UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUACÃO
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL

JANDERSON MATRICARDI DE SOUZA

A ABORDAGEM DE CONCEITOS DE PROPORCIONALIDADE SOB A ÓTICA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

CAMPO GRANDE – MS
NOVEMBRO DE 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUACÃO
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL

JANDERSON MATRICARDI DE SOUZA

A ABORDAGEM DE CONCEITOS DE PROPORCIONALIDADE SOB A ÓTICA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

ORIENTADOR: Prof. Dr. EDSON RODRIGUES CARVALHO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática – INMA/UFMS, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre.

CAMPO GRANDE – MS
NOVEMBRO DE 2014

A ABORDAGEM DE CONCEITOS DE PROPORCIONALIDADE SOB A ÓTICA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

JANDERSON MATRICARDI DE SOUZA

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Matemática, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela Banca Examinadora:

Prof. Dr. Edson Rodrigues Carvalho - UFMS

Prof. Dr. Claudemir Aniz - UFMS

Prof. Dr. Marco Aparecido Queiroz Duarte - UEMS

CAMPO GRANDE – MS
NOVEMBRO DE 2014

A minha querida esposa,

Nathaly.

DEDICO

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por todas as bênçãos e conquistas proporcionadas em minha vida.

A minha querida esposa pelo carinho, compressão, paciência e incentivo.

A toda a minha família, em especial aos meus pais Maria e Valdenir.

Aos professores do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, em especial ao professor Edson, pela orientação e suporte no desenvolvimento deste trabalho.

Enfim, a todos que de alguma forma contribuíram para o enriquecimento de meus conhecimentos.

RESUMO

Neste trabalho, a técnica de resolução de problemas é apresentada visando despertar a atenção dos professores de matemática do ensino básico como sendo um ponto central para o desenvolvimento dos conteúdos curriculares. Enfatiza-se que esta técnica é uma alternativa a forma tradicional de ensino dos conteúdos curriculares. A metodologia da resolução de problemas é apresentada e, com intuito de auxiliar os professores da educação básica, foram abordados conceitos de proporcionalidade, sob a ótica da resolução de problemas, mediante os seguintes tópicos: grandezas diretamente proporcionais, divisão em partes proporcionais, porcentagem, grandezas inversamente proporcionais e grandezas direta ou inversamente proporcionais a várias outras. Cada tópico é trabalhado a partir de uma situação-problema, utilizando uma sequência de etapas essenciais ao ensino de matemática através da técnica de resolução de problemas.

Palavras-chave: Resolução de Problemas, Situação-Problema, Proporcionalidade.

ABSTRACT

In this work, the technique of problem solving is presented seeking to awaken the attention of mathematics teachers of basic education as a central point for the development of curricula. It was emphasized that this technique is an alternative to the traditional teaching curriculum content. The methodology of problem solving is presented and, in order to assist teachers in basic education it is addressed concepts of proportionality, from the perspective of problem solving through the following topics: directly proportional quantities, division into proportional parts, percentages, quantities inversely proportional and directly or inversely proportional to several other quantities. Each topic is crafted from a problem situation using a sequence of essential steps to teaching mathematics through problem solving technique.

Keywords: Problem Solving, Problem-Situation, Proportionality.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

1. INTRODUÇÃO

É de extrema importância destacar que não existe uma metodologia que possa ser identificada como única e melhor para o ensino de matemática. No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor atinja seus objetivos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam que a metodologia adotada para o ensino de matemática na maioria das escolas é a tradicional. Nela, o conteúdo é apresentado, geralmente, oralmente ou no quadro negro, seguindo esse roteiro: definições, exemplos, demonstrações de propriedades seguidas de exercícios de aprendizagem, fixação e aplicação (BRASIL, 1998). É importante observar que essa organização é adotada pela maioria dos livros didáticos de matemática. Dessa forma, tanto professores quanto autores de livros didáticos contribuem para dar continuidade na ideia de apresentar aos alunos os conteúdos de ensino como cópias fiéis dos objetos matemáticos. Ideia que já é bastante ultrapassada nas pesquisas em ensino de matemática, mas persiste fortemente em nossas escolas.

A forma tradicional de ensinar matemática certamente funciona para alguns alunos, mas não para a grande maioria. Os Parâmetros Curriculares Nacionais afirmam que "o ensino de matemática ainda é marcado pelos altos índices de retenção, pela formalização precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão", em que a organização dos conteúdos matemáticos, quase sempre é feita de modo excessivamente hierarquizada (BRASIL, 1998, p. 19). Uma das razões de se expor os conteúdos dessa forma é encontrada na própria forma tradicional de ensino (definições, exemplos, demonstrações, etc.). Já que uma vez adotado o método expositivo de ensino, organizar os conteúdos de forma hierarquizada facilita em muito o trabalho do professor (e de autores de muitos livros didáticos), que podem dar definições ou demonstrações curtas com base em conceitos, demonstrações ou mesmo outras definições dadas em aulas passadas, mas que muitas vezes já não estão tão vivas nos alunos. Outra razão é a tentativa de ensinar a alunos do ensino fundamental e médio uma matemática logicamente estruturada que só foi conseguida depois de séculos de trabalho de inúmeros pesquisadores profissionais. Outro aspecto dessa metodologia de ensino que merece atenção é a mecanização de fórmulas e algoritmos sem compreensão. Assim, a reprodução por parte do aluno significa compreensão. Mas, na realidade ele apenas aprendeu a reproduzir, sendo incapaz de utilizar o conteúdo em outras situações.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais defendem que em contrapartida à simples reprodução de procedimentos e ao acúmulo de informações, a resolução de problemas é apontada, por educadores matemáticos, como ponto de partida da atividade matemática. A resolução de problemas deve ser utilizada como uma orientação para aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode aprender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas (BRASIL, 1998).

> A situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las (BRASIL, 1998, p. 40);

O Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) foi criado com o objetivo de avaliar o desempenho do estudante ao fim da educação básica, buscando contribuir para a melhoria da qualidade desse nível de escolaridade. A partir de 2009 passou a ser utilizado também como mecanismo de seleção para o ingresso no ensino superior. A situação-problema é um dos eixos estruturadores do Enem. Neste exame, o estudante tem que selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema (INEP, 2014).

Este trabalho tem como objetivo geral despertar a atenção dos professores de matemática do ensino básico para a técnica de resolução de problemas como sendo um ponto central para o desenvolvimento dos conteúdos curriculares e aplicar esta técnica ao conteúdo proporcionalidade. Para atingir este objetivo geral, os seguintes procedimentos específicos serão desenvolvidos:

1. Definição da metodologia de resolução de problemas.

2. Abordagem de conceitos de proporcionalidade, a partir de situações-problema, utilizando uma sequência de etapas relativas ao método de resolução de problemas.

3. Apresentação de outras situações-problema que podem ser utilizadas no desenvolvimento e no ensino de conceitos de proporcionalidade.

2. A METODOLOGIA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A resolução de problemas como um método de ensino dos conteúdos matemáticos, tem sido recomendada por muitos educadores. A literatura contém muitos elementos descritivos do que deve ser incluído no processo de resolução de problemas, mas não define e exemplifica, em termos práticos, como uma aula de algum conteúdo matemático possa ser desenvolvida. Além disso, a literatura é vaga quanto ao arranjo sistemático destes elementos, de modo que um professor em sala de aula, normalmente, tem dificuldades em conduzir uma classe por meio da abordagem de resolução de problemas.

A revisão da literatura revela que o método de resolução de problemas é, em geral, um arranjo de processos ou etapas específicas, e identificadas por alguns como um método científico.

O QUE É UM PROBLEMA?

Para Ferreira (2004), problema pode ser caracterizado como questão não resolvida ou de difícil solução. Acrescenta, ainda, que problema matemático pode ser definido como questão matemática proposta, para que se lhe dê uma solução.

Segundo Dante (2007, p. 9-10), problema "é qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la". Ou, ainda, "problema matemático é qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la". Acrescenta Dante (2007) que a resolução de problemas matemáticos proporciona os seguintes benefícios: permite aos alunos aplicar e obter novos conhecimentos aumentando sua base matemática, estimula o aluno a enfrentar situações novas, desenvolve nos alunos a versatilidade, raciocínio e habilidade para lidar com tipos variados de problemas e torna as aulas de matemática mais interessantes e desafiadoras.

Mongelli (2008, p. 12) descreve que "certamente não podemos considerar como problemas situações que resolvemos facilmente, usando quase que somente a memória, procedimentos automatizados ou seguindo modelo algorítmico previamente fornecido".

Assim, com base nestes depoimentos, podemos concluir que uma situação para ser caracterizada como um problema necessita que o resolvedor esteja consciente da situação, esteja interessado em resolvê-la e não tenha elementos imediatos para ataca-la diretamente.

Segundo Branca (1997, p. 10), “resolver problemas é o processo de aplicação de conhecimentos previamente adquiridos em situações novas e desconhecidas”.

> Resolver um problema é encontrar um caminho onde nenhum outro é conhecido de antemão, encontrar um caminho a partir de uma dificuldade, encontrar um caminho que contorne um obstáculo, para alcançar um fim desejado, mas não alcançável imediatamente por meios adequados (POLYA, 1997, p.1*)*.

Segundo Polya (1978), na resolução de qualquer problema de matemática deveriam ocorrer quatro etapas:

Primeira etapa: compreensão do problema. Primeiramente é preciso compreender o problema. Trace uma figura. Adote uma notação adequada.

Segunda etapa: estabelecimento de um plano. Encontre a conexão entre os dados e a incógnita. É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma conexão imediata. É preciso chegar afinal a um plano para resolução.

Terceira etapa: Execução do plano. Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?

Quarta etapa: retrospecto. Examine a solução obtida. É possível verificar o resultado? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível utilizar o resultado, ou método, em algum outro problema?

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A resolução de problemas pode ser estudada de três maneiras diferentes: ensinar sobre resolução de problemas; ensinar a resolver problemas e ensinar matemática através da resolução de problemas. Embora essas abordagens sejam diferentes teoricamente, na prática nada impede que apareçam juntas (ONUCHIC, 1999). Cada uma das abordagens acima tem suas próprias consequências para o ensino de matemática.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais frisam que ao se ensinar matemática através da resolução de problemas o professor desempenha um papel fundamental. Cabe a ele atuar como organizador, facilitador, mediador, incentivador e avaliador do processo ensino-aprendizagem (BRASIL, 1998).

TIPOS DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Existem diversos tipos de problemas matemáticos, sendo que todos eles prestam bem a determinado propósito. Butts (1997) classifica os problemas matemáticos em cinco categorias:

Exercício de reconhecimento: um problema de matemática é um exercício de reconhecimento quando encontrar sua solução significa apenas lembrar ou reconhecer algum conceito ou ideia matemática específica. Relacionamos, abaixo, alguns exemplos:

Exemplo 1. Marque (V) para verdadeiro e (F) para falso:

( ) Um triângulo é dito escaleno quando possui seus três ângulos menores que um ângulo reto.

( ) A expressão $sen^2x + cos^2x = 1$ é verdadeira para todo x pertencente ao conjunto dos números reais.

( ) O ponto de encontro das alturas de um triângulo ou suas prolongações se chama baricentro.

Exemplo 2. Para todo valor de x pertencente ao conjunto dos números reais, $tg\ x = \frac{sen\ x}{\cos x}$?

Exemplo 3. Quais dos trios de ângulos abaixo podem ser ângulos internos de um triângulo isósceles:

a) $36°$, $36°$ e $108°$

b) $100°$, $50°$ e $30°$

c) $50°$, $50°$ e $100°$

É fácil perceber que para responder às questões acima basta se lembrar de algumas definições, propriedades ou teoremas.

Exercício algorítmico: Como bem indica o nome, um problema é um exercício algorítmico quando podemos chegar à sua solução aplicando um procedimento bem esquematizado, ou seja, um algoritmo. Acontece, frequentemente, de um aluno estar resolvendo determinado problema e recair numa equação do segundo grau e dizer Bháskara! Dessa forma, resolver uma equação do segundo grau já se tornou um exercício algorítmico. Outros exemplos de exercícios algorítmicos podem ser:

Exemplo 4. Encontre o quociente e o resto nas seguintes divisões polinômicas:

a) $3x^2 - x^2 + 2$ por $x - 2$.

b) $x^5 - x^3 + 15$ por $3x - 4$

c) $x^4 + 4x^2 + 2$ por $x + 2$

Exemplo 5. Verifique:

a) 2 é raiz de $p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$?

b) $-\frac{1}{2}$ é raiz de $q(x) = x^3 + x + 10$?

Nesses problemas a resposta correta é garantida apenas pela aplicação de determinado algoritmo.

Exercício de aplicação: este tipo de exercício é bastante frequente e conhecido. Observe o exemplo abaixo:

Exemplo 6. Jorge comprou uma casa e efetuará o pagamento em nove prestações crescentes de modo que a primeira prestação será 800 reais e cada uma das seguintes será o dobro da anterior. Então, qual será o valor que ele pagará pela casa?

O próprio problema diz as ferramentas que devem ser usadas para resolvê-lo na medida em que informa coisas como quantidade de prestações, relação entre prestações (uma prestação é o dobro da anterior), etc.

Butts (1997) afirma que a resolução de um problema de aplicação é formada por duas etapas:

- Formulação do problema simbolicamente;
- Manipulação dos símbolos mediante algoritmos diversos.

Veja alguns problemas matemáticos representantes dessa categoria:

Exemplo 7. No último levantamento havia, na fazenda de Sebastião, 3200 animais em seu rebanho, subdivididos em suínos, caprinos, bovinos e equinos. A quantidade de suínos era três quinto dos bovinos. Os caprinos superam os suínos em 140 cabeças. Subtraindo-se 300 cabeças do total de suínos, obtém-se a quantidade de cabeças de equinos. Assim, pode-se afirmar que, na fazenda de Sebastião, havia:

a) 600 cabeças de suínos

b) 400 cabeças de equinos

c) 1035 cabeças de suínos

d) 1200 cabeças de bovinos

e) 1000 cabeças de caprinos

Exemplo 8. João quer construir uma vela para jangada na forma de um triângulo retângulo, em que um dos ângulos mede 60° e o maior cateto mede 300 cm. Qual é a área da vela?

Não é difícil notar que a maioria dos problemas da matemática escolar pertence a uma dessas três categorias descritas.

Problemas de pesquisa aberta: são caracterizados por não oferecerem em seus enunciados muitas pistas para chegar a sua resolução. São problemas típicos do

Ensino Superior. Ainda segundo Butts (1997), eles iniciam-se por “Prove que...”, “Encontre todos...” ou “Para quais...” entre outras expressões semelhantes. Confira:

Exemplo 9. Prove que existem infinitos números primos.

Exemplo 10. Demonstre que $10^n - 1$ é sempre múltiplo de 3, para todo n pertencente ao conjunto dos números naturais.

Os problemas das diferentes categorias analisadas possuem uma característica em comum: eles são usados, geralmente, como forma de avaliar a aprendizagem de algum tópico ou conteúdo matemático já estudado pelos alunos. Assim, eles não têm muito interesse do ponto de vista de **ensinar matemática através da resolução de problemas**. Nessa perspectiva o que interessa são problemas que, na busca de sua solução, o aluno possa mesclar o que já aprendeu sobre matemática e sintetizar novos conhecimentos. Nesse contexto entram as **situações-problema**, que nas palavras de Butts (1997, p. 36), “não estão incluídos problemas propriamente dito, mas situações nas quais uma das etapas decisivas é identificar o(s) problema(s) inerente(s) à situação, cuja solução irá melhorá-la.” As situações-problema aparecem frequentemente nas tomadas de decisões, no planejamento de alguma coisa, etc. Observe essa situação:

Exemplo 11. Considere que, em Campo Grande-MS, existam duas empresas de táxis, sendo que, uma delas, a empresa A, cobra um valor fixo de R$ 8,00 com um acréscimo de R$ 2,80 por km rodado. Já a outra empresa B cobra um valor fixo de R$ 4,00 mais R$ 3,10 por km rodado.

Essa situação não é inicialmente um problema. Mas na medida em que tentamos dar respostas a questões como:

- Para uma corrida de 10 km qual empresa será conveniente?
- Em quais situações devemos usar a empresa A?
- Em quais situações devemos usar a empresa B?

- Existe alguma distância para a qual o preço da corrida seja o mesmo nas duas empresas?

ela se torna uma **situação-problema**.

Para o ensino de determinado tópico matemático através da resolução de problemas, primeiramente devem ser selecionados os problemas adequados, que como visto, são as situações-problema. Uma situação-problema será adequada ao ensino de determinado tópico se possuir em seu núcleo problemas cujas soluções e ajustes sucessivos, direcionados pelo professor, levam aos principais conceitos do tópico em questão. O que foi dito nas últimas linhas pode ser resumido nas seguintes palavras: o ensino-aprendizagem de um tópico matemático deve sempre começar com uma situação-problema que expresse aspectos-chave desse tópico e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis à situação-problema dada (ONUCHIC, 1999).

Uma das dificuldades de ensinar matemática através da resolução de problemas está ligada à carência de situações-problema adequadas a cada tópico de ensino. Nesse caso, a melhor saída é criar, sempre que possível, situações novas e inteligentes ou transformar inúmeros problemas de aplicação de livros didáticos em situações interessantes. A este respeito, Mongelli (2008, p. 14), destaca:

> O grande desafio do professor de matemática é o de encontrar problemas que sejam desafiadores, significativos para seus alunos e que favoreçam a aprendizagem de conteúdos matemáticos. Para isso, muitas vezes, ele terá que fazer reformulações de enunciados e formular outros problemas a partir de um problema dado. No trabalho pedagógico do professor em sala de aula, tão importante quanto resolver problemas é formular (enunciar) problemas adequados para alunos de cada contexto particular.

O ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas não consiste apenas em criar situações-problema interessantes e motivadoras e apresentá-las aos alunos. Essa, na verdade, é a parte inicial no ensino de um tópico através dessa metodologia. Ao selecionar as atividades adequadas (situações-problema) para o ensino de determinado tópico, o professor está atuando como um **organizador** do ensino, na medida em que essas atividades devem estar mais ou menos hierarquizadas de forma a possibilitarem a construção de conhecimento nos alunos. No processo de busca de respostas adequadas às situações-problema, os alunos vão se deparar com questões intermediárias que muitas vezes não conseguirão resolver sozinhos. Nesse momento, o professor deve ser um **facilitador** auxiliando-os no que for preciso e, muitas vezes, até mesmo resolvendo esses problemas intermediários ou fazendo perguntas adequadas que os levem à resolução desses subproblemas.

No momento da apresentação das soluções encontradas pelos alunos, que geralmente serão diferentes umas das outras, o professor será um **mediador** no debate entre os alunos que tentarão justificar suas respostas ao mesmo tempo em que poderão contestar as soluções de seus colegas. Nesse debate, o professor deverá aproveitar as partes das soluções dos alunos e assim construir e formalizar os novos conteúdos e conceitos.

Todo processo de ensino-aprendizagem tem como consequência um processo de avaliação que também toca ao professor realizá-lo. Assim, o professor deverá utilizar de algum método de avaliação para constatar o que foi conseguido e, com base nisso, reajustar alguns pontos no processo ensino-aprendizagem.

O próximo modelo descrito é bastante atual, sendo elaborado com base em experiências de professores e em modelos anteriores. De acordo com Onuchic (1999, p. 216), para ensinar matemática através da resolução de problemas devemos obedecer a 7 etapas:

1ª etapa: Formar grupos e entregar uma atividade.

> Lembrar que, no mundo real, aprender é muitas vezes um processo compartilhado e que o progresso em direção a um objetivo vem através de esforços combinados de muita gente. É preciso que os estudantes experimentem este processo cooperativo e que se lhes dê a oportunidade de aprender uns com os outros. Sentimos que muita da aprendizagem em sala de aula será feita no contexto de pequenos grupos.

2ª etapa: O papel desempenhado pelo professor

> Dentro desse trabalho, o papel do professor muda de comunicador de conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador e incentivador da aprendizagem. O professor lança questões desafiadoras e ajuda os alunos a se apoiarem, uns nos outros, para atravessar as dificuldades. O professor faz a intermediação, leva os alunos a pensar, espera que eles pensem, dá tempo para isso, acompanha suas explorações e resolve, quando necessário, problemas secundários.

3ª etapa: Apresentação dos resultados na lousa. “Com o trabalho dos alunos terminado, o professor anotaria na lousa os resultados obtidos pelos diferentes grupos. Anota resultados certos, errados e aqueles feitos por diferentes caminhos”.

4ª etapa: Realização de plenária onde o professor deve chamar todos os alunos, de todos os grupos, para uma assembleia plena. Como todos trabalharam sobre o problema dado, estão ansiosos quanto a seus resultados. Procuram defender seus pontos de vista e participam.

5ª etapa: Realização de análise dos resultados

> Nesta fase, os pontos de dificuldades encontrados pelos alunos são novamente trabalhados. Surgem, outra vez, problemas secundários que, se não resolvidos, poderão impedir que se leve o trabalho a frente. O aspecto exploração é bastante importante nessa análise.

6ª etapa: Buscar um consenso. “A partir da análise feita, com a devida retirada das dúvidas, busca-se um consenso sobre o resultado pretendido”.

7ª etapa: Formalizar os resultados

> Num trabalho conjunto de professor e alunos, com o professor dirigindo o trabalho, é feita uma síntese do que se objetivava aprender a partir do problema dado. São colocadas as devidas definições, identificadas às propriedades e feitas às demonstrações. É importante destacar, nesse momento, o que de matemática nova se construiu, usando as novas terminologias próprias ao assunto.

CONCLUSÃO

Podemos inferir do modelo descrito por Onuchic (1999, p. 216) que as etapas por ela estabelecidas seriam apenas diretivas parciais, se não houver a preocupação em definir o papel de ambos, professor e aluno, dentro de cada etapa, isto é, responder às duas questões seguintes:

- Qual é a responsabilidade do professor?
- Que resposta é esperada do aluno?

Como mencionado no início deste capítulo, este arranjo sistemático de etapas para o desenvolvimento de uma atividade em sala de aula, nem sempre é claro e depende sobremaneira do tipo de problema selecionado, do tempo necessário para sua execução, da resposta do aluno e do compromisso e da experiência do professor. Finalmente, podemos sugerir, conforme Hermanowicz (1961) cinco etapas que permitem a utilização do método de resolução de problemas, como segue:

- Etapa 1: Identificar o problema.
- Etapa 2: Analisar o problema e coletar informações sobre o mesmo.
- Etapa 3: Selecionar uma ou mais hipóteses.
- Etapa 4: Testar as hipóteses selecionadas.
- Etapa 5: Chegar a uma conclusão a respeito do problema.

Esta sequência de etapas permite ao professor utilizar o método, tanto para ensinar a resolver problemas, quanto para ensinar matemática por meio da resolução de problemas. É preciso observar, entretanto, que no primeiro caso, deve ficar explícito o conceito “O que é um problema” e, no segundo caso, a participação mais intensa do professor e do aluno, como referenciado nas sete etapas descritas por Onuchic (1999, p. 216).

3. PROPORCIONALIDADE

Muitas situações da vida cotidiana funcionam de acordo com leis de proporcionalidade e o desenvolvimento do raciocínio proporcional é muito útil na interpretação de fenômenos do mundo real. Para Gigante e Santos (2012), a proporcionalidade está presente no dia a dia das pessoas em diversas situações, tais como: interpretação de mapas, planta de uma casa, ampliação de uma foto, receita de um bolo, leitura de gráficos em jornais, estimativas de preços, e em muitas outras situações. Gigante e Santos (2012, p. 44) ainda destacam:

> Por ser um conceito estruturante do currículo de matemática do ensino fundamental, a proporcionalidade se apoia na estrutura multiplicativa e faz conexões entre o pensamento algébrico, o aritmético, o geométrico e o estatístico probabilístico. O pensamento proporcional é desenvolvido desde a escola infantil, a partir de atividades que possibilitem comparar razões e resolver situações-problema que tratam de proporções. Os conceitos de razão e proporção estão relacionados à porcentagem, à semelhança, à escala, à inclinação e à probabilidade, entre outros.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais relatam que um dos objetivos de matemática para o terceiro ciclo do ensino fundamental é visar o desenvolvimento do raciocínio que envolva a proporcionalidade, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a observar a variação entre grandezas, estabelecendo relação entre elas e construir estratégias de solução para resolver situações que envolvam a proporcionalidade (BRASIL, 1998). Para o quarto ciclo do ensino fundamental os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam que o ensino de matemática deve visar o desenvolvimento do raciocínio proporcional através da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

> Representar em um sistema de coordenadas cartesianas a variação de grandezas, analisando e caracterizando o comportamento dessa variação em diretamente proporcional, inversamente proporcional ou não-proporcional;
> Resolver situações-problema que envolvam a variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais, utilizando estratégias não-convencionais e convencionais, como as regras de três (BRASIL, 1998, p. 82).

Neste capítulo, conceitos de proporcionalidade serão abordados, obedecendo as cinco etapas sugeridas por Hermanowicz: (1) identificar o problema, (2) analisar o problema e coletar informações sobre o mesmo, (3) selecionar uma ou mais hipóteses, (4) testar as hipóteses selecionadas e (5) chegar a uma conclusão a respeito do problema. Em cada etapa, apenas será indicada uma diretriz do significado da mesma, cabendo ao professor estabelecer a didática necessária para sua utilização.

SITUAÇÃO-PROBLEMA 1

Pedro, João e Tiago são irmãos e estão planejando comprar juntos, um sítio de 30 hectares, por 150.000 reais. A divisão do sítio será proporcional ao valor colaborado por cada irmão.

a) Quantos hectares do sítio cada um dos três irmãos deve receber se cada um colaborar com 50.000 reais?

b) Quantos hectares do sítio cada um dos três irmãos deve receber se Pedro colaborar com 75.000 reais e seus dois irmãos com 37.500 reais cada um?

SITUAÇÃO-PROBLEMA 2

Os três irmãos efetuaram a compra do sítio de 30 hectares da seguinte maneira: Pedro colaborou com 65.000 reais, João com 55.000 reais e Tiago com 30.000 reais. Quantos hectares do sítio cada um dos três irmãos deve receber se a divisão do sítio for proporcional ao valor colaborado por cada irmão?

SITUAÇÃO-PROBLEMA 3

Após a divisão do sítio entre Pedro, João e Tiago, Pedro plantou cana-de-açúcar em 60% da área do seu sítio. Sabendo que de uma plantação de 1,5 hectares, em média, se colhe 105 toneladas de cana-de-açúcar, quantas toneladas de cana-de-açúcar Pedro extrairá de toda sua plantação?

SITUAÇÃO-PROBLEMA 4

Periodicamente Tiago realiza uma limpeza mecanizada de 3,6 hectares de seu sítio contratando 2 tratores que trabalhando juntos num mesmo ritmo, geralmente levam 21 horas para concluir o serviço. Desta vez Tiago precisa que a limpeza mecanizada das 3,6 hectares do sítio seja concluída em 6 horas. Quantos tratores Tiago deverá contratar?

SITUAÇÃO-PROBLEMA 5

João produziu em sua parte do sítio 756 toneladas de cana-de-açúcar. Quantos cortadores de cana-de-açúcar que trabalharão 6 horas por dia João deverá contratar para realizar toda a colheita em uma semana, sabendo que em média cada cortador colhe 288 toneladas de cana-de-açúcar em 30 dias, trabalhando 8 horas por dia?

3.1. GRANDEZAS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

Nesta seção, a situação-problema 1 é utilizada como ponto de partida na abordagem dos conceitos de grandezas diretamente proporcionais.

SITUAÇÃO-PROBLEMA 1

Pedro, João e Tiago são irmãos e estão planejando comprar juntos, um sítio de 30 hectares, por 150.000 reais. A divisão do sítio será proporcional ao valor colaborado por cada irmão.

a) Quantos hectares do sítio cada um dos três irmãos deve receber se cada um colaborar com 50.000 reais?

b) Quantos hectares do sítio cada um dos três irmãos deve receber se Pedro colaborar com 75.000 reais e seus dois irmãos com 37.500 reais cada um?

Etapa1: Identificação do problema

Esta situação-problema destaca que os três irmãos, Pedro, João e Tiago estão planejando gastar, no total, 150.000 reais para comprarem um sítio, de tal modo que a divisão do sitio de 30 hectares, entre os três, será proporcional ao valor que cada um investirá na compra. A Figura 1 mostra a área integral do sítio, supostamente retangular.

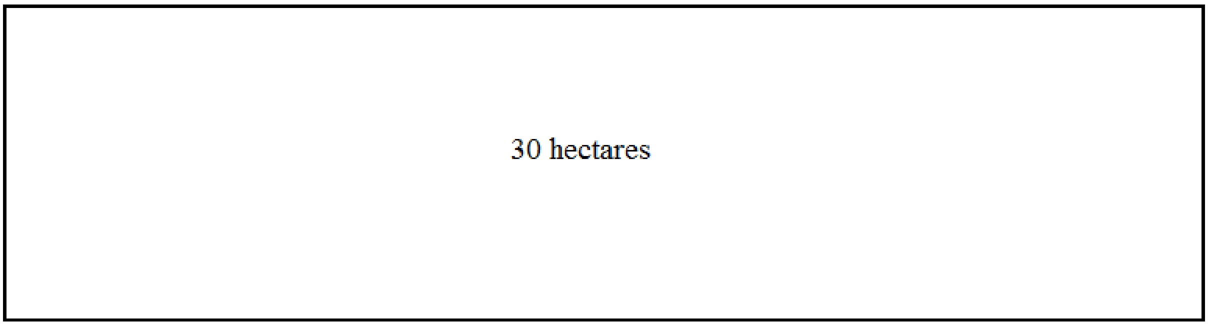


Figura 1: Delimitação do sítio de 30 hectares

Como a divisão do sítio será proporcional ao valor investido por cada irmão, podemos ter as seguintes situações, em termos geométricos, correspondentes às colaborações de cada irmão (Figura 2, Figura 3 e Figura 4):

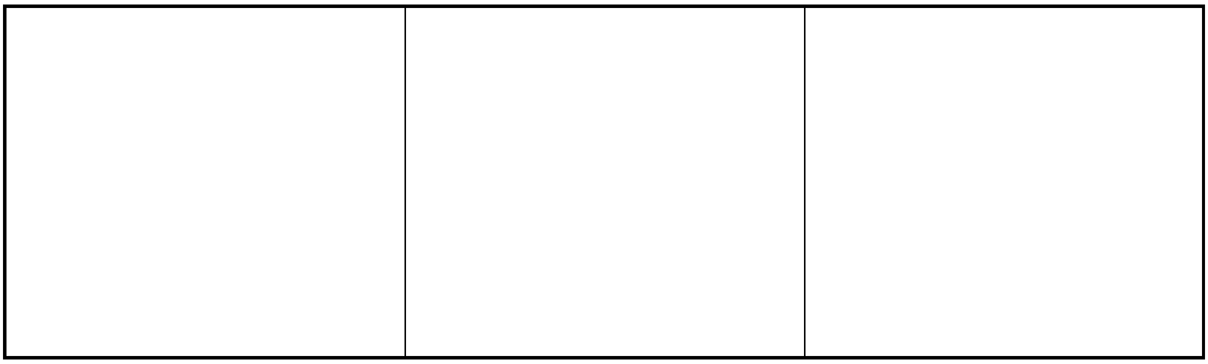


Figura 2: Área do sítio dividida em três partes iguais

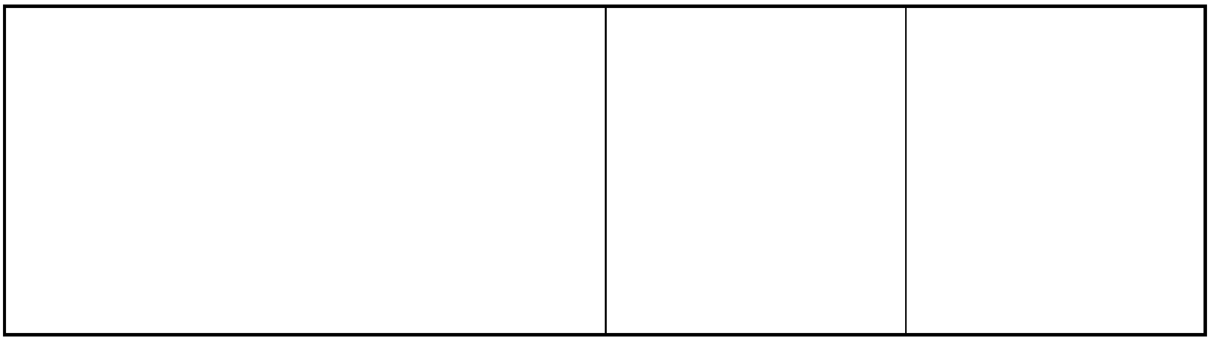


Figura 3: Área do sítio dividida em duas partes iguais e uma diferente

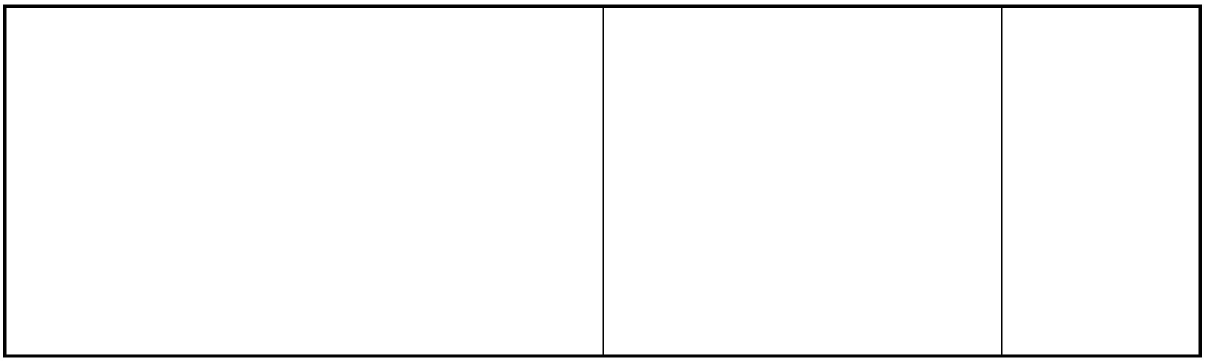


Figura 4: Área do sítio dividida em três partes diferentes

Etapa 2: Analisar e coletar informações do problema

A situação-problema 1 afirma que a divisão do sítio será proporcional ao valor colaborado. Isto significa que quem colaborar mais na compra do sítio terá uma área maior, quem colaborar menos ficará com uma área menor e colaborações iguais resultarão em divisões do sítio em partes iguais. No **item a** da situação-problema 1, temos que cada irmão deseja colaborar igualmente com 50.000 reais. Portanto, cada irmão, Pedro, João e Tiago, devem receber 10 hectares do sítio. A Figura 5 exibe a área do sítio dividida em três partes iguais.

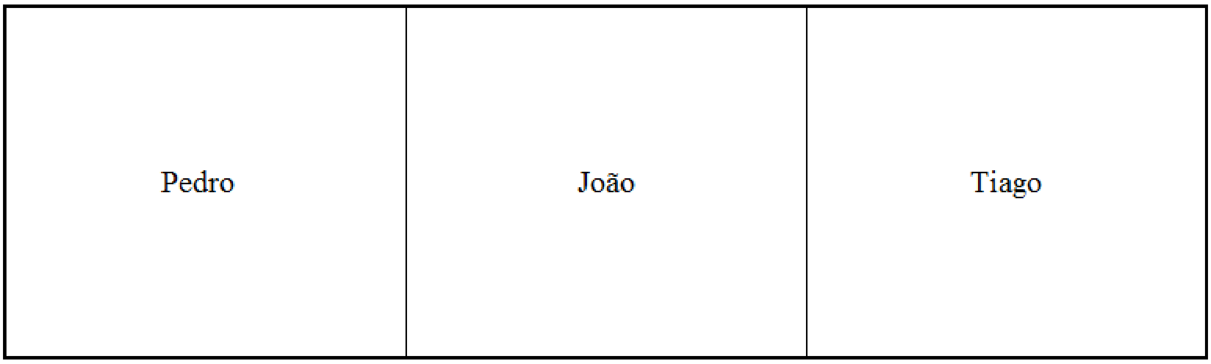


Figura 5: Área do sítio dividida em três partes iguais

Observe que o **item a** da situação-problema 1 foi resolvido, utilizando apenas duas etapas do método de resolução de problemas.

Vamos examinar agora **o item b** da situação-problema 1:

SITUAÇÃO-PROBLEMA 1

b) Quantos hectares do sítio cada um dos três irmãos deve receber se Pedro colaborar com 75.000 reais e seus dois irmãos com 37.500 reais cada um?

Etapa 2: Analisar e coletar informações do problema

Esta é uma situação em que dois dos irmãos colaborarão com a mesma quantidade e o terceiro com uma quantidade diferente na compra do sítio (ver Figura 3). Sabemos que aquele que colaborar mais terá direito a uma área maior do sítio. Assim, caberá a Pedro esta área maior, conforme apresentado na Figura 6.

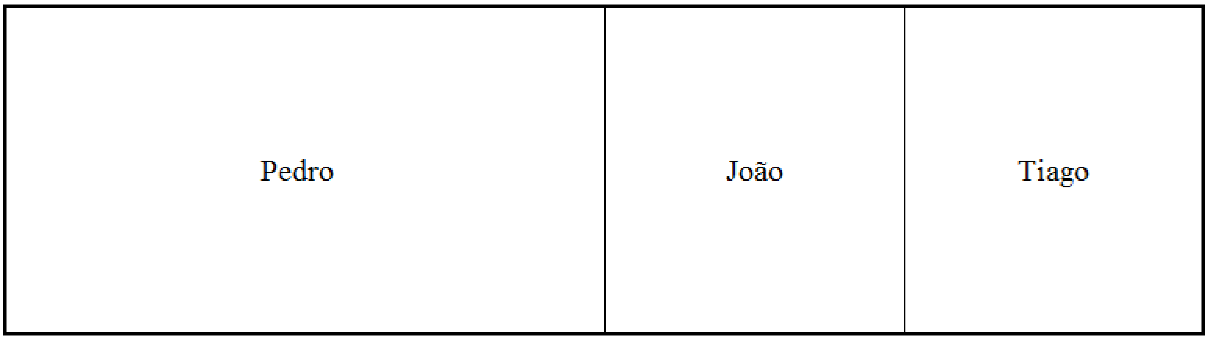


Figura 6: Área do sítio dividida em duas partes iguais e uma diferente

Como podemos mensurar quantos hectares do sítio cada irmão deve receber?

Para responder a este questionamento necessitamos definir os seguintes conceitos:

- **O que é proporção?**
- **O que são grandezas diretamente proporcionais?**

De acordo com Guelli (1997, p. 170), razão e proporção podem ser definidas da seguinte maneira:

Definição 1. A razão entre dois números racionais a e b, com $b \neq 0$, é o quociente $\frac{a}{b}$.

Definição 2. Uma igualdade entre duas razões chama-se proporção.

Ou seja, dados quatros números racionais, $a, b, c, d,$ todos diferentes de zero, dizemos que eles formam uma proporção, nessa ordem, quando:

$$a : b = c : d \text{ ou } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \,.$$

Lemos a igualdade acima do seguinte modo: "a está para b assim como c está para d", ou "a sobre b é igual c sobre d", ou "a dividido por b é igual a c dividido por d". Os números a, b, c, d são chamados de termos da proporção; a e d são os extremos, b e c são os meios.

Propriedade 1. Em qualquer proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ o produto dos extremos é igual ao produto dos meios:

$$a \cdot d = b \cdot c \,.$$

Utilizando a propriedade 1, dadas duas razões, é possível verificar se elas formam uma proporção, e em uma proporção em que são conhecidos 3 termos, é possível determinar o valor do quarto termo.

Exemplo 12. Verifique se as razões $\frac{8}{9}$ e $\frac{136}{143}$ formam uma proporção:

Solução:

Pela propriedade 1, em qualquer proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios;

$$8 \cdot 143 \neq 9 \cdot 136$$
$$1144 \neq 1224 \,.$$

Considerando que os produtos são diferentes, então, as razões não formam uma proporção.

Exemplo 13. Determine o valor de b na proporção abaixo:

$$\frac{-3}{4} = \frac{b}{15}$$

Solução:

Pela propriedade 1, temos:

$$-3 \cdot 15 = 4 \cdot b$$
$$b = -\frac{45}{4} = -11{,}25\,.$$

Portanto, o valor de b é $-11{,}25$.

De acordo com Netto e Mendes (2013), **duas grandezas são diretamente proporcionais quando**, ao aumentar o valor de uma delas, a outra também aumenta na mesma razão. O mesmo ocorre no caso de uma delas diminuir, a outra grandeza também reduz na mesma razão.

Considere x e y dois tipos de grandezas. Segundo Lima et al (2006, p. 2), **dizemos que y é diretamente proporcional a x quando**:

> 1º As grandezas x e y acham-se de tal modo relacionadas que a cada valor de x corresponde um valor bem determinado de y. Diz-se então que existe uma correspondência $x \mapsto y$ e que y é função de x.
> Quando escrevermos $x \mapsto y$ estaremos querendo dizer que y é o valor que corresponde a x
> 2º Quanto maior for x, maior será y. Em símbolos: se $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$ então $x < x'$ implica $y < y'$
> 3º Se a um valor x_0 corresponde y_0 e c é um número qualquer, então o valor de y que corresponde a cx_0 é cy_0. Simbolicamente: se $x_0 \mapsto y_0$ então $cx_0 \mapsto cy_0$.

Lima et al (2006) destaca ainda a seguinte observação: “Para verificar, em cada situação dada, a validez da terceira condição acima, basta considerar o caso em que c é inteiro”. De fato, no item 3º acima, considere que $x_0 = 1$ e que o correspondente y_0 seja igual a k. Neste caso, temos que o correspondente de $c \cdot 1$ é $c \cdot k$. Como c é um número qualquer, fazendo $c = x$, seu correspondente é $kx = y$.

Então, para todo x, temos $y = kx$, e k é chamado de fator de proporcionalidade ou constante.

Os conceitos de proporcionalidade também se aplicam a um processo matemático bastante útil denominado **regra de três**. Segundo Lima et al (2006, p. 4),

> [...] Na regra de três, tem-se uma proporcionalidade $x \mapsto y$, consideram–se valores específicos $x' \mapsto y'$, $x'' \mapsto y''$ da mesma, supõe-se que são conhecidos três dos números x', y', x'', y'' e pede-se o quarto desses números.
> Sabendo que $y' = k \cdot x'$ e $y'' = k \cdot x''$ vem $\frac{y'}{y''} = \frac{x'}{x''}$. Esta proporção nos permite obter um dos números x', y', x'', y'' quando os outros três são conhecidos.

Por exemplo, conhecendo x', x'' e y' , podemos calcular y'' utilizando a proporção $\frac{y'}{y''} = \frac{x'}{x''}$, sem conhecer o fator de proporcionalidade k. Outra opção que pode ser utilizada na resolução de problemas de proporcionalidade é a utilização do **método de redução à unidade** que consiste em determinar primeiramente, o fator de proporcionalidade k e em seguida calcular $y'' = k \cdot x''$.

Lima et al (2006) ainda frisa que é necessário comprovar primeiramente se existe relação de proporcionalidade entre as grandezas envolvidas antes de resolver um problema por regra de três ou por redução à unidade. Às vezes, as grandezas não possuem nenhum grau de dependência entre si, por exemplo, o tempo de permanência num supermercado e o gasto em compras nesse mesmo supermercado.

Exemplo 14. Considerando as informações da Tabela 1, verifique se as grandezas “quantidade de tomate” e “custo” são diretamente proporcionais:

Tabela 1: Quantidade de tomate e seu custo

Quantidade de tomate	Custo
1 kg	R$ 2,50
3 kg	R$ 7,50
500 g	R$ 1,25

Solução:

Obseve que 1 kg de tomate custa R$ 2,50 e 3 kg de tomates custam R$ 7,50. Note que ao triplicar a grandeza “quantidade de tomate”, a grandeza “custo” também triplicou.

Observe que 1 kg de tomate custa R$ 2,50 e 500 g de tomate (meio quilograma) custam R$ 1,25. Ao reduzir pela metade a grandeza “quantidade de tomate”, a grandeza “custo” também reduziu pela metade.

Portanto as grandezas “quantidade de tomate” e “custo” são diretamente proporcionais.

Exemplo 15. Um padeiro faz 64 pães com 4 kg de farinha de trigo, quantos pães ele fará com 6 kg de farinha de trigo?

Solução:

Antes de resolvermos este exemplo por regra de três, devemos verificar se as grandezas “quantidade de farinha de trigo” e “quantidade de pães” são diretamente proporcionais.

É fácil perceber que, duplicando a grandeza “quantidade de farinha de trigo”, a grandeza “quantidade de pães” também duplica. Então podemos afirmar que as grandezas são diretamente proporcionais

Denominaremos de x a grandeza “quantidade de farinha de trigo”, de y a grandeza “quantidade de pães”, e de k o fator de proporcionalidade.

$$quantidade\ de\ pães = k \cdot quantidade\ de\ farinha\ de\ trigo$$
$$y = k \cdot x\,,$$

substituindo os dados do exemplo 15, na igualdade acima, obtemos:

$$64 = k \cdot 4$$
$$y = k \cdot 6\,,$$

das relações anteriores vem:

$$\frac{64}{y} = \frac{4}{6},$$

aplicando a propriedade 1 das proporções temos:

$$64 \cdot 6 = 4 \cdot y$$
$$y = \frac{64 \cdot 6}{4} = 96\,.$$

Portanto, com 6 kg de farinha, um padeiro, pode fazer 96 pães.

Podemos também resolver o exemplo 15 pelo método de redução à unidade. Observe:

Solução:

Já vimos que a grandeza "quantidades de pães" (y) é diretamente proporcional a grandeza "quantidade de farinha de trigo" (x). Do enunciado, temos, $x = 4$ e $y = 64$.

Farinha de trigo	**Quantidade de pães**
x = 4 kg	*y = 64 un.*

O método de redução à unidade consiste em determinar primeiramente o fator de proporcionalidade k, e em seguida, calcular, $y" = k \cdot x"$. Foi visto que o fator de proporcionalidade k é o correspondente de $x' = 1$. Para obtermos, neste exemplo, $x' = 1$, devemos dividir ambos os valores acima por 4.

Farinha de trigo	**Quantidade de pães**
x' = 1 kg	*y' = 16 un.*

Então o fator de proporcionalidade assume o valor $k = y' = 16$. Vamos calcular agora $y" = k \cdot x"$, onde $x'' = 6$.

$$y'' = k \cdot x''$$
$$y'' = 16 \cdot 6 = 96$$

Portanto, com 6 kg de farinha, um padeiro, faz 96 pães confirmando o resultado.

Após a definição dos conceitos de proporção e de grandezas diretamente proporcionais, vamos selecionar uma ou mais hipóteses a fim de respondermos as indagações do **item b** da situação-problema 1.

Etapa 3: Selecionar uma ou mais hipóteses:

Formulamos duas hipóteses para a solução deste problema:

Primeira hipótese: esta situação-problema pode ser resolvida por meio de um raciocínio direto.

Segunda hipótese: esta situação-problema pode ser resolvida aplicando os conceitos de grandezas diretamente proporcionais através do processo regra de três.

Etapa 4: Testar as hipóteses selecionadas.

Primeira hipótese: resolução por meio de um raciocínio direto.

Solução:

A situação-problema 1 estabelece que cada irmão receba uma parte do sítio proporcional ao valor contribuído. Podemos então afirmar que as grandezas “área do sítio” e “valor a ser colaborado” são diretamente proporcionais. Aumentando a grandeza “valor a ser colaborado”, a grandeza “área do sítio” aumenta na mesma razão. Reduzindo a grandeza “valor a ser colaborado”, a grandeza “área do sítio” também reduz na mesma razão. Observe o raciocínio:

Se Pedro colaborar com 150.000 reais, então o sítio inteiro será dele, isto é, todos os 30 hectares.

Se Pedro colaborar com 75.000 reais, conforme previsto no problema, que equivale à metade do valor do sítio, então metade da área do sítio será dele, isto é, 15 hectares. Dividindo os 15 hectares restantes igualmente entre João e Tiago obtêm-se 7,5 hectares para cada um (ver Figura 6).

Assim, a hipótese de raciocínio direto nos leva a uma solução coerente com a situação-problema colocada.

Segunda hipótese: resolução aplicando os conceitos de grandezas diretamente proporcionais através do processo regra de três.

Solução:

Já verificamos na hipótese 1 que existe relação de proporcionalidade entre as grandezas envolvidas. Considere as notações abaixo:

y_1 área do sítio de Pedro (em hectare)

y_2 área do sítio de João (em hectare)

y_3 área do sítio de Tiago (em hectare)

Observe as relações seguintes, em que k é o fator de proporcionalidade. Por regra de três vamos determinar a área do sítio que cada irmão deve receber.

$$\text{área do sítio} = k \cdot \text{valor a ser colaborado}$$
$$30 = k \cdot 150000$$
$$y_1 = k \cdot 75000$$
$$y_2 = k \cdot 37500$$
$$y_3 = k \cdot 37500\,.$$

Cálculo da área do sítio que Pedro deve receber:

$$\frac{30}{y_1} = \frac{150000}{75000}\,,$$

pela propriedade 1 obtemos,

$$30 \cdot 75000 = 150000 \cdot y_1$$
$$y_1 = \frac{30 \cdot 75000}{150000} = 15\,.$$

Pedro deve receber 15 hectares

Cálculo da área do sítio que João deve receber,

$$\frac{30}{y_2} = \frac{150000}{37500}$$
$$y_2 = \frac{30 \cdot 37500}{150000} = 7{,}5\,.$$

João deve receber 7,5 hectares.

Cálculo da área do sítio que Tiago deve receber,

$$\frac{30}{y_3} = \frac{150000}{37500}$$
$$y_3 = \frac{30 \cdot 37500}{150000} = 7{,}5\,.$$

Tiago deve receber 7,5 hectares.

Assim, esta segunda hipótese, também nos leva a uma solução coerente e idêntica à obtida na primeira hipótese.

Etapa 5: Chegar a uma conclusão a respeito do problema

Com relação à situação-problema 1, observamos que o **item a** foi resolvido de forma imediata dada a sua simplicidade e chegamos a conclusão de que cada irmão deve receber 10 hectares do sítio.

No **item b**, formulamos duas hipóteses de possíveis soluções. Na primeira, resolvemos por um simples raciocínio e na segunda utilizamos conceitos de proporcionalidade introduzidos na segunda etapa. Chegamos à conclusão que Pedro deve receber 15 hectares, enquanto que seus dois outros irmãos devem receber 7,5 hectares do sítio cada um.

3.2. DIVISÃO EM PARTES PROPORCIONAIS

Nesta seção, a situação-problema 2 é utilizada como ponto de partida na abordagem dos conceitos de divisão em partes proporcionais.

SITUAÇÃO-PROBLEMA 2

Os três irmãos efetuaram a compra do sítio de 30 hectares da seguinte maneira: Pedro colaborou com 65.000 reais, João com 55.000 reais e Tiago com 30.000 reais. Quantos hectares do sítio cada um dos três irmãos deve receber se a divisão do sítio for proporcional ao valor colaborado por cada irmão?

Etapa 1: Identificação do problema

A situação-problema 2 destaca que os irmãos Pedro, João e Tiago efetuaram a compra do sítio de 30 hectares por 150.000 reais. Sabendo que cada irmão colaborou com um valor diferente, almejamos precisar quantos hectares do sítio cada um irá receber. A Figura 4 mostra uma possível situação geométrica do problema.

Etapa 2: Analisar e coletar informações do problema

Como a divisão do sítio será proporcional ao valor colaborado por cada irmão, caberá a Pedro a área maior do sítio e a João a área menor do sítio.

Considere as notações abaixo:

y_1 área do sítio que Pedro deve receber (em hectare)

y_2 área do sítio que João deve receber (em hectare)

y_3 área do sítio que Tiago deve receber (em hectare)

Almejamos dividir o sítio de 30 hectares em três partes, y_1 , y_2 e y_3 , respectivamente proporcionais a 65.000, 55.000 e 30.000 reais.

$$\frac{y_1}{65000} = \frac{y_2}{55000} = \frac{y_3}{30000} .$$

Já foi visto que este tipo de situação-problema pode ser resolvido por regra de três. Porém, como resolver a igualdade acima aplicando as propriedades da **divisão em partes proporcionais**?

Para responder o questionamento acima vamos examinar os conceitos da **divisão em partes proporcionais**:

Seja $x \mapsto y$ uma proporcionalidade. De acordo com Lima et al (2006), se $x_1 \mapsto y_1$, $x_2 \mapsto y_2$,..., $x_n \mapsto y_n$ então $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \mapsto (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$.

Considerando que

$$\begin{gathered} y_1 = k \cdot x_1 \\ y_2 = k \cdot x_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_n = k \cdot x_n , \end{gathered}$$

obtemos,

$$\begin{gathered} (y_1 + y_2 + \cdots + y_n) = (k \cdot x_1 + k \cdot x_2 + \cdots + k \cdot x_n) \\ (y_1 + y_2 + \cdots + y_n) = k\,(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) , \end{gathered}$$

assim, podemos escrever a seguinte proporção:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \cdots = \frac{y_n}{x_n} = \frac{(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)}{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)} = k ,$$

desta proporção, segue que:

$$y_1 = \frac{(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)}{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)} \cdot x_1$$
$$y_2 = \frac{(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)}{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)} \cdot x_2$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots$$
$$y_n = \frac{(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)}{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)} \cdot x_n \,. \tag{1}$$

Portanto, dividir um número y em partes proporcionais a $x_1, x_2, \dots, x_n$ significa encontrar $y_1, y_2, \dots, y_n$ proporcionais a $x_1, x_2, \dots, x_n$ e tais que $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = y$.

Lima et al (2006) também observa que em vez de simplesmente memorizar as fórmulas acima, muito melhor é guardar o significado delas e, com isso, ser capaz de resolver mais tarde problemas semelhantes a este.

Exemplo 16. Divida o número 240 em partes proporcionais a 2, 3 e 5

Solução:

Neste exemplo, desejamos dividir o número $y = 240$, em três partes y_1, y_2 e y_3 respectivamente proporcionais a $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ e $x_3 = 5$.

Utilizando a equação (1) e substituindo os dados do exemplo, obtemos:

$$y_1 = \frac{(y_1 + y_2 + y_3)}{(x_1 + x_2 + x_3)} \cdot x_1 = \frac{240}{(2 + 3 + \ 5)} \cdot 2 = 48$$
$$y_2 = \frac{(y_1 + y_2 + y_3)}{(x_1 + x_2 + x_3)} \cdot x_2 = \frac{240}{(2 + 3 + \ 5)} \cdot 3 = 72$$
$$y_3 = \frac{(y_1 + y_2 + y_3)}{(x_1 + x_2 + x_3)} \cdot x_3 = \frac{240}{(2 + 3 + \ 5)} \cdot 5 = 120 \,.$$

Portanto, a divisão de 240 em partes proporcionais a 2, 3 e 5, resulta em 48, 72 e 120, respectivamente. Observe que o resultado está condizente com a noção de proporção, pois:

$$\frac{48}{2} = \frac{72}{3} = \frac{120}{5} \,.$$

Após a observação dos conceitos de divisão em partes proporcionais, vamos retomar a situação-problema 2.

Etapa 3: Selecionar uma ou mais hipóteses:

Formulamos duas hipóteses para a solução deste problema:

Primeira hipótese: a área do sítio que cada irmão deve receber pode ser calculada de acordo com os conceitos da divisão em partes proporcionais

Segunda hipótese: a área do sítio que cada irmão deve receber pode ser calculada por meio da equação (1).

Etapa 4: Testar as hipóteses selecionadas.

Primeira hipótese: cálculo da área do sítio que cada irmão deve receber de acordo com os conceitos da divisão em partes proporcionais

Solução:

No início desta seção, denominamos de y_1 a área do sítio que Pedro deve receber (em hectare), de y_2 a área do sítio que João deve receber (em hectare) e de y_3 a área do sítio que Tiago deve receber (em hectare). Nesta situação-problema, pretendemos dividir o sítio de 30 hectares, em três partes, y_1, y_2 e y_3 respectivamente proporcionais a $x_1 = 65000$, $x_2 = 55000$, e $x_3 = 30000$.

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3}$$

$$\frac{y_1}{65000} = \frac{y_2}{55000} = \frac{y_3}{30000},$$

da igualdade acima podemos escrever as seguintes relações, onde k é o fator de proporcionalidade:

$$y_1 = k \cdot 65000$$

$$y_2 = k \cdot 55000$$

$$y_3 = k \cdot 30000 ,$$

somando as três partes y_1, y_2 e y_3 obtemos a área total do sítio que é 30 hectares.

$$y_1 + y_2 + y_3 = 30$$

$$k \cdot 65000 + k \cdot 55000 + k \cdot 30000 = 30$$

$$150000 \cdot k = 30$$

$$k = \frac{30}{150000} = 0{,}0002 .$$

Computado o valor do fator de proporcionalidade, fica fácil constatar a área (em hectare) do sítio que cada irmão deve receber. Portanto:

Pedro deve receber 13 hectares.

$$y_1 = k \cdot 65000 = 0{,}0002 \cdot 65000 = 13 .$$

João deve receber 11 hectares

$$y_2 = k \cdot 55000 = 0{,}0002 \cdot 55000 = 11 .$$

Tiago deve receber 6 hectares

$$y_3 = k \cdot 30000 = 0{,}0002 \cdot 30000 = 6 .$$

Podemos verificar que o resultado está consistente, pois:

$$\frac{13}{65000} = \frac{11}{55000} = \frac{6}{30000} .$$

Segunda hipótese: resolução através da equação (1)

Solução:

Denominamos de y_1 a área do sítio que Pedro deve receber (em hectare), de y_2 área do sítio que João deve receber (em hectare) e de y_3 a área do sítio que Tiago deve receber (em hectare)

$$y_1 = \frac{(y_1 + y_2 + y_3)}{(x_1 + x_2 + x_3)} \cdot x_1 = \frac{30}{(65000 + 55000 + \ 30000)} \cdot 65000 = 13$$
$$y_2 = \frac{(y_1 + y_2 + y_3)}{(x_1 + x_2 + x_3)} \cdot x_2 = \frac{30}{(65000 + 55000 + \ 30000)} \cdot 55000 = 11$$
$$y_3 = \frac{(y_1 + y_2 + y_3)}{(x_1 + x_2 + x_3)} \cdot x_3 = \frac{30}{(65000 + 55000 + \ 30000)} \cdot 30000 = 6\,.$$

Pedro, João e Tiago devem obter 13, 11 e 6 hectares do sítio respectivamente.

Esta solução é coerente com o requerido na situação-problema e o resultado está de acordo com o obtido na primeira hipótese.

Etapa 5: Chegar a uma conclusão a respeito do problema

Para resolver a situação-problema 2, formulamos duas hipóteses de possíveis soluções. A primeira hipótese consistia em calcular primeiramente o valor do fator de proporcionalidade para em seguida mensurar a área do sítio que cada irmão deve receber e a segunda hipótese consistia em utilizar a equação (1) na resolução da situação-problema. Chegamos à conclusão de que Pedro, João e Tiago devem obter 13, 11 e 6 hectares do sítio respectivamente.

A Figura 7 exibe o sítio de 30 hectares, supostamente retangular, subdividido em 30 partes de 1 hectare.

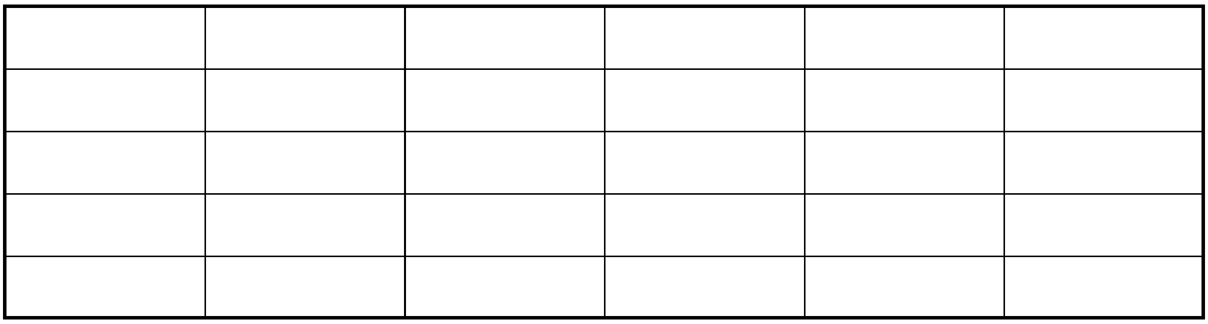


Figura 7: Representação do sítio de 30 hectares subdividido

A Figura 8 apresenta uma proposta para divisão do sítio de 30 hectares entre Pedro, João e Tiago, obedecendo ao resultado obtido.

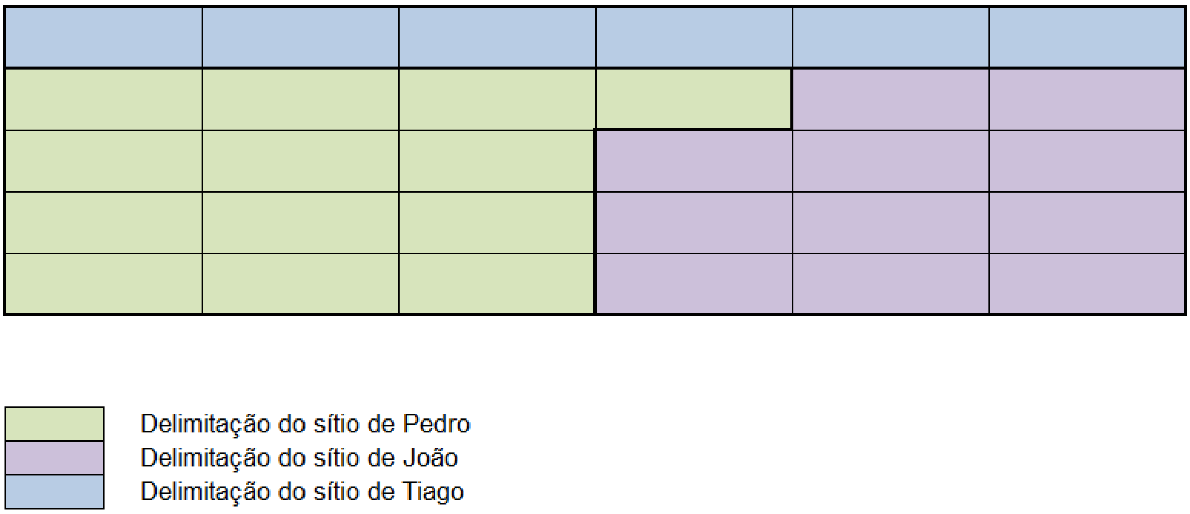


Figura 8: Proposta de divisão do sítio de acordo com a situação-problema 2

3.3. PORCENTAGEM

Nesta seção, a situação-problema 3 é utilizada como ponto de partida na abordagem dos conceitos de porcentagem.

SITUAÇÃO-PROBLEMA 3

Após a divisão do sítio entre Pedro, João e Tiago, Pedro plantou cana-de-açúcar em 60% da área do seu sítio. Sabendo que de uma plantação de 1,5 hectares, em média, se colhe 105 toneladas de cana-de-açúcar, quantas toneladas de cana-de-açúcar Pedro extrairá de toda sua plantação?

Etapa 1: Identificação do problema

Foi visto que Pedro comprou 13 hectares do sítio. A parte em destaque da Figura 9 corresponde à delimitação do sítio de Pedro.

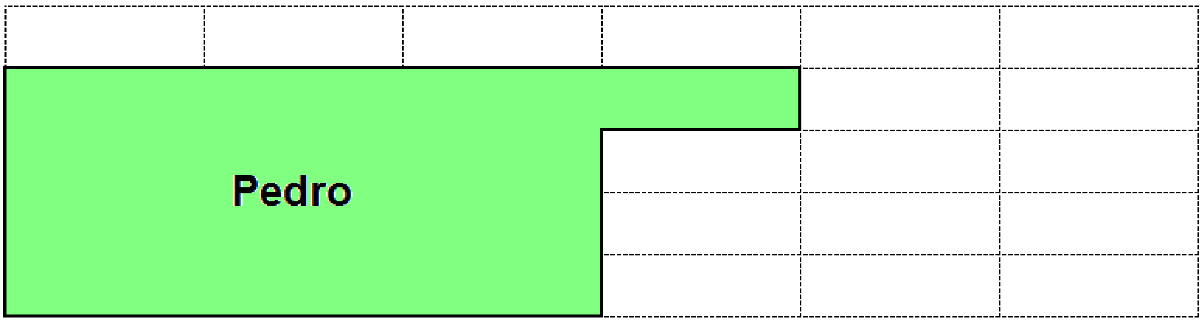


Figura 9: Destaque da delimitação do sítio de Pedro

Nesta situação-problema temos que apurar quantos hectares do sítio, Pedro utilizou com plantação de cana-de-açúcar, e em seguida estimar quantas toneladas de cana-de-açúcar ele extrairá dessa plantação.

Etapa 2: Analisar e coletar informações do problema

A situação-problema 3 afirma que Pedro plantou cana-de-açúcar em 60% das 13 hectares. **Como se calcula 60% de 13?**

Para responder a esta questão vamos analisar os seguintes conceitos:

- **O que é porcentagem?**
- **Como calcular o percentual de um número?**

Em várias situações do nosso cotidiano está presente o conceito de porcentagem, seja no aumento ou redução dos preços de produtos ou serviços, em multas aplicadas em contas ou prestações pagas após a data de vencimento, em aplicações financeiras, entre outras.

Segundo Ferreira (2004, p. 622), **porcentagem** é definido como “parte proporcional calculada sobre 100 unidades”. De acordo com Guelli (1997, p. 193), “é comum expressar a razão entre um número e 100 usando o termo **por cento**, que significa dividido por 100 ou centésimos”. Assim, a razão entre 60 e 100 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{60}{100} = 60\%$$

60% lê-se sessenta por cento.

Vejamos algumas outras razões escritas na forma de porcentagem e seus significados:

$$100\% = \frac{100}{100} = 1 \; = tudo$$

$$50\% = \frac{50}{100} = 0{,}50 \; = metade$$

$$25\% = \frac{25}{100} = 0{,}25 \; = a\ quarta\ parte$$

$$20\% = \frac{20}{100} = 0{,}20 \; = um\ quinto$$

$$10\% = \frac{10}{100} = 0{,}10 \; = um\ décimo$$

$$1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01 \; = um\ centésimo\ .$$

Segundo Lima et al (2006), algumas porcentagens dão uma ideia aproximada, por exemplo:

$$60\% = \frac{60}{100} = 0{,}60 \; = pouco\ mais\ da\ metade$$

$$40\% = \frac{40}{100} = 0{,}40 \; = pouco\ menos\ da\ metade$$

$$30\% = \frac{30}{100} = 0{,}30 \ = quase\ um\ terço\,.$$

Para Guelli (1997), **escrever uma razão qualquer na forma de porcentagem**, consiste em encontrar uma fração equivalente a ela, com denominador 100.

Exemplo 17. Expresse o número $\frac{4}{5}$ na forma de porcentagem

Solução:

Resolveremos este exemplo de duas maneiras.

1ª maneira: através dos conceitos de proporção.

$$\frac{4}{5} = \frac{x}{100}$$

pela propriedade 1, obtemos:

$$4 \cdot 100 = 5 \cdot x$$
$$400 = 5x$$
$$\frac{400}{5} = x$$
$$80 = x\,.$$

Portanto, $\frac{4}{5}$ equivale a $\frac{80}{100} = 80\%$

2ª maneira: encontrando uma fração equivalente a $\frac{4}{5}$ com denominador 100.

$$\frac{4}{5} = \frac{4}{5} \cdot \frac{20}{20} = \frac{80}{100} = 80\%\,.$$

Confirmando o resultado obtido.

Exemplo 18. A Figura 10 abaixo apresenta um estacionamento de veículos com 20 vagas, onde cada retângulo representa uma vaga. Os retângulos pintados correspondem às vagas já ocupadas do estacionamento.

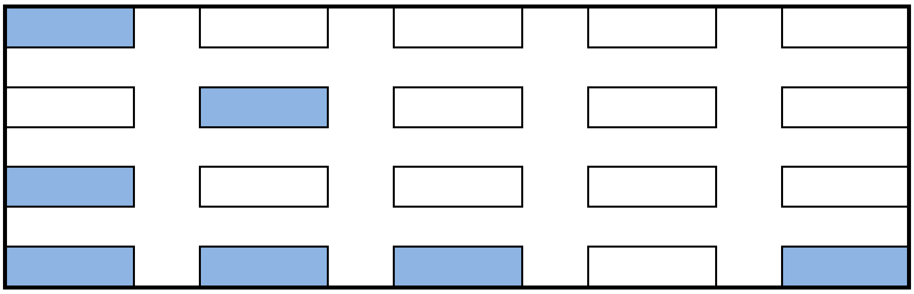


Figura 10: Representação de um estacionamento de 20 vagas

Determine o percentual do total de vagas do estacionamento que está ocupado?

Solução:

As vagas preenchidas correspondem a $\frac{7}{20}$ do total de vagas do estacionamento.

$$\frac{7}{20} = \frac{7}{20} \cdot \frac{5}{5} = \frac{35}{100} = 35\% \,.$$

Portanto, 35% das vagas do estacionamento já estão ocupadas.

Propriedade 2. Para calcular um valor percentual de um número, devemos multiplicar os dois números.

Exemplo 19. Determine quanto é 12% de 200.

Solução:

Pela propriedade 2 temos:

$$\frac{12}{100} \cdot 200 = \frac{2400}{100} = 24 \,.$$

Portanto, 12% de 200 equivalem a 24.

Exemplo 20. A Figura 11 abaixo demonstra o lucro de uma empresa que atua no ramo de alimentação no primeiro trimestre de 2014.

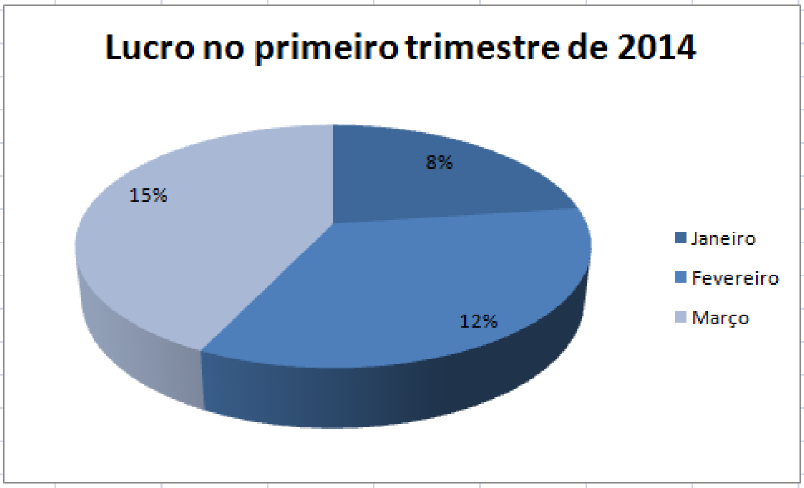


Figura 11: Lucro no primeiro trimestre de 2014

Sabendo que em janeiro o lucro desta empresa foi de 12.000 reais, quantos reais ela lucrou em março?

Solução:

Vamos resolver este exemplo de duas maneiras diferentes:

1ª maneira: através dos conceitos de proporção.

Em janeiro o lucro da empresa foi 8% que corresponde a 12.000 reais e em março 15%. Com estes dados podemos formar uma proporção e obter, quantos reais correspondem o lucro de 15%.

$$\frac{8}{15} = \frac{12000}{x}$$

$$8x = 180000$$

$$x = \frac{180000}{8}$$

$$x = 22500 \, .$$

Portanto, em março, o lucro foi de 22.500 reais.

2ª maneira: intuitivamente.

Em janeiro o lucro da empresa foi de 8%, correspondendo a 12.000 reais. Subdividimos este lucro 12.000 reais em várias parcelas. A Figura 12 apresenta a subdivisão do lucro do mês de janeiro em parcelas de 6.000, 3.000 e 1.500 reais.

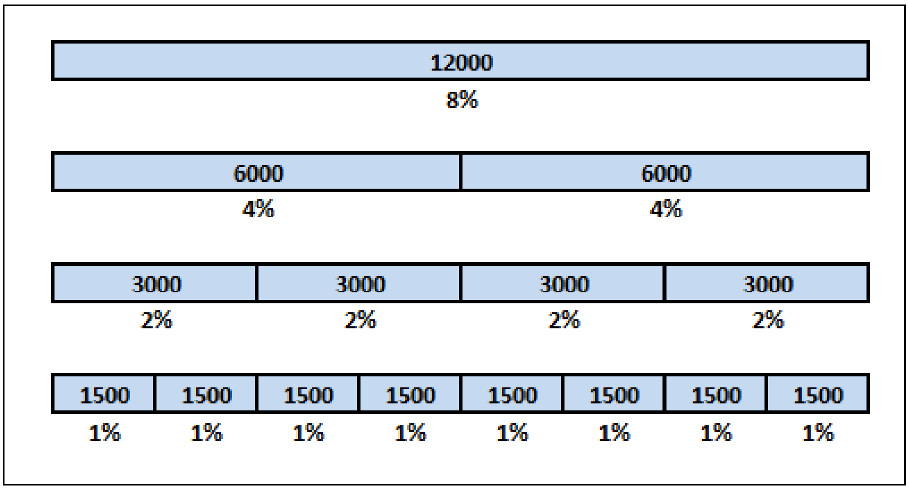


Figura 12: Subdivisão do lucro do mês de janeiro

A Figura 12 demonstra que o lucro 1% corresponde a 1.500 reais. Então 15%, correspondem a 15 vezes de 1.500 reais, resultando em 22.500 reais, confirmando o resultado encontrado logo acima.

Após analisar os conceitos de porcentagem, vamos retomar a situação-problema 3.

Etapa 3: Selecionar uma ou mais hipóteses:

Nossa hipótese é que podemos calcular a área do sítio em que foi plantada cana-de-açúcar utilizando os conceitos de porcentagem e por regra de três determinar quantas toneladas de cana-de-açúcar Pedro extrairá de sua plantação.

Etapa 4: Testar as hipóteses selecionadas.

Solução:

A situação-problema afirma que Pedro plantou cana-de-açúcar em 60% dos 13 hectares de seu sítio. Quanto equivale 60% de 13? Foi visto que para calcular um valor percentual de um número devemos multiplicar os dois números. Observe:

$$\frac{60}{100} \cdot 13 = \frac{780}{100} = 7{,}80\,.$$

Portanto, Pedro plantou cana-de-açúcar em 7,80 hectares do sítio.

A Figura 13 abaixo apresenta a delimitação do sítio de Pedro com uma proposta de representação da área em que foi plantada cana-de-açúcar.

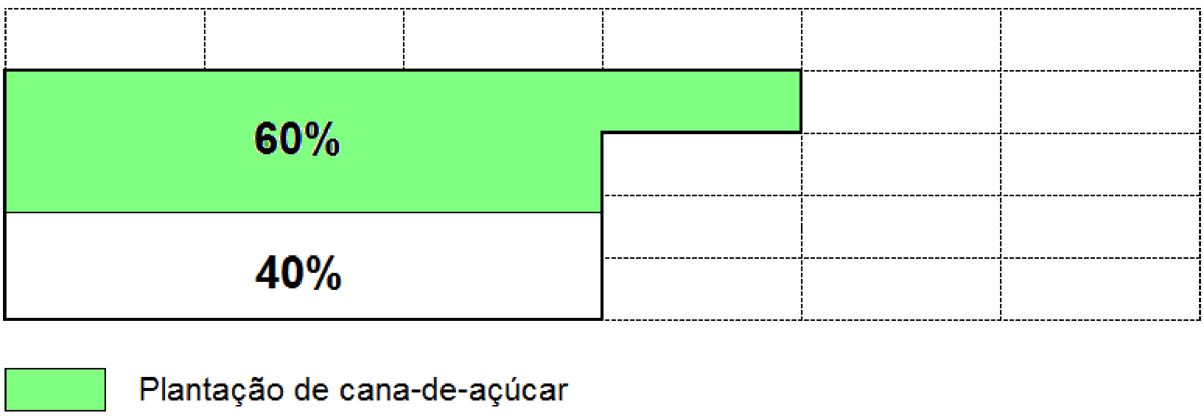


Figura 13: Representação da plantação de cana-de-açúcar no sítio de Pedro

A situação-problema descreve que de uma plantação de 1,5 hectares, em média, se colhe 105 toneladas de cana-de-açúcar. Observe que as grandezas “tonelada de cana-de-açúcar” e “área da plantação” são diretamente proporcionais. Dobrando a área da plantação, extrairemos duas vezes mais toneladas de cana-de-açúcar. Quantas toneladas Pedro colherá dos 7,8 hectares de plantação de cana-de-açúcar?

Resolveremos por regra de três. Denominando de t as toneladas de cana-de-açúcar colhidas nos 7,8 hectares, vamos escrever as seguintes relações, onde k é o fator de proporcionalidade:

$$tonelada\ de\ cana - \ de - \ açúcar = k \cdot área\ da\ plantação$$
$$105 = k \ \cdot \ 1{,}5$$
$$t = k \ \cdot \ 7{,}8\,,$$
$$\frac{105}{t} = \frac{1{,}5}{7{,}8},$$

aplicando a propriedade 1, chegamos ao resultado:

$$105 \ \cdot 7{,}8 = t \cdot 1{,}5$$
$$819 = 1{,}5\,t$$
$$\frac{819}{1{,}5} = \ t$$
$$546 = \ t\ .$$

Portanto, Pedro colherá 546 toneladas de cana-de-açúcar da sua plantação.

Os resultados obtidos, área plantada do sítio de Pedro igual a 7,8 hectares e possibilidade de colheita de 546 toneladas são coerentes com a situação-problema colocada.

Etapa 5: Chegar a uma conclusão a respeito do problema

Na resolução da situação-problema 3, computamos a área do sítio em que foi plantada cana-de-açúcar utilizando os conceitos de porcentagem e por regra de três determinamos quantas toneladas de cana-de-açúcar Pedro extraiu de sua plantação. Chegamos à conclusão de que Pedro plantou cana-de-açúcar numa área de 7,8 hectares, que lhe pode proporcionar uma colheita de 546 toneladas.

3.4. GRANDEZAS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Nesta seção, a situação-problema 4 é utilizada como ponto de partida na abordagem dos conceitos de grandezas inversamente proporcionais.

SITUAÇÃO-PROBLEMA 4

Periodicamente Tiago realiza uma limpeza mecanizada de 3,6 hectares de seu sítio contratando 2 tratores que trabalhando juntos num mesmo ritmo, geralmente levam 21 horas para concluir o serviço. Desta vez Tiago precisa que a limpeza mecanizada das 3,6 hectares do sítio seja concluída em 6 horas. Quantos tratores Tiago deverá contratar?

Etapa 1: Identificação do problema

De acordo com a situação-problema, dois tratores trabalhando juntos num mesmo ritmo, geralmente, levam 21 horas para concluir o serviço de limpeza mecanizada em 3,6 hectares do sítio. Intuitivamente sabemos que serão necessários mais do que dois tratores para concluir este mesmo serviço em 6 horas. Como estimar esta quantidade de tratores?

Etapa 2: Analisar e coletar informações do problema

Da situação-problema conseguimos abstrair duas grandezas: “número de tratores” e “tempo”. Podemos afirmar que dobrando a quantidade de tratores, o serviço de limpeza mecanizada será concluído na metade do tempo. Neste caso as grandezas envolvidas são **inversamente proporcionais**. **Como resolver questões que envolvam grandezas inversamente proporcionais?**

Considere x e y dois tipos de grandezas, de acordo com Lima et al (2006), dizemos que y é **inversamente proporcional** a x quando:

1º As grandezas x e y estão de tal modo relacionadas que a cada valor de x corresponde um valor bem determinado de y. Dizemos então que existe uma correspondência $x \mapsto y$ e que y é função de x.

2º Quanto maior for x, menor será y.

3º Se a um valor x_0 corresponde y_0 e c é um número qualquer, então o valor de y, que corresponde a cx_0, é $\frac{1}{c}y_0$.

Considere $x_0 = 1$ e que o correspondente y_0 seja igual a k. Neste caso, temos que o correspondente de $c \cdot 1$ é $\frac{1}{c} \cdot k$. Como c é um número qualquer, fazendo $c = x$, seu correspondente é $\frac{1}{x} \cdot k = y$. Então, para todo x, temos $y = \frac{k}{x}$ e k é chamado de fator de proporcionalidade ou constante. Equivalentemente $x \cdot y = k$.

Com base nas definições acima, podemos afirmar que nas grandezas inversamente proporcionais, quando uma grandeza aumenta, a outra grandeza diminui, ou melhor, ao multiplicarmos uma grandeza por um número natural m, a outra grandeza fica dividida por m.

Lima et al (2006) enfatiza que nas grandezas inversamente proporcionais temos um processo matemático denominado de regra de três inversa. Nela é dada uma grandeza y inversamente proporcional a uma grandeza x e considerando valores particulares x' e x'' de x que correspondem respectivamente aos valores y' e y'' de y, temos:

$$y' = \frac{k}{x'},$$

$$y'' = \frac{k}{x''}$$

$$\frac{y''}{y'} = \frac{x'}{x''}.$$

Nas grandezas inversamente proporcionais, a utilização do **método de redução à unidade** consiste em determinar primeiramente o fator de proporcionalidade k e em seguida calcular $y'' = \frac{k}{x''}$.

Exemplo 21. A Tabela 2 apresenta o tempo gasto por costureiras na confecção de 240 peças de roupa.

a) Verifique se as grandezas “número de costureiras” e “tempo” são inversamente proporcionais:

Tabela 2: Tempo gasto na confecção de 240 peças de roupa

Número de costureiras	Tempo (dias)
1	16
2	8
4	4

Solução:

Observe que 1 costureira leva 16 dias para confeccionar 240 peças de roupa, 2 costureiras levam 8 dias e 4 costureiras levam 4 dias. Note que ao dobrar a grandeza “número de costureiras” a grandeza “tempo” reduz pela metade e que ao quadruplicar a grandeza “número de costureiras” a grandeza “tempo” reduz para um quarto de seu valor. Portanto as grandezas “número de costureiras” e “tempo” são inversamente proporcionais.

b) Determine o número de costureiras que é necessário contratar para produzir 240 peças de roupa em meio dia de trabalho.

Solução:

Vamos denominar de n a grandeza “número de costureiras” e de t a grandeza “tempo”. Foi visto que as grandezas envolvidas são inversamente proporcionais. Então:

$$número\ de\ costureiras\ = \frac{k}{tempo}$$

$$n = \frac{k}{t}\ .$$

Uma costureira leva 16 dias para produzir 240 peças de roupa. Quantas costureiras serão necessárias para produzir a mesma quantidade de roupa em meio dia, isto é, em 0,5 dias?

Vamos resolver por regra de três inversa:

$$1 = \frac{k}{16}$$
$$n = \frac{k}{0{,}5}$$
$$\frac{n}{1} = \frac{16}{0{,}5},$$

pela propriedade 1, obtemos:

$$n = \frac{16}{0{,}5} = 32\,.$$

Portanto, é necessário contratar 32 costureiras para manter uma produção de 240 peças a cada meio dia de trabalho.

Poderíamos ter resolvido o **item b** deste exemplo através do método de redução à unidade. Observe:

Solução:

Já vimos que as grandezas "número de costureiras" (n) e "tempo" (t) são inversamente proporcionais. A maneira mais fácil de resolver, pelo método de redução à unidade, consiste em buscar $n = 1$, na Tabela 2, cujo correspondente é $t = 16$. Porém, vamos tomar $n = 2$, que corresponde a $t = 8$.

Número de Costureiras	**Tempo**
n = 2	*t = 8 dias*

O método de redução à unidade consiste em determinar primeiramente o fator de proporcionalidade k, que é o correspondente de $n' = 1$, e em seguida, calcular,

$n" = \frac{k}{t"}$. Para obtermos $n' = 1$, devemos **dividir** n por 2. Consequentemente devemos **multiplicar** t por 2, pois as grandezas são inversamente proporcionais.

Número de Costureiras	**Tempo**
n' = 1	*t' = 16 dias*

O fator de proporcionalidade k é o correspondente de $n' = 1$, e, portanto $k = t' = 16$. Vamos calcular o valor de $n"$ para $t'' = 0{,}5\ dia$.

$$n'' = \frac{k}{t"}$$

$$n'' = \frac{16}{0{,}5} = 32$$

Portanto, é necessário contratar 32 costureiras para manter uma produção de 240 peças a cada meio dia de trabalho, confirmando o resultado obtido.

Após analisar os conceitos de grandezas inversamente proporcionais, vamos retomar a situação-problema 4.

Etapa 3: Selecionar uma ou mais hipóteses:

Nossa hipótese é que podemos calcular a quantidade de tratores utilizando os conceitos de grandezas inversamente proporcionais por meio do processo regra de três inversa.

Etapa 4: Testar as hipóteses selecionadas.

Solução:

Considere as grandezas “número de tratores” denominada de n e “tempo” denominada de t. Note que quanto maior for n menor será t. Podemos afirmar que dobrando a quantidade de tratores, o serviço de limpeza mecanizada será concluído na metade do tempo, isto é, em 10,5 horas. Mais geralmente, se multiplicarmos a quantidade de tratores por um número natural m, o tempo necessário para concluir o serviço de limpeza mecanizada ficará dividido por m. Portanto, as grandezas são inversamente proporcionais e podemos escrever a seguinte relação, onde k é o fator de proporcionalidade:

$$numero\ de\ tratores\ = \frac{k}{tempo}$$

$$n = \frac{k}{t},$$

a situação-problema descreve que 2 tratores concluem a limpeza mecanizada de 3,6 hectares em 21 horas e faz o seguinte questionamento: para realizar este mesmo serviço de limpeza em 6 horas quantos tratores Tiago deverá contratar? Substituindo os valores na relação acima, obtemos a seguinte regra de três inversa:

$$2 = \frac{k}{21}$$

$$n = \frac{k}{6}$$

$$\frac{n}{2} = \frac{21}{6},$$

pela propriedade 1, obtemos:

$$6n = 42$$

$$n = \frac{42}{6} = 7\ .$$

Portanto, Tiago deverá contratar 7 tratores que, trabalhando num mesmo ritmo, concluirão a limpeza mecanizada em 6 horas.

A solução obtida é coerente com o requerido na situação-problema colocada.

Etapa 5: Chegar a uma conclusão a respeito do problema

Na resolução da situação-problema 4, utilizando os conceitos de grandezas inversamente proporcionais, através do processo regra de três inversa, chegamos a conclusão de que Tiago deverá contratar 7 tratores que trabalhando num mesmo ritmo, concluirão limpeza mecanizada em 6 horas.

3.5. GRANDEZAS DIRETA OU INVERSAMENTE PROPORCIONAIS A VÁRIAS OUTRAS

Nesta seção, a situação-problema 5 é utilizada como ponto de partida na abordagem dos conceitos de grandezas direta ou inversamente proporcionais a várias outras.

.

SITUAÇÃO-PROBLEMA 5

João produziu em sua parte do sítio 756 toneladas de cana-de-açúcar. Quantos cortadores de cana-de-açúcar que trabalharão 6 horas por dia João deverá contratar para realizar toda a colheita em uma semana, sabendo que em média cada cortador colhe 288 toneladas de cana-de-açúcar em 30 dias, trabalhando 8 horas por dia?

Etapa 1: Identificação do problema

Nesta situação-problema desejamos mensurar quantos cortadores de cana-de-açúcar João precisa contratar para realizar a colheita de 756 toneladas de cana-de-açúcar em uma semana, com jornada de trabalho de 6 horas por dia.

Etapa 2: Analisar e coletar informações do problema

Vamos realizar as seguintes notações:

n Número de cortadores de cana-de-açúcar

p Produção de cana-de-açúcar

h Horas trabalhada em cada dia

t Prazo em dias para concluir a colheita

k Fator de proporcionalidade

Podemos observar que o número de cortadores de cana-de-açúcar é uma função $n = f(p, h, t)$ da produção de cana-de-açúcar, das horas trabalhadas diariamente e do prazo necessário para concluir a colheita.

- **Como resolver situações-problema que envolvam várias grandezas direta ou inversamente proporcionais?**

Segundo Lima et al (2006), seja $w = f(x, y, z, u, v)$ uma grandeza diretamente proporcional a x, y, z e inversamente u e v. Isto quer dizer que

$$f(c \cdot x, y, z, u, v) = c \cdot f(x, y, z, u, v),$$

valendo relações análogas para y e z no lugar de x. Temos também que

$$f(x, y, z, c \cdot u, v) = \frac{1}{c} \cdot f(x, y, z, u, v)\ ,$$

valendo relação análoga para v no lugar de u. Observe que

$$f(x, y, z, u, v) = f(x \cdot 1, y \cdot 1, z \cdot 1, u \cdot 1, v \cdot 1),$$

segue daí que,

$$f(x, y, z, u, v) = xyz \cdot f(1,1,1, u \cdot 1, v \cdot 1) = \frac{xyz}{uv} \cdot f(1,1,1,1,1)\ .$$

Logo

$$f(x, y, z, u, v) = k \cdot \frac{xyz}{uv}\ ,$$

onde $k = f(1,1,1,1,1)$ é o fator de proporcionalidade ou constante. Lima et al (2006, p. 19) conclui:

> Se $w = f(x, y, z, u, v)$ é diretamente proporcional a x, y, z e inversamente proporcional a u, v então w é diretamente proporcional a $\frac{xyz}{uv}$. Esta observação permite reduzir os chamados problemas de regra de três composta mista a problemas de regra de três simples e direta (os quais são realmente de regra de três, não regra de quatro, cinco ou seis).

Lima et al (2006, p. 19) ressalta que os diversos processos mnemônicos para resolver problemas de regra de três composta tendem a ser esquecidos. Além disso, destaca:

> A fórmula $w = k \cdot \frac{xyz}{uv}$ (ou suas análogas) apresenta a vantagem de que seus componentes desempenham papéis naturais: x, y, z no numerador porque w lhes é diretamente proporcional; u, v no denominador porque w é inversamente proporcional a seus valores.

Portanto, os problemas que envolvam várias grandezas direta ou inversamente proporcionais, podem ser resolvidos empregando as mesmas estratégias utilizadas para resolver problemas com duas grandezas diretamente proporcionais, isto é, utilizando o procedimento **regra de três** ou o **método de redução à unidade**.

Exemplo 22. Três serventes demoram 15 dias para cavar um poço de 15 metros de profundidade. Quanto tempo demoram 4 serventes para cavar um poço semelhante de 12 metros de profundidade?

Solução:

Vamos realizar as seguintes notações:

n	Número de serventes
p	Profundidade do poço
t	Tempo em dias
k	Fator de proporcionalidade

Fixando a profundidade do poço, ao dobrar a quantidade de serventes, podemos afirmar que eles levarão a metade do tempo para concluir a escavação do poço. Portanto, a grandeza “tempo” é inversamente proporcional à grandeza “número de serventes”.

Fixando o número de serventes, ao dobrar a profundidade do poço, podemos afirmar que os serventes levarão o dobro do tempo para concluir a escavação do poço. Portanto, a grandeza “tempo” é diretamente proporcional à grandeza “profundidade do poço”.

Então, podemos escrever a seguinte relação, onde t é diretamente proporcional a razão $\frac{p}{n}$:

$$t = k \cdot \frac{p}{n},$$

substituindo os valores do exemplo na relação acima, resolveremos por regra de três, observe:

$$15 = k \cdot \frac{15}{3} = k \cdot 5$$
$$t = k \cdot \frac{12}{4} = k \cdot 3\,,$$
$$\frac{15}{t} = \frac{5}{3},$$

pela propriedade 1, obtemos

$$15 \cdot 3 = t \cdot 5$$
$$45 = 5t$$
$$t = \frac{45}{5} = 9\,.$$

Portanto, 4 serventes levarão 9 dias para cavar o poço.

Vamos resolver agora este exemplo pelo método de redução à unidade, observe:

Solução:

Vimos que a grandeza “tempo” (t) é diretamente proporcional à grandeza “profundidade do poço” (p) e inversamente proporcional à grandeza “número de serventes" (n). Podemos afirmar que a grandeza tempo é diretamente proporcional à razão $\frac{p}{n}$.

Do enunciado temos que $t = 15$ e $\frac{p}{n} = \frac{15}{3} = 5$. Então:

$\dfrac{\textbf{Profundidade}}{\textbf{Número de serventes}}$	**Tempo**
$\dfrac{P}{n} = \dfrac{15}{3} = 5$	$t = 15\ dias$

Considerando a mesma estratégia adotada na resolução de problemas com duas grandezas diretamente proporcionais pelo método de redução à unidade, vamos determinar primeiramente o fator de proporcionalidade k, que é o correspondente de $\frac{p'}{n'} = 1$ e em seguida, calcular, $t" = k \cdot \frac{p"}{n"}$. Para obtermos, neste exemplo, $\frac{p'}{n'} = 1$, vamos dividir por 5, a razão $\frac{p}{n} = 5$ e $t = 15$.

$\dfrac{\textbf{Profundidade}}{\textbf{Número de serventes}}$	**Tempo**
$\dfrac{P}{n} = 1$	$t = 3\ dias$

O fator de proporcionalidade assume o valor $k = t' = 3$. Para $p" = 12$ e $n" = 4$, temos:

$$t" = k \cdot \frac{p"}{n"}$$

$$t" = 3 \cdot \frac{12}{4} = 9\,.$$

Portanto, 4 serventes levarão 9 dias para cavar o poço, confirmando o resultado obtido por regra de três.

Após observar os conceitos de grandezas direta ou inversamente proporcionais a várias outras, vamos retomar a situação-problema 5.

Etapa 3: Selecionar uma ou mais hipóteses:

Nossa hipótese é que podemos calcular o número de cortadores de cana-de-açúcar utilizando os conceitos de grandezas direta ou inversamente proporcionais a várias outras, por meio do procedimento regra de três.

Etapa 4: Testar as hipóteses selecionadas.

Solução:

No início desta seção vimos que o número de cortadores de cana-de-açúcar é função da produção de cana-de-açúcar (p), das horas trabalhadas diariamente (h), e do prazo em dias para concluir a colheita (t), isto é, $n = f(p, h, t)$.

Fixando as horas trabalhadas diariamente e o prazo para concluir a colheita, ao dobrar a produção de cana-de-açúcar, nestas condições, teremos que dobrar a quantidade de cortadores de cana-de-açúcar para concluir a colheita no prazo fixado. Portanto, a grandeza “número de cortadores de cana-de-açúcar” é diretamente proporcional à grandeza “produção de cana-de-açúcar”.

Fixando a produção de cana-de-açúcar e o prazo para concluir a colheita, ao dobrar as horas trabalhadas diariamente, nestas condições, teremos que reduzir pela metade a quantidade de cortadores de cana-de-açúcar para concluir a colheita no prazo fixado. Portanto, a grandeza “número de cortadores de cana-de-açúcar” é inversamente proporcional a grandeza “horas trabalhadas diariamente”.

Fixando a produção de cana-de-açúcar e as horas trabalhadas diariamente, ao dobrar o prazo para conclusão da colheita, nestas condições, teremos que reduzir pela metade a quantidade de cortadores de cana-de-açúcar a fim de atender o este novo prazo. Portanto, a grandeza “número de cortadores de cana-de-açúcar” é inversamente proporcional à grandeza “tempo”.

Então, podemos escrever a seguinte relação:

$$n = k \cdot \frac{p}{ht},$$

substituindo os dados da situação-problema 5, por regra de três, obtemos:

$$1 = k \cdot \frac{288}{8 \cdot 30} \Rightarrow 1 = k \cdot 1{,}2$$

$$n = k \cdot \frac{756}{6 \cdot 7} \Rightarrow n = k \cdot 18\,,$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1{,}2}{18}$$

pela propriedade 1, obtemos:

$$18 = 1{,}2n$$

$$n = \frac{18}{1{,}2} = 15.$$

João deverá contratar 15 cortadores de cana-de-açúcar.

A solução obtida é coerente com o requerido na situação-problema colocada.

Etapa 5: Chegar a uma conclusão a respeito do problema

Na resolução da situação-problema 5, utilizando os conceitos de grandezas direta ou inversamente proporcionais a várias outras, por meio do procedimento regra de três, chegamos à conclusão de que João deverá contratar 15 trabalhadores para realizar a colheita de 756 toneladas de cana-de-açúcar em uma semana.

4. SITUAÇÕES-PROBLEMA

Neste capítulo serão apresentadas várias situações-problema, algumas com solução final (sem explicitar as etapas), que podem servir de referência e serem utilizadas no desenvolvimento de conceitos de proporcionalidade em sala de aula, obedecendo à sequência utilizada no capítulo 3. Algumas situações-problema descritas neste capítulo foram retiradas do Enem, a fim de destacar que este assunto matemático é abordado frequentemente neste exame.

1) Júlia tem um salário mensal de 2.800 reais. Sua intenção é poupar a cada mês um percentual fixo de seu salário, no período de um ano, para comprar a vista uma moto no valor de 4.200 reais. Qual o percentual de seu salário Júlia tem que poupar mensalmente para atingir o seu objetivo?

Solução:

Júlia deseja poupar 4.200 reais em um ano. Então, ela tem que reservar, do seu salário, 350 reais por mês, para em um ano atingir os 4200 reais. O valor de 350 reais equivale a quantos por cento de 2800 reais? Para responder a esta pergunta, devemos montar a seguinte proporção:

$$\frac{350}{2800} = \frac{x}{100},$$

pela propriedade 1, obtemos:

$$350 \cdot 100 = 2800 \cdot x$$
$$35000 = 2800x$$
$$\frac{35000}{2800} = x$$
$$12{,}5 = x\,.$$

Portanto, Júlia tem que poupar mensalmente $12{,}5\%$ de seu salário.

2) Numa segunda feira, faltando 62 dias para o dia da prova do concurso, João adquiriu uma apostila de 576 páginas preparatória para o concurso de analista judiciário, área administrativa. Normalmente João consegue estudar 6 páginas por hora. Nos dias de semana, João tem disponibilidade de estudar 2 horas por dia e nos finais de semana tem disponibilidade de estudar 3 horas por dia.

a) João irá conseguir concluir o estudo da apostila antes da data da prova? Quantos dias João levará para concluir o estudo da apostila?

b) Quantas páginas João estudou nos dias de semana (de segunda a sexta feira) até a conclusão da apostila? Esta quantidade equivale a qual percentual do total de páginas da apostila?

c) Considerando as informações presentes no enunciado, se João estudar em um dia e descansar no outro dia e proceder assim sucessivamente, quantas páginas João estudará até o dia da prova?

3) Para executar um contrapiso com espessura de 5 cm, numa área de 200 m², João gastou 3.500 reais da seguinte maneira: 2.100 reais na compra dos materiais (cimento, areia e pedra) e 1.400 reais com mão de obra (pedreiros e serventes).

a) Qual o percentual gasto com mão de obra em relação ao gasto total realizado por João?

Solução:

João gastou 1400 reais com mão de obra de um total de 3500 reais. Para calcular o percentual gasto com mão de obra devemos montar a seguinte proporção:

$$\frac{1400}{3500} = \frac{x}{100},$$

pela propriedade 1, obtemos:

$$1400 \cdot 100 = 3500 \cdot x$$

$$140000 = 3500x$$

$$\frac{140000}{3500} = x$$

$$40 = x\,.$$

Portanto, o percentual gasto com mão de obra equivale a 40% do gasto total.

b) Quantos reais irão custar para executar um contrapiso com esta mesma espessura em um ambiente de 760 m²?

Solução:

É fácil perceber que na execução de um contrapiso de mesma espessura com o dobro da área, o custo duplica. Podemos afirmar que as grandezas “custo” e “área do contrapiso” são diretamente proporcionais.

Denominaremos de y a grandeza “custo”, de x a grandeza “área do contrapiso”, de k o fator de proporcionalidade e resolveremos por regra de três.

$$custo = k \cdot \acute{a}rea\ do\ contrapiso$$
$$y = k \cdot x\,,$$

substituindo os dados na igualdade acima, obtemos:

$$3500 = k \cdot 200$$
$$y = k \cdot 760\,,$$
$$\frac{3500}{y} = \frac{200}{760}$$

pela propriedade 1, obtemos:

$$3500 \cdot 760 = y \cdot 200$$
$$y = \frac{3500 \cdot 760}{200} = 13300\,.$$

Portanto, o custo de um contrapiso de 760 m² é 13.300 reais.

4) Márcio trabalha vendendo espetinhos de carne e de linguiça. Já incluso acompanhamentos (arroz, salada, mandioca,...), cada espetinho de linguiça é vendido por 10 reais e cada espetinho de carne é vendido por 12 reais e o lucro de Márcio é 30% do valor de venda de cada espetinho. Numa noite Márcio vendeu a mesma quantidade de espetinho de carne linguiça obtendo 1.848 reais. Qual foi o lucro de Márcio naquela noite?

5) Luiz tem um terreno retangular com dimensões 12 m x 30 m em que será construída uma casa de 60 m². Em 30% da área que restar do terreno após a construção da casa, Luiz irá plantar grama esmeralda, cujo preço é 30 reais cada 7,5 m². Quantos reais Luiz irá gastar para gramar o seu terreno?

Solução:

A área total do terreno retangular (A_t) é :

$$A_t = 12\ x\ 30 = 360\ m^2\ ,$$

descontando á área da casa de 60 m², obtemos a área restante do terreno (A_r):

$$A_r = A_t - 60 = 360 - 60 = 300\ m^2.$$

A área em que será gramada o terreno (A_g), é obtida calculando 30% da área restante (A_r).

$$A_g = \frac{30}{100} \cdot\ A_r = \frac{30}{100} \cdot\ 300 = \frac{9000}{100} = 90\ m^2.$$

Vamos calcular agora quantos reais Luiz irá gastar para gramar a área de 90 m². É fácil perceber que para gramar 15 m², Luiz irá gastar 60 reais, isto é, dobrando a grandeza “área gramada” a grandeza “custo” também dobra. Então podemos afirmar que as grandezas são diretamente proporcionais. Denominaremos de y a grandeza “custo”, de x a grandeza “área gramada”, e de k o fator de proporcionalidade, e resolveremos por regra de três:

$$custo = k \cdot \text{área gramada}$$
$$y = k \cdot x\,,$$

substituindo os dados na igualdade acima, obtemos:

$$30 = k \cdot 7{,}5$$
$$y = k \cdot 90\,,$$
$$\frac{30}{y} = \frac{7{,}5}{90}$$

pela propriedade 1, obtemos:

$$30 \cdot 90 = y \cdot 7{,}5$$
$$y = \frac{30 \cdot 90}{7{,}5} = 360\,.$$

Portanto, Luiz irá gastar 360 reais para gramar a área de 90 m².

6) A tinta látex acrílica é indicada para pintura interna e externa de paredes de alvenaria. Uma lata de 3,6 litros de tinta com diluição de água na quantidade de 20% do volume da tinta cobre 50 m² de parede por demão de tinta. Quantos litros de tinta látex acrílico e de água, Bruno utilizará para pintar uma demão, nos dois lados de um muro, de 54 metros de comprimento e 2,10 metros de altura?

7) Joana é dona de uma pizzaria. A cada 3 pizzas inteiras, da promoção, vendida, seu lucro é 11 reais.

a) Para obter um lucro superior a 1000 reais, qual a quantidade mínima de pizzas inteiras da promoção ela tem que vender?

Solução:

É fácil perceber que dobrando a quantidade de pizzas vendidas, o lucro de Joana também dobra. Denominaremos de y a grandeza "lucro", de x a grandeza "quantidade de pizza vendida", de k o fator de proporcionalidade e vamos resolver por regra de três:

$$lucro = k \cdot quantidade\ de\ pizza\ vendida$$

$$y = k \cdot x\,,$$

substituindo os dados na igualdade acima, obtemos:

$$11 = k \cdot 3$$

$$1000 = k \cdot x\,,$$

$$\frac{11}{1000} = \frac{3}{x}$$

pela propriedade 1, obtemos:

$$11 \cdot x = 3 \cdot 1000$$

$$x = \frac{3 \cdot 1000}{11} \cong 272{,}73\,.$$

Vendendo 272,73 pizzas o lucro de Joana é aproximadamente mil reais. Para obter um lucro superior a mil reais, vendendo pizzas inteiras, Joana terá que vender 273 pizzas da promoção.

b) Os dois funcionários que trabalham para Joana conseguem montar 5 pizzas em 16 minutos. Joana tem intenção de aumentar o quadro de funcionário para ser capaz de montar 75 pizzas por hora. Quantos funcionários que trabalham no mesmo ritmo ela ainda precisa contratar?

Solução:

Observe o raciocínio: fixando o tempo em 16 minutos, dobrando o número de funcionários, é possível montar o dobro de pizzas, isto é, 10 pizzas. Fixando a quantidade de pizzas em 5 unidades, dobrando a quantidade de funcionários é possível montar as pizzas na metade do tempo, isto é, em 8 minutos. Portanto, a grandeza "número de funcionário" é diretamente proporcional a grandeza “quantidade de pizza” e é inversamente proporcional grandeza “tempo”. Vamos realizar as seguintes notações:

n	Número de funcionários
q	Quantidade de pizza
t	Tempo em minuto
k	Fator de proporcionalidade

Vamos escrever a seguinte relação:

$$n = k \cdot \frac{q}{t}\,,$$

substituindo os dados na relação acima e por regra de três, obtemos:

$$2 = k \cdot \frac{5}{16}$$
$$n = k \cdot \frac{75}{60}\,,$$
$$\frac{2}{n} = \frac{\frac{5}{16}}{\frac{75}{60}}$$

pela propriedade 1, obtemos:

$$\frac{150}{60} = \frac{5}{16} \cdot n$$
$$n = \frac{150 \cdot 16}{60 \cdot 5} = 8\,.$$

Como Joana já tem 2 funcionários, ela precisará contratar mais 6 funcionários.

8) O carro de Mateus pode ser abastecido com dois tipos de combustível: gasolina ou álcool. O litro de gasolina custa em média 3,10 reais e o litro de álcool custa em média 2,20 reais. Com gasolina o carro de Mateus percorre 13 km com um litro e com álcool percorre 9 km com um litro. Qual combustível é mais econômico

Mateus utilizar em uma viagem de 702 km de distância? Quantos reais ele vai gastar nesta situação?

9) Marta e Maria montaram juntas uma sorveteria. Marta colaborou com um capital de 20.000 reais e Maria com um capital de 30.000 reais. O lucro mensal será dividido em partes proporcionais aos capitais investidos por cada sócia. Em um mês em que o lucro foi de 5.750 reais, quantos reais Marta deve receber? E Maria?

Solução:

Nesta situação-problema, pretendemos dividir o lucro de 5.750 reais, em duas partes y_1 e y_2, proporcionais aos capitais, $x_1 = 20000$ e $x_2 = 30000$ aplicados na sorveteria por Marta e Maria, respectivamente,

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

$$\frac{y_1}{20000} = \frac{y_2}{30000},$$

da igualdade acima podemos escrever as seguintes relações, onde k é o fator de proporcionalidade:

$$y_1 = k \cdot 20000$$

$$y_2 = k \cdot 30000,$$

somando y_1 com y_2 obtemos o lucro total de 5.750 reais.

$$y_1 + y_2 = 5750$$

$$k \cdot 20000 + k \cdot 30000 = 5750$$

$$50000 \cdot k = 5750$$

$$k = \frac{5750}{50000} = 0{,}115,$$

computado o valor do fator de proporcionalidade, fica fácil constatar quantos reais de lucro cada irmã deve receber. Marta deve receber 2.300 reais. Observe:

$$y_1 = k \cdot 20000 = 0{,}115 \cdot 20000 = 2300\,.$$

Maria deve receber 3.450 reais. Observe:

$$y_2 = k \cdot 30000 = 0{,}115 \cdot 30000 = 3450\,.$$

10) Uma universidade possui o bloco A que atende 1215 alunos, o bloco B que atende 718 alunos e o bloco C que atende 877 alunos. Esta universidade investirá 702.500 reais nos três blocos, onde esta quantia será dividida de modo que as parcelas recebidas por cada bloco sejam proporcionais aos números de alunos atendidos. Quantos reais cada bloco deve receber?

11) Uma escola possui 580 alunos no período da manhã, 610 alunos no período da tarde e 350 alunos no período da noite. Esta escola recebeu 13.860 kg de alimento que deve ser divido entre os 3 turnos em partes proporcionais a quantidade de aluno de cada turno. Quantos kg de alimento caberão a cada turno?

Solução:

Nesta situação-problema, pretendemos dividir 13.860 kg de alimento, em três partes, y_1, y_2 e y_3 respectivamente proporcionais ao número de alunos de cada turno $x_1 = 580$, $x_2 = 610$ e $x_3 = 350$.

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3}$$
$$\frac{y_1}{580} = \frac{y_2}{610} = \frac{y_3}{350}\,,$$

da igualdade acima podemos escrever as seguintes relações, onde k é o fator de proporcionalidade:

$$y_1 = k \cdot 580$$
$$y_2 = k \cdot 610$$
$$y_3 = k \cdot 350\,,$$

somando as três partes y_1, y_2 e y_3 obtemos 13.860 kg que equivale ao total de alimento recebido pela escola,

$$y_1 + y_2 + y_3 = 13860$$
$$k \cdot 580 + k \cdot 610 + k \cdot 350 = 13860$$
$$1540 \cdot k = 13860$$
$$k = \frac{13860}{1540} = 9\,,$$

computado o valor do fator de proporcionalidade, fica fácil constatar quantos quilogramas de alimento cada turno deve receber.

O turno da manhã deve receber 5.220 kg.

$$y_1 = k \cdot 580 = 9 \cdot 580 = 5220\,.$$

O turno da tarde deve receber 5.490 kg.

$$y_1 = k \cdot 610 = 9 \cdot 610 = 5490$$

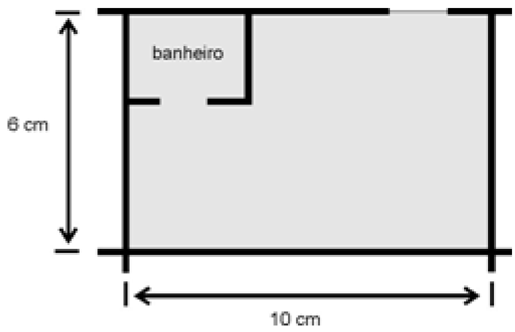
O turno da noite deve receber 3.150 kg.

$$y_1 = k \cdot 350 = 9 \cdot 350 = 3150\,.$$

12) (OBM, 2013) Um mercado vende laranjas apenas em sacos com 5 kg cada. De cada quilo de laranja, 55% é suco. Além disso, 1 kg de suco corresponde a 900 ml de suco. Sendo assim, quantos litros de suco podemos extrair de dois sacos de laranja?

a) 4,5
b) 4,8
c) 4,95
d) 5
e) 5,1

13) (OBM, 2013) As medidas indicadas na figura referem-se ao desenho que representa um dormitório retangular, incluindo um banheiro, de uma casa. Se a escala do desenho é de 1:45, qual é a área real desse cômodo?



a) 12,15 m²

b) 15,5 m²

c) 27 m²

d) 32 m²

e) 60 m²

Solução:

O enunciado afirma que o desenho está na escala 1:45. Isto quer dizer que cada 1 cm do desenho equivale a 45 cm real. Podemos montar a seguinte proporção para achar a medida real do lado maior de 10 cm.

$$\frac{1}{45} = \frac{10}{x}$$
$$x = 450\ cm\,,$$

a medida real do lado maior é 450 cm que equivale a 4,50 m. Podemos montar a seguinte proporção para achar a medida real do lado menor de 6 cm.

$$\frac{1}{45} = \frac{6}{x}$$
$$x = 270\ cm\,,$$

a medida real do lado menor é 270 cm que equivale a 2,70 m. A área real (A) do cômodo é:

$$A = 4{,}5 \cdot\ 2{,}70 = 12{,}15\ m^2\,.$$

Portanto, a área real do cômodo é 12,15 m², **alternativa a**.

14) (OBM, 2013) Se Joana comprar hoje um computador de 2000 reais, ela conseguirá um desconto de 5%. Se ela deixar para amanhã, irá conseguir o mesmo desconto de 5%, mas o computador irá aumentar 5%. Se ela esperar, o que acontecerá?

a) Nada, pois pagará a mesma quantia.

b) Ela perderá 100 reais.

c) Ela ganhará 105 reais.

d) Ela perderá 95 reais.

e) Ela perderá 105 reais.

15) (ENEM, 2010a) No monte de Cerro Armazones, no deserto de Atacama, no Chile, ficará o maior telescópio da superfície terrestre, o Telescópio Europeu Extremamente Grande (E-ELT). O E-ELT terá um espelho primário de 42 m de diâmetro, “o maior olho do mundo voltado para o céu”.

Disponível em: http://www.estadao.com.br. Acesso em: 27 abr. 2010 (adaptado)

Ao ler esse texto em uma sala de aula, uma professora fez uma suposição de que o diâmetro do olho humano mede aproximadamente 2,1 cm.

Qual a razão entre o diâmetro aproximado do olho humano, suposto pela professora, e o diâmetro do espelho primário do telescópio citado?

a) 1:20

b) 1:100

c) 1:200

d) 1:1.000

e) 1:2.000

Solução:

O diâmetro do olho é $D_o = 2{,}1\ cm$ e o diâmetro do espelho primário é $D_e = 42\ m$. Para calcular a razão entre o diâmetro do olho e o diâmetro do espelho primário, devemos escrever os diâmetros na mesma unidade de medida. Vamos transformar o diâmetro do espelho primário de metro para centímetros:

$$D_e = 42\ m = 42 \cdot 100 = 4200\ cm\,,$$

a razão entre o diâmetro do olho e o diâmetro do espelho primário é:

$$\frac{D_o}{D_e} = \frac{2{,}1}{4200} = \frac{2{,}1 : 2{,}1}{4200 : 2{,}1} = \frac{1}{2000}\,,$$

correspondendo a **alternativa e.**

16) (ENEM, 2010a) Uma empresa possui um sistema de controle de qualidade que classifica o seu desempenho financeiro anual, tendo como base o do ano anterior. Os conceitos são: **insuficiente**, quando o crescimento é menor que 1%; **regular**, quando o crescimento é maior ou igual a 1% e menor que 5%; **bom**, quando o crescimento é maior ou igual a 5% e menor que 10%; **ótimo**, quando é maior ou igual a 10% e menor que 20%; e **excelente**, quando é maior ou igual a 20%. Essa empresa apresentou lucro de R$ 132.000,00 em 2008 e de R$ 145.000,00 em 2009.

De acordo com esse sistema de controle de qualidade, o desempenho financeiro dessa empresa no ano de 2009 deve ser considerado

a) insuficiente
b) regular
c) bom
d) ótimo
e) excelente

17) (ENEM, 2010b) João tem uma loja onde fabrica e vende moedas de chocolate com diâmetro de 4 cm e preço de R$ 1,50 a unidade. Pedro vai a essa loja e, após comer várias moedas de chocolate, sugere ao João que ele faça moedas com 8 cm de diâmetro e mesma espessura e cobre R$ 3,00 a unidade.

Considerando que o preço da moeda depende apenas da quantidade de chocolate, João

a) Aceita a proposta de Pedro, pois, se dobra o diâmetro, o preço também deve dobrar.

b) Rejeita a proposta de Pedro, pois o preço correto seria R$ 12,00.

c) Rejeita a proposta de Pedro, pois o preço correto seria R$ 7,50.

d) Rejeita a proposta de Pedro, pois o preço correto seria R$ 6,00.

e) Rejeita a proposta de Pedro, pois o preço correto seria R$ 4,50.

Solução:

O preço da moeda é diretamente proporcional à quantidade de chocolate, isto é, ao volume de chocolate em cada moeda. Podemos escrever a seguinte relação, onde (P) é o preço da moeda, k é o fator de proporcionalidade, (d) é o diâmetro da moeda de chocolate, (e) é a espessura da moeda e resolveremos por regra de três:

$$Preço\ da\ moeda = k \cdot volume\ de\ chocolate$$

$$P = k \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot e\ ,$$

sabendo que a moeda de 4 cm de diâmetro custa R$ 1,50, vamos determinar quantos reais deve custar a moeda com 8 cm de diâmetro.

$$1{,}50 = k \cdot \pi \cdot \frac{4^2}{4} \cdot e = k \cdot \pi \cdot 4 \cdot e$$

$$P = k \cdot \pi \cdot \frac{8^2}{4} \cdot e = k \cdot \pi \cdot 16 \cdot e\ ,$$

$$\frac{1{,}50}{P} = \frac{k \cdot \pi \cdot 4 \cdot e}{k \cdot \pi \cdot 16 \cdot e} = \frac{4}{16},$$

$$\frac{1{,}50}{P} = \frac{4}{16},$$

pela propriedade 1, obtemos:

$$1{,}50 \cdot 16 = 4 \cdot P$$

$$24 = 4P$$

$$6 = P\,.$$

Portanto, a moeda, com diâmetro de 8 cm, deve custar 6 reais, **alternativa d**.

18) (ENEM, 2010b)

FONTES ALTERNATIVAS

Há um novo impulso para produzir combustível a partir de gordura animal. Em abril, a *High Plains Bioenergy* inaugurou uma biorrefinaria próxima a uma fábrica de processamento de carne suína em Guymon, Oklahoma. A refinaria converte a gordura de porco, juntamente com o óleo vegetal, em biodiesel. A expectativa da fábrica é transformar 14 milhões de quilogramas de banha em 112 milhões de litros de biodiesel.

Revista Scientific American. Brasil, Ago. 2009 (adaptado)

Considere que haja uma proporção direta entre a massa de banha transformada e o volume de biodiesel produzido.

Para produzir 48 milhões de litros de biodiesel, a massa de banha necessária, em quilogramas, será de, aproximadamente,

a) 6 milhões

b) 33 milhões

c) 78 milhões

d) 146 milhões

e) 384 milhões

19) (ENEM, 2012) O esporte de alta competição da atualidade produziu uma questão ainda sem resposta: qual é o limite do corpo humano? O maratonista original, o grego da lenda, morreu de fadiga por ter corrido 42 quilômetros. O americano Dean Karnazes, cruzando sozinho as planícies da Califórnia, conseguiu correr dez vezes mais em 75 horas.

Um professor de Educação Física, ao discutir com a turma o texto sobre a capacidade do maratonista americano, desenhou na lousa uma pista reta de 60 centímetros, que representaria o percurso referido.

Disponível em: http://veja.abril.com.br. Acesso em: 25 jun. 2011 (adaptado)

Se o percurso de Dean Karnazes fosse também em uma pista reta, qual seria a escala entre a pista feita pelo professor e a percorrida pelo atleta?

a) 1:700
b) 1: 7.000
c) 1:70.000
d) 1:700.000
e) 1:7.000.000

Solução:

A distância percorrida pelo maratonista grego (d_g) é:

$$d_g = 42\ km\,.$$

A distância percorrida pelo maratonista americano Dean Karnazes (d_a) é:

$$d_a = 10 \cdot d_g = 10 \cdot 42 = 420\ km\,.$$

O percurso de 420 km foi representado na lousa através de uma reta de 60 cm. Vamos transformar a distância, percorrida pelo maratonista americano Dean Karnazes, de km para cm, para identificar qual é a escala entre a pista feita pelo professor e a percorrida pelo atleta.

$$d_a = 420 \ \cdot 1000 = 420000\ m$$
$$d_a = 420000 \ \cdot 100 = 42000000\ cm\,,$$

resolvendo a proporção abaixo obtemos a escala almejada:

$$\frac{60}{42000000} = \frac{1}{x}\ ,$$

Aplicando a propriedade 1, obtemos

$$60x = 42000000$$
$$x = \frac{42000000}{60} = 700000\,.$$

Portanto, o percurso do maratonista americano Dean Karnazes foi representado na escala 1:700.000, **alternativa d.**

20) (ENEM, 2010b) No dia 12 de janeiro de 2010, o governo da Venezuela adotou um plano de racionamento de energia que previa cortes no fornecimento em todo país.

O ministro da Energia afirmou que uma das formas mais eficazes de se economizar energia nos domicílios seria o uso de lâmpadas que consomem 20% menos da energia consumida por lâmpadas normais.

Disponível em: http://www.bbc.co.uk. Acesso em: 23 abr. 2010 (adaptado).

Em uma residência, o consumo mensal de energia proveniente do uso de lâmpadas comuns é de 63 kWh. Se todas as lâmpadas dessa residência forem trocadas pelas lâmpadas econômicas, esse consumo passará a ser de, aproximadamente,

a) 9 kWh.
b) 11 kWh.
c) 22 kWh.
d) 35 kWh.
e) 50 kWh.

21) (ENEM, 2012) José, Carlos e Paulo devem transportar em suas bicicletas uma certa quantidade de laranjas. Decidiram dividir o trajeto a ser percorrido em duas partes, sendo que ao final da primeira parte eles redistribuiriam a quantidade de laranjas que cada um carregava dependendo do cansaço de cada um. Na primeira parte do trajeto José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção 6 : 5 : 4, respectivamente. Na segunda parte do trajeto José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção 4 : 4 : 2, respectivamente.

Sabendo-se que um deles levou 50 laranjas a mais no segundo trajeto, qual a quantidade de laranjas que José, Carlos e Paulo, nessa ordem, transportaram na segunda parte do trajeto?

a) 600, 550, 350
b) 300, 300, 150
c) 300, 250, 200
d) 200, 200, 100
e) 100, 100, 50

Solução:

Considere as notações abaixo:

x_1 Quantidade de laranja transportada por José na primeira parte do trajeto.

y_1 Quantidade de laranja transportada por Carlos na primeira parte do trajeto.

z_1 Quantidade de laranja transportada por Paulo na primeira parte do trajeto.

x_2 Quantidade de laranja transportada por José na segunda parte do trajeto.

y_2 Quantidade de laranja transportada por Carlos na segunda parte do trajeto.

z_2 Quantidade de laranja transportada por Paulo na segunda parte do trajeto.

Na primeira parte do trajeto José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção 6 : 5 : 4, respectivamente. Podemos escrever a seguinte igualdade, em que k_1 é o fator de proporcionalidade:

$$\frac{x_1}{6} = \frac{y_1}{5} = \frac{z_1}{4} = k_1 ,$$

de onde resulta:

$$x_1 = 6k_1$$
$$y_1 = 5k_1$$
$$z_1 = 4k_1 \,.$$

Na segunda parte do trajeto José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção 4 : 4 : 2, respectivamente. Podemos escrever a seguinte igualdade, em que k_2 é o fator de proporcionalidade:

$$\frac{x_2}{4} = \frac{y_2}{4} = \frac{z_2}{2} = k_2 \,,$$

de onde resulta:

$$x_2 = 4k_2$$
$$y_2 = 4k_2$$
$$z_2 = 2k_{2.}$$

O total de laranja transportado na primeira parte do trajeto é igual ao total de laranja transportado na segunda parte do trajeto. Então:

$$x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2$$
$$6k_1 + 5k_1 + 4k_1 = 4k_2 + 4k_2 + 2k_2$$
$$15k_1 = 10k_2$$
$$3k_1 = 2k_2 \,.$$

Vamos comparar as quantidades de laranja transportadas por José, Carlos e Paulo, respectivamente, na primeira parte do trajeto com a segunda parte:

Quantidades de laranja transportadas na primeira parte do trajeto

$$x_1 = 6k_1$$
$$y_1 = 5k_1$$
$$z_1 = 4k_1$$

Quantidades de laranja transportadas na segunda parte do trajeto

$$x_2 = 4k_2 = 6k_1$$
$$y_2 = 4k_2 = 6k_1$$
$$z_2 = 2k_2 = 3k_1 \,.$$

Podemos observar que José levou a mesma quantidade de laranja na primeira e na segunda parte do trajeto, que Carlos levou mais laranja na segunda parte do trajeto e Paulo levou menos laranja na segunda parte do trajeto. Então quem levou 50 laranjas a mais na segunda parte do trajeto foi Carlos.

$$y_2 - y_1 = 50$$
$$6k_1 - 5k_1 = 50$$
$$k_1 = 50 \,.$$

Vamos calcular quantas laranjas José, Carlos e Paulo levaram na segunda parte do trajeto:

$$x_2 = 4k_2 = 6k_1 = 6 \cdot 50 = 300$$
$$y_2 = 4k_2 = 6k_1 = 6 \cdot 50 = 300$$
$$z_2 = 2k_2 = 3k_1 = 3 \cdot 50 = 150 \,.$$

Portanto, José, Carlos e Paulo, levaram na segunda parte do trajeto, respectivamente, 300, 300 e 150 laranjas, que equivale a **alternativa b**.

22) (ENEM, 2010b) O IGP-M é um índice da Fundação Getúlio Vargas, obtido por meio da variação dos preços de alguns setores da economia, do dia vinte e um do mês anterior ao dia vinte do mês de referência. Ele é calculado a partir do Índice de Preços por Atacado (IPA-M), que tem peso de 60% do índice, do Índice de Preços ao Consumidor (IPC-M), que tem peso de 30%, e do Índice Nacional de Custo de Construção (INCC), representando 10%. Atualmente, o IGP-M é o índice para a correção de contratos de aluguel e o indexador de algumas tarifas, como energia elétrica.

INCC

Mês/ano	Índice do mês (em %)
Mar/2010	0,45
Fev/2010	0,35
Jan/2010	0,52

IPC-M

Mês/ano	Índice do mês (em %)
Mar/2010	0,83
Fev/2010	0,88
Jan/2010	1,00

IPA-M

Mês/ano	Índice do mês (em %)
Mar/2010	1,07
Fev/2010	1,42
Jan/2010	0,51

A partir das informações, é possível determinar o maior IGP-M mensal desse primeiro trimestre, cujo valor é igual a

a) 7,03%
b) 3,00%
c) 2,65%
d) 1,15%
e) 0,66%

23) (ENEM, 2012) Uma mãe recorreu à bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg de massa corporal a cada 8 horas.

Se a mãe ministrou corretamente 30 gotas do remédio a seu filho a cada 8 horas, então a massa corporal dele é de

a) 12 kg.
b) 16 kg.
c) 24 kg.
d) 36 kg.
e) 75 kg.

Solução:

A grandeza "quantidade de gotas" de remédio é diretamente proporcional a grandeza "massa corporal". Podemos escrever a seguinte relação, onde q é a quantidade de gotas de remédio, m é a massa corporal em kg, k é o fator de proporcionalidade, e por regra de três obtemos:

$$quantidade\ de\ gotas = k \cdot massa\ corporal$$

$$q = k \cdot m\,,$$

a bula do remédio recomenda 5 gotas para cada 2 kg de massa corporal a cada 8 horas. Para a situação em que foi ministrado 30 gotas, a cada 8 horas, podemos escrever a seguinte igualdade, para identificar a massa corporal do filho:

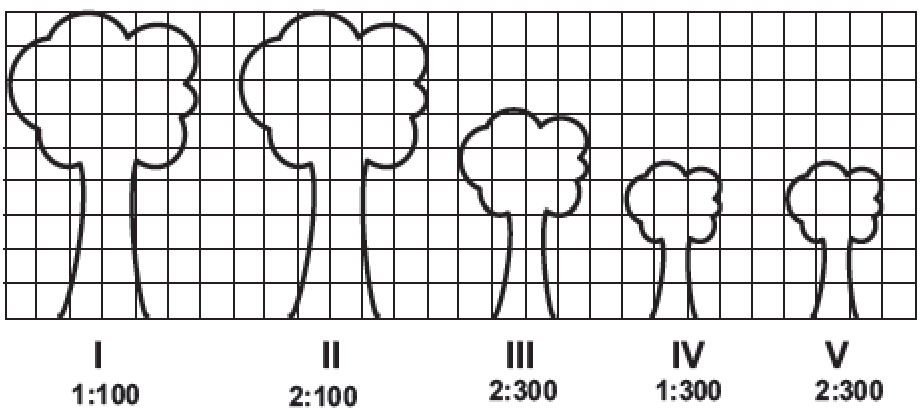
$$q = k \cdot m$$
$$5 = k \cdot 2$$
$$30 = k \cdot m$$
$$\frac{5}{30} = \frac{2}{m},$$

pela propriedade 1, obtemos:

$$5m = 60$$
$$m = \frac{60}{5} = 12\,.$$

Portanto o filho tinha massa corporal de 12 kg, **alternativa a**.

24) (ENEM, 2012) Um biólogo mediu a altura de cinco árvores distintas e representou-as em uma malha quadriculada, utilizando escalas diferentes, conforme indicações na figura a seguir.



Qual é a árvore que apresenta a maior altura real?

a) I

b) II
c) III
d) IV
e) V

25) (ENEM, 2012) Há, em virtude da demanda crescente de economia de água, equipamentos e utensílios como, por exemplo, as bacias sanitárias ecológicas, que utilizam 6 litros de água por descarga em vez de 15 litros utilizados por bacias sanitárias não ecológicas, conforme dados da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT).

Qual será a economia diária de água obtida por meio da substituição de uma bacia sanitária não ecológica, que gasta cerca de 60 litros por dia com a descarga, por uma bacia sanitária ecológica?

a) 24 litros
b) 36 litros
c) 40 litros
d) 42 litros
e) 50 litros

Solução:

Gasto de água de uma bacia sanitária não ecológica: 15 litros por descarga. Gasto de água de uma bacia sanitária ecológica: 6 litros por descarga. Economia de água por descarga = 15 -6 = 9 litros por descarga.

Vamos estimar a economia diária de água (E), obtida através da substituição de uma bacia sanitária não ecológica, que gasta cerca de 60 litros por dia com a descarga, por uma bacia sanitária ecológica, através da seguinte proporção:

$$\frac{15}{9} = \frac{60}{E} \ ,$$

pela propriedade 1, obtemos

$$15E = 540$$

$$E = 36 \, .$$

Portanto a economia diária é de 36 litros, correspondendo à **alternativa b**.

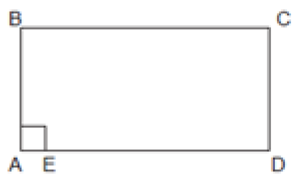
26) (ENEM, 2012) Nos *shopping centers* costumam existir parques com vários brinquedos e jogos. Os usuários colocam créditos em um cartão, que são descontados por cada período de tempo de uso dos jogos. Dependendo da pontuação da criança no jogo, ela recebe um certo número de tíquetes para trocar por produtos nas lojas dos parques.

Suponha que o período de uso de um brinquedo em certo *shopping* custa R$ 3,00 e que uma bicicleta custa 9.200 tíquetes.

Para uma criança que recebe 20 tíquetes por período de tempo que joga, o valor, em reais, gasto com créditos para obter a quantidade de tíquetes para trocar pela bicicleta é

a) 153
b) 460
c) 1.218
d) 1.380
e) 3.066

27) (ENEM, 2009) O governo cedeu terrenos para que famílias construíssem suas residências com a condição de que no mínimo 94% da área do terreno fosse mantida como área de preservação ambiental. Ao receber o terreno retangular ABCD, em que $AB = \frac{BC}{2}$, Antônio demarcou uma área quadrada no vértice A, para a construção de sua residência, de acordo com o desenho, no qual $AE = \frac{AB}{5}$ é lado do quadrado.



Nesse caso, a área definida por Antônio atingiria exatamente o limite determinado pela condição se ele

a) duplicasse a medida do lado do quadrado.
b) triplicasse a medida do lado do quadrado.
c) triplicasse a área do quadrado.
d) ampliasse a medida do lado do quadrado em 4%.
e) ampliasse a área do quadrado em 4%.

Solução:

Vamos chamar o lado *AE*, do quadrado, de x, isto é, $AE = x$. Com isso, podemos escrever as seguintes igualdades, em função de x.

$$AE = \frac{AB}{5} \Rightarrow AB = 5 \cdot AE = 5x$$
$$AB = \frac{BC}{2} \Rightarrow BC = 2 \cdot AB = 2 \cdot 5x = 10x\,.$$

A área quadrada (A_q), demarcada por Antônio, para construção de sua residência é:

$$A_q = lado \cdot lado = AE \cdot AE = x \cdot x = x^2.$$

A área do terreno (A_t), cedido pelo governo é:

$$A_t = base \cdot altura = BC \cdot AB = 10x \cdot 5x = 50x^2\,.$$

Vamos calcular o percentual (p) da área delimitada por Antônio em relação á área do terreno cedido pelo governo, através da seguinte proporção:

$$\frac{x^2}{50x^2} = \frac{p}{100}$$
$$\frac{1}{50} = \frac{p}{100}$$
$$100 = 50p$$
$$p = \frac{100}{50} = 2\,.$$

Portanto, a área demarcada por Antônio corresponde a 2% do terreno.

Para que a demarcação atinja 6% da área do terreno e reste 94% da área para preservação ambiental, Antônio tem que triplicar a área do quadrado, que corresponde à **alternativa c**.

28) (ENEM, 2009) Uma cooperativa de colheita propôs a um fazendeiro um contrato de trabalho nos seguintes termos: a cooperativa forneceria 12 trabalhadores e 4 máquinas, em um regime de trabalho de 6 horas diárias, capazes de colher 20 hectares de milho por dia, ao custo de R$ 10,00 por trabalhador por dia de trabalho, e R$ 1.000,00 pelo aluguel diário de cada máquina. O fazendeiro argumentou que fecharia contrato se a cooperativa colhesse 180 hectares de milho em 6 dias, com gasto inferior a R$ 25.000,00.

Para atender às exigências do fazendeiro e supondo que o ritmo dos trabalhadores e das máquinas seja constante, a cooperativa deveria:

a) manter sua proposta.

b) oferecer 4 máquinas a mais.

c) oferecer 6 trabalhadores a mais.

d) aumentar a jornada de trabalho para 9 horas diárias.

e) reduzir em R$ 400,00 o valor do aluguel diário de uma máquina.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Muitas situações da vida cotidiana funcionam de acordo com leis de proporcionalidade e o desenvolvimento do raciocínio proporcional é muito útil na interpretação de fenômenos do mundo real. De fato, como afirma os autores Gigante e Santos (2012, p. 44), “a proporcionalidade se apoia na estrutura multiplicativa e faz conexões entre o pensamento algébrico, o aritmético, o geométrico e o estatístico probabilístico”. Qual a melhor metodologia de ensino para abordar este assunto matemático?

Sabemos que a forma tradicional de se ensinar matemática obedece ao seguinte roteiro: definições, exemplos, demonstrações de propriedades seguidas de exercícios de aprendizagem, fixação e aplicação onde a organização dos conteúdos matemáticos, quase sempre é feita de modo excessivamente hierarquizada. É perceptível que esta metodologia não tem trazido bons resultados.

O presente trabalho enfatizou que a técnica de resolução de problemas é uma alternativa à forma tradicional de ensino dos conteúdos curriculares, apresentou a metodologia da resolução de problemas e, com intuito de auxiliar os professores da educação básica, abordou conceitos de proporcionalidade, sob a ótica da resolução de problemas, mediante os seguintes tópicos: grandezas diretamente proporcionais, divisão em partes proporcionais, porcentagem, grandezas inversamente proporcionais e grandezas direta ou inversamente proporcionais a várias outras. Cada tópico foi trabalhado a partir de uma situação-problema, utilizando uma sequência de etapas essenciais ao ensino de matemática através da técnica de resolução de problemas. Na medida em que se buscava solução para a situação-problema, foram trabalhados conceitos, definições, demonstrações e exemplos. O presente trabalho também apresentou várias situações-problema que podem ser utilizadas e exploradas no ensino de proporcionalidade.

Uma sugestão de trabalho futuro seria a abordagem do conteúdo proporcionalidade na sala de aula a partir de situações-problema sob a ótica da resolução de problemas e a avaliação do desempenho do aprendizado dos alunos nesta metodologia de ensino.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRANCA, N. A. Resolução de problemas como meta, processo e habilidade básica. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. (Org.). Tradução de Hygino H. Domingues e Olga Corbo. **A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/ SEF, 1998.

BUTTS, T. Formulando problemas adequadamente. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. (Org.). Tradução de Hygino H. Domingues e Olga Corbo. **A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1997.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática:** 1ª a 5ª séries para estudantes do curso de magistério e professores do 1º grau. 12ª edição. São Paulo: Ática, 2007.

ENEM. **Exame nacional do ensino médio**. Ministério da educação. INEP. Brasília, 2009.

ENEM. **Exame nacional do ensino médio**. Ministério da educação. INEP. 1ª aplicação. Brasília, 2010a.

ENEM. **Exame nacional do ensino médio**. Ministério da educação. INEP. 2ª aplicação. Brasília, 2010b.

ENEM. **Exame nacional do ensino médio**. Ministério da educação. INEP. Brasília, 2012.

FERREIRA, A. B. H. **Miniaurélio:** o minidicionário da língua portuguesa. 6ª edição. Curitiba: Positivo, 2004.

GIGANTE, A. M. B.; SANTOS, M. B. **Matemática:** reflexões no ensino, reflexos na aprendizagem. Erechim: Edelbra, 2012.

GUELLI, O. **Matemática:** uma aventura do pensamento. São Paulo: Ática, 1997.
HERMANOWICZ, H. J. **A critical look at problem solving as teaching method**. Illinois: 1961. Educational Leadership.

INEP. **Instituto nacional de estudos e pesquisas educacionais Anísio Teixeira**. Disponível em <http://portal.inep.gov.br/web/enem/sobre-o-enem>. Acesso em 20/02/2014.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **Temas e problemas elementares**. 2ª edição. Rio de Janeiro: Sociedade brasileira de matemática, 2006.

MONGELLI, M. C. J. G. **Resolução de problemas I**. Campo Grande, MS: Ed. UFMS, 2008.

NETTO, A. S.; MENDES, M. I. P. **Enem nota máxima -** matemática e suas tecnologias I. São Paulo: Leya, 2013.

OBM. **Olimpíada brasileira de matemática**. Rio de Janeiro: 2013. 35ª olimpíada brasileira de matemática, primeira fase, nível 1. IMPA.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

POLYA, G. Sobre a resolução de problemas de matemática na high school. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. (Org.). Tradução de Hygino Domingues e Olga Corbo. **A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1997.