INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

PROFMAT – SBM

ANDERSON LUIS BARBOSA DA COSTA

# O ENSINO DO PRINCÍPIO DAS CASAS DOS POMBOS NO ENSINO BÁSICO

RIO DE JANEIRO

2013

ANDERSON LUIS BARBOSA DA COSTA

# O ENSINO DO PRINCÍPIO DAS CASAS DOS POMBOS NO ENSINO BÁSICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (PROFMAT – SBM) para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Carlos Gustavo Moreira

RIO DE JANEIRO

2013

# AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me sustentar nos momentos de dificuldade e por sempre estar conduzindo os meus passos em minha trajetória profissional. Obrigado Senhor pela graça de poder concluir mais uma etapa de minha vida acadêmica. Sem a Tua presença nada poderia realizar!

Agradeço a todos os meus familiares que, ao longo de toda a minha vida escolar e universitária, me apoiaram nos momentos de fracasso e se alegraram nos momentos de conquistas.

Agradeço aos professores que passaram pela minha vida. A formação que recebi de cada um de vocês foi fundamental para que eu pudesse chegar até aqui.

Por fim, agradeço a todos que já foram e aos que um dia serão meus alunos. Vocês foram a motivação principal para que eu pudesse enfrentar dois anos de muita luta para concluir o mestrado. Não busco formação acadêmica unicamente para alimentar o meu ego, mas porque desejo e amo ensinar aos jovens. Acredito que esta seja minha vocação e, por isso, ao repassar um pouco de meu conhecimento desejo contribuir para que vocês possam fazer deste mundo um lugar um pouco melhor para se viver.

SHALOM!

# SUMÁRIO



*** Capítulos escritos com a colaboração de Luigi Amato Bragança Amorim**

# 1 Introdução

Torna-se cada vez mais frequente o relato de docentes que observam em suas aulas um profundo desinteresse dos alunos pelos conteúdos matemáticos apresentados ao longo do ensino básico. Normalmente este desinteresse vem acompanhado de dificuldades na compreensão e no desenvolvimento de argumentações lógicas necessárias para a resolução de problemas.

Desta forma, é fundamental que as atividades e conteúdos trabalhados pelo professor em qualquer etapa do ensino fundamental e do ensino médio promovam, sempre que possível, uma formação educacional que gere pessoas críticas e com senso argumentativo, capazes de criar, interpretar, responder e explicar situações problemas envolvendo Matemática.

Considerando a fragilidade atual em que se dá a formação dos jovens na escola e as demandas crescentes da sociedade em que vivemos, é necessário que se crie momentos nas aulas de Matemática em que os conteúdos sejam apresentados estimulando o desenvolvimento de pensamentos lógicos.

Em vista da alteração do cenário descrito anteriormente, apresentamos como objetivo principal do presente trabalho oferecer subsídios aos professores de Matemática que, na medida do possível e de acordo com a realidade encontrada, desejam inserir o ensino do Princípio das Casas dos Pombos não apenas como mais um conteúdo do plano de curso anual, mas como uma ferramenta indispensável para a resolução de inúmeros problemas relacionados às mais diversas áreas da Matemática e que pode, com planejamentos adequados, despertar um maior interesse dos alunos pelas aulas de Matemática e desencadear situações inovadoras que favoreçam a utilização de argumentos lógicos na resolução de problemas.

## 1.1 Por que ensinar Matemática?

Todo professor de Matemática comprometido com sua profissão e com o desenvolvimento intelectual e social da sociedade já deve ter se perguntado: qual é o meu objetivo ao ensinar Matemática? Esta pergunta tem, ao longo dos anos, diferentes respostas, dependendo da concepção de sociedade, de educação e de matemática do professor. A mudança da sociedade, marcada por vários progressos científicos e avanços tecnológicos, define novas exigências para os jovens. Este ritmo acelerado de mudanças na sociedade exige do cidadão que ele saiba lidar com dados numéricos e interpretá-los, trabalhar em grupo, expor suas ideias por escrito ou oralmente, ter pensamento crítico e ser criativo. Além disso, é importante ter a capacidade de resolver problemas e de saber utilizar diferentes recursos tecnológicos.

Desta forma, a Matemática do ensino fundamental e do ensino médio deve procurar, sempre que possível, fazer uso de problemas diversificados que estimulem o desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno, estimulando-o a participar mais ativamente das aulas de Matemática.

## 1.2 O ensino de Matemática e o compromisso com a formação do cidadão

Como professor, acredito que toda educação comprometida com uma sólida formação cidadã privilegia a autonomia, o processo individual e coletivo de construção do conhecimento. Entretanto, na realidade escolar brasileira, não se verifica efetivamente esta prática pedagógica, isto porque muitas escolas têm como objetivo fazer com que os alunos acumulem informações mesmo que estas não tragam nenhuma motivação e não façam o menor sentido para eles.

Nas escolas brasileiras observa-se com frequência que muitos professores recorrem a exercícios de aplicação imediata em quase todas as suas aulas. Quando se utilizam de problemas, os mesmos são típicos, com enunciados curtos e com resolução por meio de estratégias treinadas anteriormente. A apresentação dos conteúdos ocorre oralmente, partindo de definições, exemplos e propriedades (que nem sempre são provadas). Considera-se que uma reprodução correta pelo aluno do que foi apresentado pelo professor é a evidência de que ocorreu aprendizagem. Essa prática de ensino completamente focada no professor mostra-se ineficaz, pois muitas vezes o aluno só aprendeu a reproduzir, mas não apreendeu o conteúdo.

Imaginemos um professor de matemática que no primeiro dia de aula convida seus alunos a resolverem cinco problemas dispostos no quadro. Após ouvir diversas reclamações como *"Ah professor, primeiro dia. Relaxa!"*, *"Ele só pode tá de brincadeira!", "Não vou copiar mesmo!"*, o professor diz aos seus alunos que os problemas não eram difíceis e que envolviam apenas raciocínio lógico.

Depois de um certo tempo, o professor resolve debater os problemas com a classe e conclui mostrando que dois problemas não possuem solução, dois possuem mais de uma solução e um dos problemas o próprio professor não sabe resolver. Assim, se reiniciam as reclamações de todo tipo: *“Professor, como é um problema não tem solução?”, “Onde estão os cálculos?”,“Não tem que dá um número como resposta?”,“Você não sabe? Mas você não é professor?”*.

A situação exposta anteriormente talvez indique que o professor terá muita dificuldade durante o ano letivo se quiser ensinar de forma diferente da tradicional. Muitos diante de situações como essa abandonam seus planejamentos e voltam ao tradicionalismo com medo de desagradar aos alunos à direção escolar.

Segundo Onuchic (1999),

*“Quando os professores ensinam matemática através de resolução de problemas, eles dão a seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver sua própria compreensão. À medida que a compreensão dos alunos se torna mais profunda e mais rica, sua habilidade em usar matemática para resolver problemas aumenta consideravelmente.”*

Os PCN (1997) indicam que ao colocarmos o foco na resolução de problemas, o que se defende é uma proposta que Falzetta (2003) resume nos seguintes princípios:

• *O ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;*

• *O problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;*

• *Aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na história da Matemática;*

• *O aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas. Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações;*

• *A resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem,* *pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.''*

## 1.3 Motivações para a escolha da proposta de trabalho

Em geral o ensino de Matemática na escola básica é tecnicista e prioriza manipulações aritméticas e algébricas. Inúmeras vezes, regras e fórmulas descontextualizadas e não justificadas direcionam a prática docente, fato que não proporciona aos discentes experiências frequentes com argumentos matemáticos que os conduzam a analisar e refletir sobre problemas científicos e cotidianos.

As aulas de Matemática, em geral, não promovem discussões e desafios e acabam contribuindo para que os alunos considerem esta disciplina rígida, inimiga e impeditiva do avanço de suas vidas profissionais. Não a veem como aliada fundamental para o desenvolvimento científico, econômico e social da humanidade e facilitadora na resolução de problemas que possam ser enfrentados ao longo da vida, mas unicamente como promotora de desânimo, frustração e fracasso escolar.

Os conteúdos matemáticos do currículo escolar são muito ricos, mas frequentemente não são devidamente explorados pelo professor em sala de aula. As demandas da sociedade contemporânea exigem cada vez mais do docente o desenvolvimento de atividades escolares desafiadoras e o trabalho com problemas que proporcionem aos alunos acesso a questionamentos e reflexões, em vista do desenvolvimento do raciocínio lógico e de uma formação escolar mais sólida.

Segundo Dante (2000, p.12 e 13)

*"A busca da solução de um problema que os desafia é mais dinâmica e motivadora do que a que segue o clássico esquema de explicar e repetir. O real prazer de estudar matemática está na satisfação que surge quando o aluno por si só resolve um problema. Quanto mais difícil, maior a satisfação em resolvê-lo. Um bom problema sucinta a curiosidade e desencadeia no aluno um comportamento de pesquisa, diminuindo sua passividade e conformismo."*

Em particular, na sala de aula e nos livros didáticos, a Análise Combinatória não é explorada em todos os seus aspectos. Priorizam-se técnicas de contagem e aplicações de fórmulas que, na maior parte das vezes, não são justificadas pelo professor e, portanto, não são compreendidas pelos alunos.

Apesar de ser uma das principais ferramentas da combinatória e ser utilizado nas mais diversas áreas da Matemática, o Princípio das Casas dos Pombos (PCP), facilmente compreendido e quase óbvio, não está presente nos livros didáticos brasileiros, não é valorizado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (que focam o estudo da Combinatória por meio de técnicas de contagem) e não possui suas inúmeras potencialidades exploradas ao longo do ensino básico. O PCP difere de muitos conteúdos abordados no ensino fundamental e médio na medida em que, sendo um argumento frequentemente usado em provas de teoremas, não oferece uma fórmula ou equação na qual é possível substituir variáveis para se chegar a um resultado desejado.

Na medida em que são amplamente reconhecidas as potencialidades deste princípio no meio acadêmico e sua apresentação pode ser facilmente compreendida por alunos do ensino fundamental e médio, nos perguntamos: Por que não apresentá-lo aos nossos alunos da escola básica? Por que não permitir que nossos alunos tenham acesso a um conteúdo de extrema importância científica e de fácil compreensão? Por que não apresentar um conceito que pode lhes dar a oportunidade de não só repetir ou refazer exercícios durante as aulas de Matemática, mas também de desenvolver a capacidade de adaptar o conhecimento obtido para resolver problemas em novos contextos, estimulando, portanto, a formação de um cidadão mais crítico e autônomo?

Acreditamos que ao apresentar o Princípio das Casas dos Pombos na escola básica o professor terá uma boa oportunidade de aprofundar o conhecimento matemático dos alunos e ajudá-los a desenvolverem habilidades diversas como, por exemplo, a construção de uma redação matemática mais formal e argumentativa. Além disso, explorar no quadro negro as diversas respostas e argumentações apresentadas pelos alunos ao resolverem questões em que a utilização do PCP é fundamental para se chegar a solução pode contribuir para que eles sintam-se coautores da aula e participantes da construção de sua própria aprendizagem.

Smole (2000, p. 26) afirma que:

*"Cada vez que se pede a um aluno para dizer o que fez e por que, para verbalizar os procedimentos que adotou, para relatar enfim suas reflexões pessoais, estamos permitindo que modifique conhecimentos prévios, reflita sobre o que fez e elabore significados para as ideias e os procedimentos matemáticos envolvidos na situação."*

Desta forma, com este trabalho desejamos contribuir com o professor que, reconhecendo a importância do PCP e sentindo-se insatisfeito com a receptividade negativa e o fraco rendimento de seus alunos nas aulas de Matemática, deseje inserir, na medida do possível, o PCP em seus planejamentos anuais, tanto em turmas do ensino fundamental quanto do ensino médio. Por meio deste material busca-se oferecer um suporte inicial para a implementação das alterações curriculares desejadas. Esperamos assim contribuir para que haja uma participação mais ativa dos alunos durante as aulas de Matemática e, principalmente, para que a aprendizagem dos conceitos apresentados a eles ocorra de forma significativa e satisfatória.

## 2 Relato de experiência

Neste capítulo apresento mais uma motivação pessoal para a escolha do tema do presente trabalho. A seguir irei relatar uma pequena e proveitosa experiência que tive ao trabalhar com alguns alunos o Princípio das Casas dos Pombos durante uma aula de Análise Combinatória. Espero que o relato a seguir possa estimular aos professores que um dia possam ler este material a apresentarem aos seus alunos, em algum momento do ensino básico, a poderosa ferramenta que é o PCP.

Uma das escolas em que leciono atualmente é o Instituto Superior de Educação do Rio de Janeiro (ISERJ) (antigo Instituto de Educação), instituição de ensino centenária no Rio de Janeiro. Atualmente o ISERJ é mantido pela Fundação de Apoio à Escola Técnica do Estado do Rio de Janeiro (FAETEC) e seus cursos técnicos são voltados à formação de profissionais nas áreas de administração, informática e secretariado escolar. Situado na Rua Mariz e Barros, no bairro da Tijuca, conta com cerca de cinco mil alunos, da creche à pós-graduação.

Em 2011, durante uma aula para a turma 1204, formada por 21 alunos da 2ª série do ensino médio do curso técnico em informática, percebi que não teria tempo suficiente para iniciar um novo conteúdo após a correção dos exercícios de Análise Combinatória propostos na aula anterior. Sendo assim, decidi passar mais alguns problemas no quadro que fossem desafiantes e fora dos padrões dos exercícios já realizados em sala de aula.

Nesta época eu estava no primeiro período do mestrado (PROFMAT-IMPA) cursando a disciplina Matemática Discreta e, por este motivo, sempre andava com o Livro “Análise Combinatória e Probabilidade” (do magnífico e falecido professor Morgado) na mochila.

Foi deste livro que decidi retirar as questões que coloquei no quadro para os alunos. Como os problemas do capítulo que abordava o Princípio das Casas dos Pombos eram bastante interessantes e atendiam ao que queria desenvolver com a turma naquele momento, não pensei duas vezes antes de escolhê-las.

Os problemas propostos aos alunos foram os seguintes:

*PROBLEMA 1:*

*63127 candidatos compareceram a uma prova de vestibular (25 questões de múltipla escolha com 5 alternativas por questão). Considere a afirmação: "Pelo menos dois candidatos responderam de modo idêntico as k primeiras questões da prova." Qual é o maior valor de k para o qual podemos garantir que a afirmação é verdadeira?*

*PROBLEMA 2:*

*Prove que em qualquer conjunto de 52 inteiros existe um par de inteiros cuja soma ou cuja diferença é divisível por 100.*

A turma reagiu rapidamente aos "desafios" propostos. A receptividade foi positiva e muitos se colocaram dispostos a pensar nos problemas e a discutir suas ideias para solucioná-los. Alguns apresentaram rapidamente a solução do problema 1, outros espontaneamente formaram grupos para discutir o problema 2, e assim começou, sem planejamento prévio, minha primeira experiência com o ensino do PCP no Ensino Médio.

Concluo que esta pequena experiência foi positiva por diversos motivos, dentre os quais cito alguns:

- Alunos dispersos mostraram-se atentos, consequência imediata do aspecto desafiante dos problemas apresentados;

- A partir desta experiência abriram-se as portas para um contato maior entre mim e os alunos da turma. Pude conhecer um pouco mais a capacidade intelectual de alguns deles e também reconhecer dificuldades na turma em argumentar e se expressar por meio de argumentos lógicos e matemáticos;

- A turma era pequena, mas isto não facilitava um maior contato entre eles. A maior parte dos alunos eram homens e as poucas meninas tinham muito medo de se colocar durante as aulas e apresentar suas dúvidas. Nas aulas seguintes, o receio delas em apresentar sugestões para a resolução de questões e possíveis incompreensões nos conteúdos trabalhos em sala de aula diminuiu bastante;

- Após o resultado positivo que obtive nesta aula, busquei desenvolver a mesma atividade em outras turmas do mesmo colégio e de outros, inclusive com alunos do ensino fundamental, escolhendo com cuidado as questões a serem apresentadas e sempre levando em consideração o nível da turma.

Por fatores diversos, nem sempre consegui o resultado esperado nas outras turmas em que realizei esta mesma atividade. Mesmo o resultado coletivo muitas vezes não ter sido adequado às minhas pretensões, sempre que apliquei atividades envolvendo o PCP em sala de aula pelo menos um aluno foi atingido. Além disso, pude conhecer melhor meus alunos e reconhecer em muitos deles capacidades intelectuais brilhantes que, se bem encaminhadas, podem fazer com que eles se tornem excelentes profissionais e, quem sabe, incríveis professores e pesquisadores da Matemática.

## 3 Objetivos

O presente trabalho tem como principais objetivos:

- Propiciar aos autores do trabalho uma oportunidade de se aprofundarem em um conteúdo de enorme importância para a Matemática e de refletirem sobre suas práticas docentes atuais;
- Desenvolver material teórico compacto para consulta e estudo por parte do professor de Matemática que deseja se aprofundar no estudo do Princípio da Casa dos Pombos e. portanto, ter maior segurança na apresentação deste conteúdo em sala de aula;
- Pesquisar, produzir e apresentar atividades experimentais para o ensino do Princípio das Casas dos Pombos, buscando, sempre que possível, relacioná-lo com os mais diversos conteúdos matemáticos trabalhados na escola básica;
- Oferecer ao professor de Matemática propostas didáticas diferenciadas para o ensino do Princípio das Casas dos Pombos no ensino fundamental e médio, abrindo possibilidades de adaptação à realidade observada na sala de aula.

# 4 Metodologia

Com o objetivo de construirmos uma base sólida para a superação dos desafios encontrados ao longo da realização do presente trabalho, seguimos alguns passos que se tornaram indispensáveis para a o sucesso e concretização dos objetivos apresentados anteriormente.

- Consulta aos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do Ensino Fundamental e do Ensino Médio;
- Consulta a artigos científicos de autores renomados da Educação Matemática sobre resolução de problemas, ensino de combinatória e áreas afins;
- Realização de uma profunda revisão bibliográfica que forneça embasamento teórico quanto aos aspectos pedagógicos da pesquisa;
- Consulta a artigos científicos que tratem com profundidade dos aspectos históricos, teóricos e das principais aplicações do PCP na Matemática;
- Consulta a materiais produzidos para a formação continuada de professores por diversas instituições e grupos de pesquisa nacionais;
- Aprofundamento no estudo dos aspectos teóricos do PCP, de suas diversas definições (da mais simples a mais abrangente) e de suas aplicações clássicas;
- Elaboração, coleta e análise de atividades produzidas para os exemplos apresentados ao longo do presente texto e para os planos de aula propostos aos professores de Matemática do ensino fundamental e médio.

## 5 O Princípio das Casas dos Pombos

O Princípio das Casas dos Pombos (PCP), também conhecido como Princípio das gavetas de Dirichlet, pois acredita-se que o primeiro relato deste principio foi feito por Dirichlet em 1834 com o nome de Schubfachprinzip ("princípio das gavetas"), pode ser apresentado por meio de diversas afirmações. Vejamos algumas possibilidades:

**i)** Se n pombos devem ser postos em k casas, n > k, então pelo menos uma casa irá conter mais de um pombo;

**ii)** Se em n casas são postos n + 1 pombos, então haverá uma casa com pelo menos dois pombos;

**iii)** Se o número de elementos de um conjunto finito A é maior do que o número de elementos de um outro conjunto B, então uma função de A em B não pode ser injetiva.

Apresentamos a seguir versões mais gerais do PCP:

**iv)** Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_k$, números inteiros maiores ou iguais a 1. Se temos $k$ casas e pelo menos $a_1 + a_2 + \ldots + a_k - k + 1$ pombos, então haverá na casa $j$, para algum $j \leq k$, um número maior ou igual a $a_j$ pombos.

**v)** Se n pombos devem ser colocados em k casas, com n > k, então, em alguma casa haverá pelo menos $\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1$ pombos, onde $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a $x$;

Embora se trate de uma afirmação evidente e elementar, o PCP é útil para resolver problemas que, à primeira vista, são obscuros e não imediatos. Para aplicá-lo, devemos identificar, na situação dada, quem faz o papel dos pombos e quem faz o papel das casas. Nos capítulos seguintes iremos apresentar sugestões de atividades que possam iniciar a apresentação do PCP para alunos do ensino básico e aprofundar as suas aplicações clássicas.

## 5.1 Despertando o interesse do aluno

Ao iniciarmos a apresentação de um novo conteúdo aos nossos alunos, é desejável que sejam apresentados problemas iniciais interessantes e desafiadores com o objetivo de motivá-los. Num primeiro momento, estes problemas podem ser difíceis para eles. Mas, ao longo do período em que este novo conteúdo for trabalhado, os problemas iniciais podem ser retomados e reapresentados com suas respectivas soluções.

Neste momento, o professor poderá utilizar novos recursos, agora já conhecidos pelo aluno. Desta forma eles perceberão que o conhecimento que eles adquiriram com a aprendizagem do novo conteúdo trabalhado em sala de aula pelo professor não foi em vão, pois facilitaram e facilitarão a resolução de diversos problemas de Matemática que, num primeiro momento, parecem ser muito obscuros.

Vejamos a seguir alguns problemas sobre o PCP que, por serem desafiadores e não habituais, podem ser propostos pelo professor em sala de aula seguindo a mesma linha de pensamento exposta anteriormente.

*PROBLEMA 1:*

*Quantas pessoas, no mínimo, devem morar numa casa com 7 quartos para garantirmos que pelo menos duas dormem num mesmo quarto?*

É fácil observar que se a casa tiver até 7 moradores, é possível termos no máximo uma pessoa por quarto. Já se a casa tiver 8 ou mais moradores, teremos o número de moradores (pombos) maior que o número de quartos (casas), o que garante, pelo PCP, que pelo menos duas pessoas dormem no mesmo quarto.

*PROBLEMA 2:*

*Numa cidade, o número de habitantes é maior que o número de fios de cabelo na cabeça de cada um dos moradores. Ou seja, se contarmos os fios de cabelo de cabelo da cabeça de qualquer um deles, esse número será menor que a população da cidade. Ali, não existem dois habitantes que tenham o mesmo número de fios de cabelo e não há ninguém com exatos 618 fios de cabelo na cabeça. Qual é o maior número possível de habitantes dessa cidade?*

Sejam $n$ a população da cidade e $k$ o número de fios de cabelo de um determinado habitante, $0 \leq k < n$.

Suponhamos inicialmente que $\mathrm{n} \leq 618$ . Como $k$ pode assumir $n$ valores distintos $(0, 1, 2, \dots, n-1)$ e a cidade possui n habitantes, é possível termos todos os habitantes com quantidades distintas de fios de cabelo .

Suponhamos agora que $n > 618$. Agora $k$ só pode assumir $n - 1$ valores distintos, pois $k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \backslash \{618\}$ . Sendo assim, o número possível de fios de cabelo de um habitante (casas) é menor que a população da cidade (pombos). Logo, pelo PCP, pelo menos dois moradores da cidade possuem o mesmo número de fios de cabelo.

Concluímos, portanto, que o número máximo de habitantes que a cidade deve ter para que as condições do problema sejam satisfeitas é 618.

*PROBLEMA 3:*

*Será que existem duas pessoas no mundo que possuem o mesmo número de amigos? (admitamos que "ser amigo" seja uma relação simétrica, ou seja, se a é amigo de b, então b é amigo de a).*

Para resolvermos o problema, temos que o mundo possui um número finito de habitantes, portanto, chamemos esse número de n. Observe que uma pessoa pode não ter amigos, pode ter $1$ amigo, ou $2$ amigos, e assim sucessivamente, até $\mathrm{n} - 1$ amigos, pois no mundo com n habitantes, uma pessoa só pode se amiga no máximo de $\mathrm{n} - 1$ pessoas. Considere o número de amigos como as casas, tal que a casa $[0]$ está a pessoa que não possui amigos, a casa $[1]$ está a pessoa que possui 1 amigo, e assim sucessivamente.

$$\underbrace{[0],[1],[2],\cdots,[n-1]}_{\text{n casas}}$$

Agora, observe que se uma pessoa ocupar a casa $[0]$, nenhuma outra poderá ocupar a casa $[n-1]$, pois, como a relação é simétrica, não pode existir uma pessoa que não possua amigos e outra que é amigo de todos e, vice-versa.

Portanto, temos $n-1$ casas para serem ocupadas e, considerando o número de participantes como pombos, segue que temos n pombos.

Logo, pelo PCP, haverá uma casa com pelo menos dois pombos, o que mostra que há duas pessoas que possuem exatamente o mesmo número de amigos.

## 5.2 Relacionando o PCP com outros conteúdos do ensino básico

Os problemas que se utilizam do PCP como recurso primordial em suas soluções, podem facilmente estar relacionados a outros conteúdos e áreas da Matemática trabalhados na escola durante todo o ensino básico, o que favorece a utilização do PCP como ferramenta matemática frequente e poderosa na resolução de problemas. Vejamos alguns exemplos:

### 1. Aritmética

*Prove que, dados 11 números inteiros quaisquer, a diferença entre dois deles será um múltiplo de 10.*

É fácil verificar que diferença entre dois números inteiros será um múltiplo de 10 quando eles tiverem o mesmo resto na divisão por 10. Sabemos que existem dez restos possíveis nesta divisão (casas) e que temos disponíveis onze números inteiros (pombos). Logo, pelo PCP, dois destes números terão restos iguais na divisão por 10, ou seja, a diferença entre eles será um múltiplo de 10.

### 2. Análise Combinatória

*Uma prova de concurso possui 10 questões de múltipla escolha, com cinco alternativas cada. Qual é o menor número de candidatos para o qual podemos garantir que pelo menos 3 deles preencheram o cartão resposta com exatamente as mesmas respostas para todas as questões?*

Neste problema teremos que adaptar o uso do PCP às condições apresentadas. Queremos garantir agora que em cada “casa” (gabarito) haja pelo menos três “pombos”(candidatos). Cada uma das 10 questões do concurso pode ser respondida de 5 maneiras diferentes. Desta forma, pelo Princípio Multiplicativo, há $5^{10}$ maneiras de preenchermos o cartão resposta. Facilmente podemos concluir que se o concurso tiver até 2.

$5^{10}$ candidatos, ainda não poderemos garantir que mais de dois candidatos (pombos) terão gabaritos (casas) iguais. Já se tivermos $2.\ 5^{10} + 1$ candidatos, teremos o número de "casas" maior que o dobro do número de "pombos", o que garante, pelo PCP, que pelo menos três candidatos preencheram o cartão resposta com exatamente as mesmas respostas para todas as questões.

## 3. Geometria Plana

*Escolhem-se 5 pontos ao acaso sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que pelo menos um dos segmentos que eles determinam tem comprimento menor ou igual a* $\sqrt{2}$ *.*

Iniciemos a resolução do problema com uma construção: Vamos dividir o quadrado de lado 2 em outros quatro de lado 1 criando dois segmentos com extremidades nos pontos médios dos lados opostos do quadrado original. Desta forma subdividimos o quadrado original em 4 quadrados menores de modo que a distância máxima entre dois pontos em cada uma destes novos quadrados é, pelo teorema de Pitágoras, $\sqrt{2}$ (diagonais dos quadrados de lado 1). Como temos 4 quadrados de lado 1 (casas) e iremos escolher 5 pontos (pombos), pelo menos dois pontos escolhidos estarão numa mesma "casa" e, portanto, determinam um segmento menor ou igual a $\sqrt{2}$.

## 4. Geometria Espacial

*Escolhem-se 9 pontos ao acaso interiores ou nas faces de um cubo de aresta 2. Mostre que pelo menos um dos segmentos que eles determinam tem comprimento menor ou igual a* $\sqrt{3}$*.*

Neste exemplo utilizaremos um recurso análogo ao utilizado no exemplo anterior. Agora iremos dividir o cubo em 8 cubos menores de aresta 1, seccionando-o por meio de três planos, onde cada um deles passa pelo centro do cubo e é paralelo a duas faces opostas. Desta forma subdividimos o cubo original em 8 cubos menores de modo que a distância máxima entre dois pontos em cada uma destes novos cubos é, por Pitágoras, $\sqrt{3}$

(diagonais dos cubos de aresta 1). Como temos 8 cubos de aresta 1 (casas) e iremos escolher 9 pontos (pombos), pelo menos dois pontos escolhidos estarão numa mesma "casa" e, portanto, determinam um segmento menor ou igual a $\sqrt{3}$.

## 5. Geometria Analítica

*Sejam 5 pontos distintos do plano com coordenadas inteiras. Mostre que pelo menos um par de pontos tem ponto médio com coordenadas inteiras.*

Dados dois pontos do plano A = (xa, ya) e B = (xb, yb), o ponto médio M do segmento AB é dado por M = $\left(\frac{\text{xa + ya}}{2}, \ \frac{\text{xb+ yb}}{2}\right)$. Além disso, sabemos que a média entre dois números inteiros será um número inteiro se eles tiverem a mesma paridade, ou seja, ou os dois são pares ou são ímpares. Quando analisamos um ponto do plano com coordenadas inteiras, encontramos um dos seguintes tipos de coordenadas (casas): (PAR, PAR), (PAR, ÍMPAR), (ÍMPAR, PAR), (ÍMPAR, ÍMPAR). Ao escolhermos 5 pontos (pombos) do plano, pelo menos dois deles terão coordenadas do mesmo tipo e, consequentemente, o ponto médio do segmento que tem estes pontos como extremidade também terão coordenadas inteiras.

## 6- Funções

*Sejam A e B dois conjuntos finitos tais que o número de elementos de A é maior que o número de elementos de B. Prove que não existe função injetiva de A em B.*

Observe que neste exercício propomos a prova de uma das formas em que apresentamos o Princípio das Casas dos Pombos no início do capítulo. Apesar da afirmação talvez ser óbvia para os alunos, a solução deste problema em sala de aula é uma ótima oportunidade para o professor estimular o espírito de participação e cooperação dos alunos com a aula e com outros colegas. Além disso, o professor pode mostrar que, em Matemática, muitas vezes temos que provar o óbvio e que isso nem sempre é fácil.

A seguir apresentaremos duas soluções para o problema, ou seja, duas demonstrações para o PCP, uma menos formal e outra com maior rigor matemático. O professor ao apresentar o PCP deve demonstrá-lo utilizando a forma que considerar mais adequada ao nível de sua turma. Vamos para as soluções.

**1ª solução:** Seja $f$ uma função de A em B. Para construirmos esta função devemos escolher para cada elemento de A um único elemento em B para ser sua imagem. Como o número de elementos de A (pombos) é maior que o número de elementos de B (casas), teremos pelo menos dois elementos de A com imagens iguais em B, ou seja, f não pode ser injetiva.

**2ª solução:** Iremos utilizar o princípio da indução finita.

*Etapa base*: Suponha o número de elementos de B igual a zero, ou seja, B = ∅. Então não existe função f de A em B que seja injetiva.

*Hipótese de indução:* Suponha que $f$ não é injetiva, sendo $f$ uma função de A em B onde o número de elementos de A é maior que o número de elementos de B, que é menor ou igual a $n$, onde $n \geq 0$.

*Etapa de indução:* Suponha que $f$ é uma função de A em B onde o número de elementos de A é maior que o número de elementos de B, que é igual a $n+1$. Escolhemos agora algum elemento $a \in$ A. Se existe um elemento $b$ tal que $f(a) = f(b)$, então obviamente $f$ não é injetiva e a prova está concluída. Então, suponha que não exista tal elemento. Considere agora os conjuntos A $- \{a\}$ e B $- \{f(a)\}$ e a função $g$ de A $- \{a\}$ em B $- \{f(a)\}$ que é idêntica a $f$ para todos os elementos de A $- \{a\}$. Agora, a hipótese de indução pode ser aplicada, pois B $- \{f(a)\}$ possui $n$ elementos e o número de elementos de A $- \{a\}$ é maior que o número de elementos de B $- \{f(a)\}$.

## 5.3 Aprofundando o Princípio das Casas dos Pombos

Muitas vezes o professor de Matemática constata que alguns de seus alunos possuem habilidades matemáticas diferenciadas com relação aos outros de mesma faixa etária. Pelo fato deles terem enorme facilidade para compreender novos conceitos, normalmente o professor tem dificuldade em mantê-los atentos na sala de aula, já que muitos deles consideram as aulas de Matemática enfadonhas e muitas vezes inúteis.

Em casos como estes é necessário apresentar frequentemente problemas verdadeiramente desafiadores, que os estimulem a participar das aulas e favoreçam o desenvolvimento de suas habilidades inatas, sejam elas reconhecidas ou não pelo professor.

Visando atender a grupos de alunos que estejam no patamar descrito anteriormente, o professor ao apresentar o Princípio das Casas dos Pombos pode inserir nesta apresentação algumas de suas aplicações clássicas que aparecem com enorme frequência em Olimpíadas de Matemática e são muito utilizadas por matemáticos das mais diversas áreas de pesquisa.

Algumas dessas aplicações são o Teorema de Dirichlet e o Teorema de Ramsey, assuntos que consideramos primordiais para aqueles que desejam se aprofundar no estudo da Matemática.

### 5.3.1 Teorema de Dirichlet

*Dado um número irracional* $\alpha$, *é possível encontrar infinitos números racionais* $\frac{p}{q}$, *com* $p, q \in \mathbb{Z}$ *de tal forma que* $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$, *ou seja, existem infinitas aproximações racionais para um número irracional com erro menor que o inverso do quadrado do denominador.*

Acredita-se que na demonstração desse teorema, Dirichlet utilizou pela primeira vez o PCP de forma relevante. Ao longo da prova algumas notações nos serão muito úteis:

$\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro tal que $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$, ou seja, é a parte inteira de x;

$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1)$, ou seja, é a parte fracionária de x.

Seja $N \in \mathbb{N}$ um número "grande" e seja $\alpha$ um número irracional.

Considere os $N + 1$ números: $0, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{N\alpha\} \in [0,1)$.

Agora, particione $[0,1)$ em $N$ "intervalinhos": $[0, 1) = \bigcup_{k=1}^{N} \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right)$


Novamente, pelo PCP, podemos afirmar que haverá um "intervalinho" (casa) com pelo menos dois números (pombos).

Desta forma, concluímos que existem dois números $\{i\alpha\}$ e $\{j\alpha\}$, com $0 \leq i < j \leq N$, tais que:

$|\{j\alpha\} - \{i\alpha\}| < \frac{1}{N}$ e $|\{j\alpha\} - \{i\alpha\}| = |(j\alpha - \lfloor j\alpha \rfloor) - (i\alpha - \lfloor i\alpha \rfloor)| = |j\alpha - i\alpha - \lfloor j\alpha \rfloor + \lfloor i\alpha \rfloor| = |(j - i)\alpha - (\lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor)| < \frac{1}{N}$.

Considerando $q \coloneqq j - i$ e $p \coloneqq \lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor$, temos $j - i$ e $\lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor$ inteiros e garantimos que $0 < q < N$, ou seja, $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{N}$. Desta forma mostramos que $|q\alpha - p| < \frac{1}{N} \leq \frac{1}{q}$. Dividindo ambos os membros da desigualdade por $q$ temos $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Nq} \leq \frac{1}{q^2}$, o que prova a existência de uma aproximação racional $\frac{p}{q}$ de $\alpha$ com erro menor que $\frac{1}{q^2}$.

Provaremos agora que existem infinitas aproximações racionais de α da forma descrita anteriormente.

Sejam $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \cdots, \frac{p_k}{q_k}$ aproximações racionais de $\alpha$ e $\delta \coloneqq min\left\{\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right|, 1 \leq j \leq k\right\} > 0$.

Como podemos escolher $N$ tão grande quanto quisermos, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \delta$.

Logo, $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{N} < \delta \leq \left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right|$ e $\frac{p}{q} \neq \frac{p_j}{q_j}\ \forall\, j \leq k$, o que garante a existência de infinitas aproximações racionais $\frac{p}{q}$ de $\alpha$ com erros menores que $\frac{1}{q^2}$.

Vejamos agora algumas observações interessantes relacionadas ao Teorema de Dirichlet.

**1ª Observação**: Algumas aproximações racionais muito boas de $\pi$ são bastante conhecidas. Vejamos alguns exemplos:

Para $\frac{p}{q} = \frac{22}{7}$ , temos:

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| = |3{,}141592654 \ldots - 3{,}142857143 \ldots| = 0{,}001264489 \ldots < 0{,}020408163 \ldots = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{q^2}$$

Para $\frac{p}{q} = \frac{355}{113}$ , temos:

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| = |3{,}141592654 \ldots - 3{,}14159292 \ldots| = 0{,}000000266 \ldots < 0{,}000078314 \ldots = \frac{1}{113^2} = \frac{1}{q^2}$$

**2ª Observação**: A seguir apresentamos uma proposição que mostra ser possível encontrar infinitas aproximações racionais de ɷ (razão áurea) por meio da razão de números de Fibonacci consecutivos.

*A sequência de números reais $F_n$ dada por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ para todo n ≥ 0, é chamada de sequência de Fibonacci. Mostre que $\left|\frac{F_n+1}{F_n} - ɷ\right| < \frac{1}{{F_n}^2}$ para todo n ≥ 1*

*Dado: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (ɷ^n - (-1)^n.\ ɷ^{-n})$, onde $ɷ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$*

Observe que mostrar $\left|\frac{F_n+1}{F_n} - ɷ\right| < \frac{1}{{F_n}^2}$ equivale a mostrar que $|F_{n+1} - ɷ.F_n| < \frac{1}{Fn}$ .

Inicialmente vamos provar por indução que $|F_{n+1} - ɷ.F_n| = ɷ^{-n}$, para todo n ≥ 0.

Para n = 0, temos $|F_1 - ɷ.F_0| = |1 - ɷ.0| = 1 = ɷ^{-0}$.

Suponhamos que $|F_{n+1} - ɷ.F_n| = ɷ^{-n}$ seja verdadeiro para algum n ≥ 0. Provaremos agora que a igualdade anterior também é verdadeira para n+1, ou seja:

$|F_{n+2} - ɷ.F_{n+1}| = ɷ^{-(n+1)}$.

De fato, $|F_{n+2} - \omega . F_{n+1}| = |F_{n+1} + F_n - \omega . F_{n+1}| = |F_n - (\omega - 1) . F_{n+1}| =$

$|F_n - \omega^{-1} . F_{n+1}| = \omega^{-1} . |\omega . F_n - F_{n+1}| = \omega^{-1} . \omega^{-n} = \omega^{-(n+1)}$.

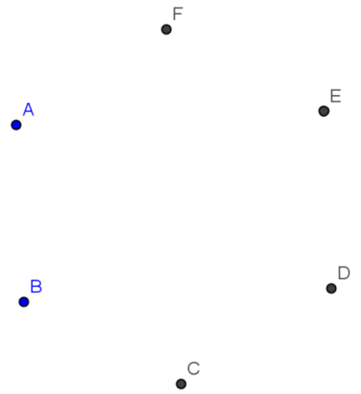
Para finalizarmos a demonstração, basta agora provar que para n ≥ 1, $\omega^{-n} < \frac{1}{F_n}$ , o que equivale a $F_n < \omega^n$. De fato, $F_1 = 1 < \omega$, $F_2 = 1 < \omega^2$ e, por indução, para n ≥ 1, temos $F_{n+2} = F_n + F_{n+1} < \omega^{n+1} + \omega^n = \omega^n . (\omega + 1) = \omega^n . \omega^2 = \omega^{n+2}$.

### 5.3.2 Teorema de Ramsey

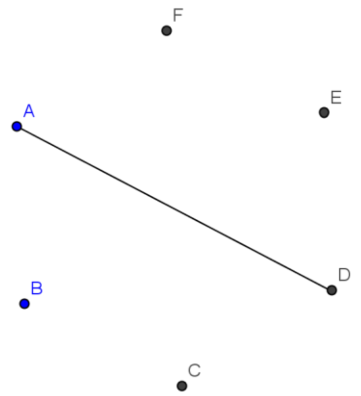
Outra aplicação clássica do PCP é o Teorema de Ramsey. Antes de enunciá-lo iremos apresentar por meio de um exemplo um caso particular do teorema.

*Numa reunião há 6 pessoas. Mostre que necessariamente existem 3 pessoas que se conhecem mutuamente ou 3 pessoas que não se conhecem mutuamente (admitamos que, se a conhece b, então b conhece a).*

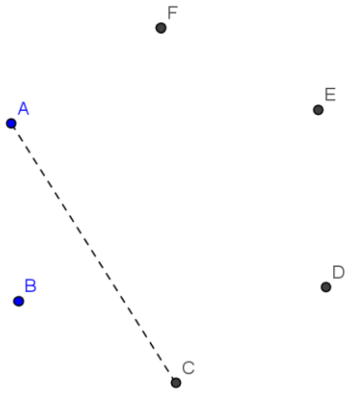
Vamos representar as 6 pessoas por 6 pontos não colineares quando tomados 3 a 3, formando assim um hexágono.




Se duas pessoas se conhecem, então as ligaremos por um segmento contínuo. Por exemplo, A e D se conhecem.

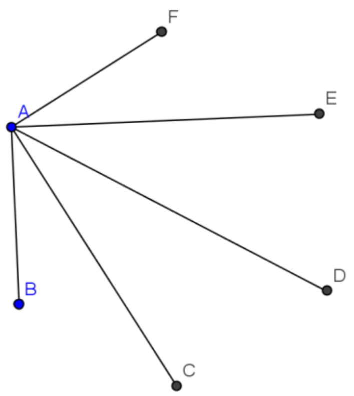


Agora, se duas pessoas não se conhecem, as ligaremos por um segmento tracejado. Por exemplo, A e C não se conhecem.

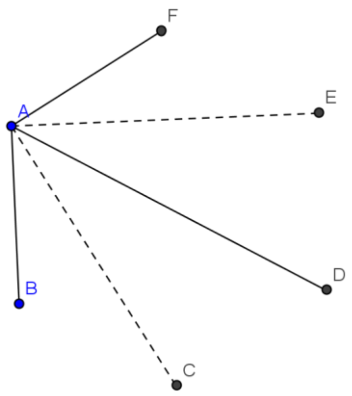



Desta forma, todos os possíveis segmentos que unem quaisquer dois pontos foram construídos. Estes segmentos traçados são os lados e as diagonais do hexágono formado.

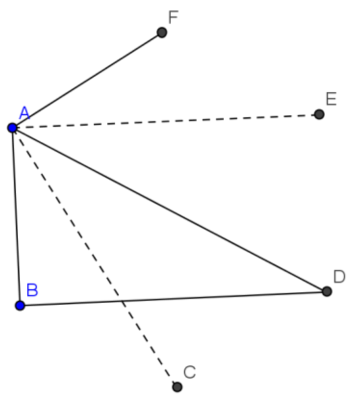
Fixemos o ponto A. A partir deste ponto partem 5 segmentos, como mostra a figura abaixo. Considerando os pontos como pombos e os segmentos contínuos ou segmentos tracejados como casas, temos 5 pombos e 2 casas e, pelo PCP, haverá pelo menos 3 segmentos contínuos ou pelo menos 3 segmentos tracejados, ou seja, a pessoa A conhece ou não conhece pelo menos 3 pessoas.



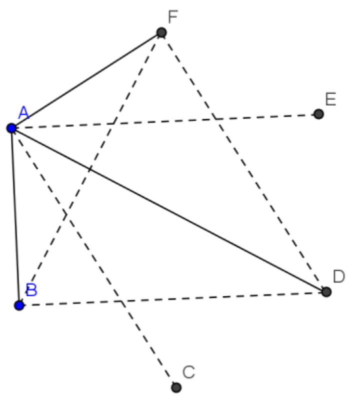

Admitamos que haja 3 segmentos contínuos partindo de A cujas extremidades são, por exemplo, B, D e F.




Se algum dos segmentos BD, BF ou DF for contínuo, o problema está resolvido, pois, este segmento juntamente com os que ligam seus extremos ao ponto A formam um triângulo contínuo e, portanto, 3 pessoas se conhecem mutuamente.




Agora, se nenhum dos segmentos citados é contínuo, então eles formam um triângulo tracejado, ou seja, há 3 pessoas que não se conhecem mutuamente.



O caso que partem três segmentos tracejados de A é análogo ao caso anterior. Desta forma, concluímos a demonstração.

**Teorema de Ramsey:** Para todo $m, n \geq 1$ existe $R \geq 1$ tal que em uma reunião com $R$ pessoas, existem $m$ que se conhecem ou $n$ que não se conhecem. Chamamos o menor número $R$ com esta propriedade de $R(m, n)$.

Por definição, temos $R(n, 1) = R(1, n) = 1$. Sabemos também que $R(m, 2) = m$ para todo $m \geq 2$, pois em qualquer conjunto de m pessoas, ou todas as pessoas se conhecem ou pelo menos 2 não se conhecem. Além disso, $R(m, n) = R(n, m)$, pois conhecer ou não conhecer é simétrico segundo o enunciado.

Observe que conhecemos todos os valores de $R(m, n)$ em que $m + n \leq 4$. $R(1,1) = R(2,1) = R(1,2) = R(3,1) = R(1,3) = 1$ e $R(2,2) = 2$.

Provemos agora, por indução, que $R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1)$ para todo $m + n > 4$ e $m, n \geq 2$.

Por hipótese de indução, existem os números $R(m-1, n)$ e $R(m, n-1)$ pois $(m-1) + n = m + (n-1) < m + n$.

Seja $R \coloneqq R(m-1, n) + R(m, n-1)$. Considere uma festa com $R$ pessoas, cada pessoa sendo representada por um ponto. Se duas pessoas se conhecem, então elas serão ligadas por um segmento contínuo, caso contrário, serão ligadas por um segmento tracejado.

Fixemos uma pessoa $P$. Pelo PCP, de $P$ saem pelo menos $R(m-1,n)$ segmentos contínuos ou pelo menos $R(m,n-1)$ segmentos tracejados. De fato, pois saem $R-1=R(m-1,n)+R(m,n-1)-1$ segmentos de $P$, e $R(m-1,n)+R(m,n-1)-1>(R(m-1,n)-1)+(R(m,n-1)-1)$.

Suponhamos que saem pelo menos $R(m-1,n)$ segmentos contínuos de $P$. Então, há pelo menos $R(m-1,n)$ pessoas. Portanto, existem pelo menos $m-1$ pessoas que se conhecem ou $n$ que não se conhecem. Como $P$ conhece todos eles, caso haja $m-1$ que se conhecem, junte a pessoa $P$, e temos pelo menos $m$ pessoas que se conhecem. Caso contrário, haverá $n$ pessoas que não se conhecem.

O caso em que saem pelo menos $R(m-1,n)$ segmentos tracejados de $P$ é análogo ao caso anterior. Desta forma, concluímos a demonstração do teorema.

## 6. Plano de aula para o ensino médio

A seguir apresentamos uma sugestão de plano de aula para o ensino de Princípio das Casas dos Pombos a alunos do ensino médio. Caso o professor deseje desenvolver uma aula com alunos do ensino fundamental, recomendo a leitura do trabalho de conclusão de curso de Luigi Amato Bragança Amorim, colaborador do presente trabalho.

**PLANO DE AULA**

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO: Princípio das Casas dos Pombos.

TEMPO PREVISTO: Duas aulas de 50 min.

OBJETIVOS: Apresentar aspectos iniciais do Princípio das Casas dos Pombos, verificar os conhecimentos prévios dos alunos com este assunto, estimular a participação dos alunos durante as aulas de Matemática e avaliar de que a forma a resolução de problemas sobre o PCP é mais facilmente compreendida por eles quando trabalham em grupo.

METODOLOGIA: Aula expositiva dialógica e resolução de exercícios.

RECURSOS INTRUCIONAIS: Quadro, giz (caneta para quadro branco) e lista de exercícios previamente selecionados.

**AÇÃO DIDÁTICA**

PRIMEIRO MOMENTO: Alunos trabalhando em grupo (2 a 4 pessoas) resolvem a lista de exercícios a seguir. Esta ação tem o objetivo de verificar os conhecimentos prévios dos alunos com relação ao assunto que será apresentado e estimular a cooperação entre eles. **Tempo de duração: 25 min**

LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Um jantar reúne 13 pessoas de uma mesma família. Das afirmações a seguir, referentes às pessoas reunidas, a única necessariamente verdadeira é:

a) pelo menos uma delas tem altura superior a 1,90 m.
b) pelo menos duas delas são do sexo feminino.
c) pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo mês.
d) pelo menos uma delas nasceu num dia par.
e) pelo menos uma delas nasceu em janeiro ou fevereiro.

2. Considerando-se um texto que contém 100 palavras, é válido afirmar-se que:

a) todas as letras do alfabeto foram utilizadas
b) há palavras repetidas
c) pelo menos uma letra foi utilizada mais do que 3 vezes
d) uma das letras do alfabeto não foi utilizada
e) não há palavras repetidas

3. Os 63 novos contratados para o cargo de agente técnico serão alocados em 21 salas atualmente vazias no prédio da Assembleia Legislativa. Cada sala terá pelo menos um agente e todo agente ficará em uma única sala. Nestas condições, pode-se concluir que:

a) haverá três agentes em cada sala.
b) não haverá salas com quatro agentes.
c) poderá haver uma sala com 50 agentes.
d) haverá salas com um único agente.
e) haverá pelo menos uma sala com três ou mais agentes.

4. Num prédio de apartamentos, moram 16 famílias, todas com pelo menos um filho. Nenhuma das famílias tem mais do que 7 filhos. Nessas condições, é correto afirmar que:

a) existe neste prédio pelo menos uma família com um único filho.
b) existem neste prédio pelo menos duas famílias com exatamente 2 filhos.
c) o número médio de filhos por família neste prédio é igual a 4.
d) existem neste prédio famílias com diferentes números de filhos.
e) pelo menos três famílias deste prédio têm o mesmo número de filhos.

5. Em uma gaveta estão guardadas várias meias masculinas, todas misturadas, nas seguintes quantidades e cores: 8 meias brancas, 12 meias pretas, 6 meias beges, 4 meias vermelhas e 2 meias azuis. Ocorreu uma pane de energia elétrica e uma pessoa precisa retirar a quantidade mínima de meias dessa gaveta, na escuridão, para que possa garantir que duas delas, pelo menos, sejam da mesma cor. O número de meias que a pessoa deve retirar é:

a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 10

6. Em uma urna há 4 bolas: 2 azuis, 1 branca e 1 verde. É correto afirmar que

a) se 2 bolas forem retiradas dessa urna, necessariamente terão cores diferentes.
b) se 2 bolas forem retiradas dessa urna, necessariamente uma será azul.
c) se 3 bolas forem retiradas dessa urna, necessariamente todas terão cores diferentes.
d) se 3 bolas forem retiradas dessa urna, necessariamente uma será branca.
e) se 3 bolas forem retiradas dessa urna, necessariamente uma será azul.

<u>SEGUNDO MOMENTO</u>: Correção dos exercícios propostos. O professor deve comparar as respostas dadas pelos grupos para cada uma das questões e estimular que os alunos apresentem verbalmente argumentações para cada uma delas. **Tempo de duração: 25 min**

<u>TERCEIRO MOMENTO</u>: Apresentação teórica do Princípio das Casas dos Pombos e resolução de alguns dos problemas dos capítulos 5.1 e 5.2. Ao escolher os problemas que serão resolvidos, o professor deve levar em consideração o nível da turma e quais conteúdos matemáticos já são conhecidos por eles. **Tempo de duração: 50 min**

Ao finalizar a aula o professor deve entregar uma lista de exercícios para os alunos tentarem resolver em casa. Sugerimos algumas questões:

1. Um saco contém 13 bolinhas amarelas, 17 cor-de-rosa e 19 roxas. Uma pessoa de olhos vendados retirará do saco n bolinhas de uma só vez. Qual o menor valor de n de forma que se possa garantir que será retirado pelo menos um par de bolinhas de cores diferentes?

2. Um carteiro deseja entregar cartas em um prédio com 20 apartamentos. Quantas cartas ele terá que entregar para garantirmos que pelo menos um apartamento receberá mais de 3 cartas?

3. Escolhem-se 25 pontos ao acaso interiores ou nas faces de um paralelepípedo de arestas iguais a 2cm , 3 cm e 5 cm. Mostre que pelo menos um dos segmentos que eles determinam tem comprimento menor ou igual a $\sqrt{3}$.

4. Numa cidade existem 10 milhões de pessoas. Nenhuma delas possui mais do que 200 mil fios de cabelo. Mostre que existem nessa cidade duas pessoas com o mesmo número de fios de cabelo.

5. Uma rede de computadores é formada por seis computadores. Cada computador é conectado diretamente a, pelo menos, um dos outros computadores. Mostre que há pelo menos dois computadores na rede que estão diretamente conectados ao mesmo número de outros computadores.

## 7. Práticas docentes na resolução de problemas

Ao longo de todo o texto mostramos que o docente que opta pelo ensino do PCP no ensino básico tem uma ótima oportunidade de melhorar a formação matemática de seus alunos, porém, para isso, necessariamente precisará refletir e se preparar para o trabalho com a resolução de problemas em sala de aula.

Frequentemente nós professores nos questionamos sobre quais práticas docentes devemos realizar para que a aprendizagem de nossos alunos seja efetiva. De fato, não há um manual que defina como devemos agir em sala de aula para que nossos alunos aprendam. Apesar disso, acreditamos que algumas ações podem nos guiar nesta árdua tarefa. Desta forma, apresentamos a seguir algumas sugestões de leituras para o professor que deseja se aprofundar neste assunto.

O livro *"A Arte de Resolver Problemas"* de George Pólya é uma obra muito famosa que pode ajudar aos professores que desejam mais informações sobre como agir em sala de aula para despertar nos alunos a autonomia necessária para a resolução de problemas matemáticos. Uma das sugestões apresentadas por Pólya em seu livro é a seguinte:

*"Um professor de Matemática tem, assim, uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios para alcançar este objetivo."*

Outra obra de Pólya que segue a mesma linha de pensamento é um artigo chamado *"10 mandamentos para professores de Matemática"*. Neste artigo Pólya faz comentários sobre algumas práticas que considera fundamentais para professores de matemática. Segue a lista dos mandamentos:

*1. Tenha interesse por sua matéria.*

*2. Conheça sua matéria.*

*3. Procure ler o semblante dos seus alunos; procure enxergar suas expectativas e suas dificuldades; ponha-se no lugar deles.*

*4. Compreenda que a melhor maneira de aprender alguma coisa é descobri-la você mesmo.*

*5. Dê aos seus alunos não apenas informação, mas know-how, atitudes mentais, o hábito de trabalho metódico.*

*6. Faça-os aprender a dar palpites.*

*7. Faça-os aprender a demonstrar.*

*8. Busque, no problema que está abordando, aspectos que possam ser úteis nos problemas que virão — procure descobrir o modelo geral que está por trás da presente situação concreta.*

*9. Não desvende o segredo de uma vez — deixe os alunos darem palpites antes — deixe-os descobrir por si próprios, na medida do possível.*

*10. Sugira; não os faça engolir à força.*

Esperamos que com a leitura dos textos sugeridos o professor leitor sinta-se mais preparado para apresentar com mais clareza e segurança o PCP em sala de aula.

## 8. Conclusão e perspectivas

Educadores das mais diversas áreas do conhecimento constatam diariamente que os conteúdos do currículo escolar muitas vezes não despertam a curiosidade e o interesse do aluno. As atividades escolares são burocráticas, previsíveis e pouco estimulantes. Na maioria das vezes os alunos estão na escola por obrigação, não por vontade própria, por interesse real. Poucos se interessam e se dedicam na busca de um aproveitamento acadêmico de excelência.

Nossos alunos, em geral, estão sendo formados com pouca competência matemática e com argumentações lógicas pouco desenvolvidas. Ao longo da vida escolar poucos foram estimulados a gostar do conhecimento por meio de questões desafiadoras e interessantes. Ao invés disso, a maior parte das atividades propostas são vistas por eles como mais uma das inúmeras obrigações incompreendidas, o que faz com que a maioria não entenda realmente conceitos matemáticos mais complexos e não consiga relacionar os diferentes conteúdos aprendidos.

Um currículo escolar que contemple as crescentes e mutáveis demandas da sociedade e que atenda a todas as exigências educacionais contemporâneas dificilmente poderá ser desenvolvido, mas, apesar disso, acreditamos que a inserção de temas que estimulem atividades escolares mais significativas e menos expositivas, mais inovadoras e menos tradicionais, que exijam reflexão, envolvimento, pesquisa, análise e discussão de descobertas, possa contribuir para que nossos alunos tenham condições mais favoráveis para alcançar uma melhora no aproveitamento escolar.

Infelizmente a formação de professores no país, apesar da melhora nos últimos anos, encontra-se ainda muito longe de atender as exigências da educação brasileira. Docentes, muitas vezes despreparados, são lançados em salas de aula e exigidos, desde o início de suas atividades profissionais, a aprender a lidar com diversos desafios, passando muitas vezes por momentos de profunda angústia, levando em vários casos ao abandono da profissão. Com muito sacrifício e flexibilidade e por uma questão de sobrevivência profissional, precisam aprender a lidar com a diversidade cultural e com as mazelas sociais da sociedade, com as enormes defasagens dos alunos em conteúdos matemáticos, indisciplina em sala de aula e inúmeras situações inesperadas no ambiente escolar.

Analisando os desafios enfrentados pelo professor brasileiro e muitas vezes o pouco tempo que tem para buscar formação continuada e preparar suas aulas, consideramos de extrema valia a produção de um trabalho final de mestrado voltado para a formação do professor. Muitos são os educadores que desejam trazer algo novo para suas aulas, mas por atuarem numa estrutura educacional que não favorece a inovação, não sabem como fazê-lo. Temos a total consciência de que não existe estratégia infalível que promova uma aprendizagem satisfatória por parte de nossos alunos, mas, apesar disso, acreditamos que a troca de ideias e experiências entre professores é fundamental para que os envolvidos possam se tornar profissionais mais preparados para exercer o magistério.

Todos nós professores que reconhecemos que a formação acadêmica dos alunos brasileiros em Matemática está muito abaixo do mínimo necessário para que alcancemos uma educação escolar nacional de qualidade, frequentemente nos questionamos sobre os recursos metodológicos que utilizamos no ensino da matemática e, principalmente, sobre o currículo escolar adotado.

Neste sentido, apresentamos ao longo de todo o trabalho, motivações, ferramentas e sugestões de atividades para que o professor tenha condições de iniciar um trabalho com seus alunos sobre o Princípio das Casas dos Pombos, conteúdo que muito pode contribuir com uma formação matemática mais sólida por parte de nossos alunos e uma melhoria na aprendizagem significativa de outros aspectos fundamentais da Combinatória no ensino básico.

Sugerimos que as atividades propostas ao longo do texto sejam, na medida do possível, trabalhadas em sala de aula valorizando a formação de grupos colaborativos, buscando estimular entre os alunos um espírito de cooperação. Desta forma, além de aprenderem um novo conteúdo, os alunos poderão também se ajudar e aprender a dialogar e trocar conhecimentos. Perceberão também que diversidade de ideias não é um problema, pelo contrário, pessoas diversas quando unidas podem utilizar sua habilidades e competências pessoais para contribuir com a resolução de problemas matemáticos, com o avanço da ciência e com a melhoria das condições de vida da sociedade.

Enfim, esperamos ter contribuído com a formação continuada de professores de Matemática que enfrentam as mais diversas realidades escolares. Mesmo diante das crescentes demandas da sociedade, possamos manter nosso compromisso com nossos alunos e com a melhoria de nossa prática, nunca desistindo de nossa árdua, porém majestosa tarefa de ensinar.

## 9. Referências bibliográficas


**ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA** (1988). Renovação do currículo de Matemática. Lisboa: APM.

***BELL**. M, **POLLAK**. Henry O, **THOMPSON**. M, **USISKIN**. Z (NCTM), Aplicações da matemática escolar. Rio de Janeiro: Atual, 2003*

**CARVALHO**, P. C. P. O Princípio das Gavetas. Olimpíada Brasileira de Matemática. Disponivel a partir de: em www.obm.org.br/opencms/revista_eureka/lista.html. Acesso em: 08/01/13.

**CERIOLI**, M.R**; FREITAS**, R.; **VIANA**, P. Princípio das casas de pombo. Disponível a partir de: http://www.uff.br/grupodelogica/textos/principio_das_casas_de_pombo.pdf. Acesso em: 10/01/13

**DANTE**, Luiz Roberto. Didática da resolução de problemas de matemática. São Paulo: Ática, 2000.

**FALZETTA**, Ricardo. Idéias simples que ensinam. Nova Escola online. Disponível a partir de: http://novaescola.abril.com.br/index.htm?ed/165_set03/html/premio. Acesso em: 14/11/07

**GRUPO DE TRABALHO APLICAÇÕES E MODELAÇÃO DA APM (GTAM)**. Disponível a partir de: http://www.apm.pt/apm/GTAM/home.html. Acesso em 2006

**HOLANDA,** B. Princípio da Casa dos Pombos I. Programa Olímpico de Treinamento, Curso de Combinatória - Nível 2. Aula 7. Disponível a partir de: http://www.poti.impa.br/upload/Aula%2007%20-%20PCP%20I.pdf. Acesso em: 15/01/13

**HOLANDA,** B. Princípio da Casa dos Pombos II. Programa Olímpico de Treinamento, Curso de Combinatória - Nível 2. Aula 8. Disponível a partir de: http://www.poti.impa.br/upload/Aula%2008%20-%20PCP%20II.pdf . Acesso em: 15/01/13

**IMENES**, Luiz Marcio P. e **LELIS**, Marcelo. Relações entre cidadania e ensino de matemática. Temas e Debates. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. ano 7, nº 5,1995.

**LIMA**, E.L.; **CARVALHO**, P.C.P; **WAGNER**, E. e **MORGADO**, A.C (2004). A Matemática do Ensino Médio. Volume 2. Sociedade Brasileira da Matemática.

**MORGADO**, A.; **CARVALHO**, J,; **CARVALHO**, P.; **FERNANDEZ**, P. (1991). Análise Combinatória e Probabilidade. Sociedade Brasileira da Matemática

**OLIVEIRA**, K.I.M; **FERNANDÉZ**, A.J.C (2010). Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções. Sociedade Brasileira da Matemática.

**ONUCHIC**,L.R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. São Paulo, Editora Unesp. 1999. p. 199-218

**PARRA**, Cecília. **SAIZ**, Irmã. Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

**PÓLYA**, G. A Arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do método matemático. Editora Interciência, 1995.

**PÓLYA**, G. Dez mandamentos para professores. Artigo publicado no "Journal of Educatíon", University of British Columbia, Vancouver and Victoria (3) 1959, p. 61-69.

**SANTOS**, M. C. dos, Algumas concepções sobre o ensino-aprendizagem em matemática. In Educação Matemática em Revista, N°12. São Paulo, SBEM, 2002.

**SECRETARIA DA EDUCAÇÃO BÁSICA**. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/SEF,1997.

**SMOLE**, K. S., **DINIZ**, M. I. e **CÂNDIDO**, P. Resolução de problemas. Coleção Matemática de 0 a 6 anos. Porto alegre: Artes Médicas Sul, 2000.Vol.2