

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA - PROFMAT

Dissertação de mestrado

Flavio Fernando da Silva

Arbelos

Santo André - SP
2014.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

Arbelos

Flavio Fernando da Silva

Orientador: Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva

Dissertação apresentada junto ao Programa de
Mestrado Profissionalizante em Matemática da
Universidade Federal do ABC, para obtenção do
Título de Mestre em Matemática.

Santo André - SP
Agosto de 2014.

Arbelos

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Flavio Fernando da Silva e aprovada pela comissão julgadora.

Santo André, 26 de agosto de 2014.

Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva
Orientador

Banca examinadora:

1. Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva (Orientador) - UFABC
2. Prof. Dr. Sinue Dayan Barbero Ludovici - UFABC
3. Prof. Dr. Alexandre LyMBERopoulos - USP

Dissertação apresentada junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da UFABC, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, ____ de _____ de 20 ____.

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Dedico este trabalho à minha esposa, meus pais, e amigos; e todos aqueles que me apoiaram durante a minha vida acadêmica.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus por tudo.

Ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), à CAPES pelo auxílio concedido, à UFABC e seus professores, ao meu orientador Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva, pela confiança ao aceitar o pedido de ser meu orientador, por acreditar em meu potencial, por ser competente e excelente em sua profissão, aos colegas de turma de mestrado e principalmente à minha esposa Raquel que me incentivou durante todo o curso, abrindo mão de passeios e lazer, não medindo esforço para que eu pudesse chegar aqui e meu amigo Luciano que tanto me ajudou com os estudos, viagens e suas palavras de incentivo.

A todos vocês, sincera gratidão.

Resumo

Inspirado no artigo de Harold P. Boas [2], neste trabalho estudamos os Arbelos e suas propriedades. Analisamos a inversão em relação a um círculo e aplicamos essa técnica na construção da Cadeia de Pappus e do Círculo de Bankoff.

Palavras-Chave

Arbelos, Arbelos Gêmeos, Cadeia de Pappus, Círculo de Bankoff, Geometria Inversiva

Abstract

Based on the work of Harold P. Boas [2], in this work we study the arbelos and their properties. we analyse the inversion about a circle and apply this technique to the construction of Pappus Chain and Bankoff's circle.

Keywords

Arbelos, Twin arbelos, Pappus Chain, Bankoff's circle, inversive geometry.

Sumário

1	Resultados preliminares	15
2	Geometria inversiva	27
2.1	Inversão em relação a um círculo	27
2.2	Inversão da reta em relação a um círculo	31
2.3	Inversão de um círculo em relação a um círculo dado	33
3	Arbelos	39
3.1	Arbelos gêmeos	43
3.2	Cadeia de Pappus	50
3.3	Círculo de Bankoff	54
4	Aplicações	57
4.1	Exemplos	57

Lista de Figuras

1.1	Homotetia de centro O e razão $k = 2$	15
1.2	Homotetia de centro O e razão $k = -0,6$	16
1.3	Homotetia gerada pelas tangentes externas de Γ e Ω	17
1.4	Homotetia gerada pelas tangentes internas de Γ e Ω	17
1.5	Círculos homotéticos.	17
1.6	Homotetias levando reta em reta de razão $k=1.5$	18
1.7	Homotetias levando círculo em círculo de razão $k=1.9$	18
1.8	Homotetia de razão $k=1.9$	19
1.9	Potência de um ponto P externo ao círculo Γ	20
1.10	Potência de um ponto P interno ao círculo Γ	20
1.11	Segmento PT tangente ao círculo Ω	21
1.12	Reta e círculo ortogonal.	21
1.13	Círculo Γ ortogonal ao círculo Ω	22
1.14	As diagonais de um paralelogramo.	22
1.15	Triângulo inscrito em um semicírculo	23
1.16	Elipse de focos F_1 e F_2	23
1.17	Triângulo ABC	24
2.1	Inversão em relação a um círculo.	27
2.2	O é a origem do sistema de coordenadas.	28
2.3	O não é a origem do sistema de coordenadas.	29
2.4	O ponto P é externo ao círculo Γ	29
2.5	O ponto P é interno ao círculo Γ	30

2.6	O ponto P pertence ao círculo Γ .	30
2.7	Inversão da reta que passa pelo centro de inversão.	31
2.8	A reta s é externa ao círculo Γ .	32
2.9	A reta s é tangente ao círculo Γ .	32
2.10	A reta s é secante ao círculo Γ .	32
2.11	O círculo de inversão Γ é externo ao círculo Ω .	33
2.12	O círculo de inversão Γ é tangente ao círculo Ω .	34
2.13	O círculo de inversão Γ é secante ao círculo Ω .	34
2.14	O círculo de inversão Γ é secante ao círculo Ω .	35
2.15	O círculo de inversão Γ é tangente ao círculo Ω .	35
2.16	O círculo de inversão Γ interno ao círculo Ω .	35
2.17	Inversão de um círculo que passa pelo centro de inversão.	36
2.18	Inversão em relação a um círculo ortogonal	37
3.1	Arbelos	39
3.2	Arbelos	40
3.3	Círculos gêmeos de Arquimedes	44
3.4	Círculos gêmeos de Arquimedes	44
3.5	Construção dos círculos gêmeos de Arquimedes	47
3.6	Construção dos círculos gêmeos de Arquimedes	47
3.7	Construção dos círculos gêmeos de Arquimedes	48
3.8	Construção dos círculos gêmeos de Arquimedes	48
3.9	Coordenadas dos centros dos círculos gêmeos de Arquimedes	50
3.10	Cadeia de Pappus.	50
3.11	Os centros dos círculos da cadeia de Pappus.	51
3.12	Construção da cadeia de Pappus usando inversão.	52
3.13	Distância do centro da cadeia de Pappus até a reta suporte.	53
3.14	Círculo de Bankoff.	54
4.1	Visualização da primeira construção.	58
4.2	Visualização da segunda construção.	60
4.3	Visualização de como ficaria depois de resolvido.	61
4.4	Invertendo r em relação a C .	62
4.5	Solução.	62

Introdução

Os arbelos foram estudados pela primeira vez por Arquimedes em seu Livro de Lemas, Pappus também estudou os arbelos no livro IV de sua coleção.

Este trabalho está dividido em 4 capítulos. No capítulo 1 serão apresentados alguns resultados e definições como: homotetia, potência de um ponto, retas e círculos ortogonais, diagonais de um paralelogramo, triângulo retângulo inscrito em um semicírculo, elipse e a fórmula de Heron.

No capítulo 2, abordaremos a geometria inversiva. Será definido o que é inversão e o que ocorre quando invertemos uma reta em relação a um círculo e um círculo em relação a outro.

No capítulo 3, será feito o estudo sobre arbelos, assim como algumas de suas propriedades e ainda usaremos a inversão para falar da cadeia de Pappus e do círculo de Bankoff.

No capítulo 4, serão aplicados conceitos abordados nos capítulos anteriores para produzir exemplos de construções geométricas e resolução de problemas que podem ser utilizados em sala de aula. Para a realização dessas atividades, sugerimos o uso de algum software de geometria dinâmica, como o Geogebra, que foi utilizado nesta dissertação, mas algumas atividades podem ser realizadas usando apenas régua e compasso. Esta é uma boa oportunidade para desenvolver a curiosidade dos alunos e habilidade de resolução de problemas que usam conhecimento geométrico e algébrico.

Capítulo 1

Resultados preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados e definições que serão utilizados nos próximos capítulos.

No capítulo 2 trataremos da inversão em relação a um círculo. Para isto, precisaremos, por exemplo, dos conceitos de homotetia e de potência de um ponto em relação a um círculo, além da definição de círculos ortogonais, que apresentamos a seguir. Por círculo queremos dizer o lugar geométrico dos pontos no plano que equidistam de um dado ponto.

Definição 1.1. *Sejam F uma região do plano, O um ponto do plano e k um número real não-nulo. A homotetia de centro O e razão k é a transformação geométrica que associa a cada ponto P de F o ponto P' sobre a semirreta \overrightarrow{OP} , de origem O , tal que $OP' = k \cdot OP$.*

Observação 1.1. *Se $k > 0$, a homotetia de razão k é conhecida como homotetia direta, e se $k < 0$, como homotetia inversa, que pode ser vista como a composição entre a homotetia direta de razão $-k > 0$ com a reflexão em relação ao ponto O .*

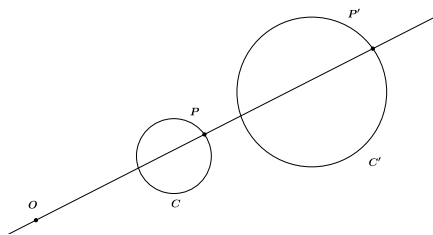


Figura 1.1: Homotetia de centro O e razão $k = 2$.

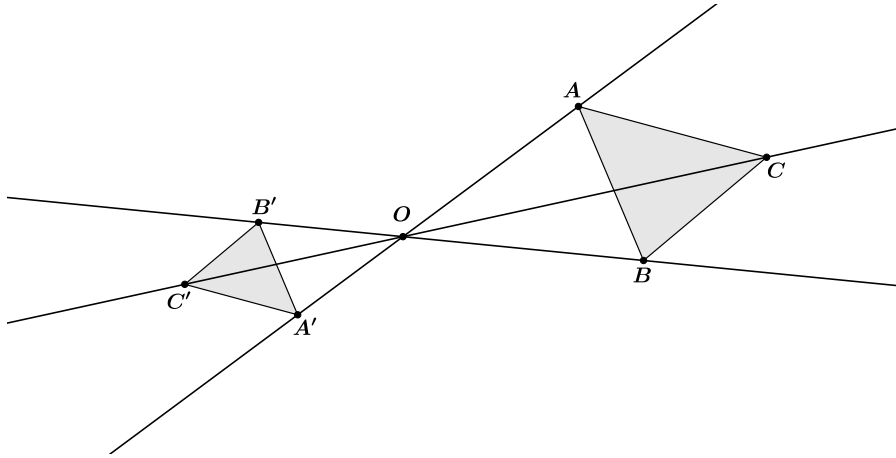


Figura 1.2: Homotetia de centro O e razão $k = -0,6$.

Observação 1.2. *Dois círculos são sempre homotéticos¹. Na maioria dos casos, eles admitem duas homotetias, uma direta e uma inversa. No caso de círculos disjuntos, os centros de homotetias podem ser encontrados da seguinte forma: são as intersecções das tangentes comuns internas² (inversa) e das tangentes comuns externas³ (direta). Estes resultados estão provados nas duas seguintes proposições e ilustrados nas figuras (1.3), (1.4) e (1.5).*

Proposição 1.1. *Sejam Γ e Ω dois círculos homotéticos. As tangentes comuns externas cruzam-se em O que é o centro de homotetia.*

Demonstração. Sejam $\{O\} = t_1 \cap t_2$, figura (1.3), os pontos A e B os centros dos círculos Γ e Ω respectivamente, e X e Y os pontos de tangência de t_1 com os círculos Γ e Ω como indicado na figura (1.5). Pelo caso de semelhança AA temos que $\triangle OAX \sim \triangle OBY$.

Logo,

$$\frac{OB}{OA} = \frac{BY}{AX} = k \Rightarrow BY = k \cdot AX.$$

Como O é único, então O é o centro da homotetia. □

Proposição 1.2. *Sejam Γ e Ω círculos homotéticos. As tangentes comuns internas cruzam-se em O_1 que é o centro de homotetia.*

¹Dois círculos são homotéticos se existir uma homotetia que aplica um sobre outro.

²Para cada uma das duas tangentes, os pontos de tangência aos dois círculos estão em semiplanos opostos em relação à reta determinada pelos centros dos círculos.

³Para cada uma das duas tangentes, os pontos de tangência aos dois círculos estão no mesmo semiplano em relação à reta determinada pelos centros dos círculos.

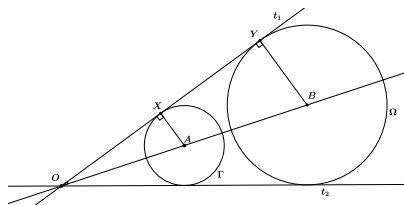


Figura 1.3: Homotetia gerada pelas tangentes externas de Γ e Ω .

Demonstração. Sejam $\{O_1\} = t_1 \cap t_2$, os pontos A e B os centros dos círculos Γ e Ω respectivamente, e P e Q os pontos de tangência de t_1 com os círculos Γ e Ω . Pelo caso de semelhança AA temos que $\triangle O_1AP \sim \triangle O_1BQ$.

Logo,

$$\frac{O_1B}{O_1A} = \frac{BQ}{AP} = k \Rightarrow BQ = k \cdot AP.$$

□

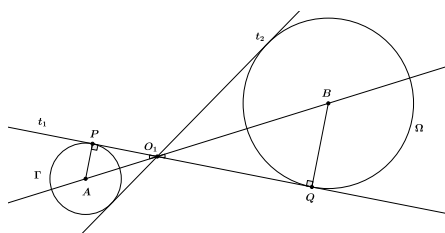


Figura 1.4: Homotetia gerada pelas tangentes internas de Γ e Ω .

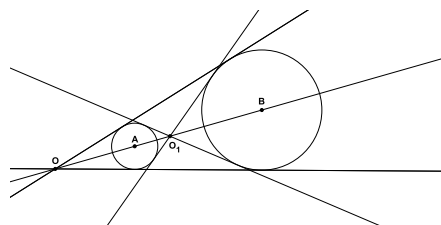


Figura 1.5: Círculos homotéticos.

Proposição 1.3. *Homotetias levam retas em retas.*

Demonstração. Sejam r uma reta e $H_{o,k}$ a homotetia de centro O e razão k . Tome B e C pontos de r .

Sejam $B' = H_{o,k}(B)$ e $C' = H_{o,k}(C)$. Pelo caso *LAL* de semelhança, temos que os triângulos $\triangle OBC$ e $\triangle OB'C'$ são semelhantes.

Se P for um outro ponto qualquer de $r = \overleftrightarrow{BC}$, então, pelo mesmo argumento, concluímos que $P' = H_{o,k}(P)$ pertence à reta $\overleftrightarrow{B'C'}$. Portanto $r' = H_{o,k}(r)$ é uma reta. \square

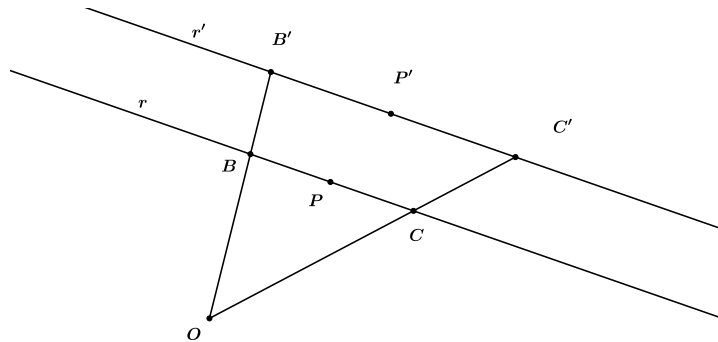


Figura 1.6: Homotetias levando reta em reta de razão $k=1.5$

Proposição 1.4. *Homotetias levam círculos em círculos.*

Demonstração. Denote por $H_{o,k}$ a homotetia de centro O e razão k . Sejam P um ponto qualquer do círculo de centro A e raio r e $P' = H_{o,k}(P)$ e $A' = H_{o,k}(A)$. Então $OP' = k \cdot OP$ e $OA' = k \cdot OA$.

Pelo caso *LAL* de semelhança, os triângulos $\triangle OAP$ e $\triangle OA'P'$ são semelhantes, de modo que $P'A' = k \cdot r$. Assim, P' pertence a um círculo de centro A' e raio kr . \square

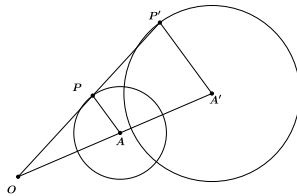


Figura 1.7: Homotetias levando círculo em círculo de razão $k=1.9$

Proposição 1.5. *Homotetias preservam tangência entre retas e círculos.*

Demonstração. Sejam $H_{o,k}$ a homotetia de centro O e razão k , r uma reta, Γ um círculo de centro A e raio R , e P um ponto de tangência entre Γ e r .

Se B e C pertence a r então $r' = H_{o,k}(r)$ é uma reta que passa por $B' = H_{o,k}(B)$ e $C' = H_{o,k}(C)$. Além disto, $\Gamma' = H_{k,o}(\Gamma)$ é um círculo de centro A' e raio kR .

Por semelhança de triângulos, concluímos que $\triangle OAP \sim \triangle OA'P'$ e $\triangle OPB \sim \triangle OP'B'$. Consequentemente $\angle B'P'A' = \angle BPA = \frac{\pi}{2}$ donde segue que P' é um ponto de tangência entre Γ' e r' . \square

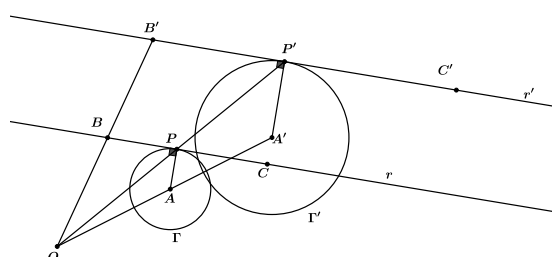


Figura 1.8: Homotetia de razão $k=1.9$

Definição 1.2. *Seja Γ um círculo de centro O e raio r . Se um ponto P está a uma distância d de O , definimos a potência do ponto P em relação ao círculo Γ como*

$$Pot(P) = d^2 - r^2.$$

Pela definição apresentada, se P é exterior a Γ , sua potência é um número positivo; se P pertence a Γ , sua potência é zero, se P é interior a Γ , sua potência é negativa.

Teorema 1.1. *Sejam dados um círculo Γ , de raio r e centro O , e um ponto P . Se a reta t que passa por P e intersecta o círculo Γ nos pontos A e B , então o produto $PA \cdot PB$ é uma constante (isto é independe de r).*

Demonstração. Seja o círculo Γ de centro O e raio r . Seja P um ponto não pertencente a Γ com $PO = d$. Sejam t uma reta que passa pelos pontos P , A e B e M o ponto médio do segmento AB . Seja agora $MA = MB = x$. Pelo caso de congruência LLL , temos que os triângulos $\triangle AOM$ e $\triangle BOM$ são congruentes. Consequentemente, os ângulos $\angle AMO$ e $\angle BMO$ são retos, pois são congruentes e suplementares. Ou seja, $\overline{AM} \perp \overline{OM}$. Podemos dizer que:

1. Se P é exterior ao círculo Γ ,

$$\begin{aligned} PA \cdot PB &= (PM - x)(PM + x) = PM^2 - x^2 = PO^2 - OM^2 - x^2 = \\ &= PO^2 - (OM^2 + x^2) = d^2 - r^2 = Pot(P). \end{aligned}$$

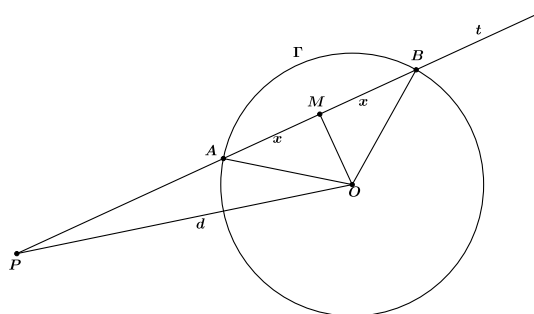


Figura 1.9: Potência de um ponto P exterior ao círculo Γ .

2. Se P é interior a Γ ,

$$\begin{aligned} -PA \cdot PB &= -(x - PM)(x + PM) = PM^2 - x^2 = PO^2 - OM^2 - x^2 = \\ &= PO^2 - (OM^2 + x^2) = d^2 - r^2 = Pot(P). \end{aligned}$$

□

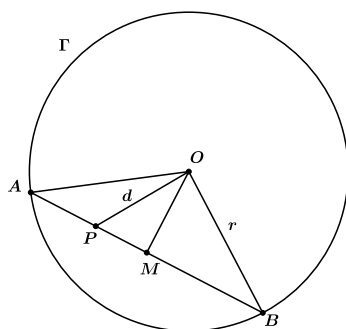


Figura 1.10: Potência de um ponto P interno ao círculo Γ .

Observação 1.3. Se P pertence a Γ , então P será A ou B , de modo que $PA \cdot PB = 0 = \text{pot}(P)$.

Observação 1.4. Se P é externo ao círculo Ω e uma das retas é tangente ao círculo C no ponto T então $PT^2 = PA \cdot PB$. De fato,

Considere uma reta t tangente ao círculo Ω num ponto T e uma reta s que cruza o círculo Ω nos pontos A e B . Temos então dois triângulos $\triangle ATP$ e $\triangle PTB$ semelhantes, pois, $\angle TPA = \angle TPB$ e $\angle ATP \cong \angle TBP$ (ângulos de segmento inscrito a uma mesma corda \widehat{AT}). Logo, seus lados correspondentes são proporcionais, isto é,

$$\frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB} \text{ ou } PT^2 = PA \cdot PB.$$

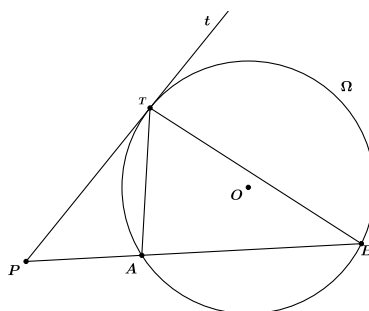


Figura 1.11: Segmento PT tangente ao círculo Ω .

Definição 1.3. Sejam um círculo Γ de centro O e uma reta r . Dizemos que r é ortogonal a Γ se e somente se r passa pelo centro de Γ .

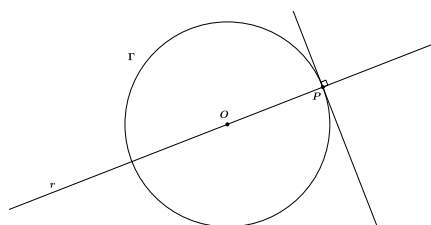
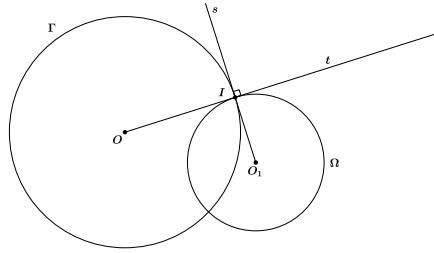


Figura 1.12: Reta e círculo ortogonal.

Figura 1.13: Círculo Γ ortogonal ao círculo Ω

Definição 1.4. *Dois círculos Γ e Ω são ditos ortogonais se eles se intersectam num ponto I formando ângulos retos, isto é, se seus raios são perpendiculares no ponto I de intersecção.*

No capítulo 3 usaremos os resultados que serão apresentados a seguir.

Proposição 1.6. *Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e só se, duas diagonais se intersectam nos respectivos pontos médios.*

Demonstração. Primeiramente, seja $ABCD$ um paralelogramo e M o ponto de intersecção de suas diagonais. De $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, segue que $\angle BAM \cong \angle DCM$ e $\angle ABM \cong \angle CDM$. Como já sabemos que $AB = CD$, segue que os triângulos $\triangle ABM$ e $\triangle CDM$ são congruentes pelo caso ALA . Logo, $AM = CM$ e $BM = DM$.

Reciprocamente, seja $ABCD$ um quadrilátero tal que suas diagonais AC e BD se intersectam em M , o ponto médio de ambas. Então $MA = MC$, $BM = DM$ e $\angle AMB \cong \angle CMD$ (ângulos opostos pelo vértice), de modo que os triângulos $\triangle ABM$ e $\triangle CDM$ são congruentes, por LAL . Analogamente, $\triangle BCM$ e $\triangle DAM$ também são congruentes por LAL . Tais congruências nos dão, respectivamente, $AB = CD$ e $BC = AD$, o que já sabemos ser equivalente ao fato de $ABCD$ ser paralelogramo. \square

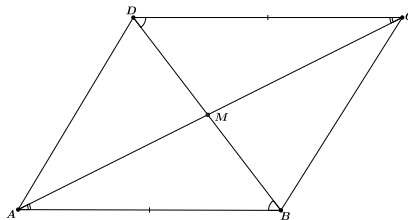


Figura 1.14: As diagonais de um paralelogramo.

Proposição 1.7. *Se um triângulo inscrito num semicírculo Γ de centro O e raio r tem um lado cuja medida é igual ao seu diâmetro, então ele é um triângulo retângulo e esse diâmetro é hipotenusa do triângulo.*

Demonstração. Sejam D , A e B pontos de Γ tais que A , O e B sejam colineares. temos que o triângulo $\triangle BOD$ é isósceles, de modo que $\angle ODB \cong \angle OBD$, de medida α . Análogamente, $\angle OAD \cong \angle ODA$, de medida β . Consequentemente,

$$2\alpha + 2\beta = \pi.$$

Logo, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Assim, $\angle ADB$ mede $\frac{\pi}{2}$ e o triângulo $\triangle ADB$ é retângulo em D . \square

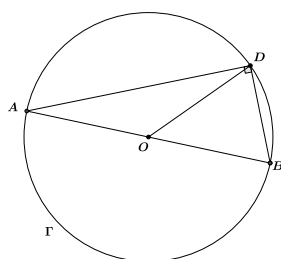


Figura 1.15: Triângulo inscrito em um semicírculo

A definição de elipse será necessária para falarmos da cadeia de Pappus que será abordada no terceiro capítulo.

Definição 1.5. *Fixado dois pontos F_1 e F_2 do plano uma elipse ξ de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual uma constante $2a > 0$, maior do que a distância entre os focos $2c \geq 0$. Ou seja, $0 \leq c < a$ e $d(F_1, F_2) = 2c$,*

$$\xi = \{P | d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$$

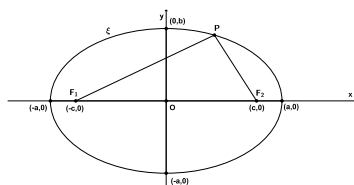


Figura 1.16: Elipse de focos F_1 e F_2 .

Heron de Alexandria foi um grande matemático que dentre seus trabalhos desenvolveu uma fórmula capaz de determinar a área de um triângulo somente através das medidas dos lados. Essa fórmula descarta a utilização da altura do triângulo. Observe a expressão formulada por Heron de Alexandria:

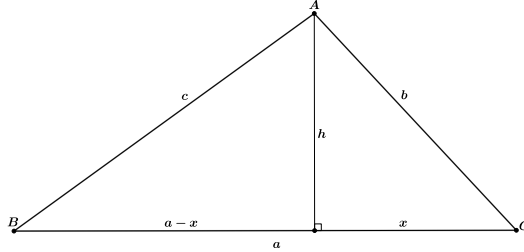


Figura 1.17: Triângulo ABC

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

onde $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Vejam a seguir como pode ser demonstrada a fórmula de Heron.

Sejam a , b e c as medidas dos lados de um triângulo e h a altura relativa ao lado de comprimento a .

Aplicando-se o teorema de Pitágoras aos triângulos retângulos obtidos como na figura (1.17), temos:

$$b^2 = x^2 + h^2, \quad \text{e} \quad c^2 = h^2 + (a-x)^2.$$

Substituindo-se h na segunda equação,

$$c^2 = b^2 - x^2 + (a-x)^2 = b^2 - x^2 + a^2 - 2ax + x^2 = b^2 + a^2 - 2ax,$$

donde temos

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

Substituindo-se x na primeira equação,

$$b^2 = x^2 + h^2 = \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \right)^2 + h^2,$$

donde segue que

$$h^2 = - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \right)^2 + b^2 = \frac{-(a^2 + b^2 - c^2)^2 + b^2 \cdot 4a^2}{4a^2}.$$

Portanto,

$$h = \sqrt{\frac{-(a^2 + b^2 - c^2)^2 + 4a^2b^2}{4a^2}}.$$

A área do triângulo é dada por $S = \frac{a \cdot h}{2}$.

$$\begin{aligned} S = \frac{a \cdot h}{2} &= \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{-(a^2 + b^2 - c^2)^2 + (2ab)^2}}{2a} = \\ &= \frac{\sqrt{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{[(2ab) + (a^2 + b^2 - c^2)] \cdot [(2ab) - (a^2 + b^2 - c^2)]}}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{[2ab + a^2 + b^2 - c^2] \cdot [2ab - a^2 - b^2 + c^2]}}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{[c^2 - (a - b)^2] \cdot [(a + b)^2 - c^2]}}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{\{[c - (a - b)] \cdot [c + (a - b)]\} \cdot \{[(a + b) + c] \cdot [(a + b) - c]\}}}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{[c - a + b] \cdot [c + a - b] \cdot [a + b + c] \cdot [a + b - c]}}{4} = \\ &= \sqrt{\frac{[c - a + b]}{2} \cdot \frac{[c + a - b]}{2} \cdot \frac{[a + b + c]}{2} \cdot \frac{[a + b - c]}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{[a + b + c - 2a]}{2} \cdot \frac{[a + b + c - 2b]}{2} \cdot \frac{[a + b + c]}{2} \cdot \frac{[a + b + c - 2c]}{2}} = \\ &= \sqrt{(p - a) \cdot (p - b) \cdot p \cdot (p - c)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)} \quad (1.1)$$

onde, $p = \frac{a + b + c}{2}$.

Com essas definições básicas temos agora ferramentas que possam nos auxiliar a construção do que propomos nesse trabalho.

Capítulo 2

Geometria inversiva

Neste capítulo discutimos a geometria inversiva. Definimos a inversão em relação a um círculo de raio $r > 0$ e mostramos como inverter retas e círculos em relação a um dado círculo. A inversão é uma técnica usada ao longo deste trabalho no estudo dos arbelos. Por exemplo, na construção das cadeias de Pappus e do círculo de Bankoff.

2.1 Inversão em relação a um círculo

Definição 2.1. *Seja Γ um círculo de centro O e raio $r > 0$ fixados, no plano. A inversão I em relação a Γ é definida como a aplicação que associa a cada ponto P , distinto de O , no plano um único ponto P' pertencente à semirreta \overrightarrow{OP} tal que $OP \cdot OP' = r^2$.*

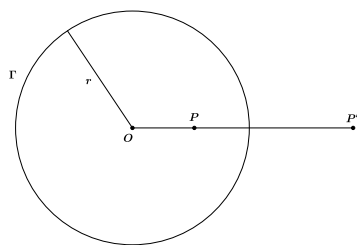


Figura 2.1: Inversão em relação a um círculo.

A seguir, determinamos uma expressão algébrica para a inversão em relação a Γ . Começamos supondo que O é a origem do sistema de coordenadas.

1º caso: O é a origem do sistema de coordenadas, isto é, $O = (0, 0)$.

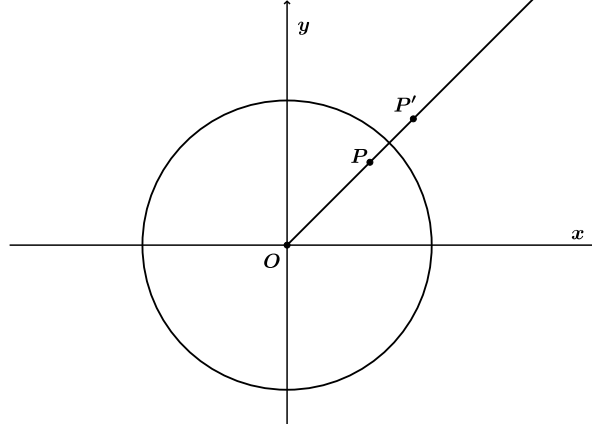


Figura 2.2: O é a origem do sistema de coordenadas.

Sejam $P = (x, y) \neq (0, 0)$ um ponto qualquer do plano e $P' = (x', y')$ a imagem de P pela inversão em relação a Γ , isto é, $P' = I(P)$. Como $P' \in \overrightarrow{OP}$, então

$$(x', y') = \lambda(x, y), \quad \text{com } \lambda \in \mathbb{R}_*^+.$$

Por definição, $OP \cdot OP' = r^2$, donde temos que $\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = r^2$. Consequentemente, $\lambda^2 \cdot (x^2 + y^2)^2 = r^4$. Logo, $\lambda = \frac{r^2}{x^2 + y^2} = \frac{r^2}{(OP)^2}$. Portanto,

$$I(x, y) = P' = \frac{r^2}{(OP)^2} \cdot \overrightarrow{OP}.$$

Caso geral: $O = (x_0, y_0)$ é distinto de $(0, 0)$:

No sistema de coordenadas cartesianas original, suponha que P tenha coordenadas $P = (x_1, y_1)$. No sistema de coordenadas que tem $O = (x_0, y_0)$ como origem, as coordenadas de P são $P = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$. Em relação a este sistema, as coordenadas do ponto $P' = I(P)$ são dadas por $P' = \frac{r^2}{(OP)^2} \cdot \overrightarrow{OP}$. Para obter as coordenadas de P' no sistema de coordenadas original, precisamos transladar os eixos de modo que $(0, 0)$ seja novamente a origem. Isto é feito somando-se as coordenadas de O às coordenadas no outro sistema. Ou seja,

$$(x', y') = \frac{r^2}{(OP)^2} \cdot \overrightarrow{OP} + O.$$

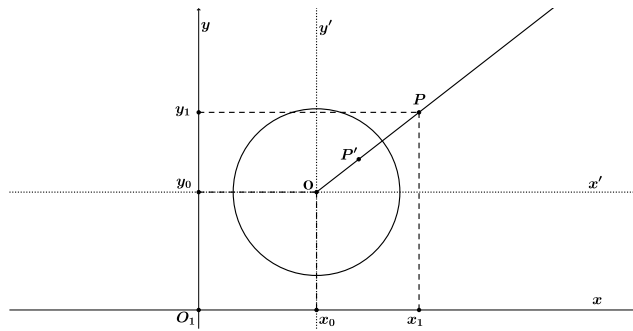


Figura 2.3: O não é a origem do sistema de coordenadas.

Em coordenadas temos,

$$I(x, y) = (x', y') = (x_0, y_0) + \frac{r^2}{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0).$$

Desta forma, a expressão geral para a inversão $I : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ em relação a um círculo Γ de centro O é

$$I(P) = O + \frac{r^2}{OP^2} \cdot \vec{OP}. \quad (2.1)$$

Apresentamos a seguir algumas consequências imediatas da definição de inversão:

1. $\vec{OP'} = \frac{r^2}{OP^2} \cdot \vec{OP}$, de modo que $OP' \cdot OP = r^2$.
2. Se P for um ponto exterior de Γ , isto é, $OP > r$ então $r^2 = OP \cdot OP' > r \cdot OP'$; logo, $OP' < r$, isto é, P' está no interior de Γ .

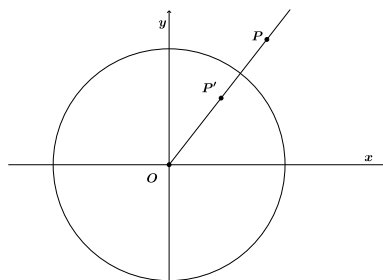


Figura 2.4: O ponto P é externo ao círculo Γ .

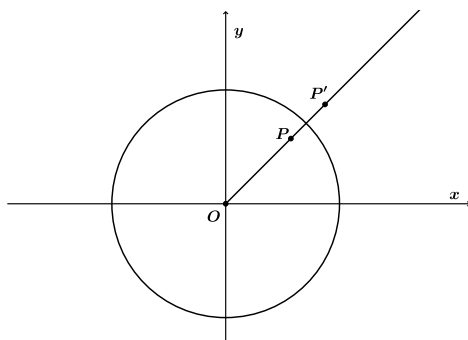


Figura 2.5: O ponto P é interno ao círculo Γ .

3. Se P for um ponto do interior de Γ , isto é, $OP < r$ então $r^2 = OP \cdot OP' < r \cdot OP$; logo, $OP' > r$, isto é, P' está no exterior de Γ .
4. Se P for um ponto de Γ , isto é, $OP = r$ então $r^2 = r \cdot OP'$, de modo que, $OP' = r$, ou seja, $P' \in \Gamma$.

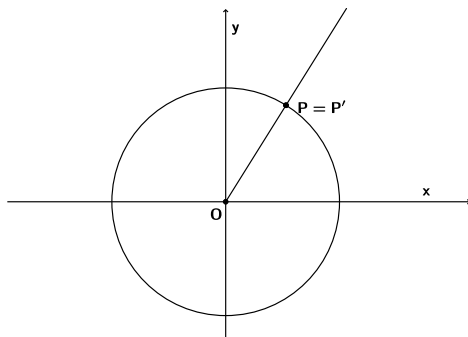


Figura 2.6: O ponto P pertence ao círculo Γ .

5. I é uma involução, isto é,

$$I(I(P)) = I(P') = O + \frac{r^2}{(OP')^2} \cdot (\overrightarrow{OP'}) = O + \frac{r^2}{\left(\frac{r^2}{OP}\right)^2} \cdot \left(\frac{r^2}{OP^2} \cdot \overrightarrow{OP}\right) = O + \overrightarrow{OP} = P.$$

2.2 Inversão da reta em relação a um círculo

Proposição 2.1. *Seja Γ um círculo de centro O e raio r . A inversão em relação a Γ de uma reta s que passa por O é a própria reta s .*

Demonstração. Vamos mostrar que as inversas dos pontos de s também estão em s . Seja $P \neq O$ um ponto da reta s , então o inverso P' pertence à semirreta \overrightarrow{OP} . Como P e O pertencem à s , então P' pertence a s .

Agora, resta mostrar que cada ponto B de s é inverso de algum ponto de s . Isto é consequência do fato de a inversão ser uma involução. Ou seja $Q = (I(Q))$. \square

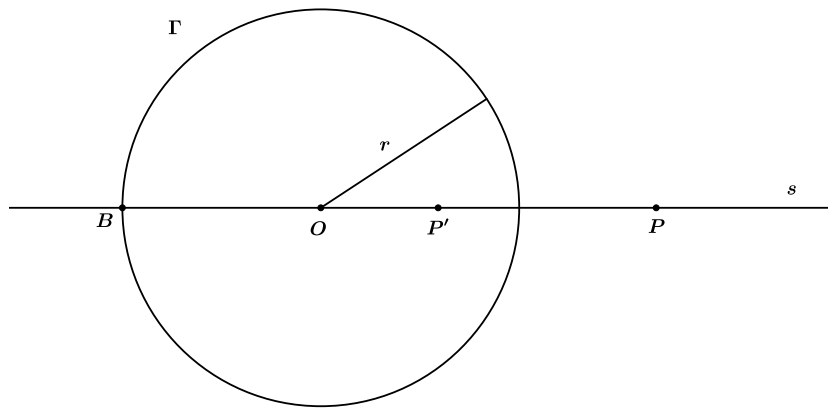


Figura 2.7: Inversão da reta que passa pelo centro de inversão.

Proposição 2.2. *Seja Γ um círculo de centro O e raio r . A inversão em relação a Γ de uma reta s que não passa por O é um círculo que passa por O .*

Demonstração. Sejam s a reta que não passa pelo centro O do círculo Γ e t um reta perpendicular a s que passa pelo centro O de Γ e intersecta a reta s no ponto A . Seja agora o ponto A' o inverso do ponto A em relação ao círculo. Fixe um ponto P de s , $P \neq A$, e seja P' o seu inverso em relação a Γ . Temos que $OA \cdot OA' = OP \cdot OP' = r^2$. Pelo caso LAL de semelhança temos que os triângulos $\triangle AOP$ e $\triangle A'OP'$ são semelhantes. Assim, pela proposição (1.7), concluimos então que o ângulo $\angle OP'A'$ é reto, o que nos permite concluir que o segmento $\overline{OA'}$ é o diâmetro de um círculo que passa pelo centro O . \square

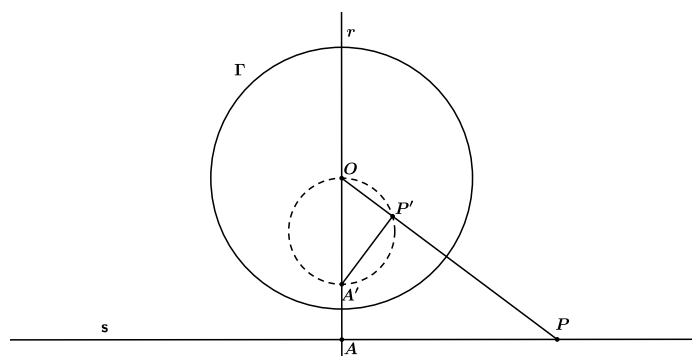


Figura 2.8: A reta s é externa ao círculo Γ .

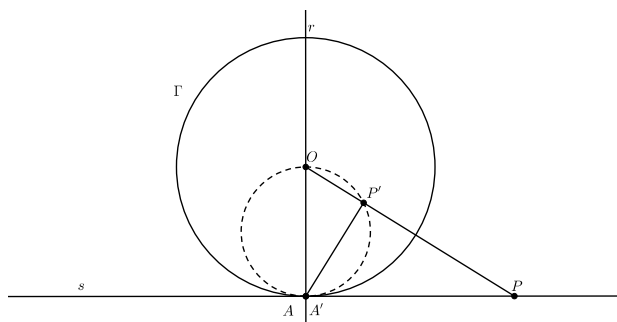


Figura 2.9: A reta s é tangente ao círculo Γ .

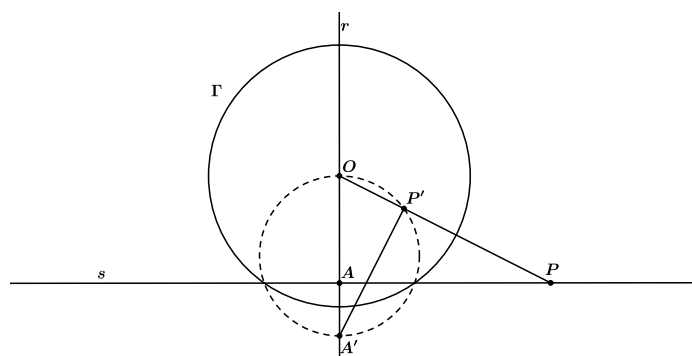


Figura 2.10: A reta s é secante ao círculo Γ .

2.3 Inversão de um círculo em relação a um círculo dado

Proposição 2.3. *Seja Γ um círculo de centro O' , a inversão em relação a Γ de um círculo Ω de centro O e raio r que não passa por O' é um círculo.*

Demonstração. **1º caso:** O está no exterior de Γ .

Trace \overline{OA} tangente a Γ no ponto A . Para cada ponto B pertencente a Γ , de modo que \overline{OB} não seja tangente a Γ , considere B' o outro ponto de encontro de Γ com a semirreta \overrightarrow{OB} . Pela observação (1.4), tem-se que

$$OB \cdot OB' = OA^2. \quad (2.2)$$

Seja agora B'' o inverso de B' em relação ao círculo Ω . Então,

$$OB' \cdot OB'' = r^2 \quad (2.3)$$

De (2.2) e (2.3), temos que

$$OB'' = \left(\frac{r}{OA}\right)^2 \cdot OB$$

Logo o inverso do círculo Γ , em relação a Ω , pela proposição (1.4), é sua imagem pela homotetia de centro O e razão $\left(\frac{r}{OA}\right)^2$.

Assim, a inversão leva o círculo Γ , com O não pertencente a Γ , num círculo Γ' .

Reciprocamente, todo ponto do círculo Γ' é o inverso, relativo ao círculo Ω de algum ponto de Γ .

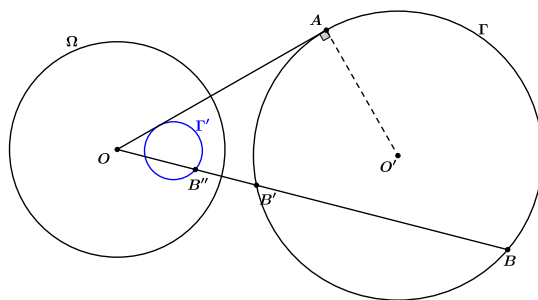


Figura 2.11: O círculo de inversão Γ é externo ao círculo Ω .

2º caso: O está no interior de Γ .

Seja B um ponto que pertence ao círculo Γ e B' o ponto de intersecção da reta \overleftrightarrow{OB} com

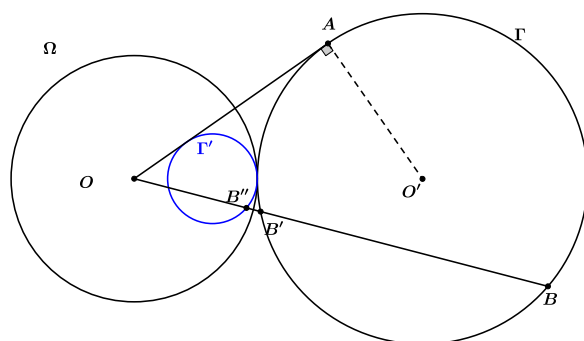


Figura 2.12: O círculo de inversão Γ é tangente ao círculo Ω .

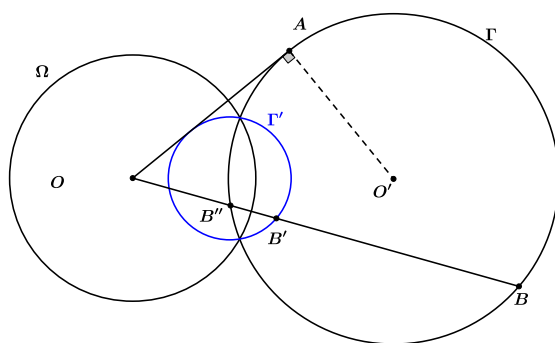


Figura 2.13: O círculo de inversão Γ é secante ao círculo Ω .

o círculo Γ e considere $k = OB \cdot OB'$.

Agora para cada $A \neq B$ pertencente a Γ , seja A' o outro ponto de intersecção de Γ com a reta \overleftrightarrow{OA} . Pela potência de um ponto temos que, $OB \cdot OB' = OA \cdot OA' = k$.

Se A'' é o inverso em relação ao círculo Ω do ponto A' , que pertence a Γ , em relação ao círculo Ω , então, pela definição de inversão temos que $OA' \cdot OA'' = r^2$, onde r é o raio de Ω .

Logo $OA'' = \frac{r^2}{k} \cdot OA$.

Assim, a inversão, em relação a Ω , leva Γ na sua imagem homotética de centro O e razão $\frac{r^2}{k}$, onde $k = OB \cdot OB'$ e, portanto, num círculo Γ' .

Reciprocamente, todo ponto do círculo Γ' é o inverso, relativo ao círculo Ω , de algum ponto de Γ . \square

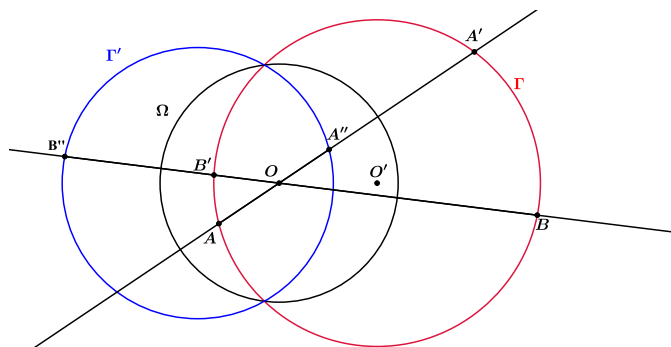


Figura 2.14: O círculo de inversão Γ é secante ao círculo Ω .

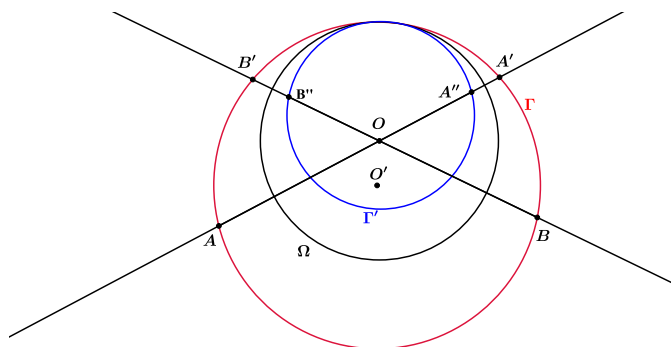


Figura 2.15: O círculo de inversão Γ é tangente ao círculo Ω .

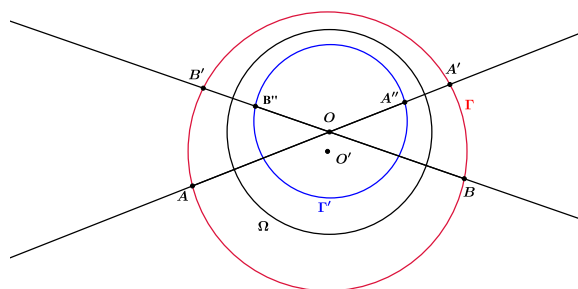


Figura 2.16: O círculo de inversão Γ interno ao círculo Ω .

Proposição 2.4. *Seja Γ um círculo de centro O e raio r . A inversão em relação a Γ de um círculo Ω que passa por O é uma reta que não passa por O .*

Demonstração. Seja Γ um círculo de inversão de centro O e raio r e Ω um círculo de centro O_1 que passa por O . Seja $A \neq O$ o ponto onde a reta $s = \overleftrightarrow{OO_1}$ intersecta Ω . Seja A' o inverso de A em relação a Γ , então, A' pertence a s . Seja r a reta que passa por A' e é perpendicular a s . Provaremos que $r = \Omega'$, ou seja, a inversão do círculo Ω em relação a Γ é a reta r .

Sejam agora $B \neq A$ e $B \neq O$ um ponto qualquer do círculo Ω e $t = \overleftrightarrow{OB}$. Agora, seja P o ponto onde r intersecta t . Queremos mostrar que $P = B'$.

Temos que os triângulos $\triangle ABO$ e $\triangle OA'P$ são semelhantes, pois, os ângulos $\angle A'OP = \angle AOB$ são comuns e o ângulo $\angle ABO = \pi/2$, pois, OA é o diâmetro do círculo e um dos lados do triângulo $\triangle ABO$ e $\angle OA'P = \pi/2$, por construção. Então, $\frac{OB}{OA'} = \frac{OA}{OP}$.

Logo, $OB \cdot OP = OA \cdot OA'$, mas pela definição de inversão sabemos que $OA \cdot OA' = r^2$. Concluimos que $OB \cdot OP = r^2$, sendo P o inverso de B , ou seja $P = B'$.

Portanto, os inversos dos pontos $B \neq O$ do círculo Ω pertencem a reta r , ou seja, a reta r é a inversa de Ω em relação a Γ . \square

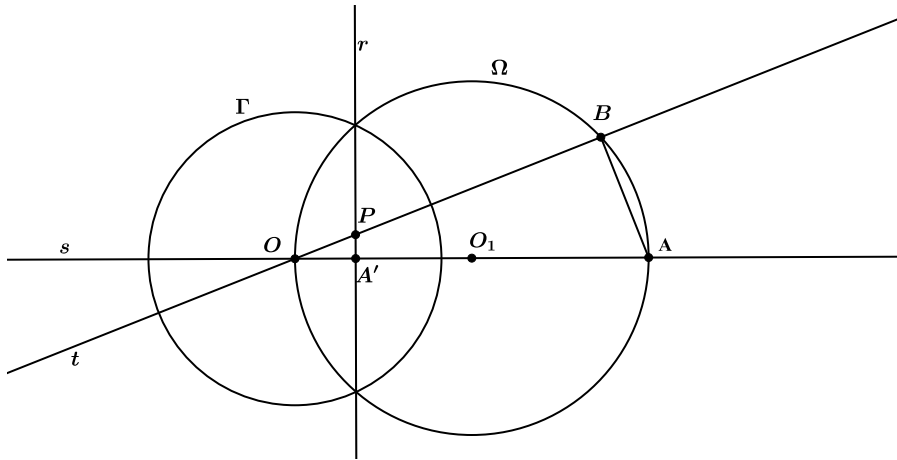


Figura 2.17: Inversão de um círculo que passa pelo centro de inversão.

Proposição 2.5. *A inversão de um círculo Ω em relação a um círculo Γ ortogonal a Ω , é o próprio círculo Ω .*

Demonstração. Considere um círculo Γ , de centro O e raio r , e um círculo Ω que intersecta Γ perpendicularmente nos pontos A e B . Logo, a reta $s = \overleftrightarrow{OA}$ será tangente ao círculo Ω

em A . Considere agora um ponto E pertencente a C e a semirreta passando por O e E que intersecta o círculo Ω no ponto E' . De acordo com a potência do ponto O em relação ao círculo Ω , temos,

$$(OA)^2 = OE \cdot OE' = r^2,$$

o que caracteriza que E' realmente é o inverso de E em relação a Γ . Mas, há apenas um círculo passando pelos pontos A , B e E' . Logo, o inverso de Ω em relação a Γ é Ω . \square

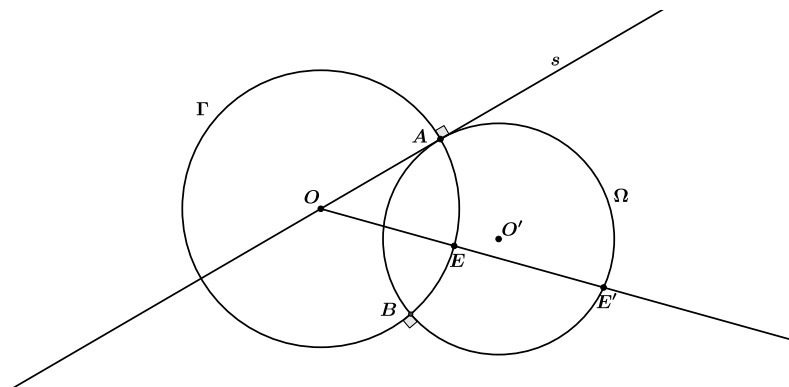


Figura 2.18: Inversão em relação a um círculo ortogonal

Capítulo 3

Arbelos

Neste capítulo estudaremos os arbelos e suas propriedades, os círculos gêmeos de Arquimedes, a cadeia de Pappus e o círculo de Bankoff.

Definição 3.1. *Dados 3 pontos colineares C_1 , C_2 e C_3 sobre uma reta r , com C_2 entre C_1 e C_3 , o arbelo é a reunião de três semicírculos de diâmetros C_1C_2 , C_2C_3 e C_1C_3 de um mesmo lado da reta que contém C_1 , C_2 e C_3 .*

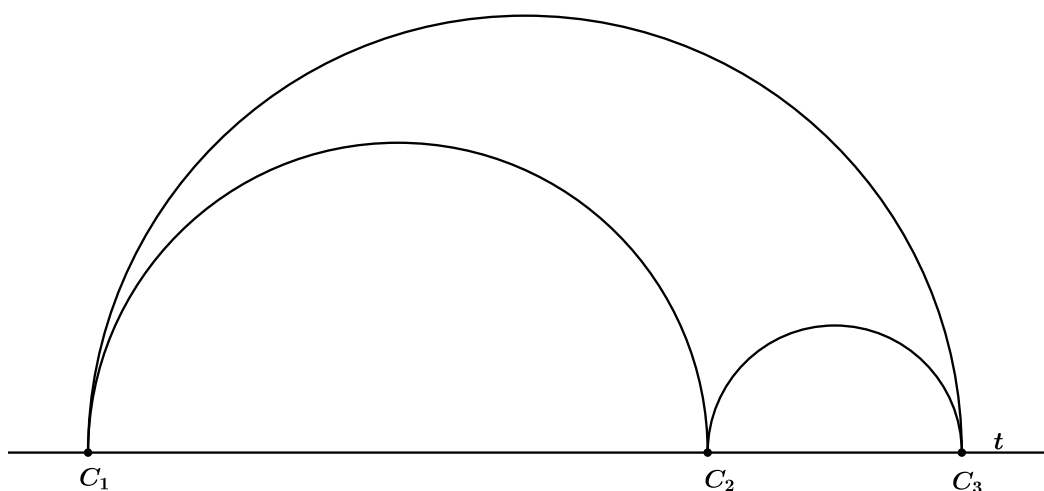


Figura 3.1: Arbelos

A figura a seguir será utilizada para ilustrar algumas propriedades dos arbelos. As mesmas podem ser mostradas usando-se a geometria estudada no ensino médio. Procuraremos mostrar algumas delas de maneira bem detalhada de modo a ajudar o aluno a

ter um bom entendimento sobre o assunto.

No ponto C_2 , construímos uma perpendicular a $\overline{C_1C_3}$ que intersecta o semicírculo de diâmetro C_1C_3 no ponto D . Construímos o segmento $\overline{DC_1}$. Seja F o ponto de intersecção do semicírculo de diâmetro C_1C_2 com o segmento $\overline{DC_1}$. Da mesma maneira, construímos $\overline{DC_3}$ que cortará o semicírculo de diâmetro C_2C_3 no ponto H .

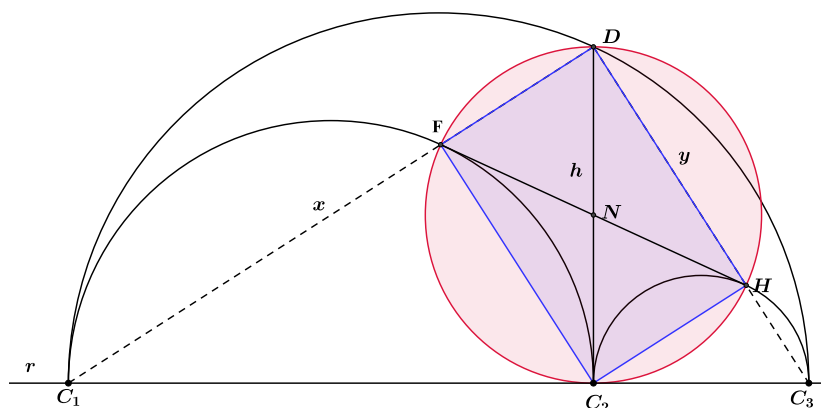


Figura 3.2: Arbelos

Proposição 3.1. *O comprimento do semicírculo superior de um arbelo é igual à soma dos comprimentos dos semicírculos inferiores do arbelo.*

Demonstração. Sejam α o comprimento do semicírculo de diâmetro C_1C_3 , β o comprimento do semicírculo de diâmetro C_1C_2 e γ o comprimento do semicírculo de diâmetro C_2C_3 . Sem perda de generalidade, suponha que $C_1C_3 = 1$. Se $C_1C_2 = r$, com $0 < r < 1$, então $C_2C_3 = 1 - r$.

Logo, temos que:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{\pi}{2}, \\ \beta &= \frac{2 \cdot \pi \cdot \frac{r}{2}}{2} = \frac{\pi r}{2}, \\ \gamma &= \frac{2 \cdot \pi \cdot \frac{1-r}{2}}{2} = \frac{\pi - \pi r}{2}.\end{aligned}$$

Assim, temos que:

$$\beta + \gamma = \frac{\pi r}{2} + \left(\frac{\pi - \pi r}{2} \right)$$

$$\frac{\pi r}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi r}{2} = \frac{\pi}{2} = \alpha.$$

□

Proposição 3.2. *O quadrilátero C_2FDH é um retângulo.*

Demonstração. Como o triângulo $\triangle C_1DC_3$ está inscrito em um semicírculo e seu lado $\overline{C_1C_3}$ é o diâmetro desse semicírculo temos que o triângulo $\triangle C_1DC_3$ é retângulo em D . Logo, o ângulo $\angle C_1DC_3 = \pi/2$. Seja o ângulo $\angle C_2C_3D = a$ e o ângulo $\angle C_2C_1D = b$, então $a + b = \pi/2$.

O triângulo $\triangle DC_2C_3$ é, por construção, um triângulo retângulo, pois $\overline{C_2D}$ é perpendicular a $\overline{C_1C_3}$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a π , e o ângulo $\angle C_2C_3D = a$, então o ângulo $\angle C_2DC_3 = b$.

Como os triângulos $\triangle C_1FC_2$ e $\triangle C_2HC_3$ estão inscritos em semicírculos e um de seus lados é diâmetro destes semicírculos, então eles são triângulos retângulos. Logo, $\angle C_1FC_2 = \angle C_2HC_3 = \pi/2$. Uma vez que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a π , segue que o ângulo $\angle FC_2C_1 = a$ e o ângulo $\angle HC_2C_3 = b$. Consequentemente, $\angle C_1C_2F = a$ e $\angle C_2C_3H = b$. Como $\angle DC_2C_1 = \angle DC_2C_3 = \pi/2$, então $\angle DC_2F = \pi/2 - a = b$ e $\angle DC_2H = \pi/2 - b = a$.

Pelo caso *ALA* os triângulos $\triangle C_2FD$ e $\triangle C_2HD$ são congruentes. Assim, $C_2H = FD$ e $C_2F = HD$. Logo, o quadrilátero C_2FDH é um paralelogramo.

Como $a + b = \pi/2$, o ângulo $\angle FC_2H = \angle FDH = \pi/2$, concluimos que o paralelogramo em questão é um retângulo. □

Proposição 3.3. *O segmento $\overline{C_2D}$ é congruente ao segmento \overline{FH} e intersectam-se em seus pontos médios.*

Demonstração. Pela Proposição (3.2), o quadrilátero C_2FDH é um retângulo. Uma vez que as diagonais de um retângulo são congruentes e intersectam em seus pontos médios, segue que os segmentos $\overline{C_2D}$ e \overline{FH} são congruentes e se intersectam em seus pontos médios. □

Proposição 3.4. *O segmento \overline{FH} é tangente comum a ambos os semicírculos menores.*

Demonstração. Pela proposição (3.2), sabemos que C_2FDH é um retângulo e pela Proposição (3.3), vimos que os segmentos \overline{FH} e $\overline{C_2D}$ são congruentes e intersectam-se nos seus respectivos pontos médios. Chamando de N a intersecção desses segmentos temos então que $NF = NC_2 = NH$. Segue disso que os triângulos $\triangle NC_2F$ e $\triangle NC_2H$ são triângulos

isósceles. Portanto, o ângulo $\angle NC_2H = \angle NHC_2 = a$, $\angle NC_2F = \angle NFC_2 = b$. Sejam I e J os pontos médios dos segmentos $\overline{C_1C_2}$ e $\overline{C_2C_3}$, respectivamente.

Construímos então os segmentos \overline{IF} e \overline{JH} .

Temos que $IF = IC_2$, $JH = JC_2$ e os triângulos $\triangle FIC_2$ e $\triangle HC_2J$ são triângulos isósceles. Assim,

$$\begin{aligned}\angle HFI &= \angle IFC_2 + \angle C_2FN \\ \angle HFI &= a + b \\ \angle HFI &= \pi/2,\end{aligned}$$

e o ângulo $\angle FHJ = 90^\circ$, pois:

$$\begin{aligned}\angle FHJ &= \angle NHC_2 + \angle C_2HJ \\ \angle FHJ &= a + b \\ \angle FHJ &= \pi/2.\end{aligned}$$

Como IF é um raio do semicírculo de diâmetro C_1C_2 e o segmento \overline{IF} é perpendicular ao segmento \overline{FH} então o segmento \overline{FH} é tangente ao semicírculo de diâmetro C_1C_2 . Do mesmo modo, o segmento \overline{JH} é um raio do semicírculo de diâmetro C_2C_3 , o segmento \overline{FH} é perpendicular ao segmento $\overline{JC_2}$. Portanto, o segmento \overline{FH} também é tangente ao semicírculo de diâmetro C_2C_3 .

Assim, o segmento \overline{FH} é a tangente comum a ambos os semicírculos menores. \square

Antes de mostrarmos a próxima propriedade, calculamos a medida do segmento $\overline{C_2D}$ (diagonal). Denotando-se $C_1C_2 = r$, temos que, $C_2C_3 = 1 - r$, logo

$$\begin{aligned}C_2D^2 &= C_1C_2 \cdot C_2C_3 \\ C_2D^2 &= r(1 - r) \\ C_2D &= \sqrt{r(1 - r)} \\ C_2D &= \sqrt{r - r^2}\end{aligned}$$

Proposição 3.5. *A área de um arbelo é igual à área do círculo de diâmetro C_2D .*

Demonstração. A área A do arbelo pode ser calculada pela área A_1 do semicírculo de diâmetro C_1C_3 subtraída da soma das áreas A_2 e A_3 dos semicírculos de diâmetros C_1C_2 e C_2C_3 , respectivamente. Ou seja, $A = A_1 - (A_2 + A_3)$.

Mas,

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi}{8}, \\
A_2 &= \frac{\pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi r^2}{8}, \\
A_3 &= \frac{\pi \cdot \left(\frac{1-r}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \cdot \frac{1-2r+r^2}{4}}{2} = \frac{\pi - 2\pi r + \pi r^2}{8}.
\end{aligned}$$

Logo a área do arbelo é:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\pi}{8} - \left[\frac{\pi r^2}{8} + \frac{\pi - 2\pi r + \pi r^2}{8} \right], \\
A &= \frac{\pi}{8} - \frac{\pi r^2}{8} - \frac{\pi}{8} + \frac{2\pi r}{8} - \frac{\pi r^2}{8}, \\
A &= -\frac{\pi r^2}{8} + \frac{2\pi r}{8} - \frac{\pi r^2}{8}, \\
A &= \frac{2\pi r}{8} - \frac{2\pi r^2}{8}, \\
A &= \frac{2\pi r - 2\pi r^2}{8}, \\
A &= \frac{\pi r - \pi r^2}{4}.
\end{aligned}$$

Agora, calculamos a área do círculo de diâmetro C_2D :

$$\begin{aligned}
A &= \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{r - r^2}}{2} \right)^2, \\
A &= \pi \cdot \frac{r - r^2}{4}, \\
A &= \frac{\pi r - \pi r^2}{4},
\end{aligned}$$

o que mostra que a área do arbelo é igual à área do círculo de diâmetro C_2D . \square

3.1 Arbelos gêmeos

A figura a seguir mostra os círculos gêmeos de Arquimedes no arbelo. Os gêmeos de Arquimedes são círculos interiores no arbelo que são tangentes ao segmento perpendicular $\overline{C_2D}$ ao segmento $\overline{C_1C_3}$ no ponto C_2 , que é a intersecção dos dois semicírculos menores.

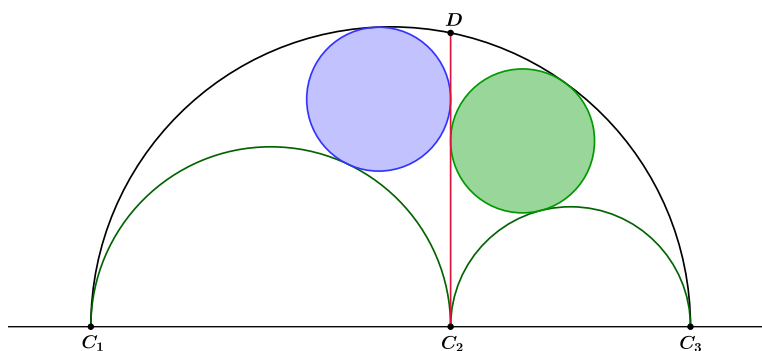


Figura 3.3: Círculos gêmeos de Arquimedes

Proposição 3.6. *Os círculos gêmeos de Arquimedes têm o mesmo raio.*

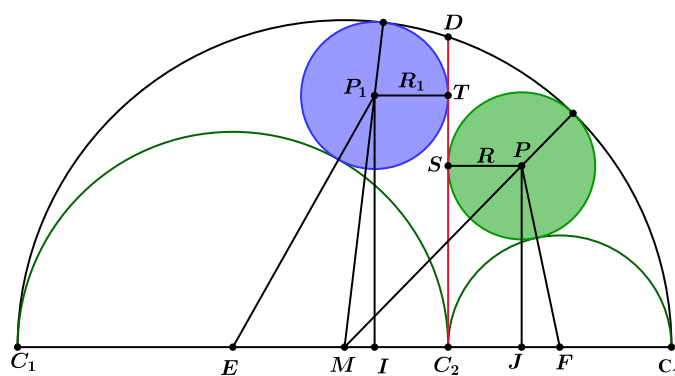


Figura 3.4: Círculos gêmeos de Arquimedes

Demonstração. Sejam $C_1C_3 = 1$, $C_1C_2 = r$, M o ponto médio de $\overline{C_1C_3}$, P o centro do círculo gêmeo da direita, J a projeção ortogonal de P sobre a reta $\overline{C_1C_3}$, F o ponto médio de $\overline{C_2C_3}$ e R o raio deste círculo (círculo da direita).

Temos que:

$$\begin{aligned} MP &= \frac{1}{2} - R, \\ MJ &= MC_3 - JF - FC_3 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1-r}{2} - R \right) - \left(\frac{1-r}{2} \right) = R + r - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} JP^2 &= MP^2 - MJ^2 = \\ &= \left(\frac{1}{2} - R \right)^2 - \left(R + r - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} - R + R^2 - \left(R^2 + r^2 + \frac{1}{4} + 2Rr - R - r \right) \end{aligned}$$

Então temos que:

$$JP^2 = r - r^2 - 2Rr. \quad (3.1)$$

Além disto,

$$\begin{aligned} FP &= \frac{1-r}{2} + R, \\ JF &= \frac{1-r}{2} - R. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} JP^2 &= FP^2 - JF^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{2} + R \right)^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{2} - R \right)^2 = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{r^2}{4} + R^2 - \frac{r}{2} + R - Rr - \left(\frac{1}{4} + \frac{r^2}{4} + R^2 - \frac{r}{2} - R + Rr \right) \end{aligned}$$

Assim,

$$JP^2 = 2R - 2Rr. \quad (3.2)$$

Igualando-se as equações (3.1) e (3.2), temos:

$$r - r^2 - 2Rr = 2R - 2Rr. \quad \text{Logo, } R = \frac{r(1-r)}{2}.$$

De maneira análoga podemos mostrar que o raio R_1 do círculo de Arquimedes da esquerda é $\frac{r(1-r)}{2}$. Se I denota a projeção do centro P_1 deste círculo sobre $\overleftrightarrow{C_1C_3}$, E o ponto médio de $\overline{C_1C_2}$. Temos que:

$$\begin{aligned} EP_1 &= \frac{r}{2} + R_1, \\ EI &= \frac{r}{2} - R_1. \end{aligned}$$

Logo:

$$IP_1^2 = EP_1^2 - EI^2 = \left(\frac{r}{2} + R_1\right)^2 - \left(\frac{r}{2} - R_1\right)^2 = 2rR_1 \quad (3.3)$$

Além disto

$$\begin{aligned} MP_1 &= \frac{1}{2} - R_1 \\ IM &= C_1M - C_1E - EI = \frac{1}{2} - \frac{r}{2} - \left(\frac{r}{2} - R_1\right) = \frac{1}{2} - r - R_1 \end{aligned}$$

Logo:

$$IP_1^2 = \left(\frac{1}{2} - R_1\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - r + R_1\right)^2 = 2rR_1 - 2R_1 - r^2 + r \quad (3.4)$$

Igualando-se as equações (3.3) e (3.4), temos:

$$2rR_1 - 2R_1 - r^2 + r = 2rR_1. \quad \text{Logo, } R_1 = \frac{r(1-r)}{2}.$$

Isto é $R_1 = R$ como se tratava provar. \square

Veremos agora como encontrar os centros dos círculos gêmeos de Arquimedes por meio de sua construção.

Construímos \overline{EN} e \overline{FG} mediatrizes dos segmentos $\overline{C_1C_2}$ e $\overline{C_2C_3}$, com E e F os pontos médios de $\overline{C_1C_2}$ e $\overline{C_2C_3}$, respectivamente, N é a intersecção da mediatriz do segmento $\overline{C_1C_2}$ com o semicírculo de diâmetro C_1C_2 e G é a intersecção da mediatriz do segmento $\overline{C_2C_3}$ com o semicírculo de diâmetro C_2C_3 . Pelo ponto N construímos o segmento \overline{NF} que intersecta $\overline{C_2D}$ no ponto H .

Pelo caso de semelhança AA, os triângulos $\triangle ENF$ e $\triangle C_2HF$ são semelhantes. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{C_2H}{r/2} &= \frac{(1-r)/2}{1/2} \\ \frac{r}{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{1-r} \\ C_2H &= \frac{r}{2} \cdot (1-r). \end{aligned}$$

Em seguida, construímos o círculo de centro em C_2 e raio C_2H de modo a intersectar a reta que passa por C_1C_3 nos pontos I e J .

Construímos as retas perpendiculares a $\overline{C_1C_3}$ passando por I e J .

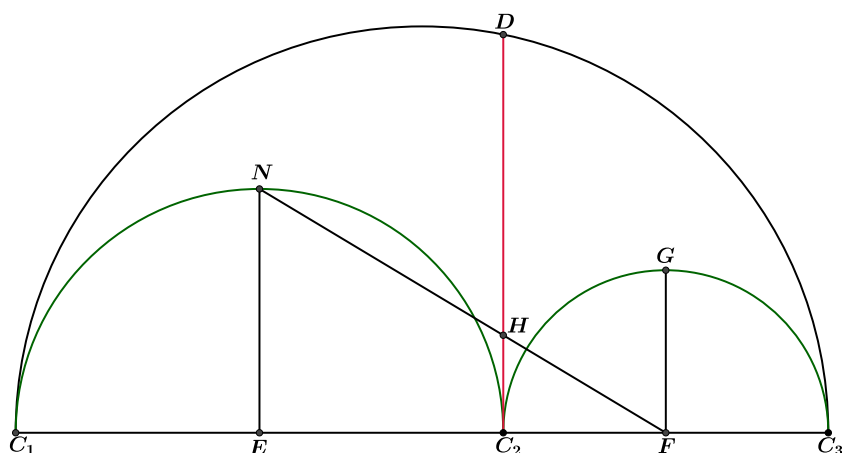


Figura 3.5: Construção dos círculos gêmeos de Arquimedes

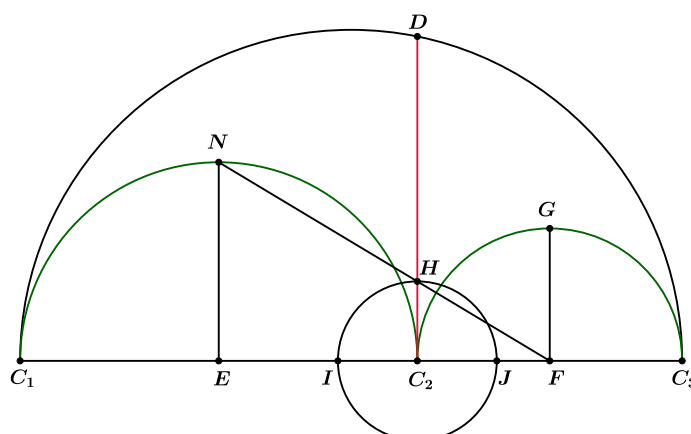


Figura 3.6: Construção dos círculos gêmeos de Arquimedes

Daí construímos os círculos centrados em F e E com respectivos raios FI e EJ . As intersecções das perpendiculares com estes círculos são os centros dos círculos gêmeos, L e P . Sendo o ponto L_1 a intersecção do segmento \overline{LE} com o semicírculo de raio EC_2 e P_1 a intersecção de \overline{PF} com o semicírculo de raio FC_2 , temos agora que os segmentos $\overline{LL_1}$ e $\overline{PP_1}$ são os raios dos círculos gêmeos de Arquimedes.

As coordenadas dos centros desses arbelos são expressas por:
 $L = (x_1, y_1) = \left(\frac{r}{2}(1+r), r\sqrt{1-r}\right)$ e $P = (x_2, y_2) = \left(\frac{r}{2}(3-r), (1-r)\sqrt{r}\right)$, pois como

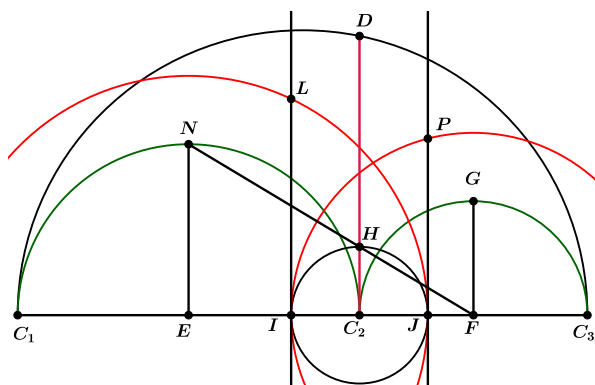


Figura 3.7: Construção dos círculos gêmeos de Arquimedes

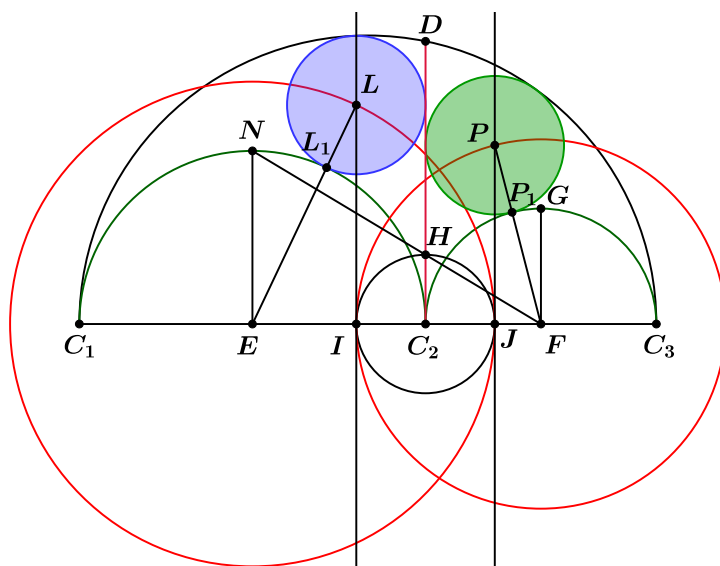


Figura 3.8: Construção dos círculos gêmeos de Arquimedes

$R = HC_2 = \frac{r}{2}(1 - r)$, temos:

$$x_1 = r - \frac{r}{2}(1 - r) = \frac{r}{2}(1 + r),$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
 IL^2 &= EL^2 - EI^2, \text{ mas,} \\
 EL &= \frac{r}{2} + \left(\frac{r-r^2}{2}\right) = r - \frac{r^2}{2} \text{ e} \\
 EI &= EC_2 - IC_2 = \frac{r}{2} - \left(\frac{r-r^2}{2}\right) = \frac{r^2}{2} \text{ então,} \\
 y_1^2 &= \left(r - \frac{r^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{r^2}{2}\right)^2, \\
 y_1^2 &= r^2 - r^3 + \frac{r^4}{4} - \frac{r^4}{4}, \\
 y_1^2 &= r^2(1-r), \\
 y_1 &= \sqrt{r^2(1-r)}, \\
 y_1 &= r\sqrt{1-r}.
 \end{aligned}$$

e

$$x_2 = r + \frac{r}{2}(1-r) = r + \frac{r}{2} - \frac{r^2}{2} = \frac{3r-r^2}{2} = \frac{r(3-r)}{2},$$

e

$$\begin{aligned}
 JP^2 &= FP^2 - JF^2, \text{ mas,} \\
 JF &= \left(\frac{1-r}{2}\right) - \left(\frac{r-r^2}{2}\right) = \frac{1}{2} - r + \frac{r^2}{2} \text{ e,} \\
 FP &= \left(\frac{1-r}{2}\right) + \left(\frac{r-r^2}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{r^2}{2} \text{ então,} \\
 y_2^2 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{r^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - r + \frac{r^2}{2}\right)^2, \\
 y_2^2 &= \frac{1}{4} - \frac{r^2}{4} + \frac{r^4}{4} - \frac{1}{4} - r^2 - \frac{r^4}{4} + r - \frac{r^2}{2} + r^3, \\
 y_2^2 &= -2r^2 + r + r^3, \\
 y_2^2 &= r(r^2 - 2r + 1), \\
 y_2^2 &= r(1-r)^2, \\
 y_2 &= \sqrt{r(1-r)^2}, \\
 y_2 &= (1-r)\sqrt{r}.
 \end{aligned}$$

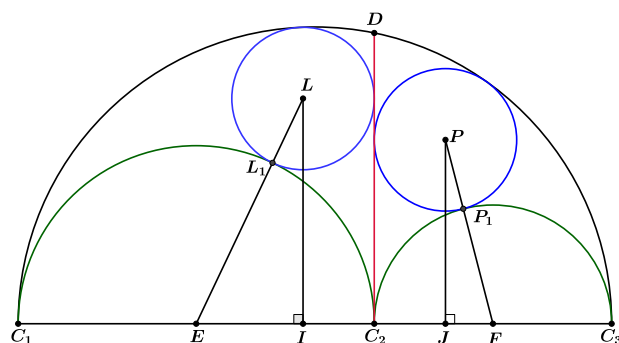


Figura 3.9: Coordenadas dos centros dos círculos gêmeos de Arquimedes

3.2 Cadeia de Pappus

No livro IV de sua coleção, Pappus estende o estudo que Arquimedes fez sobre os arbelos. Na figura seguinte vemos os círculos tangentes aos semicírculos de diâmetros C_1C_3 , C_1C_2 e C_2C_3 . O conjunto de todos estes círculos é conhecido como *Cadeia de Pappus*.

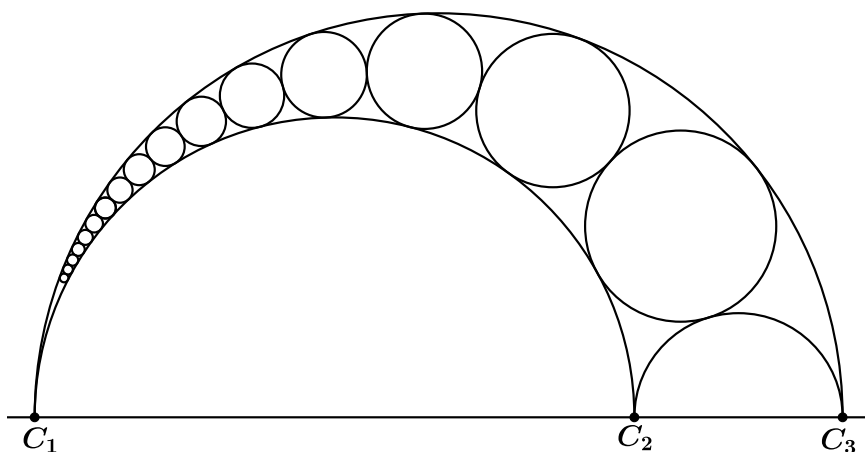


Figura 3.10: Cadeia de Pappus.

Vamos agora mostrar que os centros destes círculos descrevem uma elipse de focos que estão contidos na reta que passa por C_1C_3 .

Se considerarmos apenas o semicírculo maior de centro D e um semicírculo menor, de centro E , podemos provar que o centro H de um círculo tangente a ambos pertence a uma elipse de focos D e E . De fato sejam G e I os pontos dos semicírculos de centros D e E , respectivamente, tais que H está entre D e G , e I está entre E e H .

Demonstração. Sejam

$$\begin{aligned} DC_1 &= DC_3 = DG = R, \\ EC_1 &= EC_2 = EI = r_1, \\ FC_2 &= FC_3 = r_2, \\ HI &= HG = r, \\ HE &= r_1 + r, \\ HD &= R - r, \\ 2R &= 2r_1 + 2r_2, \\ HE + HD &= R + r_1 = r_1 + r_2 + r_1 = 2r_1 + r_2 = C_1F. \end{aligned}$$

Portanto o ponto H pertence a uma elipse de focos E e D cujos vértices são os pontos C_1 e F (ponto médio de $\overline{C_2C_3}$). \square

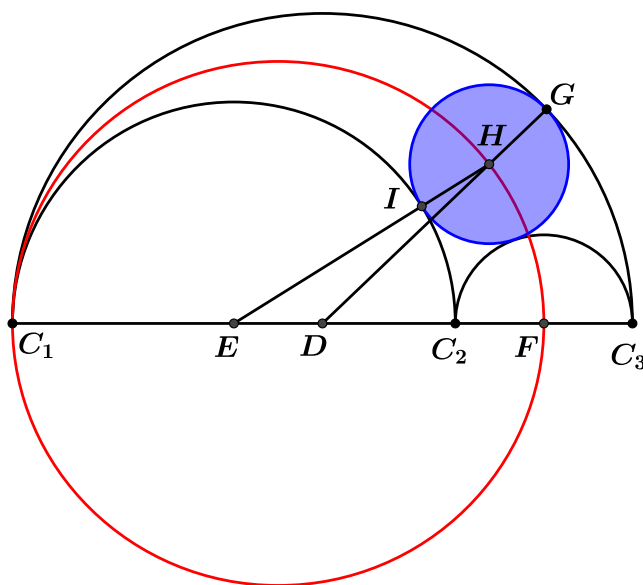


Figura 3.11: Os centros dos círculos da cadeia de Pappus.

Veremos a seguir como construir a cadeia de Pappus nos arbelos.

- Sobre uma reta r , tomamos 3 pontos distintos e colineares C_1, C_2 e C_3 , com C_2 entre C_1 e C_3 , e os semicírculos de diâmetros C_1C_2, C_1C_3 e C_2C_3 todos de um mesmo lado da reta r .
- Depois construímos um círculo de inversão I de centro C_1 e raio C_1C_3 .
- A inversão do círculo de diâmetro C_1C_2 em relação a I é a reta s' (perpendicular a r e que passa por C_2) e a inversão do círculo de diâmetro C_1C_3 em relação a I é a reta t' (uma vez que passam pelo centro de inversão, e a inversão do círculo de diâmetro C_2C_3 é o círculo K'_0 de centro O' .
- Pelo ponto O' construímos uma reta perpendicular a C_1C_3 que intersecta K'_0 em A .
- Para construir o próximo círculo invertemos o círculo K'_0 em relação ao ponto A obtendo-se assim o círculo K'_1 .
- Para construir os demais círculos seguimos procedimento anterior.
- Agora para construir os círculos da cadeia basta invertermos os círculos K'_1, K'_2, \dots, K'_3 em relação a I para encontrar os círculos K_1, K_2, \dots, K_n .

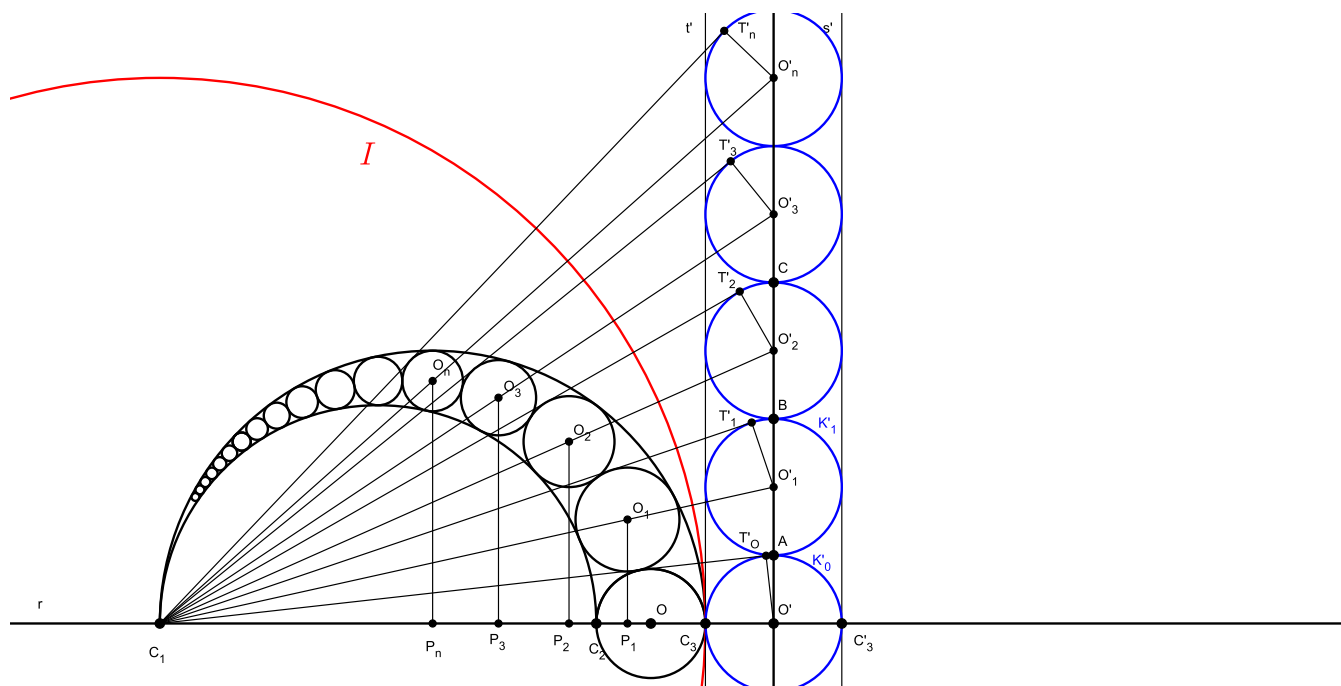


Figura 3.12: Construção da cadeia de Pappus usando inversão.

Observação 3.1. A propriedade da tangência é preservada por inversão.

Teorema 3.1. Sejam C_1, C_2 e C_3 três pontos colineares tais que C_2 está entre C_1 e C_3 e sejam os círculos de diâmetros C_1C_2, C_1C_3 e C_2C_3 . Sejam O_0, O_1, \dots, O_n os centros dos círculos K_0, K_1, \dots, K_n da Cadeia de Pappus, construída na Proposição anterior. Se chamarmos de r_n o raio de K_n e h_n a distância de O_n a $\overleftrightarrow{C_1C_3}$, então $h_n = 2nr_n$.

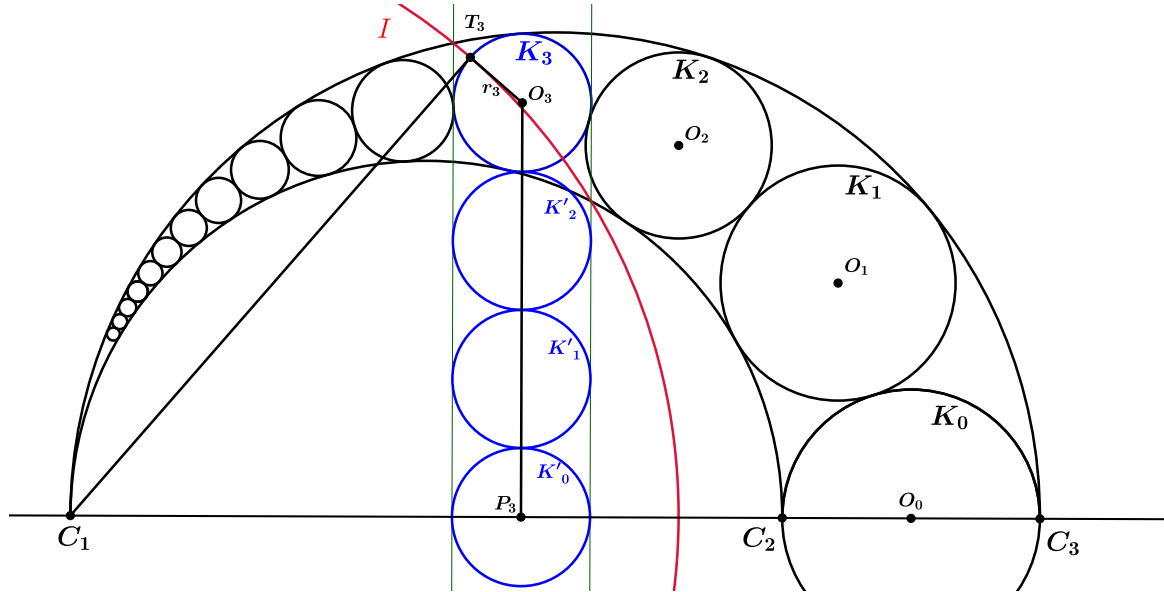


Figura 3.13: Distância do centro da cadeia de Pappus até a reta suporte.

Demonstração. 1. Consideremos a inversão relativa ao círculo de centro C_1 e raio O_nT_n , em que T_n é o ponto de tangência ao semicírculo K_n da semireta de origem C_1 .

2. Fazemos isso, porque C_1T_n é perpendicular a O_nT_n , sendo C_1T_n tangente a K_n e O_nT_n tangente ao círculo de inversão e, por isso, K_n é ortogonal ao círculo de inversão. Os círculos ortogonais ao círculo de inversão são inversos de si mesmos.
3. Os inversos dos círculos de diâmetros C_1C_2 e C_1C_3 são retas, pois os círculos passam por C_1 , que é centro da inversão. Essas retas ficam definidas pelos pontos de intersecção desses círculos com o círculo de inversão.
4. O inverso do círculo K_n de centro O_n é um círculo tangente às duas retas (determinadas como inversos dos círculos de diâmetros C_1C_2 e C_1C_3) de centro P_n .
5. Os inversos K'_i , $0 \leq i \leq n$ são tangentes a estas retas e têm o mesmo raio O_nT_n .

6. $O_n P_n$ é igual à soma de um raio K'_0 e outro para $K'_n = K_n$ além de $2(n-1)r_n$ correspondentes aos diâmetros de $n-1$ círculos iguais a K_n , K'_i , $1 \leq i \leq n-1$:
 $2r_n + 2(n-1)r_n = 2nr_n$.

□

3.3 Círculo de Bankoff

Em meio aos círculos individuais de Arquimedes, há um outro círculo dentro dos arbelos que é congruente aos círculos individuais. É o chamado círculo de Bankoff. Leon Bankoff, dentista em Beverly Hills e também um matemático, encontrou-o e escreveu um artigo chamado “Os círculos gêmeos de Arquimedes são mesmos gêmeos?”

O Círculo de Bankoff é formado a partir do arbelo. Primeiramente, construímos um círculo K_1 tangente a cada semicírculo do arbelo, como na construção da Cadeia de Pappus. O Círculo de Bankoff é o círculo que passa pelo ponto de tangência dos semicírculos menores do arbelo, e pelos pontos de tangência de K_1 com os semicírculos menores do arbelo.

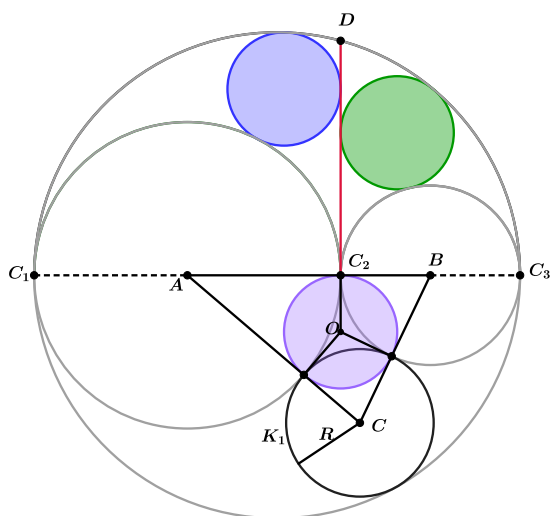


Figura 3.14: Círculo de Bankoff.

Proposição 3.7. *O círculo de Bankoff e os círculos gêmeos de Arquimedes são idênticos, ou seja, seu raio é $\frac{r}{2} \cdot (1-r)$.*

Demonstração. Consideremos $C_1C_3 = 1$, $C_1C_2 = r$ e x o raio do círculo de Bankoff. Primeiro, vamos calcular a área do triângulo $\triangle ABC$ representado na figura (3.14), que vamos indicar por A . Temos então que:

$$\begin{aligned} AB &= \frac{1}{2}, \\ AC &= \frac{r}{2} + R, \\ BC &= \frac{1-r}{2} + R. \end{aligned}$$

De acordo com a proposição de Pappus, a altura de C relativa a base AB é duas vezes o raio do círculo K , ou seja, a altura h será igual a $2R$.

Calculando-se a área do triângulo $\triangle ABC$ temos:

$$A = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2R}{2} = \frac{R}{2}. \quad (3.5)$$

Logo, de acordo com a fórmula de Heron, sabemos que a área de um triângulo de lados a , b e c é $A = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$, onde s é o semiperímetro do triângulo.

Seja agora:

$$\begin{aligned} a &= BC = \frac{1-r}{2} + R, \\ b &= AC = \frac{r}{2} + R, \\ c &= AB = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} s &= \frac{a+b+c}{2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{r}{2} + R + \frac{1-r}{2}}{2} = \frac{1}{2} + R, \\ s-a &= \frac{1}{2} + R - \frac{1-r}{2} + R = \frac{r}{2}, \\ s-b &= \frac{1}{2} + R - \frac{r}{2} + R = \frac{1-r}{2}, \\ s-c &= \frac{1}{2} + R - \frac{1}{2} = R. \end{aligned}$$

Então pela fórmula de Heron a área do triângulo $\triangle ABC$ será dada por:

$$A = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + R\right) \cdot \left(\frac{1-r}{2}\right) \cdot \left(\frac{r}{2}\right) \cdot (R)} = \sqrt{\left(\frac{R}{8} \cdot r \cdot (1-r) \cdot (1+2R)\right)} \quad (3.6)$$

Sabemos ainda que a área A do triângulo $\triangle ABC$ é pode ser encontrada somando-se as áreas dos triângulos $\triangle AOB$, $\triangle AOC$ e $\triangle BOC$, que designaremos por A_1, A_2 e A_3 respectivamente e, lembrando que x é o raio do círculo de Bankoff, temos que:

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 + A_3, \\ A &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{r}{2} + R\right) \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1-r}{2} + R\right) \cdot x, \\ A &= \frac{1}{2} \cdot x \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{2} + R + \frac{1}{2} - \frac{r}{2} + R\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$A = \frac{x}{2} \cdot (1 + 2R) \tag{3.7}$$

Por (3.5), (3.6) e (3.7), e usando-se que $A = \frac{A^2}{A}$, então

$$\begin{aligned} \frac{R}{2} &= \frac{\left(\sqrt{\left(\frac{R}{8} \cdot r \cdot (1-r) \cdot (1+2R)\right)}\right)^2}{\frac{x}{2} \cdot (1+2R)}, \\ \frac{R}{2} &= \frac{\frac{R}{8} \cdot r \cdot (1-r) \cdot (1+2R)}{\frac{x}{2} \cdot (1+2R)}, \\ \frac{R}{2} &= \frac{\frac{R}{4} \cdot r \cdot (1-r)}{x}, \\ 2 &= \frac{r(1-r)}{x}, \\ x &= \frac{r(1-r)}{2}. \end{aligned}$$

□

Capítulo 4

Aplicações

Neste capítulo, apresentaremos exemplos de construções geométricas, que podem ser feitas utilizando-se geometria dinâmica, no caso, o geogebra. Tais construções também poderão ser realizadas utilizando-se de régua e compasso.

4.1 Exemplos

Exemplo 4.1. *Construção 1.*

- Construa uma reta r ;
- Marque os respectivos pontos A , B e C sobre r , de maneira que o ponto B fique entre os pontos A e C e que $AC = 1$, $AB = \frac{2}{3}$ e $BC = \frac{1}{3}$;
- Construa um semicírculo de diâmetro AB ;
- Construa agora os semicírculos AC e BC de modo que fiquem todos do mesmo lado da reta r , no qual está o semicírculo de diâmetro AB .

Solução:

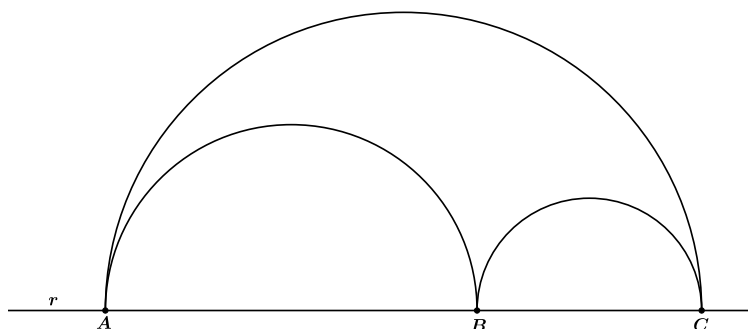


Figura 4.1: Visualização da primeira construção.

Exemplo 4.2. *Em relação ao exemplo anterior,*

1. Calcule o comprimento dos semicírculos AC , AB e BC . Verifique a medida do comprimento exterior e interior. O que você observa?
2. Calcule a área da região interna ao semicírculo AC e externa aos semicírculos AB e BC .

Solução:

1. Seja α o comprimento do semicírculo de diâmetro $AC = 1$, β o comprimento do semicírculo de diâmetro $AB = \frac{2}{3}$ e γ o comprimento do semicírculo de diâmetro $BC = \frac{1}{3}$.
Logo, temos que:

$$\alpha = \frac{2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\beta = \frac{2 \cdot \pi \cdot \frac{2}{6}}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\gamma = \frac{2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{6}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

Então:

$$\alpha = \beta + \gamma.$$

2. A área da região pedida será a área do semicírculo de diâmetro AC menos a soma das áreas do semicírculo de diâmetro AB com o semicírculo de diâmetro BC , ou seja:

$$\begin{aligned} A &= A_1 - (A_2 + A_3) \\ A_1 &= \frac{\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi}{8} \\ A_2 &= \frac{\pi \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2}{2} = \frac{\pi}{18} \\ A_3 &= \frac{\pi \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2}{2} = \frac{\pi}{72} \\ A &= \frac{\pi}{8} - \left[\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{72} \right] \\ A &= \frac{\pi}{18}. \end{aligned}$$

Exemplo 4.3. *Construção 2.*

- Construa uma reta r ;
- Marque os respectivos pontos A , B e C sobre r , de maneira que o ponto B fique entre os pontos A e C e que $AC = 1$, $AB = \frac{2}{3}$ e $BC = \frac{1}{3}$;
- Construa um semicírculo de diâmetro AB ;
- Construa agora os semicírculos AC e BC de modo que fiquem todos do mesmo lado da reta r , no qual está o semicírculo de diâmetro AB .
- Pelo ponto B construa uma reta t perpendicular a reta r ;
- Marque o ponto D na intersecção da reta t com o semicírculo AB ;
- Construa um círculo de diâmetro BD .

Solução:

Exemplo 4.4. *Em relação ao exemplo anterior,*

1. Quanto mede o comprimento do segmento \overline{BD} ?

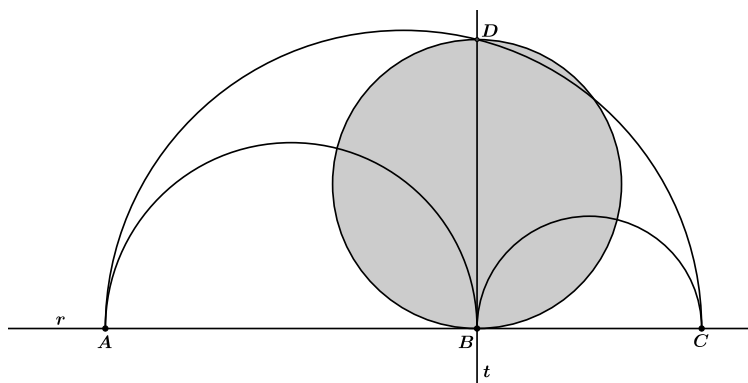


Figura 4.2: Visualização da segunda construção.

2. qual é a área do círculo de diâmetro BD ?
3. O que se pode concluir em relação a área desse círculo e a área da região obtida no exercício anterior?

Solução:

1. Sabemos que:

$$AD^2 + CD^2 = 1 \quad (4.1)$$

$$AD^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + BD^2 \quad (4.2)$$

$$CD^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + BD^2 \quad (4.3)$$

Substituindo-se (4.2) e (4.3) em (4.1), temos:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + BD^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + BD^2 = 1$$

$$2BD^2 + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = 1$$

$$2BD^2 = \frac{4}{9}$$

$$BD^2 = \frac{2}{9}$$

$$BD = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

2. A área do círculo de diâmetro BD será dada por:

$$A = \pi \cdot \left(\frac{BD}{2}\right)^2$$

$$A = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2$$

$$A = \frac{\pi}{18}$$

3. Podemos verificar que as áreas são iguais.

Exemplo 4.5. *Sejam r uma reta e dois pontos A e B ambos de um mesmo lado da reta, não pertencentes a r . Construa um círculo passando pelos pontos A e B que seja tangente a reta r .*

Supondo o problema resolvido.

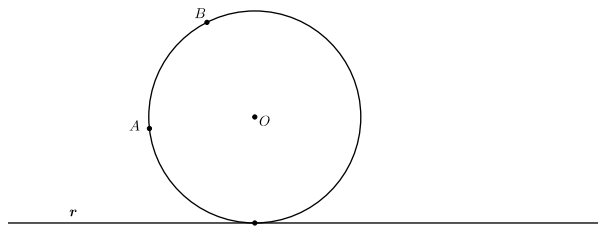


Figura 4.3: Visualização de como ficaria depois de resolvido.

Escolhemos o ponto $A = O$ para ser o centro de inversão, de modo que teremos um círculo C de centro A . Sabemos que a inversão de uma reta r que não passa pelo centro de inversão é um círculo r' que passa pelo centro de inversão.

Agora invertemos o ponto B em relação ao círculo C para obter o ponto B' . Pelo ponto B' traçamos as retas t e s tangentes ao círculo r' , pois como a solução procurada deve passar por B e deve tangenciar r então as retas que passam por B' devem tangenciar r' . Ao invertermos as retas s e t em relação a C teremos os círculos s' e t' passando pelo centro $A = O$ de inversão. As soluções são s' e t' .

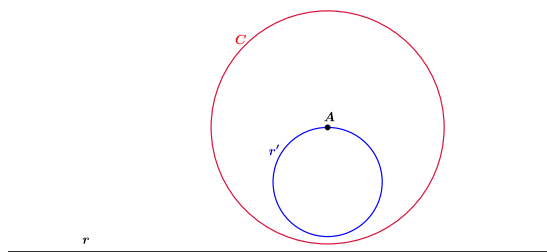


Figura 4.4: Invertendo r em relação a C .

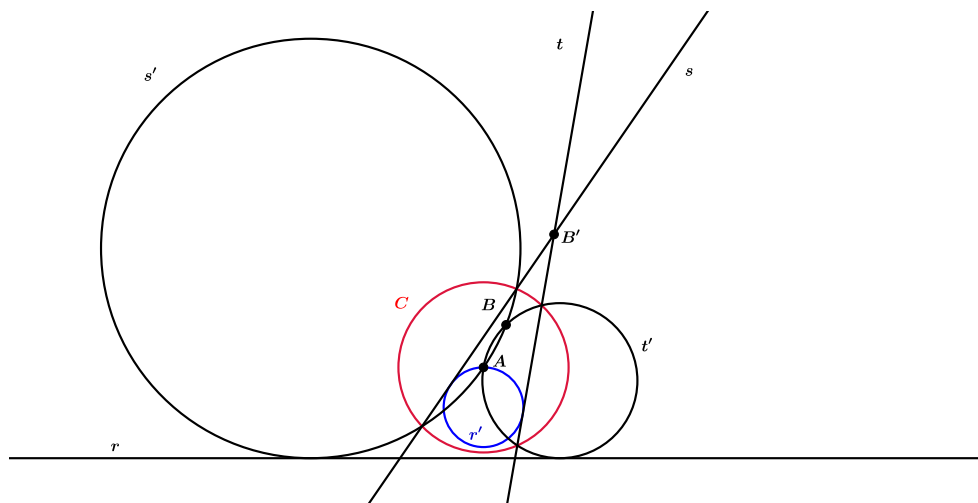


Figura 4.5: Solução.

Referências Bibliográficas

- [1] BANKOFF, Leon. *Are the twin circles of Arquimedes really twins?*, Mathematics Magazine. Vol. 47.
- [2] BOAS, Harold P. *Reflections on the Arbelos*, The American Mathematical Monthly - Vol. 113, 2006. P. 236 - 249
Disponível em :<<http://www.math.tamu.edu/~harold.boas/preprints/arbelos.pdf>>. Acesso em 30 de julho de 2014.
- [3] BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. Trad. Elza F. Gomide. 2ª. ed. São Paulo: Edgar Blücher, 2001.
- [4] MORTIMER, Brian. *The Geometry of The Arbelos*. Disponível em: <http://schule.bayernport.com/arbelos/arbelos_06.pdf>. Acesso em: 30 de julho de 2014.
- [5] MUNARETTO, Ana C. Corrêa; SIQUEIRA, Paulo Henrique. *Solução do problema de Apolônio utilizando geometria inversiva*. Disponível em:<http://www.degraf.ufpr.br/docentes/paulo/publicacoes_arquivos/EPIST20.pdf>
- [6] SHINE, Carlos Yuzo. *Homotetias, Composição de Homotetias e o Problema 6 da IMO 2008*. Revista Eureka. n° 29.
Disponível em: <http://www.obm.org.br/opencms/revista_eureka/>. Acesso em: 30 de julho de 2014.