UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado

JOSÉ LUIZ LOPES

Aplicando o Teorema de Ptolomeu a alunos da rede pública

Santo André

2014

Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado

JOSÉ LUIZ LOPES

Aplicando o Teorema de Ptolomeu a alunos da rede pública

Trabalho apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. André Ricardo Oliveira da Fonseca.

Santo André

2014

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Rua Abolição, s/nº – Vila São Pedro – Santo André – SP
CEP 09210-180 · Fone: (11) 4996-0017
profmat@ufabc.edu.br

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato José Luiz Lopes, realizada em 27 de agosto de 2014:

André Fonseca

Prof.(a) Dr.(a) **André Ricardo Oliveira da Fonseca** (UFABC) – Presidente

Márcio Fabiano da Silva

Prof.(a) Dr.(a) **Márcio Fabiano da Silva** (UFABC) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Paulo Henrique Trentin** (FEI) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Armando Caputi** (UFABC) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Birajara Soares Machado** (INCE-IIEP) – Membro Suplente

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, 10 de outubro de 2011.

Assinatura do autor: ____________________

Assinatura do orientador: ____________________

Dedico este trabalho ao meu orientador e à banca examinadora por todo apoio, compreensão e contribuição que me prestaram.

Agradecimentos

Ao Professor Doutor André Ricardo Oliveira da Fonseca por sua orientação competente, sua compreensão, amizade, dedicação, críticas e incentivo, dando-me a oportunidade valiosa de trabalharmos juntos.

Aos Professores Doutores da banca examinadora, pelas valiosas contribuições e sugestões para a concretização dessa dissertação.

À CAPES, pelo apoio financeiro, pelo qual não teria sido possível participar do curso e, assim, poder compartilhar com os alunos da escola pública maior conhecimento.

À Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, pela criação do curso Profmat, que possibilitou novos rumos para minha carreira profissional.

À coordenação do curso Profmat, inicialmente com o Professor Doutor Rodney Bassanezi e, posteriormente, com o Professor Doutor Rafael Grisi que não mediram esforços à realização do curso.

Aos professores doutores do Programa de Pós-graduação Profmat, da Universidade Federal do ABC, nas disciplinas ministradas por André Ricardo, Antonio Faleiros, Armando Caputi, João Carlos, Márcio Fabiano, Rafael Grisi e Sinuê Lodovici, por tudo que me ensinaram.

Ao Professor Mestre Francisco Calicchio pela revisão gramatical e ortográfica do trabalho e na orientação na tradução de textos.

À minha esposa Sandra, meus filhos Rodrigo e Diego (in memoriam), pelo apoio e compreensão dos momentos que abdiquei do convívio familiar para a dedicação aos estudos.

Resumo

Todo saber, por mais antigo que seja, contribui para o avanço dos paradigmas, na busca de novos saberes que aprimorem a sociedade. As descobertas de Ptolomeu não são exceção, merecendo nota ainda hoje. Esta pesquisa cuidou de relevar a sua contribuição no ensino de leis da matemática, as quais se pode reputar de importância para o aprendizado em nível de Ensino Médio, atualmente. Procurou-se configurar o estudo na forma de uma ferramenta de consulta aos educadores, resgatando o ensino do seu teorema em duas aulas, fornecendo material necessário aos professores de área para tanto bem como, e também, fornecendo uma resenha da sua vida e obra, como pesquisador e sujeito histórico que foi. Ao facultar um novo caminho aos educadores, já há um resultado o qual, por si só, justifica esta pesquisa. Tratou-se de um trabalho de natureza prática, concebido pela elaboração de um capítulo sobre a importância de Ptolomeu, pela apresentação e demonstração de seu teorema em algumas aplicações, no contexto do mundo matemático. Partiu da premissa de que ensinar um saber, e contextualizá-lo no eixo da história do homem, é uma condição de verdade importante e inegável para o progresso das ciências, em qualquer área do saber, em qualquer tempo e momento.

Palavras chave: Ptolomeu, quadrilátero, teorema.

Abstract

Every knowledge, as older it can be, helps for de advancement of the paradigms, in searching of new discoveries that can improve the society. The ones of Ptolomeu are not exception, and may be noticed till nowadays. This research has taken care of reliving the contribution in the teaching the mathematical laws, which can be reputed the importance for the learning in Medium Level, now. It was tried to configure the studies in the shape of a consultation tool for educators, rescuing the teaching of his theorem in two classes, giving necessary subject to the teachers of this area for this, and also and too, giving a report of his life and works, as a researcher and a historical fellow he was. On giving a new way for educators, there is a result that, by itself, justifies this research. It was a practical work, conceived by the elaboration of a chapter about the importance of Ptolomeu, by the presentation and the proof of his theorem in some applications, in the context of the mathematical world. It began from the hypothesis that teaching some knowledge and putting it in the context of the axis of the human history is a important truth condition and not deniable for the sciences progress, in all knowing area, and in all time and moment.

Keywords: Ptolomeu, quadrilateral (foursided), theorem.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

Ao longo da história do homem, muitos pensadores forneceram contribuições para o avanço do conhecimento científico. O sábio alexandrino Ptolomeu foi um deles. Portanto, seu nome, sua vida e suas descobertas não devem ser esquecidos, já que o homem é um ser histórico cuja herança não pode jamais ser olvidada.

Esta pesquisa encontra-se na área da Educação, mais especificamente na área de Matemática, e pretendeu resgatar a contribuição histórica do matemático Ptolomeu, para o ensino de leis desta disciplina, as quais se pode reputar, de suma importância para o aprendizado em nível de Ensino Médio.

Para tanto, tratou o presente estudo, de maneira prática, no molde de uma ferramenta de consulta aos educadores, resgatar o ensino do Teorema de Ptolomeu em duas aulas, fornecendo o material necessário aos professores de área para tanto.

Também, por outro lado, cuidou de resgatar a vida e obra de Ptolomeu, como pesquisador, mas também como sujeito histórico, inserido em um tempo e lugar, cuja informação também poderá servir de introdução sobre o tema tratado, tornando-se mais interessante ao aluno, ao conjugar, de forma multidisciplinar, um saber histórico e conhecimento matemático.

O objetivo do mesmo foi o de, exatamente, fornecer um ferramental aos educadores para, em curto intervalo de tempo, ensinar o Teorema de Ptolomeu, em sala-de-aula, a alunos do Ensino Médio, resgatando assim uma contribuição importante da história do homem.

Justifica-se o presente trabalho por, não apenas facultar um importante conhecimento que deve fazer parte do saber enciclopédico do estudante para sua vida estudantil e profissional, bem como resgatar a memória histórica no contexto das ciências matemáticas, no qual Ptolomeu ocupa importante espaço.

Tratou-se o estudo em questão de um trabalho de natureza prática, o qual partiu da premissa básica de que ensinar determinado saber e contextualizá-lo no eixo da história do homem é uma condição de verdade importante e inegável, para o progresso das ciências, no tempo futuro.

Para tanto tratamos, então, de tecer um capítulo onde se observa um apanhado histórico para posicionamento da importância de Ptolomeu à cultura humana. Num segundo momento, tratou-se de apresentar a demonstração do seu teorema e, na sequência, foram efetuadas a demonstração do mesmo em algumas aplicações, no contexto do mundo matemático.

Capítulo 2

Ptolomeu, A Grécia, Seu Tempo, Sua Contribuição

2.1 Justificativa para uma biografia

Este brevíssimo capítulo não pretende configurar um estudo histórico sobre a vida e a obra de Ptolomeu; isto poderia ser tratado em outro estudo, de maior amplitude, sob este ângulo de enfoque, e pertencer à cadeira de História da Matemática, ou mesmo, a alguma outra disciplina externa às ciências matemáticas, porém de âmbito interdisciplinar.

Não obstante, entende-se a importância do mesmo porque não se tolera, dentro de um contexto de pós-modernidade, ignorar-se a atividade humana, de um gênio do porte de Ptolomeu, sem concebê-lo como um sujeito histórico, situado no tempo e no espaço.

Por esta razão, justifica-se o presente apêndice, o qual tenciona resgatar as origens, algumas particularidades e a contribuição deste ilustre grego, não apenas para o campo da Matemática, porém, mais em especial à Trigonometria, mas também para outras áreas totalmente distintas, onde a utilização e aplicação de conceitos desta disciplina, também possibilitou a expansão do conhecimento científico.

2.2 Ptolomeu, A Grécia e o Seu Tempo

Claudius Ptolomeaus (figura: 2.1(b)), mais conhecido por Ptolomeu, de acordo com as biografias pesquisadas[1], nasceu por volta do Século II d.C., provavelmente em Ptolemaida, na região de Thebayda (Alto Egito) e viveu, praticamente toda sua existência, em Alexandria, até a sua morte, em Canope, próximo àquela cidade. Isto é tudo o que se sabe a respeito de sua vida, sem se mencionar a sua obra e atividades, ao largo de sua existência.

Ele viveu muitíssimo tempo após outro grande nome da Grécia Antiga, Pitágoras (540 a.C.) (figura: 2.1 (a)), e muito tempo antes de outro ilustre, Diofanto (250 d.C.) (figura: 2.1 (c)), também chamado de Diofanto de Alexandria, de importância enorme para o desenvolvimento da álgebra e para a teoria dos números, cuja origem grega pode ser questionada, mas figura na Antologia grega, com um epigrama que se propõe a dar detalhes de sua vida. Após esta digressão, retornemos a Ptolomeu.

(*a*) (*b*) (*c*)

Figura 2.1: Ilustrações de (a)Pitágoras; (b)Ptolomeu; (c)Diofanto

Fonte: < *http : //www − history.mcs.st − andrews.ac.uk/Indexes/_500_AD_pics.html* >
Acesso em: 20 *dez*. 2013.

É certo que, pelo seu período de vida, ele esteve em contato, se não diretamente, próximo ao trabalho e estudos de Hiparco[2] e Menelau[3], mais principalmente.

[1]Cfe. Enc. e Dic. Internacional, v. XVI, p. 9399.

[2]Tido por mais famoso astrônomo da Antiguidade.

[3]Teorema de Menelau: “Se uma transversal arbitrária corta os lados AB, BC e CA de um triângulo qualquer, respectivamente nos pontos P, Q e R, então $AP \cdot BQ \cdot CR = BP \cdot CQ \cdot AR$.” [12]

2.3 As Incursões de Ptolomeu

Consta que ele atuou em várias áreas distintas de saber, as quais serão aqui abordadas de forma muito breve, posto que o estudo em questão não objetiva traçar um tratado histórico do mesmo.

2.3.1 Na Geografia

A obra que se reputa de sua autoria, Geographia, é de tal importância para o mundo europeu que, durante o século XVI, foi impressa muitas vezes. De acordo com a Encyclopaedia e Diccionario Internacional, Vol. XVI, p. 9399: *"Os seus mappas, organisados na mesma epocha, fornecem para a historia das descobertas as indicações mais preciosas."* Não obstante, mais adiante, lê-se na mesma obra a observação de que *"... seria, todavia, um erro julgar que, de todos os escriptores gregos, Ptolomeu foi o que melhor comprehendeu o valor litterario e scientifico da geographia; apesar da sua erudição ou, antes, por causa de ella, foi unicamente um nomennador preciso e um cartógrapho exacto."*

Estes comentários, obviamente, retiram o suposto valor do matemático nesta área. Todavia, é preciso ponderar que cada fonte documental pode trazer, em seu interior, marcas ideológicas que defendem certas escolas, em detrimento de outras, o que é facilmente observável no modelo educacional brasileiro, que privilegia a Escola francesa, em detrimento da Escola britânica. Não fora isto, o grande pensador para as ciências talvez não fora Dèscartes, mas o inglês Francis Bacon, cuja contribuição ao modelo saxão, permite que seja chamado de pai da moderna tecnologia. Obviamente, não se pode afirmar que este ou aquele estudioso é mais importante. Sem a matemática cartesiana, ou sem a metodologia de análise baconiana, o mundo continuaria na época das trevas, ao sabor dos casuísmos da doutrina escolástica e das forças da natureza.

2.3.2 Na Astronomia

No Dicionário Enciclopédico Brasileiro Ilustrado, p. 3370, lê-se que " *...Sua Geografia contém uma estimativa sobre o tamanho da Terra, a descrição de sua superfície então conhecida, inclusive a fixação de localidades através da longitude e da latitude."* Por outro lado, Ptolomeu guiava-se pela teoria geocêntrica, segundo a qual o Sol, os planetas e as estrelas girariam em torno da Terra, um ponto fixo no centro do Universo. A despeito de tal, o sistema de localização, através de longitude e latitude é uma contribuição, sem dúvida, de certa importância, principalmente, para a navegação, não somente de sua época, mas também à época do Renascimento europeu.

Não obstante, aqui também não há uma documentação específica que ateste que ele, de fato foi o precursor de tais parâmetros. É preciso observar, numa análise de obras da Antiguidade que, muitas vezes, as informações e comentários são conflitantes, em relação ao cotejamento de dois ou mais documentos relativos à época. De qualquer maneira, isto é corroborado pela obra contemporânea, Episódios da História Antiga da Matemática, ABBOE A., p. 127: *"Seu Almagesto desempenha o mesmo na Astronomia Matemática que os Elementos de Euclides e as Cônicas de Apolônio em seus respectivos assuntos; ..."*

Este estudo de Astronomia encontra-se dentro de sua obra maior Almagesto, título em árabe, cujo nome original grego seria Megalê Syntaxis tés Astronomias, o que, por si só, evidencia o seu interesse, também, por este campo de estudos.

Não obstante, cf. ABBOE A. in op. cit., é fato que o próprio Ptolomeu reconhecia o que era mérito seu, daquilo que fora herdado da astronomia pré-ptolomaica, esta, um tesouro *"mais rico e mais firme do que o da matemática pré-euclidiana"* (sic).

Uma outra questão importante a ser assinalada aqui é que o modelo ptolomaico é totalmente geocêntrico, necessitando conceber o modelo dos chamados epiciclos para explicar o movimento aparente planetas entre as estrelas fixas[4]. O modelo heliocêntrico estava muito longe, ainda, de ser postulado, portanto.

[4] Cf GARBI, G. Gilberto, apud A Rainha das Ciências, Ed. Livraria da Física, p. 94.

2.3.3 Na Astrologia

Consta que Ptolomeu também se debruçou na área da Astrologia. Naquele tempo, a ciência da Astronomia, era tal como o estudo da Astrologia, considerada uma 'ciência rigorosa', onde a conjuntura dos astros determinava o comportamento do homem, sendo tidas como de igual importância.

Uma vez mais, e de acordo com o Dic. Enciclopédico Brasileiro Ilustrado, Ptolomeu é autor da obra *Tetrabiblos*[5], a qual versa sobre Astrologia, o que também é referendado na Enciclopédia e Dic. Internacional, obras antigas de referência para este capítulo.

2.3.4 Na Música

Na música, também, Ptolomeu forneceu a sua contribuição com a obra que traz o sugestivo nome de Harmônica, com a teoria matemática de sons utilizados na música grega[6]. Mas é um fato sabido que as proporções e estudos das notas musicais já eram estudadas há tempo. É recorrente a menção de Pitágoras nesta área, como um dos maiores estudiosos que contribuiu para a formulação da escala em forma de 'pentátono'[7], ao seu tempo.

É pertinente relevar o aspecto que, também aqui, o elemento 'corda' estará presente para a concepção das teorias de correspondência entre notas, mas será a tensão física que sofrem as cordas da lira que estarão em evidência, para a concepção de uma tabela de correspondência entre notas musicais. Diferentemente daquela abordagem dos ângulos que as mesmas descrevem, quando manipuladas num plano, segundo a matemática, para a concepção de uma tabela de correspondência de valores numéricos.

[5] Do grego, "Quatro Livros".
[6] Apud, Dic. Enciclopédico Brasileiro Ilustrado. v. 4, p. 3370.
[7] Escala de cinco notas.

2.3.5 Na Matemática

É na Matemática, mais especificamente, na área da Trigonometria, que se encontra a maior contribuição de Ptolomeu, o foco principal deste trabalho científico. De acordo com Aaboe, *"Ptolomeu realizou algum trabalho em matemática pura, mas é famoso como matemático aplicado."* Mais além, comenta, ele: *"Seu Almagesto desempenhou o mesmo papel na astronomia matemática que os Elementos de Euclides e as Cônicas de Apolônio em seus respectivos assuntos ..."*

Esta obra, cuja tradução do árabe significa O Maior, é assim denominada para distingui-lo em importância de outros tratados, e o qual, segundo Eves, H. *" ... manteve-se um trabalho-modelo sobre astronomia até aos tempos de Copérnico e Kepler".*

Em síntese, posto que este capítulo não pretende se alongar na forma de um tratado sobre a matemática de Ptolomeu, o *Almagesto* é um *"livro técnico e volumoso"*, nas palavras de AAboe, A. Ainda segundo este autor, a grande contribuição dele é, em síntese, a investigação baseada no pressuposto teórico de que: *"... uma descrição quantitativa e matemática dos fenômenos naturais, capaz de fornecer predições confiáveis, é possível e desejável".*

Nele, Ptolomeu desenvolve a trigonometria, propondo soluções numéricas de problemas geométricos que envolvem ângulos, literalmente, medida de triângulos. Elabora, mais adiante, uma 'tabela de cordas', a qual permite o cálculo de ângulos, em linhas gerais. Por fim, é do desenvolvimento destas tabelas, que ele desenvolveu o teorema que o imortalizou:

"Em todo quadrilátero inscritível, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos." [12]

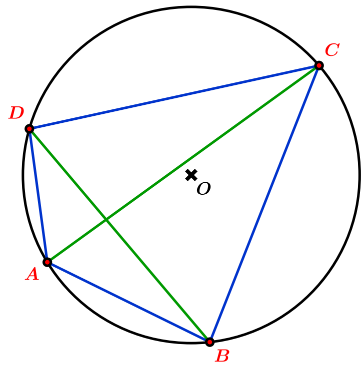


Figura 2.2: Quadrilátero inscrito

De acordo com a figura: 2.2, temos:

$$\boldsymbol{AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD}$$

É bem provável, e aqui o discurso utilizado é o da Matemática, que, para a grande maioria dos seres este, bem como outros tantos teoremas, seja apenas mais um. O desenvolvimento da linha de pesquisa, através da teoria das cordas, um verdadeiro 'trabalho braçal', que conduz à lei geral, expressa na forma de teorema, é a grande contribuição do sábio. Os investigadores sérios e estudiosos bem sabem a importância de 'tamanha mão-de-obra', na colaboração para o avanço do conhecimento científico.

Para além disto, ele forneceu o maior aperfeiçoamento de cálculo de ângulos, os últimos 400 anos, a partir da época de Euclides. E, as infinitas aplicações do mesmo vão desembocar em tempos atuais, sendo que uma é a dos astrônomos como Copérnico e Kepler, que farão uso dele para a concepção de suas teorias modernas sobre o movimento dos corpos celestes.

Não é intenção deste capítulo versar extensiva e profundamente sobre todo o conteúdo desta obra maior de Ptolomeu. Antes, apenas mencionar a principal contribuição sua para o desenvolvimento e aperfeiçoamento da Matemática.

2.3.6 A Contribuição de Ptolomeu à Luz do Estudo Histórico de Sua Obra

Tal como em todo estudo de natureza histórica, os documentos existentes, muitas vezes, são contraditórios, não permitindo afirmações categóricas, tal como ocorre nas ciências matemáticas. Isto, em muito, devido ao fato que há vários documentos, por autores diferentes, em épocas distintas os quais, quando comparados, levantam dúvidas.

Todavia, não se pode negar que Ptolomeu, em seu tempo, tenha se debruçado sobre questões cruciais para o homem, dando a sua contribuição nos campos em que pesquisou. O quanto foi ela e em qual medida, ainda se nos figura como uma incógnita, salvo se novos manuscritos e documentos forem descobertos pela Arqueologia e suas ciências afins, iluminando este período da história da humanidade, na construção do conhecimento.

Encerra-se este capítulo com uma única certeza: a construção do saber, na área da Matemática, e de outras, tal como a Astronomia e, até mesmo, de manifestações culturais como a Astrologia, se dão com a contribuição contínua de homens que a ela se devotaram, dos quais Ptolomeu foi um dos mais brilhantes.

Com toda certeza, pode-se afirmar que cada pesquisador em sua área, cada matemático, coloca, por seu turno, uma 'pedra' para a construção da 'grande pirâmide' do conhecimento humano, tornando possível novos horizontes prováveis. Isto pode ser corroborado pelo excerto de uma poesia de Kepler, Harmonice Mundi, apud ALVES, R. (pp. 74-5 op. cit.): *"Aquilo em que firmemente cri, muito antes de ter visto a Harmonia de Ptolomeu; ..."*

Sem eles, todas ciências e tecnologias delas advindas, tal como nas áreas da construção civil, das navegações e da exploração do espaço sideral, dentre tantas outras arrojadas iniciativas da humanidade, não seriam possíveis de ocorrer, e o saber teria se reduzido a apenas algumas poucas leis, vivendo o homem a desesperança de sempre estar sujeito às circunstâncias das forças da natureza que o cerca.

Concluímos que Ptolomeu colocou a sua: uma pedra angular no conhecimento da humanidade.

Capítulo 3

O Teorema de Ptolomeu

Este capítulo possui por fundamento a demonstração do teorema de Ptolomeu, de três diferentes modos, a saber, expressos nas seções 3.3, 3.4 e 3.5, além de seu recíproco na seção 3.6. Assinalamos que, apesar de não ser mais apresentada aos alunos do Ensino Médio, por ter perdido aquele "brilho entre os professores", nossa proposta é demonstrar que, se forem realizadas, possibilitará ao estudante o reconhecimento de que os conteúdos, em Matemática, não surgiram espontaneamente, mas de forma gradativa, com a contribuição de diversos estudiosos da área.

Além disto, entendemos plenamente que a demonstração de um teorema possibilita que o aluno conte com ferramentas para argumentar sobre os fundamentos teóricos utilizados.

3.1 Noções Geométricas Preliminares

Esclareçamos, de antemão, alguns conceitos, antes de enunciarmos o teorema, mais propriamente:

3.1.1 Quadrilátero

(Segundo Geometria Plana, p. 115 [20]): "Considere quatro pontos A, B, C e D coplanares distintos, três a três não colineares (não alinhados), de modo que os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$ não tenham pontos em comum entre as extremidades. À união desses segmentos, $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{AD}$. É chamada quadrilátero $ABCD$."

3.1.1.1 Quadrilátero Convexo

Cada ponto (A, B, C e D) é externo ao triângulo determinado pelos outros três pontos[1]. (figura 3.1)

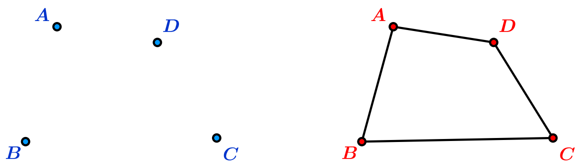


Figura 3.1: Quadrilátero convexo

3.1.1.2 Inscrito

(Apud, Dicionário Houaiss Conciso, p. 540 [15]) " ... GEOM cujos vértices estão sobre uma curva (diz-se de polígono)..."

3.1.1.3 Quadrilátero inscritível

(Apud, Dicionário Houaiss Conciso, p. 141 [15]) "Se existir uma circunferência passando pelos seus vértices." (figura 3.2)

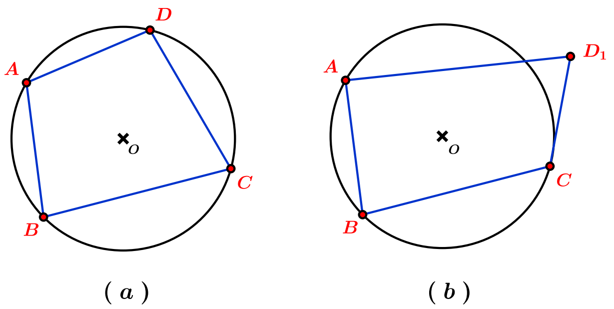


Figura 3.2: Quadrilátero inscrito (a) / (b) não inscrito

[1]Se não assinalarmos nada em contrário, toda vez que tratarmos de quadrilátero, estaremos nos referindo a quadrilátero convexo.

3.1.1.4 Produto

(Apud, Novo Dicionário da Língua Portuguesa, p. 1396 [11]) "... ARIT O resultado de uma multiplicação ...".

3.1.1.5 Lado

Conforme figura 3.2, são os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$ do polígono[2].

3.1.1.6 Oposto

Conforme figura 3.3 (Apud, Novo Dicionário da Língua Portuguesa, p. 1228 [11]) "... Que está em frente, fronteiro ..., Contrário, inverso, contraposto ...."

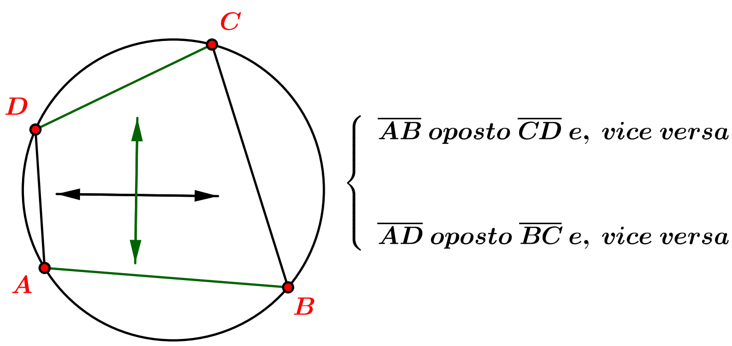


Figura 3.3: Lados opostos

3.1.1.7 Diagonal

(Apud, Novo Dicionário da Língua Portuguesa, p. 584 [11]) "... 4.GEOM num polígono, segmento de reta que une um vértice a outro não consecutivo. ..."

[2]Polígono, *poli* = vários, muitos, e *gonos* = ângulo.

3.2 Teorema de Ptolomeu

De acordo com Garbi (opus cit., p. 88 [12]), "o enunciado conhecido como Teorema de Ptolomeu, mas que deve ter sido descoberto por Hiparco". Também:

> *"Em todo quadrilátero inscritível, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos."* (ibidem)

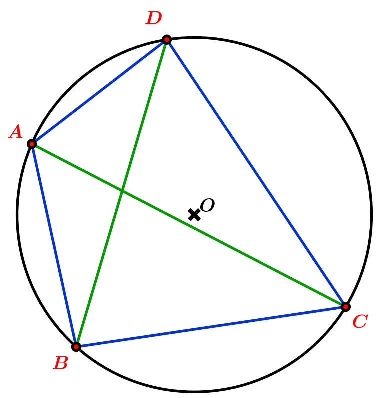


Figura 3.4: Quadrilátero inscrito

Conforme a figura 3.4, num quadrilátero inscritível $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, o que tencionamos demostrar é:

$$\boxed{\boldsymbol{AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD}}$$

3.3 I Demonstração do Teorema de Ptolomeu

Inicialmente, vamos relembrar o conceito de ângulo inscrito.

Traçamos uma circunferência de centro em O e uma corda $\overline{AD}$. Em seguida, traçamos uma nova corda, que intercepta a circunferência nos pontos B e C, distintos de A e D, denominada corda $\overline{BC}$, paralela à anterior, conforme a figura 3.5:

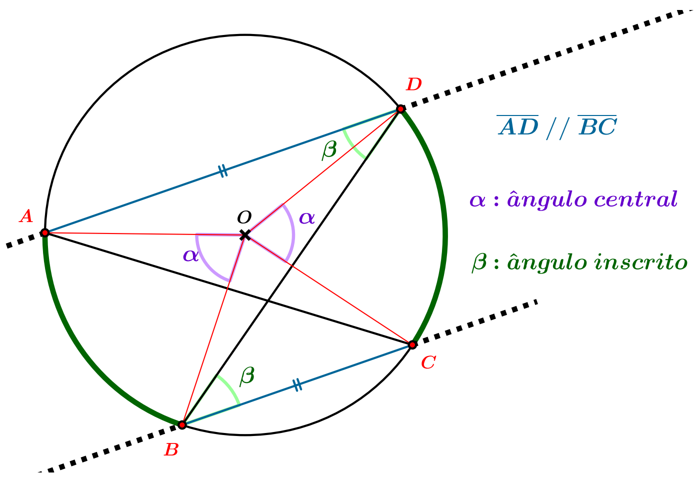


Figura 3.5: Ângulo inscrito

Uma vez que $ABCD$ é um trapézio isósceles, $\overline{AD}$ // $\overline{BC}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, e os ângulos centrais $\angle A\widehat{O}B$ e $\angle C\widehat{O}D$ são congruentes, concluímos que os ângulos inscritos $\angle A\widehat{D}B$ e $\angle D\widehat{B}C$ são congruentes também:

$$\angle A\widehat{D}B \equiv \angle C\widehat{B}D = \beta \tag{3.1}$$

Podemos, então, iniciar a demonstração, considerando a figura 3.6.

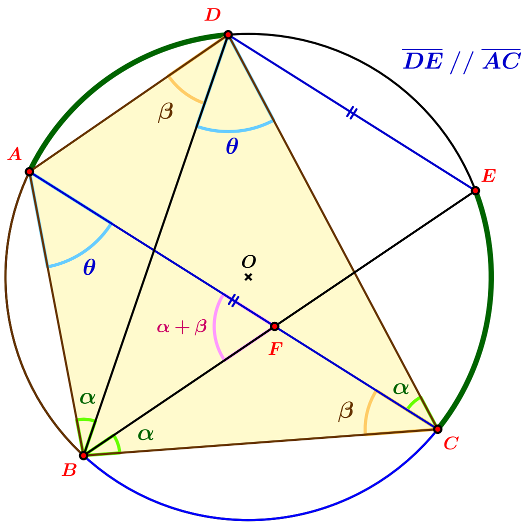


Figura 3.6: Demonstração I

Após construírmos um quadrilátero $ABCD$, inscrito em uma circunferência, traçamos as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

Por D, traçamos um segmento paralelo à diagonal $\overline{AC}$, que intercepta a circunferência no ponto E[3]. Unindo o ponto B ao E, obtemos um segmento que intercepta a diagonal $\overline{AC}$ no ponto F.

Conforme observado no desenvolvimento da expressão 3.1, temos que:

$$\overset{\frown}{\mathrm{AD}} \equiv \overset{\frown}{\mathrm{CE}} \Rightarrow \angle A\widehat{C}D \equiv \angle E\widehat{B}C \equiv \angle A\widehat{B}D = \alpha \tag{3.2}$$

E que:

$$\overset{\frown}{\mathrm{AB}} \Rightarrow \angle A\widehat{C}B \equiv \angle A\widehat{D}B = \beta \tag{3.3}$$

O ângulo $\angle B\widehat{F}A$ é externo ao triângulo $\triangle FBC$. Sendo $\angle F\widehat{B}C = \alpha$ e $\angle B\widehat{C}F = \beta$ $\therefore$ $\angle A\widehat{F}B = \alpha + \beta$.

[3]Caso $\overline{AC}$ e/ou $\overline{BD}$ seja(m) diâmetro(s) da circunferência, o ponto E coincidirá com um dos vértices.

Ainda, na figura 3.6, temos que o segmento $\overline{AC}$ é a adição de AF a FC, de onde se conclui que:

$$\begin{cases} AC \;=\; AF \;+\; FC \Rightarrow \\ \\ \Rightarrow AC \;=\; AF \;+\; CF \end{cases} \tag{3.4}$$

3.3.1 Semelhança entre os triângulos ABD e FBC

Pelo critério de semelhança entre triângulos, concluímos que:

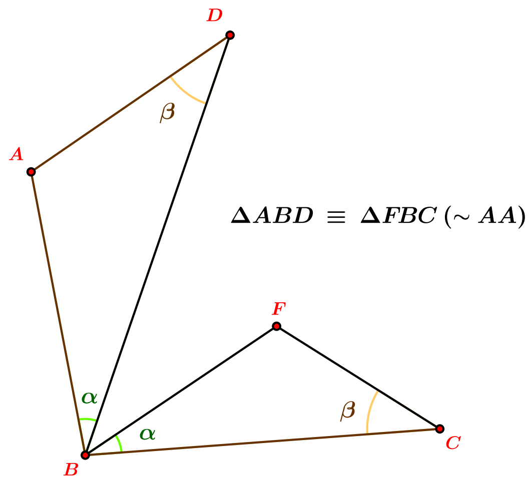


Figura 3.7: Semelhança entre os triângulos ABD e FBC

Uma vez que os ângulos (figura 3.7) $\angle A\widehat{B}D \;\equiv\; \angle F\widehat{B}C \;=\; \alpha$ e $\angle A\widehat{D}B \;\equiv\; \angle F\widehat{C}B \;=\; \beta$, pelo critério de semelhança entre triângulos, ângulo / ângulo ($\sim AA$), concluímos que:

$$\triangle ABD \sim \triangle FBC$$

Pelo critério de semelhança entre os triângulos, os seus lados correspondentes são proporcionais. Desta forma:

$$\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{CF} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow BD \cdot CF = AD \cdot BC \tag{3.5}$$

3.3.2 Semelhança entre os triângulos ABF e DBC

Na figura 3.8, verificamos que:

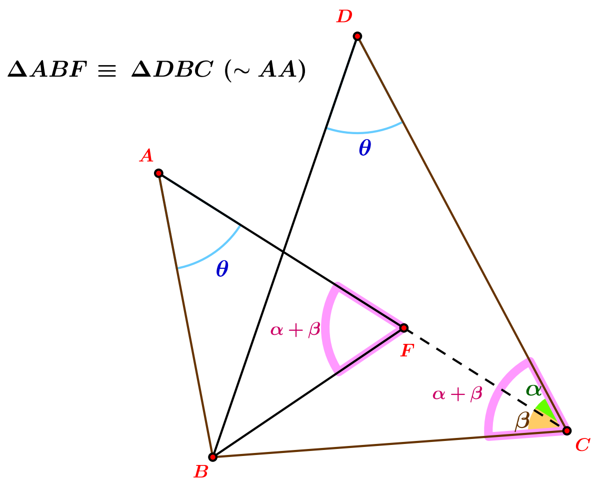


Figura 3.8: Semelhança entre os triângulos ABF e DBC

Dado que os ângulos $\angle C\widehat{A}B \equiv \angle C\widehat{D}B = \theta$ (ângulos inscritos no mesmo arco $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ (figura 3.6) e $\angle A\widehat{F}B \equiv \angle D\widehat{C}B = \alpha + \beta$, pelo critério de semelhança entre triângulos, ângulo/ângulo ($\sim AA$), concluímos que:

$$\triangle DBC \sim \triangle ABF$$

Pelo critério de semelhança entre triângulos, os seus lados correspondentes são proporcionais. Assim sendo:

$$\begin{aligned} \frac{AF}{CD} &= \frac{AB}{BD} \Rightarrow \\ \Rightarrow BD \cdot AF &= AB \cdot CD \end{aligned} \tag{3.6}$$

3.3.3 Finalizando

Adicionando a equação 3.6 à 3.5, e substituindo-se $AF + CF$ pela igualdade da equação 3.4, obtemos:

$$\begin{array}{ccccccc} BD & \cdot & AF & = & AB & \cdot & CD \\ & + & & & & + & \\ BD & \cdot & CF & = & AD & \cdot & BC \end{array}$$

$$\overline{BD \cdot AF + BD \cdot CF} = \overline{AB \cdot CD + AD \cdot BC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BD \cdot \underbrace{(AF + CF)} = AB \cdot CD + AD \cdot BC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{BD \cdot AC = AB \cdot CD + AD \cdot BC}$$

■

3.4 II Demonstração do Teorema de Ptolomeu

Construindo um quadrilátero $ABCD$, inscrito em uma circunferência (figura 3.9), sendo E um ponto pertencente a diagonal $\overline{AC}$, traçamos o segmento $\overline{DE}$ de tal que forma que $\angle A\widehat{D}E \equiv \angle B\widehat{D}C = \theta$.

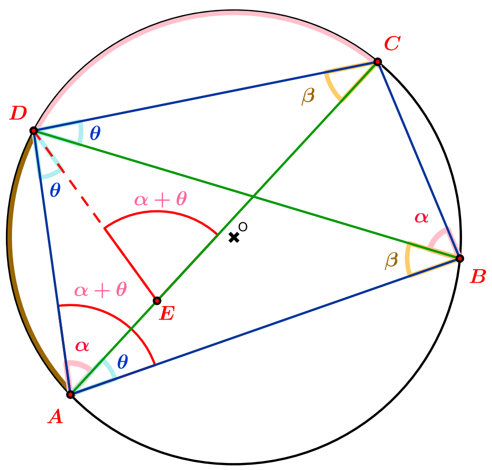


Figura 3.9: Demonstração II

Nele, o segmento AC é igual a:

$$AC \; = \; AE \; + \; EC \tag{3.7}$$

Uma vez que o arco $\widehat{DC}$ suporta os ângulos inscritos $\angle D\widehat{A}C$ e $\angle D\widehat{B}C$, concluímos que:

$$\angle D\widehat{A}C \equiv \angle D\widehat{B}C = \alpha \tag{3.8}$$

Também, os ângulos inscritos $\angle A\widehat{C}D$ e $\angle A\widehat{B}D$ se submetem ao mesmo arco $\widehat{AD}$; logo:

$$\angle A\widehat{C}D \equiv \angle A\widehat{B}D \; = \; \beta \tag{3.9}$$

E, por construção, temos que:

$$\angle A\widehat{D}E \equiv \angle B\widehat{D}C = \theta \tag{3.10}$$

3.4.1 Semelhança entre os triângulos AED e BDC

Observando a figura 3.10, e as afirmações das expressões 3.8 e 3.10, concluímos que:

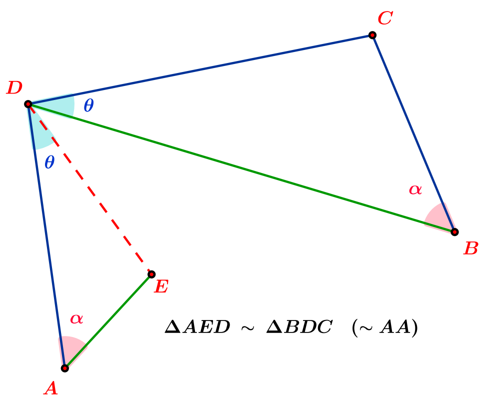


Figura 3.10: Semelhança entre os triângulos AED e BDC

Os triângulos, $\triangle AED$ e $\triangle BCD$ são semelhantes pelo critério de semelhança entre triângulos: ângulo/ângulo ($\triangle AED \sim \triangle BCD$).

Triângulos semelhantes têm seus lados correspondentes proporcionais. Desta forma:

$$\frac{AE}{BC} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad AE \cdot BD = AD \cdot BC \tag{3.11}$$

3.4.2 Semelhança entre os triângulos ABD e ECD

Observando as figuras 3.9 e 3.11, sob as condições formuladas anteriormente, temos que:

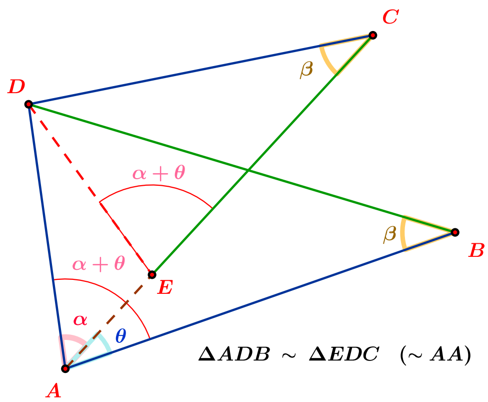


Figura 3.11: Semelhança entre os triângulos ABD e ECD

3.4.2.1 $\angle A\widehat{C}D \equiv \angle A\widehat{B}D = \beta$ (ângulos inscritos no arco $\widehat{\text{AD}}$;

3.4.2.2 No triângulo $\triangle AED$, temos que $\angle D\widehat{A}E = \alpha$ e $\angle A\widehat{D}E = \theta$;

3.4.2.3 E, sendo $\angle D\widehat{E}C$ ângulo externo ao triângulo $\triangle AED$, podemos afirmar que: $\angle D\widehat{E}C = \alpha + \theta$.

$$\therefore \qquad \angle D\widehat{E}C \equiv \angle D\widehat{A}B = \alpha + \theta$$

Deste modo, os triângulos $\triangle ADB$ e o $\triangle EDC$ são semelhantes pelo critério de semelhança entre triângulos: ângulo/ângulo ($\triangle ADB \sim \triangle EDC$).

Já que entre triângulos semelhantes temos os seus lados correspondentes proporcionais, podemos concluir que:

$$\frac{AB}{EC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad EC \cdot BD = AB \cdot CD \tag{3.12}$$

3.4.3 Finalizando

Adicionando a equação 3.11 à 3.12, e substituindo o resultado, na equação 3.7, $AC = AE + EC$, obtemos:

$$\begin{array}{ccccccc} AE & \cdot & BD & = & AD & \cdot & BC \\ & + & & & & + & \\ EC & \cdot & BD & = & AB & \cdot & CD \end{array}$$

$$\overline{AE \cdot BD + EC \cdot BD} = \overline{AD \cdot BC + AB \cdot CD} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BD \cdot \underbrace{(AE + EC)} = AD \cdot BC + AB \cdot CD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BD \cdot AC = AD \cdot BC + AB \cdot CD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{BD \cdot AC = AB \cdot CD + AD \cdot BC}$$

■

3.5 III Demonstração do Teorema de Ptolomeu

Construímos um quadrilátero $ABCD$ de diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, inscrito numa circunferência

Traçamos uma rreta de B, passando por C e por D, apoiada sobre o segmento $\overline{CD}$, esta com um ângulo igual a $\angle A\widehat{D}B$ no sentido anti-horário, que interceptará a semirreta $\overrightarrow{BC}$ em P, conforme figura 3.12. (ponto externo à circunferência)

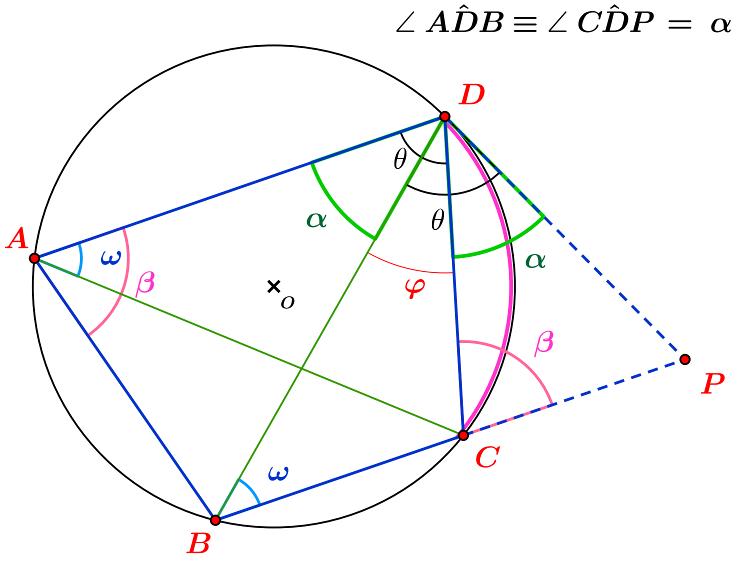


Figura 3.12: Demonstração III

Desta forma, os ângulos $\angle A\widehat{D}B \equiv \angle C\widehat{D}P = \alpha$.

Uma vez que o quadrilátero está inscrito na circunferência, os seus ângulos opostos são suplementares. Logo, $\angle B\widehat{C}D$ é suplementar do ângulo $\angle B\widehat{A}D$. Sendo assim: $\angle B\widehat{A}D \equiv \angle P\widehat{C}D = \beta$.

3.5.1 Semelhança entre os triângulos ADB e CDP

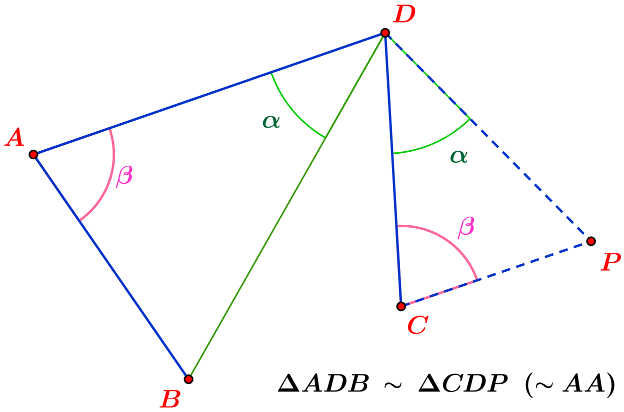


Figura 3.13: Triângulos ADB e CDP

Portanto, conforme figura 3.13, pelo critério de semelhança entre triângulos ($\sim AA$), temos que: $\triangle ADB \sim \triangle CDP$.

Por se tratarem de triângulos semelhantes, eles detém a propriedade de seus lados correspondentes serem proporcionais. Sendo assim, podemos assinalar que:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{CP} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow CP = \frac{DC \cdot AB}{AD} \tag{3.13}$$

3.5.2 Semelhança entre os triângulos DAC e DBP

Analisemos, agora, os triângulos $\triangle DAC$ e $\triangle DBP$.

Como podemos verificar na figura 3.12, o ângulo $\angle D\widehat{A}C$ e o ângulo $\angle D\widehat{B}C$ são ângulos inscritos na circunferência e extremidades no arco $\widehat{\mathrm{DC}}$. Sendo assim:

$$\angle D\widehat{A}C \equiv \angle D\widehat{B}C = \omega \tag{3.14}$$

O ângulo $\angle A\widehat{D}B$ e o ângulo $\angle C\widehat{D}P$ são adjacentes. Logo, denominando-se o ângulo $\angle B\widehat{D}C$ de φ, podemos relacionar que:

$$\angle A\widehat{D}C = \angle A\widehat{D}B + \angle B\widehat{D}C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \alpha + \varphi \tag{3.15}$$

Analogamente:

$$\angle B\widehat{D}P = \angle B\widehat{D}C + \angle C\widehat{D}P \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \angle B\widehat{D}P \quad = \quad \underbrace{\varphi + \alpha} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{(de 3.15)} \quad \Rightarrow \angle B\widehat{D}P = \theta \Rightarrow$$

$$\therefore \angle A\widehat{D}C \equiv \angle B\widehat{D}P = \theta \tag{3.16}$$

Sendo assim, podemos afirmar que os triângulos da figura 3.14 são semelhantes (caso ângulo/ângulo) e das expressões 3.14 e 3.16, concluímos que: $\triangle DAC \sim \triangle DBP$.

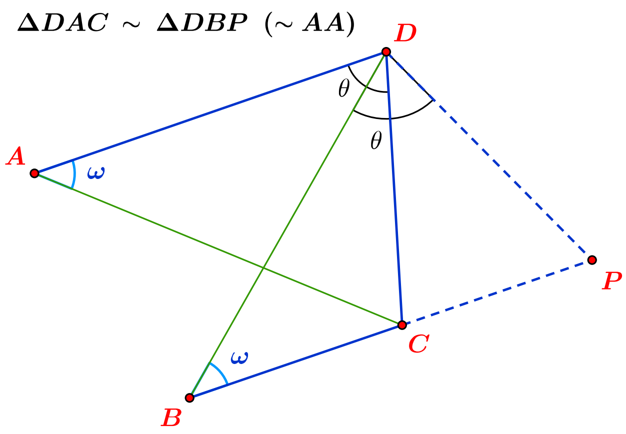


Figura 3.14: Triângulos DAC e DBP

Ainda, da figura 3.14, constatamos que:

$$BP = BC + CP \tag{3.17}$$

Novamente, por semelhança entre triângulos, os seus lados são proporcionais. Assim:

$$\frac{AC}{BP} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BP = \frac{AC \cdot BD}{AD} \tag{3.18}$$

3.5.3 Finalizando

Substituindo-se na equação 3.17, as equações 3.13 e 3.18, obteremos:

$$\begin{aligned}
BP &= BC + CP \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{AC \cdot BD}{AD} &= BC + \frac{DC \cdot AB}{AD} \Rightarrow \\
\Rightarrow m.m.c.(AD) &= AD \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{AC \cdot BD}{AD} &= \frac{BC \cdot AD}{AD} + \frac{DC \cdot AB}{AD} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{AC \cdot BD = BC \cdot AD + DC \cdot AB}$$

■

3.6 Recíproca do Teorema de Ptolomeu

Recíproca do teorema de Ptolomeu (Apud, Geometría Interactiva, < *http* : //132.248.17.238/*geometria*/*j_ensayo*/*j_ensayo.pdf* >. Acesso em: 20 dez. 2013):

"Se o produto das diagonais de um quadrilátero convexo é igual à soma dos produtos dos lados opostos, então o quadrilátero é cíclico." [2]

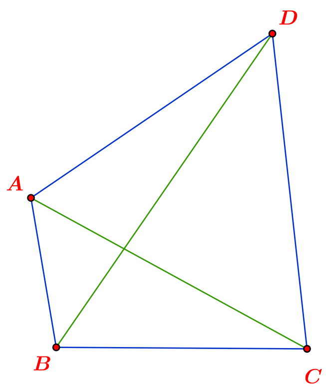


Figura 3.15: Recíproca do teorema de Ptolomeu

· (Hipótese) *Se* $ABCD$ *é um quadrilátero convexo (figura 3.15), tal que*

$$AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD,$$

demonstrar que o quadrilátero é inscritível. (Tese.)

· Demonstração.

A demonstração que utilizaremos é a da contra-recíproca, assim sendo, demonstraremos que, se o quadrilátero $ABCD$ não é inscritível, então:

$$AC \cdot BD < AD \cdot BC + AB \cdot CD$$

Para tal, construímos um triângulo $\triangle CDP$ (figura 3.16). Assim:

3.6.A.1 Em D, com abertura $\angle A\widehat{D}B$ no sentido anti-horário, apoiado no segmento $\overline{CD}$, construímos uma semirreta $\overrightarrow{DE}$.

3.6.A.2 Em C, sobre o segmento CD, no sentido horário, com abertura de $\angle D\widehat{A}B$, traçamos uma semirreta $\overrightarrow{CF}$, que encontra $\overrightarrow{DE}$ no ponto P, determinando o $\triangle CDP$.

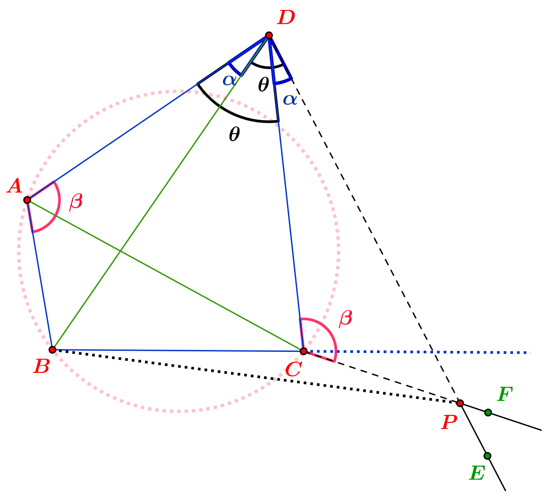


Figura 3.16: Construção do triângulo CDP

3.6.1 Semelhança entre os triângulos ADB e CDP

Por construção, os ângulos são congruentes:

$$\begin{cases} \angle B\widehat{A}D \equiv \angle P\widehat{C}D = \beta, \\ \angle A\widehat{D}B \equiv \angle C\widehat{D}P = \alpha. \end{cases}$$

Desta forma, pelo critério de semelhança entre triângulos, ângulo/ângulo ($\sim AA$), concluímos que: $\triangle ADB \sim \triangle CDP$, conforme a figura 3.17.

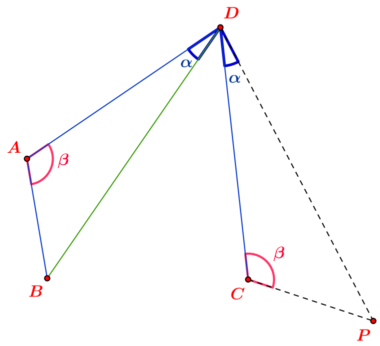


Figura 3.17: Triângulos ADB e CDP

Podemos, então, relacionar:

$$\frac{BD}{DP} = \frac{AD}{CD} = \frac{AB}{CP} \tag{3.19}$$

Utilizando a 1ª e 2ª igualdades da expressão 3.19, constatamos que os lados dos triângulos são proporcionais:

$$\frac{BD}{DP} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{BD}{AD} = \frac{DP}{CD} \tag{3.20}$$

3.6.2 Semelhança entre os triângulos CDA e PDB

Ligando o ponto B ao P, obteremos o $\triangle PDB$.

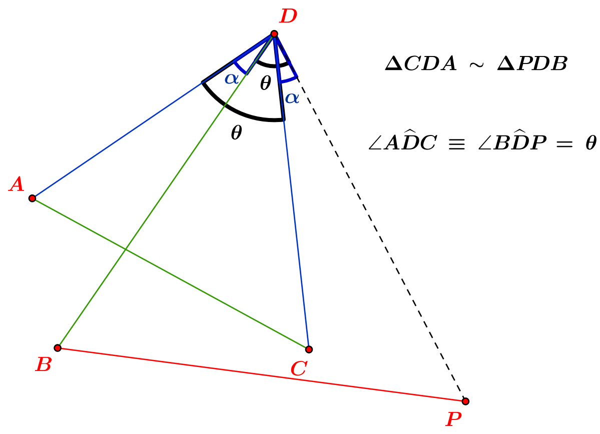


Figura 3.18: Triângulos CDA e PDB

Analisando os triângulos $\triangle CDA$ e $\triangle PDB$ da figura 3.18, temos que:

3.6.2.1 Em ambos, fazem parte dos triângulos, os ângulos congruentes:

$$\angle A\widehat{D}C \equiv \angle B\widehat{D}P = \theta$$

3.6.2.2 Das expressões 3.19 e 3.20 temos que, pelo caso de semelhança entre triângulos, lado/ângulo/lado (LAL), os triângulos $\triangle PDB$ e $\triangle CDA$ são semelhantes, validando a relação:

$$\frac{BP}{AC} = \frac{BD}{AD} \tag{3.21}$$

3.6.3 Finalizando

Por outro lado:

3.6.3.1 "Se um quadrilátero convexo é inscritível (cíclico), então seus ângulos opostos são suplementares."

3.6.3.2 "Se um quadrilátero convexo tem os seus ângulos opostos suplementares, então ele é inscritível (cíclico)."

Desta forma:

$$\left\{\begin{array}{cc} & ABCD \text{ é cíclico (fig. 3.12)} \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \text{têm ângulos opostos suplementares} \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & B,\ C \text{ e } P \text{ são } \underline{\text{colineares}} \end{array}\right\rangle \therefore BP = BC + CP$$ [4]

Por outro lado:

$$\left\{\begin{array}{cc} & ABCD \ \underline{\text{não}} \text{ é cíclico (fig. 3.16)} \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & BP < BC + CP \end{array}\right\rangle \therefore BP < BC + CP$$

Se o quadrilátero $ABCD$ não é inscritível:

$$BP \ < \ BC \ + \ CP \tag{3.22}$$

De 3.21, temos que:

$$\frac{BP}{AC} = \frac{BD}{AD} \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad BP \ = \ \frac{AC \ \cdot \ BD}{AD} \tag{3.23}$$

De 3.19, temos que:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{CP} \qquad \Longrightarrow$$

[4] A igualdade $BP = BC + CP$ é apresentada na III demonstração, na página 34, da subseção 3.5.2.

$$\Longrightarrow \quad CP = \frac{AB \cdot CD}{AD} \tag{3.24}$$

Substituindo as expressões 3.23 e 3.24 em 3.22, temos que:

$$BP < BC + CP \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \overbrace{\frac{AC \cdot BD}{AD}} < BC + \overbrace{\frac{AB \cdot CD}{AD}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{AC \cdot BD}{AD} < \frac{BC \cdot AD}{AD} + \frac{AB \cdot CD}{AD} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow AC \cdot BD < BC \cdot AD + AB \cdot CD$$

Portanto, o quadrilátero $ABCD$ não é inscritível (cíclico). Logo:

$$\boxed{AC \cdot BD < BC \cdot AD + AB \cdot CD}$$

$\blacksquare$

Capítulo 4

Utilizando o Teorema de Ptolomeu

O teorema de Ptolomeu pode ser utilizado como ferramenta na demonstração de alguns outros teoremas, os quais relataremos neste capítulo.

4.1 Ptolomeu aplicado ao Teorema de Pitágoras

Quando tratamos do Teorema de Pitágoras (Cfe. Osvaldo Dolce, Fundamentos da Matemática Elementar, p. 224) [8] o seu enunciado pode ser assim formulado:

"Em qualquer triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa."

Para os elementos da figura 4.1, escrevemos o Teorema de Pitágoras como:

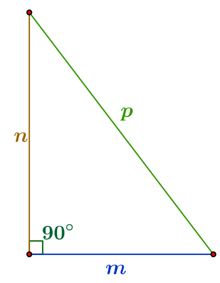


Figura 4.1: Triângulo retângulo

$$p^2 = m^2 + n^2 \tag{4.1}$$

Inscrevendo, em uma circunferência, um retângulo $ABCD$ (figura 4.2) de lados m e n, e diagonais p, obtemos:

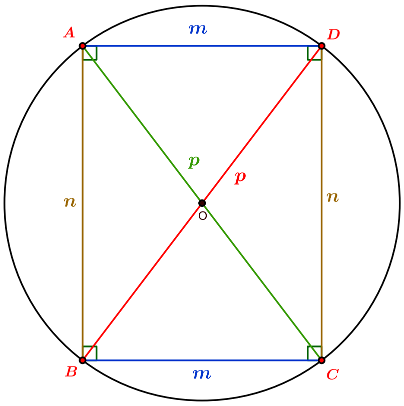


Figura 4.2: Teorema de Pitágoras

Aplicando o teorema de Ptolomeu, chegaremos à equação 4.1, que é o pretendido:

$$AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot DC \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad p \cdot p = m \cdot m + n \cdot n \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{p^2 = m^2 + n^2} \tag{4.2}$$

■

4.2 Ptolomeu aplicado ao Teorema Fundamental da Trigonometria

Tencionamos utilizar o teorema de Ptolomeu para demonstrar a relação fundamental da trigonometria abaixo descrita:

$$cos^2\,\theta \quad + \quad sen^2\,\theta \;=\; 1 \tag{4.3}$$

Para tanto, vamos inscrever um retângulo $ABCD$, de diagonais $AC = BD = 1$ e lados $AD = BC = m$ e $AB = CD = n$, em uma circunferência, denominando, no triângulo $\triangle ADC$ retângulo em D, o ângulo $\angle C\widehat{A}D$ de θ (figura 4.3).

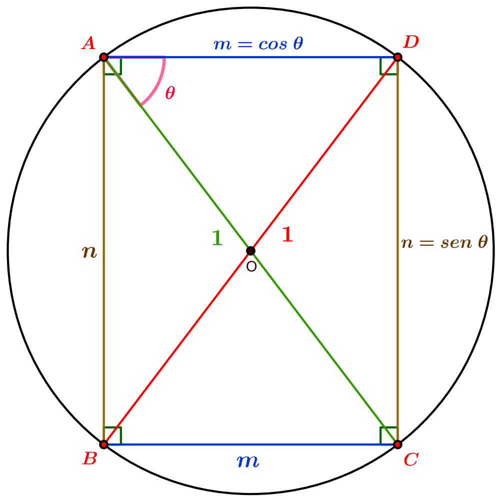


Figura 4.3: Teorema fundamental da trigonometria

Aplicando o teorema de Ptolomeu ao quadrilátero $ABCD$ da figura 4.3, temos que:

$$AD \cdot BC + AB \cdot DC = AC \cdot BD \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad m \;\cdot\; m \;+\; n \;\cdot\; n \;=\; 1 \cdot\; 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad m^2 \ + \ n^2 \ = \ 1^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad m^2 \ + \ n^2 \ = \ 1 \tag{4.4}$$

Da figura 4.3, relacionamos:

$$\begin{cases} cos\ \theta = \dfrac{m}{1} \Rightarrow \quad cos\ \theta = m & (4.5) \\ \\ sen\ \theta = \dfrac{n}{1} \Rightarrow \quad sen\ \theta = n & (4.6) \end{cases}$$

Substituindo as equações 4.5 e 4.6 na expressão 4.4, vamos demonstrar a equação 4.3, que é o nosso objetivo:

$$m^2 \ + \ n^2 \ = \ 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{cos^2\ \theta \quad + \quad sen^2\ \theta \ = \ 1}$$

■

4.3 Ptolomeu aplicado à Lei dos Cossenos

A lei dos cossenos pode ser assim expressa:

"Em qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o duplo produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles." [14]

Conforme figura 4.4, temos:

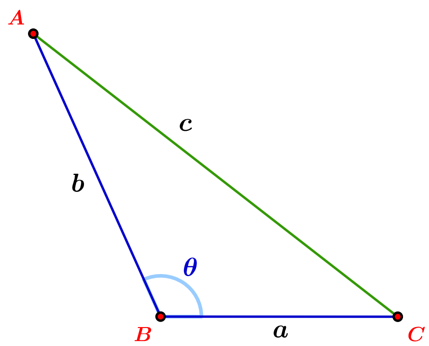


Figura 4.4: Lei dos cossenos

Desta forma:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\theta \tag{4.7}$$

Uma forma de demonstrar esta lei é inscrevendo, em uma circunferência, um trapézio isósceles $ABCD$ (figura 4.5):

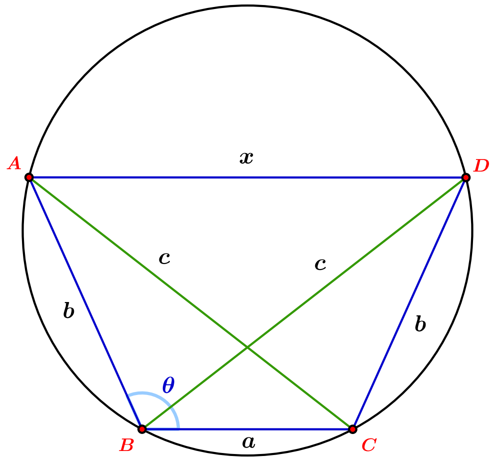


Figura 4.5: Trapézio isósceles inscrito na circunferência

Chamamos a sua base maior $\overline{AD} = x$, a base menor $\overline{BC} = a$, e são os seus lados não paralelos de $\overline{AB} = \overline{CD} = b$ e diagonais $\overline{AC} = \overline{BD} = c$.

Traçando pelo ponto B uma reta perpendicular ao segmento $\overline{AD}$, que a intercepta no ponto F, e repetindo o mesmo procedimento para o ponto C, encontramos o ponto E. Conforme a figura 4.6, teremos dois triângulos retângulos em E e F, denominados $\triangle AFB$ e $\triangle DEC$.

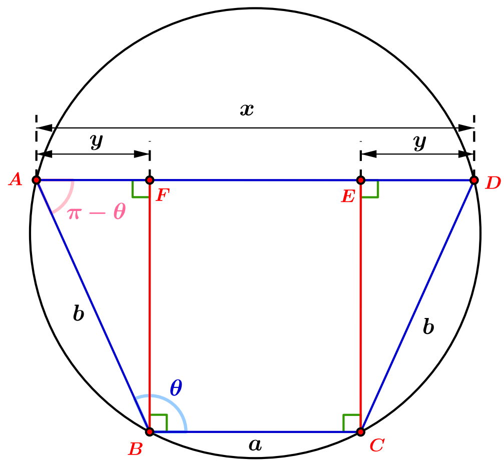


Figura 4.6: Triângulos no trapézio $ABCD$

Considerando o segmento $AF = ED = y$ (figura 4.6), observamos que:

$$AD = AF + FE + ED \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = y + a + y \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad x = 2\,y + a \tag{4.8}$$

Teorema: *"Em qualquer trapézio, a soma de dois ângulos consecutivos, não de uma mesma base, é* 180°. *(Esses ângulos são suplementares)"* [1] (Apud, Geometria Plana, p. 122) [20]

Nomeando o ângulo $\angle A\widehat{B}C$, simplificadamente de ângulo $\widehat{B} = \theta$, e $\angle B\widehat{A}D$ de ângulo $\widehat{A}$, teremos que:

$$\widehat{A} + \widehat{B} = \pi \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{A} + \theta = \pi \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \widehat{A} = \pi - \theta \tag{4.9}$$

No triângulo $\triangle AFB$ (figura 4.7), calculando o cosseno do ângulo $\angle B\widehat{A}F \equiv \angle C\widehat{D}E = \pi - \theta$, temos que:

[1] A medida de um arco, em radianos, é a razão entre o comprimento do arco e o raio da circunferência sobre a qual este arco está determinado. As conversões entre as medidas de arcos (ou ângulos) em graus e radianos são feitas por uma regra de três simples (direta), a partir da relação 180° é equivalente a π radianos.

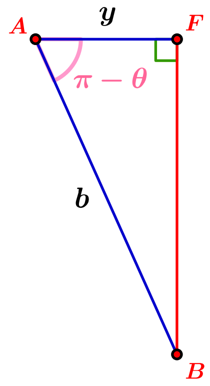


Figura 4.7: Triângulo ABF

$$\begin{cases} \cos(\pi - \theta) = \dfrac{y}{b} \Rightarrow \\ \\ \Rightarrow y = b \cdot \cos(\pi - \theta) \end{cases} \tag{4.10}$$

Desta forma, substituindo a igualdade 4.10 em 4.8, obtemos:

$$\begin{cases} x = 2 \cdot y + a \Rightarrow \\ \\ \Rightarrow x = 2 \cdot [\, b \cdot \cos(\pi - \theta) \,] + a \end{cases} \tag{4.11}$$

Aplicando ao quadrilátero $ABCD$ o teorema de Ptolomeu, temos que:

$$AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad c \cdot c = b \cdot b + a \cdot x \tag{4.12}$$

Substituindo 4.11 em 4.12, obtemos:

$$c \cdot c = b \cdot b + a \cdot [\, 2 \cdot b \cdot \cos(\pi - \theta) + a \,] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad c^2 = b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\pi - \theta) + a^2 \tag{4.13}$$

Considerando que, *"Se dois ângulos são suplementares, então os seus cossenos são opostos, isto é,* $\alpha + \beta = 180° \Rightarrow \cos\beta = -\cos\alpha$*"*[2] (Apud, Geometria Plana, p. 388) [20], então temos que:

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta \tag{4.14}$$

Desta forma, substituindo a equação 4.14 na 4.13, determinamos a equação procurada em 4.7 (lei dos cossenos):

$$\Rightarrow \quad \boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\theta}$$

■

[2]As conversões entre as medidas de arcos (ou ângulos) em graus e radianos são feitas por uma regra de três simples (direta), a partir da relação 180° é equivalente a π radianos.

4.4 Ptolomeu aplicado ao seno da soma de dois arcos

Agora, vamos determinar o seno da soma de dois arcos:

$$sen\ (\alpha + \beta)\ =\ sen\alpha\ \cdot\ \cos\beta\ +\ sen\beta\ \cdot\ \cos\alpha \qquad (4.15)$$

Numa circunferência de diâmetro igual a 1, vamos inscrever um quadrilátero, tomando o cuidado para que uma de suas diagonais coincida com o mencionado, que está representado na figura 4.8.

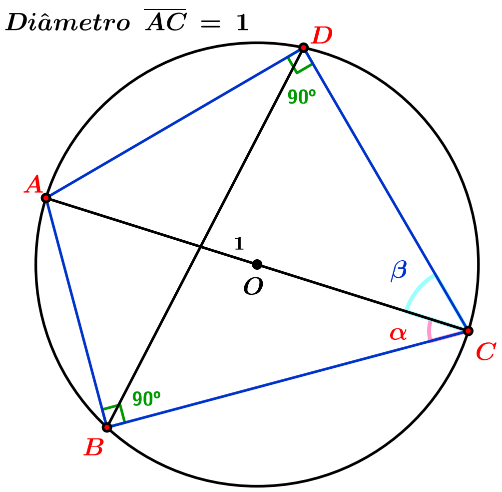


Figura 4.8: Quadrilátero com diagonal igual ao diâmetro

Denominando os ângulos $\angle A\widehat{C}B =\ \alpha$ e $\angle A\widehat{C}D =\ \beta$ e, sendo $\triangle ABC$ e $\triangle ADC$ de lado $\overline{AC}$ igual ao diâmetro da circunferência, estes triângulos são retângulos. Assim, podemos depreender as seguintes relações trigonométricas:

No $\triangle ABC$, da figura 4.9, temos que:

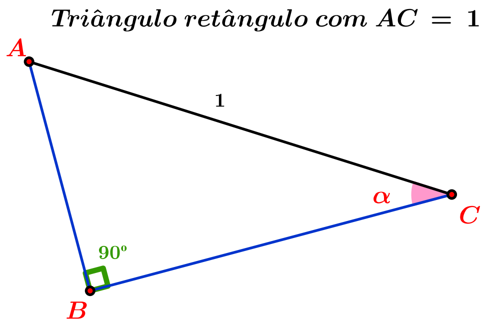


Figura 4.9: Triângulo ABC

$$\begin{cases} sen\ \alpha = \dfrac{AB}{1} \quad \Rightarrow \quad AB = sen\ \alpha & (4.16) \\ \\ \cos\ \alpha = \dfrac{BC}{1} \quad \Rightarrow \quad BC = \cos\ \alpha & (4.17) \end{cases}$$

No $\triangle ADC$, da figura 4.10, temos que:

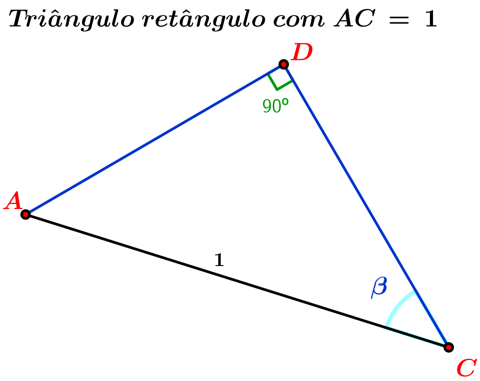


Figura 4.10: Triângulo ADC

$$\begin{cases} sen\ \beta = \dfrac{AD}{1} \quad \Rightarrow \quad AD = sen\ \beta & (4.18) \\ \\ \cos\ \beta = \dfrac{CD}{1} \quad \Rightarrow \quad CD = \cos\ \beta & (4.19) \end{cases}$$

Olhando para a figura 4.11, observa-se que o raio (r) da circunferência é igual a 0,5, logo, o seu diâmetro d será igual a 1:

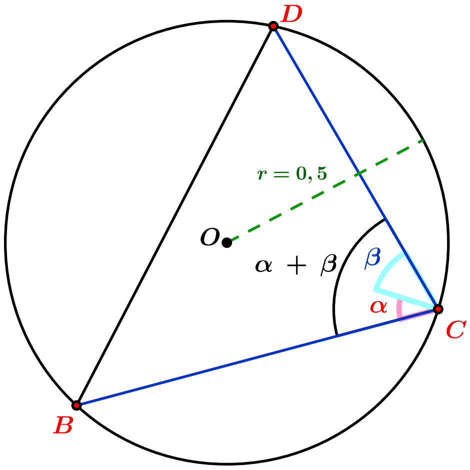


Figura 4.11: Lei dos senos no triângulo BCD

$$\left\{\begin{array}{rcl} d & = & 2 \cdot r \;\Rightarrow \\ \Rightarrow d & = 2 \cdot 0,5 = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad 2r & = & d \;=\; 1 \end{array}\right. \tag{4.20}$$

Aplicando a lei dos senos[3] para o $\triangle BCD$ e $\angle B\widehat{C}D = \alpha + \beta$, e utilizando a Lei dos Senos, mais a equação de 4.20, obteremos:

$$\begin{aligned} \frac{BD}{sen\ (\alpha+\beta)} &= d \qquad \Rightarrow \\ \Rightarrow \qquad \frac{BD}{sen\ (\alpha+\beta)} &= 1 \qquad \Rightarrow \\ \Rightarrow \qquad BD &= sen\ (\alpha+\beta) \end{aligned} \tag{4.21}$$

[3] *"Em qualquer triângulo, o quociente entre cada lado e o seno do ângulo oposto é constante e igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita."* [14]

Aplicando, ao quadrilátero $ABCD$, o teorema de Ptolomeu, e substituindo AC por 1 (por construção), mais as relações trigonométricas das equações 4.16, 4.17, 4.18, 4.19 e 4.21, chegaremos à equação 4.15, conforme proposto:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & AC & \cdot & BD & = & AB & \cdot & CD & + & AD & \cdot & BC & \Rightarrow \\
\Rightarrow & 1 & \cdot & sen\,(\alpha+\beta) & = & sen\,\alpha & \cdot & \cos\beta & + & sen\,\beta & \cdot & \cos\alpha & \Rightarrow
\end{array}
$$

$$
\Rightarrow \boxed{\quad sen\,(\alpha+\beta) \;=\; sen\,\alpha \;\cdot\; \cos\beta \;+\; sen\,\beta \;\cdot\; \cos\alpha \quad}
$$

■

4.5 Ptolomeu aplicado ao seno da diferença de dois arcos

A fórmula para o seno da diferença de arcos é:

$$sen\ (\alpha - \beta) \ = \ sen\ \alpha \cdot \cos\beta \ - \ sen\ \beta \cdot \cos\alpha \tag{4.22}$$

Assim, utilizando a figura 4.12, vamos determinar a equação 4.22.

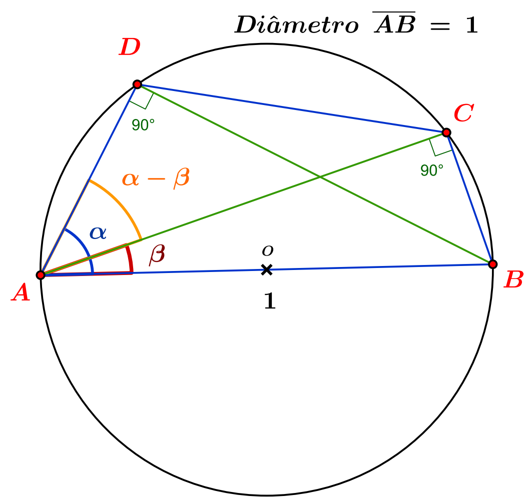


Figura 4.12: Seno da diferença

Em uma circunferência de diâmetro $\overline{AB}$ igual a 1, inscrevemos um quadrilátero $ABCD$, sendo um dos seus lados sobre o segmento $\overline{AB}$.

Sendo assim, os vértices D e C "enxergam" o segmento $\overline{AB}$, de um ângulo de 90° (ângulo reto). Então, podemos assinalar as seguintes relações trigonométricas para os triângulos:

4.5.1 No $\triangle ABC$ reto em C, e de ângulo $\angle B\widehat{A}C = \beta$, na figura 4.13, temos que:

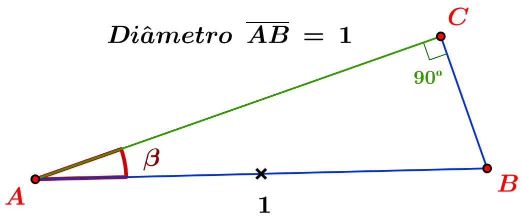


Figura 4.13: Triângulo ABC

$$\begin{cases} sen\ \beta = \dfrac{BC}{1} \quad \Rightarrow \quad BC = sen\ \beta & (4.23) \\[2em] \cos\ \beta = \dfrac{AC}{1} \quad \Rightarrow \quad AC = \cos\ \beta & (4.24) \end{cases}$$

4.5.2 No $\triangle ADB$ reto em D, e de ângulo $\angle B\widehat{A}D = \alpha$, ($\alpha > \beta$) na figura 4.14, temos que:

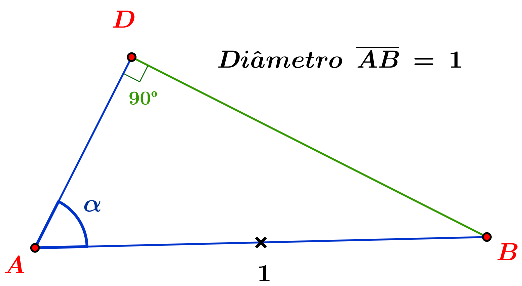


Figura 4.14: Triângulo ADB

$$\begin{cases} sen\ \alpha = \dfrac{BD}{1} \quad \Rightarrow \quad BD = sen\ \alpha & (4.25) \\[2em] \cos\ \alpha = \dfrac{AD}{1} \quad \Rightarrow \quad AD = \cos\ \alpha & (4.26) \end{cases}$$

4.5.3 Por construção, concluímos que, sendo o diâmetro da circunferência (d) igual a 1 e o seu raio (r) igual a $0,5$, temos que:

$$\begin{cases} \quad d = 2 \cdot r \Rightarrow \\ \Rightarrow d = 2 \cdot 0,5 = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad 2r = d = 1 \end{cases} \tag{4.27}$$

4.5.4 Da equação 4.27, e da lei dos senos, afirma-se que: *"Em qualquer triângulo, o quociente entre cada lado e o seno do ângulo oposto é constante e igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita"* (Apud, Fundamentos da Matemática Elementar: trigonometria, p. 229 [14]) para o $\triangle ADC$ e $\angle D\widehat{A}C = \alpha - \beta$, representado na figura 4.15. Assim, temos que:

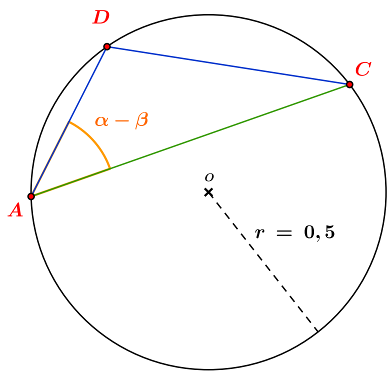


Figura 4.15: Lei dos senos no triângulo DAC

$$\frac{CD}{sen\ (\alpha - \beta)} = d \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{CD}{sen\ (\alpha - \beta)} = 1 \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad CD = sen\ (\alpha - \beta) \tag{4.28}$$

Agora, vamos obter a equação 4.22, através da substituição das equações 4.23, 4.24, 4.25, 4.26 e 4.28 e, com diâmetro $\overline{AB}$ por 1 (pela construção), no teorema de Ptolomeu ao caso que AB é um diâmetro.

$$
\begin{array}{rcccccccl}
AC & \cdot & BD & = & AB & \cdot & CD & + & AD \cdot BC \Rightarrow \\
\Rightarrow \cos\beta & \cdot & sen\ \alpha & = & 1 & \cdot & sen\ (\alpha-\beta) & + & \cos\alpha \cdot sen\ \beta \Rightarrow \\
\Rightarrow\ -[1 & \cdot & sen\ (\alpha-\beta)] & = & [-\cos\beta & \cdot & sen\ \alpha] & + & \cos\alpha \cdot sen\ \beta \Rightarrow \\
\Rightarrow & & sen\ (\alpha-\beta) & = & \cos\beta & \cdot & sen\ \alpha & - & \cos\alpha \cdot sen\ \beta \Rightarrow \\
\Rightarrow & & sen\ (\alpha-\beta) & = & sen\ \alpha & \cdot & \cos\beta & - & sen\ \beta \cdot \cos\alpha \Rightarrow
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{sen\ (\alpha-\beta) = sen\ \alpha \cdot \cos\beta - sen\ \beta \cdot \cos\alpha}$$

■

4.6 Ptolomeu aplicado ao cosseno da soma de dois arcos

Para determinarmos o cosseno da soma de dois arcos, geralmente utilizamos esta fórmula:

$$\cos\,(\alpha+\beta) \;=\; \cos\alpha\cdot\cos\beta \;-\; sen\;\alpha\cdot sen\;\beta \qquad (4.29)$$

Vamos determiná-la através da utilização do teorema de Ptolomeu. Inicialmente, vamos construir um quadrilátero $ABCD$, inscrito numa circunferência de raio r, tomando o cuidado para que um dos lados do quadrilátero, quer seja o lado $\overline{BC}$, seja o diâmetro da circunferência. Para melhor compreensão, vamos observar a figura 4.16.

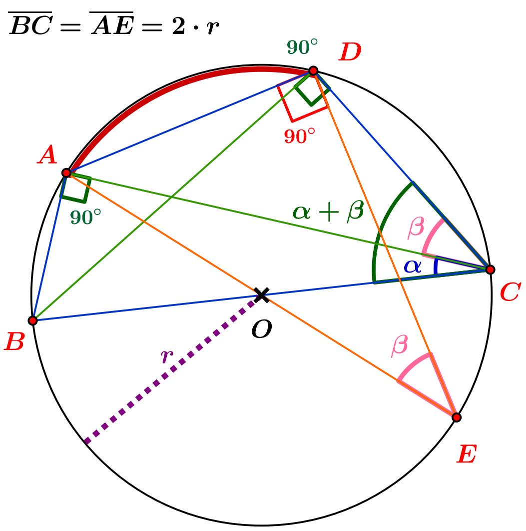


Figura 4.16: Cosseno da soma de arcos

Agora, traçamos uma semirreta de A, passando pelo centro da circunferência O, que irá interceptá-la no ponto denominado E. Observe que este segmento $\overline{AE}$ também é um diâmetro da circunferência e, unindo o ponto D ao ponto E, determinamos o segmento $\overline{DE}$.

Vamos nomear o ângulo $\angle A\widehat{C}B$ de α e, uma vez que os ângulos $\angle A\widehat{C}D$ e $\angle A\widehat{E}D$ se submetem ao mesmo arco $\widehat{\mathrm{AD}}$, podemos afirmar que:

$$\angle A\widehat{C}D \;\equiv\; \angle A\widehat{E}D \;=\; \beta.$$

4.6.1 Também, da mesma construção, depreendemos que:

$$BC \;=\; AE \;=\; 2 \cdot r.$$

4.6.2 Uma vez que o triângulo $\triangle ABC$ está inscrito em uma semicircunferência (figura 4.17), ele é um triângulo retângulo em A, e o mesmo vale para o triângulo $\triangle DBC$ em D; portanto, podemos escrever as seguintes relações trigonométricas:

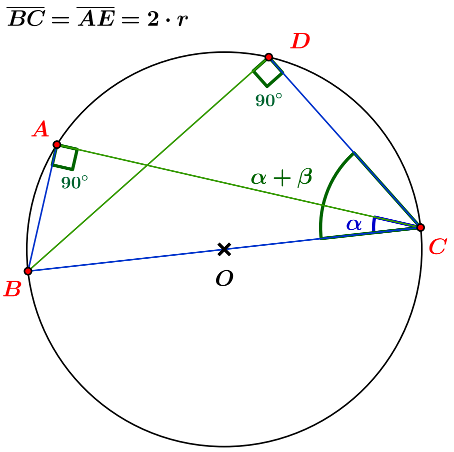


Figura 4.17: Triângulos ABC e DBC

4.6.2.1 no $\triangle ABC$

$$\begin{cases} sen\;\alpha \;=\; \dfrac{AB}{BC} \;\;\Rightarrow\;\; AB \;=\; BC \cdot\; sen\;\alpha & (4.30) \\[2ex] \cos\alpha \;=\; \dfrac{AC}{BC} \;\;\Rightarrow\;\; AC \;=\; BC \cdot\; \cos\alpha & (4.31) \end{cases}$$

4.6.2.2 no $\triangle DBC$ o ângulo $\angle B\widehat{C}D$ é igual a $\alpha + \beta$, assim:

$$\begin{cases} sen\ (\alpha+\beta) = \dfrac{BD}{BC} \Rightarrow BD = BC \cdot sen\ (\alpha+\beta) & (4.32) \\ \\ \cos\ (\alpha+\beta) = \dfrac{CD}{BC} \Rightarrow CD = BC \cdot \cos\ (\alpha+\beta) & (4.33) \end{cases}$$

4.6.3 O triângulo $\triangle DAE$ também é retângulo em D (figura 4.18), por se encontrar inscrito na semicircunferência de centro O de raio r.

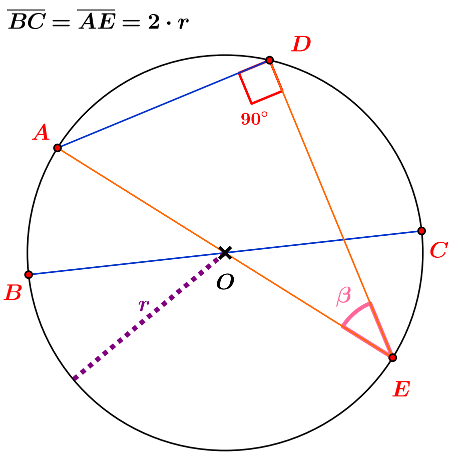


Figura 4.18: Triângulo DAE

4.6.3.1 Utilizando a igualdade 4.6, escrevemos as seguintes relações:

$$\begin{cases} sen\ \beta = \dfrac{AD}{AE} \Rightarrow \text{mas} \quad AE = BC \Rightarrow \\ \\ \Rightarrow sen\ \beta = \dfrac{AD}{BC} \Rightarrow AD = BC \cdot sen\ \beta \end{cases} \tag{4.34}$$

$$\begin{cases} \cos\beta = \dfrac{DE}{AE} \Rightarrow \text{mas} \quad AE = BC \Rightarrow \\ \\ \Rightarrow \cos\beta = \dfrac{DE}{BC} \Rightarrow \quad DE = BC \cdot \cos\beta \end{cases} \tag{4.35}$$

4.6.4 Aplicando o <u>teorema de Ptolomeu</u> ao quadrilátero $ABCD$, e utilizando as expressões 4.30, 4.31, 4.32, 4.33, 4.34, vamos determinar a equação inicial 4.29.

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overbrace{BC \cdot sen\ \beta} \cdot \overbrace{BC} + \overbrace{BC \cdot sen\ \alpha} \cdot \overbrace{BC \cdot \cos(\alpha+\beta)} =$$

$$= \overbrace{BC \cdot \cos\alpha} \cdot \overbrace{BC \cdot sen\ (\alpha+\beta)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (BC)^2 \cdot sen\ \beta + (BC)^2 \cdot sen\ \alpha \cdot \cos(\alpha+\beta) =$$

$$= (BC)^2 \cdot \cos\alpha \cdot sen\ (\alpha+\beta) \Rightarrow$$

4.6.4.1 Dividindo-se por $[(BC)^2]$, obtemos:

$$\Rightarrow sen\ \beta + sen\ \alpha \cdot \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot sen\ (\alpha+\beta) \Rightarrow$$

4.6.4.2 Substituindo [$sen\ (\alpha+\beta)$] por [$sen\ \alpha\cdot\cos\beta\ +\ sen\ \beta\cdot\cos\alpha$], obtemos:

$$\Rightarrow\ sen\,\beta\ +\ sen\ \alpha\ \cdot\ \cos\,(\alpha+\beta)\ =$$
$$=\cos\alpha\ \cdot\ [sen\ \alpha\cdot\cos\beta+sen\ \beta\cdot\cos\alpha]\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ sen\,\beta\ +\ sen\ \alpha\ \cdot\ \cos\,(\alpha+\beta)\ =$$
$$=\cos\alpha\cdot sen\ \alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot sen\ \beta\cdot\cos\alpha\ \Rightarrow$$

4.6.4.3 Dividindo-se por $[sen\ \alpha]$, obtemos:

$$\Rightarrow\ \frac{sen\ \beta}{sen\ \alpha}\ +\ \frac{sen\ \alpha\ \cdot\ \cos\,(\alpha+\beta)}{sen\ \alpha}=$$
$$=\frac{\cos\alpha\cdot sen\ \alpha\cdot\cos\beta}{sen\ \alpha}+\frac{\cos\alpha\cdot sen\ \beta\cdot\cos\alpha}{sen\ \alpha}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{sen\ \beta}{sen\ \alpha}\ +\ \cos\,(\alpha+\beta)\ =\ \cos\alpha\cdot\cos\beta\ +\ \frac{\cos^2\alpha\cdot sen\ \beta}{sen\ \alpha}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{sen\ \beta}{sen\ \alpha}\ +\ \cos\,(\alpha+\beta)\ =\ \cos\alpha\cdot\cos\beta\ +\ \cos^2\alpha\cdot\frac{sen\ \beta}{sen\ \alpha}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \cos\,(\alpha+\beta)\ =\ \cos\alpha\cdot\cos\beta\ +\ \cos^2\alpha\cdot\frac{sen\ \beta}{sen\ \alpha}-\frac{sen\ \beta}{sen\ \alpha}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha+\beta) \; = \; \cos\alpha\cdot\cos\beta \; + \; \frac{sen\ \beta}{sen\ \alpha}\cdot[\,\cos^2\alpha \; - \; 1\,] \; \Rightarrow$$

4.6.4.4 Substituindo-se a relação fundamental da trigonometria temos que:

$$\Rightarrow sen^2\ \alpha \; + \; \cos^2\alpha \; = \; 1 \; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow sen^2\ \alpha \; = \; 1 \; - \; \cos^2\alpha \; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -sen^2\ \alpha \; = \; \cos^2\alpha \; - \; 1$$

Logo:

$$\Rightarrow \cos(\alpha+\beta) \; = \; \cos\alpha\cdot\cos\beta \; + \; \frac{sen\ \beta}{sen\ \alpha}\cdot[-sen^2\ \alpha] \; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha+\beta) \; = \; \cos\alpha\cdot\cos\beta \; - \; \frac{sen\ \beta\cdot sen^2\ \alpha}{sen\ \alpha} \; \Rightarrow$$

Obtemos, assim, a equação 4.29, tal como pretendido:

$$\Rightarrow \boxed{\cos(\alpha+\beta) \; = \; \cos\alpha\cdot\cos\beta \; - \; sen\ \alpha\cdot sen\ \beta}$$

■

4.7 Ptolomeu aplicado ao cosseno da diferença de dois arcos

A expressão usual para o cálculo do cosseno da diferença de dois arcos é:

$$\cos(\alpha - \beta) \; = \; \cos\alpha \cdot \cos\beta \; + \; sen\,\alpha \cdot sen\,\beta \tag{4.36}$$

Vamos, então, determinar a equação 4.36, utilizando o teorema de Ptolomeu.

Construímos um quadrilátero $ABCD$, inscrito em uma circunferência, figura 4.19, de raio r, sendo o lado $\overline{BC}$ o seu diâmetro.

Traçamos uma semirreta do ponto D, passando pelo ponto O, que encontra a circunferência em E, formando um segmento (em forma de diâmetro), denominado $\overline{DE}$.

Vamos nomear os ângulos $\angle A\widehat{B}C$ de α e o $\angle D\widehat{B}C$ de β.

Ligando o ponto A ao E, formamos o ângulo $\angle A\widehat{E}D$ que, juntamente com o ângulo $\angle A\widehat{B}D$, submetem-se ao mesmo arco $\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$. Assim sendo, temos que:

$$\angle A\widehat{B}D \; \equiv \; \angle A\widehat{E}D \; = \; \alpha \; - \; \beta \tag{4.37}$$

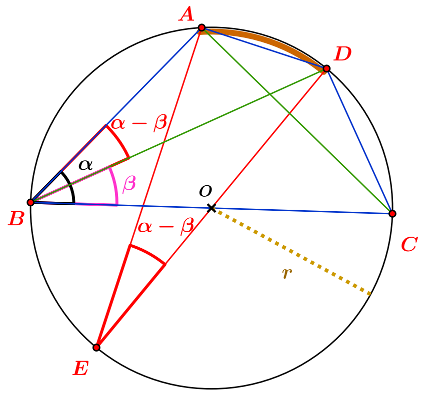


Figura 4.19: Quadrilátero $ABCD$ e ângulo inscrito

4.7.1 Os triângulos $\triangle BCA$ e $\triangle BCD$, por se encontrarem inscritos em uma semicircunferência (figura 4.20), são triângulos retângulos. Sendo assim, podemos relacionar:

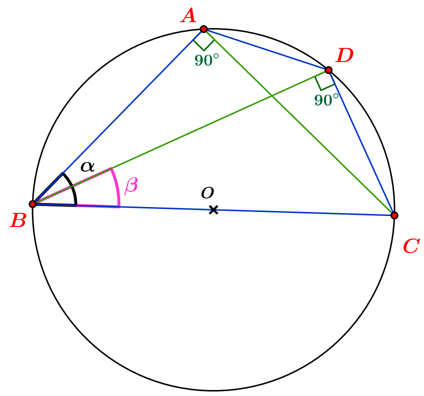


Figura 4.20: Triângulos BCA e BCD

No $\triangle BCA$:

$$\begin{cases} sen\ \alpha = \dfrac{AC}{BC} \quad \Rightarrow \quad AC = BC \cdot sen\ \alpha & (4.38) \\ \\ \cos\alpha = \dfrac{AB}{BC} \quad \Rightarrow \quad AB = BC \cdot \cos\alpha & (4.39) \end{cases}$$

No $\triangle BCD$:

$$\begin{cases} sen\ \beta = \dfrac{CD}{BC} \quad \Rightarrow \quad CD = BC \cdot sen\ \beta & (4.40) \\ \\ \cos\beta = \dfrac{BD}{BC} \quad \Rightarrow \quad BD = BC \cdot \cos\beta & (4.41) \end{cases}$$

4.7.2 Os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$ são diâmetros (figura 4.21). Deste modo, podemos afirmar que:

$$BC \ = \ DE \tag{4.42}$$

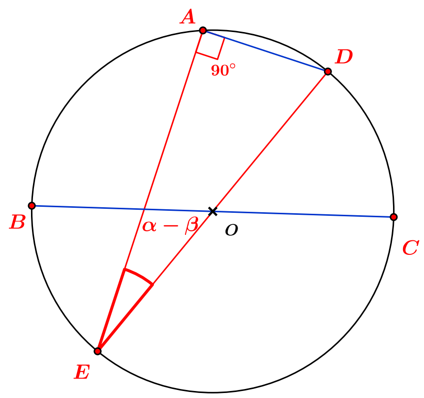


Figura 4.21: Triângulo AED

No $\triangle BCD$:

$$\begin{cases} \quad sen\ (\alpha - \beta) = \dfrac{AD}{DE} \Rightarrow \quad \text{mas} \quad DE = BC \Rightarrow \\ \\ \Rightarrow \ sen\ (\alpha - \beta) = \dfrac{AD}{BC} \Rightarrow AD = BC \cdot sen\ (\alpha - \beta) \end{cases} \tag{4.43}$$

$$\begin{cases} \quad \cos\ (\alpha - \beta) = \dfrac{AE}{DE} \Rightarrow \quad \text{mas} \quad DE = BC \Rightarrow \\ \\ \Rightarrow \ \cos\ (\alpha - \beta) = \dfrac{AE}{BC} \Rightarrow AE = BC \cdot \cos\ (\alpha - \beta) \end{cases} \tag{4.44}$$

4.7.3 Analisando a figura 4.22, o triângulo $\triangle BOD$ tem os dois lados $\overline{OD}$ e $\overline{OB}$, como sendo seus raios pertencentes à circunferência. Assim, o triângulo é isósceles; portanto, os dois ângulos da base são congruentes. Logo:

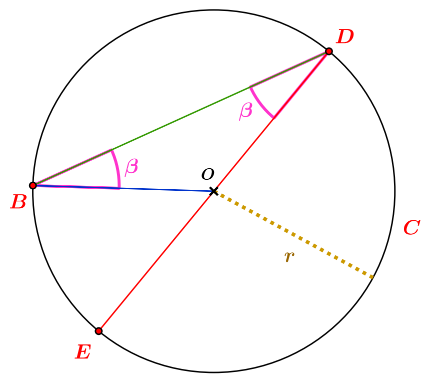


Figura 4.22: Triângulo BOD

$$\angle D\widehat{B}0 \equiv \angle B\widehat{D}0 = \beta \tag{4.45}$$

4.7.4 O $\triangle BED$ também se encontra inscrito na semicircunferência de diâmetro $\overline{ED}$. Logo, este triângulo é retângulo em B, figura 4.23, o que possibilita determinar que:

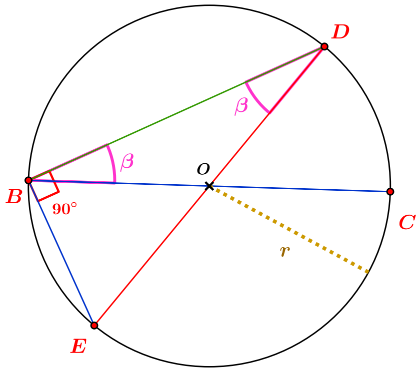


Figura 4.23: Triângulo BED

$$\left\{\begin{array}{rcl} sen\ \beta & = & \dfrac{BE}{DE} \Rightarrow \text{ mas } \quad DE = BC \Rightarrow \\ \\ \Rightarrow\ sen\ \beta & = & \dfrac{BE}{BC} \Rightarrow \quad BE = BC \cdot sen\ \beta \end{array}\right. \tag{4.46}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \cos\beta & = & \dfrac{BD}{DE} \Rightarrow \text{ mas } \quad DE = BC \Rightarrow \\ \\ \Rightarrow\ \cos\beta & = & \dfrac{BD}{BC} \Rightarrow \quad BD = BC \cdot \cos\beta \end{array}\right. \tag{4.47}$$

4.7.5 Ao ligarmos o ponto B ao ponto E, formamos mais um quadrilátero: $ABED$.

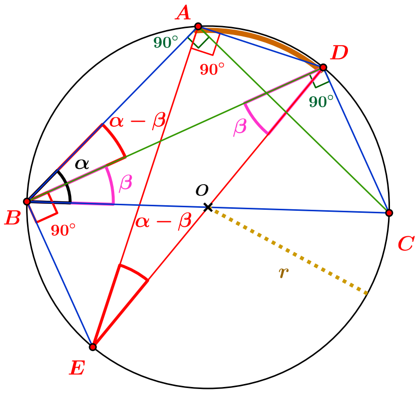


Figura 4.24: Quadriláteros $ABCD$ e $ABED$

4.7.6 Aplicando o <u>teorema de Ptolomeu</u> ao quadrilátero $ABED$ da figura 4.24, determinaremos a equação 4.36, substituindo as igualdades: 4.39, 4.41 ou 4.47, 4.42, 4.43, 4.44 e 4.46.

$$AE \cdot BD = AB \cdot DE + AD \cdot BE \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overbrace{BC \cdot \cos(\alpha - \beta)} \cdot \overbrace{BC \cdot \cos\beta} =$$

$$= \overbrace{BC \cdot \cos\alpha} \cdot \overbrace{BC} + \overbrace{BC \cdot sen\,(\alpha - \beta)} \cdot \overbrace{BC \cdot sen\,\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (BC)^2 \cdot \cos(\alpha - \beta) \cdot \cos\beta =$$

$$= (BC)^2 \cdot \cos\alpha + (BC)^2 \cdot sen\,(\alpha - \beta) \cdot sen\,\beta \Rightarrow$$

4.7.6.1 Dividindo-se por $[(BC)^2]$, obtemos:

$$\Rightarrow \cos(\alpha - \beta) \cdot \cos\beta = \cos\alpha + sen\,(\alpha - \beta) \cdot sen\,\beta \Rightarrow$$

4.7.6.2 Dividindo-se por $[\cos\beta]$, obtemos:

$$\Rightarrow \frac{\cos\,(\alpha-\beta) \quad \cdot \quad \cos\beta}{\cos\beta} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \quad + \quad \frac{sen\ (\alpha-\beta) \quad \cdot \quad sen\ \beta}{\cos\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos\,(\alpha-\beta) \;=\; \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \quad + \quad \frac{sen\ (\alpha-\beta) \quad \cdot \quad sen\ \beta}{\cos\beta} \quad \Rightarrow$$

4.7.6.3 Substituindo $[\ sen\ (\alpha-\beta)\ ]$ por $[\ sen\ \alpha\cdot\cos\beta\ -\ sen\ \beta\cdot\cos\alpha\ ]$, obtemos:

$$\Rightarrow \quad \cos\,(\alpha{-}\beta) = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \quad + \quad \frac{[\,sen\ \alpha\cdot\cos\beta - sen\ \beta\cdot\cos\alpha\,]\cdot sen\ \beta}{\cos\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos\,(\alpha{-}\beta) = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \quad + \quad \frac{sen\ \alpha\cdot sen\ \beta\cdot\cos\beta}{\cos\beta} - \frac{sen^2\ \beta\cdot\cos\alpha}{\cos\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos\,(\alpha-\beta) \;=\; \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \quad + \quad sen\ \alpha\cdot sen\ \beta \ - \ \frac{sen^2\ \beta\cdot\cos\alpha}{\cos\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos\,(\alpha-\beta) \;=\; \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \quad + \quad sen\ \alpha\cdot sen\ \beta \ - \ sen^2\ \beta\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \Rightarrow$$

4.7.6.4 Colocando em evidência no segundo membro da expressão $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$, obtemos:

$$\Rightarrow \quad \cos(\alpha - \beta) = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \quad \cdot [1 - sen^2\,\beta] + \quad sen\,\alpha \cdot sen\,\beta \Rightarrow$$

4.7.6.5 A relação fundamental da trigonometria é $sen^2\,\beta + \cos^2\beta = 1$, logo: $[\cos^2\beta = 1 - sen^2\,\beta]$. Substituindo, temos que:

$$\Rightarrow \quad \cos(\alpha - \beta) = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \quad \cdot \cos^2\beta + \quad sen\,\alpha \cdot sen\,\beta \Rightarrow$$

Chegamos à expressão 4.36, a objetivada:

$$\Rightarrow \quad \boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + sen\,\alpha \cdot sen\,\beta}$$

■

Capítulo 5

Método: Aplicando o Teorema em Sala de Aula

Para melhor desenvolvimento do tema proposto, segue uma sequência utilizada, para apresentar aos alunos, da 2ª série do Ensino Médio, do período noturno, do ano letivo de 2013, na Escola Estadual Senador Paulo Egydio de Oliveira Carvalho, juresdicionada à Diretoria de Ensino Região Leste 5 - Capital.

Com o intuito de verificar o grau de conhecimento pré-existente dos estudantes, foi aplicado um questionário, uma semana antes da respectiva aula, que durou apenas dez minutos, a qual foi intitulada de avaliação diagnóstica, procurando associar conceitos matemáticos tratados no teorema.

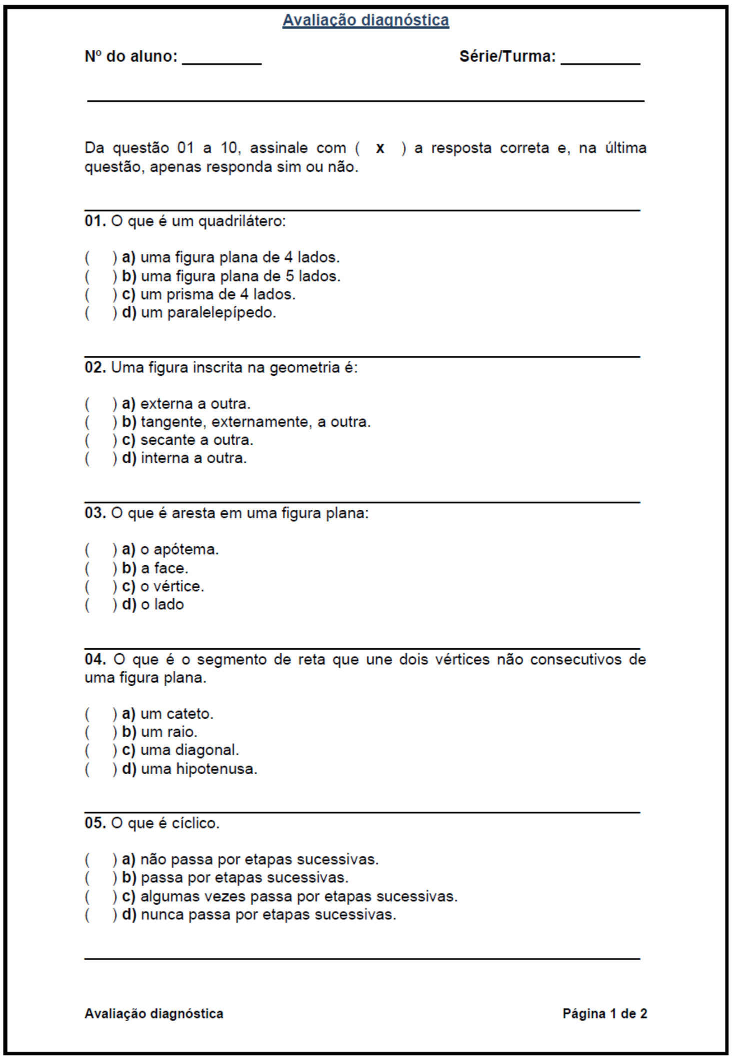
Após análise dos dados, foram escolhidas três maneiras diferentes de fomentar o aluno para o aprendizado do teorema de Ptolomeu. Foram escolhidas, aleatoriamente, uma turma que foi denominada de turma A, para aplicar a oficina de "régua graduada e compasso", turma B, para a oficina de "E.V.A."[1] e a turma C para a atividade, utilizando o software GeoGebra.

Apresentamos uma quarta proposta de desenvolvimento do tema, utilizando o desenho geométrico, que não foi aplicada em sala-de-aula, por necessitar de conhecimentos de resolução gráfica de expressões algébricas que, infelizmente, não faz parte do currículo do Estado de São Paulo. Porém ficará como sugestão para que o docente, que reconhecer que sua turma tem condições de acompanhar o raciocínio necessário em, aproximadamente mais duas aulas o que será uma maneira atraente de se adquirir conhecimento.

[1] E.V.A., sigla de Etil Vinil Acetato, é um polímero emborrachado, popularmente conhecido como espuma de borracha.

5.1 Avaliação diagnóstica

Para analisar o nível de conhecimento sobre conceitos matemáticos, necessária para aplicar o teorema de Ptolomeu, formulou-se dez questões de múltipla escolha e uma "sim ou não", atividade 01, figuras 5.1 e 5.2, aplicadas a cento e quinze alunos.



Avaliação diagnóstica

Nº do aluno: ________ **Série/Turma:** ________

Da questão 01 a 10, assinale com (**x**) a resposta correta e, na última questão, apenas responda sim ou não.

01. O que é um quadrilátero:

( ) **a)** uma figura plana de 4 lados.
( ) **b)** uma figura plana de 5 lados.
( ) **c)** um prisma de 4 lados.
( ) **d)** um paralelepípedo.

02. Uma figura inscrita na geometria é:

( ) **a)** externa a outra.
( ) **b)** tangente, externamente, a outra.
( ) **c)** secante a outra.
( ) **d)** interna a outra.

03. O que é aresta em uma figura plana:

( ) **a)** o apótema.
( ) **b)** a face.
( ) **c)** o vértice.
( ) **d)** o lado

04. O que é o segmento de reta que une dois vértices não consecutivos de uma figura plana.

( ) **a)** um cateto.
( ) **b)** um raio.
( ) **c)** uma diagonal.
( ) **d)** uma hipotenusa.

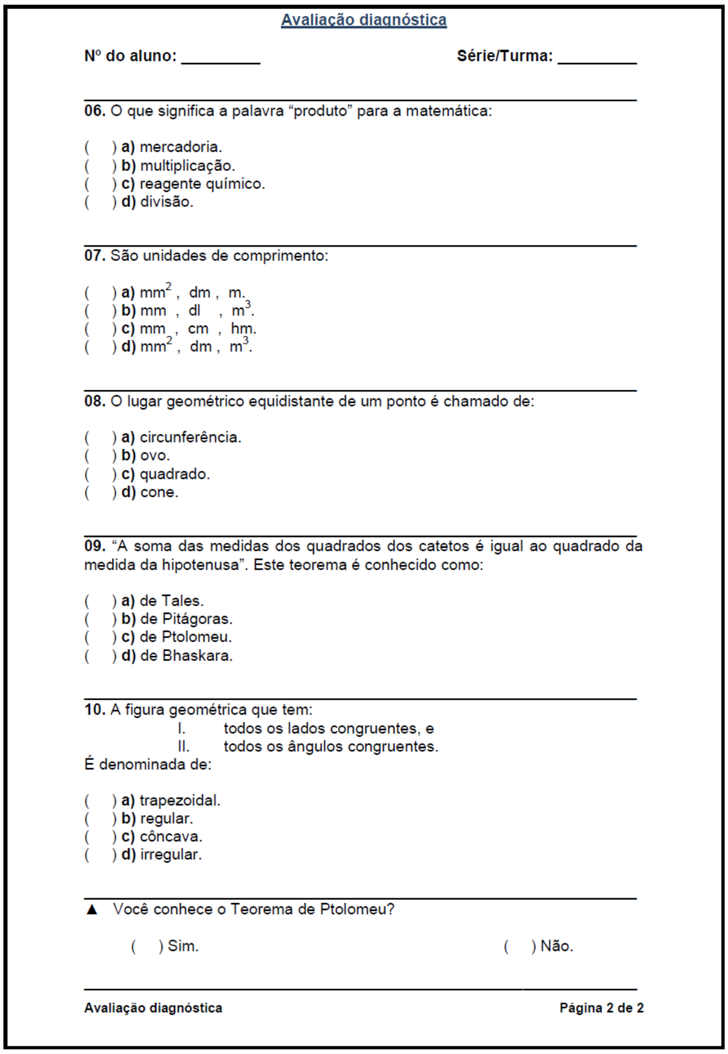
05. O que é cíclico.

( ) **a)** não passa por etapas sucessivas.
( ) **b)** passa por etapas sucessivas.
( ) **c)** algumas vezes passa por etapas sucessivas.
( ) **d)** nunca passa por etapas sucessivas.

Avaliação diagnóstica **Página 1 de 2**

Figura 5.1: Formulário da atividade 01 (frente da folha)

Apresentamos o verso do formulário na figura 5.2.



Avaliação diagnóstica

Nº do aluno: ________ **Série/Turma:** ________

06. O que significa a palavra "produto" para a matemática:

( ) **a)** mercadoria.
( ) **b)** multiplicação.
( ) **c)** reagente químico.
( ) **d)** divisão.

07. São unidades de comprimento:

( ) **a)** mm^2 , dm , m.
( ) **b)** mm , dl , m^3.
( ) **c)** mm , cm , hm.
( ) **d)** mm^2 , dm , m^3.

08. O lugar geométrico equidistante de um ponto é chamado de:

( ) **a)** circunferência.
( ) **b)** ovo.
( ) **c)** quadrado.
( ) **d)** cone.

09. "A soma das medidas dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa". Este teorema é conhecido como:

( ) **a)** de Tales.
( ) **b)** de Pitágoras.
( ) **c)** de Ptolomeu.
( ) **d)** de Bhaskara.

10. A figura geométrica que tem:
I. todos os lados congruentes, e
II. todos os ângulos congruentes.
É denominada de:

( ) **a)** trapezoidal.
( ) **b)** regular.
( ) **c)** côncava.
( ) **d)** irregular.

▲ Você conhece o Teorema de Ptolomeu?

( ) Sim. ( ) Não.

Avaliação diagnóstica **Página 2 de 2**

Figura 5.2: Formulário da atividade 01 (verso da folha)

Analisando as respostas dos discentes, segue o seguinte resultado:

Questão 01: O que é um quadrilátero?

a) uma figura plana de 4 lados. (◀ *resposta esperada*)

b) uma figura plana de 5 lados.

c) um prisma de 4 lados.

d) um paralelepípedo.

Tabela estatística e gráfico de resultados:

Questão 01			
Alternativa	**Resposta**	**Percentual**	**Correta**
a	81	70,43 %	$\Leftarrow$
b	2	1,74 %	
c	75	21,74 %	
d	7	6,09 %	
Total	115	100,00 %	

Tabela 5.1: Dados estatísticos (questão 01)

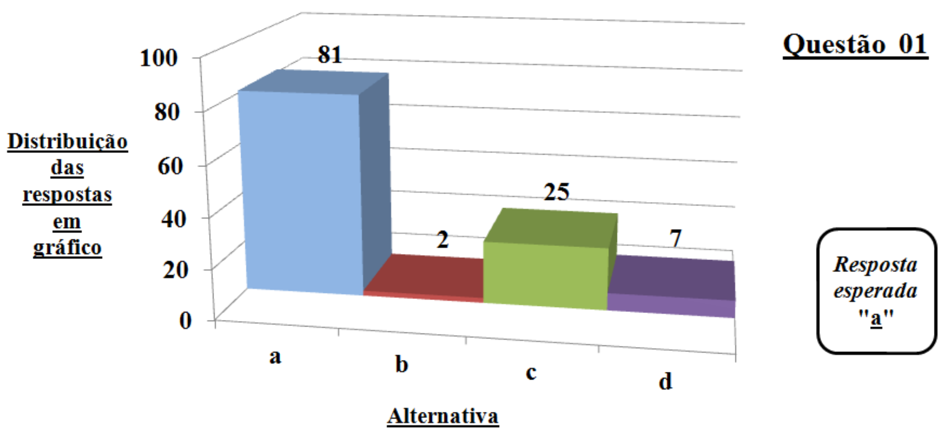


Figura 5.3: Gráfico de colunas (questão 01)

Conforme o Currículo do Estado de São Paulo, na área de Matemática e suas tecnologias (p. 58) [21], os alunos iniciam o aprendizado sobre formas geométricas (planas e espaciais) na 5ª série (6º ano) do Ensino Fundamental, para que possam identificar e classificar formas planas e espaciais em contextos concretos, por meio de suas representações em desenhos e malhas[2].

A resposta esperada dos alunos atingiu 70,43%.

. . . .

Questão 02: Uma figura inscrita na geometria é:

a) externa a outra.

b) tangente, externamente, a outra.

c) secante a outra.

d) interna a outra. (◀ *resposta esperada*)

Tabela estatística e gráfico de resultados:

Questão 02			
Alternativa	**Resposta**	**Percentual**	**Correta**
a	21	18,26 %	
b	37	32,17 %	
c	8	6,96 %	
d	49	42,61 %	$\Leftarrow$
Total	115	100,00 %	

Tabela 5.2: Dados estatísticos (questão 02)

[2]Malha quadriculada são as diversas variações e deformações possíveis do papel quadriculado, e sua função é ajudar o aluno na observação das formas geométricas.

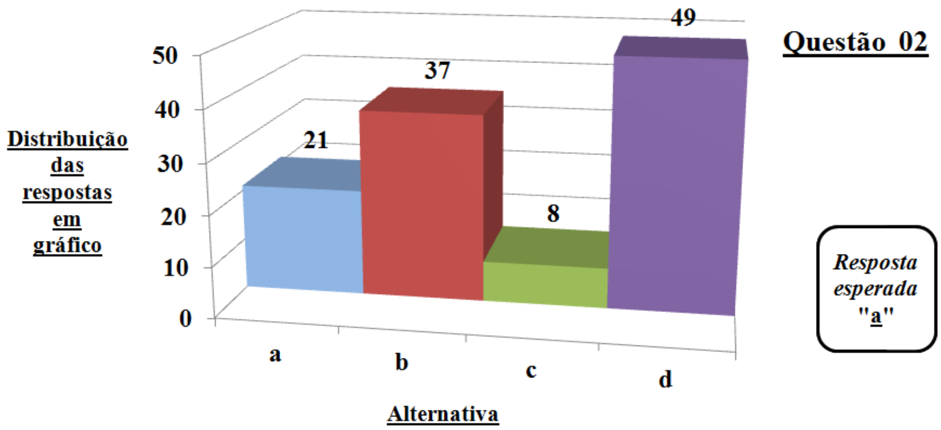


Figura 5.4: Gráfico de colunas (questão 02)

O estudante da 5ª série, (ibid., p. 58) [21], quando realiza o cálculo de área pelo recurso de composição e decomposição de figuras, tem contato com as expressões inscritas e circunscritas.

A resposta esperada dos alunos atingiu 42,61%.

. . . .

Questão 03: O que é aresta em uma figura plana?

a) o apótema.

b) a face.

c) o vértice.

d) o lado. (◄ *resposta esperada*)

Tabela estatística e gráfico de resultados:

Questão 03			
Alternativa	**Resposta**	**Percentual**	**Correta**
a	16	13,91 %	
b	18	15,65 %	
c	32	27,83 %	
d	49	42,61 %	⇐
Total	115	100,00 %	

Tabela 5.3: Dados estatísticos (questão 03)

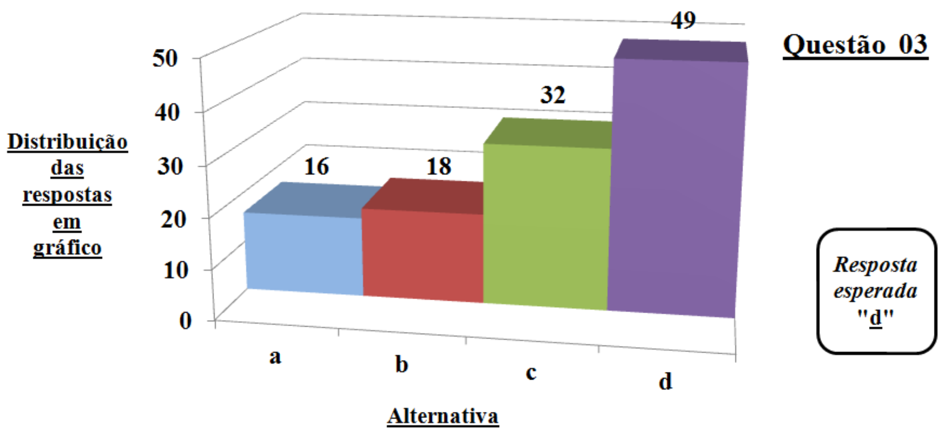


Figura 5.5: Gráfico de colunas (questão 03)

O conteúdo necessário para compreender o significado de aresta, (ibid., p. 58) [21], é explicado ao aluno na 5ª série (6º ano) do Ensino Fundamental, no conteúdo de formas planas, quando desenvolvemos as habilidades de identificar e classificar formas planas e espaciais em contextos concretos, por meio de suas representações em desenhos e malhas.

A resposta esperada dos alunos atingiu 42,61%.

. . . .

Questão 04: O que é um segmento de reta que une dois vértices não consecutivos de uma figura plana.

a) um cateto.

b) um raio.

c) uma diagonal. (◄ *resposta esperada*)

d) uma hipotenusa.

Tabela estatística e gráfico de resultados:

Questão 04			
Alternativa	**Resposta**	**Percentual**	**Correta**
a	26	22,61 %	
b	22	19,13 %	
c	31	26,96 %	⇐
d	36	31,30 %	
Total	115	100,00 %	

Tabela 5.4: Dados estatísticos (questão 04)

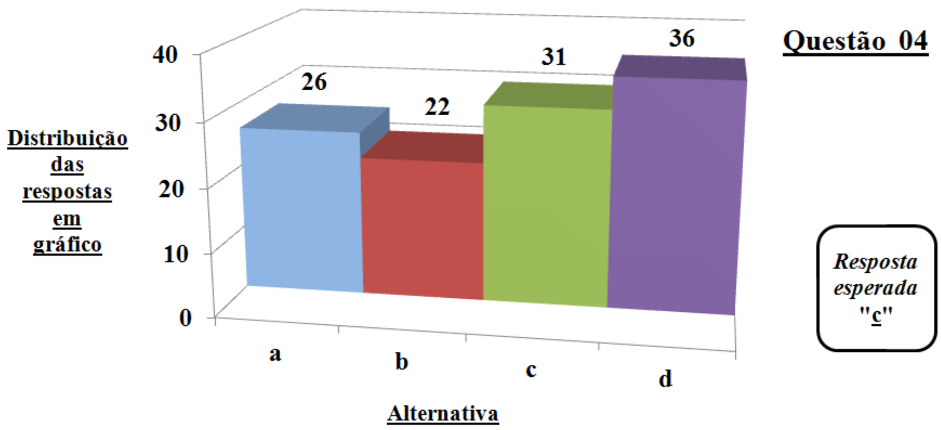


Figura 5.6: Gráfico de colunas (questão 04)

No conteúdo de geometria de formas planas, o aluno toma conhecimento dos seus elementos, (ibid., p. 58) [21], na 5ª série (6º ano) do Ensino Fundamental.

A resposta esperada dos alunos atingiu 26,96%.

. . . .

Questão 05: O que é cíclico?

a) não passa por etapas sucessivas.

b) passa por etapas sucessivas. (◄ *resposta esperada*)

c) algumas vezes passa por etapas sucessivas.

d) nunca passa por etapas sucessivas.

Tabela estatística e gráfico de resultados:

Questão 05			
Alternativa	**Resposta**	**Percentual**	**Correta**
a	11	9,57 %	
b	71	61,74 %	⇐
c	21	18,26 %	
d	12	10,43 %	
Total	115	100,00 %	

Tabela 5.5: Dados estatísticos (questão 05)

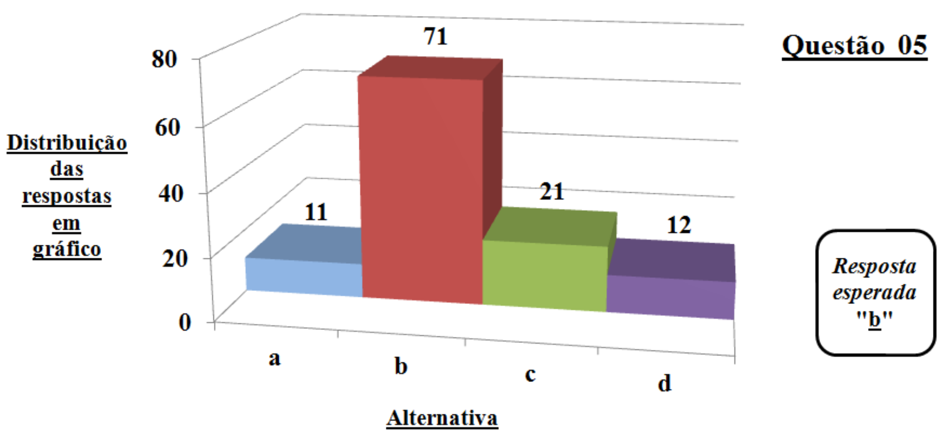


Figura 5.7: Gráfico de colunas (questão 05)

A ideia de cíclico encontra-se associada ao cotidiano das pessoas, que a podem relacionar com: o nascer e pôr do sol, o batimento cardíaco, os ponteiros do relógio, dentre outros.

A resposta esperada dos alunos atingiu 61,74%.

. . . .

Questão 06: O que significa a palavra “produto” para a matemática:

a) mercadoria.

b) multiplicação. (◄ *resposta esperada*)

c) reagente químico.

d) divisão.

Tabela estatística e gráfico de resultados:

Questão 06			
Alternativa	**Resposta**	**Percentual**	**Correta**
a	30	26,09 %	
b	60	52,18 %	⇐
c	12	10,43 %	
d	13	11,30 %	
Total	115	100,00 %	

Tabela 5.6: Dados estatísticos (questão 06)

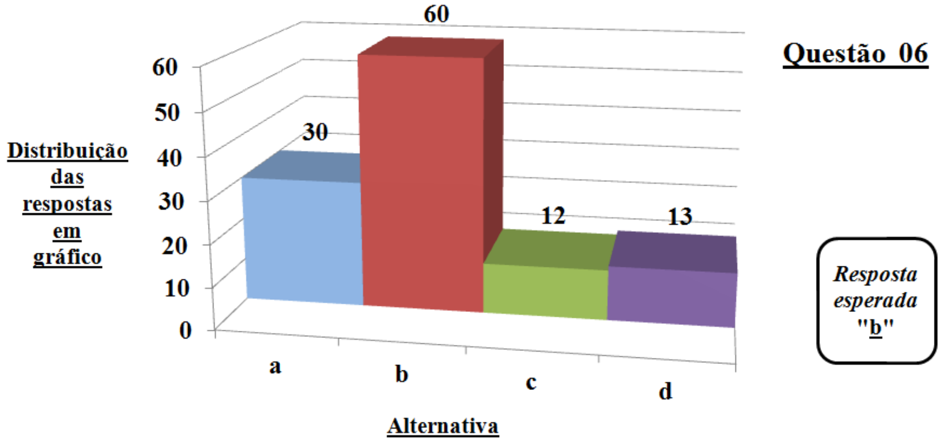


Figura 5.8: Gráfico de colunas (questão 06)

Quando o estudante aprende o algoritmo da multiplicação, o educando nomeia os seus elementos, tais como: $fator \times fator = produto$, surgindo assim a palavra produto, conceito que é repetido na 5ª série (6º ano) do Ensino Fundamental, no conteúdo de números naturais, nas operações básicas.

A resposta esperada dos alunos atingiu 52,18%.

. . . .

Questão 07: São unidades de comprimento:

a) mm^2, dm , m.

b) mm , dl , m^3.

c) mm , cm , hm. (◄ *resposta esperada*)

d) mm^2, dm , m^3.

Tabela estatística e gráfico de resultados:

Questão 07			
Alternativa	**Resposta**	**Percentual**	**Correta**
a	25	21,74 %	
b	8	6,96 %	
c	66	57,39 %	$\Leftarrow$
d	16	13,91 %	
Total	115	100,00 %	

Tabela 5.7: Dados estatísticos (questão 07)

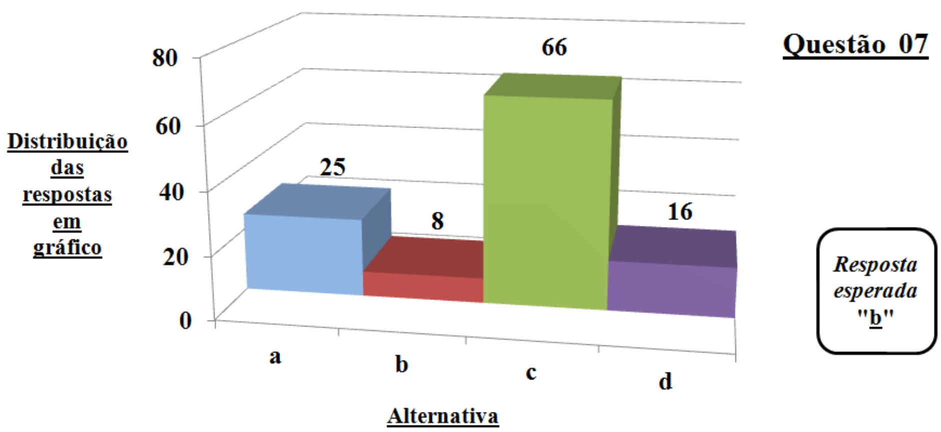


Figura 5.9: Gráfico de colunas (questão 07)

O conteúdo de medidas de comprimento é ministrado na 5ª série (6º ano) do Ensino Fundamental, que tem por objetivo desenvolver a habilidade do aluno em saber realizar medidas, utilizando padrões e unidades não convencionais; conhecer diversos sistemas de medidas e saber as principais características do sistema métrico decimal: unidades de medida (comprimento, massa, capacidade) e transformações de unidades (ibid., p. 58). [21]

A resposta esperada dos alunos atingiu 57,39%.

. . . .

Questão 08: O lugar geométrico equidistante de um ponto é chamado de:

a) circunferência. (◀ *resposta esperada*)

b) ovo.

c) quadrado.

d) cone.

Tabela estatística e gráfico de resultados:

Questão 08			
Alternativa	**Resposta**	**Percentual**	**Correta**
a	83	72,17 %	$\Leftarrow$
b	6	5,22 %	
c	11	9,57 %	
d	15	13,04 %	
Total	115	100,00 %	

Tabela 5.8: Dados estatísticos (questão 08)

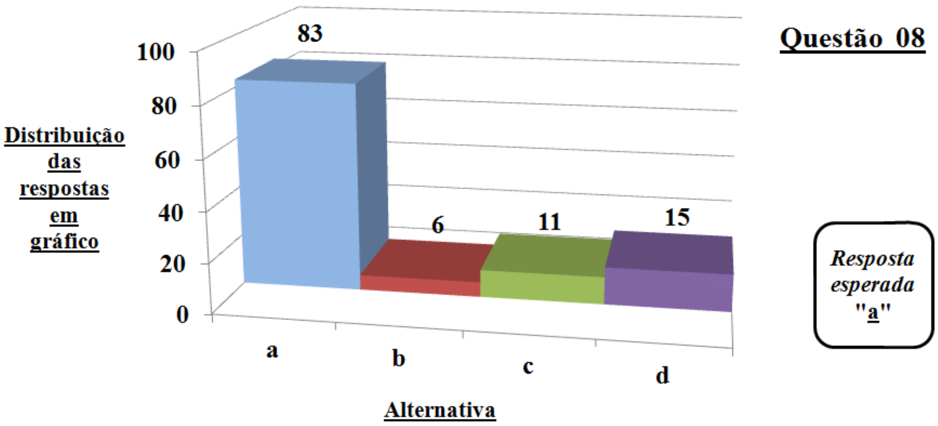


Figura 5.10: Gráfico de colunas (questão 08)

Os alunos tomam conhecimento sobre corpos redondos na geometria, na 8ª série (9º ano) do Ensino Fundamental (ibid., p. 64) [21], através do conteúdo número π, circunferência, o círculo e suas partes, área do círculo, com a finalidade de desenvolverem as habilidades de conhecer a circunferência, seus principais elementos, suas características e suas partes.

A resposta esperada dos alunos atingiu 72,17%.

. . . .

Questão 09: "A soma das medidas dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa". Este teorema é conhecido como:

a) de Tales.

b) de Pitágoras. (◄ *resposta esperada*)

c) de Ptolomeu.

d) de Bháskara.

Tabela estatística e gráfico de resultados:

Questão 09			
Alternativa	**Resposta**	**Percentual**	**Correta**
a	9	7,83 %	
b	90	78,25 %	$\Leftarrow$
c	5	4,35 %	
d	11	9,57 %	
Total	115	100,00 %	

Tabela 5.9: Dados estatísticos (questão 09)

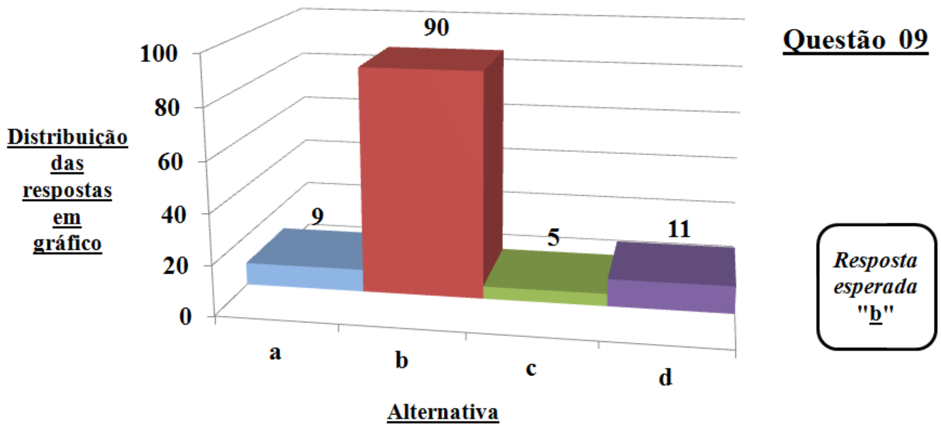


Figura 5.11: Gráfico de colunas (questão 09)

O Teorema de Pitágoras é ensinado, (ibid., p. 62) [21], na 7ª série (8º ano), com a finalidade de desenvolver a habilidade de compreender o significado do mesmo, utilizando-o na solução de problemas em diferentes contextos.

A resposta esperada dos alunos atingiu 78,25%.

. . . .

Questão 10: A figura geométrica que tem:

I. todos os lados congruentes e

II. todos os ângulos congruentes.

É denominada de:

a) trapezoidal.

b) regular. (◀ *resposta esperada*)

c) côncava.

d) irregular.

Tabela estatística e gráfico de resultados:

Questão 10			
Alternativa	**Resposta**	**Percentual**	**Correta**
a	18	15,65 %	
b	66	57,39 %	⇐
c	21	18,26 %	
d	10	8,70 %	
Total	115	100,00 %	

Tabela 5.10: Dados estatísticos (questão 10)

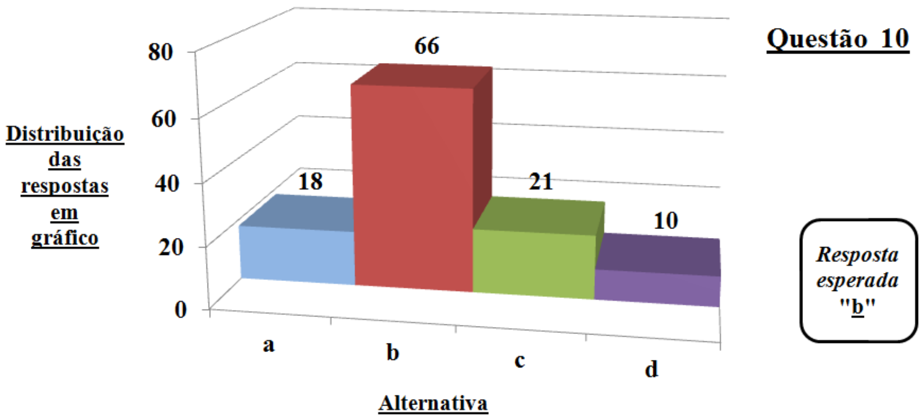


Figura 5.12: Gráfico de colunas (questão 10)

Para os alunos da 6ª série (7º ano) do Ensino Fundamental, o conteúdo de geometria (ângulos, polígonos, circunferência, simetrias, construções geométricas) tem por finalidade desenvolver as habilidades dos estudantes em compreender a ideia de medida de ângulo (em grau); saber operar com medidas de ângulos e utilizar instrumentos geométricos para construir e medir ângulos; saber calcular a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e estender tal cálculo para polígonos de n lados; saber aplicar os conhecimentos sobre a soma das medidas dos ângulos de um triângulo e de um polígono em situações práticas (ibid., p. 59). [21]

A resposta esperada dos alunos atingiu 57,39%.

. . . .

Questão Extra: Você conhece o Teorema de Ptolomeu?

( ) Não.

( ) Sim.

Tabela estatística e gráfico de resultados:

Questão Extra		
Alternativa	**Resposta**	**Percentual**
Não	95	82,61 %
Sim	20	14,39 %
Total	115	100,00 %

Tabela 5.11: Dados estatísticos (questão extra)

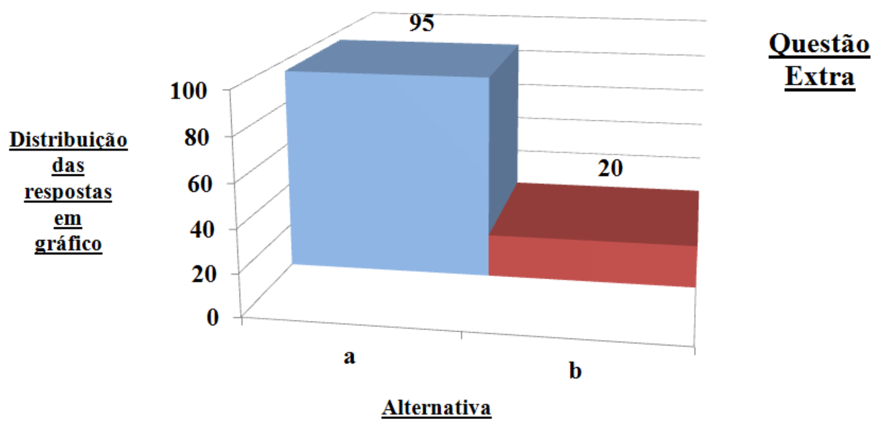


Figura 5.13: Gráfico de colunas (questão extra)

Dado que o teorema de Ptolomeu não faz parte do conteúdo sugerido pelo Currículo do Estado de São Paulo [21], é esperado um percentual alto de desconhecimento do mesmo.

A resposta dos alunos que o conhecem foi de 14,39%; e, daqueles que não, 82,61%.

....

▲ Conclusão

Efetuando-se a média aritmética ($M.A.$) entre as respostas esperadas das 10 questões sugeridas obtemos:

$$M.A. = \frac{70{,}43 + 42{,}61 + 42{,}61 + 26{,}96 + 61{,}74 + 52{,}18 + 57{,}39 + 72{,}17 + 78{,}25 + 57{,}39}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad M.A. = 56,173\%$$

Verificamos que a média aritmética de 56,173%, está muito longe do objetivo daquela esperada por qualquer professor. Sendo assim, torna-se necessário, antes de iniciar o desenvolvimento das aulas propostas, uma retomada de conteúdos, utilizando-se de uma aula suplementar de 50 minutos, para as turmas da Escola em questão.

5.2 Utilizando régua graduada e compasso

Na atividade 02, utilizaremos régua graduada e compasso com a turma denominada A, na construção de um quadrilátero inscrito em uma circunferência.

Forneceu-se, a cada aluno, os seguintes materiais:

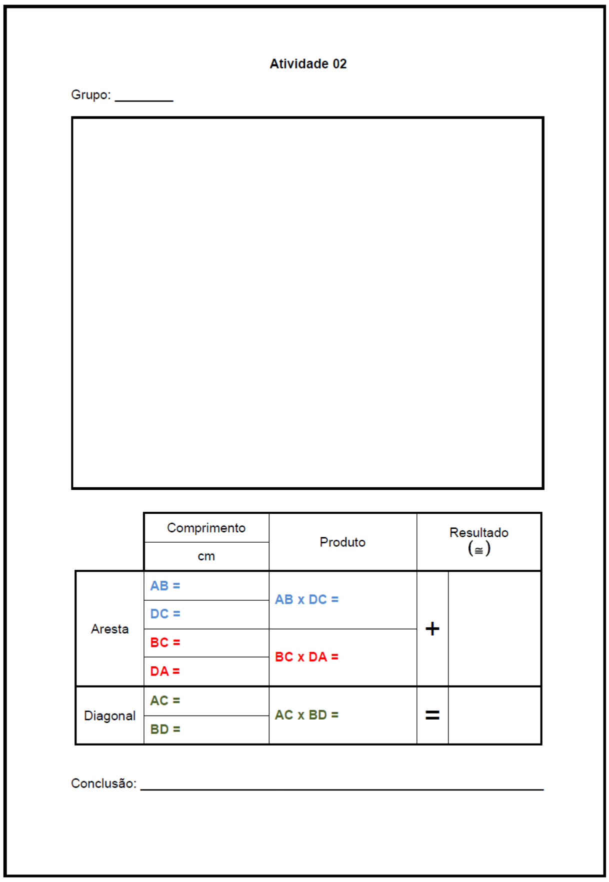
5.2.A.1 (1) Formulário da atividade (figura 5.14);

5.2.A.2 (1) Régua graduada (escala);

5.2.A.3 (1) Compasso;

5.2.A.4 (1) Borracha, e

5.2.A.5 (1) Lápis.



Atividade 02

Grupo: _______

	Comprimento cm	Produto		Resultado (≅)
Aresta	AB =	AB x DC =	+	
	DC =			
	BC =	BC x DA =		
	DA =			
Diagonal	AC =	AC x BD =	=	
	BD =			

Conclusão: ________________________________

Figura 5.14: Formulário da atividade 02 (parte da frente)

Inicialmente, foi utilizada a lousa, para instruir os alunos nos procedimentos, figura 5.15, que segue:

Figura 5.15: Foto da atividade 02 (A)

5.2.B.1 Construir, na folha de atividade, um quadrilátero inscrito em uma circunferência de diâmetro que coubesse no retângulo desenhado na folha;

5.2.B.2 Traçar as diagonais do quadrilátero e nomear os vértices do quadrilátero em sentido horário ou anti-horário, $ABCD$;

5.2.B.3 Posteriormente, com o auxílio da régua graduada, medir os lados e as diagonais do quadrilátero, anotando os valores na tabela da folha de atividade;

5.2.B.4 Realizar as multiplicações dos lados opostos e das diagonais, e efetuar a adição dos produtos dos lados e,

5.2.B.5 Comparar os valores obtidos e expressar sua conclusão.

Figura 5.16: Foto da atividade 02 (B)

5.2.1 Atividade

Foram posicionadas as carteiras em duplas, para facilitar a discussão entre os alunos sobre eventuais dúvidas.

De posse do material, os estudantes iniciaram a atividade e nos movimentamos, circulando por entre as carteiras, com o intuito de acompanhar e orientar na tarefa, que apresentaram alguns aspectos:

5.2.1.1 Tornou-se necessário ensinar a alguns alunos como utilizar o compasso;

Figura 5.17: Foto da atividade 02 (C)

5.2.1.2 Alguns alunos utilizaram caneta para traçar o quadrilátero. Substituiu-se a folha de atividade e foi orientado que utilizassem o lápis, pois somente assim seria possível, em caso de erro, corrigir, sem prejudicar o desenho;

5.2.1.3 No traço dos desenhos, muitos alunos exageraram na grossura das linhas, o que prejudicou na medida dos segmentos, pois não fica bem definido o ponto de encontro entre retas, sendo solicitado que refizessem o desenho, fornecendo uma outra folha de atividade;

Figura 5.18: Foto da atividade 02 (D)

5.2.1.4 Um aluno, ao medir os segmentos, utilizou da régua graduada, iniciando a medida do dígito um; retornamos à lousa, para explicar a todos como utilizar corretamente a régua graduada. Aproveitou-se o erro, para reforçar que a leitura dos números é um momento de atenção;

5.2.1.5 Como não foi fornecida calculadora, presenciou-se muita dificuldade no momento de se efetuarem as multiplicações e adições, principalmente pelos números apresentarem casas decimais. Fica a sugestão que o professor forneça máquinas de calcular, ou libere a utilização de outro artifícios para “agilizar” a atividade; e,

Figura 5.19: Foto da atividade 02 (E)

5.2.1.6 Os alunos precisaram, muitas vezes, efetuar a releitura dos valores, pois apresentavam grande variação de medidas.

5.2.2 Conclusão

A atividade foi proveitosa, pela retomada do manuseio do compasso, e por levar o aluno ao aprendizado do teorema, apesar das dificuldades apresentadas pelo mesmo. A simples organização das carteiras, lado a lado, propiciou maior interação entre os estudantes, facilitando o trabalho.

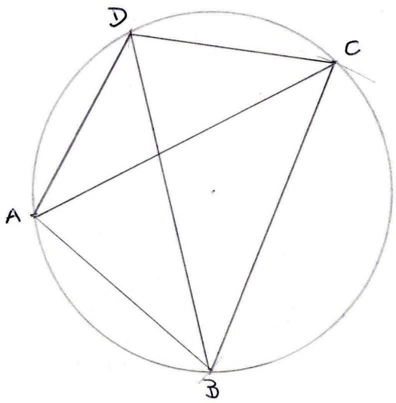
Figura 5.20: Foto da atividade 02 (F)

Antes do término da aula, aproveitou-se o trabalho de uma das duplas, para transcrever na lousa os dados que obtiveram, e comentar que, apesar dos quadriláteros de todos os alunos serem diferentes, as conclusões, em sua maioria, foi que o teorema de Ptolomeu é uma verdade, atingindo assim, através de uma oficina, o objetivo proposto.

Apresentamos, como ilustração, a planilha preenchida de um dos grupos da atividade 02, Régua graduada e Compasso (figura 5.21).

Atividade 02

Grupo: Nº 7



	Comprimento cm	Produto		Resultado (≅)
Aresta	AB = 5,2	AB x DC = 23,92	+	56,48
	DC = 4,6			
	BC = 7,4	BC x DA = 32,56		
	DA = 4,4			
Diagonal	AC = 7,4	AC x BD = 56,98	=	56,98
	BD = 7,7			

Conclusão: Os resultados são aproximados

Figura 5.21: Formulário preenchido (atividade 02)

5.3 Utilizando E.V.A.

Nesta oficina, atividade 03, preparou-se antecipadamente quadriláteros e círculos, em E.V.A., sendo que alguns inscritíveis e outros não (em cores diferentes). A turma que realizou esta atividade é denominada de B. Para facilitar a oficina, foram nomeados os vértices, antecipadamente, em cada quadrilátero.

Foto dos quadriláteros e dos círculos, figuras 5.22 e 5.23, utilizados na atividade proposta.

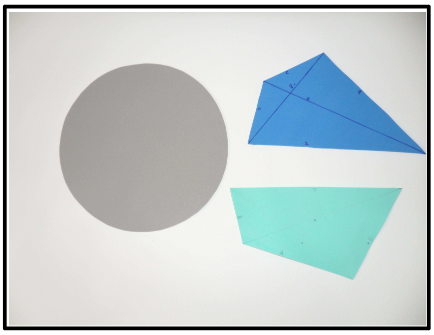


Figura 5.22: Foto: círculo e quadriláteros inscritível e não inscritível

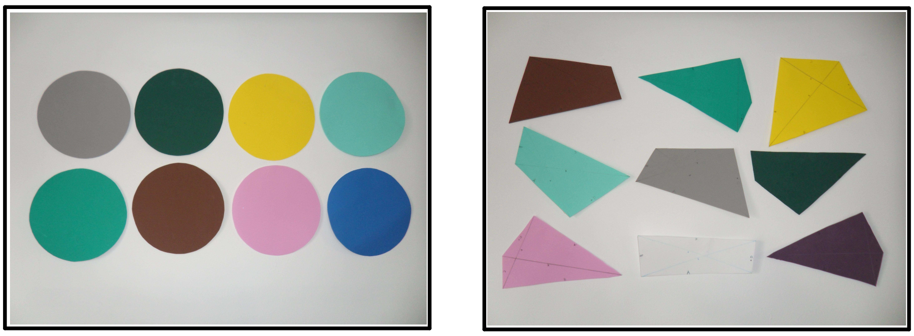


Figura 5.23: Foto: círculos e quadriláteros

Iniciamos, fornecendo a cada aluno:

5.3.A.1 (1) Formulário de atividade (figura 5.27, na página 99);

5.3.A.2 (1) Quadrilátero inscritível;

5.3.A.3 (1) Quadrilátero não inscritível[3];

5.3.A.4 (1) Lápis;

5.3.A.5 (1) Régua graduada, e

5.3.A.6 (1) Borracha.

Novamente, posicionou-se os alunos em duplas, porém com relatórios individuais.

Na lousa foram fornecidas as orientações sobre como proceder, tal como segue:

Figura 5.24: Foto da atividade 03 (A)

5.3.B.1 Os alunos devem anotar em dois quadros, em local específico, a cor da figura, e desenhar o seu esboço;

[3]Um inscritível e outro não, informação esta que não foi relatada no início da tarefa.

5.3.B.2 Devem traçar as diagonais de cada quadrilátero;

5.3.B.3 Devem repetir as orientações anteriores, para o outro quadrilátero;

5.3.B.4 Devem efetuar as medidas das arestas e das diagonais, e anotar no quadro da folha da atividade 03; e,

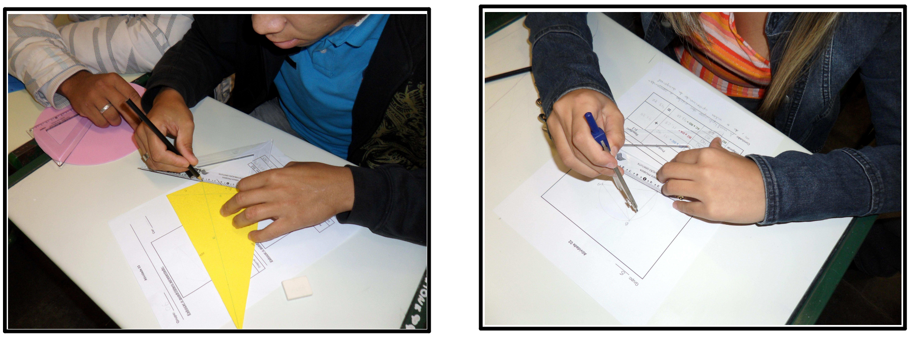
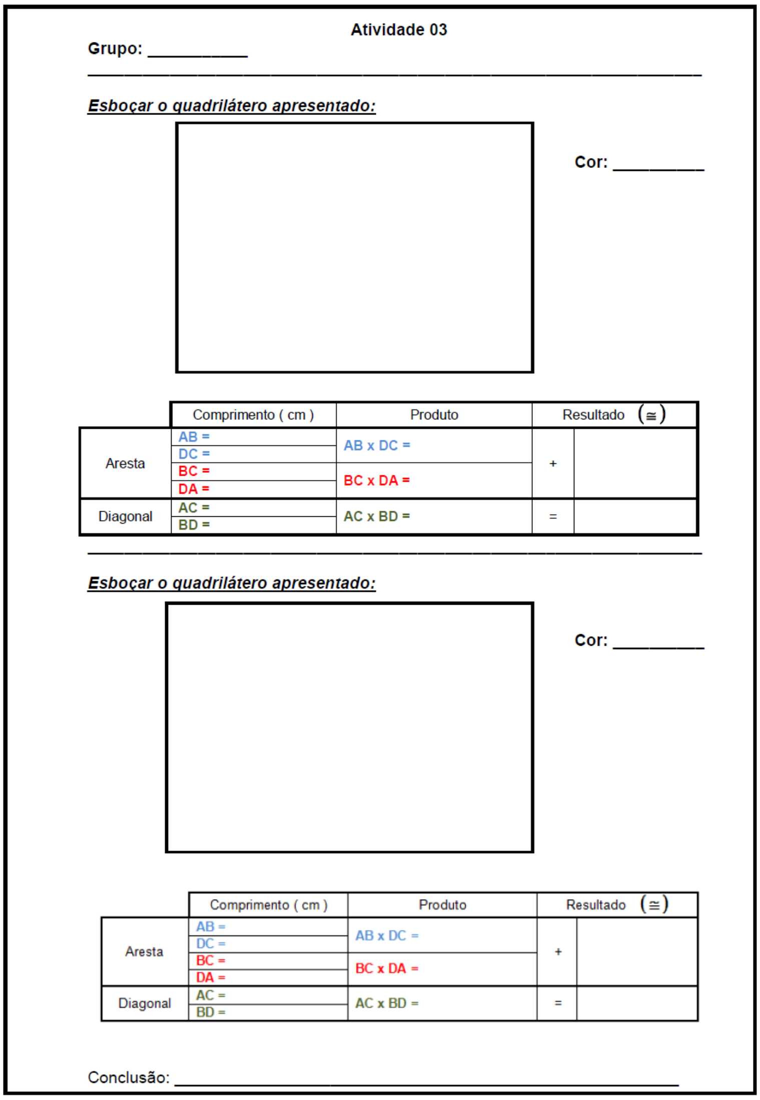


Figura 5.25: Foto da atividade 03 (B)

5.3.B.5 Devem realizar os cálculos e analisar os dados.

Figura 5.26: Foto da atividade 03 (C)



Atividade 03

Grupo: ___________

Esboçar o quadrilátero apresentado:

Cor: __________

	Comprimento (cm)	Produto	Resultado (≅)	
Aresta	AB =	AB x DC =	+	
	DC =			
	BC =	BC x DA =		
	DA =			
Diagonal	AC =	AC x BD =	=	
	BD =			

Esboçar o quadrilátero apresentado:

Cor: __________

	Comprimento (cm)	Produto	Resultado (≅)	
Aresta	AB =	AB x DC =	+	
	DC =			
	BC =	BC x DA =		
	DA =			
Diagonal	AC =	AC x BD =	=	
	BD =			

Conclusão: ____

Figura 5.27: Formulário da atividade 03

5.3.1 Atividade

Assim, os alunos iniciaram a tarefa. Foi colocado sobre as carteiras círculos de E.V.A., sem mencionar nada, aqueles que perguntaram "Para que é isto", foi respondido "Que explicaríamos logo mais", e verificamos.

Na realização do esboço das figuras os alunos não apresentaram dificuldades, apenas perguntaram se “O desenho não caberia no espaço”, quando foram informados que deveriam desenhar em uma escala menor.

Figura 5.28: Foto da atividade 03 (D)

Na tomada das medidas, os alunos voltaram a apresentar dificuldades, nas leituras das dimensões, necessitando de orientação, por exemplo, na precisão da leitura, sendo preciso ler até a casa dos decimais.

A partir deste ponto, os alunos começaram a constatar que, num dos quadriláteros, as medidas da soma do produto dos lados opostos era igual ao produto das diagonais, o que não ocorria com o outro.

Neste momento, formulou-se a pergunta “Por que será que isto está ocorrendo?”.

Figura 5.29: Foto da atividade 03 (E)

Continuamos circulando pela sala e os alunos, procurando uma resposta, quando um dos grupos falou “Descobri!, um dos quadriláteros cabe dentro do círculo e o outro não.”; respondeu-se “Parabéns. Vocês acabam de constatar que o teorema de Ptolomeu é válido para quadriláteros inscritíveis em uma circunferência”. Os outros grupos, imediatamente, compreenderam o fato.

Foto do quadrilátero inscrito e não inscrito, figura 5.30.

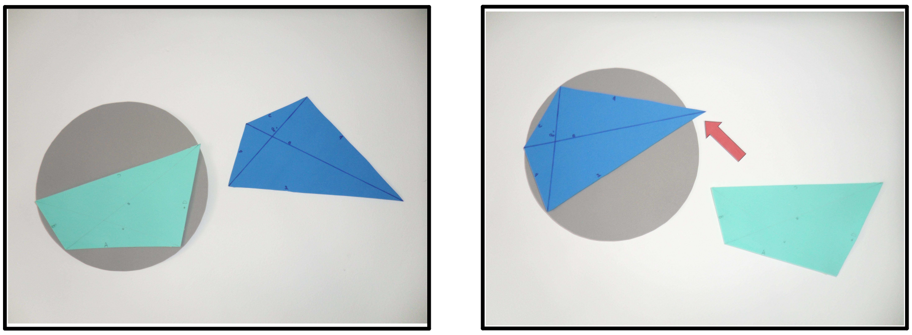


Figura 5.30: Foto: figuras em E.V.A.

Foi pedido que escrevessem a conclusão a que chegaram e, na lousa, foi apresentado o enunciado do teorema de Ptolomeu.

5.3.2 Conclusão

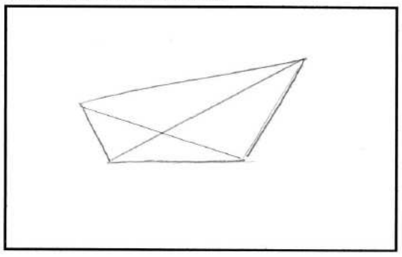
A atividade descrita atingiu o seu objetivo. Apenas ponderamos, como sugestão que, ao ser aplicada, se combine com os alunos que, ao descobrir o que está ocorrendo no momento da investigação, não relatem em voz alta, pois permitirá que os demais consigam chegar a uma conclusão.

Agora, apresentamos, como ilustração, a planilha preenchida de um dos grupos da atividade 03, E.V.A. (figura 5.31, página 102).

Atividade 03

Grupo: 4

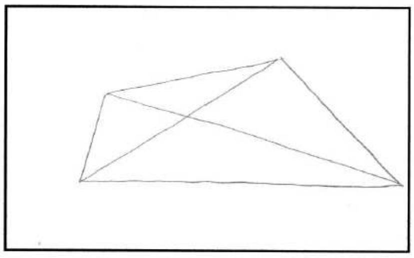
Esboçar o quadrilátero apresentado:



Cor: marrom

	Comprimento (cm)	Produto	Resultado (≅)	
Aresta	a = 16,50 cm	a x c = 374,55	+	474,66
	c = 22,70 cm			
	b = 7,10 cm	b x d = 100,11		
	d = 14,10 cm			
Diagonal	e = 22,90 cm	e x f = 474,03	=	474,03
	f = 20,70 cm			

Esboçar o quadrilátero apresentado:



Cor: branco

	Comprimento (cm)	Produto	Resultado (≅)	
Aresta	a = 24,8 cm	a x c = 357,12	+	48972
	c = 14,4 cm			
	b = 7,80 cm	b x d = 132,60		
	d = 17,00 cm			
Diagonal	e = 24,80 cm	e x f = 491,04	=	491,04
	f = 19,80 cm			

Conclusão: O quadrilátero marrom cabe dentro do círculo e o branco não.

Figura 5.31: Formulário preenchido da atividade 03

5.4 Utilizando o GeoGebra

Esta oficina, aplicada à turma denominada C, foi realizada na sala de informática da Escola Estadual "Senador Paulo Egydio de Oliveira Carvalho", com o auxílio de um monitor, utilizando um software gratuito, baixado do site oficial do International GeoGebra Institute, em:

$$http://www.geogebra.org/cms/pt\_BR/download/.$$

5.4.1 Atividade

Os alunos posicionados, um para cada computador, receberam as seguintes orientações para a construção da figura. Conforme o "Protocolo de construção" gerado pelo GeoGebra, conforme figuras 5.32, 5.33, 5.34, 5.35, 5.36 e 5.37.

N.	Nome	Ícone...	Definição	Comando	Valor
1	Ponto O				O = (3.64, 0.83)
2	Ponto A				A = (3.01, 3.75)
3	Círculo p		Círculo por A com centro O	Círculo[O, A]	p: $(x - 3.64)^2 + (y - 0.83)^2 = 8.94$
4	Ponto B		Ponto sobre p	Ponto[p]	B = (1.01, 2.26)
5	Ponto C		Ponto sobre p	Ponto[p]	C = (2.53, -1.95)
6	Ponto D		Ponto sobre p	Ponto[p]	D = (5.77, -1.26)
7	Segmento a		Segmento [A, B]	Segmento[A, B]	a = 2.49
8	Segmento b		Segmento [B, C]	Segmento[B, C]	b = 4.48
9	Segmento d		Segmento [C, D]	Segmento[C, D]	d = 3.32
10	Segmento c		Segmento [D, A]	Segmento[D, A]	c = 5.73
11	Segmento f		Segmento [C, A]	Segmento[C, A]	f = 5.72
12	Segmento e		Segmento [D, B]	Segmento[D, B]	e = 5.92
13	Texto texto1	ABC			"A"

Figura 5.32: Protocolo de construção 01 de 06

N.	Nome	Ícone...	Definição	Comando	Valor
14	Texto texto2	ABC			"B"
15	Texto texto3	ABC			"C"
16	Texto texto4	ABC			"D"
17	Texto texto5	ABC			"O"
18	Ponto E		Ponto médio de a	PontoMédio[a]	E = (2.01, 3.01)
19	Ponto F		Ponto médio de b	PontoMédio[b]	F = (1.77, 0.16)
20	Ponto G		Ponto médio de f	PontoMédio[f]	G = (2.77, 0.9)
21	Ponto H		Ponto médio de d	PontoMédio[d]	H = (4.15, -1.6)
22	Ponto I		Ponto médio de c	PontoMédio[c]	I = (4.39, 1.25)
23	Ponto J		Ponto médio de e	PontoMédio[e]	J = (3.39, 0.5)
24	Texto texto6	ABC			"a"
25	Texto texto7	ABC			"b"
26	Texto texto8	ABC			"c"
27	Texto texto9	ABC			"d"

Figura 5.33: Protocolo de construção 02 de 06

N.	Nome	Ícone...	Definição	Comando	Valor
28	Texto texto10	ABC			"e"
29	Texto texto11	ABC			"f"
30	Quadrilátero pol1		Polígono A, B, C, D	Polígono[A, B, C, D]	pol1 = 14.42
30	Segmento a_1		Segmento [A, B] de Quadrilátero pol1	Segmento[A, B, pol1]	a_1 = 2.49
30	Segmento b_1		Segmento [B, C] de Quadrilátero pol1	Segmento[B, C, pol1]	b_1 = 4.48
30	Segmento c_1		Segmento [C, D] de Quadrilátero pol1	Segmento[C, D, pol1]	c_1 = 3.32
30	Segmento d_1		Segmento [D, A] de Quadrilátero pol1	Segmento[D, A, pol1]	d_1 = 5.73
31	Texto texto12	ABC	"a=" + (LaTeX[a_1]) + ""	"a=" + (LaTeX[a_1]) + ""	"a=2.49"
32	Texto texto13	ABC	"b=" + (LaTeX[b_1]) + ""	"b=" + (LaTeX[b_1]) + ""	"b=4.48"
33	Texto texto14	ABC	"c=" + (LaTeX[c_1]) + ""	"c=" + (LaTeX[c_1]) + ""	"c=3.32"
34	Texto texto15	ABC	"d=" + (LaTeX[d_1]) + ""	"d=" + (LaTeX[d_1]) + ""	"d=5.73"
35	Texto texto16	ABC	"f=" + (LaTeX[f]) + ""	"f=" + (LaTeX[f]) + ""	"f=5.72"
36	Número h		a d	a d	h = 8.26

Figura 5.34: Protocolo de construção 03 de 06

N.	Nome	Ícone...	Definição	Comando	Valor
37	Número i		b c	b c	i = 25.63
38	Número j		e f	e f	j = 33.89
39	Texto texto20	ABC	"e×f=" + (LaTeX[j]) + ""	"e×f=" + (LaTeX[j]) + ""	"e×f=33.89"
40	Texto texto17	ABC	"e=" + (LaTeX[e]) + ""	"e=" + (LaTeX[e]) + ""	"e=5.92"
41	Número k		h + i	h + i	k = 33.89
42	Texto texto21	ABC	"a×b+c×d=" + (LaTeX[k]) + ""	"a×b+c×d=" + (LaTeX[k]) + ""	"a×b+c×d=33.89"
43	Texto texto18	ABC	"a×d=" + (LaTeX[i]) + ""	"a×d=" + (LaTeX[i]) + ""	"a×d=25.63"
44	Texto texto19	ABC	"b×c=" + (LaTeX[h]) + ""	"b×c=" + (LaTeX[h]) + ""	"b×c=8.26"
45	Texto texto22	ABC			"\underline{Teorema \ de \ Ptolomeu}"
46	Ponto L				L = (7.11, 4.52)
47	Ponto M				M = (12.98, 4.19)
48	Vetor u		Vetor[L, M]	Vetor[L, M]	u = (5.87, -0.33)
49	Ponto N				N = (7.13, 3.8)
50	Vetor v		Vetor[N, M]	Vetor[N, M]	v = (5.85, 0.4)

Figura 5.35: Protocolo de construção 04 de 06

N.	Nome	Ícone...	Definição	Comando	Valor
51	Ponto Q				Q = (10.67, 6.79)
52	Ponto R				R = (11.92, 6)
53	Vetor w		Vetor[Q, R]	Vetor[Q, R]	w = (1.25, -0.79)
54	Ponto S				S = (10.65, 5.44)
55	Vetor m		Vetor[S, R]	Vetor[S, R]	m = (1.27, 0.56)
56	Ponto T				T = (7.1, 7.2)
57	Ponto U				U = (8.17, 6.81)
58	Vetor n		Vetor[T, U]	Vetor[T, U]	n = (1.07, -0.38)
59	Ponto V				V = (7.09, 6.46)
60	Vetor q		Vetor[V, U]	Vetor[V, U]	q = (1.08, 0.35)
61	Ponto W				W = (7.11, 5.77)
62	Ponto Z				Z = (8.13, 5.42)
63	Vetor r		Vetor[W, Z]	Vetor[W, Z]	r = (1.02, -0.35)
64	Ponto A_1				A_1 = (7.11, 5.15)

Figura 5.36: Protocolo de construção 05 de 06

N.	Nome	Ícone	Definição	Comando	Valor
65	Vetor s		Vetor[A_1, Z]	Vetor[A_1, Z]	s = (1.02, 0.27)
66	Ponto K		Centro de p	Centro[p]	K = (3.64, 0.83)
67	Ponto P		Ponto sobre EixoY	Ponto[EixoY]	P = (0, 7.77)
68	Ponto B_1		Ponto sobre EixoY	Ponto[EixoY]	B_1 = (0, -2.7)
69	Ponto C_1		Ponto sobre EixoX	Ponto[EixoX]	C_1 = (15.61, 0)
70	Ponto D_1		Ponto sobre EixoX	Ponto[EixoX]	D_1 = (-0.28, 0)
71	Reta g		Reta passando por D_1 e perpendicular a EixoX	Perpendicular[D_1, EixoX]	g: x = -0.28
72	Reta l		Reta passando por B_1 e perpendicular a EixoY	Perpendicular[B_1, EixoY]	l: y = -2.7
73	Reta t		Reta passando por C_1 e perpendicular a EixoX	Perpendicular[C_1, EixoX]	t: x = 15.61
74	Reta e_1		Reta passando por P e perpendicular a EixoY	Perpendicular[P, EixoY]	e_1: y = 7.77
75	Ponto E_1		Ponto de interseção de g, l	Interseção[g, l]	E_1 = (-0.28, -2.7)
76	Ponto F_1		Ponto de interseção de e_1, g	Interseção[e_1, g]	F_1 = (-0.28, 7.77)
77	Ponto G_1		Ponto de interseção de t, e_1	Interseção[t, e_1]	G_1 = (15.61, 7.77)

Figura 5.37: Protocolo de construção 06 de 06

Após a construção da figura 5.38 (p. 107), os alunos iniciam a fase de observação, desta maneira:

5.4.1.1 Movendo os vértices do quadrilátero B, C ou D;

5.4.1.2 Modificando as dimensões das arestas; e,

5.4.1.3 Movendo o ponto A (Pois, além de modificar as arestas, modifica-se o raio da circunferência circunscrita ao quadrilátero).

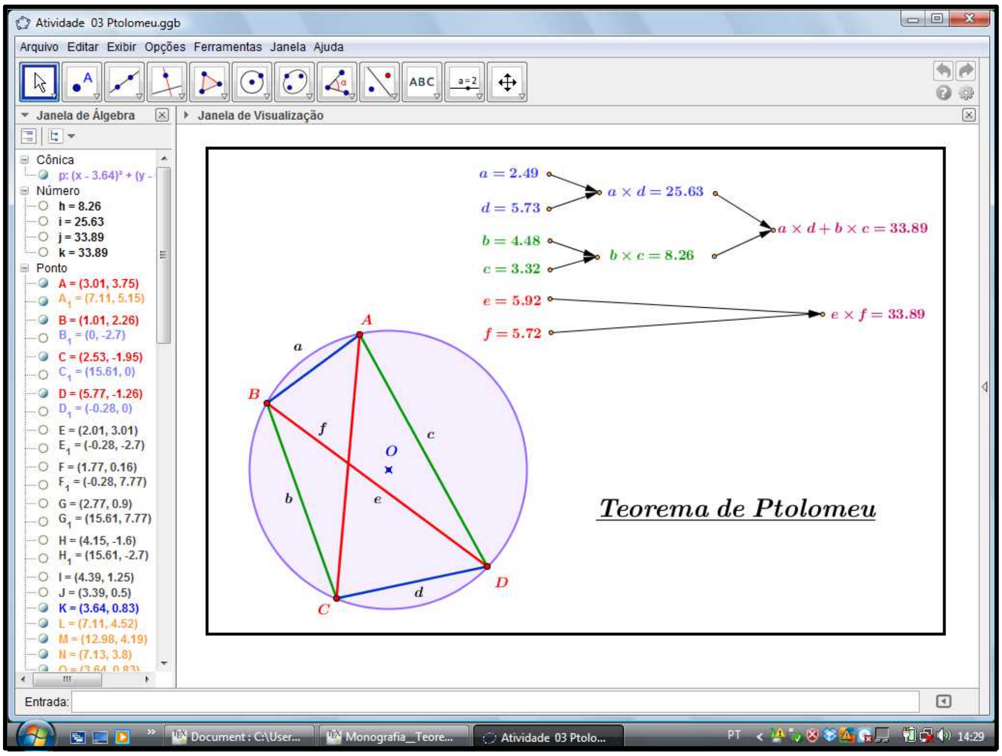


Figura 5.38: Utilizando o “GeoGebra”

A atividade transcorreu sem problemas. Apesar dos alunos não estarem habituados ao programa instalado, portaram-se corretamente, procurando auxiliar na realização da atividade. A presença do monitor foi muito importante para facilitar na operação do computador.

Eles conseguiram verificar que o teorema continua valendo, mesmo que com variações nas dimensões da figura.

Apresenta-se, abaixo, algumas fotos (5.39 até 5.45) da atividade desenvolvida com eles:

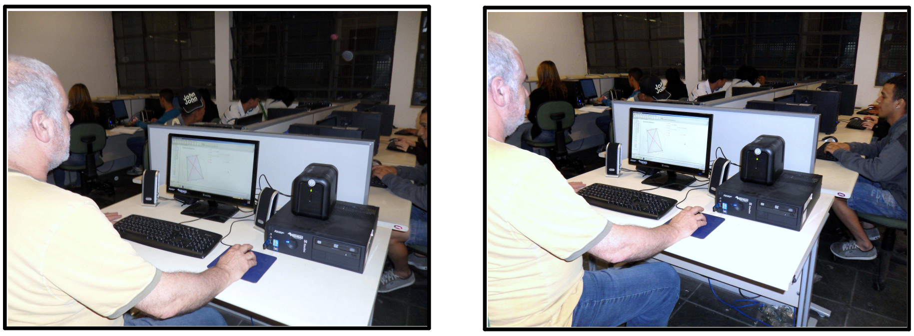


Figura 5.39: Foto da atividade 04 (A)

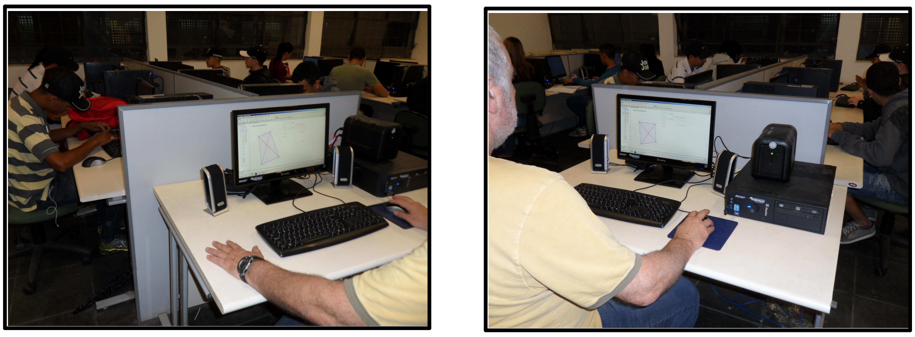


Figura 5.40: Foto da atividade 04 (B)

Figura 5.41: Foto da atividade 04 (C)

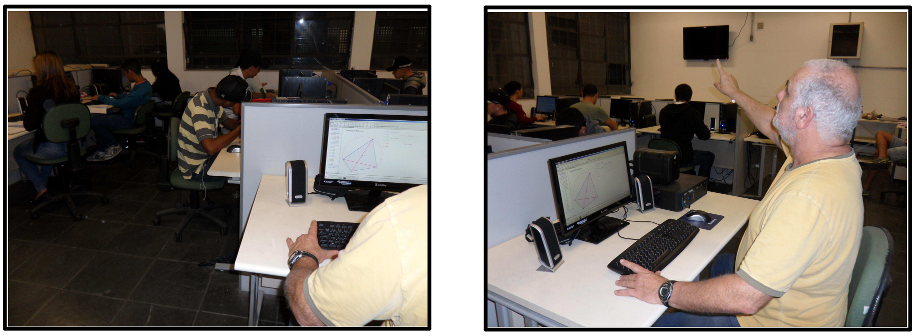


Figura 5.42: Foto da atividade 04 (D)

Figura 5.43: Foto da atividade 04 (E)

Figura 5.44: Foto da atividade 04 (F)

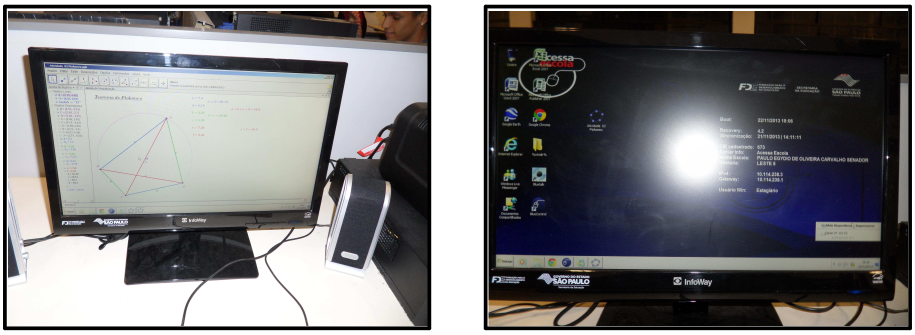


Figura 5.45: Foto da atividade 04 (G)

5.4.2 Conclusão

Apesar de a atividade necessitar de um monitor para auxiliar nas dificuldades apresentadas pelos alunos, eles compreenderam o teorema e gostaram da oficina por terem a oportunidade de saírem da sala-de-aula, para um ambiente diversificado.

5.5 Utilizando o desenho geométrico

Segundo Jorge S. (Apud, Desenho Geométrico - Ideias e Imagens, p. 135) [16]: *"a média geométrica ou proporcional entre dois segmentos a e b é o segmento x cuja medida é igual a raiz quadrada do produto de suas medidas"*, assim expressa:

$$x = \sqrt{a \cdot b} \Leftrightarrow x^2 = a \cdot b$$

O teorema de Ptolomeu, aplicado a um quadrilátero $ABCD$ inscrito, em uma circunferência, fornece a seguinte relação:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD \tag{5.1}$$

Denominando:

$$\begin{cases} AB \cdot CD = m^2 & (5.2) \\ BC \cdot AD = n^2 & (5.3) \\ AC \cdot BD = p^2 & (5.4) \end{cases}$$

Substituindo, em 5.1, as expressões 5.2, 5.3 e 5.4, obtemos o teorema de Pitágoras.

$$\underbrace{AB \cdot CD}_{m^2} + \underbrace{BC \cdot AD}_{n^2} = \underbrace{AC \cdot BD}_{p^2}$$

Sendo assim, obter a média geométrica entre os segmentos $AB \cdot CD$, resulta no segmento m^2 e, repetindo-se o processo para os segmentos BC e AD, resulta em n^2; e ainda, para as diagonais AC e BD, determina-se o segmento p^2.

Determinados os segmentos, que são as médias geométricas, construímos um triângulo retângulo de catetos m e n. Dessa forma, teremos por diagonal o segmento p. Assim, utilizamos do teorema de Pitágoras e, consequentemente, demonstramos o teorema de Ptolomeu, geometricamente.

5.5.1 Atividade

Vamos construir um quadrilátero inscrito em uma circunferência, três médias geométricas e um triângulo retângulo, que servirão para análise do teorema de Ptolomeu. Desta maneira:

5.5.1.1 Construir um quadrilátero $ABCD$ inscrito em uma circunferência, utilizando de régua e compasso, conforme figura 5.46;

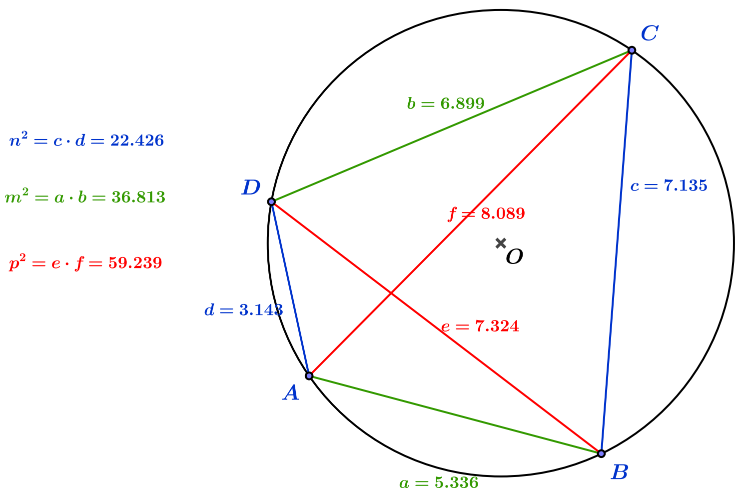


Figura 5.46: Quadrilátero inscrito $ABCD$

Construir a média geométrica entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ utilizando do processo aditivo ou da altura do triângulo retângulo.[4]

Assim sendo:

5.5.1.2 Construa, conforme figura 5.47, o segmento $\overline{EH}$ com $EH = a + b$, determinando o ponto F, que será o pé da altura $\overline{FP}$;

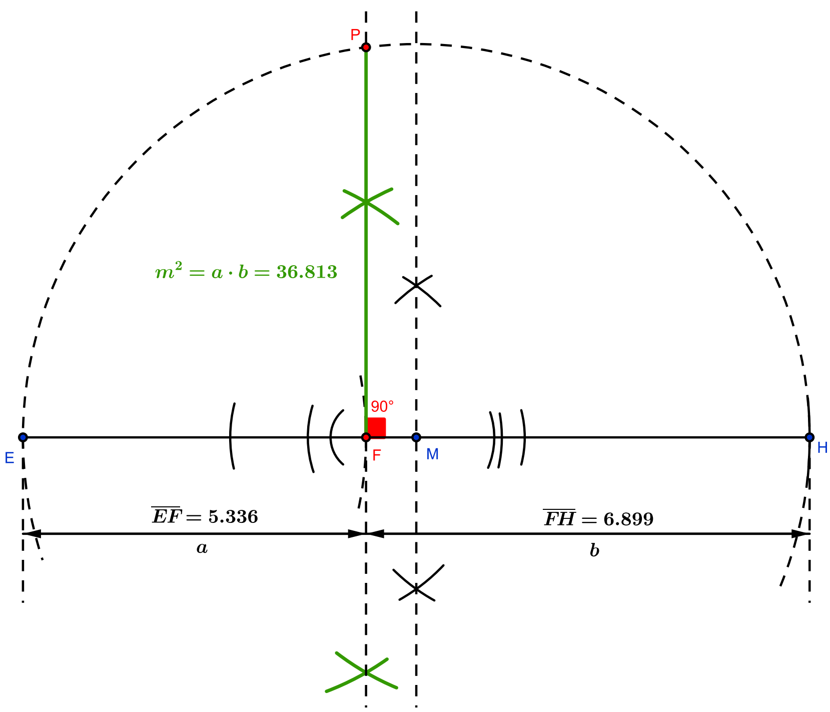


Figura 5.47: Média geométrica entre AB [a] e CD [b]

[4]Outro método conhecido para se construir uma média geométrica é o processo subtrativo ou do cateto do triângulo retângulo.

5.5.1.3 Construa o LG[5]-5[6] com centro em M (ponto médio de $\overline{EH}$) e raio $\dfrac{EH}{2}$;

5.5.1.4 Trace, pelo ponto F, uma perpendicular à hipotenusa $\overline{EH}$, e determine P no $LG-5$, onde $\overline{FP}$ é altura e $FP = m^2 = AB \cdot CD = a \cdot b$;

5.5.1.5 Repita o processo da média geométrica (figuras 5.48 e 5.49) entre os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$, encontrando $F_1P_1 = n^2 = BC \cdot AD = c \cdot d$ e idem para as diagonais do quadrilátero $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, encontrando $F_2P_2 = p^2 = AC \cdot BD = e \cdot f$; e,

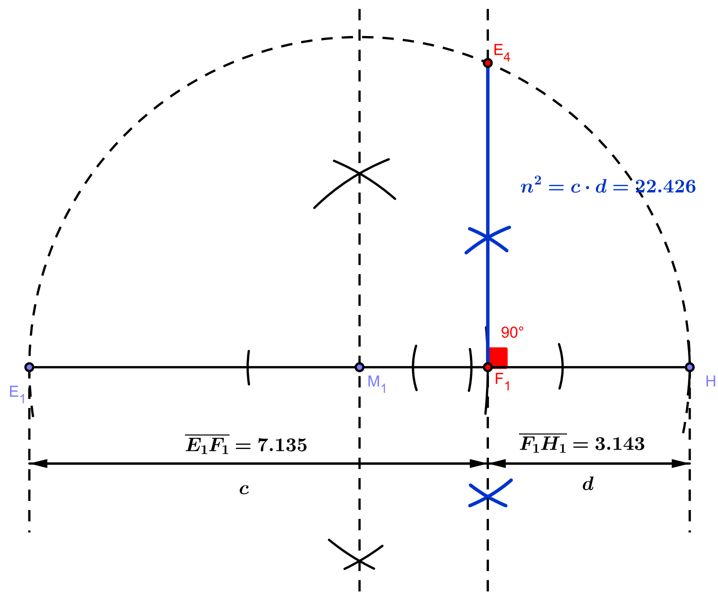


Figura 5.48: Média geométrica entre AD [c] e BC [d]

[5]LG: lugar geométrico.

[6]Conforme Jorge, S. (Apud, Desenho Geométrico - Ideias e Imagens, p. 30) [16], "O $LG-5$ é um par de arcos capazes, e todos os seus pontos enxergam um segmento de reta conhecido, segundo um ângulo de medida constante."

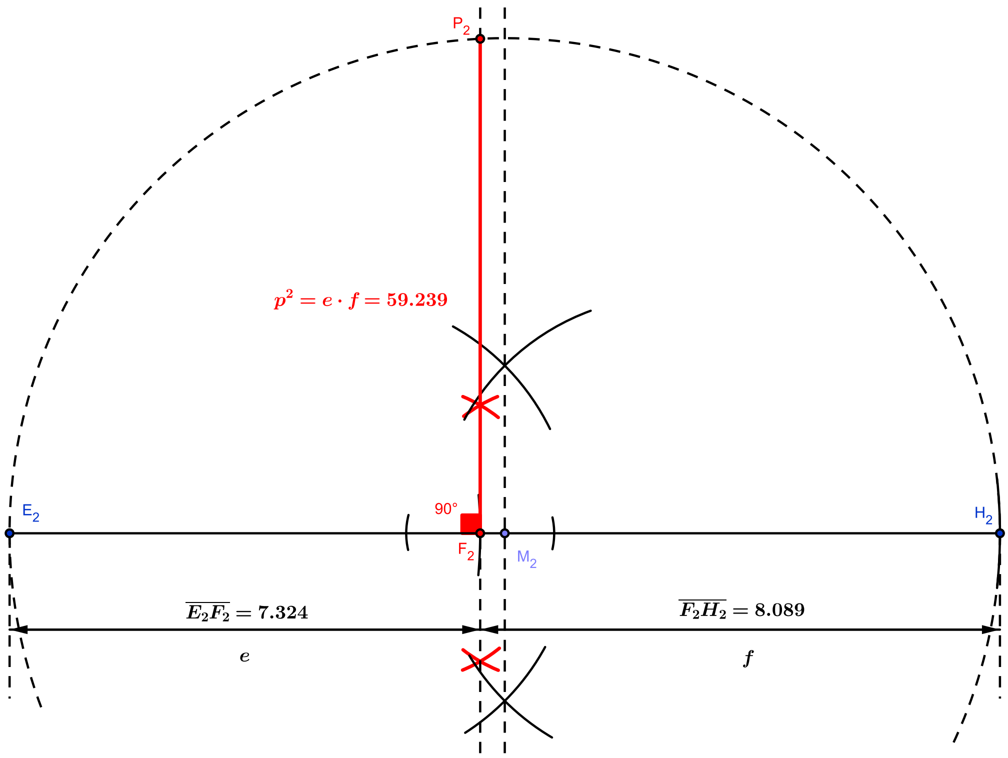


Figura 5.49: Média geométrica entre AC [e] e BD [f]

5.5.1.6 Através do transporte das medidas dos segmentos (figura 5.50), construa um triângulo retângulo, com catetos de comprimento m e n, e compare a medida da hipotenusa deste triângulo com a medida da média geométrica entre os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

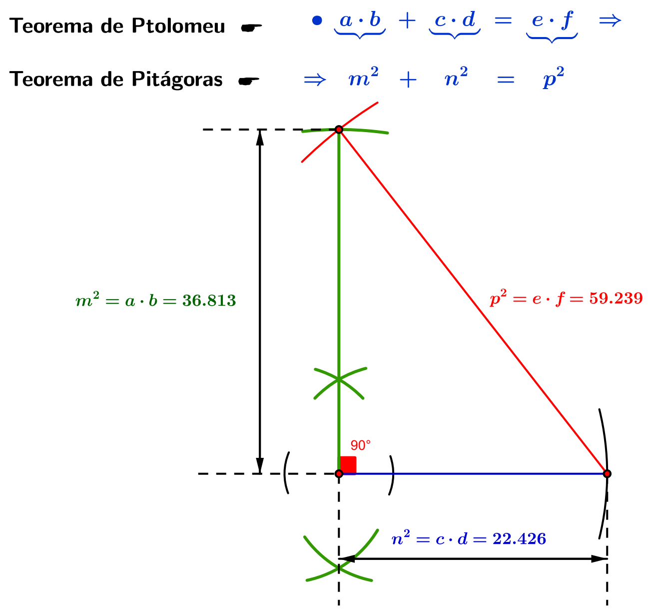


Figura 5.50: Teorema de Ptolomeu aplicado ao teorema de Pitágoras

5.5.2 Conclusão

O processo descrito permitirá que o aluno compare a medida da hipotenusa do triângulo, construído com as médias geométricas dos lados do quadrilátero, com aquela encontrada da média geométrica das diagonais e, se acaso forem iguais (que é o esperado), estaremos provando geometricamente, por meio do teorema de Pitágoras, a validade do teorema de Ptolomeu.

Este método não foi aplicado em sala-de-aula, pois os alunos da escola pública não têm um curso focado em desenho geométrico, ou melhor, com aprofundamento necessário: “diga-se, foi retirado do currículo das escolas públicas”.

Desta forma, seriam necessárias mais aulas, do que as previstas para contemplar este assunto com a devida importância, o que não é possível por já ter ocorrido o planejamento anual, bem como o seu replanejamento, não tendo sido incluído no programa do semestre, e não havendo mais tempo hábil para tal.

Porém, fica a observação para aquele docente que se sentir confortável, para desenvolver o assunto junto aos seus discentes, uma outra via de se comprovar o teorema de Ptolomeu.

Capítulo 6

Exercícios de Aplicação

Para a preparação das aulas sugeridas no trabalho, apresentamos, neste capítulo, exercícios para fixação do teorema. Estes, com diferentes graus de dificuldade.

6.1 Exercício 01

Diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ do quadrilátero $ABCD$ inscrito numa circunferência, se encontram em E. Se $AE = 2$, $BE = 5$, $CE = 10$, $DE = 4$, e $BC = \dfrac{15}{2}$, encontre AB. [19]

Sugestão de resolução:

Conforme figura 6.1, temos que:

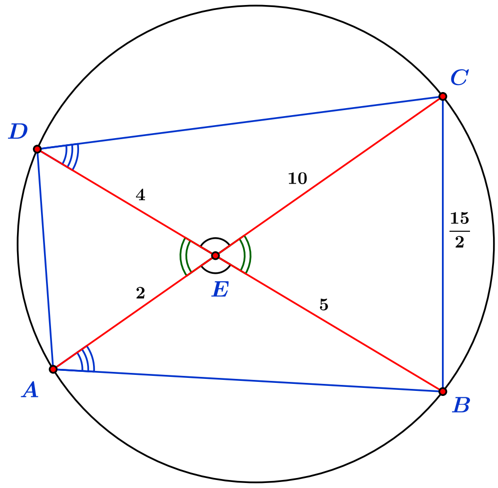


Figura 6.1: Exercício 01

Da figura obtemos as relações:

$$\frac{BE}{AE} = \frac{5}{2}$$

e

$$\frac{CE}{DE} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Logo, temos que o $\triangle AED \sim \triangle BEC$, pelo caso LAL (lado-ângulo-lado), pois $\angle A\widehat{E}D \equiv \angle B\widehat{E}C$ (O.P.V.)[1], e os seus lados são proporcionais.

Assim:

$$\frac{EB}{BC} = \frac{5}{\frac{15}{2}} = \frac{2}{AD} \Rightarrow AD = 3$$

Ainda dessa figura, temos que o $\triangle AEB \sim \triangle DEC$, pelo caso LAL[2]. Observe-se que: $\angle D\widehat{E}C \equiv \angle A\widehat{E}B$ (O.P.V.), e os seus lados são proporcionais.

[1]O.P.V.: opostos pelo vértice.
[2]LAL: critério de semelhança entre triângulos, lado-ângulo-lado.

$$\frac{AE}{DE} = \frac{2}{4} = \frac{5}{10} = \frac{EB}{EC} \quad \Rightarrow \quad \frac{AE}{DE} = \frac{EB}{EC} = \frac{1}{2}$$

Logo, das relações anteriores entre os triângulos $\triangle AEB$ e $\triangle DEC$, relacionamos que:

$$\frac{1}{2} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow DC = 2 \cdot AB$$

Substituindo os valores de $DC = 2 \cdot AB$, $AD = 3$, $BC = 15/2$, $AC = 12$ e $BD = 9$, e aplicando o teorema de Ptolomeu, obtemos:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & AB & \cdot & DC & + & AD & \cdot & BC & = & AC \cdot BD \Rightarrow \\
\Rightarrow & AB & \cdot & 2 \cdot AB & + & 3 & \cdot & 15/2 & = & 12 \cdot 9 \Rightarrow \\
\Rightarrow & & & 2 \cdot AB^2 & + & & 45/2 & & = & 108 \Rightarrow \\
\Rightarrow & & & AB & = & \frac{\sqrt{171}}{2} & & & &
\end{array}$$

$\blacksquare$

6.2 Exercício 02

E é um ponto no lado $\overline{CD}$ do retângulo $ABCD$; $DE = 6$, enquanto que $DA = 6$ e $DC = 8$. Se $\overline{AE}$ prolongado encontra o círculo circunscrito do retângulo em F, encontre a medida da corda $\overline{DF}$, conforme figura 6.2. [19]

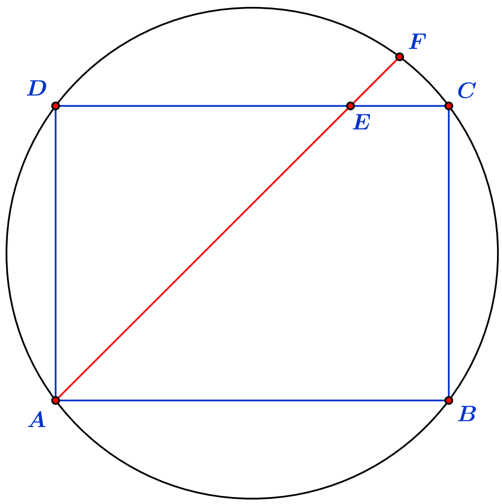


Figura 6.2: Exercício 02

Sugestão de resolução:

Conforme o enunciado, o quadrilátero $ABCD$ é um retângulo. Assim sendo, $\overline{AC}$ é diagonal do retângulo e diâmetro da circunferência circunscrita, conforme figura 6.3.

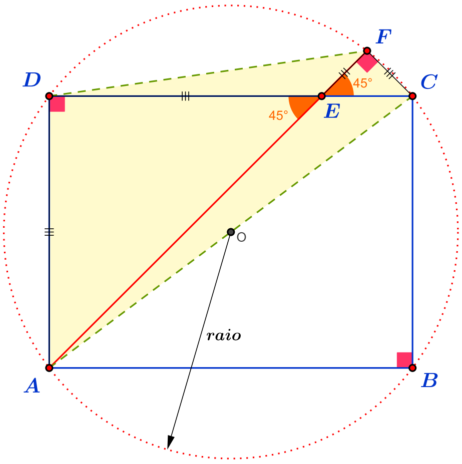


Figura 6.3: Resolução do exercício 02

Desta forma, $\angle A\widehat{F}C \equiv \angle A\widehat{B}C = 90°$.

No triângulo $\triangle ABC$, $BC = AD = 6$ e $AB = DC = 8$. Aplicando-se o teorema de Pitágoras, determinamos que $AC = 10$.

O triângulo $\triangle ADE$ é retângulo e isósceles, pois $AD = ED = 6$. Deste modo, o ângulo $\angle D\widehat{E}A \equiv \angle F\widehat{E}C = 45°$ (O.P.V.).

Logo, o $\triangle EFC$ é retângulo e isósceles, além do que, a hipotenusa $EC = DC - DE = 8 - 6 = 2$. Portanto, $EF = CF = \sqrt{2}$.

Então, sendo os catetos $AD = ED = 6$, a hipotenusa AE é igual a $6\sqrt{2}$. E $AF = AE + EF = 6\sqrt{2} + \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$.

Aplicando o teorema de Ptolomeu ao quadrilátero $CFDA$, temos que:

$$AC \cdot DF + AD \cdot CF = AF \cdot CD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 \cdot DF + 6 \cdot \sqrt{2} = 7\sqrt{2} \cdot 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 \cdot DF + 6 \cdot \sqrt{2} = 56 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DF = 5\sqrt{2}$$

■

6.3 Exercício 03

Se o triângulo isósceles ABC $(AB = AC)$ se encontra inscrito numa circunferência, e o ponto P sobre o menor arco em $\widehat{\mathrm{BC}}$, prove que $\dfrac{PA}{PB+PC} = \dfrac{AC}{BC}$ é uma constante para o triângulo dado. [19]

<u>**Sugestão de resolução:**</u>

Conforme a figura 6.4:

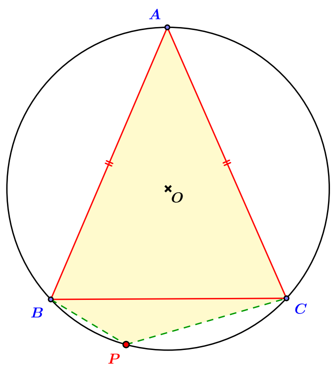


Figura 6.4: Exercício 03

Utilizando o teorema de Ptolomeu ao quadrilátero $ABPC$, determinamos que:

$$PA \cdot BC = PB \cdot AC + PC \cdot AB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{uma vez que: } AB = AC \text{ (triângulo isósceles)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow PA \cdot BC = PB \cdot AC + PC \cdot AC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow PA \cdot BC = AC \cdot (PB + PC) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{PA}{PB + PC} = \frac{AC}{BC}$$

$\blacksquare$

6.4 Exercício 04

Considere o quadrilátero $ABCD$, inscrito numa circunferência, tal como mostrado na figura 6.5, com: $AB = 3,2cm$, $BC = 4,3cm$, $CD = 6,5cm$ e $AD = 9,9cm$. Uma vez informamos que a diagonal $AC = 6,9cm$, determine a medida da diagonal BD.

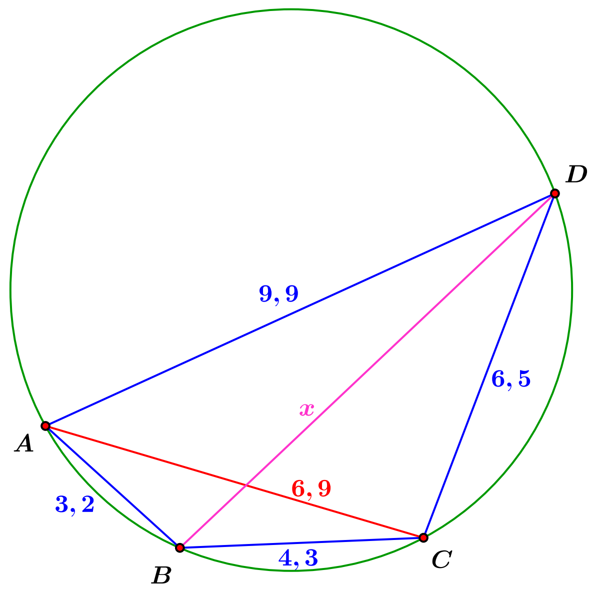


Figura 6.5: Exercício 04

Sugestão de resolução:

Aplicando o teorema de Ptolomeu ao quadrilátero $ABCD$, e relevando-se que $BD = x$, temos que:

$$
\begin{aligned}
& AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC \Rightarrow \\
\Rightarrow\ & 6,9 \cdot x = 3,2 \cdot 6,5 + 9,9 \cdot 4,3 \Rightarrow \\
\Rightarrow\ & 6,9 \cdot x = 20,80 + 42,57 \Rightarrow \\
\Rightarrow\ & 6,9 \cdot x = 63,37 \Rightarrow \\
\Rightarrow\ & x = \frac{63,37}{6,9} \Rightarrow \\
\Rightarrow\ & x \cong 9,18
\end{aligned}
$$

■

6.5 Exercício 05

Prove que, se $ABCDEFG$ é um heptágono regular convexo[3], então: [13]

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

Sugestão de resolução:

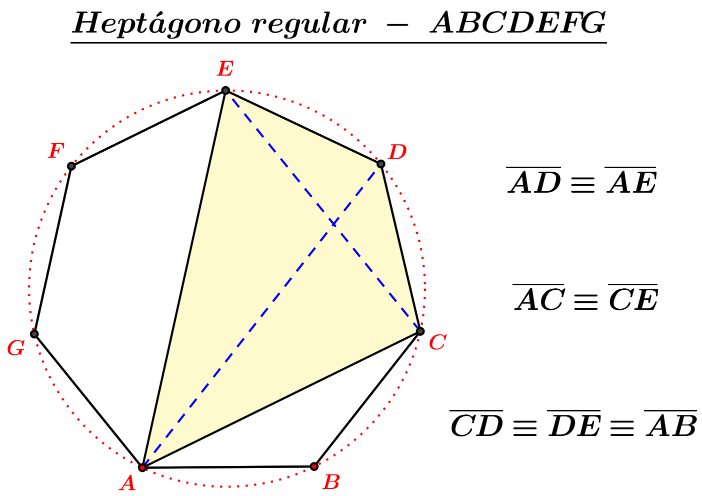


Figura 6.6: Exercício 05

Conforme a figura 6.6, constatamos que:

6.5.1 O segmento $\overline{AD} \equiv \overline{AE}$, pois possuem diagonais que subentendem três lados consecutivos;

6.5.2 O segmento $\overline{AC} \equiv \overline{CE}$, pois possuem diagonais que subentendem dois lados consecutivos; e,

[3]Este exercício foi uma das questões do vestibular da Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF.

6.5.3 Os lados do heptágono regular são congruentes ($\overline{CD} \equiv \overline{DE} \equiv \overline{AB}$).

Aplicando o teorema de Ptolomeu ao quadrilátero $ACDE$, temos que:

$$AD \cdot CE = AE \cdot CD + AC \cdot DE \Rightarrow$$

Dividindo-se ambos os membros por $AB \cdot AC \cdot AD$, segue que:

$$\Rightarrow \frac{AD \cdot CE}{AB \cdot AC \cdot AD} = \frac{AE \cdot CD}{AB \cdot AC \cdot AD} + \frac{AC \cdot DE}{AB \cdot AC \cdot AD} \Rightarrow$$

Substituindo $CE = AC$ e $DE = AB$, simplificamos:

$$\Rightarrow \frac{\cancel{AD}^1 \cdot \cancel{CE}^1}{AB \cdot \cancel{AC}^1 \cdot \cancel{AD}^1} = \frac{\cancel{AE}^1 \cdot \cancel{CD}^1}{\cancel{AB}^1 \cdot AC \cdot \cancel{AD}^1} + \frac{\cancel{AC}^1 \cdot \cancel{DE}^1}{\cancel{AB}^1 \cdot \cancel{AC}^1 \cdot AD} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$$

$\blacksquare$

6.6 Exercício 06

O teorema de Ptolomeu afirma que "em todo quadrilátero convexo inscritível, a soma dos produtos das medidas dos lados opostos é igual ao produto das medidas das diagonais". Utilize esse teorema para demonstrar que, se d e l representam, respectivamente, as medidas da diagonal e do lado de um pentágono regular, então: $\dfrac{d}{l} = \dfrac{(1+\sqrt{5})}{2}$. [4] [13]

Sugestão de resolução:

Considere a figura 6.7:

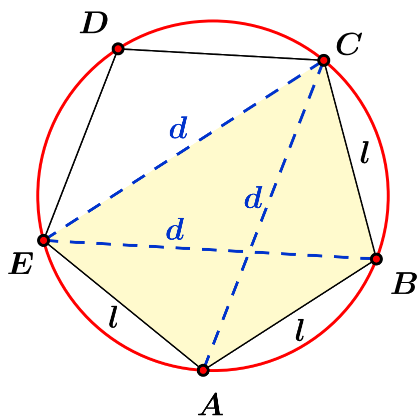


Figura 6.7: Resolução do exercício 06

De acordo com o enunciado, d e l são respectivamente, as medidas do lado e da diagonal do pentágono regular.

Aplicando-se o teorema de Ptolomeu ao quadrilátero $ABCE$, temos que:

[4] Este exercício foi uma das questões do vestibular da Universidade Federal do Ceará - UFC, em 2000.

$$AC \cdot BE = AB \cdot CE + AE \cdot BC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d \cdot d = l \cdot d + l \cdot l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 = l \cdot d + l^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 - l \cdot d - l^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{-(-l) \pm \sqrt{(-l)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-l^2)}}{2 \cdot (1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + 4 \cdot l^2}}{2} = \frac{l \pm l \cdot \sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

Uma vez que $d > 0$, temos que:

$$\Rightarrow d = \frac{l + l \cdot \sqrt{5}}{2} = \frac{l \cdot (1 + \sqrt{5})}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{l} = \frac{(1 + \sqrt{5})}{2}$$

$\blacksquare$

6.7 Exercício 07

Sobre o lado AB de um quadrado $ABCD$, é desenhado, exteriormente, o triângulo retângulo ABF, de hipotenusa AB. Sabe-se que $AF = 6$ e $BF = 8$. Denominando E o centro do quadrado, calcule o comprimento de EF. [5] [13]

Sugestão de resolução:

Iniciamos, construindo a figura 6.8, conforme o enunciado do exercício.

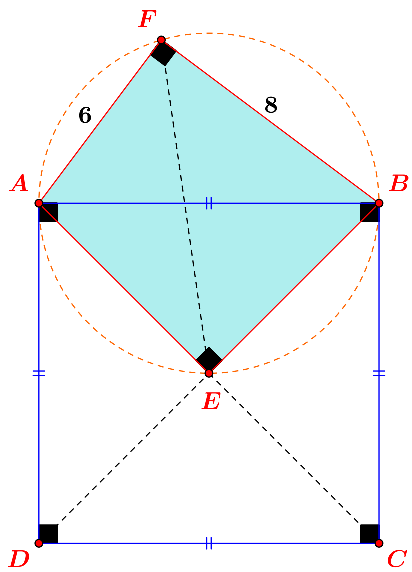


Figura 6.8: Resolução do exercício 07

No triângulo $\triangle AFB$, aplicando-se o teorema de Pitágoras, obtemos que:

$$AB^2 = AF^2 + BF^2 \Rightarrow AB^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow AB^2 = 36 + 64 \Rightarrow AB = 10$$

[5] Exercício integrante da Olimpíada de Matemática de Maio de 2008.

Sendo o ponto E centro do quadrado, $AE = EB$ e o lado do quadrado $AB = 10$, novamente, pelo teorema de Pitágoras, obtemos que:

$$AE^2 + BE^2 = AB^2 \Rightarrow AE^2 + AE^2 = 10^2 \Rightarrow 2 \cdot AE^2 = 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AE = 5 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow AE = EB = 5 \cdot \sqrt{2}$$

Uma vez que o encontro das diagonais de um quadrado formam ângulos de 90° (perpendiculares), podemos assinalar, então, que os ângulos $\angle A\widehat{E}B$ e $\angle A\widehat{F}B$ enxergam o lado AB (diâmetro) com o mesmo ângulo de 90°. Desta forma, concluímos que o quadrilátero $AEBF$ se encontra inscrito na circunferência de diagonal AB.

Aplicando-se o teorema de Ptolomeu para esse quadrilátero, obtemos:

$$AB \cdot EF = AE \cdot BF + AF \cdot BE \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 \cdot EF = 5\sqrt{2} \cdot 8 + 6 \cdot 5\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 \cdot EF = 70 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EF = 7 \cdot \sqrt{2}$$

■

6.8 Exercício 08

O triângulo equilátero ABC encontra-se inscrito em uma circunferência, e P é um ponto qualquer do menor arco [6] BC. Prove que $PA = PB + PC$, isto é, que a distância de P ao ponto A é igual à soma das distâncias de P aos pontos B e C. [7] [19]

Sugestão de resolução:

Iniciando a resolução com a construção da figura 6.9.

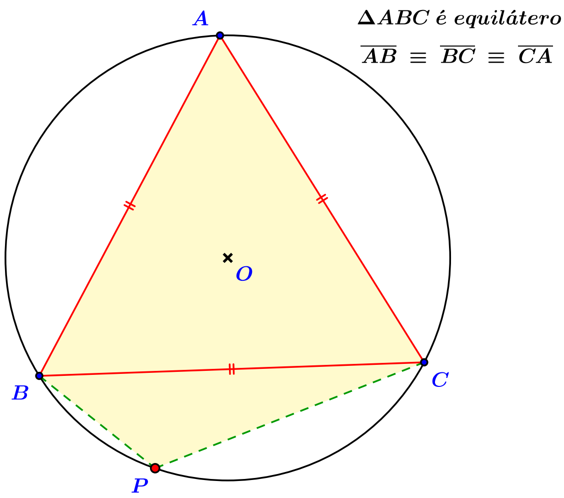


Figura 6.9: Resolução do exercício 08

Uma vez que o quadrilátero formado pelos pontos $PCAB$ encontra-se inscrito na circunferência ao enunciado, podemos aplicar o teorema de Ptolomeu:

$$PA \cdot BC = PB \cdot AC + PC \cdot AB \Rightarrow$$

[6] Arco que não contém o ponto A.

[7] Este exercício é parte integrante da avaliação $AV01$ do curso PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), da disciplina $MA13$ Geometria I, em 2011.

Sendo que: $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CA}$ (triângulo equilátero $\triangle ABC$), e substituindo-se AC e AB por BC obtemos:

$$\Rightarrow PA \cdot BC = PB \cdot BC + PC \cdot BC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow PA \cdot BC = BC\,(PB + PC) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow PA = PB + PC$$

$\blacksquare$

Capítulo 7

Conclusão

7.1 Considerações

Encerramos o presente estudo com a clara demonstração de que o disposto no capítulo de introdução foi plenamente cumprido, quanto aos objetivos e outras disposições propostas.

Entende-se que a meta de se ensinar o teorema de Ptolomeu aos alunos de Ensino Médio da escola pública, não somente é plenamente possível, bem como importante, na medida em que enriquece o conhecimento dos estudantes; resgata a contribuição histórica deste sábio; propicia ao educador aprofundar-se na busca de saberes, contidos no universo da matemática, e mais principalmente, permite um exercício de associação entre os saberes deste estudioso aos de outros, como quando aplicado seu teorema para validação do de Pitágoras.

A utilização de modernas tecnologias permitiu a revisitação de conceitos antigos, em uma nova linguagem, tornando o conhecimento pedagogicamente atraente aos alunos que, espera-se, de forma autônoma procurem resgatar outros conhecimentos que julgarem importantes para si.

7.2 Conclusão Final

Também surge a pertinente consideração de que as amostragens que evidenciaram erros de entendimento de determinados conceitos, indicam, bem provavelmente, uma dificuldade que não é apenas de ordem da disciplina da Matemática, mas também aponta para questões mais abrangentes, de ordem cognitiva, quanto à exata compreensão da terminologia técnica e do seu significado, o que pode merecer uma investigação futura de caráter interdisciplinar e multidisciplinar, junto a outras áreas de saber.

Neste sentido, também entende-se que saberes das áreas da Matemática, da Informática, da Pedagogia e, até mesmo, da Linguística, possam, conjugados, conduzir a um aprimoramento dos meios de aplicação do ensino, levando o aluno a ter interesse para outros saberes que não se encontram contidos no currículo, mas possuem importância no conjunto de conhecimentos que podem ser por ele adquiridos.

Reitera-se aqui o cumprimento da proposta de se resgatar um saber historicamente delimitado no tempo, à época dos sábios de Alexandria, contribuindo assim, e também, para o processo de ampliação do conhecimento dos estudantes, de um saber enciclopédico, tão importante como de outros teoremas e fórmulas, a exemplo do teorema de Pitágoras, da fórmula de Bháskara ou do binômio de Newton, para vários saberes do universo da matemática.

Por fim, reitera-se aqui a necessidade de que outros saberes sejam, continuamente, resgatados, no sentido de trazer ao estudante, antigos saberes que possam alavancar o seu interesse pelo estudo da matemática, dentro de um contexto histórico, que forme seu universo de conhecimentos gerais.

Por outro lado, fica em aberto o convite, para que outras áreas de saber, também se apropriem dos saberes do mundo da Matemática, efetuando contribuições de natureza interdisciplinar e multidisciplinar, onde um saber não sobrepuje aos demais, porém, traga um consenso de estudo e pesquisa integrados, em benefício do crescimento e autonomia de nossos estudantes.

Encerramos o presente estudo, de natureza eminentemente prática, na certeza de que este singelo trabalho também sirva de fonte de inspiração a outros colegas pesquisadores e, também, contribua para a formação de outros futuros colegas pesquisadores.

Referências Bibliográficas

[1] AABOE, Asger.: *Episódios da História Antiga da Matemática.* 3. ed. Rio de Janeiro. SBM, 2013. 191 p.

[2] ALTAMIRANO, María J. L.: *(2007-2013) Geometría Interactiva.* < *http : //132.248.17.238/geometria/j_ensayo/j_ensayo.pdf* >. Tese de doutoramento, Universidad Nacional Autónoma de México.

[3] ALVES, Rubens.: *Filosofia da Ciência, introdução ao jogo e suas regras.* 17. ed. São Paulo, Brasiliense, 1993. 279 p.

[4] ASSOCIACIÓN FONDO DE INVESTIGADORES Y EDITORES.: *Geometría: una visión de la planimetría.* 6. ed. Brenã, Lima - Perú, Lumbreras, 2012. 954 p.

[5] BASSANEZI, Rodney C.: *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia.* 3. ed. São Paulo, Contexto, 2011. 389 p.

[6] CHAPARIN, Rogério O. ; MONTEIRO, Martha S.: *Belas ideias da geometria em fórmulas trigonométricas.* CAEM IME USP, ago. 2011. *Curso no CAEM IME USP.*

[7] DICIONÁRIO ENCICLOPÉDICO BRASILEIRO ILUSTRADO.: Porto Alegre - Rio Grande do Sul, Ed. Globo S/A, 1964. v. 4.

[8] DOLCE, Osvaldo ; POMPEO, José N.: *Fundamentos de Matemática Elementar 9: geometria plana.* 8. ed. São Paulo, Atual, 2005. 456 p.

[9] ENYCLOPEDIA E DICCIONARIO INTERNACIONAL.: Clinton, Massachussets - EUA, São Paulo / Rio / Porto Alegre. WIN, W. M. JACKSON EDITORES - The Colonial Press Inc., s. d. v. XVI.

[10] EVES, H.: *Introdução à história da matemática.* 5. ed. Campinas - São Paulo, Ed. da Unicamp, 2001, 848 p.

[11] FERREIRA, Aurélio B. H.: *Novo Dicionário da Língua Portuguesa.* 2. ed. rev. e ampl. Rio de Janeiro, Nova Fronteira, 1986. 1838 p.

[12] GARBI, Gilberto G.: *A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática.* 1. ed. São Paulo, Editora Livraria da Física, 2006. 346 p.

[13] GOMES, Ricardo C. S. ; SILVA, Francisco H.: *Resolvendo problemas com o teorema de Ptolomeu.* Revista do professor de matemática, Rio de Janeiro, nº 80, p. 24-25, jan./abr. 2013.

[14] IEZZI, Gelson: *Fundamentos de Matemática Elementar 3: trigonometria.* 7. ed. São Paulo, Atual, 1993. 303 p.

[15] INSTITUTO ANTÔNIO HOUAISS.: *Dicionário Houaiss Conciso.* 3. ed. Rio de Janeiro, Moderna, 2011. 1078 p.

[16] JORGE, Sonia: *Desenho Geométrico - Ideias e Imagens.* 2ªed. São Paulo, Saraiva, 1999. 175 p. v. 4.

[17] MORGADO, Augusto C. ; WAGNER, Eduardo ; JORGE, Miguel.: *Geometria II.* Edição original. Rio de Janeiro: FC & Z, 2002. 285 p.

[18] MUNIZ NETO, Antonio C.: *Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana. Coleção Professor de Matemática*, Rio de Janeiro. SBM, 2012. 432 p. v. 2 518 p.

[19] POSAMENTIER, Alfred S. ; SALKIND, Charles T.: *Challenging Problems in Geometry.* Palo Alto - Califórnia. Dover Publications,Inc., 1988. 245 p.

[20] RODRIGUES, Manoel B. ; ARANHA, Álvaro Z.: *Geometria Plana. Coleção Exercícios de Matemática*, São Paulo, Policarpo, 1997. 518 p. v. 6.

[21] SÃO PAULO (ESTADO) SECRETARIA DA EDUCAÇÃO.: *Currículo do Estado De São Paulo: Matemática e suas Tecnologias.* São Paulo, SEE, 2010.

[22] SEVERINO, Antônio J.: *Metodologia do Trabalho Científico.* 21. ed. São Paulo, Cortez, 2000, 279 p.

Capítulo 8

Anexos

No decorrer da pesquisa bibliográfica do presente trabalho, várias formas de expressar o teorema de Ptolomeu foram encontradas. Considerando-se que não é um dos objetivos do presente estudo analisar o discurso que o reveste foi colocada, em forma de anexo, os diferentes conceitos do mesmo:

8.1 Garbi, Gilberto G.: [12] (p. 88)
"Em todo quadrilátero inscritível, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos."

8.2 Aaboe, Asger: [1] (p. 145)
"Se $ABCD$ é um quadrilátero inscritível, então a soma dos produtos dos lados opostos é igual ao produto das diagonais."

8.3 Posamentier, Alfred S.: [19] (p. 164)
(Ptolomy's Theorem)
"In a cylic quadrilateral the product of the diagonals is equal to the sum of the products of the pairs of opposite sides."

8.4 Associación Fondo DE Investigadores Y Editores: [4] (p. 702)
"En todo cuadrilátero inscrito o inscriptible, el producto de las longitudes de sus diagonales es igual a la suma de los productos de las longitudes de sus lados opuestos."

8.5 Revista do Professor de Matemática nº 80: [13] (p. 24)
"Em um quadrilátero convexo inscritível, o produto das medidas das diagonais é igual à soma dos produtos das medidas dos lados opostos."

8.6 MORGADO, Augusto C. ; WAGNER, Eduardo ; JORGE, Miguel.: [17] (p. 190)
"Num quadrilátero inscritível o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos."

8.7 http://cptolomeu.blogspot.com.br/, acesso em: 20 dez. 2013:
"O retângulo construído sobre AC e BD é igual ao retângulo construído sobre AB e DC mais o retângulo construído sobre AD e BC."

8.8 Muniz Neto, Antonio C.: [18] (p. 186)
"Se $ABCD$ é um quadrilátero inscritível de diagonais AC e BD, então: $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$."