



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC



Curso de Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT

Dissertação de Mestrado

MARCELO MELO FERNANDES

**UTILIZANDO TÉCNICAS DE CONTAGEM NO ENSINO
FUNDAMENTAL**

Santo André

2014



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC



Curso de Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT

Dissertação de Mestrado

MARCELO MELO FERNANDES

**UTILIZANDO TÉCNICAS DE CONTAGEM NO ENSINO
FUNDAMENTAL**

Trabalho apresentado como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática, sob a orientação do Professor Doutor André Fonseca.

Santo André

2014



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional

Rua Abolição, s/nº – Vila São Pedro – Santo André – SP
CEP 09210-180 · Fone: (11) 4996-0017
profmat@ufabc.edu.br

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Marcelo Melo Fernandes, realizada em 25 de agosto de 2014:

Prof.(a) Dr.(a) **André Ricardo Oliveira da Fonseca** (UFABC) – Presidente

Prof.(a) Dr.(a) **Márcio Fabiano da Silva** (UFABC) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Antônio Carlos Gracias** (FEI) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Sinue Dayan Barbero Lodovici** (UFABC) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Birajara Soares Machado** (INCE-IIEP) – Membro Suplente

Declaração de atendimento às observações

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, ____ de _____ de 20__.

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por esta oportunidade, por ter me proporcionado perseverança nos momentos de desânimo, paciência nos momentos de dificuldades e pela fé que tornou as barreiras transponíveis.

À minha esposa Alcione França Fernandes e minha filha Maria França Fernandes pelo companheirismo e apoio que me concederam, principalmente nos momentos que tive que me ausentar para participar deste curso e desenvolver este trabalho.

Ao Professor Doutor André Fonseca que sempre se mostrou solícito, atento e paciente no desenvolvimento e orientação deste trabalho.

Ao corpo docente do curso Profmat da Universidade Federal do ABC, que tanto contribuíram para o nosso crescimento profissional.

Aos amigos Cristiano de Souza Vieira, Fabricio Cardoso Maimone, Eduardo de Brito e Laercio Sangiorato, que compartilharam os bons e maus momentos destes três anos em que trilhamos o mesmo objetivo.

Por fim agradeço à amiga Carolina Gladyer Rabelo pelo apoio técnico oferecido neste e outros trabalhos e à Diretora da UME Padre José de Anchieta da cidade de Cubatão-SP, Elaine Cristina de Oliveira, por tornar viável a minha participação no curso Profmat.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a todos os profissionais da área educacional que entendem a importância desta profissão, onde a formação contínua é a nossa contribuição no desejo de ter um país que privilegie a Educação na busca de uma sociedade mais justa.

RESUMO

Contar elementos pode ser uma das mais antigas atividades que o ser humano tem registro. O desenvolvimento desse assunto deu origem à análise combinatória que estuda técnicas de contagem sem a necessidade de contar os elementos um a um. O objetivo deste trabalho é desenvolver algumas técnicas de contagem durante o Ensino Fundamental, para que o aluno se aproprie delas, mesmo que intuitivamente, e diminua as dificuldades na formalização do conteúdo que ocorre apenas no Ensino Médio. Abordado pela maioria dos livros didáticos em pilares, como arranjos, permutações e combinações, muitas vezes induzem os estudantes à memorização de fórmulas, que podem ser objeto de uma simples escolha que julguem ser a mais adequada na resolução de determinado problema.

Palavras-chave: Análise combinatória, técnicas de contagem e Ensino Fundamental.

ABSTRACT

Counting elements can be one of the oldest activities that humans have recorded. This subject development gave rise to the combinatorial analysis studies which focus on counting techniques without the need to count the elements one by one. The aim of this work is to develop some techniques of counting during the Fundamental Education, for the student to take ownership of them, even intuitively, and decrease the difficulties when formalizing the content itself, what may occur only in High School. Approached by most textbooks on pillars, as arrangements, permutations and combinations, books often induce students to memorize formulas, which can be subject to a simple choice they deem to be most appropriate in solving a given problem.

Key-words: combinatorial analysis; counting techniques; Fundamental Education.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	17
2.1	Histórico	17
2.2	Princípio aditivo da contagem	19
2.3	Princípio da inclusão-exclusão	21
2.4	Princípio fundamental da contagem	23
2.5	Arranjos, permutações e combinações	26
2.6	O princípio de Dirichlet	29
2.7	Introdução à teoria dos grafos	31
2.7.1	Conceitos iniciais	31
2.7.2	Grau de um vértice	32
2.7.3	Isomorfismo, subgrafos e vizinhança	34
2.7.4	Passeios, caminhos e ciclos	34
2.7.5	Grafos conexos e passeio Euleriano	35
2.7.6	Grafo bipartido e ciclo Hamiltoniano	38
2.7.7	Árvores	39
2.7.8	Conjuntos independentes e cliques	41
3	PRINCIPAIS OBSTÁCULOS	43
3.1	Orientações dos parâmetros curriculares nacionais	43
3.2	Formação de professores no Brasil	45
3.3	Desenvolvimento do raciocínio combinatório	47
4	PROPOSTA DE ENSINO	50
4.1	Quantidade de diagonais de um polígono convexo	50
4.2	Quantidade de divisores de um número natural	52
4.3	Quantidade de elementos de conjuntos finitos	53
4.4	Princípio fundamental da contagem no 6º ano	54
4.5	Elaborando senhas	56
4.6	Os pedaços da pizza	57

4.7 Construindo estradas	59
5 RESULTADOS	67
6 DISCUSSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS	73
A Construindo estradas - Parte 1	79
B Construindo estradas - Parte 2	81
C Construindo estradas - Parte 3	82
D Passeando pelas estradas	84

Lista de Tabelas

4.1	Custo de produção das estradas de Gregolândia.	62
5.1	Resultado da Atividade 1 - 6ºano	67
5.2	Resultado da Atividade 1 - 9ºano	67
5.3	Resultados da Atividade 2 - 6º e 9º anos	69
5.4	Atividade 3 - Construir estradas com orçamento	70
5.5	Atividade 3 - Questionamento sobre o custo-benefício das estradas	70
5.6	Atividade 4 - Primeiro sistema com 9 estradas	71
5.7	Atividade 4 - Segundo sistema com 9 estradas	71

Lista de Figuras

2.1	Triângulo Aritmético de Pascal.	18
2.2	Pontes de Königsberg.	19
2.3	Retângulo de possibilidades.	23
2.4	Árvore de possibilidades.	25
2.5	Representação de um grafo.	31
2.6	Outra representação do grafo.	32
2.7	Exemplo de passeio.	35
2.8	Caminho $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ e ciclo $\{i, j, k, l, m, n, i\}$	35
2.9	Passeio Euleriano - Grafo G	37
2.10	Passeio Euleriano - Grafo G'	37
2.11	Passeio Euleriano - Grafo G''	37
2.12	Exemplo de grafo bipartido.	38
2.13	Primeiro passo do algoritmo de Kruskal.	41
2.14	Aresta hi forma um ciclo.	41
2.15	Árvore geradora minimal T	41
2.16	Exemplo de grafo com cliques.	42
4.1	Frações equivalentes.	58
4.2	Estado da Gregolândia.	60
4.3	Um possível sistema de estradas.	61
4.4	Cidade-sede Sigma.	61
4.5	Sistema de estradas com menor custo.	63
4.6	Um sistema de estradas com custo mínimo.	63
4.7	Sistema com nove estradas.	64
4.8	Outro sistema com nove estradas.	65
5.1	Exemplo de sistema de aluno com 6 estradas	68
5.2	Exemplo de sistema de aluno com 7 estradas	68
5.3	Exemplo de justificativa de aluno do 6ºano	69
5.4	Exemplo de justificativa de aluno do 9ºano	69
5.5	Exemplo de justificativa de aluno do 6ºano	70
5.6	Exemplo de dois argumentos de alunos do 9ºano	71

5.7 Exemplo de dois argumentos de alunos do 9ºano 72

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

O estudo de combinatória, que tem aplicações em diversos ramos (em particular no estudo de probabilidades), apresenta um grau de dificuldade não só de aprendizagem, mas também na organização de estratégias que possibilitem a compreensão do tema. Abordado pela maioria dos livros didáticos do Ensino Médio em pilares, como arranjos, permutações e combinações, os livros muitas vezes induzem os estudantes à memorização de fórmulas que podem ser um objeto de escolha na hora da resolução dos problemas.

Por ser um pré-requisito ao estudo de probabilidades, a falta de compreensão em combinatória pode desencadear uma perda muito grande na vida acadêmica do estudante, ocasionando uma lacuna importante de um conteúdo que cresceu sobremodo em aplicações no mundo atual. Em busca de diminuir às dificuldades e obstáculos inerentes ao tema, este trabalho visa responder algumas questões: Abordar o assunto apenas no 2º ano do Ensino Médio é suficiente para sua compreensão? Quais são os principais obstáculos que tornam o tema pouco compreensível aos alunos? Como diminuir o impacto sofrido pelos alunos quando apresentados ao tema?

Com base nestas questões estamos fazendo uma proposta de utilização de técnicas de contagem desde o 6º ano do Ensino Fundamental¹. Para tanto elaboramos uma série de atividades que podem ser solucionadas por estratégias de contagem. Algumas atividades já constam em livros didáticos onde procuramos uma nova visão para sua resolução, com técnicas que organizam o pensamento combinatório. Também há propostas elaboradas sobre temas próximos aos estudantes, como acesso à redes sociais e elaboração de senhas como exemplo.

Em nossa proposta, incluímos o princípio de Dirichlet, conhecido popularmente como princípio da casa dos pombos ou princípio das gavetas. Trata-se de uma técnica de contagem muito simples, de fácil compreensão e muito poderosa na resolução de problemas inclusive complexos. Foram elaboradas duas situações que relacionam esta técnica de contagem com frações e divisão com resto.

¹Neste trabalho estamos considerando a organização do Ensino Fundamental em 9 anos, de acordo com as orientações do MEC.

Incluimos também, uma breve introdução à teoria dos grafos, que é uma técnica de contagem baseada em princípios geométricos e muito útil na resolução de problemas. Elaboramos algumas atividades envolvendo a construção de estradas em um determinado Estado, no sentido de organizar um pensamento combinatório aliado a uma situação de minimização de recursos, além de introduzir um tema não abordado no ensino básico. Fizemos a aplicação destas atividades, que constam nos apêndices desta obra, à alunos da rede municipal de Cubatão-SP. As situações foram desenvolvidas com estudantes de 6° e 9° anos onde fizemos uma breve análise do desenvolvimento do raciocínio combinatório neste ciclo de estudo.

Fizemos um sucinto relato histórico do desenvolvimento do tema, que reconhece a contagem como uma das primeiras necessidades formais do homem. Com o aparecimento dos jogos de azar um estudo mais acentuado do conteúdo surgiu, no sentido de avaliar quais eram as chances de êxitos dos jogadores. Também abordamos o famoso problema das pontes de Königsberg, que para muitos historiadores marcou o início dos estudos da teoria dos grafos.

Em nossa fundamentação teórica, além dos assuntos já descritos acima, fizemos uma análise sobre os princípios aditivo, da inclusão-exclusão e o fundamental da contagem. Também demonstramos as fórmulas utilizadas pelos livros didáticos do Ensino Médio de arranjos simples, permutações e combinações, para que possamos interpretar a íntima ligação entre elas e questionar se há a necessidade de memorização de fórmulas em detrimento à organização de estratégias de resolução.

Pesquisamos nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que são diretrizes elaboradas pelo Governo Federal e norteiam as expectativas de aprendizagem em nível nacional, no caderno de Matemática, quais são as orientações no que se refere ao estudo de combinatória no Ensino Fundamental. Desta forma tentaremos contemplar em nossa proposta todos os pressupostos contidos neste documento oficial.

Incluimos um estudo sobre formação de professores no Brasil, de acordo com os estudos de Borges[2], Gatti[12] e Saviani[23]. Recentemente passamos por uma reforma no sistema curricular que abrangem os cursos de pedagogia e licenciaturas. Buscamos saber se essas recentes mudanças estão interferindo na qualidade do processo ensino-aprendizagem de uma maneira geral, o que pode ocasionar sensíveis reflexos no ensino da Matemática e, mais particularmente, no ensino de combinatória.

Por fim, fizemos um estudo baseado nas obras de Jean Piaget no que se refere ao desenvolvimento do pensamento combinatório. Analisamos nas pesquisas do autor como se dá a construção psicogenética dos níveis de abstração da faixa etária que procuramos contemplar nesta pesquisa, para equacionar o nível de exigência das propostas realizadas com o grau de compreensão do público alvo. Tal estudo se faz necessário para que não haja uma sobreposição de etapas, o que poderia prejudicar o rendimento e a vida acadêmica dos alunos.

Procuramos expor as propostas de forma clara, com enunciados sucintos e a inclusão de figuras quando necessário. Procuramos desenvolvê-las de acordo com uma expectativa esperada dos alunos, de acordo com nossa vivência profissional. Como todo trabalho matemático, não há uma única forma de resolução para os problemas propostos, bem como de maneira nenhuma tivemos a intenção de julgá-las como as melhores. O objetivo do trabalho é utilizar técnicas de contagem durante os anos do Ensino Fundamental para que o aluno se aproprie delas, mesmo que intuitivamente, e diminua as dificuldades na formalização do conteúdo no Ensino Médio.

Capítulo 2

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo apresentaremos os estudos que norteiam a presente pesquisa, com base na história da combinatória, os princípios básicos discutidos nos ensinamentos fundamental e médio, o princípio de Dirichlet e uma breve introdução à teoria dos grafos.

2.1 Histórico

Platão (429-348 a.C.) acreditava que a Matemática já existia, cabendo ao homem apenas descobri-la [10]. Precede à qualquer relato histórico a necessidade do ser humano sistematizar a idéia de quantidade, mesmo que primordialmente houvesse apenas a ideia de "maior ou menor quantidade de elementos". Estudos arqueológicos dão conta que há 50.000 anos atrás o homem já sabia contar, utilizando meios rudimentares para elaborar uma relação biunívoca, como ranhuras em barro, talhos em madeira ou nós em cordas.

Com o passar do tempo, surgiram os sistemas de numeração de agrupamento simples, que consistiam em símbolos que representavam uma determinada base, geralmente 10, e eram agrupados de modo a representar a quantidade desejada. O sistema de agrupamento simples mais conhecido até os dias de hoje é o sistema de numeração romano, que é quinário[4]. Os sistemas de numeração de agrupamento simples cumpriram muito bem o papel da contagem de elementos, mas as poucas propriedades aritméticas levaram à criação dos sistemas de numeração posicionais, como o sistema indo-arábico o qual utilizamos[5].

Embora haja relatos de que a combinatória exista desde à antiguidade clássica, como no *Estomachion*¹ de Arquimedes (287?-212 a.C.), o estudo sistemático sobre probabilidade² teve seu início no final do século XV, na tentativa de avaliar as chances de vitória em jogos de azar[10]. Girolamo Cardano (1501-1576) publicou um pequeno manual do jogador

¹Quadrado formado por 14 peças, semelhante ao Tangram. Estudos recentes mostram que há 17.152 combinações possíveis para o quebra-cabeça e desprezando-se as soluções simétricas, 268 combinações.

²Probabilidade é o estudo do grau de incerteza para que um evento ocorra. Seu valor (entre zero e um) é o quociente entre o número de casos favoráveis ao evento pelo número de resultados possíveis.

intitulado "*De ludo alae*", que continha em seu conteúdo alguns fragmentos do tema. Na publicação, Cardano avaliava as possibilidades de êxito no lançamento sucessivo de dois e três dados[4].

O jogo dos pontos, que já havia sido discutido por Cardano, marca a origem da ciência que estuda a probabilidade e que está intimamente ligada ao estudo de combinatória. A discussão acerca do jogo está no fato de quanto caberia da aposta a cada pessoa, caso o mesmo fosse interrompido num determinado momento [10]. Tal problema foi apresentado por um jogador, Chevalier de Méré, no ano de 1654 ao brilhante matemático Blaise Pascal(1623-1662). Este último, em correspondência com o jurista e matemático Pierre de Fermat(1601-1665) resolveram a questão, generalizando o problema por um instrumento matemático conhecido hoje como combinação de elementos.

Pascal publicou em 1665 a obra *Traité du Triangle Arithmétique* que trata sobre o triângulo aritmético de Pascal. Em sua versão o triângulo é obtido de linhas numéricas iniciadas pelo número 1, onde a segunda linha contém abaixo de cada número, a soma de todos os algarismos da linha de cima conforme figura 2.1. Para se obter o triângulo conhecido atualmente, basta tomar uma das diagonais que liga as extremidades que contêm o algarismo 1 do esquema. O triângulo aritmético já era conhecido por árabes e chineses alguns séculos antes com algumas modificações estéticas, mas levou o nome de Pascal por este ter sido responsável por sua primeira publicação.

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\
 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \dots \\
 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & \dots \\
 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & \dots \\
 1 & 6 & 21 & 56 & 126 & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
 \end{array}$$

Figura 2.1: Triângulo Aritmético de Pascal.

Dois contemporâneos à Pascal também publicaram obras sobre a teoria das combinações [4]. O primeiro deles, um dos inventores do cálculo, publicou a obra *De arte combinatória*. Trata-se de nada menos que Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) mais conhecido pela história rivalidade com Isac Newton(1642-1727) sobre a grande invenção da história da Matemática. Quanto ao *De arte combinatória* não se pode dizer o mesmo, pois foi um dos mais precoces trabalhos de Leibniz. Outra obra bem mais consistente foi *Ars Conjectandi* publicada em 1701 por Jakob Bernoulli (1654-1705). Esta última estava dividida em quatro partes e discutia assuntos como permutações e combinações, soluções de problemas com probabilidade e a enunciação do teorema de Bernoulli.

Para finalizar este pequeno contexto histórico nada melhor do que ilustrar o problema

das pontes de Königsberg que, segundo historiadores marcou o início da teoria dos grafos [10].

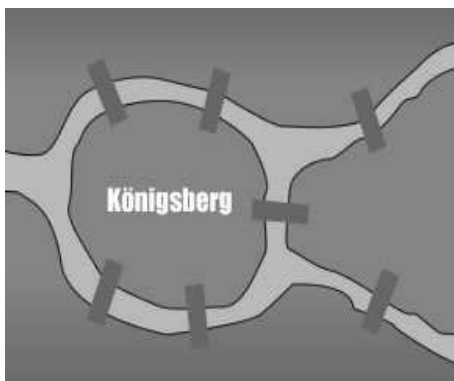


Figura 2.2: Pontes de Königsberg.

A figura representa a foto da cidade e o problema era determinar se havia alguma possibilidade de passar apenas uma vez por cada ponte e retornar ao local de saída. Leonhard Euler (1707-1783) resolveu a questão esquematizando a situação da seguinte forma: cada ponte era representada por uma aresta e cada ilha por um vértice. Como alguns vértices determinavam três arestas e a ponte só poderia ser atravessada uma única vez, Euler concluiu que em cada vértice era necessário um número par de arestas para que o problema tivesse solução (seção 2.7).

2.2 Princípio aditivo da contagem

Os números naturais surgiram pela necessidade básica de se fazer uma contagem. É instintivo supor que para esse efeito, o conjunto dos números naturais tenha como seu menor elemento o número 1, embora o zero seja aceito como natural, fato que pode se verificar na maioria dos livros didáticos utilizado na educação básica [6].

Para o estudo da contagem, consideraremos o conjunto dos números naturais como sendo $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Seja agora o conjunto finito $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ e o conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$. Dizemos que há uma bijeção $f : X \rightarrow A$, pois a quantidade de elementos do conjunto X é igual a quantidade de elementos do conjunto A . Logo sempre que um conjunto Y é tal que, exista a bijeção $f : X \rightarrow Y$ dizemos que n é a quantidade de elementos de Y . Denotaremos que $|Y| = n$.

Dois conjuntos finitos A e B são ditos disjuntos, quando $A \cap B = \emptyset$ ³, ou seja, não há elementos em comum entre eles. Sejam A e B conjuntos finitos e disjuntos, o *princípio aditivo* da contagem garante que a quantidade de elementos da união de A e B é exatamente a soma dos elementos de A com B , ou seja, $|A \cup B| = |A| + |B|$. De fato se $|A| = n$, $|B| = m$, com $n, m \in \mathbb{N}$, então $|A| + |B| = n + m$ o que justifica que

³Utilizaremos este símbolo para indicar um conjunto vazio.

$|A \cup B| = n + m$ pois não há elementos repetidos. Apesar de ser extremamente elementar, o princípio aditivo é utilizado na resolução de vários problemas de contagem.

Estendendo o conceito do *princípio aditivo* da contagem, tomemos agora os conjuntos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ dois a dois disjuntos, então o total de elementos da união desses n conjuntos é exatamente a soma dos elementos de cada um deles, ou seja,

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \dots + |A_n|.$$

Exemplo *Em uma pequena reunião de amigos, todos se cumprimentaram uma vez, ocasionando 78 apertos de mão no total. Quantas pessoas estavam presentes na reunião?*

Solução Vamos chamar de $P = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ o conjunto de pessoas presentes na reunião. Notificaremos cada aperto de mão por um par ordenado que indicará as pessoas que se cumprimentaram, logo $(3, 6)$ significa que a pessoa 3 apertou a mão da pessoa 6. Vale notar que não devemos contar o aperto de mão $(6, 3)$ por se tratar do mesmo. O conjunto A_1 indicará todos os apertos de mão da primeira pessoa, A_2 da segunda e assim por diante.

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), \dots, (1, n)\} \\ A_2 &= \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), \dots, (2, n)\} \\ &\vdots \\ A_{n-1} &= \{(n-1, n)\} \end{aligned}$$

Diante do exposto,

$$\begin{aligned} |A_1| &= n - 1 \\ |A_2| &= n - 2 \\ &\vdots \\ |A_{n-1}| &= 1. \end{aligned}$$

Aplicando o *princípio aditivo* da contagem, temos:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \dots + |A_n|$$

Ou seja,

$$78 = (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1 \Rightarrow 78 = \frac{n(n - 1)}{2} \Rightarrow 156 = n^2 - n \Rightarrow n = 13$$

totalizando 13 pessoas no grupo.

2.3 Princípio da inclusão-exclusão

Definido o *princípio aditivo* da contagem, vamos estender o conceito para conjuntos não necessariamente disjuntos. Tomemos inicialmente dois conjuntos A e B quaisquer. Façamos

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A)$$

ou seja, a união do conjunto A com B , são os elementos contidos em A , unidos aos elementos de B que não estão em A . Logo, como A e $(B \setminus A)$ são disjuntos:

$$|A \cup B| = |A| + |B \setminus A|. \quad (2.1)$$

Definiremos agora B como uma união disjunta entre os conjuntos A e B da seguinte forma, $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$. Desta forma,

$$|B| = |A \cap B| + |B \setminus A|. \quad (2.2)$$

Juntando as equações 2.1 e 2.2, temos:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \quad (2.3)$$

Tomemos agora três conjuntos A , B e C . Do resultado anterior podemos dizer que

$$|A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)|.$$

Da teoria dos conjuntos, podemos escrever $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, assim temos

$$|A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)|. \quad (2.4)$$

Note que

$$|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C| \quad (2.5)$$

e também que

$$|(A \cap B) \cup (A \cap C)| = |A \cap B| + |A \cap C| - |A \cap B \cap C|. \quad (2.6)$$

Juntando as equações 2.4, 2.5 e 2.6 temos:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|.$$

Para generalizar o Princípio da Inclusão-Exclusão, tomemos A_1, A_2, \dots, A_n conjuntos. O número de elementos da união $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ se dá pela igualdade abaixo:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|, I \neq \emptyset.$$

A demonstração será feita por indução⁴ sobre n . Para $n = 2$ a igualdade é verdadeira pois resulta na fórmula (2.3). Suponhamos que a fórmula seja verdadeira para $n - 1$, então

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \left| \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cup A_n \right| = \left| \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right| + |A_n| - \left| \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) \cap A_n \right| = \left| \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right| + |A_n| - \left| \bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n) \right|.$$

Aplicando a hipótese de indução chegamos ao seguinte resultado:

$$\sum_{I \subseteq \{1, 2, \dots, n-1\}} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| + |A_n| - \sum_{I \subseteq \{1, 2, \dots, n-1\}} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} (A_i \cap A_n) \right|, I \neq \emptyset.$$

Agrupando somas com mesma quantidade de conjuntos, obtemos o resultado. Note que as interseções que não possuem A_n estão com o sinal correto, a parcela de A_n é positiva e as interseções de A_n com outros conjuntos, estão com um conjunto a mais e terão o sinal invertido.

Exemplo *Um grupo de pessoas participou de uma pesquisa sobre três gêneros de cinema. No resultado foi totalizado que 12 pessoas gostam de romance, 15 gostam de terror, 15 gostam de aventura, 3 gostam de romance e terror, 9 gostam de romance e aventura, 6 gostam de terror e aventura, 3 gostam de romance, terror e aventura e três não gostam de nenhum dos gêneros. Quantas pessoas participaram da pesquisa?*

Solução Chamemos de R o conjunto de pessoas que gostam de romance, T as que gostam de terror e A as que gostam de aventura. Segue que

$$\begin{aligned} |R| &= 12 \\ |T| &= 15 \\ |A| &= 15 \\ |R \cap T| &= 3 \\ |R \cap A| &= 9 \\ |T \cap A| &= 6 \\ |R \cap T \cap A| &= 3. \end{aligned}$$

⁴Para um estudo mais aprofundado sobre princípio da indução finita recomendamos a leitura de Oliveira[19].

Utilizando o *princípio da inclusão-exclusão* temos:

$$|R \cup T \cup A| = 12 + 15 + 15 - (3 + 9 + 6) + 3 = 27$$

Incluindo os três que não gostam de nenhum dos gêneros, foram 30 pessoas participantes.

2.4 Princípio fundamental da contagem

O resultado que apresentaremos agora, de maneira geral, introduz o assunto intitulado *análise combinatória* na maioria dos materiais utilizados no Ensino Médio. Trata-se do *princípio fundamental* da contagem (também conhecido como princípio multiplicativo), que diz de forma resumida que, se temos m formas de fazer uma primeira escolha e n maneiras de fazer uma segunda escolha, então temos $m \cdot n$ opções diferentes de realizá-la.

Na linguagem matemática, tomemos os conjuntos $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}$, $m, n \geq 1$. Então a quantidade de pares ordenados (a_i, b_j) , $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$ é dada pela relação $|A| \cdot |B| = m \cdot n$. De fato cada elemento do conjunto A forma um par ordenado com os elementos do conjunto B como podemos observar no esquema apresentado na figura 2.3. Temos então um retângulo formado por m linhas e n colunas.

(a_1, b_1)	(a_1, b_2)	(a_1, b_3)	...	(a_1, b_n)
(a_2, b_1)	(a_2, b_2)	(a_2, b_3)	...	(a_2, b_n)
(a_3, b_1)	(a_3, b_2)	(a_3, b_3)	...	(a_3, b_n)
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
(a_m, b_1)	(a_m, b_2)	(a_m, b_3)	...	(a_m, b_n)

Figura 2.3: Retângulo de possibilidades.

Exemplo 1 *Um pequeno grupo de estudantes formado por 4 meninos e 5 meninas decide tirar dois representantes para uma reunião com a direção da escola. De quantas formas pode ser feita essa escolha, sabendo que serão escolhidos exatamente um menino e uma menina?*

Solução Consideremos o grupo $H = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ o grupo de meninos de onde um será escolhido e $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$ o grupo de meninas, que também terá uma representante. Logo os possíveis grupos são

(h_1, m_1)	(h_1, m_2)	(h_1, m_3)	(h_1, m_4)	(h_1, m_5)
(h_2, m_1)	(h_2, m_2)	(h_2, m_3)	(h_2, m_4)	(h_2, m_5)
(h_3, m_1)	(h_3, m_2)	(h_3, m_3)	(h_3, m_4)	(h_3, m_5)
(h_4, m_1)	(h_4, m_2)	(h_4, m_3)	(h_4, m_4)	(h_4, m_5)

ou seja, $|H| \cdot |M| = 4 \cdot 5 = 20$.

A exemplo do *princípio aditivo*, o *princípio fundamental* da contagem não se limita a dois conjuntos. Tomemos os conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n finitos e não nulos. Podemos formar n -uplas distintas contendo um elemento de cada conjunto totalizando $|A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|$. De fato como os conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n não são vazios, existe pelo menos um elemento em cada conjunto e temos garantida pelo menos uma n -upla.

Suponhamos então que $|A_1| = m_1, |A_2| = m_2, \dots, |A_n| = m_n$, com $m_1, m_2, \dots, m_n \geq 1$ e $m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{N}$. Então temos m_1 escolhas para o conjunto A_1 , m_2 escolhas para o conjunto A_2 , \dots , m_n escolhas para o conjunto A_n . Logo temos $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$ possibilidades de n -uplas, gerando a árvore de possibilidades.

Exemplo 2 *Em um jogo de cara ou coroa, o apostador deve acertar a ordem correta dos resultados que ocorrem nas moedas (Por exemplo, moeda 1 = cara, moeda 2 = coroa e assim por diante). Se forem lançadas n moedas ($n \in \mathbb{N}$), quantos são os possíveis resultados?*

Solução Consideremos o elemento C para representar o resultado *cara* e \overline{C} para o resultado *coroa*. Supondo que haja apenas uma moeda temos exatamente dois resultados possíveis, cara ou coroa, ou seja

$$M_1 = \{C, \overline{C}\}.$$

No caso de serem duas ou mais moedas, para cada uma delas temos as duas possibilidades, ou seja

$$M_1 = \{C, \overline{C}\}, M_2 = \{C, \overline{C}\}, \dots, M_n = \{C, \overline{C}\}.$$

Sendo assim, pelo *princípio multiplicativo* da contagem o resultado segue abaixo:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n \text{ fatores}} = 2^n.$$

A árvore de possibilidades da figura 2.4 ilustra a situação. Repare que na primeira coluna aparecem as possibilidades possíveis para uma moeda, C ou \overline{C} . Na segunda coluna devemos interpretar os pares guiados pelas setas, ou seja, (C, C) , (C, \overline{C}) , (\overline{C}, C) e $(\overline{C}, \overline{C})$. Na terceira coluna temos 2^3 possibilidades formadas pelas trincas orientadas pelas setas desde a primeira coluna.

Alguns problemas são solucionados pelo uso simultâneo dos princípios aditivo e multiplicativo. São questões que envolvem duas ou mais árvores de possibilidades que devem ser adicionadas para computar a contagem total.

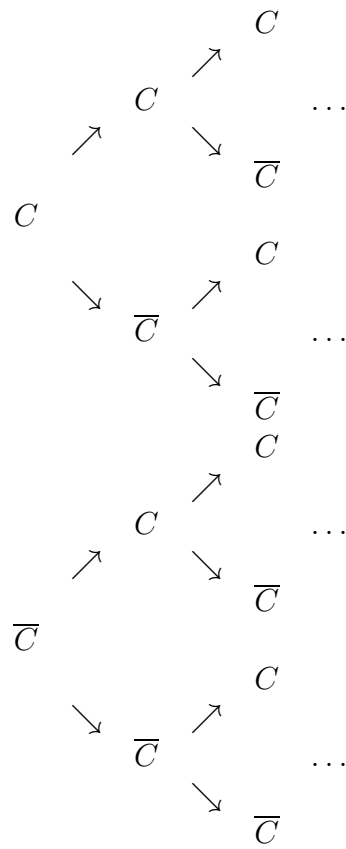


Figura 2.4: Árvore de possibilidades.

Exemplo 3 *Na biblioteca existem 3 coleções da matéria que você procura. São coleções independentes, ou seja, os assuntos contidos em cada coleção não se repetem. A primeira coleção possui x volumes, a segunda y volumes e a terceira z volumes. Sua carteira permite apenas a retirada de dois exemplares por vez da biblioteca. Quantas possibilidades de escolha existem se você decidir retirar exatamente dois livros de coleções distintas? ($x, y, z \in \mathbb{N}$)*

Solução Definamos as coleções por:

$$X = \{1, 2, \dots, x\}; Y = \{1, 2, \dots, y\}; Z = \{1, 2, \dots, z\}$$

A primeira análise a ser feita é que existem mais coleções do que a quantidade de livros que você pode retirar. Assim, escolhendo um livro das coleções X e Y temos:

$$|X \cdot Y| = |X| \cdot |Y| = x \cdot y$$

Escolhendo um livro das coleções X e Z:

$$|X \cdot Z| = |X| \cdot |Z| = x \cdot z$$

Se for das coleções Y e Z:

$$|Y \cdot Z| = |Y| \cdot |Z| = y \cdot z$$

Totalizando as escolhas acima, concluímos que você tem exatamente

$$|X| \cdot |Y| + |X| \cdot |Z| + |Y| \cdot |Z| = x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z$$

possibilidades diferentes de compor os livros.

2.5 Arranjos, permutações e combinações

Consideramos arranjos simples de uma coleção com n objetos selecionados na quantidade k , $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq k \leq n$, todas as formações possíveis onde uma difere da outra pelos elementos selecionados e a ordem que ocupam na lista. Para clarear as ideias, tomemos os elementos do conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ e formemos conjuntos com dois elementos cada. Então as possibilidades são:

$$A_I = \{1, 2\}, A_{II} = \{2, 1\}, A_{III} = \{1, 3\}, A_{IV} = \{3, 1\}, A_V = \{2, 3\} \text{ e } A_{VI} = \{3, 2\}.$$

Genericamente, dado um conjunto do tipo $A_k = \{1, 2, \dots, k\}$ e seja B um conjunto com n elementos, queremos saber a quantidade existente de funções $f : A_k \rightarrow B$ que são injetoras.

Sabemos que $|B| = n$. Designaremos por $a_{n,k}$ a quantidade de funções injetivas $f : A_k \rightarrow B$. Tomemos um elemento $x \in B$ para $k > 1$ e fixemos $f(k) = x$. Note que para

esta restrição temos a quantidade de $a_{n-1,k-1}$ funções injetivas do tipo $f' : A_{k-1} \rightarrow B \setminus \{x\}$. Fazendo a volta, tomemos a função injetiva $f' : A_{k-1} \rightarrow B \setminus \{x\}$ e ampliamos a uma função injetiva do tipo $f : A_k \rightarrow B$ onde $f(k) = x$.

Note que a quantidade de funções injetivas de f é a mesma de f' . Mas liberando a restrição ao qual $f(k) = x$ temos n possibilidades para x , visto que $|B| = n$ e podemos escrever:

$$a_{n,k} = n \cdot a_{n-1,k-1}$$

Fazendo a recorrência,

$$a_{n,k} = n \cdot a_{n-1,k-1} = n(n-1) \cdot a_{n-2,k-2} = \dots = n(n-1) \dots (n-k+2) \cdot a_{n-k+1,1} = n(n-1) \dots (n-k+2)(n-k+1),$$

temos na última igualdade a fórmula utilizada para arranjos simples. Esta fórmula fica bem definida devido ao fato do conjunto B ser finito.

Exemplo 1 *Em uma determinada olimpíada, x atletas de uma certa modalidade disputam as medalhas de ouro, prata e bronze ($x > 3$). De quantas formas diferentes o pódio poderá ser formado?*

Solução Consideremos o conjunto dos atletas $A_x = \{1, 2, \dots, x\}$. Como o pódio é formado por três atletas e a posição de chegada importa, já que receber a medalha de ouro não é a mesma coisa que receber medalhas de outro metal, então solucionamos o exercício com a técnica do arranjo simples, ou seja, $x(x-1)(x-2)$.

Em exercícios desta natureza, as estratégias de resolução podem ser mais eficientes do que a fórmula em si [17], onde os alunos tendem a trocar o raciocínio pela utilização de uma fórmula que já tenha decorado. Poderíamos, no caso do exemplo 1, trabalhar com as possíveis escolhas para cada medalha. Assim, teríamos x escolhas para a medalha de ouro, já que supostamente todos os atletas poderiam conquistá-la. Para a medalha de prata restam $(x-1)$ escolhas visto que um dos atletas ficou com a medalha de ouro. Consequentemente, teríamos $(x-2)$ escolhas para a medalha de bronze. Como as escolhas são cumulativas, basta multiplicá-las.

Definiremos agora o que chamaremos de fatorial. Tomemos um número natural n . Dizemos que $n!$ (n fatorial) representa o produto $n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$. Fica definido que $0! = 1$.

Uma variação da fórmula de arranjos simples vista acima é encontrada na forma $a_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$, com $1 \leq k \leq n$. De fato, abrindo a fórmula, temos:

$$a_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+2)(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} =$$

$$n(n-1)\dots(n-k+2)(n-k+1)$$

Permutação de elementos é um resultado particular dos arranjos simples. Tomemos um conjunto B com n elementos e $A_k = \{1, 2, \dots, k\}$. Fazendo $n = k$ temos uma bijeção da função $f : A_k \rightarrow B$. Logo utilizando o resultado anterior segue que $a_{n,n} = n!$ é uma permutação de elementos e distinguiremos pela notação p_n .

Exemplo 2 *Uma fila de banco contém x elementos em determinado momento do dia. De quantas formas diferentes essa fila poderia ser reorganizada?*

Solução Queremos formar subconjuntos com exatamente x elementos, onde a ordem que cada um ocupa importa. Logo utilizamos a técnica da permutação, de onde segue que $p_x = x!$.

Consideramos combinação simples de uma coleção com n objetos selecionados na quantidade k , $0 < k \leq n$, todas as formações possíveis onde uma difere da outra apenas pelos elementos selecionados. Então se tomarmos o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ vamos formar subconjuntos com dois elementos:

$$A_I = \{1, 2\}, A_{II} = \{2, 3\}, A_{III} = \{1, 3\}$$

Logo, o que difere um arranjo simples de uma combinação simples é o fato de que nas combinações, a ordem do objeto não importa e, portanto, $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.

Admitindo essa "proximidade" entre arranjos e combinações, podemos perceber que dada uma combinação de objetos quaisquer, obteremos a quantidade de arranjos fazendo a permutação dos elementos de seus subconjuntos. Assim, em nosso exemplo, como cada subconjunto possui 2 elementos, ao permutá-los obteríamos todos os subconjuntos que formariam o arranjo.

Chamemos de $c_{n,k}$ a combinação de n elementos tomados em subconjuntos de k objetos. Segue disso que

$$k! \cdot c_{n,k} = a_{n,k}$$

onde substituindo o membro direito da igualdade pela fórmula chegamos a

$$k! \cdot c_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

resultando em

$$c_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Exemplo 3 *Um grupo formado por x sócios de uma empresa precisa formar uma comissão de y pessoas ($y < x$) para participar de uma viagem de negócios na Nova Zelândia. Supondo que todos os sócios estejam com disponibilidade para essa viagem, de quantas maneiras podemos formar essa comissão?*

Solução Neste caso, temos de levar em conta que a comissão será formada por pessoas, de forma que um grupo formado por A, B e C por exemplo, é o mesmo grupo formado por B, C e A. Em outras palavras a ordem da comissão não importa neste caso, apenas os elementos selecionados. Diante disso, temos um exemplo de problema que pode ser resolvido pela fórmula da combinação simples conforme segue:

$$c_{x,y} = \frac{x!}{(x-y)! \cdot y!}$$

2.6 O princípio de Dirichlet

Uma das ramificações da combinatória não se preocupa com a contagem propriamente dita, ou seja, a questão não é saber quantas possibilidades existem. Trata-se de garantir a ocorrência de um evento sob determinadas condições.

Uma proposição que trata de assegurar certa ocorrência, conhecido como princípio dos pombos ou das gavetas, é um enunciado tão simples como poderoso, elaborado pelo matemático alemão Gustav L. Dirichlet. Sua versão mais simples afirma que:

Se n objetos forem guardados em $n - 1$ gavetas, então uma delas, pelo menos, conterá dois objetos. De fato, na pior das hipóteses se existir um objeto em cada gaveta, teremos um total de $n - 1$ objetos. Ao colocarmos o n -ésimo objeto teremos que escolher uma das gavetas que já possuem um objeto lá dentro.

Exemplo 1 *Um determinado vestibular possui 5 questões de inglês com 5 alternativas em cada questão. Qual é o número mínimo de candidatos que garante que pelo menos dois deles preencherão o gabarito de maneira idêntica, supondo que nenhum candidato deixe questões em branco ou cometa erros no preenchimento?*

Solução Vamos dizer que as possibilidades de gabarito são as gavetas e o alunos são os objetos a serem guardados. Segue que a primeira questão possui 5 opções, assim como a segunda, terceira e etc. Sabendo disso temos, pelo *princípio fundamental* da contagem, $5^5 = 3125$ gabaritos distintos para estas questões. Logo, pelo princípio de Dirichlet se tivermos $3125 + 1 = 3126$ candidatos no vestibular fica garantido que pelo menos dois deles terão os gabaritos idênticos.

Antes de enunciarmos a forma generalizada do princípio de Dirichlet, vamos definir a notação $[x]$ como sendo o maior número inteiro menor ou igual a x . Assim, escrevendo o

princípio de Dirichlet, temos que dado n objetos e k gavetas, pelo menos uma das gavetas conterá, no mínimo, $\lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor + 1$ objetos dentro.

De fato, suponhamos que exista no máximo $\lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor$ objetos em cada gaveta. Então segue que o total de objetos será menor ou igual a $k \cdot \lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor$, mas

$$k \cdot \lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor \leq k \cdot \frac{n-1}{k} = n - 1 < n$$

que é uma contradição suficiente para garantir o resultado acima.

Exemplo 2 *Um campus de uma determinada universidade possui um corpo discente constituído de 734 pessoas. Mostre que entre os alunos, fica garantido que, pelo menos três deles, fazem aniversário no mesmo dia.*

Solução Consideremos os dias do ano como gavetas e os alunos como os objetos a serem guardados. Então utilizando a versão geral do princípio de Dirichlet, temos:

$$\lfloor \frac{734-1}{365} \rfloor + 1 = 2 + 1 = 3$$

Admitamos agora mais rigor alegando que alguém possa ter nascido em um determinado ano bissexto, no dia 29 de fevereiro. Para sanar a dúvida, criemos mais uma gaveta e vejamos o resultado:

$$\lfloor \frac{734-1}{366} \rfloor + 1 = 2 + 1 = 3$$

Logo o resultado se manteve e a quantidade de alunos é suficiente para que 3 alunos, no mínimo, aniversariem no mesmo dia. É fácil notar que não há a certeza que apenas 3 pessoas desse campus tenham data de aniversário coincidente, pois o princípio de Dirichlet garante um número mínimo podendo até ter um extremo de todos aniversariarem no mesmo dia, mesmo que nossa lógica baseada no cotidiano nos leve a não contar isso como provável.

Poderíamos fazer um paralelo entre o princípio das gavetas e os eventos aleatórios. No primeiro, se quisermos ter a certeza de, em um grupo de pessoas pelo menos duas façam aniversário no mesmo dia, ainda que considerássemos aquele 29 de fevereiro do ano bissexto, deveríamos ter $366 + 1 = 367$ pessoas reunidas. Já no ramo da probabilidade se tivermos apenas 23 pessoas reunidas, a porcentagem de chance que duas delas aniversariem no mesmo dia é de 50,63%, que nos dá um indício de que a lógica baseada no cotidiano tem suas razões regidas pela aleatoriedade dos fatos [1].

2.7 Introdução à teoria dos grafos

2.7.1 Conceitos iniciais

O problema das pontes de Königsberg vista no descritivo histórico deste trabalho (seção 2.1), ilustra um dos modelos em que esta teoria pode ser utilizada com grande êxito. Em linhas gerais, dado um conjunto finito de objetos, procuramos saber se há relações entre eles, tomando-os dois a dois. No que segue nesta seção, todos os conjuntos são considerados finitos.

Tomemos um conjunto V não vazio. Consideraremos $P_2(V)$ a família dos subconjuntos de V formado por dois elementos. Temos então que $|P_2(V)| = c_{|V|,2}$. Logo se $|V| = n$, então $|P_2(V)| = \frac{n(n-1)}{2}$. Todo elemento de $P_2(V)$ será considerado da forma $\{u, v\}$, onde u e v são elementos distintos do conjunto V .

Um grafo simples é um par $(V; E)$ cujo o elemento V representa um conjunto arbitrário finito e não vazio que recebe o nome de vértice, e o conjunto E é toda família contida em $P_2(V)$, que recebe o nome de aresta (do inglês *edge*). Para efeito de notação, designaremos um grafo como $G = (V; E)$.

Uma aresta é um traço (reta ou arco) que une dois vértices. Quando representamos uma aresta podemos fazê-lo por $\{u, v\}$ ou por simplicidade uv sempre que não houver problemas de conflito com outras notações semelhantes. Se a aresta $uv \subset E$, dizemos que os vértices u e v são adjacentes, ou seja, há incidência entre eles. Se não houver incidência entre os vértices u e v a aresta não existe e diremos que tais vértices são *não adjacentes* de G . É sempre bom ressaltar que a palavra adjacente neste contexto não possui o mesmo sentido das figuras geométricas planas, apenas indica a existência ou não da aresta. Na

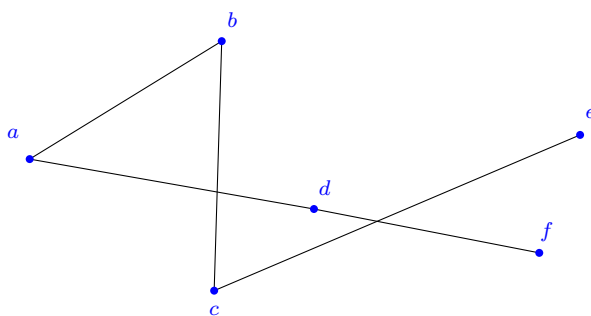


Figura 2.5: Representação de um grafo.

figura 2.5 temos a representação de um grafo onde o conjunto $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ e as arestas são $\{ab, ad, bc, ce$ e $df\}$. Vale notar que af não é aresta do grafo pois se fosse deveria ser representada por uma linha ou arco que fosse direto do vértice a ao vértice f . Também vale ressaltar que se atribuirmos um nome ao grafo, como por exemplo G , podemos nos referir aos vértices como $V(G)$ e as arestas como $E(G)$. É importante

observar que a figura 2.5 é um diagrama que representa as relações entre os vértices, não havendo nenhum sentido geométrico nele. Basta salientar que os vértices poderiam estar dispostos de outra forma, como mostra a figura 2.6.

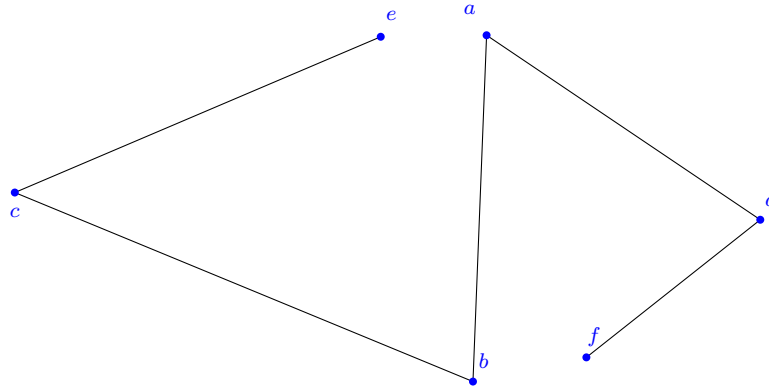


Figura 2.6: Outra representação do grafo.

Seja o grafo $G = (V; E)$. Consideramos dois casos extremos em relação a ele. O primeiro é o grafo trivial ou vazio que possui vértices mas não tem nenhuma aresta e pode ser representado por $G = (V; \emptyset)$. O segundo caso é o grafo completo onde há incidência de vértices em quaisquer pares do conjunto V , ou seja, $E \subset P_2(V)$. Costumeiramente representa-se o grafo completo por K_n onde n representa a quantidade de vértices e $\frac{n(n-1)}{2}$ é a quantidade de arestas.

2.7.2 Grau de um vértice

Um vértice pode ou não ser adjacente a outros vértices. Definiremos como $N_G(u)$ o conjunto dos vértices adjacentes a u . Assim, na figura 2.5, $N_G(a) = \{b, d\}$ e $|N_G(a)| = 2$. O grau de um vértice u é definido pela quantidade de vértices adjacentes a ele e será denominado por $d_G(u)$. Sendo assim, $d_G(a) = |N_G(a)| = 2$ pois existem exatamente dois vértices adjacentes à a .

Um teorema obtido por Euler⁵ com relação à grafos foi o seguinte: Em um grafo $G = (V; E)$, a soma dos graus dos vértices é sempre igual ao dobro do número de arestas, ou seja:

$$\sum_{u \in V} d_G(u) = 2|E|$$

A prova disso está no fato de uma aresta estar contabilizada a dois vértices, sendo assim o somatório do primeiro membro estará fazendo uma dupla contagem das arestas.

⁵Matemático suíço citado na seção 2.1

Outro resultado atribuído à Euler enuncia que, em qualquer grafo o número de vértices que tem grau ímpar, é sempre na quantidade par. Trata-se de um corolário do teorema anterior portanto o utilizaremos para provar. Primeiramente, devemos observar que o primeiro membro do teorema acima contém o somatório do grau de cada vértice. Assim podemos pensar que os vértices de grau zero são obtidos de *zero vezes sua quantidade*, os de grau um de *uma vez sua quantidade*, os de grau dois de *duas vezes sua quantidade* e assim por diante. Logo,

$$\sum_{u \in V} d_G(u) = \sum_{k \geq 0} kv_k(G)$$

onde $v_k(G)$ significa o número de vértices de G com grau k . Então temos que

$$2|E| = \sum_{k \geq 0} kv_k(G)$$

e utilizando um desmembramento algébrico chegamos ao seguinte resultado:

$$\sum_{k \geq 0} kv_k(G) = \sum_{j \geq 0} v_{2j+1}(G) + \sum_{j \geq 1} 2j(v_{2j}(G) + v_{2j+1}(G))$$

Finalizando a prova,

$$2|E| = \sum_{j \geq 0} v_{2j+1}(G) + \sum_{j \geq 1} 2j(v_{2j}(G) + v_{2j+1}(G))$$

$$\sum_{j \geq 0} v_{2j+1}(G) = 2|E| - \sum_{j \geq 1} 2j(v_{2j}(G) + v_{2j+1}(G))$$

onde o segundo membro é obviamente um número par.

Exemplo 1 *Um pequeno país possui 10 estados. Os estados são interligados por estradas de tal forma que cada estado possui pelo menos uma. Considerando-se E_1, E_2, \dots, E_{10} os estados desse país, verifique se é possível que eles possuam, respectivamente, 6, 1, 2, 4, 1, 1, 1, 2, 1 e 2 estradas.*

Solução Observemos os estados como vértices de um grafo, onde suas estradas são as arestas. Logo, se um estado possui 6 estradas devemos considerar como um vértice de grau 6. Observando a quantidade de estradas, ou seja, as arestas do grafo percebemos que temos um total de cinco vértices com grau ímpar, que pelo corolário acima torna-se impossível.

2.7.3 Isomorfismo, subgrafos e vizinhança

Comentaremos agora sobre a equivalência entre dois grafos. Define-se que os grafos $G_1 = (V_1; E_1)$ e $G_2 = (V_2; E_2)$ são isomorfos se há uma bijeção $f : V_1 \rightarrow V_2$ tal que, para todos vértices distintos $\{u, v\}$ adjacentes em G_1 correspondam os vértices $\{f(u); f(v)\}$ adjacentes em G_2 . Em outras palavras, isomorfismo de grafos nos remete a ideia dos exemplos 2.5 e 2.6, não havendo a necessidade de se repetir as letras que representam os vértices.

Segue da definição de isomorfismo que, se dois grafos $G_1 = (V_1; E_1)$ e $G_2 = (V_2; E_2)$ são isomorfos eles possuem a mesma quantidade de vértices (em graus idênticos, inclusive) e a mesma quantidade de arestas. De fato se existe uma bijeção $f : V_1 \rightarrow V_2$ e tomarmos um vértice $u \in G_1$ de grau $k \geq 0$, então $f(u)$ também possui grau k o que nos mostra que G_1 e G_2 possuem a mesma quantidade de vértices com grau k , que também é recíproco. Para provar que a quantidade de arestas é a mesma, utilizaremos o teorema formalizado por Euler. Logo

$$2|E_1| = \sum_{u \in V_1} d_{G_1}(u) = \sum_{u \in V_1} d_{G_2}(f(u)) = \sum_{f(u) \in V_2} d_{G_2}(f(u)) = 2|E_2|.$$

Definimos subgrafo de um grafo G todo grafo G' tal que, $V(G') \subset V(G)$ e $E(G') \subset E(G)$. Dizemos que G' é um subgrafo gerador de G se $V(G') = V(G)$. Em particular temos que o grafo G é um subgrafo de si próprio.

Tomemos um grafo $G = (V; E)$. Ao excluirmos uma de suas arestas, digamos a aresta ϵ , obtemos um subgrafo gerador de G , que denominaremos por $G - \epsilon$. Se por outro lado excluirmos um de seus vértices, digamos o vértice u , estaremos eliminando além do vértice, todas as arestas que nele incidem. Denotaremos esta exclusão simplesmente por $G - u$.

Seja H um subconjunto de vértices do grafo G . Consideramos vizinhança do conjunto H todo vértice $u \in V(G) \setminus H$ que possui adjacência com algum vértice de H . Denominaremos vizinhança do conjunto H por $\Gamma(H)$. Quando nos referirmos diretamente à vizinhança de um vértice $v \in H$ denotaremos simplesmente por $\Gamma(v)$. Chamaremos de corte as arestas que unem a vizinhança do conjunto H com os vértices contidos em H .

2.7.4 Passeios, caminhos e ciclos

Passeio em um grafo são linhas que unem vértices em sequência. Logo se temos o subconjunto de vértices $V' = \{u_0, u_1, \dots, u_k\}$ (não necessariamente distintos) de um grafo $G = (V; E)$, consideraremos passeio se existirem as arestas $\{u_{i-1}, u_i\}$ para $1 \leq i \leq k$. Chamamos k de comprimento do passeio. Quando $u_0 = u_k$ dizemos que o passeio é fechado. Na figura 2.7 um passeio pode ser $P = \{a, e, d, c, f, e, b\}$ que tem comprimento 6. Em particular, se $V'(G) = \{u_0, u_1, \dots, u_k\}$ distintos, de forma que suas arestas são

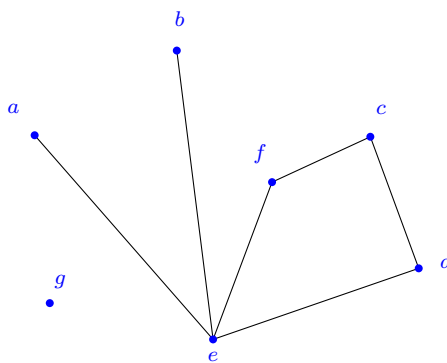


Figura 2.7: Exemplo de passeio.

da forma $\{u_{i-1}, u_i\}$ para $1 \leq i \leq k$, dizemos que temos um caminho. Quando $u_0 = u_k$ denominamos ciclo ou circuito.

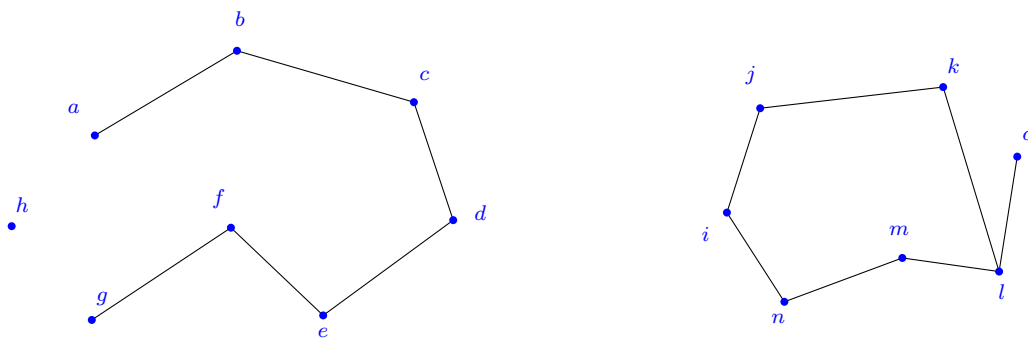


Figura 2.8: Caminho $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ e ciclo $\{i, j, k, l, m, n, i\}$.

2.7.5 Grafos conexos e passeio Euleriano

Para a próxima proposição, precisamos definir grau mínimo e grau máximo de um grafo. Grau mínimo de um grafo $G = (V; E)$ é um número inteiro não negativo denominado por $\delta(G)$ que obedece a seguinte relação,

$$\delta(G) = \min\{d_G(u); u \in V(G)\},$$

ou seja, dentre o conjunto de vértices de G é aquele (ou aqueles) que possui menor grau. Por outro lado grau máximo de um grafo $G = (V; E)$ é um número inteiro não negativo denominado por $\Delta(G)$ que representa entre o conjunto de vértices de G , aquele (ou aqueles) que possui o maior grau:

$$\Delta(G) = \max\{d_G(u); u \in V(G)\}.$$

Um grafo é considerado conexo se, para quaisquer dois vértices contidos nele, existir um passeio entre eles. Caso essa condição não exista, dizemos que o grafo é desconexo. Tomemos um grafo G que possua n vértices, então se $\delta(G) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ o grafo é conexo. Se $n = 1$ ou $n = 2$ não há nada a fazer. Então provemos para $n > 2$. Sejam u e v vértices distintos de G e não adjacentes, pois do contrário não necessitaria de prova. Segue que se somarmos o grau do vértice u com o grau do vértice v , temos no mínimo $2 \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, que por sua vez é maior do que $n - 2$. Como $n - 2$ é igual a $|V(G) \setminus \{u, v\}|$, segue pelo princípio das gavetas (seção 2.6) que pelo menos um vértice $w \neq u, v$, é adjacente a u e v ao mesmo tempo, concluindo a prova.

Definimos como passeio Euleriano em um grafo conexo um passeio fechado onde cada aresta do grafo é utilizada exatamente uma vez. Um grafo conexo é dito Euleriano se possuir um passeio Euleriano. Segue dessa definição que um grafo G conexo e não trivial é Euleriano se e somente se todos os seus vértices têm grau par.

Para provar a ida, se o grafo G é Euleriano já nos implica um mínimo de três arestas nesse grafo, o que originaria um K_3 . Fixemos um vértice u_0 como vértice de "saída" desse passeio. Por definição todos os vértices serão incididos pelo menos uma vez, porém em todos haverá uma chegada e uma saída o que nos leva a uma quantidade par de arestas (chegada-saída, chegada-saída, etc). Como a chegada do passeio deve ser em u_0 , temos dois casos a saber: O passeio iniciou e terminou em u_0 , então $d_G(u_0) = 2$; O passeio iniciou em u_0 , passou outras k vezes por ele e terminou em u_0 , então $d_G(u_0) = 2(k + 1)$.

Para a volta, suponhamos um grafo G com todas as arestas de grau par. Construa um circuito arbitrário, se ele for um passeio Euleriano, nada há a provar. Caso não seja um passeio Euleriano, retire as arestas que formam esse circuito do grafo G . O grafo G' restante também possui os vértices com grau par, pois o grafo retirado também tem todos os vértices com grau par, de tal sorte que G' não sofre mudanças na paridade de seus vértices. Repita o processo tantas forem as vezes necessárias e note que, em cada caminho subtraído sempre restará um vértice em comum com o grafo restante, visto que G é conexo. Juntando todos os circuitos obtidos teremos um circuito único, que denominamos nesta obra como passeio Euleriano.

Vamos ilustrar a situação com o grafo $G=(10,15)$ da figura 2.9. Retiremos da figura o passeio Euleriano $P_1 = \{A, B, C, D, A\}$. Ficamos com o grafo $G'=(10,10)$ e conforme fora mencionado na volta da demonstração, G' possui apenas vértices de grau par 2.10. Repetiremos o processo retirando o passeio $P_2 = \{A, C, I, E, H, G, F, A\}$, conforme podemos observar na figura 2.11. Restou apenas o grafo $G'' = (10, 3)$ um k_3 que obviamente é um passeio Euleriano. Juntando todo o processo temos o passeio retirado em G , o passeio retirado em G' e o passeio resultante em G'' , o que nos garante a existência de um passeio Euleriano. Um possível passeio Euleriano é $P = \{I, B, J, I, E, H, G, F, A, B, C, D, E, A, C, I\}$

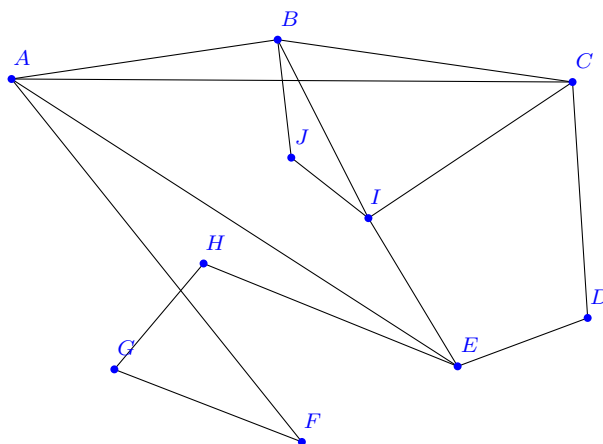


Figura 2.9: Passeio Euleriano - Grafo G

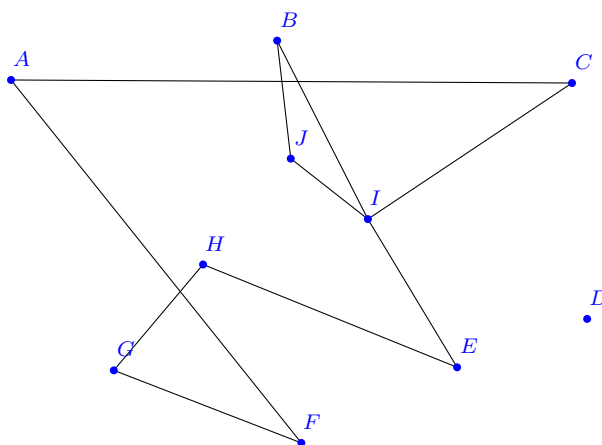


Figura 2.10: Passeio Euleriano - Grafo G'

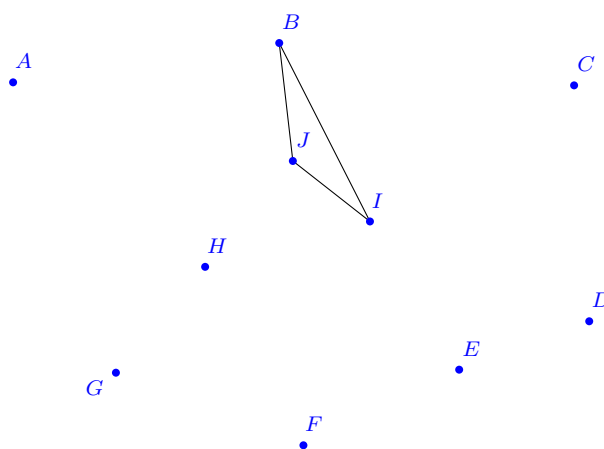


Figura 2.11: Passeio Euleriano - Grafo G''

2.7.6 Grafo bipartido e ciclo Hamiltoniano

Considera-se um grafo $G = (V; E)$ bipartido se podemos separar seus vértices em dois conjuntos disjuntos, não vazios e independentes. Segue desta definição que um grafo é bipartido se e somente se todo ciclo formado em G tem um comprimento par. De fato, supondo que o grafo é bipartido, então podemos dividir seus vértices em dois conjuntos V_1 e V_2 . Tomemos um ciclo $C = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_k, u_0)$. Logo as arestas que ligam (u_i, u_{i+1}) se alternam do conjunto V_1 para V_2 ou vice versa. Então o passeio que liga u_0 a u_k tem comprimento ímpar e ao fechar o ciclo com a aresta $\{u_k, u_0\}$, o comprimento só pode ser par. Por outro lado, suponhamos que todos os ciclos em G tenham comprimento par.

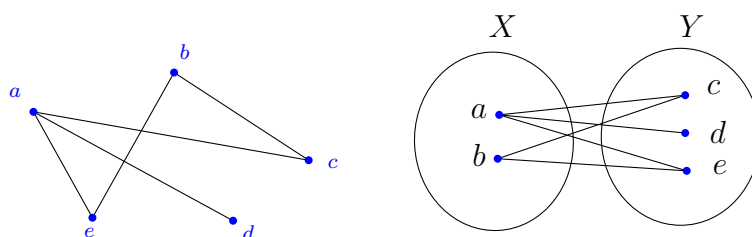


Figura 2.12: Exemplo de grafo bipartido.

Tomemos um ciclo C em G e retiremos a aresta $\epsilon = \{u, v\}$. Note que em $G - \epsilon$ não foi criado nenhum novo ciclo e $G - \epsilon$ continua contendo apenas ciclos de comprimento par. Segue disso que o passeio que liga u a v tem comprimento ímpar de tal sorte que podemos dividir os vértices desse passeio em dois conjuntos disjuntos V_1 e V_2 , pois há uma alternância entre eles, como vimos anteriormente. Logo a aresta ϵ só pode ligar um vértice de V_1 com outro de V_2 ou vice versa e portanto u e v não podem pertencer ao mesmo conjunto. Como isso é recorrente à todos os ciclos de G , concluímos que G é bipartido.

Um ciclo é chamado Hamiltoniano⁶ se passa por todos os vértices de um grafo $G = (V; E)$. Um grafo conexo que contém um ciclo Hamiltoniano é também chamado por grafo Hamiltoniano. Curiosamente não se tem um conjunto de condições que determine que um grafo é Hamiltoniano, basta observar, por exemplo, que qualquer grafo sem ciclos não é Hamiltoniano. Também não basta ser conexo. Foi devido ao matemático Gabriel Dirac⁷ que surgiu uma condição suficiente para garantir a existência de um grafo Hamiltoniano, que enunciaremos a seguir.

Se $G = (V; E)$ é um grafo com 3 ou mais vértices e $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, então G é Hamiltoniano. Para provar a afirmação acima, vamos negá-la e supor que exista um grafo G não-Hamiltoniano que atenda as condições acima de forma maximizada, ou seja para qualquer par de vértices u e v do grafo, $G + uv$ é Hamiltoniano. Obviamente G não é completo pois se fosse teríamos um grafo Hamiltoniano, o que garante a existência de vértices u e

⁶O nome se deve ao matemático, físico e astrônomo Willian R Hamilton, irlandês do século XIX

⁷Húngaro do século XX

v não adjacentes em G . Tomemos um grafo $H = G + uv$. Pela maximalidade de G , o grafo H é Hamiltoniano de forma que o ciclo Hamiltoniano em H contém a aresta $\{u, v\}$. Portanto existe em H o caminho

$$C = (u = w_1, w_2, \dots, w_n = v).$$

Note que se u for adjacente a w_i , então v não pode ser adjacente à w_{i-1} , pois dessa forma existiria o ciclo

$$C_1 = (w_1, w_i, w_{i+1}, \dots, w_n, w_{i-1}, w_{i-2}, \dots, w_1),$$

Hamiltoniano, contrariando nossa escolha de G . Concluimos então que para todo vizinho de u , existe pelo menos um que não é adjacente à v . Mas isso nos leva a uma contradição, pois

$$d_G(v) \leq n - 1 - d_G(u)$$

e $d_G(u) \geq \frac{n}{2}$, portanto

$$d_G(v) \leq n - 1 - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} - 1.$$

2.7.7 Árvores

Definiremos agora um tipo de grafo que não possui ciclos. Uma árvore é um grafo conexo que não contém qualquer ciclo. Chamaremos esse grafo de T (tree) e denominaremos como folha se $d_T(u) = 1$ e nó caso $d_T(u) \geq 2$ para qualquer vértice u de T .

Segue da definição que toda árvore com mais de um vértice tem pelo menos duas folhas. De fato, seja $T = (V; E)$ uma árvore e $C = (u_0, u_1, \dots, u_k)$ o maior caminho possível em T . Então u_0 e u_k são folhas. Se isso não fosse verdade, então u_0 seria adjacente à u_1 e outro vértice do caminho, formando um ciclo. De outra forma, se u_0 fosse adjacente a u_1 e a um vértice v não pertencente ao caminho, teríamos $C_1 = (v, u_0, u_1, \dots, u_k)$, um caminho maior que C , o que é uma contradição.

Outra proposição sobre árvores afirma que se $T = (V; E)$ é uma árvore, então $|E| = |V| - 1$. Faremos a prova por indução sobre o número de vértices. Para o caso mais simples, dois vértices, é obvio que só há uma aresta. Suponhamos então que toda árvore com $n > 1$ vértices possua exatamente $n - 1$ arestas. Seja T_1 uma árvore com $n + 1$ vértices. Se T_1 é uma árvore, existe pelo menos um vértice u que é uma folha. Logo, retirando a folha u , temos uma árvore com n vértices e, pela hipótese de indução, $T_1 - u$ possui $n - 1$ arestas, logo T_1 tem n arestas.

Como consequência do parágrafo anterior temos que se $G = (V; E)$ é um grafo conexo, então G conterá um ciclo se e somente se $|E| \geq |V|$. Faremos a prova por indução sobre o número de arestas. Suponhamos que G contém pelo menos um ciclo. Retirando uma das arestas do ciclo, o grafo continua conexo, desta forma retiremos a aresta ϵ desse ciclo.

Então o grafo $G - \epsilon$ contém $|V|$ vértices e $|E| - 1$ arestas. Se ainda há outro ciclo em $|G| - \epsilon$, segue da hipótese de indução que $|E| - 1 \geq |V|$. Por outro lado se $G - \epsilon$ não deixou ciclo, então trata-se de uma árvore e pela proposição anterior temos $|E| - 1 = |V| - 1$, o que implica $|V| = |E|$. Para a recíproca basta observar que se G não contém um ciclo, temos uma árvore e pela proposição anterior $|E| = |V| - 1 < |V|$.

Feita a consideração acima, fica fácil observar que, se $T = (V; E)$ é um grafo conexo e além disso $|E| = |V| - 1$, então T é uma árvore. De fato, se T contivesse um ciclo, então $|E| \geq |V|$ e estaríamos diante de uma contradição. Logo T é uma árvore.

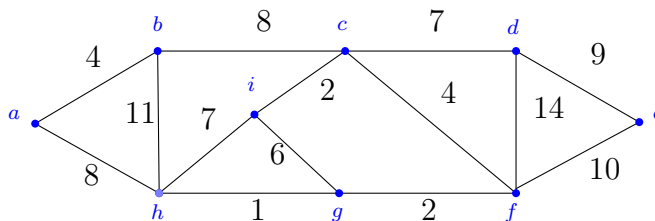
Tomemos um grafo conexo $G = (V; E)$. Consideramos uma árvore geradora T qualquer subgrafo que contenha todos os vértices de G que seja uma árvore. O estudo de árvores geradoras é muito utilizado quando atribuímos pesos (ou valores) às arestas. Tomando uma aresta ϵ em G , digamos que o peso dessa aresta seja denominado por $w(\epsilon)$. Assim teremos um grafo de pesos, onde o peso $w(G)$ do grafo é definido por:

$$w(G) = \sum_{\epsilon \in E} w(\epsilon),$$

onde E representa todas as arestas de G . Encontrar uma árvore geradora minimal, significa obter aquela que representa o peso mínimo de G . O algoritmo de Kruskal⁸ permite encontrar uma árvore geradora minimal.

O algoritmo para encontrar a árvore geradora minimal T de G é deduzido em três passos. Primeiro escolhem-se algumas arestas de G com os menores pesos (desde que não formem ciclos). Segundo, depois de escolhido o máximo de arestas com os menores pesos que não formam ciclos, escolhem-se entre as que sobraram, aquela de peso mínimo que não forma ciclo. Terceiro, repita a etapa anterior quantas vezes forem possíveis e necessárias até que se forme T [18].

Exemplo 2 Considere o grafo de pesos abaixo e determine a árvore geradora minimal utilizando o algoritmo de Kruskal.



Solução Vamos aplicar o primeiro passo do algoritmo, ou seja, posicionar em T as arestas de menor valor. Observando o grafo, vemos que a aresta gh tem peso 1, as arestas ci e fg têm peso 2 e as arestas ab e cf têm peso 4 e são as arestas de menor peso. Como não formam ciclos, posicionaremos em T conforme figura 2.13.

⁸Joseph Kruskal, matemático americano.

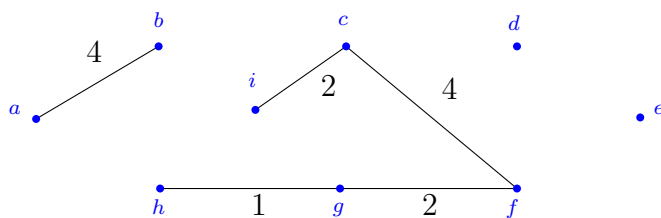


Figura 2.13: Primeiro passo do algoritmo de Kruskal.

Seguindo para o segundo passo, observemos que existem 9 vértices e já posicionamos 5 arestas, portanto deve-se investigar as três arestas mínimas que completarão a árvore, sem formar ciclos, e posicioná-las uma a uma. Os vértices cd e hi possuem o peso mínimo entre as arestas restantes, porém só poderemos introduzir a aresta cd , pois hi (figura 2.14) forma um ciclo. Repetindo o processo, introduziremos as arestas bc com peso 8 e de

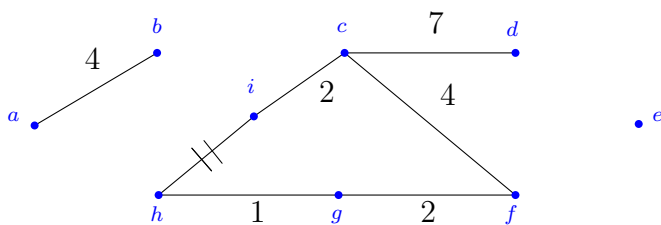


Figura 2.14: Aresta hi forma um ciclo.

com peso 9, formando a árvore geradora minimal T , conforme figura 2.15. Observe que a aresta ah tem peso 8, mas não podemos utilizá-la no lugar de de , pois T deixaria de ser uma árvore formando um ciclo.

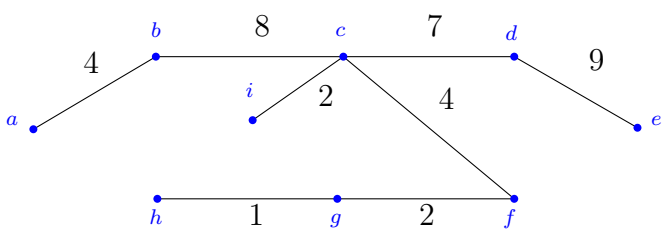


Figura 2.15: Árvore geradora minimal T .

2.7.8 Conjuntos independentes e cliques

Conjuntos independentes de um grafo G é todo subconjunto A não vazio que contém os vértices de G de modo que, tomando-os dois a dois, não contenham uma aresta. Se G contém n vértices, podemos partí-lo em n conjuntos, cada um contendo um vértice, e

considerá-los conjuntos independentes entre si de forma que $G = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$. Logo existe um número k de partições que seja o menor possível. Podemos atribuir colorações aos vértices de modo que os adjacentes recebam sempre cores diferentes, então o número k representa o mínimo de cores que podemos utilizar nesse grafo.

Um bom exemplo para ilustrar a definição acima é o grafo bipartido, onde $k = 2$, e bastam duas cores para que os vértices adjacentes sempre possuam colorações diferentes. Vamos identificar como $X(G)$ o número mínimo k de cores onde possamos cromatizar os grafos independentes de G . Segue que $X(G) \leq \Delta(G)^9 + 1$. De fato, sendo n o grau máximo de G , o teorema nos dispõe de $n + 1$ cores para cromatizar os vértices. Temos de fazê-lo de tal forma que vértices adjacentes recebam cores diferentes. Suponha que já tenham sido pintados $k < n$ vértices de G e seja u um vértice ainda não colorido. Por hipótese, têm-se $d_G(u) \leq n$ de tal sorte que foram utilizados, no máximo, n cores para os vértices adjacentes a u , restando ainda uma cor para u .

Um n -clique de um grafo G é qualquer subgrafo encontrado em G tal que, seus vértices dois a dois sejam adjacentes. Em outras palavras, um subgrafo com n vértices em G têm de ser isomorfo à K_n (seção 2.7.1). O maior inteiro $n \geq 0$ encontrado em G será denominado $\Omega(G)$, portanto é fácil observar que $X(G) \geq \Omega(G)$. De fato, seja $\Omega(G) = n$ onde necessitamos de n cores diferentes para colorir K_n , logo serão necessários no mínimo n cores para cromatizar $X(G)$.

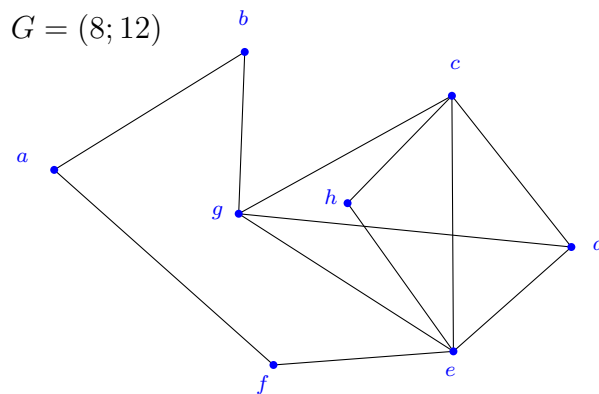


Figura 2.16: Exemplo de grafo com cliques.

Na figura 2.16, podemos observar vários cliques como o formado pelos vértices (a, b) , pelos vértices (c, e, h) , entre outros. Porém $\Omega(G) = 4$, pois trata-se do maior conjunto de vértices que determina um clique em G , formado pelo conjunto (c, d, e, g) gerando um K_4 .

⁹Vide referência em 2.7.5

Capítulo 3

PRINCIPAIS OBSTÁCULOS

Neste capítulo abordamos alguns dos principais obstáculos que influenciam diretamente na qualidade do processo do ensino de combinatória. Começamos revisando as orientações contidas nos cadernos oficiais da educação brasileira, discutimos a formação de professores no Brasil e pesquisamos como se dá o desenvolvimento do raciocínio combinatório na formação de crianças e adolescentes.

3.1 Orientações dos parâmetros curriculares nacionais

Concluído em 1998, os parâmetros curriculares nacionais [3], conhecidos pela sigla PCN, são orientações que procuram nortear a educação básica em nível nacional. Nesta seção estaremos coletando as informações referente ao caderno de Matemática, relativos aos 3° e 4° ciclos, que são os anos finais do ensino fundamental, no que diz respeito à inclusão do tema combinatória do 6° ao 9°ano.

O documento começa relatando como era o ensino de Matemática do início até quase o final do século XX, considerado elitista, conteudista e com foco na mecanização dos processos em detrimento à verdadeira apreensão. O ensino da Matemática, de forma geral, era baseado na teoria dos conjuntos e álgebra, privilegiando o encadeamento lógico e o excesso de rigor, onde seu foco principal era a preparação para estudos posteriores.

Com base nos estudos do *National Council of Teachers of Mathematics - NCTM*, iniciados em 1980 e concluídos em 1995 nos Estados Unidos, estão propostos neste documento mudanças na forma de condução do processo educativo com relação ao ensino da Matemática que, conforme citado, também foram adotados por outros países. Tais mudanças abrangem aspectos sociais, antropológicos, linguísticos e cognitivos.

Entre as mudanças propostas podemos destacar a inclusão, já no ensino fundamental, de temas como estatística, probabilidade e combinatória, atendendo a uma demanda social crescente que direciona à uma necessidade de um contato inicial com esses temas. Além

disso há a orientação em se abandonar o ensino formal utilizado até então, dando ênfase à resolução de problemas.

Outra crítica realizada ao sistema adotado em nosso país até então é a hierarquização do ensino. Ensinar os conteúdos em blocos fechados, considerando-os como pré-requisitos aos blocos seguintes como critério único, baseado na lógica matemática. Segundo o documento tal visão impede a articulação dos diversos segmentos da Matemática, engessando de certa forma seu estudo. O isolamento dos conteúdos da Matemática a um único momento pode impedir o aluno de consolidar os conceitos abordados, levando à dificuldades em um momento de retomada para aprendizagens de noções mais aprofundadas.

O documento considera que as situações-problemas devem ser o ponto de partida para as abordagens do conteúdo. Tais problemas devem conter elementos que articulem as estratégias de resolução segundo os conhecimentos acumulados pelos alunos, ou seja, alguns terão mais subsídios que outros, porém o objeto em aprendizagem deverá ser o foco principal. Segundo o documento os problemas não devem ser utilizados após a formalização do assunto ou serem desenvolvidos paralelamente, eles devem ser o caminho a ser trilhado para a aprendizagem.

Em Matemática quatro grandes blocos são destacados pelo documento: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da informação. Neste último bloco citado, aparecem os problemas de contagem onde se destacam o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio fundamental da contagem que será aplicado no tema probabilidade. O desenvolvimento do raciocínio combinatório deverá ser iniciado como noção ou idéias que terão de ser consolidadas no ensino médio. Essa abordagem não deve envolver a utilização de fórmulas e sim apresentar situações que possibilitem o seu progresso.

Quanto à organização dos conteúdos o documento sinaliza o processo cíclico. Tal processo prevê retomadas periódicas onde em cada uma delas seja aumentado o grau de complexidade exigido. Essa organização requer planejamento para a articulação dos blocos, seleção pertinente dos conteúdos mais complexos, avaliação constante do nível de complexidade a ser atingido, estudo sócio-cultural da região atendida, entre outros aspectos. A realização de projetos durante o ano letivo é vista como essencial ao complemento do processo.

Os objetivos relacionados ao ensino da combinatória direcionados ao 6° e 7° anos tratam de resolução de situações-problema que utilizem o raciocínio combinatório para determinar probabilidades de sucesso de determinados eventos, associando a isso uma razão entre as possibilidades de acontecimento e o espaço amostral. Para os 8° e 9° anos, as orientações estão direcionadas à estatística e cálculo de probabilidades.

Entre os conteúdos citados há um destaque à importância em se determinar um espaço amostral, que servirá de referência na estimativa de probabilidades de sucesso. As experimentações e simulações podem contribuir neste processo, validando o cálculo matemático.

Os conceitos e procedimentos que tornarão possível a realização dos objetivos endossam a resolução de problemas de contagem que, além de incluir o princípio fundamental como já citamos anteriormente, admite a adoção de estratégias variadas como a construção de diagramas, tabelas, ou esquemas.

3.2 Formação de professores no Brasil

A história recente do Brasil revela um grande crescimento na demanda educacional. Para se ter uma ideia, de 1933 à 1998 a população brasileira quadruplicou, porém a quantidade de alunos matriculados em escolas cresceu vinte vezes [23]. Este dado aflora as discussões acerca da qualidade de ensino, sobrecaindo vertiginosamente nos métodos e procedimentos adotados pelos profissionais da educação.

Até poucos anos atrás, a formação dos professores estava amparada em uma corrente que privilegiava um domínio em sua área de atuação, onde os conteúdos eram logicamente organizados e a parte didático-pedagógica era desenvolvida com a prática e experiência do dia a dia. Tal corrente atendia uma demanda voltada exclusivamente ao desenvolvimento acadêmico, muito decorrente aos meados do século XX.

No final do século XX outra corrente teórica passou a vigorar na formação de professores no Brasil. Além de um domínio técnico em sua área de atuação, as licenciaturas passaram a incluir no currículo um conjunto de temas que prepare o lado pedagógico-didático do futuro professor. Essa inclusão veio por força do Conselho Nacional de Educação que condicionou o título de professor ao cumprimento de uma carga horária mínima nesses tópicos [2].

Segundo Gatti[12], a partir daí formou-se um problema de identificação dos estudantes de pedagogia. Estariam os cursos de licenciatura vinculados apenas a profissionais da educação ou dariam subsídios suficientes para adentrar no mercado de trabalho que não seja necessariamente a escola? Estariam os estudantes de licenciatura designados a duas "meia" formações? Conforme a própria autora argumenta, estas questões permanecem em aberto até os dias de hoje.

Quanto ao conjunto de pareceres e resoluções que norteiam a formação de professores atualmente, Saviani [23] faz um levantamento de cinco dilemas encontrados nos documentos oficiais. O primeiro deles é que os documentos apontam de forma clara e pertinente todos os problemas e obstáculos existentes no sistema educacional, porém não há uma clareza de como resolver tais impasses.

O segundo dilema apontado pelo autor caracteriza que os documentos se restringem nos temas importantes e se alongam demasiadamente em questões acessórias, ou seja, descarta a prática pedagógica como um campo de conhecimento científico resultante do acúmulo histórico para ressaltar excessivamente os temas transversais.

O terceiro dilema está vinculado à metodologia que é proposta com base nos ensina-

mentos de Piaget em sua teoria construtivista. Segundo o autor, para modificar a linha de pensamento baseada na transmissão de conhecimento, foi proposto aos docentes uma mediação do processo que levasse os alunos à construção de seus próprios conhecimentos, em uma relação de interação com o ambiente. Para tornar viável, os documentos propõem a aquisição de competências pelos alunos, no sentido de serem capazes de executar tarefas que alcancem tais objetivos. Porém há uma incapacidade de realização no cotidiano dos docentes, mesmo os recém formados, devido a complexidade de tal mérito pedagógico.

O quarto dilema enfoca a própria formação do professor onde, ao se tentar conseguir mais com menos recursos, objetiva-se à formação de um professor técnico, que consiga entrar em sala de aula e executar suas ações em detrimento à formação de um professor culto, que possui domínio científico e filosófico. Isso resulta em perda na formação dos alunos, pois não há compreensão por parte dos professores do processo histórico do desenvolvimento da humanidade.

O quinto dilema está na dicotomia entre a formação de professores da Educação Infantil e anos iniciais do Ensino Fundamental e as licenciaturas referente aos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Nos primeiros o enfoque é cognitivo, baseado na construção de conhecimentos quando nos últimos há um enfoque pedagógico não inferior a quinta parte da carga horária total. O autor julga que, no mínimo, os cursos de pedagogia e as licenciaturas deveriam ser regidas sob a mesma linha de pensamento.

Quanto à formação docente no Brasil ainda restam perspectivas diante dos desafios à serem enfrentados [23]. Segundo Borges[2] há um conformismo histórico na formação dos professores no que diz respeito aos resultados esperados a curto e longo prazo. Essa barreira se caracteriza principalmente por uma "tensão" entre as esferas acadêmicas, tecnológicas e educacionais onde este último não compreende sua finalidade histórica.

Na política de formação docente, para superar o fragmento causado principalmente pela diversidade de concepções entre as instituições de formação, Saviani[23] propõe que haja unicidade baseada em abordagens de padrão universitário, privilegiando estes cursos. Para que não haja descontinuidade de políticas é necessária a formação de professores cultos, com cursos de maior duração e que contemplem a parte didático-pedagógica de forma suficiente.

Concordamos com Saviani[23] que os cursos de formação devam ser "ambientes intensos e exigentes", que estimulem a atividade intelectual dos interessados em integrar o corpo docente. Não há como desvincular o processo de formação das escolas, com uma articulação de estágio eficiente e que cumpra os requisitos básicos de colaboração entre as partes. Também não podemos omitir que há um grande desestímulo devido aos baixos salários, jornada extensa e baixas condições de trabalho.

Acreditamos no pensamento de Borges[2] que a prioridade de investimentos na Educação seja exercida de direito e de fato, inclusive aumentando o valor da participação do PIB (Produto Interno Bruto) para que os docentes sejam efetivamente valorizados e as

escolas melhor estruturadas.

Saviani[23] também alerta que a falta de estímulo dos jovens em investir seu tempo na carreira docente está diretamente relacionada com o nível de formação dos mesmos e vice-versa. Ao perceberem que a profissão sofre de baixo reconhecimento social, os poucos que dão sequência aos estudos são pessoas desestimuladas, pouco propensas à uma formação efetiva e isso influencia diretamente nas instituições que têm de lidar com esse baixo rendimento de seus alunos.

Se por outro lado houver nas escolas boas condições de trabalho e salários atraentes, muitos jovens disporão todo seu tempo e investimento dos recursos para obterem uma qualificação docente de excelência, bem como estímulo para a formação continuada como a pós-graduação. Diante do exposto, a qualidade do trabalho pedagógico dos docentes sofrerá visível elevação criando expectativas em relação aos resultados educacionais.

3.3 Desenvolvimento do raciocínio combinatório

A formalização do estudo de combinatória se deu na investigação sobre as chances de vitória em jogos de azar. Desde então, muitos avanços ocorreram e a área de aplicação cresceu muito. Podemos citar algumas aplicações de combinatória, como probabilidades, transportes, planos de produção, programação linear, estatística, biologia molecular, elaboração de horários, entre outros[13].

O principal foco da combinatória é determinar a quantidade de elementos de conjuntos ou subconjuntos, sem no entanto relacioná-los um a um. Para isso são necessárias técnicas formais ou informais, que façam uso de argumentos lógicos ou fórmulas no sentido de quantificar situações que envolvam muitos elementos. É um ramo da Matemática que estuda a complexidade estrutural das relações discretas[17].

Portanto entende-se por raciocínio combinatório a capacidade de resolver problemas que envolvem contagem, seja por esquemas, tabelas, organização de ideias, esquematizações, árvore de possibilidades, tentativa e erro e outras estratégias que busquem sistematizar o resultado de maneira correta. Como se pode observar, não se trata de um processo repetitivo onde a simples observação de regularidades seja capaz de proporcionar resultados satisfatórios.

Buscamos nas pesquisas de Piaget saber como ocorre a evolução do raciocínio matemático na faixa etária que pretendemos atingir com a nossa proposta. O objetivo é avaliar se há benefícios em se trabalhar técnicas combinatórias desde o início do Ensino Fundamental e se isso poderá implicar na diminuição das dificuldades inerentes à formalização do conteúdo, geralmente no 2º ano do Ensino Médio.

Piaget[21] considera que antes dos 11 anos de idade a criança adquire a aptidão em resolver problemas matemáticos desde que vinculados à situações concretas. Possuem capacidades que envolvem união e dissociações, classificações, encadeamento de relações,

correspondências, inclusões de classes e de ordem serial (incluindo números), divisões e deslocamentos ordenados e suas medições. Porém há uma limitação no que diz respeito às operações combinatórias e proporcionais que exigem uma estrutura mais elaborada do pensamento.

Após os 11 anos de idade inicia-se uma fase que vai até a adolescência, onde se desenvolve um novo tipo de raciocínio desvinculado de objetos. Nesta fase, seu pensamento começa a aceitar situações abstratas e passa a tratar as hipóteses como algo a ser verificável. As implicações, disjunções, incompatibilidades e conjunções são percebidas e desenvolvidas sem a necessidade de uma comprovação empírica ou vínculos com contextos. O pensamento matemático adquire maturidade para trabalhar as inversões e reciprocidades, bem como a formalização de um sistema baseado em conjuntos, admitindo a partir de então operações combinatórias e proporcionais.

Quanto ao desenvolvimento cognitivo em Matemática, Piaget[21] trabalhou com a hipótese da inteligência estar vinculada ao raciocínio lógico desenvolvido pelas crianças, mesmo antes da formalização proporcionada pela escola. Segundo o autor, algumas pessoas se mostram extremamente inteligentes para outras áreas de estudo e quando vão formalizar conteúdos matemáticos acabam fracassando. Isso se deve ao fato de que o raciocínio lógico se desenvolve desvinculado das metodologias que direcionam o ensino, ademais a própria estrutura da Matemática possui um simbolismo próprio além de exigir um alto grau de abstração.

A aptidão ao estudo da Matemática pode estar, segundo o autor, vinculada a uma compreensão da linguagem, não obstruindo um conhecimento estrutural dos objetos em questão. O fato de não conhecimento do simbolismo pode acarretar à não compreensão de determinado ponto, que implicará à não compreensão de pontos seguintes, proporcionando uma barreira no avanço dos conteúdos abordados. Isso indica que a forma da abordagem metodológica e os complexos afetivos das pessoas que cercam o aluno podem interferir negativamente em algo que poderia ter um início completamente diverso.

Piaget atribui à influência do grupo bourbaquista, que fundamentou os estudos da Matemática na linguagem de conjuntos no início do século XX, um fator positivo na estrutura psicológica do raciocínio lógico. Tal organização dos conteúdos desvinculou particularidades inerentes ao distanciamento entre os temas, muito recorrente antes dos bourbaquistas, e contemplou as "estruturas operatórias naturais da inteligência e do pensamento". Desde então a Matemática divide-se em três estruturas básicas: algébrica, de ordenação e topológicas. Estas estruturas estão diretamente encadeadas às operações fundamentais do pensamento humano.

A Matemática moderna e sua linguagem baseada nos conjuntos teve como objetivo a introdução formal dos conteúdos de maneira precoce, o que de acordo com o autor a criança desenvolve naturalmente desde cerca dos 7 anos de idade. A partir de cerca dos 11 anos de idade, como já fora dito, a estrutura do pensamento já atingiu um nível mais

complexo para começar a trabalhar "conjuntos de partes que é a fonte da combinatória e dos encadeamentos".

A inteligência humana é capaz de desenvolver o raciocínio operatório sem a reflexão de como isso ocorre. Portanto pode haver um progresso matemático desvinculado dos símbolos e implicações contidos na formalização dos conteúdos. O grande problema da pedagogia, segundo o autor, é encontrar o método mais adequado para essa formalização, de tal modo que esse procedimento possa ser teorizado de maneira reflexiva e eficiente.

Tudo isso deriva ao fato do grau de abstração exigido pela Matemática, onde se procura a manipulação de objetos para atingir esse objetivo, mas a manipulação excessiva acaba se tornando um obstáculo pois o vínculo às experiências torna o exemplo como referência do conteúdo. No entanto o autor sugere que as experiências físicas sejam trabalhadas de forma a se tornarem um degrau para a superação das dificuldades, o que culminará na utilização da Matemática como ferramenta de resolução de problemas, tanto os conhecidos como os que venham a aparecer.

Para finalizar Piaget salienta a importância de, desde muito cedo, o aluno descobrir por si mesmo as relações, regularidades e as propriedades matemáticas pela manipulação de objetos, antes mesmo da formalização dos conteúdos que é baseada no automatismo de operações. Também é necessária a extensão progressiva baseada nesse mesmo princípio, com experiências que proporcionem tal desenvolvimento e ainda criar mecanismos de verificação, onde os próprios erros venham a ser verificados e o aluno adquira a prática da autocorreção. Por fim priorizar o raciocínio e a reflexão.

Capítulo 4

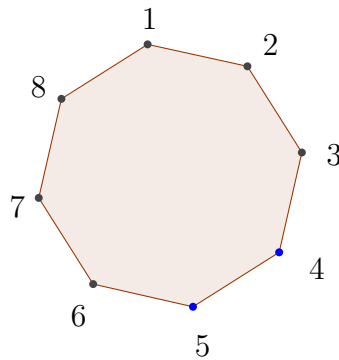
PROPOSTA DE ENSINO

Neste capítulo apresentamos um conjunto de atividades que visam o desenvolvimento do pensamento combinatório desde o 6º ano do Ensino Fundamental. Nos apoiamos nas pesquisas de [9] que investigou a inclusão de problemas que contenham ideias de arranjos, combinações e permutações nos anos que antecedem o Ensino Médio. Segundo a autora, os problemas apresentados nos anos iniciais envolvem apenas as ideias do princípio multiplicativo (capítulo 2) e segundo os resultados de sua pesquisa, verificou-se a possibilidade de ir além desse assunto, sempre utilizando o método de resolução de problemas. Diante dessa possibilidade, utilizamos problemas já existentes nos livros didáticos e que podem ser solucionados por um método de contagem, outros que fazem uma correlação entre temas da Matemática com a combinatória e elaboramos alguns problemas que julgamos serem pertinentes ao desenvolvimento do tema.

4.1 Quantidade de diagonais de um polígono convexo

No ensino fundamental, o estudo dos polígonos está presente nos quatro anos, sendo feito um reconhecimento conceitual no 6º ano e um maior aprofundamento nos anos subsequentes. Alguns livros didáticos apresentam a fórmula $\frac{n(n-3)}{2}$, que determina a quantidade de diagonais de um polígono convexo qualquer no 7º ano. Em geral é feita uma observação em um determinado polígono e após isso, utiliza-se uma letra para generalizar a fórmula para qualquer outro polígono.

Nossa primeira proposta para este tema é utilizar o *princípio aditivo* da contagem (capítulo 2) para explorar um pouco mais o assunto, sem a utilização da fórmula. Tomemos como exemplo um octógono.



Os vértices da figura foram enumerados na sequência de 1 a 8 para facilitar a visualização. Vamos considerar o par ordenado (x, y) como a diagonal formada pelo segmento de reta que une esses dois vértices. Assim, $(2, 5)$ representa a diagonal formada pelo segmento que une o vértice 2 ao vértice 5. Devemos construir em conjunto com os alunos a idéia de que $x \neq y$, visto que se houvesse a possibilidade de $x = y$ estaríamos diante de um ponto e não uma diagonal.

Também devemos mediar a idéia de que $x < y$ já que a diagonal $(2, 5) = (5, 2)$. Outra observação importante que deve ser analisada pelos alunos é a inexistência de algumas diagonais, como $(2, 3)$ que define um dos lados do octógono. Diante dessas considerações não será difícil totalizar a quantidade de diagonais do polígono em questão, pois

$$\text{Diagonais obtidas pelo vértice 1} = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7)\} = 5$$

$$\text{Diagonais obtidas pelo vértice 2} = \{(2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 8)\} = 5$$

$$\text{Diagonais obtidas pelo vértice 3} = \{(3, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8)\} = 4$$

$$\text{Diagonais obtidas pelo vértice 4} = \{(4, 6), (4, 7), (4, 8)\} = 3$$

$$\text{Diagonais obtidas pelo vértice 5} = \{(5, 7), (5, 8)\} = 2$$

$$\text{Diagonais obtidas pelo vértice 6} = \{(6, 8)\} = 1.$$

As diagonais 7 e 8 já foram contempladas nas etapas anteriores, portanto uma simples adição dos conjuntos acima nos levam ao total de diagonais, que são 20.

Uma segunda proposta envolvendo a mesma situação seria utilizar o *princípio fundamental* da contagem. Dessa forma pensaríamos em como formar o mesmo par ordenado, sem as restrições observadas na primeira situação, onde pensaríamos na quantidade de escolhas que temos para cada posição do par:

$$\begin{array}{ccc} (\dots & , & \dots) \\ \swarrow & & \searrow \\ 8 \text{ escolhas} & & 5 \text{ escolhas} \end{array}$$

Sendo assim, temos 8 escolhas para formar o vértice da primeira posição do par ordenado, visto que podemos fazê-lo sem restrições. Para a escolha do vértice que ocupa a

segunda posição do par ordenado temos três restrições: o próprio número que foi escolhido para a primeira posição e os dois vértices vizinhos que não formam diagonais, totalizando 5 escolhas.

Logo teríamos $8 \cdot 5 = 40$ diagonais, o que não é verdade. Nesse momento devemos instigar os alunos a detecção do erro, que está no simples fato da dupla contagem chegando assim ao resultado desejado. Após a solução de um ou mais problemas deste tipo, o *princípio fundamental* da contagem poderá ser utilizado para generalizar a fórmula descrita no início desta seção.

4.2 Quantidade de divisores de um número natural

O estudo de MMC (Mínimo múltiplo comum) e MDC (Máximo denominador comum) é de suma importância para que o aluno consiga compreender diversas áreas da Matemática até o final do ensino médio. Sua introdução antecede o ensino fundamental mas é no sexto ano que seu estudo passa a ser sistematizado.

Nesta fase é de total importância que o aluno compreenda o que são múltiplos e divisores de um número natural[3]. Os múltiplos de um número natural são infinitos, porém os divisores são finitos, logo contáveis. Descrever todos os divisores de um número natural é uma das tarefas propostas pelos livros didáticos, mas o que se percebe em nossa prática é que muitos alunos identificam alguns divisores e não a sua totalidade.

Nossa proposta para este tópico é apresentar uma técnica que totalize a quantidade de divisores de um número para que, de posse dessa informação, os alunos fiquem mais seguros ao identificá-los.

Consideraremos um número primo todo número natural maior que 1 que só seja divisível por 1 e por ele mesmo[15]. Tomemos o número 24 para explorar esta situação. Ao decompor o número 24 em fatores primos encontramos $2^3 \cdot 3$, fato este que deve ser explorado com o aluno para que ele perceba quais são as combinações desses números primos que geram os divisores do número 24. Podemos inferir que:

$$2^0 \cdot 3^0 = 1 \cdot 1 = 01 \text{ (divisor de 24)}$$

$$2^1 \cdot 3^0 = 2 \cdot 1 = 02 \text{ (divisor de 24)}$$

$$2^2 \cdot 3^0 = 4 \cdot 1 = 04 \text{ (divisor de 24)}$$

$$2^3 \cdot 3^0 = 8 \cdot 1 = 08 \text{ (divisor de 24)}$$

$$2^0 \cdot 3^1 = 1 \cdot 3 = 03 \text{ (divisor de 24)}$$

$$2^1 \cdot 3^1 = 2 \cdot 3 = 06 \text{ (divisor de 24)}$$

$$2^2 \cdot 3^1 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ (divisor de 24)}$$

$$2^3 \cdot 3^1 = 8 \cdot 3 = 24 \text{ (divisor de 24)}$$

Esquecendo a base e olhando para os expoentes, não é difícil perceber que o total de oito divisores deve-se ao fato de que existe uma árvore de possibilidades (capítulo 2) onde

há 4 escolhas para o expoente do número 2, e duas escolhas para o expoente do número 3:

$$2^{\{0,1,2,3\}} \text{ e } 3^{\{0,1\}}$$

Sendo assim, ao efetuar a multiplicação dos possíveis expoentes observados no número decomposto, atingimos a quantidade de divisores do número. Com a prática espera-se que o aluno habitue-se com um simples detalhe: basta decompor o número em fatores primos e multiplicar seus expoentes adicionados em uma unidade. Tomemos o número 90 como exemplo:

$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Chega-se a quantidade de divisores fazendo-se uma simples conta:

$$(1 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

Com a informação rápida de que o número 90 possui 12 divisores, pode-se esperar que o aluno deduza-os mentalmente, com a segurança de saber a quantidade que deve encontrar.

Esta proposta pode ser considerada muito enriquecedora pois acaba indo além das técnicas de contagem. Ao conhecer a estrutura que o número possui com relação aos fatores primos, o aluno poderá perceber de maneira geral como são elaborados os critérios de divisibilidade propostos nos livros didáticos.

Além disso, os algoritmos encontrados nos livros didáticos que determinam os divisores de um número são bem mais complicados de executar que a simples observância dessa regra.

4.3 Quantidade de elementos de conjuntos finitos

Conjuntos numéricos é um dos temas abordados no 8º ano do ensino fundamental. Neste estágio, os PCN propõem que os alunos reconheçam e compreendam as operações envolvendo os conjuntos de números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais. Além disso há uma proposta de resolução de problemas de contagem incluindo o princípio multiplicativo, com estratégias diversas.

Todos os conjuntos numéricos mencionados possuem infinitos elementos, ou seja, não são conjuntos enumeráveis. Neste nível de aprendizagem, espera-se que o aluno esteja a par com as operações envolvendo números de todos os conjuntos supracitados.

Propomos abrir um parênteses no tema, para trabalhar em nível bem inicial o princípio da inclusão-exclusão (capítulo 2). Para isso elaboramos uma atividade baseada no contexto diário de diversos alunos, onde será possível confirmar a técnica na prática.

Utilizaremos para esta proposta o auxílio das redes sociais. Segundo dados do instituto de pesquisa Ibope¹, estima-se que em janeiro de 2013 o Brasil já teria atingido a marca de 46 milhões de usuários em redes sociais, o que nos dá um certo respaldo para esta proposição.

Definiremos um conjunto de amigos do usuário X todos os elementos intitulados como tal. Podemos citar como o exemplo a rede social "Facebook". Quando o usuário X entra em sua conta, ele pode verificar a quantidade de amigos que possui. Quando o usuário X visita a conta de um amigo qualquer Y, é possível verificar a quantidade de amigos comuns de X e Y.

O trabalho em questão deve ser realizado por duplas que possuam conta em uma mesma rede social e a questão será: Quantos amigos a dupla possui? No caso de não haverem amigos em comum, o princípio aditivo resolve a questão. No caso de haver um ou mais amigos em comum, espera-se que aplique-se o princípio aditivo, descontando os amigos em comum, que estão se repetindo na contagem.

Também podemos propor uma questão direta para toda a turma, como por exemplo: *Clara é amiga de Beth em uma rede social. Clara possui x amigos enquanto Beth acumula y . Quando Clara acessa o perfil de Beth, um dos campos da tela informa que há z amigos em comum. Quantos amigos Clara e Beth possuem juntas?*

$$x + y - z$$

Além da utilização de um método de contagem, a atividade acima já inclui intuitivamente a idéia de interseção de conjuntos finitos, que também será um tema trabalhado apenas no ensino médio.

4.4 Princípio fundamental da contagem no 6º ano

É muito comum encontrar nos livros didáticos de 6º ano várias propostas utilizando o princípio fundamental da contagem (capítulo 2). São problemas do tipo:

Exemplo 1 *Se possuo duas calças e cinco camisas, de quantos modos diferentes posso escolher um par de roupas?* (adaptado)

Exemplo 2 *Em uma sorveteria existe quatro sabores de sorvetes e três sabores de cobertura. De quantos modos posso compor o sorvete com um sabor e uma cobertura?* (adaptado)²

Entendemos a proposta completamente válida, inclusive passível de visualização de uma árvore em possibilidades ou qualquer outra composição, que pode levar o aluno

¹<http://www.ibope.com.br/pt-br/noticias/paginas/numero-de-usuarios-de-redes-sociais-ultrapassa-46-milhoes-de-brasileiros.aspx>

²Retirados do livro "Matemática e realidade de Gelson Iezzi e outros.

a interpretar toda a essência envolvida em situações desta espécie. Não encontramos nenhuma pesquisa acerca deste assunto, mas nota-se em nossa prática educativa que, de maneira geral, os alunos que não compreendem plenamente o sentido do exercício também conseguem chegar ao resultado corretamente.

O fato é que exercícios como os exemplificados acima estão inseridos no contexto de multiplicação de números naturais e, os dados numéricos fornecidos no enunciado podem ser utilizados sem alterações em uma multiplicação. Sendo assim, para resolver o *Exemplo 1* o aluno utiliza os números 2 e 5 fornecidos no enunciado e multiplica-os, obtendo o resultado 10 (o *Exemplo 2* é análogo).

Nossa proposta é que após o aluno resolver problemas deste nível, incluamos situações um pouco mais elaboradas que exijam o uso conjunto do princípio aditivo e do princípio fundamental da contagem (capítulo 2). O objetivo desta proposta é verificar se houve validade no entendimento das situações mais simples.

Podemos contextualizar da seguinte forma: Em uma lanchonete você tem à disposição x lanches diferentes, y opções de sucos naturais e z variedades de refrigerante. De quantas formas diferentes você pode fazer seu pedido, de forma que seja composto por um lanche e uma bebida? (considere x , y e z números naturais).

Nesta situação não basta uma simples multiplicação das quantidades enunciadas, pois não está sendo feita uma simples escolha de um elemento de cada conjunto. Temos a certeza da escolha de um tipo de lanche, mas a outra escolha será feita entre dois conjuntos disjuntos, ou seja, o conjunto dos sucos ou dos refrigerantes.

O aluno poderá elaborar um esquema para elucidar a situação e deverá perceber que tratam-se de duas árvores de possibilidades distintas, ou seja, uma árvore formada pelo conjunto dos lanches e sucos, outra árvore formada pelo conjunto dos lanches e refrigerantes. Desta forma não será difícil perceber que a resolução de tal problema é a soma das quantidades obtidas nas duas árvores supracitadas. Logo a resolução aritmética do problema consiste em

$$x \cdot y + x \cdot z$$

que distancia-se de uma certa evidência fornecida pelo enunciado.

Outros contextos poderão ser trabalhados neste sentido como: Lucia possui x vestidos, y camisetas, w calças e z shorts. De quantas maneiras ela poderá se vestir se optar por uma das alternativas abaixo:

- a) Usará um vestido.
- b) Usará uma camiseta e uma calça.
- c) Usará uma camiseta e um shorts.

Notemos que a opção a é independente e não deve estar vinculada a nenhum outro conjunto. As opções b e c são análogas à proposta anterior. Logo a resolução deste problema será

$$x + yw + yz$$

onde a primeira parcela refere-se ao item a , a segunda parcela ao item b e a terceira parcela ao item c .

4.5 Elaborando senhas

Um contexto presente no cotidiano dos alunos do ensino fundamental é a elaboração de senhas. Em um passado bem próximo, elaborar senhas era uma tarefa exclusiva de adultos, como senha de cartões magnéticos por exemplo. Com a chegada da internet, a utilização de senhas passou a ser executada por praticamente todas as faixas etárias, incluindo adolescentes, com a disseminação de correios eletrônicos, ambientes de bate-papo, redes sociais, etc.

A elaboração de uma senha pode ser um fato totalmente aleatório ou algo mais memorizável. No primeiro caso há uma aversão por parte da maioria das pessoas, pois uma senha escolhida aleatoriamente possui uma boa chance de ser esquecida. No segundo caso, alguns critérios podem ser adotados no sentido de obter-se uma estratégia que impeça o esquecimento da mesma.

Apresentaremos uma proposta que poderá ser trabalhada nos 8º e 9ºs anos do ensino fundamental, por ser uma faixa etária mais próxima ao mundo digital. Consiste na elaboração de uma senha com critérios pré-definidos e de forma que cada aluno tenha um critério próprio.

O contexto pode ser o seguinte: Você precisa elaborar uma senha para criação de uma conta em uma rede social. Há uma exigência por parte do fornecedor do serviço de que sejam utilizadas x letras e y algarismos (x e y são números naturais). Para melhor memorizá-la, você adota os seguintes critérios: Para as letras utilizará somente aquelas contidas em seu primeiro nome. Para os números utilizará apenas os constantes em seu ano de nascimento. Quantas são as possíveis senhas que você pode criar?

Note que a tarefa abre um leque de soluções, pois cada aluno que for resolvê-la deverá utilizar seus dados pessoais. Suponha que uma aluna se chame Maria e tenha nascido em 2000. O conjunto de letras e algarismos que ela poderá utilizar são, respectivamente, $L_{Maria} = \{a, i, m, r\}$ e $A_{2000} = \{0, 2\}$. Logo, sua resposta pessoal será

$$4^x \cdot 2^y$$

pois para cada caractere das letras ela possui quatro opções e para cada caractere dos algarismos, duas escolhas.

Agora suponha uma aluna chamada Elizabeth, nascida em 1998. Ela possui conjuntos de opções maiores que Maria, pois $L_{Elizabeth} = \{a, b, e, h, i, l, t, z\}$ e $A_{1998} = \{1, 8, 9\}$. Logo sua resposta pessoal será

$$8^x \cdot 3^y$$

pois para cada caractere a ser preenchido com letras ela possui oito opções e para os algarismos, três escolhas.

A partir destas soluções pessoais muitos desdobramentos podem vir a ocorrer, como por exemplo comparar a quantidade de senhas possíveis entre Maria e Elizabeth. É obvio que Elizabeth tem mais possibilidades de senhas do que Maria e podemos até instigar uma situação probabilística: *Qual senha possui um grau de dificuldade maior de ser "descoberta"?* Espera-se que, por ter um número maior de possibilidades a resposta seja a senha de Elizabeth.

Outro desdobramento pode ser: *O fato de Elizabeth possuir mais possibilidades de senhas torna sua senha mais segura do que a de Maria no sentido de ser "descoberta"?* Espera-se com esta questão que existem possibilidades de senhas com letras e números repetidos, o que torna a senha não tão segura como os números podem mostrar.

Podemos variar esta questão modificando um dos critérios adotados, como por exemplo solicitar que as letras e os números sejam distintos. Neste caso a quantidade de senhas é menor do que a proposta anterior, salvo o caso em que $x = y = 1$. Vejamos como fica o caso de um aluno que contenha w letras e z números a disposição, $w \geq x$, $z \geq y$ ($x, y, w, z \in \mathbb{N}$):

$$w \cdot (w - 1) \cdot (w - 2) \dots (w - x + 1) \cdot z \cdot (z - 1) \cdot (z - 2) \dots (z - y + 1)$$

Como as letras e números são distintos, para cada escolha já feita ficamos com uma escolha a menos na próxima casa.

Para esta versão, deve-se tomar o cuidado de estender os critérios de escolha de letras e números, como poder utilizar o nome e o ano de nascimento completos, pois corremos o risco de encontrar alunos com o primeiro nome muito curto, onde a quantidade de letras exigidas ultrapassa suas opções, tornando-se impossível a solução do problema, salvo o caso em que o mediador queira provocar a situação para que o próprio aluno chegue a essa conclusão.

4.6 Os pedaços da pizza

No sexto ano do ensino fundamental, o aluno deve ser capaz de reconhecer números racionais em seus diversos contextos, com a exploração de situações que fazem menção à relação parte/todo, razão e equivalência[3]. Em nossa prática cotidiana percebemos que uma das formas mais usuais da abordagem desse assunto em livros didáticos é a utilização de figuras geométricas divididas em partes iguais, algumas delas coloridas, onde o aluno deve indicar uma fração correspondente à parte pintada da figura.

Existem também as contextualizações com barras de chocolates divididas em pedaços convenientes e, o mais famoso de todos, a pizza. Nesses contextos são abordados assuntos como números mistos, frações impróprias, equivalência de frações, simplificação das mesmas, comparações, operações, entre outros.

Em nossa proposta queremos explorar essas ideias associadas ao princípio das gavetas (capítulo 2), que por sua simplicidade pode ser de grande utilidade nesta fase de fixação dos temas fundamentais da Matemática, como é o caso das frações.

Considere a seguinte situação: Cinco amigos pediram uma pizza de calabresa que veio dividida em oito pedaços aparentemente iguais. Eles comeram exatamente $\frac{3}{4}$ da pizza. Pode-se afirmar que pelo menos um dos amigos comeu mais de um pedaço de pizza? Por que?

Antes de responder a primeira pergunta, os alunos devem verificar quantos pedaços de pizza foram comidos, o que não está explícito, devido à fração aparecer na forma irredutível³. Diante disso, ele deve procurar o denominador que lhe convém, que no caso é o número oito pois é a mesma quantidade de pedaços em que a pizza foi dividida. Ao fazer a equivalência da fração (figura 4.1) e descobrir que seis dos oito pedaços foram comidos a informação já é suficiente para a primeira resposta.

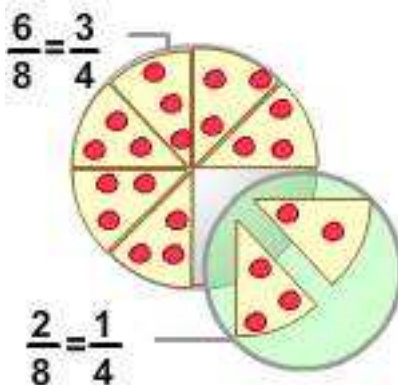


Figura 4.1: Frações equivalentes.

Ao responder o porque, dentre tantas respostas possíveis, espera-se algo parecido com o princípio das gavetas, ou seja, se cada um dos amigos tivesse comido apenas um pedaço da pizza, o total consumido seria de cinco pedaços e não seis como ficou comprovado. Logo, pelo menos um deles consumiu mais de um.

Uma variação interessante da situação envolve a versão geral do princípio das gavetas. Considere que os mesmos cinco amigos foram a uma loja de doces e resolveram comprar um saco de jujubas onde continha os dizeres: Contém 112 jujubas. Eles colocaram em um recipiente e foram comendo aleatoriamente, enquanto assistiam TV. Quando já estavam satisfeitos, dividiram as jujubas restantes para levar para casa. Um deles comentou:

³Chamaremos de fração irredutível uma fração que não pode ser simplificada, ou seja, o numerador e o denominador são primos entre si.

Nossa! Comemos exatamente metade do pacote. Diante dessa afirmação, é possível dizer que pelo menos um dos amigos comeu 12 ou mais jujubas? Por que?

Para esta questão podemos ter os seguintes desdobramentos: Os alunos podem explorar divisão com resto ou trabalhar com números decimais. O que se espera com esta proposta é que o aluno explore o fato de metade do pacote representar 56 jujubas que, ao serem consumidas pelos cinco amigos, não poderiam por obra do acaso ter sido ingeridas em partes iguais. Se o aluno trabalhar a divisão com resto, poderá perceber que na melhor das hipóteses cada amigo teria comido 11 jujubas e teria sobrado uma, que na verdade não sobrou e foi comida por um deles. Ao trabalhar com números decimais, 11,2 seria o quociente e remeteria a ideia de que cada amigo consumiu onze jujubas inteiras mais 0,2 de outra, o que também não condiz com a realidade. De uma forma ou de outra, pelo menos algum deles comeu 12 ou mais jujubas.

Como se trata da metade da quantidade, pode se esperar também que o argumento seja utilizado na divisão das jujubas restantes, pois remeteria à ideia de que, ao dividir igualmente o produto não consumido, os amigos levariam para casa a quantidade de 11 cada um e restaria a decisão do que fazer com a jujuba restante. Sendo assim, caso a decisão fosse um sorteio por exemplo, pelo menos um deles levaria 12 jujubas para casa, situação análoga à questão proposta.

Os problemas que são solucionados pelo princípio das gavetas deixam margem para várias interpretações, como é o caso deste último. É certo que a questão principal de que pelo menos um dos amigos realmente comeu 12 ou mais jujubas, pode ser justificado de muitas formas. Como exemplo, algum aluno poderia argumentar que dos cinco amigos, pode ter ocorrido de dois deles terem comido vinte e cinco jujubas cada e os outros três terem comido duas jujubas cada um. Ainda assim, ele teria subsídios de responder corretamente a questão que não entra no mérito de quanto cada um comeu e sim se aconteceu tal evento.

4.7 Construindo estradas

Nesta seção iremos propor algumas atividades baseadas na teoria dos grafos para que o aluno do ensino fundamental possa construir conceitos sobre minimização/otimização de recursos. As atividades não requerem pré-requisitos e poderão ser exploradas do 6º ao 9º ano do ensino fundamental. Todas as atividades desta sessão são de nossa criação.

Considere que você seja governador de um novo Estado onde sete cidades estão sendo fundadas. Sua missão inicial será construir um conjunto de estradas, com a maior economia de recursos possível, de tal forma que sempre seja possível se locomover entre duas cidades (seção 2.7.5), mesmo que para isso seja preciso passar por outras cidades. Veja o mapa na figura 4.2.

Neste momento espera-se dos alunos que eles elaborem um sistema com o menor nú-

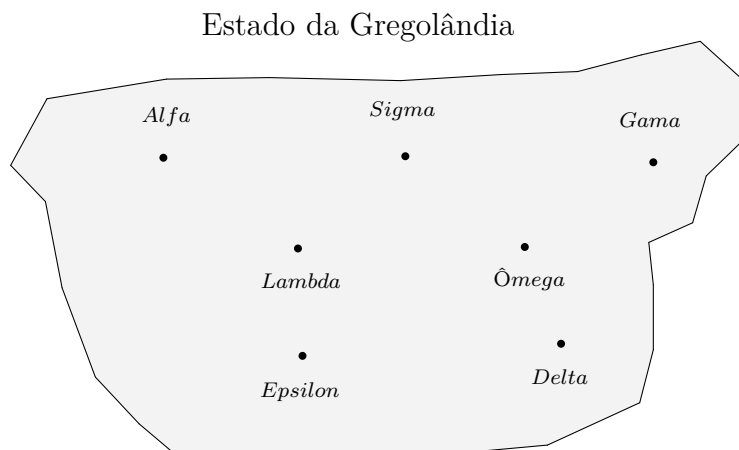


Figura 4.2: Estado da Gregolândia.

mero possível de estradas, neste caso seis (seção 2.7.7), pois como não estamos trabalhando com custos, a primeira preocupação seria levar em consideração apenas a quantidade. Também não seria impossível alguém levar em consideração a metragem dessas estradas, embora não seja o objeto de estudo neste momento.

Após esse primeiro contato podemos propor aos "Governos" a seguinte questão: É possível construir um sistema de estradas na figura 4.2, na menor quantidade possível, em que para se locomover de uma cidade à outra se passe, no máximo, por uma cidade que não seja a cidade destino?

Aqui cria-se mais uma regra, sem abrir mão dos custos. É óbvio que não se quer aqui a ligação de todas as cidades duas a duas, pois isso demandaria a construção de muitas estradas. O que se quer é minimizar a construção das estradas e tornar a viagem, em certo sentido, mais curta. Essa situação pode remeter um aluno que criou um sistema de estradas como na figura 4.3 a repensar o seu sistema pois, em tal situação, quem viajar da cidade *Alfa* até a cidade *Lambda* teria que passar por todas as outras cidades do estado. Note que este sistema é possível, visto que você pode escolher uma cidade-sede e fazer um sistema no qual todas as outras cidades sejam ligadas à essa cidade-sede, como mostra a figura 4.4. Dessa forma, se a cidade de *Sigma* for a origem ou destino não será necessário passar por outra cidade, caso contrário a viagem passará apenas por *Sigma* antes de chegar ao destino.

Agora observe a tabela 4.1. Ela fornece o preço de construção das estradas do estado de Gregolândia, por exemplo, construir uma estrada de *Alfa* para *Sigma* o custo é de \$ 3.000.000. Por questões geográficas, algumas estradas não podem ser construídas, de tal maneira que na tabela ao invés do preço de construção está a palavra "inviável". Determine, utilizando a figura 4.2, um conjunto de seis estradas, que ligue completamente as cidades de Gregolândia e possua o menor custo de produção possível.

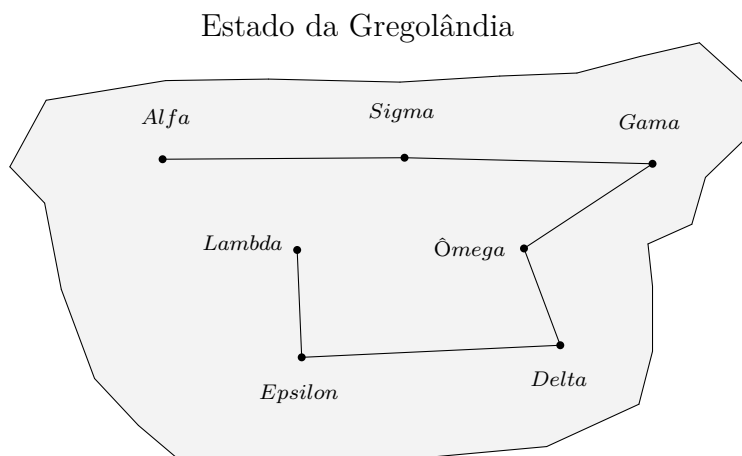


Figura 4.3: Um possível sistema de estradas.

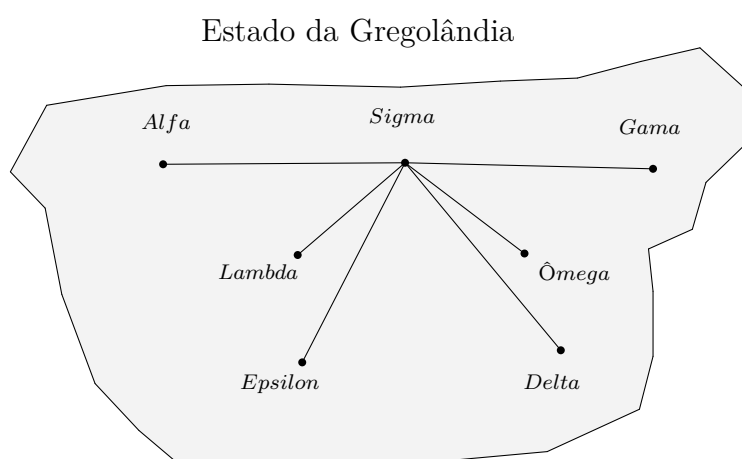


Figura 4.4: Cidade-sede Sigma.

Tabela 4.1: Custo de produção das estradas de Gregolândia.

Cidade 1	Cidade 2	Custo de produção (\$)
Alfa	Sigma	3.000.000
Alfa	Lambda	2.700.000
Alfa	Epsilon	3.000.000
Alfa	Gama	inviável
Alfa	Ômega	3.300.000
Alfa	Delta	inviável
Sigma	Lambda	2.700.000
Sigma	Epsilon	3.300.000
Sigma	Gama	3.300.000
Sigma	Ômega	2.700.000
Sigma	Delta	3.300.000
Gama	Lambda	inviável
Gama	Epsilon	inviável
Gama	Ômega	2.700.000
Gama	Delta	3.000.000
Ômega	Lambda	2.700.000
Ômega	Epsilon	3.000.000
Ômega	Delta	inviável
Delta	Lambda	3.000.000
Delta	Epsilon	3.000.000
Epsilon	Lambda	2.700.000

Neste exercício não basta apenas criar um conjunto de estradas que satisfaça todas as cidades de Gregolândia. Portanto a regra a ser observada aqui é o menor custo de produção (seção 2.7.7) na hora de decidir quais estradas serão construídas. No caso, escolher as estradas mais em conta não é apropriado pois a cidade *Delta* não teria ligação com nenhuma outra, como é possível observar na figura 4.5.

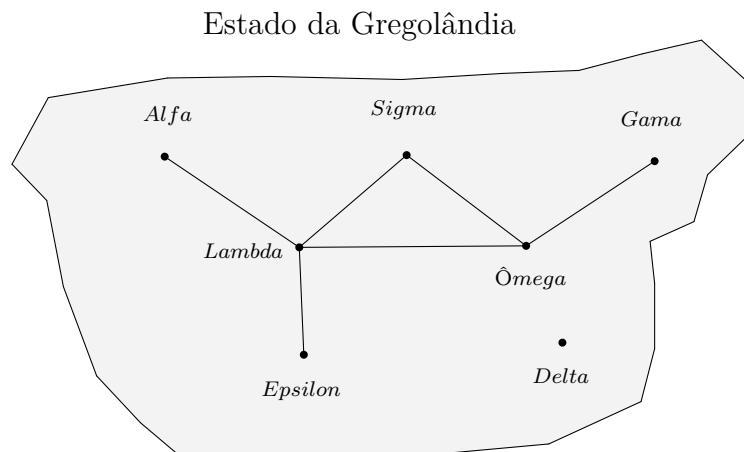


Figura 4.5: Sistema de estradas com menor custo.

Portanto cabe aos alunos a decisão de qual (ou quais) estrada com custo de \$ 2.700.000 deve ser descartada e decidir pela estrada que será efetivamente executada. Podemos incluir a pergunta: *O seu sistema de estradas é igualmente justo com todas as cidades?* Com essa questão os alunos podem verificar se a logística de locomoção entre as cidades não prejudica qualquer trajeto entre elas.

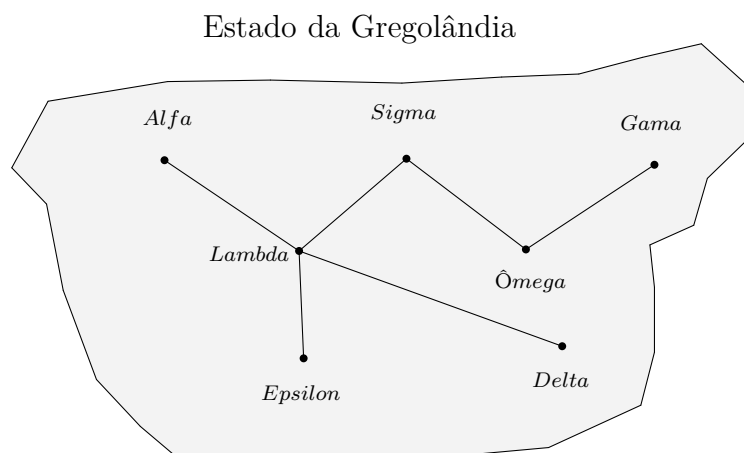


Figura 4.6: Um sistema de estradas com custo mínimo.

Por exemplo, o sistema de estradas da figura 4.6 possui um custo de \$ 16.500.000 e atende aos requisitos do problema, porém a locomoção de *Delta* para *Gama*, cuja distância não é tão grande, demanda uma volta bem maior do que se houvesse uma ligação direta entre essas cidades. Podemos observar que este tipo de proposta possui um leque de variações que podem ser exploradas de acordo com o público alvo, podendo ter um grau de complexidade ainda maior.

Consideremos agora a seguinte situação: O estado de Gregolândia se desenvolveu e foi construído um sistema com nove estradas (figura 4.7).

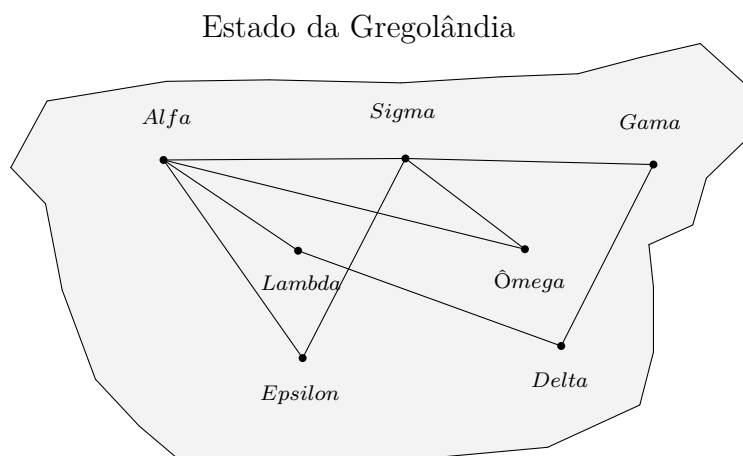


Figura 4.7: Sistema com nove estradas.

Para facilitar a identificação das estradas, chamaremos cada uma pelas iniciais das cidades em que ela liga. Por exemplo, *AO* representa a estrada que liga *Alfa* à *Ômega*. Um turista quer conhecer todas as cidades de Gregolândia. Ele chega à cidade de *Sigma* e quer elaborar um roteiro de modo que passe exatamente uma vez em cada estrada, terminando a viagem na cidade de *Sigma*. É possível elaborar tal roteiro? Em caso positivo, mostre um dos possíveis roteiros.

Neste caso espera-se que os alunos consigam elaborar um roteiro facilmente, pois como vimos na seção 2.7.5, o que queremos na atividade é elaborar um passeio Euleriano, que é possível pois em todas as cidades incide uma quantidade par de estradas. Logo uma possibilidade seria: $R = \{SO; OA; AS; SG; GD; DL; LA; AE; ES\}$.

Consideremos agora outro sistema contendo nove estradas conforme figura 4.8. Se o mesmo turista quisesse elaborar um roteiro, começando e terminando pela cidade de *Sigma*, isso seria possível? Em caso positivo, mostre um dos possíveis roteiros.

Neste caso temos duas cidades onde incide uma quantidade ímpar de estradas, o que inviabiliza o roteiro. Devemos permitir que os alunos façam conjecturas à respeito do problema, que apesar de conter a mesma quantidade de estradas, não admite uma programação como no primeiro caso. Podemos explorar com os alunos sobre alterações

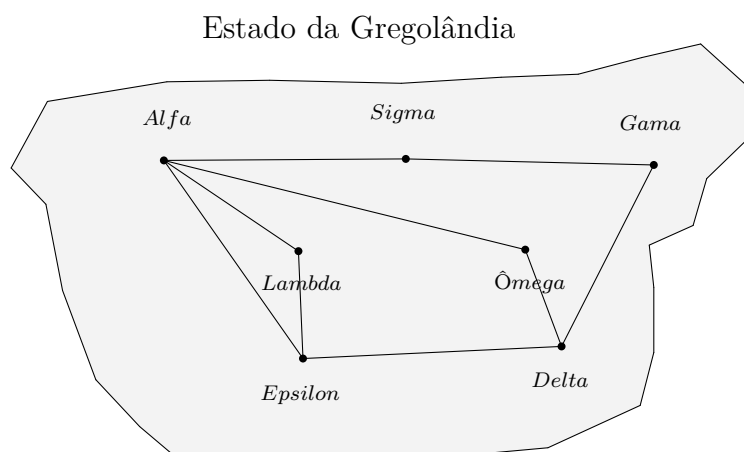


Figura 4.8: Outro sistema com nove estradas.

no sistema que viabilizaria a exigência do turista, ou seja, precisaríamos de uma ou mais alterações? Se excluirmos uma ou mais estradas, poderíamos obter esse roteiro? Quais condições você listaria como necessárias para que ocorresse tal roteiro? Essas questões podem instigar os alunos a elencarem algumas condições como a conexão de todas as cidades no sistema, o fato da paridade *chegada-saída* da cidade e também que a quantidade de estradas não interfere necessariamente no passeio proposto.

Baseado nessa informações, criamos as atividades do Anexo A que foram aplicadas à alunos de 6° e 9° anos do Ensino Fundamental onde analisamos à luz da teoria de Piaget[21] se entre os obstáculos propiciados pela análise combinatória inclui-se o desenvolvimento de um raciocínio combinatório segundo a idade ou a experiência do estudante.

Os alunos do 6° ano estudam na Unidade Municipal de Ensino Rui Barbosa, na cidade de Cubatão. Trata-se de um bairro isolado à margem da Rodovia Imigrantes, onde a escola é bastante valorizada pela comunidade local. Os estudantes dessa faixa etária são dedicados e atenciosos. Selecionamos 25 alunos para realizar as atividades visto que a mediação fica menos tumultuada. As atividades foram realizadas em duas sessões de duas horas cada na própria escola, sendo a primeira sessão com as atividades 1 e 2 e a segunda sessão com as atividades 3 e 4.

Os alunos do 9° ano estudam na Unidade Municipal de Ensino Padre José de Anchieta, também na cidade de Cubatão. Trata-se de uma escola localizada no centro da cidade onde os estudantes dessa faixa etária dedicam-se a fim de ingressar em escolas técnicas ou no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, que também oferece um Ensino Médio integrado ao técnico. Pelos mesmo motivos já citados foram selecionados 25 alunos e as atividades foram realizadas em duas sessões, nos mesmos moldes descritos no parágrafo anterior.

Escolhemos a cidade de Cubatão por ser nossa principal área de atuação no campo educacional. Cubatão situa-se na baixada santista, possui cerca de 110.000 habitantes

e é um importante polo industrial em nível nacional. A formação de seus habitantes é direcionada aos cursos técnicos devido a grande demanda da indústria, que muitas vezes recruta mão de obra de cidades vizinhas pela baixa oferta de pessoas capacitadas na própria cidade[8].

Capítulo 5

RESULTADOS

Para realizar as atividades convidamos 25 alunos do 6ºano do Ensino Fundamental e compareceram 22. Já contávamos com algumas abstenções pois as atividades foram realizadas no contra-turno. Dos 25 alunos pré-selecionados do 9ºano compareceram 20. As atividades foram constantemente mediadas mas demos a total liberdade para que os estudantes tomassem suas decisões, deixando claro que as respostas deveriam ser da convicção de cada aluno.

Na atividade 1 apresentamos o mapa do estado de Gregolândia com suas respectivas cidades em quantidade de sete. O aluno deveria contruir traços entre as cidades que representavam estradas e decidir, de acordo com seu esquema, qual a menor quantidade de estradas era possível para interligar todas as cidades. Com 6 estradas era possível a realização das interligações. O 6ºano obteve apenas duas respostas distintas para a quantidade de estradas conforme tabela 5.1.

Tabela 5.1: Resultado da Atividade 1 - 6ºano

Quantidade de estradas	Quantidade de alunos	Porcentagem
6	15	68,18%
7	7	31,81%

A mesma atividade foi mediada no 9º ano e obtivemos quatro respostas distintas conforme mostra a tabela 5.2.

Tabela 5.2: Resultado da Atividade 1 - 9ºano

Quantidade de estradas	Quantidade de alunos	Porcentagem
6	12	60%
7	6	30%
8	1	5%
10	1	5%

Analisando as duas turmas a grande maioria, totalizando 95,24%, optou pela quanti-

dade de 6 ou 7 estradas para resolver o problema. Desses, 82,5% optaram por um sistema em sequência, ou seja, ligando uma cidade a outra sem tirar o lápis do papel. Aqueles que optaram por 6 estradas iniciavam a viagem por uma cidade e terminavam em outra distinta, passando uma vez por cada cidade. Aqueles que optaram por 7 estradas iniciavam e terminavam o roteiro na mesma cidade. As figura 5.1 e 5.2 contém dois exemplos que ilustram as situações.

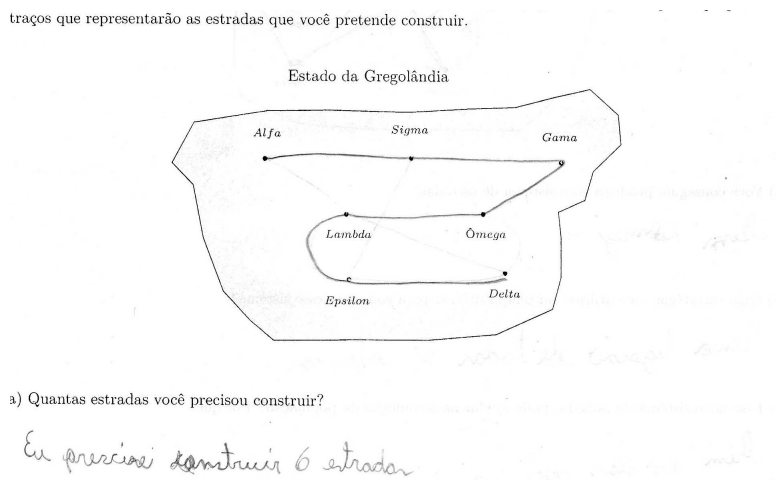


Figura 5.1: Exemplo de sistema de aluno com 6 estradas

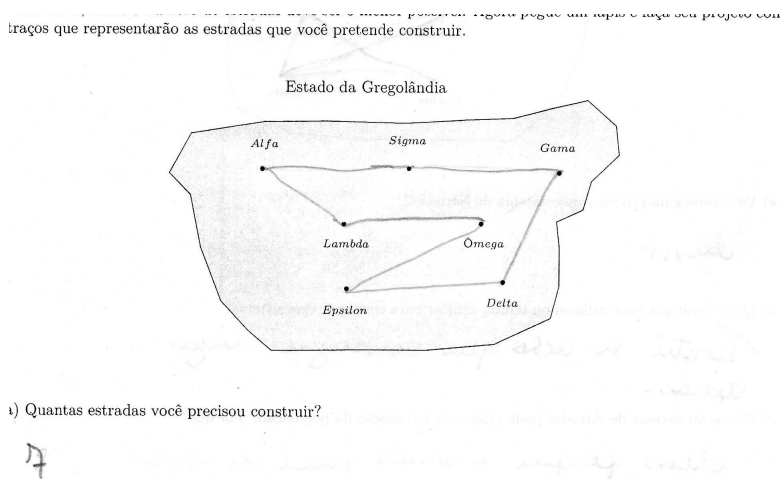


Figura 5.2: Exemplo de sistema de aluno com 7 estradas

Quanto às justificativas sobre se o aluno estava com a certeza de ter encontrado a menor quantidade de estradas, percebemos que o 9º ano apresentou mais clareza em suas considerações. No 6º ano encontramos respostas do tipo "Sim, pois não há como ter menos estradas" ou "Sim, porque esse é o menor número de estradas possível". Sete alunos do 6º ano e quatro alunos do 9º ano deixaram a questão em branco ou responderam que não tinham certeza. As figuras 5.3 e 5.4 contém exemplos que ilustram as situações.

b) Você tem certeza que essa é a menor quantidade de estradas possível? Por que?
 Observações: *Sim - porque tem poucas estradas*
 Confira se é possível se locomover de qualquer cidade para outra.
 Confira se não dá para reduzir o número de estradas do seu projeto.

Figura 5.3: Exemplo de justificativa de aluno do 6º ano

b) Você tem certeza que essa é a menor quantidade de estradas possível? Por que?
 Observações:
 Confira se é possível se locomover de qualquer cidade para outra.
 Confira se não dá para reduzir o número de estradas do seu projeto.

*Sim, porque todas estão ligadas e
 se tiver alguma não ficou faltando*

Figura 5.4: Exemplo de justificativa de aluno do 9º ano

A Atividade 2 questionou sobre o aspecto logístico das estradas. Para evitar que cidades próximas enfrentassem longas viagens para se acessarem propusemos que, com a mesma quantidade de estradas construídas na Atividade 1, os alunos desenvolvessem um sistema em que para viajar de uma cidade à outra o cidadão passe no máximo por uma cidade distinta. Os resultados estão apresentados na tabela 5.3.

Tabela 5.3: Resultados da Atividade 2 - 6º e 9º anos

	Obtiveram êxito	Não obtiveram êxito
6º ano	10 (45,45%)	12 (54,54%)
9º ano	2 (10%)	18 (90%)

Aqueles que obtiveram êxito no 6º ano, 6 deles haviam construído 7 estradas na Atividade 1 e os outros 4 já haviam construído o número mínimo de estradas na primeira atividade. No 9º ano um dos alunos já havia construído o mesmo sistema na Atividade 1 e o outro aluno também havia construído o número mínimo na primeira atividade. Dos 12 alunos que não obtiveram êxito no 6º ano, apenas 3 alegaram ter conseguido, mesmo o seu sistema não atendendo ao requisito. Dos 18 alunos do 9º ano que não obtiveram êxito na Atividade 2, 10 deles alegaram ter conseguido, embora 2 realmente tenham conseguido o sistema porém aumentando a quantidade de estradas.

A Atividade 3 apresentou um orçamento para a construção das estradas onde, inclusive, classificamos algumas delas como inviáveis com a finalidade de desvinculá-la da Atividade 1. O aluno deveria construir um sistema de estradas com a menor quantidade possível, ligando todas as cidades e pelo menor preço. Para a realização desta atividade foi permitido o uso de calculadora pois os cálculos em si não eram o objeto de estudo. A tabela 5.4 mostra o desempenho do 6º e 9º anos.

Tabela 5.4: Atividade 3 - Construir estradas com orçamento

	Atingiram o menor preço	%	Não atingiram o menor preço	%
6ºano	1	4,55%	21	95,45%
9ºano	5	33,33%	15	66,67%

O único aluno do 6ºano que atingiu o menor preço justificou que aquele não era o sistema mais barato (pois havia um sistema com 6 estradas com menor preço, porém não interligava todas as cidades) mas não soube explicar porque. Os alunos do 9ºano que atingiram o objetivo justificaram com argumentos como "porque escolhi as estradas mais baratas", "porque possui menos estradas" ou "porque foi o menor preço que consegui".

Quanto a questão da logística, apenas um aluno do 6ºano, que não foi o mesmo que atingiu o menor preço, justificou que não iria agradar pois "teria que dar muitas voltas para viajar de uma cidade à outra". A grande maioria disse que iria agradar por ser um sistema de "menor preço". No 9ºano sete alunos argumentaram não ser um sistema bom por causa logística e nenhum deles faz parte do grupo que atingiu o menor preço. O restante considerou que iria agradar a população por ter "menor preço" ou não responderam.

Finalizando a Atividade 3 perguntamos se valeria a pena gastar um pouco mais para tornar o sistema de estradas mais justo com a população. Os resultados estão reunidos na tabela 5.5.

Tabela 5.5: Atividade 3 - Questionamento sobre o custo-benefício das estradas

	Sim	Não	Não respondeu
6ºano	9 (40,9%)	7 (31,82%)	6 (27,28%)
9ºano	17 (85%)	3 (15%)	0 (0%)

Apenas 4 alunos do 6ºano e 6 alunos do 9ºano argumentaram sobre suas respostas. Não tivemos no 6ºano uma justificativa clara com relação aos benefícios que um sistema otimizado do ponto de vista da logística poderia ser mais justo com a população. A figura 5.5 apresenta um dos argumentos desse grupo.

d) Vale a pena gastar um pouco mais para construir um sistema de estradas mais justo com toda população?

Se não for muito caro acho que vale a pena.

Figura 5.5: Exemplo de justificativa de aluno do 6ºano

Encontramos no 9ºano duas respostas que, embora não estejam muito claras, referem-se a uma melhoria no deslocamento da população conforme nos mostra a figura 5.6.

A Atividade 4 faz uma alusão ao passeio Euleriano visto na seção 2.7.5. Apresentamos dois sistemas de estradas prontos, ambos com 9 estradas, onde pedimos que os alunos

d) Vale a pena gastar um pouco mais para construir um sistema de estradas mais justo com toda população?

pm pouco ajudava a população a se locomover melhor

d) Vale a pena gastar um pouco mais para construir um sistema de estradas mais justo com toda população?

Sim, porque vai torna mais rapido

Figura 5.6: Exemplo de dois argumentos de alunos do 9º ano

elaborassem um trajeto, iniciando e terminando na mesma cidade, que passasse exatamente uma vez por cada estrada. O primeiro sistema de estradas é possível e o segundo é impossível. Os resultados do primeiro sistema estão reunidos na tabela 5.6.

Tabela 5.6: Atividade 4 - Primeiro sistema com 9 estradas

	Elaboraram um roteiro	%	Não elaboraram um roteiro	%
6º ano	12	54,55%	10	45,45%
9º ano	19	95%	1	5%

Dos 12 alunos do 6º ano que conseguiram elaborar um roteiro para esta atividade apenas 7 o fizeram corretamente, o que corresponde a 31,82% do total. No 9º ano, dos 19 alunos que conseguiram realizar o roteiro, 10 deles o fizeram corretamente, o que corresponde à metade dos alunos. No segundo sistema de estradas obtivemos os resultados que estão reunidos na tabela 5.7.

Tabela 5.7: Atividade 4 - Segundo sistema com 9 estradas

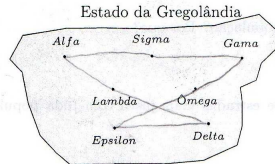
	Elaboraram um roteiro	%	Não elaboraram um roteiro	%
6º ano	7	31,82%	15	68,18%
9º ano	14	70%	6	30%

Dos 7 alunos do 6º ano que elaboraram o roteiro corretamente no primeiro sistema apenas 2 alegaram que no segundo sistema tal roteiro é inviável, o que corresponde a 9,09% do total. No 9º ano, dos 10 alunos que elaboraram corretamente o roteiro no primeiro sistema, 4 deles disseram ser impossível elaborá-lo no segundo sistema, o que corresponde a 20% do total. Verificamos também que 10 alunos (45,45%) do 6º ano alegaram não existir um roteiro para os dois sistemas enquanto no 9º ano apenas um aluno (5%) fez a mesma alegação.

Quanto às alterações no segundo sistema para torná-lo viável o roteiro levantamos que 6 alunos do 6º ano propuseram modificações no sistema, porém 5 deles alegavam tê-lo conseguido na atividade. Apenas um aluno do 6º ano propôs uma alteração coerente porém não justificou-a. No 9º ano encontramos 12 sugestões de alterações donde 6 desses

alunos alegavam ter conseguido um roteiro no segundo sistema. Dessas 12 sugestões apenas 2 alunos apresentaram um sistema coerente, embora não encontramos em suas argumentações nada que indicasse a questão da paridade das estradas em cada cidade, conforme podemos observar na figura 5.7. Apenas 1 aluno do 9ºano conseguiu acertar a atividade completa.

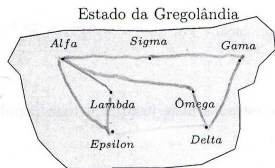
c) Caso não tenha conseguido o roteiro em algum dos sistemas de estradas, proponha alguma mudança que viabiliza o roteiro (Exemplo: Mudar uma estrada de posição, retirar uma ou mais estradas, etc).



d) Por que você acha que sua alteração obteve sucesso?

Porque posso partir do alfa, pro sigma e continuar nesse sentido até dar a volta e chegar ao ponto de início.

c) Caso não tenha conseguido o roteiro em algum dos sistemas de estradas, proponha alguma mudança que viabiliza o roteiro (Exemplo: Mudar uma estrada de posição, retirar uma ou mais estradas, etc).



d) Por que você acha que sua alteração obteve sucesso?

mudou o ponto que
tava complicado

Figura 5.7: Exemplo de dois argumentos de alunos do 9ºano

Capítulo 6

DISCUSSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Entendemos que o estudo de combinatória, quando apresentado ao aluno no Ensino Médio, requer dele uma organização de pensamento preciso, que ao esquecer algum detalhe pode cometer um erro por falta e ao fazer alguma n -upla contagem pode cometer um erro por excesso. Por exigir esse grau de precisão esperamos que os alunos possam construir estratégias coerentes e auto-críticas no sentido de verificar se sua resolução não está contemplada com faltas ou excessos. Em nossa experiência profissional verificamos uma grande dificuldade com relação ao assunto, visto que a utilização de fórmulas é muito comum nesse nível de aprendizagem em matérias como física, química e na própria matemática. O grande problema, como observamos nos estudos de Morgado[17], é que as fórmulas apresentadas no conteúdo de combinatória podem induzir o estudante a erros se sua análise for a simples escolha da fórmula mais adequada. Ao fazer isso, os problemas de contagem recaem a uma tomada de decisão sobre qual fórmula utilizar para resolver o problema em detrimento à compreensão, análise, organização de pensamento e tomada de decisão sobre a questão.

Encontramos nas orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais, conforme citamos no capítulo 3, diretrizes com relação à procedimentos e expectativas esperada dos alunos nesta faixa etária. O documento critica o ensino da Matemática como um conjunto de blocos fechados, pois considera que retomadas constantes aos tópicos seja um instrumento primordial na consolidação dos assuntos. Desta forma, procuramos construir nossa proposta de forma a contemplar os quatro anos do Ensino Fundamental e, desta forma, além de procurar consolidar o tema neste nível de aprendizagem, também temos como objetivo a preparação dos alunos para a sua formalização no Ensino Médio. Isso procura responder à uma de nossas questões de pesquisa que indagava como diminuir o impacto sofrido pelos alunos quando apresentados ao tema.

Ainda nos PCN's encontramos diretrizes com relação aos tópicos matemáticos que devem ser trabalhados no Ensino Fundamental, onde encontramos clara menção da in-

trodução de combinatória desde o 3º ciclo, que contempla o 6º e 7º anos. Em nossa experiência pessoal percebemos que alguns livros didáticos utilizados pelos alunos evitam a introdução do assunto ou se limitam a exercícios básicos de aplicação do princípio fundamental da contagem. Em que pese que tais exercícios contribuem bastante no entendimento da árvore de possibilidades, por exemplo, entendemos que da forma que são apresentados possuem um facilitador em sua estrutura e que muitos alunos percebem, pois basta multiplicar os dados numéricos apresentados. Em face disso elaboramos a proposta 4.4 onde há uma visão aditiva de duas ou mais árvores de possibilidades o que julgamos ser enriquecedor do ponto de vista didático.

Quanto à metodologia sugerida pelos PCN's para o ensino da Matemática, o foco principal é a ênfase na resolução de problemas. Não vemos isso como problemática no ensino de combinatória visto que, em nossa breve visão histórica do tema, a formalização de tal estudo se deu em avaliar as chances de sucesso em jogos de azar. Também podemos observar isso nos livros didáticos e, desta forma, nossa proposta procurou permanecer dentro dessa metodologia.

Um obstáculo que nos preocupa e contribui sobremodo no ensino de Matemática é a atual formação do professor no Brasil. Pudemos observar nos estudos de Saviani[23] que ao modernizar o currículo da formação dos professores no final do século XX, incluiu-se uma carga horária mínima de matérias pedagógicas sem, no entanto, aumentar o tempo de formação dos futuros docentes. Isso implica em uma diminuição na carga técnica o que pode ter reflexos negativos na qualidade do ensino, em particular na análise combinatória que demanda um vasto leque de conteúdos.

Acreditamos que a formação continuada possa suprir as defasagens ocorridas na formação inicial do docente, porém, como vimos também em Saviani[23], a desvalorização da carreira dos professores além de afastar vários jovens de seu ingresso, obriga os que já estão atuando nas escolas à dobrar ou mesmo triplicar sua carga de trabalho. Sendo assim, cria-se um impasse quanto à formação continuada pois, ao dispor tempo para fazê-la faltam recursos, por outro lado para dispor de recursos o profissional abre mão do seu tempo. Ocorre também que os poucos professores que conseguem aprimorar seus estudos acabam migrando para os cursos superiores que também carecem de profissionais qualificados.

Investigamos nos estudos de Piaget[21] como se dá a evolução psicogenética das crianças para avaliar o grau de complexidade das propostas apresentadas no capítulo 4, em relação ao público proposto. Segundo Piaget, antes dos 11 anos de idade o raciocínio se desenvolve à base de interações com objetos concretos. A partir dos 11 anos de idade a criança atinge um nível mais complexo de pensamento onde seu raciocínio se desenvolve gradativamente, desvinculado de objetos. É nessa fase que os níveis de abstração vão crescendo e oportunizando um conhecimento mais formal.

Ainda nos estudos de Piaget[21], um grande obstáculo no ensino da Matemática está

vinculado à sua simbologia, que muitas vezes pode ser introduzida de maneira incorreta pelos docentes, causando um bloqueio que pode desencadear no fracasso dos alunos. Piaget vincula toda inteligência do ser humano ao raciocínio lógico, que se desenvolve em interações com o meio desde seu nascimento. Desta forma a capacidade de aprendizagem dos alunos pode ser avaliada em outras áreas de conhecimento, mesmo sendo fruto do desenvolvimento do raciocínio lógico. Quando acontece a formalização dos estudos, no ambiente escolar, os alunos dependem dos atores que farão essa introdução segundo suas convicções, interferindo substancialmente nas crenças e habilidades dos estudantes. Acreditamos que este conjunto de obstáculos procura responder nossa questão de pesquisa que indagava sobre os principais obstáculos que tornam o tema combinatória pouco compreensível aos alunos.

Fizemos a aplicação das atividades que constam nos apêndices desta obra, à alunos do Ensino Fundamental do município de Cubatão. Trata-se da introdução de um tema que não consta na Educação Básica, teoria dos grafos, onde exploramos uma situação de contagem modelada pelo mapa de um Estado em construção. Aplicamos a mesma atividade à alunos do 6º e 9º anos para, à luz da teoria cognitiva de Piaget[21], analisarmos o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Na Atividade 1 pudemos observar um aproveitamento um pouco melhor dos alunos do 6ºano, onde diante de uma situação concreta conseguiram obter um pouco mais de êxito em relação à alunos do 9ºano, que estão vivenciando situações mais abstratas nesse nível de aprendizagem. Na hora de justificar o raciocínio percebeu-se que o 6ºano não conseguiu organizar um pensamento baseado em palavras, já que para isso os alunos deveriam converter a situação concreta para uma situação abstrata, ou seja, concatenar suas idéias com símbolos linguísticos.

Na Atividade 2 houve uma grande disparidade na quantidade de êxitos dos alunos do 6ºano em relação aos alunos do 9ºano. Além da quantidade de acertos, seis alunos que não haviam construído a quantidade mínima de estradas na Atividade 1, conseguiram realizar o sistema na Atividade 2, o que justifica que se deve priorizar o raciocínio e principalmente, a reflexão [21]. A Atividade 3 envolvia orçamento e exigiu dos alunos a tomada de uma estratégia que privilegiasse a escolha de estradas mais baratas, o que favoreceu ao 9ºano que está bem mais habituado à algoritmos e processos algébricos. O 6ºano continuou em sua estratégia mais concreta de primeiro montar o sistema de estradas para depois verificar o preço ou a viabilidade delas. Os argumentos também verificam uma maior habilidade dos alunos do 9ºano em justificar suas escolhas.

Na Atividade 4 propusemos uma situação concreta que exigia um certo grau abstração, pois a manipulação deveria ser feita segundo uma lógica em passar exatamente uma vez por cada estrada do Estado. Os resultados foram ligeiramente melhores para os alunos do 9ºano se analisarmos os itens separadamente. Quanto à atividade completa apenas um aluno do 9ºano conseguiu êxito, o que demonstra que a mescla entre o concreto e o abstrato

leva o aluno a acertos e erros dentro de um mesmo contexto. Portanto concordamos com Piaget[21] quando afirma que a inteligência humana é capaz de desenvolver o raciocínio operatório sem a reflexão de como isso ocorre.

Introduzimos também como questão de pesquisa se a introdução do tema combinatória apenas no 2º ano do Ensino Médio seria suficiente para sua compreensão. Conforme citamos no segundo parágrafo destas considerações finais, a abordagem dos assuntos de forma cíclica contribui na consolidação dos tópicos matemáticos. Também verificamos na pesquisa de Borba[9] que utilizando o método de resolução de problemas, é possível incluir no Ensino Fundamental temas que vão além do princípio multiplicativo, como arranjos, permutações e combinações. Diante disso, entendemos que as técnicas de contagem introduzidas gradualmente desde os anos iniciais do Ensino Fundamental poderão contribuir em estudos futuros, no Ensino Médio, como na própria formalização da combinatória, probabilidades e estatística. As atividades aqui propostas não demandam um tempo extra para sua execução, podendo serem trabalhadas em conteúdos pertencentes ao currículo escolar atual. Acreditamos que a introdução de noções iniciais do princípio de Dirichlet e da teoria dos grafos pode estimular uma organização do pensamento, sem vincular o estudo da Matemática a uma ciência que explora a simples decisão de qual fórmula é mais conveniente para o caso.

Referências Bibliográficas

- [1] ACZEL, A. D. *Quais são suas chances?* Rio de Janeiro, 2004.
- [2] BORGES, M. C., AQUINO, O. F., AND PUENTES, R. V. Formação de professores no brasil: História, políticas e perspectivas. In *Revista HISTEDBR online, Campinas, n.42, p.94-112, jun 2011 - ISSN: 1676-2584*.
- [3] BRASIL, S. D. E. F. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília, 1998.
- [4] CAJORI, F. *Uma História da Matemática*. Rio de Janeiro, 2007.
- [5] CARAÇA, B. D. J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa, 1951.
- [6] CARVALHO, P. C. P., LIMA, E. L., MORGADO, A. C., AND WAGNER, E. *A Matemática do Ensino Médio - Volume 1*. Rio de Janeiro, 1997.
- [7] CARVALHO, P. C. P., LIMA, E. L., MORGADO, A. C., AND WAGNER, E. *A Matemática do Ensino Médio - Volume 2*. Rio de Janeiro, 2009.
- [8] DE CUBATÃO, P. M. *Disponível em: www.cubatao.sp.gov.br*. Acesso em 13 de outubro de 2014.
- [9] DE SOUZA ROSA BORBA, R. E. O raciocínio combinatório na educação básica. In *X Encontro Nacional de Educação Matemática. Educação Matemática, Cultura e Diversidade* (Julho 2010), SBEM.
- [10] EVES, H. *Introdução à história da Matemática*. Campinas, 2011.
- [11] FEOFILOFF, P., KOHAYAKAWA, Y., AND WAKABAYASHI, Y. Uma introdução sucinta à teoria dos grafos. Master's thesis, Universidade de São Paulo - USP, 2011.
- [12] GATTI, B. A. *Professores do Brasil: impasses e desafios*. Brasília, 2009.
- [13] GUIRADO, J. C., AND CARDOSO, E. Análise combinatória: da manipulação à formalização de conceitos. In *Anais do IX encontro paranaense de educação matemática* (2007).

- [14] HAZZAN, S. *Fundamentos de Matemática Elementar Vol.5*. São Paulo, 2005.
- [15] HEFEZ, A. *Elementos de Aritmética*. Rio de Janeiro, 2011.
- [16] MAOR, E. *e: A História de um Número*. Rio de Janeiro, 2006.
- [17] MORGADO, A. C., DE CARVALHO, J. B. P., CARVALHO, P. C. P., AND FERNANDEZ, P. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro, 2006.
- [18] NETO, A. C. M. *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 4 - Combinatória*. Rio de Janeiro, 2012.
- [19] OLIVEIRA, K. I. M., AND FERNANDEZ, A. J. C. *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções*. Rio de Janeiro, 2012.
- [20] PALANGANA, I. C. *Desenvolvimento e aprendizagem em Piaget e Vygotsky*. São Paulo, 2001.
- [21] PIAGET, J. *Psicologia e pedagogia*. Rio de Janeiro, 1969.
- [22] R.JAMES, B. *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. Rio de Janeiro, 2008.
- [23] SAVIANI, D. Formação de professores no brasil: Dilemas e perspectivas. In *Poíesis Pedagógica V.9, N.1 jan/jun.2011; pp.07-19*.

Apêndice A

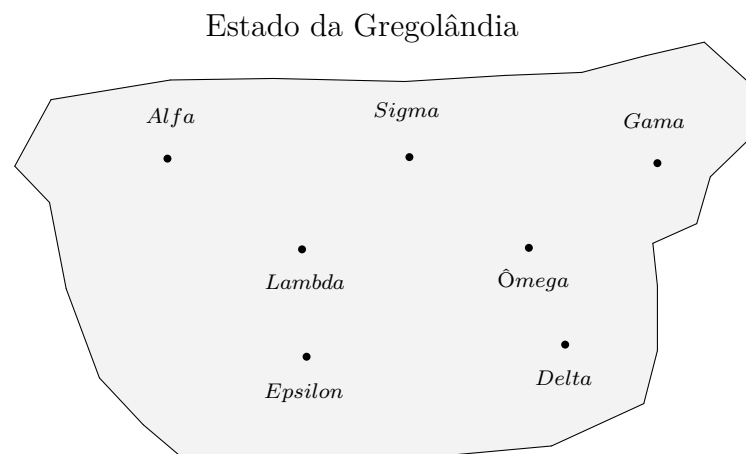
Construindo estradas - Parte 1

Prof. Marcelo - Atividades com o Estado da Gregolândia.

Nome: _____ N° _____ Data: _____ Classe: _____

Atividade 1 - Construindo estradas - Parte 1

Caro aluno. O Estado de Gregolândia acabou de ser criado e possui sete cidades conforme o mapa abaixo. A comunidade local vivia nos moldes antigos, subsistindo da produção de seus próprios alimentos, construindo suas próprias moradias, confeccionando suas próprias roupas, etc. Esse paraíso começou a se desenvolver e não resistiu à globalização. O resultado nas urnas elegeu você como o primeiro governador. Trata-se de um Estado muito bonito com belas paisagens e está havendo uma procura muito grande por pessoas que adoram estar em contato com a natureza. São empresários, pequenos agricultores, comerciantes, enfim, pessoas com diversas atividades. Você enfrentará um governo bem difícil, afinal é o primeiro de todos na história de Gregolândia. Sua primeira missão é construir um sistema de estradas que seja capaz de ligar todas as cidades, mesmo que para isso seja preciso passar por outras cidades para chegar ao destino. Lembre-se que você possui poucos recursos financeiros, então o número de estradas deve ser o menor possível. Considere um traço de uma cidade qualquer à outra como uma estrada. Caso em seu projeto duas estradas se cruzem elas não terão alça de acesso, ou seja, não é possível passar de uma estrada à outra. Agora pegue um lápis e faça seu projeto com traços que representarão as estradas que você pretende construir.



- a) Quantas estradas você precisou construir?
b) Você tem certeza que essa é a menor quantidade de estradas possível? Por que?

Observações:

Confira se é possível se locomover de qualquer cidade para outra.

Confira se não dá para reduzir o número de estradas do seu projeto.

Apêndice B

Construindo estradas - Parte 2

Prof. Marcelo - Atividades com o Estado da Gregolândia.

Nome:

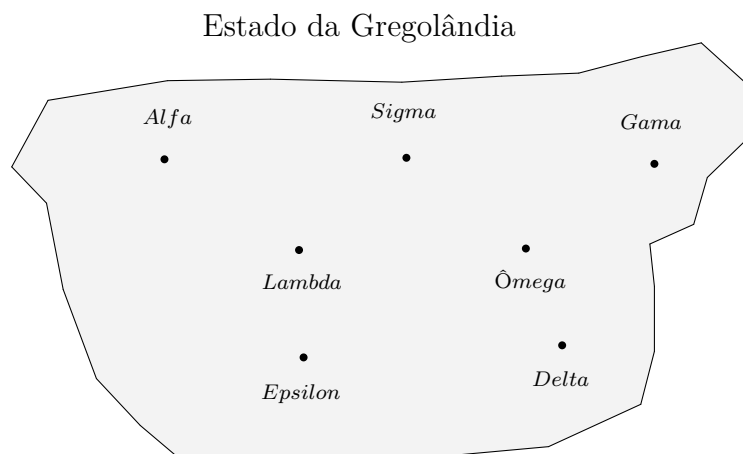
Nº

Data:

Classe:

Atividade 2 - Construindo estradas - Parte 2

Caro governador. Seria possível construir um sistema de estradas com a mesma quantidade da atividade anterior em que, para se locomover de uma cidade para outra os moradores passem, no máximo, por uma cidade que não seja a destino? Pegue seu lápis novamente e tente construí-lo no mapa abaixo.



- Você conseguiu produzir esse sistema de estradas?
- Qual estratégia você utilizou ou tentou utilizar para conseguir esse sistema?
- Esse novo sistema de estradas pode ajudar na locomoção da população? Por que?

Apêndice C

Construindo estradas - Parte 3

Prof. Marcelo - Atividades com o Estado da Gregolândia.

Nome: _____ N° _____ Data: _____ Classe: _____

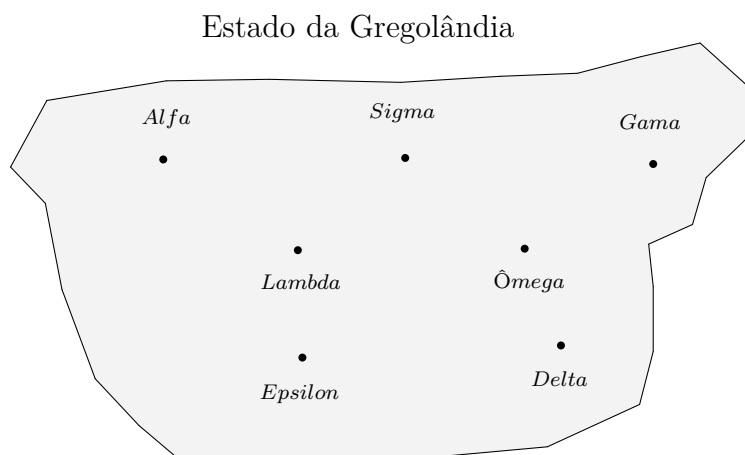
Atividade 3 - Construindo estradas - Parte 3

Caro governador. Construir estradas não é algo tão simples como parece. No papel parece fácil mas não podemos esquecer que condições climáticas e geográficas podem inviabilizar a construção de alguma delas. Fizemos uma licitação para contratar a empresa que será responsável pela construção das estradas. A vencedora foi a Construtora Egípcia Ltda. Tenho a honra de lhe apresentar o custo de cada uma das estradas do Estado de Gregolândia e agora sua missão é desenhar o projeto que:

Ligue todas as cidades de Gregolândia.

Tenha o menor número possível de estradas.

Tenha o menor preço.



Cidade 1	Cidade 2	Custo de produção (\$)
Alfa	Sigma	3.000.000
Alfa	Lambda	2.700.000
Alfa	Epsilon	3.000.000
Alfa	Gama	inviável
Alfa	Ômega	3.300.000
Alfa	Delta	inviável
Sigma	Lambda	2.700.000
Sigma	Epsilon	3.300.000
Sigma	Gama	3.300.000
Sigma	Ômega	2.700.000
Sigma	Delta	3.300.000
Gama	Lambda	inviável
Gama	Epsilon	inviável
Gama	Ômega	2.700.000
Gama	Delta	3.000.000
Ômega	Lambda	2.700.000
Ômega	Epsilon	3.000.000
Ômega	Delta	inviável
Delta	Lambda	3.000.000
Delta	Epsilon	3.000.000
Epsilon	Lambda	2.700.000

- a) Quanto custará o seu sistema de estradas?
- b) Ele é o sistema mais barato de todos? Por que?
- c) O sistema de estradas que você está propondo irá agradar toda a população? Por que?
- d) Vale a pena gastar um pouco mais para construir um sistema de estradas mais justo com toda população?

Apêndice D

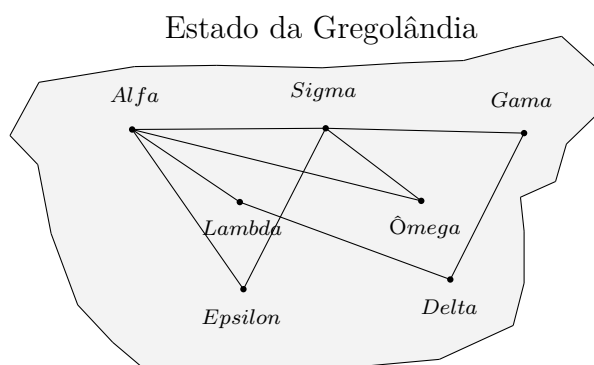
Passeando pelas estradas

Prof. Marcelo - Atividades com o Estado da Gregolândia.

Nome: _____ N° _____ Data: _____ Classe: _____

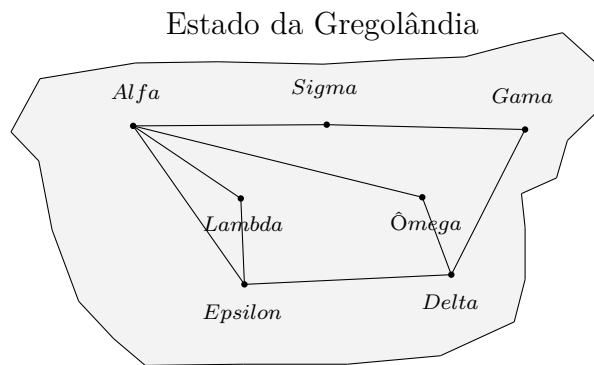
Atividade 4 - Passeando pelas estradas

As estradas de Gregolândia ficaram muito lindas, com paisagens exuberantes e vários mirantes. Por conta disso, um atrativo turístico do Estado de Gregolândia é conhecer suas cidades passando exatamente uma vez em cada estrada, nem que para isso tenha que passar duas ou mais vezes pela mesma cidade. O importante mesmo é conhecer todas as estradas sem repetí-las, visto ser um Estado bem extenso e o preço da gasolina está bem salgado. O sistema abaixo possui 9 estradas e as identificaremos utilizando as iniciais das cidades que as ligam. Por exemplo, se você se referir à estrada que liga *Alfa* a *Sigma* utilize a notação AS. Você é capaz de elaborar um roteiro que atenda os requisitos acima iniciando o trajeto em uma cidade qualquer e terminando-o na mesma cidade?



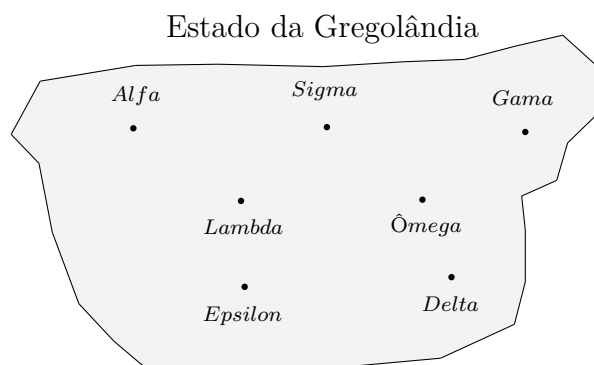
ROTEIRO: { _____ , _____ , _____ , _____ , _____ , _____ , _____ , _____ , _____ }

Veja agora um novo sistema com 9 estradas. Tente elaborar um roteiro turísticos com os mesmos critérios do sistema anterior.



ROTEIRO: { , , , , , , , , }

- a) Você conseguiu elaborar um roteiro para os dois sistemas com 9 estradas?
- b) Em sua opinião, qual é a diferença entre os dois sistemas, visto que eles possuem a mesma quantidade de estradas?
- c) Caso não tenha conseguido o roteiro em algum dos sistemas de estradas, proponha alguma mudança que viabiliza o roteiro (Exemplo: Mudar uma estrada de posição, retirar uma ou mais estradas, etc).



- d) Você conseguiu? Por que você acha que sua alteração obteve sucesso?