> Dado um conjunto *A*, do qual é parte integrante um conjunto *A'*, não equivalente a *A*, pode parecer que *A* e *A'* possuem necessariamente números cardeais diferentes. Assim acontece, com efeito quando *A* e *A'* são conjuntos finitos; não é possível, por exemplo, estabelecer uma correspondência perfeita entre os dias de um mês e os dias de um ano. Mas tal correspondência é as vezes possível quando *A* e *A'* são conjuntos infinitos. (COSTA, 1971, p.227)

Esta propriedade dos conjuntos infinitos, segundo Costa (1971), foi descoberta por R. Bolzano, colocando tais como um dos inúmeros fatos aparentemente contrários ao senso comum, mostrando assim, a análise da noção de conjunto infinito.

Tais discussões supõe-se serem extremamente prazerosas quando bem orientadas pelo professor em sala de aula. Exemplo disso pode-se citar o que Lima (2006) intitulou como "*Fantasia Matemática*", em que discorre sobre *"O Grande Hotel Georg Cantor"*, que está apresentado no anexo A deste trabalho. Para o momento, convém comentar a importância conceitual sobre injetividade e sobrejetividade de funções que tal assunto nos proporciona, que consistirá no fato de levar ao educando perceber que, por exemplo, as funções f: IN $\rightarrow$ IN, g: IN $\rightarrow$ IN, h: IN $\rightarrow$ IN e φ: IN $\rightarrow$ IN, definidas por $f(n) = n + 1$, $g(n) = n + 30$, $h(n) = 2n$ e $\varphi(n) = 3n$ são injetivas mas não são sobrejetivas, sendo as mesmas protagonistas do que é apresentado no anexo A.

Outra parte no contexto de função se refere à continuidade, assunto este, que Caraça (1951) afirma, tem sido estudado e debatido em todos os tempos, sendo considerado um dos mais importantes para a Ciência. A continuidade tem a reta como sua principal representante, o que nos permite a compreensão de tal conceito, conforme fica explicitado abaixo:

> [...] há na reta mais do que a simples densidade... – para nós, a imagem ideal da continuidade é a linha reta. (CARAÇA, 1951, p.58)

Será iniciada então uma dissociação entre as noções de densidade e de continuidade, idéia esta que para Costa (1971) foi estabelecida muito modernamente, de modo que a teoria abstrata da continuidade data dos trabalhos de R. Dedekind e de Cantor e que, anteriormente a eles, a idéia se apoiava mais ou menos explicitamente sobre a de grandeza. Uma definição errônea do contínuo era dada já por Aristóteles, e que muito tristemente ainda nos deparamos com tais argumentações, do seguinte modo: *"o que é divisível em partes sempre divisíveis"*.

Embora, as argumentações deste tema tenham sido feitas de forma mais rigorosa no capítulo anterior, é conveniente discutir um pouco mais sobre a idéia de sua consistência, ou seja, saber se para um conjunto qualquer, este apresenta ou não a mesma estrutura da reta e, portanto, se a propriedade de continuidade pode ser atribuída ao mesmo.

A ideia é conhecida como Cortes de Dedekind, em homenagem ao matemático alemão R. Dedekind, que em 1872 publicou uma obra intitulada *Continuidade e números irracionais* dedicada ao estudo deste problema, que contém um tratamento rigoroso do conceito de continuidade. (CARAÇA, 1951)

Como primeira abordagem e por reconhecer o valor da obra, sugere-se que se faça a leitura do anexo B em que é apresentada a maneira como Dedekind entendia da questão, citado em Caraça (1951).

Conforme ficou explicitado nas notas do anexo B, a ideia dos Cortes de Dedekind consiste em repartir uma reta em duas classes (A e B) por um ponto P sobre a reta, podendo este ser colocado indiferentemente na classe A ou na classe B. Em acordo com tal ideia, segue o que ficou designado, segundo Caraça (1951), como *"axioma ou postulado da continuidade de Dedekind"*:

> Todo o corte da recta é produzido por um ponto dela, isto é, qualquer que seja o corte (A,B) existe sempre um ponto da recta que separa as duas classes (A) e (B). (CARAÇA,1951, p.60)

O foco da discussão consiste em saber se o conceito de corte pode ser aplicado ao conjunto dos números racionais, donde deveriam existir duas classes (A) e (B) de números racionais tais que, todo número racional está classificado, ou em (A) ou em (B) e, todo número de (A) é menor que todo número de (B).

Neste sentido, consideremos uma repartição dos números racionais em duas classes (A) e (B), de modo que na classe (A) estejam presentes todo número racional *r* cujo quadrado seja menor que 2 ($r^2 < 2$) e, na classe (B), todo número racional *s* cujo quadrado seja maior que 2 ($s^2 > 2$), restando saber, portanto, se tal repartição representa um corte (A,B).

Pode-se constatar que qualquer número racional elevado ao quadrado pertencerá à classe (A) ou a classe (B), porém percebe-se que o critério de repartição abrange todos os números racionais a exceção de um número cujo quadrado seja igual a 2 e, que não é racional conforme demonstração feita no capítulo anterior. Desse modo, tem-se um corte definido, porém o elemento de separação das classes não existe.

Tal questão, afirma Caraça (1951), nos remete ao contato com o problema da incomensurabilidade. E assim, pode-se concluir que o conjunto dos números racionais não satisfaz o axioma da continuidade de Dedekind, não sendo, portanto, um conjunto contínuo.

Retomando a discussão sobre o conceito de função, uma vez que foi apresentada a discussão sobre continuidade, faz-se sentido em discorrer sobre funções contínuas.

4.3 FUNÇÕES CONTÍNUAS

De maneira intuitiva, pode-se pensar em função contínua como uma função cujo gráfico é uma curva sem interrupções, mas do ponto de vista formal, critérios devem ser estabelecidos para identificar a existência ou não de tais interrupções. Para isto, serão apresentados alguns exemplos que permitem conceituar de forma mais clara a propriedade do valor intermediário.(MUNIZ NETO, 2012)

Consideremos as funções f: IR → IR dada por $f(x) = \{x\}$ (função parte fracionária) e g: IR → IR dada por $g(x) = x^2$, cujos respectivos gráficos estão apresentados abaixo:

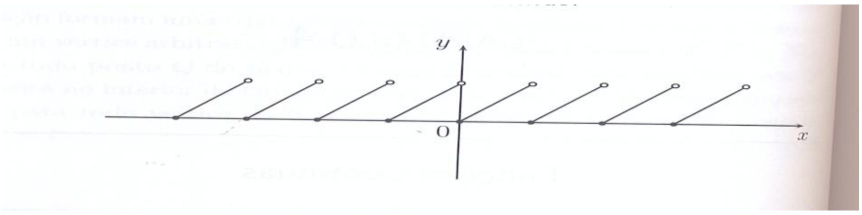


FIGURA 3: Gráfico de $f(x) = \{x\}$ (MUNIZ NETO, 2012, p.136)

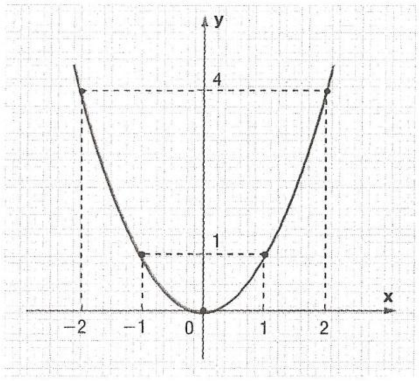


FIGURA 4: Gráfico de $g(x) = x^2$ (DANTE, 2004. P.62)

Observando os gráficos de *f* e *g*, percebe-se que devido à existência de *saltos* ao longo do mesmo, o gráfico de *f* é descontínuo e o de *g* é contínuo. Sendo um pouco mais rigoroso com a discussão, os domínios de *f* e *g* serão restringidos. Assim, consideremos, por exemplo, o domínio de f restrito ao intervalo $[3/4, 3/2]$, então temos que *Im*(*f*) = $[0, 1/2] \cup [3/4, 1\ )$.

Note que, existem valores de *y* no intervalo de extremos *f*(3/4) e *f*(3/2), por exemplo, *y* = 5/8, tais que nenhum $x \in [3/4, 3/2]$ satisfaz *f*(*x*) = *y*.

Agora, restringindo o domínio de *g* a um intervalo [*a,b*] $\subset$ IR e denotando por *g*([*a,b*]) a imagem da restrição de *g* a [*a,b*], donde *g*([*a,b*]) = = {*g*(*x*) $\in$ IR | *x* $\in$ [*a,b*]}; e colocando *c* = max{-*a,b*}, tem-se que:

$$g([a,b]) = \begin{cases} [a^2, b^2], se\, 0 \leq a < b \\ [0, c^2],\ se\, a < 0 < b \\ [b^2, a^2],\ se\, a < b \leq 0 \end{cases}$$

De modo particular, para todo *y* no intervalo *g*(*a*) e *g(b*), existe *x* $\in$ [*a,b*] (*x* = $\pm\sqrt{y}$, conforme o caso), tal que *g*(*x*) = *y*.

Generalizando-se então a discussão apresentada acima, de modo que X denota uma união de intervalos da reta, salvo menção em contrário, segue-se a definição abaixo:

Definição 4.3.1: Diz-se que uma função f: $X \to$ IR possui a propriedade do valor intermediário se, para todo intervalo $[a,b] \subset X$ e todo y_0 pertencente ao intervalo de extremidades $f(a)$ e $f(b)$, existir $x_0 \in [a,b]$ tal que $y = f(x)$.

De posse desta definição, pode-se constatar que a função f considerada no exemplo acima dada por $f(x) = \{x\}$, $x \in$ IR, não possui a propriedade do valor intermediário. Em contrapartida, a função g considerada nos mesmo exemplo, dada por $g(x) = x^2$, $x \in$ IR, possui tal propriedade.

Mas, não se pode considerar a existência de tal propriedade em uma função como critério suficiente para afirmar se a função será designada contínua. Observemos que a função f: $[0,2] \to$ IR dada por:

$f(x) = \begin{cases} x, & se\ 0 \leq x \leq 1 \\ x - \frac{1}{2,} & se 1 < x \leq 2 \end{cases}$ satisfaz a propriedade do valor intermediário, porém seu gráfico apresenta um *salto* em $x = 1$, não podendo ser chamada de função contínua.

Para solucionar o problema descrito e poder conceituar a definição de função contínua, consideremos a seguinte abordagem intuitiva que se segue. Seja f: $(a,b) \to$ IR uma função dada, $x_0 \in (a,b)$ fixado e $P_0(x_0, f(x_0)) \in Gf$ (gráfico de f); para $x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$, seja ainda $P(x,f(x)) \in Gf$. Para que Gf possa ser denominado contínuo, devemos ter P próximo a P_0, para x próximo a x_0.

Tal proximidade deve ser entendida como um *erro* $r > 0$, considerado de maneira arbitrária para a posição do ponto P_0, devemos ter $P \in D(P_0, r)$, onde D representa um disco de centro P_0 e raio r, sempre que a abscissa x de P se aproximar de x_0 com erro suficientemente pequeno, por exemplo, um certo $\delta > 0$. De maneira simbólica podemos escrever que arbitrado $r > 0$, deve existir $\delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta \Rightarrow \overline{PP_0} < r$, cuja representação gráfica segue abaixo:

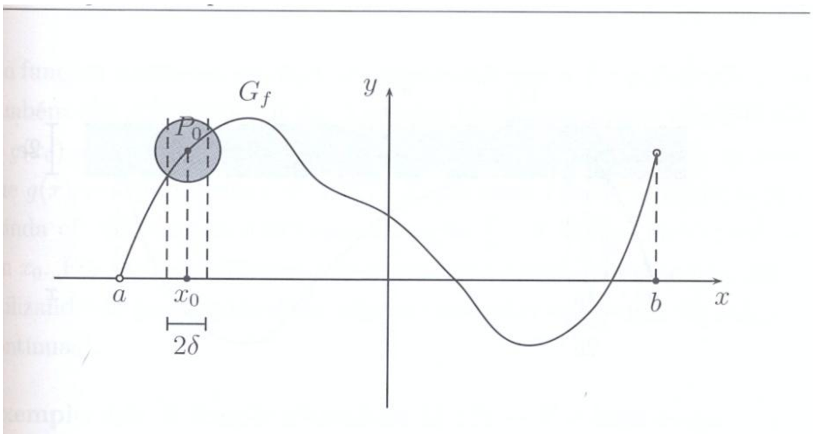


FIGURA 5: Ponto de vista correto da função contínua.
(MUNIZ NETO, 2012, p.139)

Muniz Neto (2012) observa que, tal ideia ainda pode ser equiparada à uma descrição geométrica alternativa conforme segue:

> arbitrado um erro $\varepsilon > 0$ (lê-se épsilon) para o valor de f em x_0, i.e., arbitrada uma faixa horizontal IR x $(f(x_0) - \varepsilon,\ f(x_0)+\varepsilon)$ do plano cartesiano, simétrica em relação ao ponto $P_0(x_0, f(x_0))$, deve existir outro erro $\delta > 0$ tal que, para $x \in X$ tal que $|x - x_0| < \delta$, o ponto $P(x, f(x))$ pertença à faixa em questão. (MUNIZ NETO, 2012, p.139)

A figura a seguir serve de representação ao que foi descrito acima.

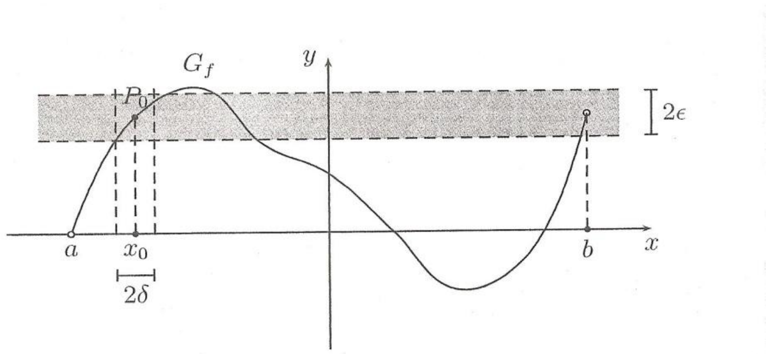


FIGURA 6 (MUNIZ NETO, 2012, p.140)

Definição 4.3.2: Uma função f: $X \rightarrow$IR, em que $X \subset$IR é contínua em um ponto $x_0 \in X$ se a seguinte condição for satisfeita: dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. A função é dita contínua se o for em todo $x_0 \in X$.

Com estas discussões muitos resultados entre proposições e teoremas podem ser obtidos, de modo que serão enfatizados alguns deles e os outros a quem possa interessar poderão ser encontrados em Lima (2012) e Muniz Neto (2012). O resultado da proposição que segue é conhecido como a *regra da cadeia.*

Proposição 4.3.1: Se $X,Y \subset$ IR são uniões de intervalos e f: $X \rightarrow Y$ e g:$Y \rightarrow$IR são funções contínuas, então g o f: $X \rightarrow$IR também é contínua.

Prova: Sejam $x_0 \in X$ e $y_0 = f(x_0)$. Dado $\varepsilon > 0$, a continuidade de g garante a existência de $\delta > 0$ tal que $y \in Y$, $|y - y_0| < \delta \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$. Por outro lado, a continuidade de f garante a existência de $\delta' > 0$ tal que $x \in X$, $|x - x_0| < \delta' \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta$, em que $f(x) = y$ e $f(x_0) = y_0$. Portanto, segue que $x \in X$, $|x - x_0| < \delta' \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$, o que estabelece a continuidade da função *g o f.*

Outro resultado muito importante proveniente das definições apresentadas e com muitas aplicações é o Teorema do Valor Intermediário (TVI), que resumidamente, segundo Lima (2012, p.234) diz o seguinte: *"uma função contínua definida num intervalo não pode passar de um valor para outro sem passar por todos os valores intermediários".*

Sendo assim, pode-se afirmar que funções contínuas definidas num intervalo (a,b) satisfazem a propriedade do valor intermediário. Porém, antes de enunciar e demonstrar o TVI, outras demonstrações se fazem necessárias:

LEMA (Permanência do sinal para funções contínuas): Sejam $I \subset$IR um intervalo e f: $I \rightarrow$IR uma função contínua. Se $x_0 \in I$ é tal que $f(x_0) > 0$ (respectivamente para $f(x_0) < 0$), então existe $\delta > 0$ tal que $x \in I$,

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$ (respectivamente $f(x) < -\frac{f(x_0)}{2}$). Em particular, f é ainda positiva (respectivamente negativa) em $I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Prova: Consideremos inicialmente o caso em que $f(x_0) > 0$. A definição de continuidade garante que, para $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in I$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$. Mas esta última desigualdade acarreta que $f(x) - f(x_0) > -\frac{f(x_0)}{2}$, o que é o mesmo que $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$ para todo $x \in I$ tal que $|x - x_0| < \delta$. Analogamente, para o caso em que $f(x_0) < 0$, sabemos da definição que para $\varepsilon = -\frac{3f(x_0)}{2} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in I$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = -\frac{3f(x_0)}{2}$. E esta última desigualdade acarreta que $f(x) - f(x_0) < -\frac{3f(x_0)}{2}$, o que é o mesmo que $f(x) < -\frac{f(x_0)}{2}$ para todo $x \in I$ tal que $|x - x_0| < \delta$.

Muniz Neto (2012) afirma que, este lema permite provar a propriedade do valor intermediário para funções contínuas definidas num intervalo $[a,b]$. Porém é conveniente começar com um caso especial conhecido como *Teorema de Bolzano* conforme é exposto a seguir, em que supõe-se serem conhecidas as propriedades elementares do supremo de um conjunto não vazio e limitado superiormente de números reais.

Teorema de Bolzano (ou do anulamento): Seja f: $[a,b] \to$ IR uma função contínua. Se $f(a).f(b) < 0$, então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

Prova: Suponhamos, sem perda de generalidade, que $f(a) < 0 < f(b)$, e seja $A = \{x \in [a,b]$; f é negativa no intervalo $[a,x]\}$. Como $a \in A$ por hipótese, temos que $A \neq \emptyset$. Por outro lado, como $A \subset [a,b]$, então A é limitado e, portanto, existe $c = \sup A$. Inicialmente, notemos que $c > a$ pelo lema de permanência de sinal, uma vez que este, pelo fato de $f(a) < 0$, garante a existência de $0 < \delta < b - a$ tal que $f(x) < 0$ para $x \in [a, a+\delta]$, e daí $c \geq a + \delta$. Afirmamos agora que $f(c) = 0$. Por contradição, suponha inicialmente que $f(c) < 0$. Sendo $f(b) > 0$, então $c < b$ e, novamente pelo lema de permanência de sinal, existiria $0 < \delta < b\text{-}c$ tal que f seria negativa em $(c\text{-}\delta, c+\delta) \cap [a,b]$. Mas como $c = \sup A$, podemos tomar $d \in (c\text{-}\delta, c) \cap A$, de sorte que $f < 0$ em $[a, c_1]$;portanto, teríamos $f < 0$ em $[a,d] \cup [c\text{-}\delta, c+\delta/2] = [a,\ c+\delta/2]$, contradizendo o fato de ser $c = \sup A$. Por outro lado, $f(c) > 0$, existiria $\delta > 0$ tal que f seria positiva em $(c\text{-}\delta, c+\delta) \cap [a,b]$; em particular, $A \cap (c\text{-}\delta, c] = \varnothing$, e daí teríamos $\sup A \leq c\text{-}\delta$, uma nova contradição. Logo, a única possibilidade é termos $f(c) = 0$.

Teorema do Valor Intermediário (TVI): Sejam $f,g:[a,b] \rightarrow$ IR funções contínuas. Se $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$ (ou vice-versa), então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = g(c)$. Em particular, se um real d pertence ao intervalo de extremos $f(a)$ e $f(b)$, então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = d$.

Prova: Para a primeira afirmação, note que a função $h = f - g$ é contínua e tal que $h(a).h(b) = (f(a) - g(a)).(f(b) - g(b)) < 0$. Portanto, o teorema de Bolzano garante a existência de $c \in (a,b)$ tal que $h(c) = 0$, i.e., tal que $f(c) = g(c)$. O caso particular em questão é agora obtido fazendo g igual à função constante e igual a d em $[a,b]$.

Outro teorema importante envolvendo funções contínuas é conhecido como Teorema de Weierstrass, que em resumo, garante que uma função contínua num intervalo fechado assumirá valor máximo e valor mínimo. Porém, para compreensão de sua demonstração, se faz necessária a demonstração do Teorema da Limitação que se segue.

Teorema da Limitação: Se f for contínua num intervalo fechado $[a,b]$, então f será limitada em $[a,b]$.

Prova: Suponhamos por absurdo, que f não seja limitada em $[a,b]$. Façamos $a = a_1$ e $b = b_1$; existe, então x_1 em $[a_1,b_1]$ tal que $|f(x_1)| > 1$. Seja c_1 o ponto médio de $[a_1,b_1]$; f não será limitada em um dos intervalos $[a_1,c_1]$ ou $[c_1,b_1]$ e façamos $a_2 = c_1$ e $b_2 = b_1$. Não sendo f limitada em $[a_2,b_2]$, existirá $x_2 \in [a_2,b_2]$ tal que $|f(x_2)| > 2$. Prosseguindo com este raciocínio, construiremos uma sequência de intervalos $[a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset$ $\supset [a_3,b_3] \supset ... \supset [a_n,b_n] \supset ...$, satisfazendo as condições da propriedade dos intervalos encaixantes e tal que, para todo natural $n > 0$, existe $x_n \in [a_n, b_n]$ com $|f(x_n)| > n$. Segue dessa última desigualdade que $\lim_{n\to\infty} |f(x_n)| = +\infty$. Seja, agora, c o único real tal que, para todo $n > 0$, $c \in [a_n, b_n]$. Como a sequência x_n converge para c e f é contínua, resulta que $\lim_{n\to\infty} |f(x_n)| = f(c)$ que está em contradição com $\lim_{n\to\infty} |f(x_n)| = +\infty$. Fica provado que a suposição de f não ser limitada em $[a,b]$ nos leva a uma contradição. Portanto, f é limitada em $[a,b]$.

Teorema de Weierstrass: Se f for contínua em $[a,b]$, então existirão x_1 e x_2 em $[a,b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in [a,b]$.

Prova: Sendo f contínua em $[a,b]$, f será limitada em $[a,b]$, daí o conjunto $A = \{f(x) |\ x \in [a,b]\}$ admitirá supremo e ínfimo. Sejam $M = \sup\{f(x) |\ x \in [a,b]\}$ e $m = \inf \{f(x) |\ x \in [a,b]\}$. Assim, para todo x em $[a,b]$, $m \leq f(x) \leq M$. Provamos, a seguir, que $M = f(x_2)$ para algum x_2 em $[a,b]$. Se tivéssemos $f(x) < M$ para todo x em $[a,b]$, a função[2] $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$, $x \in [a,b]$ seria contínua em $[a,b]$, mas não limitada em $[a,b]$, que é uma contradição (se g fosse limitada em $[a,b]$, então existiria um $\beta > 0$ tal que para todo x em $[a,b]$, $0 < \dfrac{1}{M - f(x)} < \beta$ e, portanto, para todo x em $[a,b]$, $f(x) < M - \dfrac{1}{\beta}$ e assim M não seria supremo de A). Segue que $f(x) < M$ para todo x em $[a,b]$ não pode ocorrer, logo devemos ter $M = f(x_2)$ para algum x_2 em $[a,b]$. Com raciocínio análogo, prova-se que $f(x_1) = m$ para algum x_1 em $[a,b]$.

---

2. Motivo da escolha da função $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$: sendo M o supremo dos $f(x)$, por menor que seja $r > 0$, existirá x tal que $M - r < f(x) < M$, assim, a diferença $M - f(x)$ poderá se tornar tão pequena quanto se queria e, portanto, $g(x)$ poderá se tornar tão grande quanto se queira.

5 MÉTODO

No capítulo 1 evidenciamos uma preocupação com o "saber matemático", de modo que Davis (1986) já manifestava esta preocupação ao trazer para discussão o tema *"Quanta matemática se conhece hoje"*. Também ficou evidenciado que este saber matemático não é inerente apenas aos alunos, mas também, aos professores, o que nos remete a uma preocupação com a formação destes professores, sendo esta uma etapa necessária, mas não suficiente para melhorar a qualidade de ensino da matemática.

Nesta busca pela melhoria da qualidade de ensino, alguns estudos tem se destacado, o que acontece, por exemplo, quando se utiliza softwares matemáticos com a finalidade de fazer com que os alunos se apropriem de conceitos, muitas vezes de difícil assimilação, como ocorre no caso do ensino do conceito de função. É importante salientar, que a utilização desses recursos está ocasionando mudanças significativas no ensino, uma vez que estão diretamente relacionadas à dinâmica do ensino em sala de aula, o que se enfatiza mais uma vez, a necessidade de professores qualificados para este fim.

No entanto, nos trabalhos que tratam dessa linha de pesquisa, pode-se perceber uma discussão sobre metodologias de ensino, voltadas é claro, para o aprendizado de matemática, e, portanto, para a melhoria da qualidade de ensino. Como exemplo, pode-se citar o estudo que Souza & Silva (2006) realizaram ao apresentar uma metodologia para o ensino de função quadrática com a utilização de dois softwares gráficos: "parábola" e "oficina de funções".

Souza & Silva (2006), em sua pesquisa, trabalharam com um grupo de jovens do primeiro ano do ensino médio da rede pública de ensino, organizados em duplas, de modo que inicialmente, o que já era de se esperar, foi necessário um treinamento voltado ao uso dos softwares utilizados. Dentre as 10 atividades desenvolvidas, seguem abaixo as 6 primeiras, uma vez que estas tem como base os conceitos já estudados em sala de aula pelos alunos:

> Atividade 1: Familiarizar o aluno com o programa ‘Oficina de Funções’.
> Atividade 2: Familiarizar o aluno com o programa ‘Parábola’.
> Atividade 3: Estudar a concavidade das funções do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, utilizando o software ‘Oficina de Funções”.
> Atividade 4: Determinar os zeros das funções quadráticas, utilizando o software ‘Parábola’.
> Atividade 5: Determinar as coordenadas do vértice V(x,y) de funções quadráticas.
> Atividade 6: Determinar o valor máximo e o valor mínimo da função $f(x) = ax^2 + bx + c$. (SOUZA & SILVA, 2006, p.119-120)

Em sua pesquisa, foi apontada a rapidez com que os gráficos podem ser construídos, o que vem a facilitar o processo do aluno fazer investigações matemáticas, como o de fazer previsões, testar e/ou validar hipóteses, bem como o de perceber mudanças nas expressões algébricas mediante a construção de vários gráficos. Um ponto importante, dentre muitos que a pesquisa apresenta, é o fato de não ter sido negligenciada a formalização matemática, conforme pode ser evidenciado em:

> Nessas atividades os aspectos algébricos não foram deixados de lado, mas sim trabalhados juntamente com o aspecto visual, com a finalidade de o aluno perceber a relação com essas duas formas de estudar as funções quadráticas, [...] (SOUZA & SILVA, 2006, p.118)

Outros dois aspectos chamam a atenção na pesquisa de Souza & Silva (2006). Um é o fato de duas duplas não possuírem computador em casa, o que, no caso não implicou em dificuldades para as mesmas, mas trata-se de uma preocupação que o professor deverá ter ao preparar uma aula que dependa deste recurso. O outro, que minimamente é bastante curioso, está vinculado ao avanço dos alunos e, principalmente aos recursos que utilizaram para tal fim, em que se pode perceber a utilização concorrente de lápis e réguas na construção de gráficos e consequente melhoria dos mesmos:

> No decorrer das atividades, observamos que as duplas foram melhorando progressivamente o seu registro do gráfico das funções solicitadas. Essa melhora no esboço dos gráficos pode ter sido facilitada pela utilização concorrente de outros recursos didáticos, como o lápis e a régua, além do computador, o que permitiu o desenvolvimento de outras habilidades, extrapolando a utilização inicial dos recursos tecnológicos apresentados. (SOUZA & SILVA, 2006, p.123)

De maneira resumida, pode-se destacar como resultado da pesquisa de Souza & Silva (2006), a interação dos alunos que, inseridos num processo investigativo e sob mediação do professor, obtiveram uma maior autonomia na exploração de novas situações e, principalmente, sem abrir mão de questões que envolvessem a utilização do desenvolvimento algébrico.

De modo não menos importante, pesquisas apontam para uma preocupação com o contexto histórico no ensino de conceitos matemáticos, o que também nos remete a uma preocupação com a prática docente, e portanto, com a formação de professores.

Neste sentido, destaca-se a pesquisa que Rocha (2008) realizou com alunos de licenciatura em matemática, então futuros professores. Tal pesquisa foi "*baseada na história da matemática como um reorganizador cognitivo da matemática escolar, por meio da investigação em sala de aula*", apresentando como componente especial de estudo, o conceito de função, tendo em vista, que segundo Rocha (2008), neste conceito, "*residem muitas dificuldades demonstradas até pelos estudiosos da Matemática durante o desenvolvimento histórico deste conceito"*. Uma das preocupações destacada nesta pesquisa está voltada à grande quantidade de reprovações em certas disciplinas de nível superior, conforme segue em destaque:

> [...] tanto estudantes da graduação em matemática como de outros cursos, que vêm apresentando dificuldades e mesmo deficiências em Cálculo Diferencial e Integral. Em busca das causas do grande número de reprovações nessa disciplina verificamos que muitas dificuldades dos alunos referem-se à concepção que os mesmos têm sobre função, registro de representação gráfica, construção de tabelas, notação matemática, etc. (ROCHA, 2008, p.15)

Paralelamente e, em condição de igualdade de preocupação, Rocha (2008) ainda enfatiza certa preocupação com a formação de professores ao afirmar:

> A falta de superação das referidas dificuldades, particularmente por parte dos alunos da licenciatura, pode levar as mesmas para o exercício docente quando passarem a atuar como professores.(p.15)

Neste sentido, na pesquisa de Rocha (2008), sugere-se para o ensino de função, a utilização de textos relacionados ao desenvolvimento histórico da noção de função, bem como seus desdobramentos para o ensino do mesmo, acreditando ser uma ampliação conceitual do assunto para os professores, de modo a propiciar o exercício de atividades de ensino centradas na investigação. E a respeito desta investigação é conveniente ressaltar:

> [...] a ideia está implicitamente presente na importância que é dada à formulação de problemas, à produção e teste de conjeturas, à argumentação e validação e ao próprio processo de “pensar matematicamente”. (ROCHA, 2008, p.18)

Em sua pesquisa, Rocha (2008) focou no fato de que partindo-se da história pode-se desenvolver investigações matemáticas, a fim de produzir conhecimentos e/ou novos significados aos saberes. Na etapa em que se desenvolveu a primeira experiência, em que 12 alunos do curso de licenciatura em matemática, divididos em grupos com 4 elementos cada, constatou-se a primeira dificuldade por parte dos envolvidos, tendo em vista que estes não sabiam fazer pesquisa por meio da internet, o que levou a pesquisadora a fornecer os primeiros textos. Mesmo assim, outros agravantes surgiram inseridos no considerável progresso do grupo, tendo em vista que as atividades elaboradas pelos alunos, segundo Rocha (2008), não tiveram *“um caráter investigatório, construtivo e provocador da aprendizagem baseadas nas informações históricas,...”*, o que era compreensível, uma vez que as atividades requeriam maior experiência e conhecimento dos conteúdos matemáticos e históricos, bem como de investigações matemáticas, por parte dos alunos, o que também fica explicitado em:

> Em relação às dificuldades sentidas observamos que, em geral, os alunos apresentaram inicialmente dificuldades na leitura e interpretação dos textos históricos como também nos textos de conteúdos especificamente matemáticos. (ROCHA, 2008, p.99)

Um aspecto muito importante do resultado obtido por Rocha (2008) nesta primeira experiência, foi quando pôde-se constatar através de falas no grupo pesquisado, o reconhecimento das contribuições que a história pode dar para as atividades em sala de aula, de maneira que 44 % do grupo mostraram-se preocupados com a contextualização do ensino, objetivando a compreensão de conceitos, o que nos remete à importância da formalização matemática no ensino, o que fica evidenciado em:

> (...) a história contribui para apresentar ao aluno uma matemática contextualizada, completamente diferente daquela apresentada na sala de aula pela maioria dos professores, possibilitando liberdade de criação e principalmente de interpretação dos conceitos matemáticos (Depoimento dos alunos, 2006.1) (ROCHA, 2008, p.68)

É conveniente ressaltar que uma leitura da pesquisa feita por Rocha (2008) é de fundamental importância para se ter noção da real proposta da mesma e de sua contribuição para a qualidade de ensino de matemática. Porém, para o momento será citada mais uma particularidade que diz respeito ao ensino de funções e, mais especificamente à formalização matemática:

> Há, entretanto, uma outra categoria de expressão matemática muito evidente nos estudos relacionados ao conceito de função: as representações ligadas às simbolizações algébricas. [...]
> As vantagens dessa linguagem algébrica para o aprendizado de funções, são principalmente a sua clareza e potência para a generalização, favorecendo a apreensão da estrutura como um todo. (ROCHA, 2008, p.96)

E de maneira bastante coincidente ao que Souza & Silva (2006) puderam constatar em sua pesquisa, Rocha (2008) também constatou, porém ressalta-se que ambos se utilizaram de estratégias diferentes. Em sua pesquisa, Rocha (2008), ressaltou o avanço no conhecimento do seu grupo de estudo, mas não deixou de salientar as dificuldades que os mesmos apresentaram ao se trabalhar com conteúdos relacionados com a dependência e co-variação das funções, bem como as diferentes representações de funções (tabelas, gráficos e expressões algébricas) e, neste sentido, afirma:

> O nível de formalização necessária aos conteúdos matemáticos não deixou de ser evidenciada nos diferentes tópicos do estudo do pensamento funcional, foram explicitadas uma série de notações, palavras e representações, que consideramos indispensáveis ao professor de matemática. (ROCHA, 2008, p.100)

Sendo assim, podemos perceber que na busca incessante pela qualidade de ensino de matemática, independentemente das estratégias a serem seguidas, as pesquisas, de modo geral, buscam um ensino de matemática com significado para o aluno e que nas obras apontadas neste capítulo, bem como em outras apontadas no decorrer do trabalho, acabam recaindo por apresentar ao aluno um significado efetivo para que o mesmo se comunique matematicamente, e consequentemente remetendo-nos à busca pelo “saber matemático”.

Desse modo, este “saber” está vinculado à necessidade dos alunos de se comunicar matematicamente e que, segundo o PCN (Ensino Médio), para o alcance desta etapa faz-se necessário o uso da formalização matemática.

Sendo assim, tendo em vista a construção do “saber matemático”, este trabalho apresenta uma proposta voltada para a conscientização e valorização da formalização de conceitos matemáticos, tanto por parte dos alunos como também dos professores.

O presente trabalho é um estudo de abordagem qualitativa, em que se buscou investigar o domínio de habilidades que os alunos possuem em se comunicar matematicamente, ou seja, a investigação está voltada em saber se os alunos se apropriam de linguagem simbólica, se fazem uso de validação de argumentos, bem como, se também utilizam a matemática na interpretação e intervenção no cotidiano.

Para isto, seis pessoas participaram da investigação, dentre as quais, três são alunos do segundo ano do Ensino Médio em escola pública e os outros três já concluíram recentemente o Ensino Médio, sendo estes oriundos de escola particular.

Os alunos foram instruídos sobre a pesquisa, mediante uma carta de apresentação (Apêndice A) contendo o tema e o objetivo do trabalho, bem como assinaram (ou responsável legal) o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice B).

Como primeira etapa da investigação, foi realizada aplicação de dois questionários (Anexos C e D). O primeiro (parte A) é composto de dez questões entre abertas e fechadas. Neste buscou-se saber, de maneira geral, sobre a importância da matemática para o aluno, bem como compreender o tipo de formação matemática que o aluno teve contato até então; e questões voltadas às simbologias matemáticas e conceitos fundamentais básicos para o ensino de função. Já, o segundo questionário (parte B) é composto de nove questões específicas sobre funções, em que se buscou avaliar o grau de entendimento e uso de simbologias em questões contextualizadas ou não, bem como propriedades e representações de funções. Convém ressaltar que o segundo questionário (parte B) apresenta algumas questões retiradas na íntegra ou adaptadas, das obras de Lima (2006), Dante (2004) e Murolo (2004).

O método de análise das questões abertas presentes nestes questionários também será baseado na interpretação do discurso de cada aluno, mediante a justificativa dada a alguma questão não respondida.

Após estas duas primeiras investigações e análise dos resultados, os alunos serão submetidos a uma aula sobre funções, sendo esta, a segunda etapa da investigação. Nesta etapa, serão discutidas algumas das questões presentes em ambos os questionários, de maneira a evidenciar o bom uso da linguagem formal na resolução de tais questões, tendo em vista que o tema é bastante abrangente e, portanto, incompatível de ser discutido em uma única aula.

Também é importante comentar que a percepção e possíveis discussões por parte dos alunos também serão evidenciadas e posteriormente discutidas nos resultados deste trabalho.

O plano da aula em questão encontra-se no apêndice E deste trabalho, de modo que a condução da aula se iniciará com uma explanação sobre alguns exemplos de aplicações de função no cotidiano que demonstre a relevância da discussão do tema e em seguida será conduzida seguindo as etapas abaixo:

a) Relacionar a questão 9 (questionário 1) com a questão 1(questionário 2), a fim de salientar a importância em se estabelecer o domínio de uma função e portanto, os três pilares que definem uma função (domínio, contradomínio e lei de correspondência). Fazer uma discussão apenas, sobre o contínuo e o discreto, por meio de gráficos comparativos, focando para os erros de raciocínio que foram apresentados pelos voluntários;

b) Trabalhar com as questões 4, 5, 7 e 8 (questionário 2) sobre a contextualização, focando a formalização matemática na resolução de cada uma e as diferentes características nos diferentes tipos de função envolvidas;

c) Comentar as questões 2, 3 e 9 (questionário2);

d) Aplicar uma enquete como última etapa de investigação, de modo que leve os voluntários a refletirem ao que foi exposto. A enquete é composta de apenas duas questões conforme segue abaixo, tendo sido a segunda questão, uma adaptação de Lima (2005):

1) Você considera importante a aula que teve sobre formalização de conceitos? Como essa aula, na sua opinião, poderia lhe ajudar a resolver problemas do seu dia-a-dia?
2) Uma droga, ao ser administrada é absorvida e posteriormente atinge a corrente sanguínea. Quando injetada (administração por via intravenosa), a concentração plasmática da droga é imediata. Quando a administração for por via oral, a concentração plasmática máxima é atingida cerca de uma a duas horas após a administração.
   Um paciente devia tomar certo antibiótico de 12 em 12 horas. A bula deste medicamento dizia que, 24 horas após sua administração, o organismo eliminaria 90% da substância ativa, restando apenas 10% da concentração plasmática máxima originalmente atingida. Considerando as situações abaixo, que porcentagem da droga ainda estaria no seu corpo no momento de tomar a segunda dose?
   a) administração intravenosa;
   b) administração oral, considerando o tempo de duas horas para absorção da droga.

Finalizando, a terceira etapa consiste numa nova investigação, a fim de saber se o voluntário reconhece a essência da matemática, no sentido de compreender se o mesmo reconhece a importância de sua escrita como instrumento facilitador na construção do conhecimento.

6 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Foram entrevistadas 6 pessoas de ambos os sexos, sendo 4 do sexo masculino e 2 do sexo feminino. A idade média dos entrevistados foi de 19 anos, tendo sido a menor delas 16 anos e a maior de 25 anos. Destes seis entrevistados, três se encontram no segundo ano do Ensino Médio e os demais já cursam o primeiro semestre de nível superior. Os três que ainda cursam o Ensino Médio são alunos de escola pública, sendo os demais oriundos de escola particular.

Convém ressaltar que apenas quatro dos entrevistados foram até o fim da investigação proposta neste trabalho, ou seja, participaram das duas primeiras investigações (questionários A e B), da aula ministrada pelo pesquisador, e da última investigação (Enquete). Os outros dois, não puderam comparecer à aula e, portanto, não participaram da última etapa (Enquete), o que não comprometeu o presente estudo, tendo em vista que o mesmo tem um enfoque qualitativo.

Os dois primeiros questionários (partes A e B) foram aplicados em momentos diferentes, tendo em vista o direcionamento das discussões que seriam feitas no momento da aula, em que se pretendia focar nas resoluções das questões voltadas para o uso adequado da linguagem matemática, ou seja, objetivando o uso da formalização matemática.

Como resultado do questionário (parte A), pode-se fazer um dimensionamento do perfil do grupo de entrevistados. De modo geral, consideraram o ensino fundamental e médio oferecidos na escola que cursam ou já cursaram sendo regular ou bom. Apenas um, classificou ambos como excelente.

Em relação à quarta questão, em que deveriam atribuir índices de 1 a 5 em escala crescente de importância, sobre a importância da matemática para a ciência e depois para si próprio, todos reconheceram a importância da matemática para a ciência e consequentemente para o mundo, atribuindo índice igual a 5. No entanto, ao mencionar a importância para si mesmo, a unanimidade não mais apareceu, tendo chamado a atenção o fato de um dos índices mencionado ser igual a 1, o que nos remete à seguinte afirmativa:

> As questões relativas ao ensino e aprendizagem da Matemática no Ensino Fundamental e Médio apresentam algumas dificuldades. Dentre elas, podemos citar como um aspecto importante a forte aversão da maioria dos alunos à Matemática, que é tida como difícil de entender, desinteressante, descontextualizada, infalível e pronta. (SOUZA & SILVA, 2006, p.108)

Cabe ressaltar que o resultado desta questão foi determinante para o direcionamento do segundo questionário (parte B) em que se buscou colocar questões também contextualizadas para pelo menos, mostrar um lado da matemática que talvez, o voluntário em questão não conheça.

Os voluntários ao relatarem sobre o conhecimento de seus professores, novamente, todos foram unânimes ao afirmarem que seus professores demonstravam conhecimento daquilo que era ensinado. Porém, no que se refere à sexta questão, pôde-se confirmar a importância deste trabalho e justificar o motivo pelo qual está sendo realizado, ou seja, dois voluntários mencionaram que seus professores não discutem a formalização matemática, de modo a fazer com que os alunos tenham compreensão da escrita matemática apropriada na definição do conceito apresentado. Cabe ressaltar, que a existência desse problema não é algo exclusivo de escola pública, tendo em vista que uma das respostas veio de um voluntário oriundo da rede particular de ensino.

Quando, na sétima questão, foram indagados em relação ao fato de seus professores relacionarem o tema de aula com a evolução histórica do conhecimento ou com alguma aplicação em outras áreas do conhecimento, novamente dois voluntários mencionaram que seus professores não fazem uso de nenhuma das práticas citadas, outro citou apenas evolução histórica, outro apenas aplicações e, os outros dois, disseram que sim, ou seja, seus professores adotam as duas práticas em suas aulas.

O aspecto histórico para discorrer sobre determinado tema em sala de aula é de fundamental importância para se trabalhar a ideia que talvez, muitos dos educandos, não possuam da matemática, ou seja, a ideia de que, segundo Firentini (1995), assim como acontece com todo o conhecimento, a Matemática também é um conhecimento historicamente em construção e oriundo de relações sociais.

O que foi apresentado até o momento como resultado neste trabalho, permite conjecturar sobre a qualidade do ensino que está sendo oferecido aos alunos. No transcorrer do mesmo, muitos autores foram citados por mostrarem-se preocupados com a qualidade de ensino da matemática, mais particularmente com o ensino de funções (Schreiner, 2004; Maciel, 2011; Rocha, 2008; Lima, 2005; Fiorentini, 1994, etc.). Neste sentido é que se ressalta mais uma vez a relevância do presente estudo, em que se propõe destacar a importância da formalização matemática para o ensino de funções no Ensino Médio, de modo que, entende-se que o significado de tal conceito e o bom uso da linguagem matemática é essencial para bem conduzir as ideias na resolução de situações do cotidiano, da qual a matemática ajuda a solucionar problemas dos mais diversos possíveis.

Assim, enfatiza-se a importância da interação que deve existir entre aluno e professor nesta construção de novos conceitos e significados, a fim de que ambos saiam ganhando com o aprendizado, cabendo ao professor um papel de mediador, conforme segue abaixo:

> Aprender, portanto, significa *significar:* estabelecer relações possíveis entre fatos/ideias e suas representações (signos). Ao professor é atribuído o papel de mediador – alguém mais capaz do que o aluno de processar e estabelecer relações. O professor teria o papel de planejar atividades ricas em significado para que se produza em sala de aula significações historicamente produzida (PINO apud FIORENTINI, 1995, p.33)

As três últimas questões do questionário (parte A) foram mais específicas e direcionadas ao conteúdo de funções e que também serviram para direcionar o tipo de sondagem que se faria no questionário (parte B). Quanto à questão 8, em que se procurava uma diferença entre variável e incógnita, percebeu-se a não distinção clara entre as duas, de maneira que, possivelmente, não haja uma distinção conceitual entre equação e função. Quando investigados sobre os elementos dos conjuntos numéricos, também ficou evidenciada a dificuldade que apresentam ao lidarem com raízes exatas e não exatas, bem como, em alguns casos, também apresentaram dificuldades na identificação de números inteiros negativos e números racionais. Sendo assim, a noção de subconjuntos numéricos, disjunção de conjuntos (racionais e irracionais), bem como a interpretação do conjunto dos números reais, não foi percebida pela maioria dos voluntários.

Cabe ressaltar que estas evidências sobre conjuntos numéricos já deveriam estar sanadas no início do Ensino Médio, tendo em vista que este assunto é discutido nos quatro anos do Ensino Fundamental. Sendo assim, temos em questão a possibilidade dos alunos ingressarem no Ensino Médio não estando devidamente preparados para aprimorarem o uso da linguagem matemática de maneira mais específica, como prevê o PCN (Ensino Médio).

Na última questão do questionário (parte A) em que se pedia para o voluntário citar ou comentar sobre as “aplicações que conhecia do conceito de função”, pôde-se perceber um indicativo do nível de aprendizado que os alunos estão tendo em aulas. Notemos inicialmente que a questão da maneira como foi colocada, deixava o voluntário bastante à vontade para discorrer com suas próprias palavras, porém as respostas obtidas foram surpreendentes, no sentido que mostra mais uma vez a preocupação que devemos ter ao ensinar funções. Por esta razão julga-se pertinente para o momento, mencionar as seis respostas obtidas, conforme segue em transcrição:

- “Não sei”;
- “Não conheço todo o conceito, mas não é”;
- “Função é usado para achar valores para fazer um gráfico”;
- “Apenas em gráficos”;
- “É a relação entre duas variáveis”;
- “função injetora, função sobrejetora, função bijetora”.

Mais uma vez, ressalta-se que a questão falava de aplicações do conceito de função e as respostas obtidas mostram-se evasivas ou minimamente limitadas. A última resposta, por sinal, também vinha acompanhada de algumas representações em que o voluntário tentou ilustrar um exemplo de cada situação que citou, porém, não sabia ao certo como representar.

Agora, de modo geral, o preocupante ao considerar estas respostas é o fato de que não se pode direcionar o ensino de funções de maneira que o educando pense que sua aplicação se resume à construção de um gráfico. É evidente que a construção de gráfico faz parte do processo como já foi comentado em trechos retirados do PCN (Ensino Médio), porém é também neste mesmo PCN que são mencionadas varias finalidades do ensino de Matemática no nível médio e, que uma delas se refere a levar o aluno a "*estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo*", que é o que se buscava saber nesta última questão.

No que diz repeito ao segundo questionário, os resultados foram ainda mais interessantes e já se inicia com o fato de um voluntário não ter devolvido a folha deste questionário, afirmando que não conseguira fazer a nenhuma questão por que era muito difícil e nada lembrava. Na primeira questão, por exemplo, duas respostas comprovam a não familiaridade com o tema função para os voluntários, conforme segue em transcrição abaixo:

> - "Não me recordo de qual função utilizar para resolver o problema";
> - "Não entendo".

Nos demais casos, houve a preocupação em montar uma tabela associando valores de x e f(x) para obtenção de pontos, mas não se atentaram ao domínio da função, que no caso se tratava do conjunto dos números naturais, chegando inclusive a atribuir valores negativos. Quanto ao esboço do gráfico, apareceu como conclusão de resposta, uma reta crescente passando pelos pontos (2,5) e (0,1), por exemplo. Também ocorreu o caso em que o voluntário obteve apenas um ponto, (1,3) no caso, por meio da regra da função dada e concluiu como resposta um segmento de reta de extremidades nos pontos (0,0) e (1,3).

Nesta primeira questão, pode-se perceber que a simbologia e escrita nada diz para alguns, bem como para outros, a função se resume apenas à expressão analítica, não importando o domínio da mesma. Segundo Chaves (2004), em questões desse tipo, para fazer com que os alunos tenham compreensão da mesma, se faz necessário um retorno ao estudo da densidade do conjunto dos números reais, o que mais uma vez justifica a discussão que foi feita no decorrer deste trabalho, ou seja a necessidade de oferecer significado ao que se ensina e o que se aprende, conforme evidenciado em:

> Percebemos, a dificuldade que os alunos apresentam em traçar gráficos quando as funções estão definidas de **R** em **R**. Dizer apenas para eles, que quando a função está definida de **N** em **N**, temos apenas pontos no plano cartesiano e que quando for definida de **R**

> em **R** temos que ligar os pontos desse plano, não nos parece que conduzimos o aluno a uma aprendizagem significativa. (CHAVES, 2004, p 12)

Convém salientar que o objetivo desta primeira questão era investigar a interpretação da linguagem de função, sua representação gráfica e a percepção dos três elementos que constam em uma função, conforme fica exposto:

> Deve-se ainda observar que uma função consta de três ingredientes: domínio, contra-domínio e a lei de correspondência $x \mapsto f(x)$. (LIMA, 2006, p.45)

Na segunda questão, buscava-se que o voluntário mostrasse aspectos em comum e diferenças quando comparassem as duas funções. Por exemplo, que mencionassem o fato de *f* ser uma função crescente e *g* decrescente, ambas não se anularem qualquer que fosse o elemento do domínio considerado, etc. Porém, ficou claro o não reconhecimento de tais funções e para o momento é conveniente ressaltar a seguinte resposta: "Não compreendo a linguagem apresentada, principalmente a formação da função $f(x) = 3^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, não consigo desenvolver qual função a se utilizar".

Na terceira questão buscou-se saber se os voluntários tinham conhecimento de que uma função para ter inversa é necessário ser função bijetora. Apenas um voluntário mencionou o seguinte: "$f(x) = x^2$ não possui inversa. Somente função bijetoras são inversíveis". Os demais apresentaram respostas descontextualizadas ou não responderam.

As questões 4, 5, 7 e 8 apresentavam-se de maneira contextualizada. Apenas três voluntários responderam a quarta questão, de modo que dois deles se prenderam ao formato de tabela, não interpretando a mesma e construíram a "reta" que passa pelos pontos (135,15) e (315,25). O outro voluntário responde a questão com a seguinte afirmação: "Desconheço a função que deve-se utilizar no exercício".

Na quinta questão, novamente apenas três responderam. Dois mencionaram 2 horas e 20 minutos como sendo a resposta da questão, porém não apresentaram raciocínio. O outro voluntário, não desenvolveu uma escrita formalizada para as funções envolvidas de maneira a compará-las através de uma desigualdade, mas raciocinou coerentemente com o conceito de função, uma vez que relacionou valores de *x* (preço cobrado pela informática X) com o tempo de serviço prestado, bem como, os valores de *y* (preço cobrado pela informática Y). Porém concluiu erroneamente o tempo de 5 horas, pois não percebeu que a grandeza tempo é contínua e, portanto, se deteve apenas aos valores inteiros que atribuiu em sua "tabela", conforme fica explicitado abaixo:

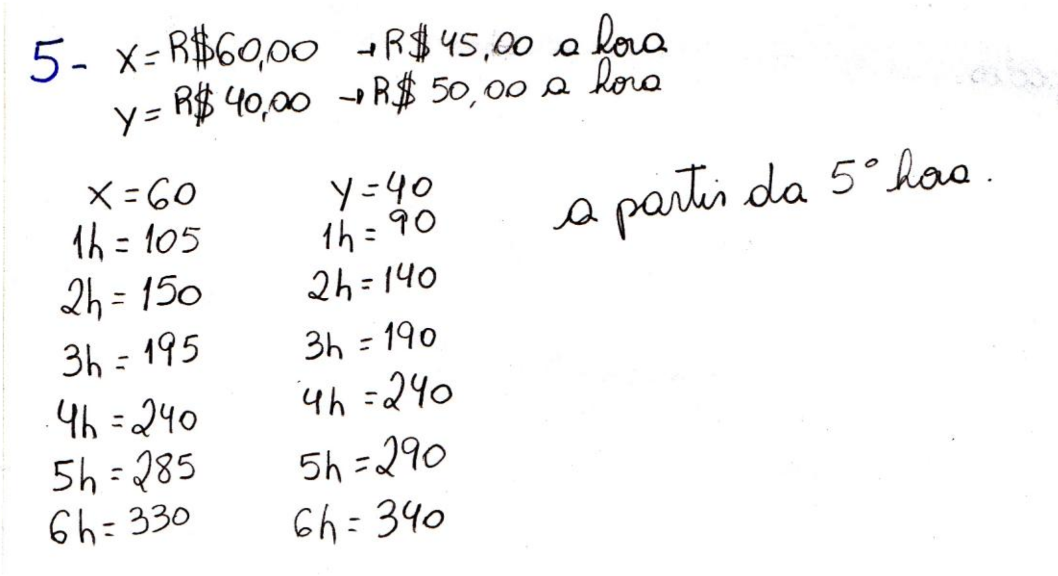
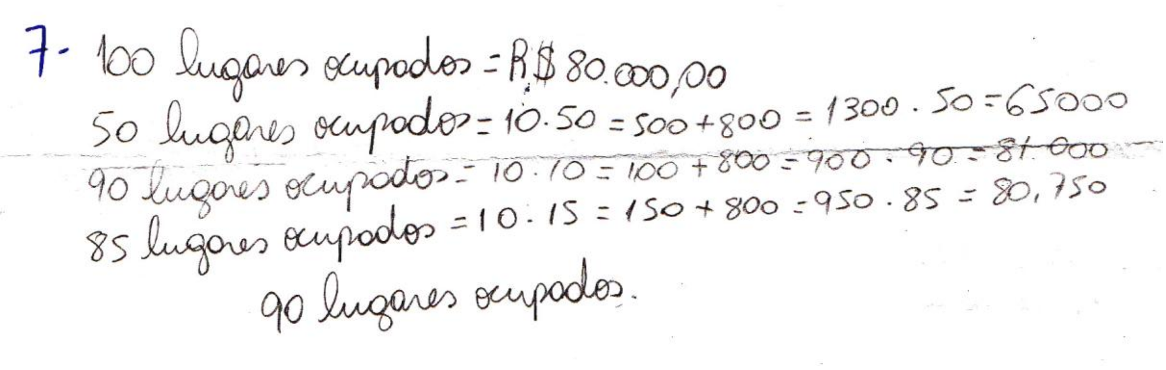


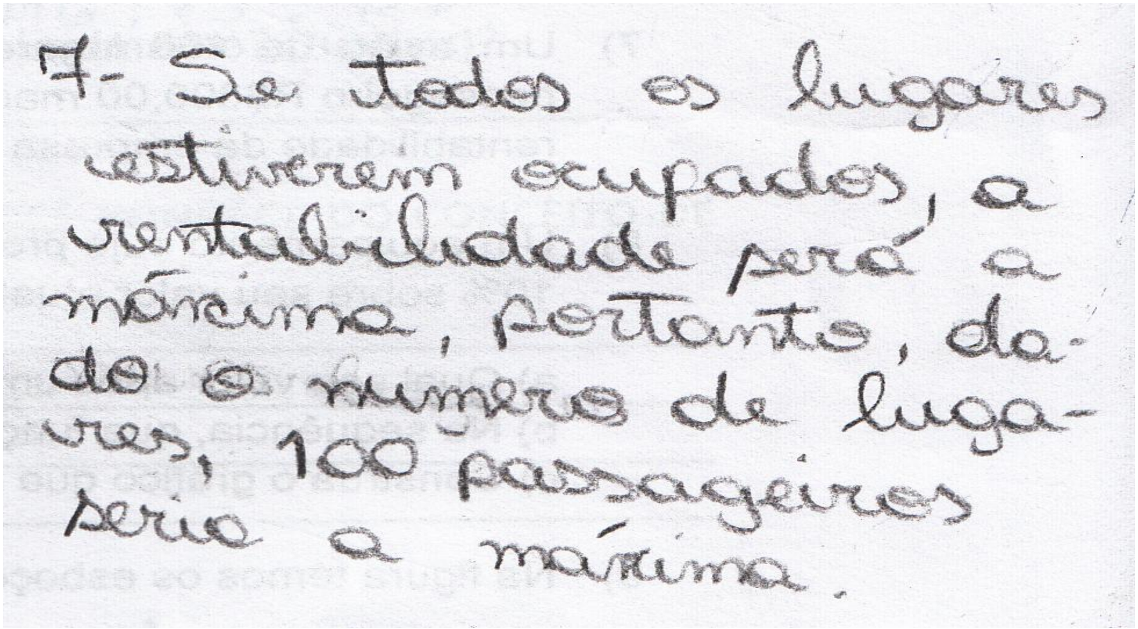
FIGURA 7

Na sétima questão, tínhamos um exemplo clássico do uso de função quadrática como técnica de resolução. Apenas um voluntário deixou esta questão em branco. Três voluntários associaram a rentabilidade máxima à quantidade máxima de lugares ocupados por passageiros, ou seja, pensaram de maneira proporcional, concluindo-se, portanto, 100 passageiros. Outro voluntário apresentou a seguinte resposta: "Que função usar", não tendo arriscado nenhuma resposta. Pode-se supor que para não ter respondido 100 passageiros deva ter percebido que tal resposta não teria sentido, tanto que sentiu a necessidade de se saber a função que deveria ser usada, não tendo demonstrado a busca pela mesma, o que mais uma vez reforça o objetivo deste trabalho, e assim é notório o fato de que os alunos não estão acostumados em fazer o bom uso da linguagem matemática na resolução de problemas. Apenas um voluntário mostrou a conclusão correta, ou seja 90 lugares. Seu raciocínio foi empírico, de modo que associou a quantidade de lugares ocupados à rentabilidade da empresa. Porém é conveniente ressaltar que não mostrou a preocupação em calcular a rentabilidade da empresa para 89 e 91 passageiros (valores inteiros mais próximos de 90), como pode ser constatado em:



7- 100 lugares ocupados = R$ 80.000,00
50 lugares ocupados = 10 · 50 = 500 + 800 = 1300 · 50 = 65000
90 lugares ocupados = 10 · 10 = 100 + 800 = 900 · 90 = 81.000
85 lugares ocupados = 10 · 15 = 150 + 800 = 950 · 85 = 80,750
90 lugares ocupados.

FIGURA 8



7- Se todos os lugares estiverem ocupados, a rentabilidade será a máxima, portanto, dado o número de lugares, 100 passageiros seria a máxima.

FIGURA 9

Já na questão 8, apenas 4 voluntários apresentaram uma resposta ao primeiro item, sendo que uma delas estava concluída de maneira errada e, pelo o que tudo indica, o voluntário fez uso da fórmula que é utilizada quando se determina o valor atual de um título quando o mesmo é resgatado antes de seu vencimento, por meio de uma operação chamada desconto comercial composto. Neste sentido, temos um exemplo claro, que o bom uso da escrita formalizada também envolve a interpretação da mesma, ou seja, deve ser provida de significado.

Os outros três voluntários chegaram aos valores esperados, porém cabe ressaltar que não existe uma preocupação com a escrita matemática por parte dos mesmos, tendo em vista que alguns abusos são cometidos na maneira como escrevem a matemática, principalmente ao se utilizar o símbolo de igualdade, como pode ser observado abaixo:

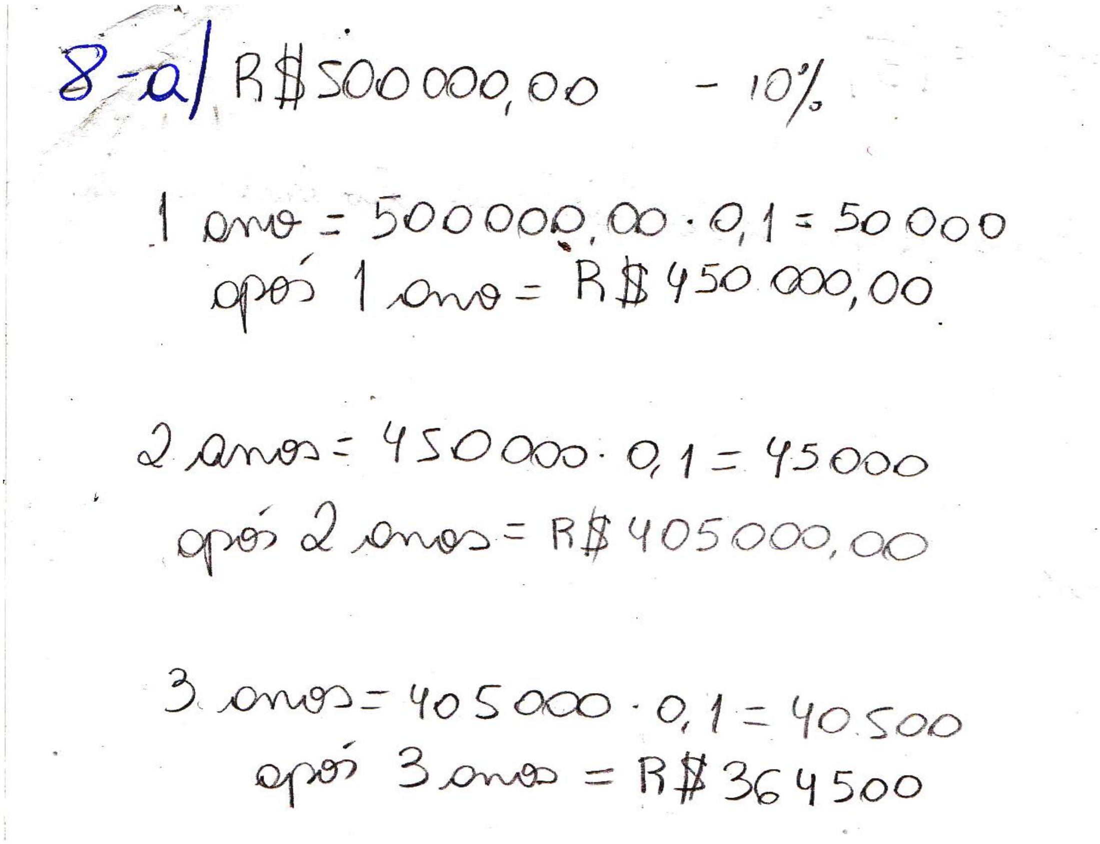


FIGURA 10

No momento em que se busca uma generalização no item “b” da questão, ou seja, o reconhecimento do uso de uma função tipo exponencial ($y = b.a^x$, com $0 < a < 1$), dos quatro voluntários que responderam, dois afirmaram: “função gráfica do 1º grau”, concluindo a seguir, no item “c”, o esboço de uma “reta” decrescente. Outro voluntário mencionou: “Qual função usar” e, o outro deixou a questão em branco.

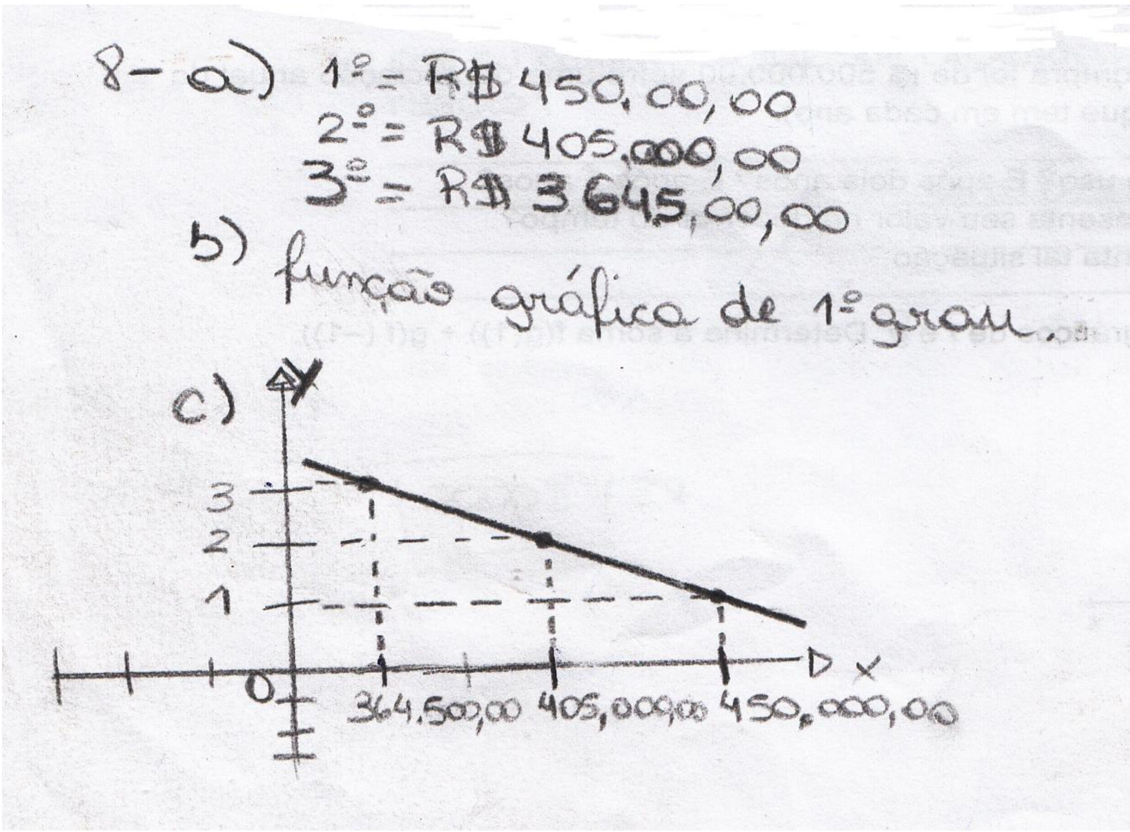


FIGURA 11

Note que estas quatro questões (4, 5, 7, e 8) são de grande relevância, por tratarem dos modelos matemáticos mais utilizados na resolução de problemas elementares, sendo as funções afins, mais comuns nos oito primeiros anos do ensino fundamental, as funções quadráticas e exponenciais no ensino médio, de maneira que esta última, segundo Lima (2006), tem "*importância considerável na universidade, bem como nas aplicações de Matemática em atividade científicas ou profissionais.*".

Ainda sobre estas quatro questões ficou evidente a dificuldade em se reconhecer a função que supostamente serviria de modelo matemático e, consequentemente o não reconhecimento de suas caracterizações, que talvez uma percepção mais apurada, proporcionasse a constatação de que não se tem sentido representar o item "c" da questão 8 com uma "reta" decrescente, mostrando inclusive que para algum valor de "x", a função se anularia. Mas há de se considerar que não se poderia esperar o uso de determinada função, uma vez que nem suas características são reconhecidas de maneira a justificar ou não seu uso. Neste contexto, Lima (2006) expressa o fato:

> Uma vez decidido que o modelo adequado para um determinado problema é uma função afim, quadrática, ou exponencial ... Para que essa escolha possa ser feita corretamente, é preciso saber quais são as propriedades características de cada tipo de função. (LIMA, 2006, p.203)

Apenas dois voluntários responderam à questão 6, de modo que não interpretaram o que foi solicitado, tendo em vista que apresentaram imagens de alguns pontos para duas funções $f(x) = x - 1$ e $g(x) = 10 - 2x$, não concluindo resposta. Um terceiro voluntário apresentou a seguinte afirmativa: “Não consigo desenvolver o exercício, pois não me recordo de como se resolve uma função inversa”. E nesta resposta, pode-se perceber a falta que faz o entendimento de conceitos matemáticos. Os demais voluntários não responderam a esta questão.

Na última questão do questionário (parte B) buscava-se saber se os voluntários reconheciam a linguagem de função composta, bem como fazer suas leituras, retirando seus respectivos valores do gráfico das funções. Apenas um voluntário apresentou a seguinte frase no lugar da resposta: “Não consigo analisar o gráfico ao ponto de conseguir resolver a soma da função”. Com isso, pode-se perceber a não familiaridade quanto à representação através de gráfico e a retirada dos dados a partir do mesmo, bem como, com a linguagem usada para funções compostas.

Após a leitura e análise das respostas dos questionários (partes A e B), optou-se em fazer uma aula de aproximadamente 1 hora e 40 minutos com o intuito de se discutir, através da resolução dos exercícios propostos nos questionários, as vantagens da linguagem matemática e uso da formalização na resolução de problemas. Pelo tempo curto de aula disponível, não foi abordada na mesma o aspecto da evolução histórica do conceito de função. Seguiu-se rigorosamente o plano de aula anteriormente exposto no método deste trabalho.

Convém ressaltar que, por motivo de adequação de horários dos voluntários envolvidos na pesquisa, as aulas aconteceram em momentos diferentes, de modo que dois participaram da aula no dia 11 de junho e outros dois em 13 de junho. Infelizmente os outros dois voluntários não compareceram à aula, o que foi respeitado, tendo em vista o que ficou acordado no Termo de consentimento livre e esclarecido (apêndice B).

Outro fato cabível de comentário é que, embora as aulas tenham sido preparadas e direcionadas com o mesmo enfoque, pôde-se perceber maior grau de atenção e participação no grupo do dia 13 de junho. Neste grupo, os dois voluntários ainda cursam o Ensino Médio e em acordo ao que mostraram, ficaram admirados ao que foi exposto, de modo que quiseram inclusive rever as questões que haviam respondido de maneira errada. Já o segundo grupo, tratava-se de voluntários que cursam nível superior e, embora solícitos e envolvidos com a pesquisa, não se mostraram muito preocupados com a questão da possibilidade de aprendizado, talvez por já cursarem nível superior.

Não era objetivo, ao término da aula, fazer com que os voluntários estivessem prontos para bem usar a formalização matemática e sim, torná-los mais próximos da proposta deste trabalho, de modo que pudessem ao menos conhecer a importância do presente estudo.

Seguindo ao que foi exposto no método deste trabalho, a explanação inicial da aula em questão consistiu em citar exemplos de aplicação de funções no cotidiano, como controle de pragas e doenças, lucratividade de uma empresa, questões voltadas à física relacionando espaço percorrido e tempo gasto para percorrê-lo, por exemplo, etc. Esta discussão inicial foi bastante proveitosa, no sentido de que não conheciam aplicações de função na área da saúde, por exemplo.

Ao relacionar os resultados obtidos nas questões 9 (questionário parte A) e 1 (questionário parte B), evidenciou-se a importância do conhecimento dos conjuntos numéricos para bem esboçar o gráfico de uma função, que pode ser apresentado de maneira discreta ou contínua, dependendo é claro, do domínio da função em que se trabalha. Neste momento convém, ressaltar que um dos voluntários se manifestou dizendo que sempre, ao construir o gráfico de uma função, nunca lhe fora dado o domínio e contra-domínio, apenas a lei de formação, que para o mesmo, isto é o que representava uma função.

Ao fazer discussão das questões 4, 5, 7 e 8 do questionário (parte B), buscou-se enfatizar as vantagens em se conhecer a maneira de se expressar matematicamente por meio da escrita formal de funções. Por exemplo, na questão 4 evidenciou-se que, por se tratar de uma relação entre o valor de imposto à pagar em função dos rendimentos, o domínio só poderia se tratar de números reais não negativos e, por esta razão, o gráfico só aparece à direita do zero. Ainda nesta questão, evidenciou-se a vantagem em separar o domínio em intervalos, de modo à escrever a função com o uso de três leis, conforme segue: $f(x)=\begin{cases}0 & ;se 0\leq x\leq 900\\ 0{,}15.x-135; & se 900<x\leq 1800\\ 0{,}25.x-315; & se x>1800\end{cases}$.

Aparentemente ficaram maravilhados com esta possibilidade. Em seguida, foi mencionado o comportamento da função em cada um dos intervalos, ou seja, constante entre zero e 900, crescentes e com inclinações diferentes nos outros dois intervalos. Ao final ainda foi comentado, que a referida função é conhecida como função poligonal, de modo que a constatação ocorreu mediante a observação do gráfico construído.

Na quinta questão, buscou-se observar que a variável independente era o tempo e, a dependente era o valor a ser pago pelo serviço contratato de cada técnico. Não apresentaram dificuldades em compreender que uma das funções variava de 45 em 45 reais por hora trabalhada a partir do valor de 60 reais e a outra função variava de 50 em 50 reais por hora trabalhada a partir do valor de 50 reais. Primeiramente, este exercício foi resolvido por meio de uma inequação entre as imagens das funções afins para um mesmo x. Em seguida, foi mostrado como era o comportamento de tal resultado por meio de um gráfico, de modo que puderam perceber o momento que uma das semirretas se sobrepunha à outra.

Na questão 7, ficaram surpresos com o resultado e também com a função utilizada, tendo demonstrado, que jamais viram o uso de uma função quadrática para tal fim. Aproveitando o interesse dos mesmos, também foi comentado sobre a obtenção de pontos de máximo e mínimo através do vértice da “parábola” e, posteriormente ressaltado o fato de que o gráfico era discreto, uma vez que a variável independente eram os valores do conjunto dos números naturais compreendidos entre 0 e 100, incluindo os extremos. Mais uma vez enfatizando a importância do conhecimento do domínio de uma função para obtenção de resultados.

Na questão 8, primeiramente foi salientado o por que a função afim não condizia com a situação problema apresentada, pois para acréscimos de tempo iguais não se obtinha a mesma variação nas imagens de pontos correspondentes, o que ficou bastante evidenciado pelo item “a” da questão.

Neste sentido, comentou-se, que para uma função afim, esta característica deveria ser cumprida, ou seja, deveria ter o comportamento de uma progressão aritmética. Como a depreciação no preço do equipamento era constante e incidia sobre o valor atual, foi mostrado de maneira intuitiva as imagens dos pontos se comportando como uma progressão geométrica, o que nos permitiu concluir um modelo voltado para uma função do tipo exponencial. E logo, se pode constatar que nenhuma das imagens dos pontos poderia ser igual à zero, aproveitando ainda para passar a ideia de limite para os mesmos.

Neste contexto, seguindo pelo mesmo foco de discussão, comentou-se sobre a questão 2, em que diferenças e semelhanças foram apontadas, como o fato de uma função ser crescente e outra decrescente, ambas não assumirem o valor zero qualquer que seja o elemento do domínio, ambas passarem no ponto (0,1), etc. e desse modo, a discussão foi feita no sentido de como era importante se conhecer o comportamento de determinadas funções para se saber, se seria possível fazer uso ou não da mesma na resolução de situações do cotidiano, conforme fora apresentado na questão 8.

A questão 9, foi a que se mostrou mais abstrata para os voluntários e mesmo após explicação, continuaram com dificuldades em determinar as imagens das funções por meio da leitura de gráfico. E assim ficou evidenciado um maior grau de dificuldade em questões não contextualizadas, não que nestas também tenham feito uso da formalização.

Quanto as questões 2 e 6, suas discussões só foram possíveis na aula do dia 13 de junho, ou seja, apenas para dois voluntários, tendo em vista que talvez pelo maior grau de atenção, a dinâmica da aula proporcionou um melhor aproveitamento do tempo. Na questão 2 foi explicitado a necessidade de uma função ter que ser bijetora, para poder admitir inversa. Porém, o conceito ficou melhor compreendido, quando se trabalhou com exemplos numéricos. Neste momento, também se percebeu uma limitação quanto à abstração e a linguagem ficou de fato “pesada” para os dois voluntários. Na questão 6, o desenvolvimento foi feito algebricamente, mas houve a necessidade em se fazer o esboço gráfico para conclusão do resultado. Mas de qualquer maneira, os voluntários afirmaram que seria complicado, pois não tinham sequer ideia da escrita matemática usada.

Como já foi dito anteriormente, apenas quatro voluntários participaram da aula e consequentemente, da enquete aplicada ao final da mesma. A aula foi muito cansativa, tendo em vista a abrangência de conteúdo trabalhado e, portanto, já não era esperado que, com apenas duas horas-aula de explicação e com as dificuldades evidenciadas nas respostas dos questionários, que os voluntários chegassem à conclusão correta da segunda questão da enquete. Mesmo assim era pertinente, uma vez que ao final, ou seja, após a entrega da enquete, puderam perceber a necessidade de ter um mínimo de conhecimento matemático, tendo em vista o grau de sua importância e aplicação na saúde.

Na primeira questão, os quatro voluntários perceberam a proposta da aula, bem como o objetivo do trabalho, como fica evidenciado por alguns trechos de suas respostas da primeira questão da enquete:

> "*Acho importante a aula, pois me fez relembrar os conceitos esquecidos e me fez entender qual a funcionalidade deles no dia-a-dia, como por exemplo para calcular o imposto ou para ver projeções futuras no trabalho*".
> "*Sim, porque foi muito importante resgatar esses conceitos de funções, pois na escola, os professores passaram sim essa matéria, mas muito rápido, sem um debate, sobre como usaríamos isso em nossa vida. Me ajudaria muito, pois não sabia que função também faz parte da nossa vida*".
> "*Como o próprio nome já diz, me ajudaria a formalizar, dar ordem e sentido nos problemas. Portanto, sendo de extrema importância*".
> "*A aula que tive sobre a formalização de conceitos sobre funções foi muito importante, pois me ajudou a recordar algumas funções que foram ensinadas no ensino médio. Os problemas de funções estão constantemente em nosso cotidiano e se não tivermos uma base sobre o que são, não iremos conseguir resolvê-los*".

Quanto à segunda questão da enquete, dos quatro voluntários, um deixou sem responder apontando a seguinte frase: "*Qual função usar*". Outro mostrou alguns resultados, mas devido à falta de organização e dificuldade em se expressar matematicamente, sua compreensão não foi possível. Os outros dois, associaram o problema com a ideia de proporcionalidade, de modo que um deles concluiu como respostas, 20% e 33% para os itens "a" e "b" respectivamente, não mostrando o raciocínio que fez para chegar ao resultado. Este voluntário, ao entregar sua enquete, quando indagado o porquê de não apresentar o raciocínio, disse apenas que não sabia colocar a ideias no papel, mas deu a explicação oralmente. O outro, que também seguiu o raciocínio da proporcionalidade, concluiu a mesma resposta de 45% para os itens “a” e “b”, em que esboçou as famosas regras de três.

Ao final da pesquisa, fica a dúvida em se saber se o objetivo do trabalho foi cumprido. Presume-se que sim, uma vez que em todos os momentos ficou evidenciado a dificuldade que os voluntários apresentaram em se expressar matematicamente, não somente com a linguagem escrita, mas também por meio de leituras e compreensão de significados. Em contrapartida, não conseguiram resolver a segunda questão da enquete, o que é bastante compreensível, tendo em vista o grau de complexidade do assunto em pouco tempo de explanação, bem como as dificuldades que são recorrentes ainda do ensino fundamental.

Sendo assim, considera-se satisfatória a proposta da pesquisa, tendo em vista que trouxe uma relevância sobre o aprendizado do conceito de função, que por muitos já foi esquecida ou colocada em segundo plano. Neste sentido, espera-se que tenha ficado claro que, não apenas o aprendizado de funções, como o de toda matemática, o bom uso da contextualização é importante, assim como é importante a compreensão da evolução histórica e, mais recentemente, a modelagem matemática. Porém, fica um desafio a quem possa interessar: *“Tente trabalhar uma das três importâncias citadas acima sem fazer uso da formalização matemática”.* Em pensar que muitos apontam para o lado negativo desta forma de pensar, mas o interessante talvez seria perceber que não há lado negativo na maneira formalizada de se expressar e sim, na maneira como esta formalização está sendo trabalhada em sala de aula. Os alunos são capazes de acompanhar o raciocínio formal sim, bastando para isso, que eles sejam alfabetizados matematicamente, de maneira que possamos oferecer condições para eles poderem discutir ideias, fazer conjecturas, argumentar raciocínios, expressar-se de maneira escrita e oral, defender seus pontos de vista, mesmo que estejam enganados momentaneamente, mas com a consciência de que os fracassos também fazem parte do processo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diversos estudos, recentes ou não, apontam para uma preocupação com a qualidade do ensino de matemática em nosso País. Apresentam pontos de vistas por vezes diferenciados em metodologias e estratégias utilizadas, mas no fim todos focalizam para a qualidade de ensino. Um dos temas de maior preocupação, devido à sua própria evolução histórica conceitual, bem como suas diversas aplicações, que permitem fazer uma boa contextualização em diferentes áreas do conhecimento é o conceito de função, de modo que este trabalho buscou objetivar o ensino do mesmo. Este trabalho investigou sobre a importância da formalização matemática para o ensino de funções no Ensino Médio, possibilitando aos participantes da pesquisa perceber as vantagens que o bom uso da linguagem formalizada proporciona na resolução de situações-problema do cotidiano, bem como na própria evolução do conhecimento científico.

Para isto, como primeira etapa deste trabalho, buscou-se fazer uma revisão bibliográfica de alguns autores que mostraram muito eficazmente suas maneiras de pensar sobre o ensino de matemática. Tal revisão serviu como direção de estudo na realização deste trabalho, pois num primeiro momento, pareceu que a hipótese que se fazia da importância do presente estudo se tratava de uma ideia retrógrada e, porque não dizer, já vencida. Mas, com persistência e juntando as mais diferentes ideias dos trabalhos pesquisados, constatou-se que todos culminavam, direta ou indiretamente, para uma única preocupação, ou seja, com o “saber matemático”, que abrange alunos e professores, conforme foi discutido no mesmo.

Aos poucos, também foi possível perceber que para a obtenção deste saber, recaíamos numa outra ideia, que consiste em dar significado ao que se ensina, bem como ao que se aprende e, neste sentido, justifica-se mais uma vez a importância desta discussão, tendo em vista que o conceito de função é bastante abstrato e desprovido de significado para alunos, e também professores, conforme muitos trabalhos pesquisados citaram.

Após esta revisão bibliográfica, buscou-se passar a ideia da formalização do conceito de função, sendo esta a segunda etapa deste trabalho, o que se julgou necessário foi construir o conjunto dos números reais a partir do conjunto dos números naturais, por meio de um raciocínio conhecido como "método de extensão". A partir daí, trabalhou-se com os primeiros conceitos a respeito de função, discussão de teoremas bastante importantes para o nível superior, como o Teorema do Valor Intermediário e o Teorema de Weierstrass, tendo em vista que uma das preocupações do presente estudo é enfatizar a qualidade de ensino de maneira a fornecer suporte necessário para o aluno avançar em seus conhecimentos, permitindo que este atue de maneira autônoma na sociedade em que se encontra inserido e, deste modo, garantir o avanço do conhecimento científico.

Na última etapa, foi trabalhada a parte prática do presente estudo, de modo que investigações voltadas para o aprendizado de funções foram feitas. Posteriormente a isto, foi realizada uma devolutiva através de uma aula direcionada para o uso da formalização em resolução de problemas teóricos e contextualizados. E por fim, uma nova sondagem por meio da aplicação de uma enquete com os envolvidos.

Das três etapas que envolvem o trabalho, a terceira pareceu ser a mais preocupante, tendo em vista que envolvia a dependência de outras pessoas para poder ser concluída. E por ser esta, a última etapa a se cumprir, por momentos houve a impressão que nada poderia ser constatado. Isto talvez, porque as pessoas de modo geral não apresentam esta preocupação acadêmica, bem como muitos, embora orientados quanto à importância do estudo, deixaram perceber a aversão que tem pela matemática.

Embora os participantes efetivos na pesquisa tenham sido poucos, pode-se dizer que houve um bom aproveitamento do estudo confirmando sua relevância, tendo em vista que o mesmo teve uma abordagem qualitativa dos resultados.

De maneira geral, foi possível perceber nas investigações, bem como no transcorrer da aula ministrada aos voluntários, a falha que existe no ponto de vista conceitual, de maneira que não se pode afirmar que os mesmos se comuniquem matematicamente. Muitos dos argumentos utilizados são desprovidos de significado e quando questionados em aula, também se perdem nas argumentações orais. Neste sentido, a formalização matemática que trazem consigo não foram devidamente trabalhadas, o que é outro ponto ainda mais preocupante e, que sem dúvida recai na formação do professor, tendo em vista que ficou evidenciado em suas respostas ao questionário um raciocínio mecanicista na forma de pensar e resolver o que se pedia.

Dos que participaram até o fim deste trabalho, após discussão em aula, de maneira bem simples, reconheceram a importância da formalização na resolução de problemas teóricos, e contextualizados com situações do cotidiano, como já fora mencionado no capítulo anterior. E com isso, pode-se afirmar que o problema do ensino de funções não se encontra em fazer uso do formalismo e sim, no “mau uso do mesmo”. O destaque que foi dado com uso de aspas é no sentido de que se acredita que as pessoas sequer fazem uso do formalismo quando se afirma que fez “mau uso”.

Não apenas o aprendizado do conceito de função, como qualquer outro conceito matemático, querendo ou não, recairá na formalização matemática, tendo em vista que esta faz parte da evolução histórica, bem como da própria maneira de se comunicar matematicamente. Logo, deve ser trabalhada em sala de aula, porém de maneira que promova significado ao educando, o que nos remete a fazer uso de estratégias de ensino, como utilização de softwares, contextualizações, investigações, modelagem, contexto histórico, etc.

Este trabalho, além de me proporcionar uma oportunidade de estudo, possibilitou um amadurecimento de minha prática pedagógica, que em aproximadamente 16 anos de docência nunca havia parado para refletir sobre a mesma. Somente agora, após revisão bibliográfica e compreensão da evolução do conhecimento científico é que encontro argumentos para falar e defender o uso da formalização matemática em sala de aula, bem como entender a necessidade de ser um professor reflexivo e que adote a prática constante de pesquisar em trabalhos acadêmicos sobre os mais diferentes conceitos matemáticos a fim de preparar uma aula. Até então, meu modo de pensar era desprovido de qualquer fundamentação teórica.

Finalizando, o que não foi abrangido no presente estudo devido ao curto tempo para investigação, mas acredita-se na importância de promover estudos com foco semelhante ao do PROFMAT para professores de todos os níveis de ensino, pois a carência de raciocínio matemático fica mais evidenciada ao se iniciar com as abstrações. E neste sentido, os professores das séries iniciais também precisam deste incentivo, podendo assim garantir um aprendizado efetivo de matemática à longo prazo e derrubar definitivamente o ciclo vicioso que já nos encontramos inseridos e que tanto afeta a qualidade do ensino de matemática em nosso País e nos conduz ao empobrecimento cognitivo. Neste sentido, devemos pensar coletivamente a fim de sair de um importante paradoxo, pois somos professores de matemática que ainda não conseguimos resolver o maior problema de todos, que é o de ensinar uma matemática com significado aos nossos alunos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ÁVILA, Geraldo. *O ensino da matemática*. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, s.v., n.23, p.1-7, jan./jun. 1993.

______________. *A evolução do conceito de função e de integral*. Revista Matemática Universitária. São Paulo, s.v., n.1, p. 14-46, jun. 1985.

BARKER, Stephen F. *Filosofia da Matemática*. Tradução por Leonidas Hegenberg e Octanny Silveira da Mota. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1969. 141 p.

BASSANEZI, Rodney Carlos. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática.* São Paulo: Contexto, 2011.

BOTELHO, Leila. *Um breve histórico do conceito de função*. *Caderno Dá-Licença*, s.l., v.6, p. 64-75, dez. 2007.

BOYER, Carl B. *História da matemática*. Tradução por Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, Ed. Da Universidade de São Paulo, 1974.

BUFFARA, Antônio Cláudio Lage. *Os advogados e a matemática*. Revista do Professor de Matemática**,** São Paulo, v.28, n. 73, p.31-33, set. 2010.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Tipografia Matemática Ltda, 1951.

CHAVES, Maria Isaura de Albuquerque; CARVALHO, Hamilton Cunha de. *Formalização do conceito de função no ensino médio: uma sequência de ensino-aprendizagem*. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 8. 2004, Recife, *Tópicos temáticos*. Recife: SBEM PE, Recife, 2004. p. 1-18.

COBUCI, Jaime Araújo et al. *Curva de lactação na raça guzerá*. Revista. Brasileira de Zootecnia. Minas Gerais/Viçosa, v.29, n.5, p.1332-1339, out. 2000.

COSTA, M. Amoroso. *As ideias fundamentais da matemática e outros ensaios.* São Paulo: Editorial Grijalbo Ltda, 1971. 330 p.

COURANT, Richard. *Introdução à Teoria das Funções*. Tradução de Leo Barsotti. Curitiba: SPM – Sociedade Paranaense de Matemática, 1967.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** livro do professor. 1. ed. São Paulo: Ática, 2004, v.1.

DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. *A Experiência Matemática*. Tradução de João Bosco Pitombeira. 3.ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves Editora S.A., 1986.

DRUCK, Suely. *A crise no ensino de matemática no Brasil*. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, s.v., n.53, p.1-5, jan. 2004.

_____________. *O drama do ensino da matemática*. Folha de São Paulo, 11 de março. Página consultada a 25 de março de 2014. http://www1.folha.uol.com.br/folha/sinapse/ult1063u343.shtml.

FERREIRA, Jamil. *A construção dos números*. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

FIORENTINI, Dário. *Rumos da pesquisa brasileira em educação matemática:* O caso da produção científica em cursos de pós-graduação. Tese Doutorado . Campinas: Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 1994.

________________. *Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil.* **Zetetiqué**, Campinas, v.3. n.4, p. 1-37, nov.1995.

GARBI, Gilberto. *Decorar é preciso: demonstrar também é.* Revista do Professor de Matemática, São Paulo, s.v., n.68, p.1-6, jan./abr. 2009.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um curso de cálculo*. 2. ed. Rio de Janeiro; São Paulo: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda. 1987. v.1.

GONZATTO, Marcelo. **Por que 89% dos estudantes chegam ao final do ensino Médio sem aprender o esperado em matemática?** Jornal Zero Hora do Rio Grande do Sul, 27 de outubro de 2012. Página consultada a 13/05/2014. http://zerohora.clicrbs.com.br/rs/geral/noticia/2012/10/por-que-89-do estudantes-chegam-ao-final-do-ensino-medio-sem-aprender-o-esperado-em-matematica-3931330.html.

LIMA, Elon Lages. *A propósito da contextualização*. Revista do Professor de Matemática, São Paulo,s.v., n.58, p.28-32, jan. 2005.

________________ et al. *A Matemática do Ensino Médio*. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v.1.

________________. *Curso de análise*. 14. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2012. v.1.

LOBEIRO, Adilandri Mércio. *A construção dos reais***:** um enfoque usando cortes de Dedekind. Monografia Especialização em Matemática Maringá: Universidade Estadual de Maringá, 2000.

MACIEL, Paulo Roberto Castor. *A construção do conceito de função através da história da matemática.* Dissertação de Mestrado – Rio de Janeiro: Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca CEFET/RJ, 2011.

MONTEIRO, Luiz Henrique Jacy. *Elementos de Álgebra.* Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1969.

MUNIZ NETO, Antônio Carminha. *Tópicos de Matemática Elementar***:** Introdução à Análise. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

MUROLO, Antônio Carlos; BONETTO, Giácomo Augusto. *Matemática aplicada à administração, economia e contabilidade.* 1. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

NOBRE, Sérgio. *Um "dicionário biográfico de matemáticos" dentre os verbetes daEnciclopédia alemã do século XVIII*. Revista Brasileira de História da Matemática, Rio Claro/SP, s.v., n,1, p.307-332, dez. 2007.

OLIVEIRA, Antônio Marmo de; SILVA, Agostinho. *Biblioteca da Matemática Moderna*. 1.ed. São Paulo: LISA – Livros Irradiantes S.A., 1968. v.1

PALIS, Gilda de La Rocque. *Atividade que podem propiciar o desenvolvimento do raciocínio funcional no aluno do ensino médio e universitário inicial*. Revista Eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, v.1, n.1, s.m, 2013.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCNs), texto processado,

http./www.mec.gov.br./semtec/ensmed/pcn.shtm [cópia sem data].

PESCUMA, Derna; CASTILHO, Antônio Paulo. *Referências Bibliográficas*. 3.ed. São Paulo: Editora Olho d'água, 2003.

ROCHA, Sônia Maria Cavalcanti. **Investigação histórica na formação de professores de matemática:** um estudo centrado no conceito de função. Dissertação Mestrado. Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2008.

SÁ, Pedro Franco de; SOUZA, Glageane da Silva; SILVA, Isaac Dayan Bastos. *A construção do conceito de função*: alguns dados históricos. *Traços*, Belém, v.6, n.11, p. 81-94, ago. 2003.

SANTOS, L.; BROCARDO, J.; Pires, M. e ROSENDO, A. I. (2002). *Investigações matemáticas na aprendizagem do 2º ciclo do ensino básico ao ensino superior.* In J.P. Ponte; C. Costa; A. I. Rosendo; E. Maia; N. Figueiredo;

A. F. Dionísio (Orgs.), *Actividades de Investigação* (p. 83-106). Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

SCHREINER, Ivo Valter. *Construção do conceito de função: o pensamento variacional e a alfabetização funcional*. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 8. 2004, Recife, *Tópicos temáticos*. Recife: SBEM PE, Recife, 2004.

SILVA, Maria Helena Morais. Análise histórica do conceito de função. *Caderno de Licenciatura em Matemática*, s.l., n.2, p. 29-33, dez. 1999.

SIQUEIRA,Daniela de Morais. *Elaboração de atividades de ensino de funções utilizando recursos computacionais no Ensino Médio.* Dissertação de Mestrado São Carlos: Universidade de São Paulo, 2013.

SOARES, Eliana Maria do Sacramento. *Formalização e intuição no contexto do conhecimento, do ensino e da atuação social*. **Zetetiqué**, Campinas, v.3. n.3, p.63-71, mar. 1995.

SOUZA, Aguinaldo Robinson de; SILVA, Gilmara Aparecida da. *Desenvolvimento e análise de uma metodologia para o ensino da função quadrática utilizando os softwares 'parábola' e 'oficina de funções'*. **Zetetiqué**, Campinas, v.14. n.25, p.107-132, jan./jun. 2006.

TAKAHASHI, Fábio. **Rendimento dos alunos de matemática piora entre o 5º e 9º ano**. Folha de São Paulo, 01 de abril de 2013. Página consultada a 13/05/2014. http://www1.folha.uol.com.br/educacao/1255223-rendimento-dos-alunos-de-matematica-piora-entre-o-5-e-o-9-ano.shtml.

TARDIF, Maurice; LESSARD, Claude. *O Trabalho Docente***:** Elementos para uma teoria da docência como profissão de interações humanas. 2. ed. Rio de Janeiro (Petrópolis): Vozes, 2005.

ZUFFI, Edna Maura; PACCA, Jesuína L. A. *Sobre funções e a linguagem matemática de professores do ensino médio*. **Zetetiqué**, Campinas, v.8. n.13/14, p. 7-28, jan./dez. 2000.

APÊNDICES

APÊNDICE A

CARTA DE APRESENTAÇÃO

Prezado voluntário, responsável legal ou Coordenador da Instituição de Ensino: "____".

Eu, Fabrício Cardoso Maimone, mestrando do curso PROFMAT, da Universidade Federal do ABC, venho por meio desta, solicitar vossa colaboração para a elaboração do Trabalho de Conclusão de Curso, que tem como tema a análise da importância da formalização matemática no aprendizado de funções no Ensino Médio.

A escolha do tema justifica-se pelos baixos índices referentes ao aprendizado em matemática, obtidos recentemente pelas escolas públicas do País.

Espero que, com este trabalho, possa-se focar mais a discussão do aprendizado em matemática resgatando um olhar voltado para a formalização, que ficou por tempos esquecido.

A metodologia utilizada será por meio de questionários investigativos, contendo questões de múltipla escolha e também dissertativas, posterior inferências pelo pesquisador e novas investigações.

Cumpre-se o dever de informar à instituição e aos voluntários envolvidos no processo investigativo que assumo o compromisso de total sigilo e respeito às informações coletadas. Será garantido o anonimato do entrevistado e da instituição, sob pena de responder criminalmente. Em qualquer momento, estou aberto ao esclarecimento para dúvidas, bem como receptivo às sugestões.

Desde já, meus agradecimentos.

____

Fabrício Cardoso Maimone

APÊNDICE B

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, Fabrício Cardoso Maimone, mestrando do curso PROFMAT, da Universidade Federal do ABC, estou desenvolvendo uma pesquisa como parte dos requesitos necessários para a conclusão do curso. O estudo tem finalidades acadêmicas, assim como a divulgação científica de seus resultados.

Tem como título provisório “A importância da formalização matemática no aprendizado de funções no Ensino Médio”. O estudo pretende analisar o processo ensino-aprendizagem de funções, bem como os valores atribuídos aos mesmos.

A coleta de dados será realizada por meio de investigações via questionários direcionados à proposta em estudo, inferências por minha parte junto aos envolvidos quando necessário e novas investigações quando necessário para posterior análise de resultados. O questionário será composto de questões abertas, objetivas e individuais.

Sua participação no estudo é voluntária. Você tem liberdade de se recusar a participar ou dela sair em qualquer de suas fases sem comprometer o seu atendimento. Sua participação é muito importante para este estudo, não implicará em ônus para você, as informações obtidas serão tratadas sigilosamente. As entrevistas (se for o caso) serão gravadas e transcritas na íntegra e os dados colhidos serão utilizados, única e exclusivamente, aos objetivos propostos para o estudo. Portanto, solicito seu consentimento em participar da referida pesquisa.

Agradeço sua colaboração e solicito que assine o presente termo de Consentimento.

Atenciosamente,

Nome do pesquisador: Fabrício Cardoso Maimone

Eu, ____, declaro que, após ter sido convenientemente esclarecido pelo pesquisador e ter entendido o que me foi explicado, consinto em participar da presente pesquisa.

Santos, _____ de ____________________ de 2014.

Assinatura: ____

Telefone para contato: ____________________________________

APÊNDICE C

QUESTIONÁRIO (ALUNOS)- PARTE A

1) A) ANO E GRAU DE ENSINO QUE ESTUDA EM 2014: _____ANO DO ENSINO __________
   B) ESCOLA (PÚBLICA OU PRIVADA): ________________

2) NA SUA OPINIÃO, O ENSINO FUNDAMENTAL OFERECIDO NA ESCOLA ONDE ESTUDA OU ESTUDOU FOI:
   a) fraco
   b) regular
   c) bom
   d) excelente

3) NA SUA OPINIÃO, O ENSINO MÉDIO OFERECIDO NA ESCOLA ONDE ESTUDA OU ESTUDOU FOI:
   a) fraco
   b) regular
   c) bom
   d) excelente

4) COM ÍNDICES INTEIROS DE 1(UM) À 5(CINCO) EM ESCALA CRESCENTE DE IMPORTÂNCIA, PONTUE A IMPORTÂNCIA DA MATEMÁTICA:
   a) para a ciência (no mundo)....... _____
   b) para você ...._____

5) SEU PROFESSOR DEMONSTRA CONHECIMENTO DAQUILO QUE LHE É ENSINADO, OU SEJA, DEMONSTRA DOMÍNIO DOS CONCEITOS?
   a) sim
   b) não

6) SEU PROFESSOR DISCUTE A FORMALIZAÇÃO MATEMÁTICA EM SALA DE AULA, ISTO É, ENSINA SEUS ALUNOS A COPREENDER A ESCRITA MATEMÁTICA APROPRIADA NA DEFINIÇÃO DO CONCEITO APRESENTADO?
   a) sim
   b) não

7) SEU PROFESSOR RELACIONA O TEMA DE AULA COM A EVOLUÇÃO HISTÓRICA DO CONHECIMENTO OU COM ALGUMA APLICAÇÃO EM OUTRAS ÁREAS DO CONHECIMENTO?

a) sim
b) apenas evolução histórica
c) apenas aplicações
d) não

8) QUAL A DIFERENÇA ENTRE VARIÁVEL E INCÓGNITA?
____
____

9) CONSIDERE O CONJUNTO ABAIXO E RESPONDA AS QUESTÕES QUE
SEGUEM: $A=\left\{-5;\ \frac{4}{3};\ \frac{16}{4};\ \pi;\ 3;\ 0;\ 2{,}3\ ;-\sqrt{3};-7;\ 0{,}12;\sqrt{9};-\sqrt{16};\ \sqrt{5};\ \sqrt[3]{27};\right\}$

a) Quantos elementos de *A* são números naturais? Quais são eles?
Resp. São ___ números naturais. Eles são ____________________

b) Quantos elementos de *A* são números inteiros? Quais são eles?
Resp. São ___ números inteiros. Eles são: ______________________

c) Quantos elementos de *A* são números racionais? Quais são eles?
Resp. São ___ números racionais. Eles são: ____________________

d) Quantos elementos de *A* são números irracionais? Quais são eles?
Resp. São ___ números irracionais. Eles são: ___________________

e) Quantos elementos de *A* são números reais? Quais são eles?
Resp. São ___ números reais. Eles são: _______________________

f) Algum elemento do conjunto *A* não era de seu conhecimento? Qual(ais)?
____

10) CITE OU COMENTE SOBRE "APLICAÇÃO(ÕES) QUE VOCÊ CONHECE DO CONCEITO DE FUNÇÃO".
____
____
____
____
____
____

APÊNDICE D

QUESTIONÁRIO (ALUNOS)- PARTE B

1) Qual a representação gráfica da função *f: IN→IR,* definida por *f(x)* = 2.x +1?

2) Considerando duas funções exponenciais *f* e *g*, cujas leis de formação são dadas por: $f(x) = 3^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, para todo *x ϵ IR*, pode-se dizer que elas apresentam as mesmas propriedades? Justifique.

3) A função *f:IR→IR* definida por $f(x) = x^2$ possui função inversa? Em caso afirmativo, que função é esta e qual seu gráfico? Em caso negativo apresente uma justificativa.

4) Os novos valores de IR-fonte: (dados de 1996.)

Bases de cálculo	**Alíquota**	**Parcela a deduzir**
Até R$ 900,00	Isento	-
De R$ 900,00 a R$ 1800,00	15%	R$ 135,00
Acima de R$ 1800,00	25%	R$ 315,00

Fonte: Secretaria da Receita Federal

Baseado na tabela acima construa o gráfico do imposto a pagar em função do rendimento.

5) Para um atendimento domiciliar, um técnico em informática X cobra R$ 60,00 a visita e R$ 45,00 a hora de trabalho; um técnico Y cobra R$ 40,00 a visita e R$ 50,00 a hora de trabalho. A partir de quanto tempo de serviço é mais econômico contratar o técnico X?

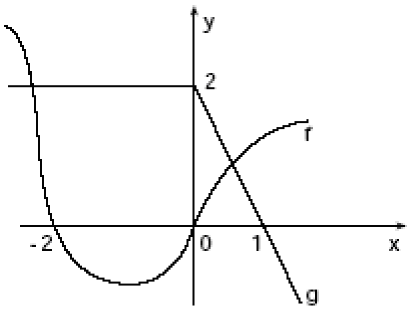
6) Determine a imagem da função *f : IR→IR* tal que *f(x) = max{x-1,10-2x}*.

7) Um avião de 100 lugares foi fretado para uma excursão. A companhia exigiu de cada passageiro R$800,00 mais R$10,00 por cada lugar vago. Para que número de passageiros a rentabilidade da empresa é máxima?

8) Um equipamento cujo preço de compra foi de R$ 500.000,00 sofre uma depreciação anual de 10% sobre seu valor atual (valor que tem em cada ano).

a) Qual seu valor após um ano de uso? E após dois anos? E após 3 anos?
b) Na sequência, que função representa seu valor no decorrer do tempo?
c) Construa o gráfico que representa tal situação.

9) Na figura temos os esboços dos gráficos de *f* e *g.* Determine a soma f(g(1)) + g(f (–1)).



APÊNDICE E

PLANO DE AULA

Tema: Funções

Público: alunos que cursam ou já concluíram o Ensino Médio.

Duração: duas horas-aula (aproximadamente 1h e 40 min.)

Disciplina: Matemática

Objetivos: Este plano tem como principal objetivo instigar a curiosidade do aluno sobre o tema em questão, a fim de despertar seu interesse pelo assunto e, consequentemente, o reconhecimento da importância da formalização matemática na formação de conceitos e de seu uso no cotidiano em diferentes contextos, como um facilitador. Para isto, a aula será direcionada de maneira a alcançar os seguintes tópicos:

- Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões, etc.);
- Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa;
- Discutir ideias e produzir argumentos convincentes;
- Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real;
- Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.

Recursos: apenas quadro-negro

Desenvolvimento: A proposta sugerida é a de fazer, através de exemplos, uma discussão sobre aplicações do conceito de função no cotidiano e, posteriormente trabalhar com as dificuldades que os alunos tiveram ao responder as questões dos dois primeiros questionários, de maneira a evidenciar que o uso correto do conceito em questão, bem como, o uso de simbologias matemáticas ajudam a solucionar problemas do cotidiano, por meio da formalização matemática.

Avaliação: a ser discutida nos resultados do trabalho.

ANEXOS

ANEXO A - FANTASIA MATEMÁTICA

O Grande Hotel Georg Cantor tinha uma infinidade de quartos, numerados consecutivamente, um para cada número natural, Todos eram igualmente confortáveis. Num fim de semana prolongado, o hotel estava com seus quartos todos ocupados, quando chega um viajante. A recepcionista vai logo dizendo:

- Sinto muito, mas não há vagas.

Ouvindo isto, o gerente interveio:

- Podemos abrigar o cavalheiro, sim senhora.

E ordena:

- Transfira o hóspede do quarto 1 para o quarto 2, passe o do quarto 2 para o quarto 3 e assim por diante. Quem estiver no quarto n, mude para o quarto $n + 1$. Isto manterá todos alojados e deixará disponível o quarto 1 para o recém chegado.

Logo depois chegou um ônibus com 30 passageiros, todos querendo hospedagem. A recepcionista, tendo aprendido a lição, removeu o hóspede de cada quarto n para o quarto $n + 30$ e acolheu assim todos os passageiros do ônibus. Mas ficou sem saber o que fazer quando, horas depois, chegou um trem com uma infinidade de passageiros. Desesperada, apelou para o gerente que prontamente resolveu o problema dizendo: - Passe cada hóspede do quarto n para o quarto $2n$. Isto deixará vagos todos os apartamentos de número ímpar, nos quais poremos os novos hóspedes.

- Pensando melhor: mude quem está no quarto n para o quarto $3n$. Os novos hóspedes, ponha-os nos quartos de número $3n + 2$. Deixaremos vagos os quartos de número $3n + 1$. Assim, sobrarão ainda infinitos quartos vazios e eu poderei ter sossego por algum tempo.

ANEXO B - VISÃO DE DEDEKIND À RESPEITO DA CONTINUIDADE

Aqui está exposto, conforme citação de CARAÇA (1951), a maneira como Dedekind encarava a questão da continuidade.

> Vejamos como *Dedekind* põe a questão: “... nós atribuímos à reta a qualidade de ser completa, sem lacunas, ou seja, contínua. Mas esta continuidade, em que consiste? A resposta a esta pergunta deve compreender em si tudo, e somente ela permitirá desenvolver em bases científicas o estudo de todos os campos contínuos. Naturalmente, não se consegue nada quando, para explicar a continuidade, se fala, dum modo vago, de uma conexão ininterrupta nas suas partes mais pequenas; o que se procura é formular uma propriedade característica e precisa da continuidade que possa servir de base a deduções verdadeiras e próprias.
> Pensei nisso sem resultado por muito tempo mas, finalmente, achei o que procurava. O meu resultado será talvez julgado, por várias pessoas, de vários modos mas a maior parte, creio, será concorde em considerá-la bastante banal.
> Verificou-se que todo o ponto da recta determina uma decomposição da mesma em duas partes, de tal natureza que todo o ponto de uma delas está à esquerda de todo o ponto da outra. Ora, eu vejo a essência da continuidade na inversão desta propriedade, e, portanto, no princípio seguinte: ‘ se uma repartição de todos os pontos da recta em duas classes é de tal natureza que todo o ponto das classes está à esquerda de todo o ponto da outra, então existe um e um só ponto pelo qual é produzida esta repartição de todos os pontos em duas classes, ou esta decomposição da recta em duas partes.
> Como já disse, creio não errar admitindo que toda a gente reconhecerá imediatamente a exactidão do princípio enunciado. A maior parte dos meus leitores terá uma grande desilusão ao aprender que é esta banalidade que deve revelar o mistério da continuidade. A este propósito observo o que segue. Que cada um ache o princípio enunciado tão evidente e tão concordante com a sua própria representação da recta, isso satisfaz-me ao máximo grau, porque nem a mim nem a ninguém é possível dar deste princípio uma demonstração qualquer. A propriedade da recta expressa por este princípio não é mais que um axioma, e é sob a forma deste axioma que nós pensamos a continuidade da recta, que reconhecemos à recta a sua continuidade”.