

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
CENTRO DE MATEMÁTICA COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

Ronaldo Rodrigues Chaves

Lógica no Ensino Médio: Introdução e Aplicações

Santo André-SP

2014

Lógica no Ensino Médio: Introdução e Aplicações

Ronaldo Rodrigues Chaves



Universidade Federal do ABC

Título: Lógica no Ensino Médio: Introdução e Aplicações

Autor: Ronaldo Rodrigues Chaves

Orientador: Prof. Dr. Sinuê Dayan Barbero Lodovici

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de mestre no programa de Mestrado Profissional em Matemática junto à Universidade Federal do ABC.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Sinuê Dayan Barbero Lodovici

Universidade Federal do ABC

Prof. Dr. Ana Carolina Boero

Universidade Federal do ABC

Prof. Dr. Humberto Luiz Talpo

Universidade Federal de São Carlos

Santo André, 11 de novembro de 2014.

1	Introdução	8
2	Argumentos	9
3	Linguagem do cálculo de predicados de 1ª ordem	13
3.1	Constantes individuais e variáveis	13
3.2	Constantes de predicados	15
3.3	Operadores lógicos	16
3.4	Fórmulas	17
4	Cálculo Sentencial (CS)	21
4.1	Valoração	22
4.2	Consequência tautológica	27
4.3	Dedução	28
5	Aplicações do Cálculo Sentencial	38
6	Cálculo de predicados de primeira ordem (CPO)	62
6.1	Estrutura e Verdade	62
6.2	Consequência e verdade lógica	64
6.3	Dedução e regras de inferência para quantificadores	66
6.4	O símbolo Identidade	70
7	Aplicações na Matemática	71
7.1	Uma construção da geometria	71
7.2	Demonstrações no ensino médio	83
8	Considerações finais	87

Primeiramente a minha esposa Brígida, pela dedicação, carinho, zelo e paciência, sem os quais provavelmente este trabalho não seria realizado.

Meus familiares, pelo apoio e motivação.

Meu orientador, por ter acompanhado e contribuído para a realização deste trabalho.

A todos os professores e colegas de PROFMAT, em especial a Emanuel Fabiano Menezes Pereira, com quem estudo junto desde a graduação.

Por fim, a todos que contribuíram de alguma forma, meus sinceros agradecimentos.

Este trabalho apresenta uma introdução ao estudo de lógica, com a finalidade de auxiliar a compreensão das demonstrações matemáticas. Nele, apresentamos a linguagem do cálculo de predicados de primeira ordem (CPO), o sistema de lógica que estudaremos. Veremos o cálculo sentencial (CS), um subsistema do CPO que, embora mais restrito, possui ferramentas para resolver alguns problemas que, embora mais simples, possuem soluções similares as demonstrações matemáticas. Iniciaremos o estudo do CPO, verificando que suas regras de inferência são uma extensão das regras do CS. Por fim, veremos algumas aplicações do CPO na matemática e como adaptá-lo para ser utilizado no ensino básico, com o propósito de esclarecer o conceito e a estrutura das demonstrações matemáticas.

This paper presents an introduction of the study of logic, in order to aid understanding of mathematical statements. Here, we present the language of predicate calculus of first order (CPO), the system of logic that will be studied. We will see the sentence calculus (CS), a subsystem of the CPO that although narrower, has tools to solve some problems, though simpler, solutions have similar mathematical statements. Beginning the study of CPO, checking their inference rules that are an extension of the rules of CS. Finally, we will see some applications of CPO in mathematics and how to adapt it for use in primary education, in order to clarify the concept and the structure of mathematical proofs.

Dentre os objetivos da lógica, estão o princípio e métodos de inferência, assim como a análise de argumentos. Assim, dada uma asserção, gostaríamos de saber sua justificativa ou, supondo verdadeira uma sentença, o que poderíamos deduzir a partir dela. Trabalharemos com sentenças **declarativas**, isto é, sentenças que podemos tomar como verdadeiras ou falsas.

Veremos o **cálculo de predicados de primeira ordem (CPO)**, "o cerne da lógica clássica". Esta, "foi a primeira a ser historicamente desenvolvida e ainda é a lógica mais difundida e usada"[1]. Além de tratar de sentenças declarativas, a lógica clássica desconsidera questões temporais, pois "ela surgiu para auxiliar na fundamentação da matemática, em que o tempo não é essencial"[1]. Assim, trataremos de sentenças sempre no presente. O **CPO** é um sistema de lógica formal, com regras de inferências que permitirão a análise de validade de argumentos. Veremos também o **cálculo sentencial**, um subsistema do **CPO**, cujos métodos de inferência e de demonstrações são de nosso total interesse por serem similar às demonstrações matemáticas.

Inicialmente, falaremos de sentenças, enunciados e proposições. Muitos autores definem de forma diferente cada um deles. César A. Mortari define **sentença** (declarativa) como sendo "uma sequência de palavras do português que contenha ao menos um verbo flexionado", **proposição** como sendo "o significado de uma sentença declarativa" e **enunciado** como sendo "espécie de evento que pode ser datado, envolvendo a afirmação por alguém, em alguma situação, de alguma proposição". Essa diferença pode ser percebida na seguinte situação: suponhamos que em uma sala há duas pessoas, João e Paulo, sendo João um filósofo e Paulo um contador. A *sentença* "Eu sou filósofo" dita por João é verdadeira, enquanto dita por Paulo é falsa (supondo, claro, que ambos não são filósofo e contador simultaneamente). Usada por João, expressa a *proposição* verdadeira que João é filósofo, enquanto que usada por Paulo expressa a *proposição* falsa que Paulo é um filósofo. Agora, suponhamos que, ainda na mesma sala, João profira o *enunciado* (utilizando a *sentença*) "Esta televisão está desligada", apontado para um canto vazio da sala. Neste caso, o *enunciado* não expressa uma *proposição*, pois não há uma televisão lá. Assim, precisaríamos de uma teoria para detalhar a diferença entre os três (que não é o foco deste trabalho). Logo, trataremos sentenças e proposições indiferentemente, admitindo que o contexto em que aparece a sentença expressa uma única proposição e que as sentenças respeitarão as regras gramaticais do português. Acrescentaremos, ainda, que uma expressão do português será uma *sentença* se esta pode ser considerada verdadeira ou falsa, não ambos. No exemplo acima, a sentença "Eu sou filósofo" seria trocada por "João é filósofo" ou "Paulo é filósofo", dependendo de quem a proferiu.

Considere as seguintes sentenças:

1. O dia está bonito.
2. Este giz é amarelo.
3. Todos os seres vivos são mortais.
4. João é um ser vivo.

2 Argumentos

5. João é mortal.
6. Todos os animais são répteis.
7. Cavalos são animais.
8. Cavalos são répteis.

Nosso bom senso mostra que algumas das sentenças acima são verdadeiras, outras falsas e algumas dependem de um contexto, opinião ou definição. A frase 1 pode ser verdadeira para uma pessoa e falsa para outra. A frase 2 é facilmente verificada, a menos que a pessoa a quem foi dita não pode identificar cores. Enfim, dada uma sentença declarativa, temos que esta deve ser verdadeira ou falsa, não ambos. Aqui não nos caberá, a priori, identificar sentenças como verdadeiras ou falsas. Interessará-nos a análise de argumentos e/ou a justificativa de sentenças. Diremos que um **argumento** é uma lista com $n+1$ sentenças, sendo a última a conclusão e as demais premissas.

Pela nossa definição, é um argumento a lista:

(A1)

- P1: O dia está bonito.
- P2: Este giz é amarelo.
- ► Todos os seres vivos são mortais.

onde P1 e P2 são premissas e a sentença antecedida por "►" é a conclusão. Claramente, não há um nexos ou sentido entre as premissas e a conclusão. Esse tipo de argumento será chamado de **ilegítimo**.

Vejamos outro argumento:

(A2)

- P1: Todos os seres vivos são mortais.
- P2: João é um ser vivo.
- ► João é mortal.

2 Argumentos

Neste argumento, há uma relação de sentido entre a conclusão e as premissas. As premissas garantem a conclusão, não permitindo concluir o contrário. Este tipo de argumento será chamado de **legítimo**. Agora, considere o argumento:

(A3)

- P1: Todos os animais são répteis.
- P2: Cavalos são animais.
- ► Cavalos são répteis.

Pelo que vimos acima, (A3) é um argumento legítimo. Porém, soa-nos estranho, pois sabemos que a conclusão é falsa. Mas é aí que está a questão. No estudo de lógica, analisamos a validade dos argumentos. De outra forma, se as premissas fossem verdadeiras, necessariamente a conclusão também seria verdadeira. Não tivemos esse problema em (A2), pois as premissas são verdadeiras.

Em suma, dada uma sentença ou asserção, gostaríamos de obter sua justificativa. Aqui cabe uma observação: "nem todas as sentenças podem ser justificadas. A tentativa de justificar todas as asserções leva, como é óbvio, a um regresso infinito ou a um círculo vicioso. Com efeito, imagine-se que alguém solicita justificativa para a asserção A. Para justificá-la é preciso lançar mão de outras asserções B, C, etc. Mas estas novas asserções podem exigir justificção e se cai numa regressão ao infinito. A regressão pode ser rompida, caso em que se cai num círculo vicioso, justificando-se asserções com base em outras que já haviam exigido justificção"[2]. São quatro os tipos de sentença que dispensam justificativa:

- As de constatação imediata (frase 2, por exemplo);
- As suposições, frases do tipo: "Suponhamos que X". Se a sentença X for a frase 8, por exemplo, que é sabidamente falsa, nos interessará apenas sua consequência lógica;
- As "grandes crenças"(frase 3 ou 7, por exemplo),
- Os axiomas de uma teoria (matemática).

Na matemática, deseja-se concluir (deduzir) uma determinada proposição a partir de outras proposições verdadeiras, estas demonstradas anteriormente. Claramente,

2 Argumentos

não é possível concluir todas proposições, pois, como vimos anteriormente, cairíamos em uma regressão ao infinito ou a um círculo vicioso. Visto isso, em uma teoria, há a necessidade de assumir como verdadeiras determinadas proposições das quais podemos concluir outras proposições. Euclides (365?-275? a. C.), em seu livro *Elementos*, fez uso de algumas proposições consideradas autoevidentes (portanto não demonstradas), separando-as em dois grupos: os **axiomas**, proposições mais gerais, que podem ser usadas em qualquer ciência, como "Coisas iguais a uma terceira são iguais entre si", e os **postulados**, proposições específicas da teoria (nesse caso, geométricos), como "Dados dois pontos no plano, é possível traçar uma linha reta passando pelos dois". Porém, outros sistemas geométricos não euclidianos, como o desenvolvido por Bernhard Riemann (1826-1866), contradizem o de Euclides, não sendo válido, por exemplo, o famoso quinto postulado de Euclides, que se tivermos uma reta r e um ponto P fora dela, é possível traçar uma única reta passando por P que seja paralela a r . Dessa forma, não se pôde mais ter a certeza de que axiomas e postulados são autoevidentes. "O entendimento contemporânea do que são axiomas e postulados mudou: não são mais proposições verdadeiras autoevidentes, que não é preciso demonstrar, mas simplesmente qualquer proposição aceita sem demonstração em um sistema"[1]. Assim, a função dos axiomas é dar o alicerce para a construção da teoria e, desde Euclides, os sistemas axiomáticos passaram a ser o ideal não só para a matemática, mas também para a ciência.

3 LINGUAGEM DO CÁLCULO DE PREDICADOS DE 1ª ORDEM

O **cálculo de predicados de primeira ordem (CPO)** será o sistema de lógica que vamos estudar. Definiremos uma linguagem a fim de abreviar sentenças declarativas do português e eliminar ambiguidades.

3.1 Constantes individuais e variáveis

Analisando os argumentos A2 e A3 do capítulo anterior, vemos que podemos reformulá-los das seguintes maneiras:

(A2)

- P1: Para todo ser, se o ser é um ser vivo, então o ser é mortal.
- P2: João é um ser vivo.
- ► João é mortal.

(A3)

- P1: Para todo ser, se o ser é um animal, então o ser é um réptil.
- P2: O cavalo é um animal.
- ► O cavalo é um réptil.

Temos que os dois argumentos tem a forma:

- P1: Para todo x , se x é P , então Q .
- P2: a é P .
- ► a é Q .

3 Linguagem do cálculo de predicados de 1ª ordem

Assim, podemos analisar argumentos pela sua forma, não necessariamente pelo seu conteúdo. Dessa maneira, definiremos uma linguagem e regras de inferência que tornarão mais simples a análise dos argumentos.

Nos argumentos, geralmente nos referimos ou discorremos sobre algum objeto, pessoa, número, etc. É interessante estabelecer em cada situação um **universo de discurso**, isto é, um conjunto cujos elementos estão relacionados com o tema em discussão. Por exemplo, em (A3), discorre-se sobre seres vivos. Logo, podemos estabelecer como universo de discurso o conjunto formado por todos os seres vivos. Em geral, em discussões cotidianas, o universo de discurso não é citado, por estar claro pelo contexto. Na matemática, ele é estabelecido no início da teoria em discussão. Por exemplo, a discussão sobre números pares, permite ter como universo de discurso o conjunto dos números naturais (como é o caso da matemática discreta) ou o conjunto dos números inteiros, pois é onde estão definidos esses números.

Estabelecido nosso universo de discurso, necessitaremos nos referir a seus elementos. Os elementos deste conjunto serão chamados de **objetos de discurso**. Em nossa linguagem, cada objeto de discurso será representado univocamente por uma das letras minúsculas a, b, c, \dots, t , munidas ou não de índice. Estas letras serão chamadas de **constantes individuais**¹. Cabe salientar que essas constantes também poderão representar objetos com "descrições definidas", isto é, que designa "univocamente um indivíduo"[1]. Por exemplo, o objeto "Pelé" poderia ser referido como "o maior jogador de futebol brasileiro de todos os tempos", ao qual poderíamos dar a constante p . Assim, a sentença "O maior jogador de futebol brasileiro de todos os tempos está na Europa" pode ser abreviada para " p está na Europa" em nossa linguagem.

Poderemos discorrer sobre um objeto não especificado. Neste caso, este objeto será representado por uma das letras minúsculas x, y, z , munidas ou não de índices, que chamaremos de **variáveis**. Por exemplo, a expressão "Ele está na Europa" não podemos dizer se esta é verdadeira ou falsa (não sendo assim uma sentença) já que não podemos identificar com precisão a quem "ele" se refere. Diremos que esse tipo de expressão é um **aberto**. Assim, ao invés de dizer "Ele está na Europa", diremos " x

¹Quando estivermos no âmbito da matemática, que é o principal objetivo desse trabalho, usaremos como constantes individuais as nomenclaturas usuais da teoria em questão. Por exemplo, na geometria, pontos com letras maiúscula, retas com letras minúsculas; quando o universo de discurso for um conjunto numérico, não haverá a necessidade de utilizar constantes individuais, ou seja, o objeto de discurso será seu próprio representante.

está na Europa".

3.2 Constantes de predicados

No universo, os objetos têm propriedades ou se relacionam. Considere as sentenças:

1. A baleia é um mamífero.
2. João é mais alto do que Maria.
3. O ponto P está entre o ponto Q e o ponto R .

Em (1) temos que a baleia tem a propriedade de ser um mamífero. Em (2) e (3), João estabelece uma relação com Maria e o ponto P se relaciona com os pontos Q e R (ou tem a propriedade de estar entre os dois pontos).

Representaremos as propriedades ou relações dos objetos de discurso com letras maiúsculas A, B, C, \dots, Z , munidas ou não de índice. Estas letras serão chamadas de **constantes de predicado**. Por comodidade, poderemos utilizar também $\alpha, \beta, \gamma \dots$ como constantes de predicado. Assim, podemos definir como M a constante de predicado que representa "... é um mamífero", A para "... é mais alto do que ..." e α para "... está entre ... e ...", onde as reticências indicam o lugar a ser ocupado por um objeto de discurso. Dessa forma, uma constante de predicado não pode representar uma sentença. Para isso, precisamos "completá-la" com os objetos de discurso que fazem parte da dela. O número de objetos relacionados pela constante de predicado será o **grau** da constante predicado. Se P é uma constante de predicado de grau n , então diremos que P é um **predicado n -ário**.

Agora, veremos como abreviar sentenças para nossa linguagem. Devemos iniciar a expressão com a constante de predicado, seguida das constantes individuais na ordem em que figuram na sentença. Sendo b a constante individual para o objeto de discurso "baleia" e M o predicado 1-ário (ou unário) que representa "... é um mamífero", a sentença (1) será representada por Mb . Sendo j e m as constantes individuais para "João" e "Maria", respectivamente, e A o predicado 2-ário (ou binário) que representa "... é mais alto do que ...", a sentença (2) será representada por Ajm . Note que a expressão Amj representa a sentença "Maria é mais alta do que João". Em (3), como os objetos de discurso são elementos geométricos, as constantes individuais serão suas próprias nomenclaturas (no caso, letras maiúsculas). Neste caso, é conveniente

utilizarmos letras gregas como constantes de predicado para não causar confusão na leitura. Sendo α o predicado 3-ário (ou ternário) que representa "... está entre ... e ...", a sentença (3) será representada por αPQR . O procedimento é análogo para abertos, onde uma variável substitui um objeto de discurso não especificado. Por exemplo, a sentença "Alguém é mais alto do que ele", que podemos ler como " x é mais alto do que y " será representada por Axy .

Até aqui, vimos sentenças que se referiam a pelo menos um objeto de discurso. Há o caso de sentenças sem sujeito ou que não se referem a nenhum objeto de discurso, como em "Anoitece". Neste caso, teremos um predicado zero-ário N , por exemplo, que representará a sentença. Constantes de predicado de grau zero serão chamadas de **letras sentenciais**.

3.3 Operadores lógicos

Algumas sentenças apresentam uma estrutura mais complexa. Por exemplo: "João e Maria são estudantes". Esta sentença é uma abreviação (do português) para "João é estudante e Maria é estudante", ou seja, é formada por duas sentenças mais simples ("João é estudante", "Maria é estudante") unidas pela expressão do português "e". "Esse tipo de expressão que forma sentenças a partir de sentenças mais simples será chamado de **operador lógico** ou **conectivo**"[1]. Sendo exx : " x é estudante", j : "João", m : "Maria", a sentença "João e Maria são estudantes" pode ser representada por " Ej e Em ". São exemplos de operadores lógicos (onde "... indica um lugar ocupado por uma sentença):

- Talvez ...
- Não ocorre que ...
- ... mas ...
- Ana crê que ...

Claramente, há um número muito grande de operadores, mas serão uns poucos de nosso interesse. Usaremos cinco operadores lógicos:

- O operador de conjunção "e", que representaremos por " \wedge ";
- O operador de negação "não", que representaremos por " \neg ";

3 Linguagem do cálculo de predicados de 1ª ordem

- O operador de disjunção "ou", que representaremos por " \vee ";
- O operador de implicação material ou condicional "se ..., então ...", que representaremos por " \rightarrow ";
- O operador de bicondicional "... se, e somente se, ...", que representaremos por " \leftrightarrow ".

Assim, usando as definições acima:

- $Ej \wedge Em$ representa: "João é estudante e Maria é estudante".
- $\neg Ej$ representa: "João não é estudante", ou ainda, "Não ocorre que João é estudante".
- $Ej \vee Em$ representa: "João é estudante ou Maria é estudante".
- $Ej \rightarrow Em$ representa: "Se João é estudante, então Maria é estudante".
- $Ej \leftrightarrow Em$ representa: "João é estudante se, e somente se, Maria é estudante".

3.4 Fórmulas

Agora, resta falarmos dos quantificadores. Para o próximo exemplo, nosso universo de discurso será o conjunto dos números inteiros. Considere as sentenças:

1. Todo número é par.
2. Algum número é par.

Seja Px : " x é par". Queremos abreviar as sentenças (1) e (2), mas elas não se referem a um objeto propriamente (ou claramente) dito. Em (1), ela quer dizer para qualquer objeto do universo, este objeto é par, enquanto que em (2), ela quer dizer que existe pelo menos um objeto do universo que é par. Nesses casos, usaremos os quantificador universal " \forall " (qualquer que seja ou para todo) e o existencial " \exists " (existe pelo menos um) para a variável que ocorre na sentença. Assim, as abreviações para (1) e (2) são, respectivamente, $\forall xPx$ e $\exists xPx$.

Até aqui, vimos como abreviar sentenças. Essas sentenças abreviadas facilitarão nosso estudo de lógica. Definamos **termo** como sendo constante individual ou variável.

3 Linguagem do cálculo de predicados de 1ª ordem

Definição 3.1 Se P é uma constante de predicado n -ário e c_1, \dots, c_n são termos, onde $n \in \mathbb{Z}$ e $n \geq 0$, então Pc_1, \dots, c_n é uma fórmula atômica [1]. Além disso:

1. Fórmulas atômicas são fórmulas;
2. Se α e β são fórmulas, então $\neg\alpha$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$ e $\alpha \leftrightarrow \beta$ são fórmulas (moleculares).
3. Se x é uma variável e α é uma fórmula, então $\forall x\alpha$ e $\exists x\alpha$ são fórmulas.

Até agora, vimos fórmulas bem simples, mas precisaremos trabalhar com fórmulas um pouco mais elaboradas. Então precisaremos de sinais de pontuação. Esses sinais serão parênteses (quando necessário, colchetes). A função dos parênteses é não permitir ambiguidades na leitura de uma fórmula e, em alguns casos, serão omitidos, sempre que não houver risco de erro na interpretação. Por exemplo, seja Mx : " x é um mamífero", b : "baleia", g : "golfinho" e Px : " x é um peixe". Considere as seguintes sentenças:

1. Se a baleia é um mamífero e o golfinho é um mamífero, então o golfinho não é um peixe ou a baleia não é um peixe.
2. A baleia é um mamífero e, se o golfinho é um mamífero, então não ocorre que o golfinho é um peixe ou que a baleia não é um peixe.

Pelo que vimos até aqui, a fórmula

$$Mb \wedge Mg \rightarrow \neg Pg \vee \neg Pb \quad (3.1)$$

permite várias leituras e, aparentemente, seria uma abreviação para as frases (1) e (2). Mas vemos que se tratam de sentenças diferentes. Em (2), temos uma conjunção, onde uma das partes é "A baleia é um mamífero". Já em (1), temos um condicional. Assim sendo, vamos estabelecer um critério de leitura de uma fórmula, quando esta não possuir parênteses, que permitiriam uma leitura não ambígua. A ordem de precedência dos conectivos (do mais "fraco" para o mais "forte") será: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ e \leftrightarrow . Dessa forma, na fórmula (3.1), como ocorre dois conectivos " \neg ", temos que estes negam a fórmula imediatamente a frente, antes do próximo operador. Assim a primeira "leitura" deve ser

$$Mb \wedge Mg \rightarrow (\neg Pg) \vee (\neg Pb).$$

3 Linguagem do cálculo de predicados de 1ª ordem

Seguindo, o próximo operador a ser analisado deve ser " \forall ", fazendo com que a segunda "leitura" seja

$$Mb \wedge Mg \rightarrow [(\neg Pg) \vee (\neg Pb)].$$

Agora, o operador " \wedge ":

$$(Mb \wedge Mg) \rightarrow [(\neg Pg) \vee (\neg Pb)]$$

.

Finalmente, o operador " \rightarrow ", fazendo com que a fórmula (3.1) seja lida, univocamente, como

$$(Mb \wedge Mg) \rightarrow [(\neg Pg) \vee (\neg Pb)],$$

tratando-se da sentença (1). Nada impede de escrevermos a fórmula (3.1) como sendo $(Mb \wedge Mg) \rightarrow (\neg Pg \vee \neg Pb)$. Estabelecido esse critério, a sentença (2) será abreviada para $Mb \wedge [Mg \rightarrow \neg(Pg \vee \neg Pb)]$.

As fórmulas do tipo $\forall x\alpha$ ou $\exists x\alpha$ nas quais x ocorre em α serão chamadas de **fórmulas gerais**, onde α , em ambos os casos, é o **escopo** do quantificador. Note que:

- as fórmulas $\gamma : \forall x(Px \rightarrow Qx)$ e $\delta : \forall xPx \rightarrow \forall xQx$ são, respectivamente, geral e molecular. Em γ , o escopo do quantificador é $(Px \rightarrow Qx)$. Em δ , há dois quantificadores. O escopo do primeiro quantificador é (Px) e do segundo é (Qx) .
- $\forall x_1 \dots \forall x_n \alpha$, onde x_1, \dots, x_n ocorrem em α , também é uma fórmula geral.

Há ainda os casos de fórmulas onde ocorrem variáveis não quantificadas. Por exemplo, em $\theta : \forall x(Pxy \wedge Qx) \rightarrow Rx$, a variável y está no escopo de um quantificador, mas não da variável x . A ocorrência de x em (Rx) não está no escopo de um quantificador. Se uma variável não está no escopo de um quantificador dessa variável dizemos que a ocorrência da variável é **livre**. Uma fórmula que possui pelo menos uma variável livre é dita **aberta**. Caso contrário, a fórmula é dita **fechada**, como em $\forall x \forall y [(Pxy \wedge Qx) \rightarrow Rx]$. Note que fórmulas fechadas representam sentenças.

Em suma, uma linguagem de primeira ordem \mathcal{L} do CPO consiste em:

- constantes e variáveis individuais;
- para cada $n \geq 0$, constantes de predicado n -ários;

3 Linguagem do cálculo de predicados de 1ª ordem

- operadores;
- quantificadores;
- sinais de pontuação.

De posse desses critérios, podemos converter sentenças para fórmulas do **CPO**. Aqui, cabe salientar as proposições categóricas, da teoria do silogismo de Aristóteles (384-322 a. C.)². Elas são da seguinte forma:

- Todo A é B.
- Nenhum A é B.
- Algum A é B.
- Algum A não é B.

Muitas sentenças de estrutura mais complexa podem ser escritas nesse formato. Por exemplo:

1. Todo número par é primo.
2. Nenhum número par é primo.
3. Algum número par é primo.
4. Algum número par não é primo.

Sendo Px : "x é par" e Qx : "x é primo", essas sentenças serão abreviadas para:

1. $\forall x(Px \rightarrow Qx)$.
2. $\forall x(Px \rightarrow \neg Qx)$.
3. $\exists x(Px \wedge Qx)$.
4. $\exists x(Px \wedge \neg Qx)$.

²Aristóteles criou a lógica como disciplina, embora alguns pensadores já haviam se ocupado com a questão da validade de argumentos. A teoria do silogismo foi o cerne da lógica aristotélica que, embora limitada, "foi considerada a lógica até bem pouco tempo atrás"[1].

4 CÁLCULO SENTENCIAL (CS)

Antes de estudarmos o CPO, vamos analisar argumentos, cujas estruturas internas das sentenças possamos ignorar. Para esses casos, veremos a noção de verdade e como validar argumentos através de regras de inferência.

Vejam alguns argumentos (já com suas formulações sugestivas):

(A4)

- P1: Se Maria dança, então João canta. ($Dm \rightarrow Cj$)
- P2: Maria dança. (Dm)
- ► João canta. (Cj)

(A5)

- P1: Se todo número inteiro é múltiplo de 1, então 0 é par. ($\forall xM_1x \rightarrow P0$)
- P2: Todo número inteiro é múltiplo de 1. ($\forall xM_1x$)
- ► 0 é par. ($P0$)

(A6)

- P1: Todo professor tem curso universitário. ($\forall x(Px \rightarrow Ux)$)
- P2: João é professor. (Pj)
- ► João tem curso universitário. (Uj)

Analisando (A4) e (A5), vemos que eles são da forma

- P1: $A \rightarrow B$.
- P2: A .
- ► B .

4 Cálculo Sentencial (CS)

isto é, um condicional antecedido por uma fórmula A e sucedido por B na premissa 1, a mesma fórmula A na premissa 2 e a mesma fórmula B como conclusão. Esse tipo de argumento será legítimo (como veremos mais a frente), independente das fórmulas A ou B . Analogamente, o argumento (A6) é da forma

- P1: A .
- P2: B .
- $\blacktriangleright C$.

ou seja, a segunda premissa, embora tenha relação com a primeira, estruturalmente são fórmulas diferentes. Se trata de um argumento legítimo, mas as estruturas internas das fórmulas são analisadas para a legitimidade do argumento (caso que estudaremos mais adiante). Essa parte da lógica que estuda os argumentos, ignorando a estrutura interna das fórmulas é o **cálculo sentencial (CS)** ou **lógica proposicional**. As sentenças (fórmulas) serão abreviadas apenas por *letras sentenciais* A, B, C , etc. Assim, teremos somente *fórmulas atômicas e moleculares*.

4.1 Valoração

Para analisar argumentos, é importante saber em que condição alguma fórmula é verdadeira ou falsa. Assim, precisamos de uma interpretação para as fórmulas do CS.

Definição 4.1 *Dado um universo de discurso, uma **função verdade** v é uma função, cujo domínio é o conjunto de todas as fórmulas e contradomínio o conjunto $\{V, F\}$, onde V é uma abreviação para "verdadeiro" e F para "falso".*

Visto que as fórmulas moleculares são construídas a partir das fórmulas atômicas, é bastante interessante que possamos determinar o valor de uma fórmula molecular a partir dos valores das fórmulas atômicas que as compõem. Sejam A e B fórmulas atômicas e v uma função verdade. Pela definição, pode ocorrer $v(A) = V$ e $v(\neg A) = V$, que é um caso que não nos interessa. Assim, precisamos estabelecer um tipo especial de função verdade com algumas propriedades de nosso interesse:

- Sendo A uma fórmula atômica, temos apenas duas opções, mas não ambas: $v(A) = V$ ou $v(A) = F$. Em qualquer caso, é razoável que $\neg A$ tenha o valor oposto de A . Assim, se $v(A) = V$, então $v(\neg A) = F$, e vice versa.

4 Cálculo Sentencial (CS)

- Apesar da interpretação usual, quando dizemos "A ou B", queremos dizer que "ocorre" A, B ou ambos. Dessa forma, $v(A \vee B) = F$ somente quando as duas forem, simultaneamente, falsas, isto é, $v(A) = v(B) = F$. Em qualquer outro caso, $v(A \vee B) = V$.
- O sentido da conjunção "e" é de simultaneidade. Assim, quando dizemos "A e B", queremos dizer que tanto A quanto B "ocorrem". Logo, $v(A \wedge B) = V$ somente quando $v(A) = v(B) = V$.
- A lógica clássica define que $v(A \rightarrow B) = F$ se, e somente se, $v(A) = V$ e $v(B) = F$, que, equivalentemente, pode ser formulada por $v(A \rightarrow B) = V$ se, e somente se, $v(\neg A) = V$ ou $v(B) = V$. A escolha $v(A \rightarrow B) = F$ se, e somente se, $v(A) = V$ e $v(B) = F$ é razoável, pois é o caso que não pode ocorrer numa dedução qualquer, mas causa discussões por tornar verdadeiras sentenças cujo antecedente do condicional não tem relação com seu sucessor. "A razão de a lógica clássica ter escolhido o caminho que escolheu é que essa análise do condicional, diz-se, é adequada para trabalhar na matemática"[1]. Uma forma de entendermos isso é que, de uma sentença falsa, podemos deduzir qualquer coisa, ou seja, se o antecedente de um condicional é falso, não importa o valor do sucessor desse condicional. Para citar um exemplo famoso, "Se $2 + 2 = 5$, então a Lua é feita de queijo" é verdadeira na lógica clássica. Outra forma de ver isso é um tipo de expressão usada em situações onde alguém faz uma afirmação absurda, como "Cavalos podem voar", e nós respondemos "Se cavalos podem voar, então eu sou um mico de circo". Um outro exemplo que pode causar uma certa desconfiança é a seguinte sentença: "Se existe um número real x tal que $x \neq 0$ e $x^{-1} = 0$, então $1 = 0$ ". Temos um condicional com antecedente e sucessor falsos e, de fato, a sentença é verdadeira¹.
- Podemos entender "A se, e somente se B" como "A é equivalente a B". Assim, é natural que $v(A \leftrightarrow B) = V$ se os valores das duas fórmulas são iguais.

Estabelecidas as propriedades, teremos:

Definição 4.2 : *Sejam A e B fórmulas atômicas e v uma função verdade. Diremos que v é uma **valoração** se:*

1. $v(A) = V$ se, e somente se, $v(\neg A) = F$. Da mesma maneira, se $v(A) = F$ se, e somente se, $v(\neg A) = V$.

¹Demonstraremos essa sentença posteriormente

4 Cálculo Sentencial (CS)

2. Se $v(A) = v(B) = F$, então $v(A \vee B) = F$. Em qualquer outro caso, $v(A \vee B) = V$.
3. Se $v(A) = v(B) = V$, então $v(A \wedge B) = V$. Em qualquer outro caso, $v(A \wedge B) = F$.
4. Se $v(A) = V$ e $v(B) = F$, então $v(A \rightarrow B) = F$. Em qualquer outro caso, $v(A \rightarrow B) = V$.
5. $v(A \leftrightarrow B) = V$ se, e somente se, $v(A) = v(B)$.

Agora, como saber o valor de uma fórmula qualquer? Um método que podemos utilizar é a construção de uma **tabela verdade**. Nela, estarão todos os valores possíveis para qualquer valoração. Podemos construir uma tabela verdade para uma fórmula da seguinte maneira:

1. Colocamos na primeira linha todas letras sentenciais que ocorrem na fórmula e, para cada operador, a fórmula "operada" pelo operador.
2. Atribuímos todos os valores possíveis para as letras sentenciais (note que a tabela terá $2^n + 1$ linhas, onde n é o número de letras sentenciais, excluídas as repetições, que ocorrem na fórmula).
3. A partir dos valores das letras sentenciais, completamos a tabela.

Exemplo 4.3 Atribuir todos os valores possíveis para $\gamma : (A \rightarrow B) \vee (A \wedge C)$, onde A, B e C são fórmulas atômicas.

Seguindo os passos, a construção será:

1.

A	B	C	$(A \rightarrow B)$	$(A \wedge C)$	$(A \rightarrow B) \vee (A \wedge C)$
---	---	---	---------------------	----------------	---------------------------------------
2. Como há 3 letras sentenciais, temos $2^3 = 8$ possibilidades para os valores dessas letras.

A	B	C	$(A \rightarrow B)$	$(A \wedge C)$	$(A \rightarrow B) \vee (A \wedge C)$
V	V	V			
V	V	F			
V	F	V			
V	F	F			
F	V	V			
F	V	F			
F	F	V			
F	F	F			

4 Cálculo Sentencial (CS)

3. Para completar a 4ª e 5ª colunas, basta aplicar a definição. Para completar a última coluna, devemos considerar a fórmula $\alpha \vee \beta$ onde $\alpha : (A \rightarrow B)$ e $\beta : (A \wedge C)$.

A	B	C	$(A \rightarrow B)$	$(A \wedge C)$	$(A \rightarrow B) \vee (A \wedge C)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	V
F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	F	V
F	F	F	V	F	V

Assim, vemos que γ recebe o valor V para uma valoração v_1 tal que $v_1(A) = V$, $v_1(B) = F$ e $v_1(C) = V$ (4ª linha). Nesse caso, diremos que $val(\gamma) = V$ **segundo** v_1 , que escreveremos $val_{v_1}(\gamma) = V$. Analogamente, sendo v_2 uma valoração tal que $v_2(A) = V$, $v_2(B) = F$ e $v_2(C) = F$ (5ª linha), temos que $val_{v_2}(\gamma) = F$.

Exemplo 4.4 Atribuir todos os valores possíveis para $\alpha : (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$.

A tabela verdade para α é:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(A \rightarrow B)$	$(\neg B \rightarrow \neg A)$	$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Nesse último exemplo, vemos que α recebe o valor V , para qualquer atribuição de valores para A e B . Esse tipo especial de fórmula é muito importante para nosso estudo de lógica.

Definição 4.5 Uma fórmula α é uma **tautologia** se $val(\alpha) = V$, para quaisquer valores dos átomos que as compõem, ou seja, $val_v(\alpha) = V$, para toda valoração v . Uma fórmula β é uma **contradição** se $val(\beta) = F$, para quaisquer valores dos átomos que as compõem, ou seja, $val_v(\beta) = F$, para toda valoração v .

Um bom exemplo de contradição é a fórmula $\alpha \wedge \neg\alpha$, que podemos verificar facilmente por uma tabela verdade. Além disso, se uma fórmula β é tautologia se,

4 Cálculo Sentencial (CS)

e somente se, $\neg\beta$ é uma contradição. Posteriormente, faremos muito uso de tautologias para deduções e demonstrações em geral. Verificar, via tabela verdade, se uma fórmula é tautologia pode ser um processo muito trabalhoso. É conveniente termos "formas" tautológicas, isto é, formais gerais de fórmulas em que podemos fazer substituições uniformes e ainda termos tautologias. Por exemplo, vimos que $\alpha : (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ é tautologia, mas será que se substituirmos todas as ocorrências da letra sentencial A em α pela fórmula $(A \rightarrow B) \vee (A \wedge C)$, por exemplo, ainda teremos uma tautologia? Para responder esta pergunta, precisamos:

Definição 4.6 *Seja α uma fórmula. Então $\alpha[P : \beta]$ é a fórmula obtida a partir de α pela substituição uniforme da letra sentencial P pela fórmula β .*

Teorema 4.7 *Se α é uma tautologia e β é uma fórmula, então $\alpha[P : \beta]$ é uma tautologia [2]*

Demonstração: *Seja $\alpha^* = \alpha[P : \beta]$ e v uma valoração.*

- **Caso 1:** *P não ocorre em β . Seja v_1 uma valoração tal que $v_1(P) = \text{val}_v(\beta)$ e, para toda letra sentencial X que ocorre em α^* , $v_1(X) = v(X)$. Assim, $\text{val}_{v_1}(\alpha) = \text{val}_v(\alpha^*)$. Agora, $\text{val}_{v_1}(\alpha) = V$, pois α é tautologia. Então, segue que $\text{val}_v(\alpha^*) = V$. Logo, α^* é tautologia.*
- **Caso 2:** *P ocorre em β . Basta considerar $\alpha_1 = [P : Q]$, onde Q é uma fórmula que não ocorre em α e seguir de forma análoga para $\alpha^* = [Q : \beta]$.*

□

O teorema 4.7 permite-nos dizer que $\gamma : (P \wedge Q \rightarrow A \wedge C) \leftrightarrow (\neg(A \wedge C) \rightarrow \neg(P \wedge Q))$ é uma tautologia, identificando que γ é obtida da tautologia $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ pela substituição uniforme de A por $P \wedge Q$ e de B por $A \wedge C$.

Apresentamos a lista de algumas tautologias mais notáveis (lembrando que α, β e γ são fórmulas quaisquer) [2]:

1. Princípio da identidade: $\alpha \rightarrow \alpha$
2. Cadeia inferencial: $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow [(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)]$
3. Intercâmbio de premissas: $[\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)] \leftrightarrow [\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)]$
4. Importação e exportação: $[\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)] \leftrightarrow [(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma]$
5. Negação do antecedente: $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

4 Cálculo Sentencial (CS)

6. Contraposição: $(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$
7. Dupla negação: $\neg\neg\alpha \leftrightarrow \alpha$
8. Princípio da não contradição: $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$
9. Leis de Morgan:
 - $\neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$
 - $\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$

Mais algumas tautologias que usaremos mais a frente:

1. $(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$
2. $(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow [(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)]$
3. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$
4. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$
5. $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$
6. $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$

4.2 Consequência tautológica

Dado um argumento, gostaríamos de legitimar ou não tal argumento. Queremos saber se as premissas acarretam a conclusão. Dito de outra forma, dado um conjunto finito de fórmulas (as premissas), se estas forem verdadeiras, então a conclusão tem que, necessariamente, ser verdadeira.

Definição 4.8 *Uma fórmula β é consequência tautológica (ou imediata) das fórmulas $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, escrevendo $\alpha_1, \dots, \alpha_n \models \beta$, se, nas tabelas de valores, a fórmula β recebe o valor V em todas as linhas em que as fórmulas $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ recebem o valor V.*

Vimos no início do capítulo que o argumento

- P1: $A \rightarrow B$.
- P2: A .
- $\blacktriangleright B$.

4 Cálculo Sentencial (CS)

é legítimo. Reformulando, dizemos que $A \rightarrow B, A \models B$. De fato, na tabela verdade

A	B	$(A \rightarrow B)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

a fórmula B recebe V nas linhas em que $(A \rightarrow B)$ e A recebem V .

Vimos que as tautologias recebem sempre o valor V . Assim, uma tautologia é consequência tautológica de qualquer fórmula, ou ainda, de nenhuma fórmula. Escreveremos $\models \alpha$ para dizer " α é tautologia".

Teorema 4.9 *Se $\alpha \models \beta$ se, e somente se, $\models \alpha \rightarrow \beta$.*

Demonstração: *Se $\alpha \models \beta$, temos que β recebe o valor V em todas as linhas que α recebe o valor V e, nessas linhas, $\alpha \rightarrow \beta$ recebem o valor V . Nas linhas onde α recebe o valor F , a fórmula $\alpha \rightarrow \beta$ recebe o valor V . Logo, $\alpha \rightarrow \beta$ é tautologia.*

Se $\models \alpha \rightarrow \beta$, quando α recebe o valor V , necessariamente β recebe o valor V . Logo, $\alpha \models \beta$.

□

Podemos generalizar o resultado, cuja demonstração é análoga:

Teorema 4.10 $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n \models \beta$ se, e somente se $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \models \alpha_n \rightarrow \beta$.

Teorema 4.11 $\models \alpha \leftrightarrow \beta$ se, e somente se, $\alpha \models \beta$ e $\beta \models \alpha$.

4.3 Dedução

Validar um argumento através de uma tabela verdade pode ser uma tarefa bem trabalhosa. Por exemplo, se uma fórmula possuir 7 letras sentenciais, a tabela verdade terá 129 linhas. É conveniente termos um modo prático para concluir se uma fórmula β pode ser *deduzida* de um conjunto de fórmulas (admitidas verdadeiras) Γ . Precisaremos *estabelecer*, de modo razoável, as regras de inferência, isto é, as situações nas quais podemos obter fórmulas a partir de outras fórmulas que possuíamos anteriormente. Utilizaremos essas regras como axiomas em nossa teoria, que serão baseadas em algumas consequências tautológicas. Serão as seguintes:

1. *Modus Ponens* (MP) : α e $\alpha \rightarrow \beta$, logo β .

4 Cálculo Sentencial (CS)

2. *Modus Tollens* (MT): $\alpha \rightarrow \beta$ e $\neg\beta$, logo $\neg\alpha$
3. *Conjunção* (C): α e β , logo $\alpha \wedge \beta$.
4. *Disjunção* (D): $\alpha \wedge \beta$, logo α . $\alpha \wedge \beta$, logo β .
5. *Expansão* (E): α , então $\alpha \vee \beta$. α , então $\beta \vee \alpha$.
6. *Silogismo Disjuntivo* (SD): $\alpha \vee \beta$ e $\neg\alpha$, logo β . $\alpha \vee \beta$ e $\neg\beta$, logo α .
7. *Silogismo Hipotético* (SH): $\alpha \rightarrow \beta$, $\beta \rightarrow \gamma$, logo $\alpha \rightarrow \gamma$.
8. *Condicionais para Bicondicionais* (CB): $\alpha \rightarrow \beta$ e $\beta \rightarrow \alpha$, logo $\alpha \leftrightarrow \beta$.
9. *Bicondicionais para Condicionais* (BC): $\alpha \leftrightarrow \beta$, logo $\alpha \rightarrow \beta$. $\alpha \leftrightarrow \beta$, logo $\beta \rightarrow \alpha$.

As consequências tautológicas (que podem ser verificadas por uma tabela de valores) utilizadas para a escolha das regras acima são, respectivamente:

1. $\alpha, \alpha \rightarrow \beta \models \beta$
2. $\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta \models \neg\alpha$
3. $\alpha, \beta \models \alpha \wedge \beta$
4. $\alpha \wedge \beta \models \alpha$
 $\alpha \wedge \beta \models \beta$
5. $\alpha \models \alpha \vee \beta$
 $\alpha \models \beta \vee \alpha$
6. $\alpha \vee \beta, \neg\alpha \models \beta$
 $\alpha \vee \beta, \neg\beta \models \alpha$
7. $\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma \models \alpha \rightarrow \gamma$
8. $\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \alpha \models \alpha \leftrightarrow \beta$
9. $\alpha \leftrightarrow \beta \models \alpha \rightarrow \beta$
 $\alpha \leftrightarrow \beta \models \beta \rightarrow \alpha$.

4 Cálculo Sentencial (CS)

Diremos que uma fórmula α é **logicamente equivalente** a uma fórmula β se $v(\alpha) = v(\beta)$, para toda valoração v . Estabeleceremos também o **princípio da substituição** (PS): "expressões logicamente equivalentes são intercambiáveis em enunciados em que ocorram. De fato, como só tratamos de enunciados cujo valor depende apenas dos valores dos seus enunciados componentes, se uma parte de um enunciado é substituída por um outro enunciado equivalente a essa parte, o valor do enunciado resultante é o mesmo do que o enunciado original"[2].

Definição 4.12 *Seja Γ um conjunto de fórmulas e β uma fórmula. Uma **dedução** (ou **demonstração**) de β a partir de Γ é uma sequência $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de fórmulas, tal que $\alpha_n = \beta$ e cada α_i , $1 \leq i \leq n$, é uma fórmula que pertence a Γ ou foi obtida, por meio de regras de inferência, a partir de fórmulas anteriores na sequência. Diremos que β é uma consequência lógica de Γ (ou que, de Γ deduz-se β), escrevendo $\Gamma \vdash \beta$.*

Sendo $\Gamma = \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ e tendo $\Gamma \vdash \beta$, ao invés de escrevermos " $\{\delta_1, \dots, \delta_n\} \vdash \beta$ ", por comodidade, escreveremos " $\delta_1, \dots, \delta_n \vdash \beta$ ". O uso do princípio da substituição pode tornar uma dedução mais simples. É conveniente ter em mãos algumas equivalências notáveis:

1. Leis de Morgan:

- $\neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$
- $\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$

2. Dupla negação: $\neg\neg\alpha \leftrightarrow \alpha$

3. Contraposição: $(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$

4. Definição de implicação: $(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$

5. Comutação:

- $(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\beta \vee \alpha)$
- $(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\beta \wedge \alpha)$

6. Associação:

- $(\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma)$
- $(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)$

Exemplo 4.13 Mostre que $A \rightarrow B, \neg B, A \vee C \vdash C$. Queremos explicitar a sequência $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, onde $\alpha_n = C$. Primeiramente, listaremos as premissas:

4 Cálculo Sentencial (CS)

1. $A \rightarrow B$
2. $\neg B$
3. $A \vee C$

Cada linha da lista, será uma fórmula da sequência procurada. Assim, teremos que justificar cada uma, citando a regra utilizada e a quais linhas esta se refere. As premissas serão indicadas pela letra **P**:

- | | |
|----------------------|----------|
| 1. $A \rightarrow B$ | P |
| 2. $\neg B$ | P |
| 3. $A \vee C$ | P |

Das premissas $A \rightarrow B$ e $\neg B$ (linhas 1 e 2), pela regra *Modus Tollens*, concluímos $\neg A$. Podemos incluí-la na sequência, sendo **MT** sua justificativa:

- | | |
|-------------|----------------|
| 4. $\neg A$ | 1, 2 MT |
|-------------|----------------|

Agora, de $A \vee C$ e $\neg A$ (linhas 3 e 4), pela regra Silogismo Disjuntivo, concluímos C , acrescentando-a a sequência, seguida de sua justificativa, finalizando a dedução:

- | | |
|--------|----------------|
| 5. C | 3, 4 SD |
|--------|----------------|

Note que a sequência apresentada não é única. De fato, A é equivalente a $\neg\neg A$ e, conseqüentemente, $A \vee C$ é equivalente a $\neg(\neg A) \vee C$, que por sua vez é equivalente a $\neg A \rightarrow C$ (definição de implicação). Assim, pelo princípio da substituição, $\neg A \rightarrow C$ poderia ser acrescentada a sequência, sendo **PS** sua justificativa, e ser utilizada, juntamente com $\neg A$ para concluirmos C por *Modus Ponnens*:

- | | |
|---------------------------|----------------|
| 1. $A \rightarrow B$ | P |
| 2. $\neg B$ | P |
| 3. $A \vee C$ | P |
| 4. $\neg(\neg A) \vee C$ | 3 PS |
| 5. $\neg A \rightarrow C$ | 4 PS |
| 6. $\neg A$ | 1, 2 MT |

7. C

5, 6 MP

Alguns argumentos válidos não podem ser deduzidos utilizando apenas as regras de inferência que estabelecemos. É o caso de alguns argumentos onde a conclusão é uma fórmula do tipo $\alpha \rightarrow \beta$, ou seja, um condicional. No exemplo acima, vimos como deduzir C de $A \rightarrow B, \neg B, A \vee C$. Todas fórmulas da sequência foram obtidas por meio das regras de inferência, sem a necessidade de premissas hipotéticas. Uma dedução na qual não houve adição de premissas é chamada de *derivação direta*.

Seja $\Gamma = \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ e deseja-se deduzir $\alpha \rightarrow \beta$ de Γ . Pelo teorema 4.10, $\delta_1, \dots, \delta_n \vdash \alpha \rightarrow \beta$ se, e somente se, $\delta_1, \dots, \delta_n, \alpha \vdash \beta$. Baseado nisso, estabeleceremos a regra *demonstração condicional* (DC): se deduz-se β de Γ e α , então deduz-se $\alpha \rightarrow \beta$ de Γ . Assim, para deduzir $\alpha \rightarrow \beta$ de Γ , adicionamos uma premissa hipotética α e, se conseguirmos concluir β , então, pela regra demonstração condicional, concluímos $\alpha \rightarrow \beta$. É claro que, a partir do momento da adição de uma premissa hipotética, as fórmulas concluídas estarão condicionadas a essa premissa, não podendo serem utilizadas na dedução fora deste contexto. Exemplifiquemos:

Exemplo 4.14 Mostre que $A \rightarrow (B \rightarrow C), D \rightarrow A, B \vdash D \rightarrow C$.

Começamos listando as premissas:

- | | |
|--------------------------------------|---|
| 1. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ | P |
| 2. $D \rightarrow A$ | P |
| 3. B | P |

Queremos deduzir $D \rightarrow C$, um condicional. Adicionamos, então, uma premissa hipotética (PH) D :

- | | |
|--------|-----|
| 4. D | *PH |
|--------|-----|

O símbolo "*" indica que as fórmulas concluídas a partir desta linha estarão condicionadas. Queremos concluir C . Agora, por *Modus Ponnens* (linhas 2 e 4), concluímos A :

- | | |
|--------|---------|
| 5. A | 2, 4 MP |
|--------|---------|

Novamente, por *Modus Ponnens* (linhas 1 e 5), concluímos $B \rightarrow C$ e, em seguida, também por *Modus Ponnens* (linhas 3 e 6) concluímos C :

4 Cálculo Sentencial (CS)

- | | |
|----------------------|---------|
| 6. $B \rightarrow C$ | 1, 5 MP |
| 7. C | 3, 6 MP |

Conseguimos concluir C , mas a partir de uma premissa hipotética. Queremos, então, "descartá-la" para obter a real conclusão desejada: $D \rightarrow C$. Faremos isso do seguinte modo: a premissa hipotética foi marcada com o símbolo "*"; então marcamos a conclusão condicionada a ela com o mesmo símbolo, indicando que esta foi obtida a partir da fórmula com a primeira marcação:

- | | |
|--------------------------------------|-----------|
| 1. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ | P |
| 2. $D \rightarrow A$ | P |
| 3. B | P |
| 4. D | *PH |
| 5. A | 2, 4 MP |
| 6. $B \rightarrow C$ | 1, 5 MP |
| 7. C | * 3, 6 MP |

Agora, aplicamos a regra *demonstração condicional*, obtendo a conclusão desejada (a partir da premissas iniciais). A numeração desta linha indica onde iniciou e onde encerrou a *demonstração condicional*, sendo que as linhas cuja numeração está entre esses números, incluindo-os, não podem ser usadas na sequência da dedução:

- | | |
|--------------------------------------|-----------|
| 1. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ | P |
| 2. $D \rightarrow A$ | P |
| 3. B | P |
| 4. D | *PH |
| 5. A | 2, 4 MP |
| 6. $B \rightarrow C$ | 1, 5 MP |
| 7. C | * 3, 6 MP |
| 8. $D \rightarrow C$ | 4, 7 DC |

4 Cálculo Sentencial (CS)

Exemplo 4.15 Mostre que $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)$ Temos que

$$A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)$$

se

$$A \rightarrow (B \rightarrow C), B \vdash A \rightarrow C$$

que por sua vez, é valido se

$$A \rightarrow (B \rightarrow C), B, A \vdash C$$

.

Iniciemos listando a (única) premissa e adicionamos a premissa hipotética, iniciando uma demonstração condicional:

$$1. A \rightarrow (B \rightarrow C) \quad \mathbf{P}$$

$$2. B \quad \mathbf{*PH}$$

A partir dessa premissa, queremos obter $A \rightarrow C$, outro condicional. Então, iniciaremos outra demonstração condicional dentro da anterior. Para isso, adicionaremos uma segunda premissa hipotética B , da qual queremos concluir C , naturalmente com uma marcação distinta da primeira:

$$3. A \quad \mathbf{**PH}$$

Seguindo, obtemos as linhas 4 e 5:

$$4. B \rightarrow C \quad \mathbf{1, 3 MP}$$

$$5. C \quad \mathbf{2, 4 MP}$$

Concluimos C , como queríamos. Logo, podemos eliminar a segunda premissa hipotética, concluindo $A \rightarrow C$ pela regra *demonstração condicional*:

$$1. A \rightarrow (B \rightarrow C) \quad \mathbf{P}$$

$$2. B \quad \mathbf{*PH}$$

4 Cálculo Sentencial (CS)

3. A	**PH
4. $B \rightarrow C$	1, 3 MP
5. C	** 2, 4 MP
6. $A \rightarrow C$	3, 5 DC

Note que a última conclusão está condicionada a primeira premissa hipotética. Mas é exatamente o que queríamos: a partir de B concluir $A \rightarrow C$. Assim, eliminamos essa premissa, obtendo a conclusão desejada:

1. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$	P
2. B	*PH
3. A	**PH
4. $B \rightarrow C$	1, 3 MP
5. C	** 2, 4 MP
6. $A \rightarrow C$	* 3, 5 DC
7. $B \rightarrow (A \rightarrow C)$	2, 6 DC

Resta-nos analisar um tipo especial de dedução: a *derivação indireta* ou *demonstração por absurdo*. Ela consiste em admitir como premissa a negação da fórmula a qual se quer obter, concluindo, assim, uma contradição. Dessa forma, a premissa admitida se torna imprópria, de onde concluimos a fórmula inicialmente desejada. Dito de outra forma: suponhamos que desejemos validar $\Gamma \vdash \alpha$. Agora, se

$$\Gamma, \neg\alpha \vdash \neg\beta \wedge \beta,$$

pela regra *demonstração condicional*, temos que

$$\Gamma \vdash \neg\alpha \rightarrow (\neg\beta \wedge \beta),$$

que, pelo *princípio da substituição*, é equivalente a

$$\Gamma \vdash \neg\neg\alpha \vee (\neg\beta \wedge \beta),$$

4 Cálculo Sentencial (CS)

que por sua vez, é equivalente a

$$\Gamma \vdash \alpha \vee (\neg\beta \wedge \beta).$$

Como não desejamos contradições, concluímos, então, α .

Sendo assim, seja $\Gamma = \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ e deseja-se deduzir α de Γ . Estabelecemos a regra *demonstração por absurdo* (DA): se deduz-se $\neg\beta \wedge \beta$ de Γ e $\neg\alpha$, então deduz-se α de Γ ; se deduz-se $\neg\beta \wedge \beta$ de Γ e α , então deduz-se $\neg\alpha$ de Γ .

Exemplo 4.16 Mostre que $A \rightarrow (B \vee C), B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \vdash \neg(D \wedge A)$.

Queremos concluir $\neg(D \wedge A)$. Começemos listando as premissas e supondo por absurdo (SPA) a negação do que se deseja:

- | | |
|-------------------------------|-------------|
| 1. $A \rightarrow (B \vee C)$ | P |
| 2. $B \rightarrow \neg A$ | P |
| 3. $D \rightarrow \neg C$ | P |
| 4. $\neg\neg(D \wedge A)$ | *SPA |

Note que a marcação "*" indica que toda fórmula concluída a partir desse ponto estará condicionada. Ao final eliminaremos essa premissa adicional similarmente as demonstrações condicionais. Prosseguindo:

- | | |
|-----------------------|----------------|
| 5. D | 4 D |
| 6. A | 4 D |
| 7. $B \vee C$ | 1, 6 MP |
| 8. $\neg C$ | 3, 5 MP |
| 9. B | 7, 8 SD |
| 10. $\neg A$ | 2, 9 MP |
| 11. $\neg A \wedge A$ | 6, 10 C |

Assim, concluímos $\neg A \wedge A$, uma contradição. Logo, a premissa $\neg\neg(D \wedge A)$ é imprópria. Pela regra *demonstração por absurdo*, obtemos a conclusão desejada e eliminamos a premissa adicional:

4 Cálculo Sentencial (CS)

1. $A \rightarrow (B \vee C)$	P
2. $B \rightarrow \neg A$	P
3. $D \rightarrow \neg C$	P
4. $D \wedge A$	*SPA
5. D	4 D
6. A	4 D
7. $B \vee C$	1, 6 MP
8. $\neg C$	3, 5 MP
9. B	7, 8 SD
10. $\neg A$	2, 9 MP
11. $\neg A \wedge A$	* 6, 10 C
12. $\neg(D \wedge A)$	4, 11 DA

5 APLICAÇÕES DO CÁLCULO SENTENCIAL

Vimos que o CS permite mostrar, de uma forma efetiva, a validade de alguns argumentos, cujas estruturas internas das premissas possamos ignorar. Claramente, não podemos, ainda, analisar premissas, cujas abreviações (fórmulas) requerem quantificadores. Porém, muitos são os casos em que, para solucionar um problema ou concluir alguma informação, as ferramentas do CS são suficientes para cumprir o que desejamos. A ideia principal (que é também um dos princípios básicos da matemática) é a seguinte: dado um conjunto de informações (supostamente verdadeiras), queremos obter novas informações que são consequências (lógicas) das primeiras.

Veremos, através de alguns exemplos, como obter novas informações através de deduções lógicas. É importante ressaltar que os métodos e princípios que utilizaremos se assemelham muito às demonstrações matemáticas. Dito de outra forma, as "técnicas" que utilizaremos podem ser vistas como um "treino" para habituar-se com demonstrações matemáticas.

Exemplo 5.1(IBMEC-2008) Considere as duas sentenças abaixo.

1. Se o filme já começou, então o telefone está desligado.
2. O telefone está desligado se, e somente se, o cidadão é educado.

Sabendo que a sentença (1) é falsa e a sentença (2) é verdadeira, é correto concluir que:

- a) o filme já começou, o telefone não está desligado e o cidadão é educado.
- b) o filme já começou, o telefone está desligado e o cidadão é educado.
- c) o filme já começou, o telefone não está desligado e o cidadão não é educado.
- d) o filme não começou, o telefone está desligado e o cidadão é educado.

5 Aplicações do Cálculo Sentencial

- e) o filme não começou, o telefone não está desligado e o cidadão não é educado.

Iniciemos formulando as sentenças:

- F : O filme já começou .
- D : O telefone está desligado.
- C : O cidadão é educado.

Consequentemente:

- $\neg F$: O filme não começou .
- $\neg D$: O telefone não está desligado.
- $\neg C$: O cidadão não é educado.

Assim, a sentença (1) será $F \rightarrow D$ e a sentença (2) será $D \leftrightarrow C$. Pelo enunciado, $F \rightarrow D$ é falsa. Logo, $\neg(F \rightarrow D)$ é verdadeira, onde teremos $\neg(F \rightarrow D)$ e $D \leftrightarrow C$ como premissas. Queremos, então, obter fórmulas a partir das premissas:

$$1. \neg(F \rightarrow D) \qquad \mathbf{P}$$

$$2. D \leftrightarrow C \qquad \mathbf{P}$$

Podemos usar a regra *bicondicionais para condicionais*:

$$3. D \rightarrow C \qquad \mathbf{2 \ BC}$$

$$4. C \rightarrow D \qquad \mathbf{2 \ BC}$$

Agora, utilizamos as equivalências notáveis (leis de Morgan, dupla negação e definição de implicação), salientando a importância delas nas nossas deduções:

$$5. \neg(\neg F \vee D) \qquad \mathbf{1 \ PS}$$

$$6. \neg\neg F \wedge \neg D \qquad \mathbf{5 \ PS}$$

$$7. F \wedge \neg D \qquad \mathbf{6 \ PS}$$

Seguindo, pela regra *disjunção*, obtemos duas fórmulas de nosso interesse, pois elas figuram dentre as alternativas do problema:

8. F 7 D

9. $\neg D$ 7 D

Resta-nos verificar se podemos concluir C ou $\neg C$. Pela regra *Modus Tollens* :

10. $\neg C$ 4, 9 D

Enfim, obtemos F , $\neg D$ e $\neg C$, isto é, o filme já começou, o telefone não está desligado e o cidadão não é educado, sendo **c** a alternativa correta.

Os próximos exemplos são enigmas do livro *A dama ou o Tigre?*, de Raymond Smullyan, inspirado no conto do escritor americano Frank Stockton, onde um prisioneiro deve escolher uma entre duas portas, sendo que em um dos aposentos há uma dama e no outro há um tigre. Caso o prisioneiro escolha o aposento onde está a dama, casa-se com ela; se escolher o aposento onde está o tigre, será devorado por ele. Smullyan, em seu livro, fala a respeito de um rei que, conhecendo a história de Stockton, julgava seus prisioneiros de forma semelhante. O prisioneiro deve escolher uma (entre duas ou mais) das portas baseado em seus letreiros e, se raciocinar logicamente, salvaria sua vida e ainda ganharia uma esposa. **Exemplo 5.2** Um prisi-

oneiro deve escolher um entre dois aposentos, cujas portas continham letreiros com os seguintes dizeres:

Porta 1: Neste aposento há uma dama e no outro há um tigre.

Porta 2: Em um destes aposentos, há uma dama, e em um destes aposentos há um tigre.

O rei explicou ao prisioneiro que cada um dos aposentos continha uma dama ou um tigre, não ambos, e que era possível haver tigres em ambos os aposentos, assim como damas em ambos. Afirmou, ainda, que um dos letreiros é verdadeiro e que o outro é falso. Presumindo que o prisioneiro prefere a dama, qual porta ele deve escolher? [3]

Podemos resolver esse enigma de forma relativamente fácil. O letreiro da porta 1 não pode ser verdadeiro, pois o da porta 2 também seria. Logo, basta analisar os casos que tornam o letreiro 1 falso e escolher o desejado. Porém, usaremos as ferramentas do **CS** para resolvê-lo. Iniciemos abreviando as sentenças:

5 Aplicações do Cálculo Sentencial

- D_1 : A dama está no aposento 1.
- T_1 : O tigre está no aposento 1.
- D_2 : A dama está no aposento 2.
- T_2 : O tigre está no aposento 2.

Consequentemente:

- $\neg D_1$: A dama não está no aposento 1.
- $\neg T_1$: O tigre não está no aposento 1.
- $\neg D_2$: A dama não está no aposento 2.
- $\neg T_2$: O tigre não está no aposento 2.

Dessa forma, os letreiros são abreviados para:

- Porta 1: $D_1 \wedge T_2$.
- Porta 2: $(D_1 \wedge T_2) \vee (T_1 \wedge D_2)$.

Agora, queremos listar as premissas. Claramente, quanto mais premissas tivermos, mais fácil será nossa dedução. Pelo enunciado, dado um aposento, este não está vazio e não há dois tigres ou duas damas. Começemos uma análise não formal. Assim, temos:

1. $D_1 \vee T_1$ **P**
(No aposento 1, há uma dama ou tigre.)
2. $D_2 \vee T_2$ **P**
(No aposento 2, há uma dama ou tigre.)
3. $\neg(D_1 \wedge T_1)$ **P**
(Não estão, simultaneamente, no aposento 1 a dama e o tigre.)
4. $\neg(D_2 \wedge T_2)$ **P**
(Não estão, simultaneamente, no aposento 2 a dama e o tigre.)

Poderíamos admitir como premissa, por exemplo, $D_1 \rightarrow \neg T_1$, já que não é difícil perceber que, se a dama está no aposento 1, então o tigre não está. Porém, podemos obter essa fórmula de maneira formal a partir da premissa 3 utilizando as equivalências notáveis. De fato, $\neg(D_1 \wedge T_1)$, pela Lei de Morgan, é equivalente a $\neg D_1 \vee \neg T_1$, que por sua vez, é equivalente a $D_1 \rightarrow \neg T_1$ pela definição de implicação. Logo:

5 Aplicações do Cálculo Sentencial

1. $D_1 \vee T_1$	P
2. $D_2 \vee T_2$	P
3. $\neg(D_1 \wedge T_1)$	P
4. $\neg(D_2 \wedge T_2)$	P
5. $D_1 \rightarrow \neg T_1$	3 PS
6. $D_2 \rightarrow \neg T_2$	4 PS
7. $T_1 \rightarrow \neg D_1$	5 PS
8. $T_2 \rightarrow \neg D_2$	6 PS
9. $\neg\neg D_1 \vee T_1$	1 PS
10. $\neg\neg D_2 \vee T_2$	2 PS
11. $\neg D_1 \rightarrow T_1$	9 PS
12. $\neg D_2 \rightarrow T_2$	10 PS

O fato de termos um letreiro verdadeiro e outro falso, faz com que tenhamos a premissa $(\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\neg\alpha \wedge \beta)$, onde $\alpha : D_1 \wedge T_2$ e $\beta : (D_1 \wedge T_2) \vee (T_1 \wedge D_2)$ ¹. Ou seja, temos duas possibilidades. Em geral, quando há duas possibilidades a serem consideradas, uma delas é imprópria, gerando contradições. Nesse caso, suspeitamos que o letreiro da porta 2 não pode ser falso. Assim, iniciaremos formalmente uma *demonstração condicional*:

1. $[(D_1 \wedge T_2) \wedge \neg[(D_1 \wedge T_2) \vee (T_1 \wedge D_2)]] \vee [\neg(D_1 \wedge T_2) \wedge [(D_1 \wedge T_2) \vee (T_1 \wedge D_2)]]$ P
 (A dama está no aposento 1 e o tigre no aposento 2, não ocorrendo que em um dos aposentos haja uma dama e no outro um tigre, **ou** não ocorre que a dama esteja no aposento 1 e o tigre esteja no aposento 2 e ocorre que, em um dos aposentos, há uma dama e no outro um tigre.)

2. $D_1 \vee T_1$ P
 (No aposento 1, há uma dama ou um tigre.)

3. $D_2 \vee T_2$ P
 (No aposento 2, há uma dama ou um tigre.)

¹Note que α "ocorre" em β , mas isto não será relevante.

5 Aplicações do Cálculo Sentencial

4. $\neg(D_1 \wedge T_1)$ **P**
 (No aposento 1, não há uma dama e um tigre.)
5. $\neg(D_2 \wedge T_2)$ **P**
 (No aposento 2, não há uma dama e um tigre.)
6. $(D_1 \wedge T_2) \wedge \neg[(D_1 \wedge T_2) \vee (T_1 \wedge D_2)]$ *** SPA**
 (A dama está no aposento 1 e o tigre no aposento 2, não ocorrendo que em um dos aposentos haja uma dama e no outro um tigre.)

Facilmente, chegamos a uma contradição:

7. $D_1 \wedge T_2$ **6 D**
 (A dama está no aposento 1 e o tigre no aposento 2.)
8. $\neg[(D_1 \wedge T_2) \vee (T_1 \wedge D_2)]$ **6 D**
 (Não ocorre que em um dos aposentos há uma dama e no outro um tigre.)
9. $\neg(D_1 \wedge T_2) \wedge \neg(T_1 \wedge D_2)$ **8 PS**
 (Não ocorre que a dama está no aposento 1 e o tigre no aposento 2 e não ocorre que o tigre está no aposento 1 e a dama no aposento 2.)
10. $\neg(D_1 \wedge T_2)$ **9 D**
 (Não ocorre que a dama está no aposento 1 e o tigre no aposento 2.)
11. $(D_1 \wedge T_2) \wedge \neg(D_1 \wedge T_2)$ *** 7, 10C**
 (A dama está no aposento 1 e o tigre no aposento 2 e não ocorre que a dama está no aposento 1 e o tigre no aposento 2.)
12. $\neg[(D_1 \wedge T_2) \wedge \neg[(D_1 \wedge T_2) \vee (T_1 \wedge D_2)]]$ **6, 11 DA**
 (Não ocorre que: a dama está no aposento 1 e o tigre no aposento 2, não ocorrendo que em um dos aposentos haja uma dama e no outro um tigre.)

Para concluirmos a linha 13, reescrevamos as linhas 1 e 12, para simplificar a leitura, como $(\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\neg\alpha \wedge \beta)$ e $\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$, respectivamente. Assim, por *silogismo disjuntivo*, concluimos $(\neg\alpha \wedge \beta)$, ou seja:

13. $\neg(D_1 \wedge T_2) \wedge [(D_1 \wedge T_2) \vee (T_1 \wedge D_2)]$ **1, 12 SD**
 (Não ocorre que a dama está no aposento 1 e o tigre no aposento 2 e ocorre que, em um dos aposentos, há uma dama e no outro um tigre.)

Com isso, podemos finalizar a dedução:

5 Aplicações do Cálculo Sentencial

14. $\neg(D_1 \wedge T_2)$ 13D
(Não ocorre que a dama está no aposento 1 e o tigre no aposento 2.)
15. $(D_1 \wedge T_2) \vee (T_1 \wedge D_2)$ 13D
(Em um dos aposentos, há uma dama e no outro um tigre.)
16. $T_1 \wedge D_2$ 14, 15SD
(A dama está no aposento 2 e o tigre no aposento 1.)
17. T_1 16 D
(O tigre está no aposento 1.)
18. D_2 16 D
(A dama está no aposento 2.)

Portanto, a dama está no aposento 2.

Note que não utilizamos as premissas 2, 3 e 4, não sendo fundamental sua listagem. Porém, quanto mais informações (no nosso caso, fórmulas) pudermos obter a partir dos enunciados, mais ferramentas temos para obter o que desejamos.

Exemplo 5.3 Um prisioneiro deve escolher uma entre três aposentos, cujas portas continham letreiros com os seguintes dizeres:

Porta 1: Há um tigre no aposento 2.

Porta 2: Há um tigre neste aposento.

Porta 3: Há um tigre no aposento 1.

O rei explicou ao prisioneiro que em um dos aposentos havia uma dama e, em cada um dos outros dois, um tigre. Novamente, não havia aposento com uma dama e um tigre. Além disso, era verdadeiro o letreiro na porta do aposento em que estava a dama, sendo falso pelo menos um dos outros dois. O que deve fazer o prisioneiro? [3] Uma maneira de resolver este enigma é supor a presença da dama em cada aposento:

- se a dama estivesse no aposento 2, então o letreiro 2 seria verdadeiro e, portanto, haveria um tigre no mesmo aposento, o que não poderia ocorrer. Logo, não é possível que a dama esteja no aposento 2;

5 Aplicações do Cálculo Sentencial

- se a dama estivesse no aposento 3, então seria verdadeiro o letreiro 3, ou seja, haveria um tigre no aposento 1. Assim, deveria haver um tigre também no aposento 2, fazendo com que os três letreiros fossem verdadeiros, o que também não pode ocorrer. Logo, também não é possível que a dama esteja no aposento 3.

Portanto, temos que a dama está no aposento 1.

Vejam como utilizar o CS para solucionar este enigma. Para $i \in \{1, 2, 3\}$, sejam:

- D_i : Há uma dama no aposento i .
- T_i : Há um tigre no aposento i .

Os letreiros são abreviados para:

- Porta 1: T_2 .
- Porta 2: T_2 .
- Porta 3: T_1 .

Inicialmente, temos:

- $D_i \vee T_i$ e $\neg(D_i \wedge T_i)$, para $i \in \{1, 2, 3\}$.
- $(D_1 \wedge T_2 \wedge T_3) \vee (T_1 \wedge D_2 \wedge T_3) \vee (T_1 \wedge T_2 \wedge D_3)$.
- $D_1 \vee D_2 \vee D_3$

A dama estar num aposento é um fator importante, pois isto torna seu letreiro verdadeiro. Pensando neste caso, temos os condicionais:

- $D_1 \rightarrow T_2$
- $D_2 \rightarrow T_2$
- $D_3 \rightarrow T_1$

Agora, $D_2 \rightarrow T_2, \neg(D_2 \wedge T_2) \vdash \neg D_2$. De fato:

1. $D_2 \rightarrow T_2$

P

(Se há uma dama no aposento 1, então há um tigre no aposento 2.)

5 Aplicações do Cálculo Sentencial

- | | |
|--|-----------------|
| 2. $\neg(D_2 \wedge T_2)$
(No aposento 2, não há uma dama e um tigre.) | P |
| 3. D_2
(Há uma dama no aposento 1.) | * SPA |
| 4. T_2
(Há um tigre no aposento 2.) | 1, 3 MP |
| 5. $D_2 \wedge T_2$
(No aposento 2, há uma dama e um tigre.) | 3, 4 C |
| 6. $\neg(D_2 \wedge T_2) \wedge (D_2 \wedge T_2)$
(No aposento 2, não há uma dama e um tigre e, no aposento 2, não há uma dama e um tigre.) | * 2, 5 C |
| 7. $\neg D_2$
(Há uma dama no aposento 1.) | 3, 6 DA |

Logo, temos que a dama não está no aposento 2. Agora, devemos analisar a veracidade dos letreiros. Precisaremos estabelecer, para $i \in \{1, 2, 3\}$:

- V_i : O letreiro da porta i é verdadeiro.

Agora, pelo texto, o letreiro da porta 1 é verdadeiro se e somente se o tigre está no aposento 2; o letreiro da porta 2 é verdadeiro se e somente se o tigre está no aposento 2; o letreiro da porta 3 é verdadeiro se e somente se o tigre está no aposento 1. Além disso, se a dama está no aposento i , então o letreiro da porta i é verdadeiro. Assim, temos:

- $V_1 \leftrightarrow T_2$
- $V_2 \leftrightarrow T_2$
- $V_3 \leftrightarrow T_1$
- $D_i \rightarrow V_i$, para $i \in \{1, 2, 3\}$.

Como deve haver pelo menos um letreiro falso, temos $\neg V_1 \vee \neg V_2 \vee \neg V_3$, que é equivalente a $\neg(V_1 \wedge V_2 \wedge V_3)$.

Até aqui, reunimos as premissas:

5 Aplicações do Cálculo Sentencial

1. $(D_1 \vee T_1) \wedge \neg(D_1 \wedge T_1)$ P
(No aposento 1, há uma dama ou um tigre, não ambos.)
2. $(D_2 \vee T_2) \wedge \neg(D_2 \wedge T_2)$ P
(No aposento 2, há uma dama ou um tigre, não ambos.)
3. $(D_3 \vee T_3) \wedge \neg(D_3 \wedge T_3)$ P
(No aposento 3, há uma dama ou um tigre, não ambos.)
4. $(D_1 \wedge T_2 \wedge T_3) \vee (T_1 \wedge D_2 \wedge T_3) \vee (T_1 \wedge T_2 \wedge D_3)$. P
(Há uma dama no aposento 1 e há um tigre no aposento 2 e há um tigre no aposento 3 **ou** há um tigre no aposento 1 e há uma dama no aposento 2 e há um tigre no aposento 3 **ou** há um tigre no aposento 1 e há um tigre no aposento 2 e há uma dama no aposento 3.)
5. $\neg(V_1 \wedge V_2 \wedge V_3)$ P
(Os três letreiros não são, simultaneamente, verdadeiros.)
6. $D_1 \rightarrow T_2$ P
(Se há uma dama no aposento 1, então há um tigre no aposento 2.)
7. $D_2 \rightarrow T_2$ P
(Se há uma dama no aposento 2, então há um tigre no aposento 2.)
8. $D_3 \rightarrow T_1$ P
(Se há uma dama no aposento 3, então há um tigre no aposento 1.)
9. $D_1 \rightarrow V_1$ P
(Se há uma dama no aposento 1, então o letreiro da porta 1 é verdadeiro.)
10. $D_2 \rightarrow V_2$ P
(Se há uma dama no aposento 2, então o letreiro da porta 2 é verdadeiro.)
11. $D_3 \rightarrow V_3$ P
(Se há uma dama no aposento 3, então o letreiro da porta 3 é verdadeiro.)
12. $V_1 \leftrightarrow T_2$ P
(O letreiro da porta 1 é verdadeiro se, e somente se, há um tigre no aposento 2.)
13. $V_2 \leftrightarrow T_2$ P
(O letreiro da porta 2 é verdadeiro se, e somente se, há um tigre no aposento 2.)

5 Aplicações do Cálculo Sentencial

14. $V_3 \leftrightarrow T_1$ **P**
 (O leiteiro da porta 3 é verdadeiro se, e somente se, há um tigre no aposento 1.)

Assim, podemos iniciar a dedução. Como vimos anteriormente, concluímos $\neg D_2$ e, consequentemente, T_2 :

15. D_2 *** SPA**
 (Há uma dama no aposento 2.)
16. T_2 **7, 15 MP**
 (Há um tigre no aposento 2.)
17. $D_2 \wedge T_2$ **15, 16 C**
 (Há uma dama no aposento 2 e há um tigre no aposento 2.)
18. $\neg(D_2 \wedge T_2)$ **2 D**
 (Não ocorre que, no aposento 2, há uma dama e um tigre.)
19. $\neg(D_2 \wedge T_2) \wedge (D_2 \wedge T_2)$ *** 17, 18 C**
 (Não ocorre que, no aposento 2, há uma dama e um tigre e ocorre que há uma dama no aposento 2 e há um tigre no aposento 2.)
20. $\neg D_2$ **15, 19 DA**
 (Não há uma dama no aposento 2.)
21. $D_2 \vee T_2$ **2 D**
 (No aposento 2, há uma dama ou um tigre.)
22. T_2 **20, 21 SD**
 (Há um tigre no aposento 2.)

Agora, restam duas opções: T_1 ou T_3 . Supondo por absurdo T_1 , obtemos:

23. T_1 *** SPA**
 (Há um tigre no aposento 1.)
24. $T_1 \wedge T_2$ **22, 23 C**
 (Há um tigre no aposento 1 e há um tigre no aposento 2.)
25. $(D_1 \wedge T_2 \wedge T_3)$ **** SPA**
 (Há uma dama no aposento 1 e há um tigre no aposento 2 e há um tigre no aposento 3.)

5 Aplicações do Cálculo Sentencial

26. D_1 25 **D**
 (Há uma dama no aposento 1.)
27. $D_1 \wedge T_1$ 23, 26 **C**
 (Há uma dama no aposento 1 e há um tigre no aposento 1.)
28. $\neg(D_1 \wedge T_1)$ 1 **D**
 (Não há, no aposento 1, uma dama e um tigre.)
29. $(D_1 \wedge T_1) \wedge \neg(D_1 \wedge T_1)$ **27, 28 **C**
 (Há uma dama no aposento 1 e há um tigre no aposento 1 e não há, no aposento 1, uma dama e um tigre.)
30. $\neg(D_1 \wedge T_2 \wedge T_3)$ 25, 29 **DA**
 (Não ocorre que: há uma dama no aposento 1 e há um tigre no aposento 2 e há um tigre no aposento 3.)

Note que a fórmula da linha 30 não é uma conclusão, pois ela está condicionada a suposição por absurdo da linha 23, ou seja, se T_1 , então $\neg(D_1 \wedge T_2 \wedge T_3)$. Além disso, a marcação da linha 23 é igual a das linhas 15 e 19. Isso não é um problema pois as duas primeiras tem a mesma função dos parênteses nas expressões aritméticas, ou seja, a segunda marcação "encerra" a primeira, sendo que a nova marcação (a terceira) não tem vínculo com as anteriores. Prosseguindo:

31. $(T_1 \wedge D_2 \wedge T_3)$ ** **SPA**
 (Há um tigre no aposento 1 e há uma dama no aposento 2 e há um tigre no aposento 3.)
32. D_2 31 **D**
 (Há uma dama no aposento 2.)
33. $D_2 \wedge \neg D_2$ ** 20, 32 **C**
 (Há uma dama no aposento 2 e não há uma dama no aposento 2.)
34. $\neg(T_1 \wedge D_2 \wedge T_3)$ 31, 33 **DA**
 (Não ocorre que: há um tigre no aposento 1 e há uma dama no aposento 2 e há um tigre no aposento 3.)
35. $(D_1 \wedge T_2 \wedge T_3) \vee (T_1 \wedge T_2 \wedge D_3)$. 4, 34 **SD**
 (Há uma dama no aposento 1 e há um tigre no aposento 2 e há um tigre no aposento 3 **ou** há um tigre no aposento 1 e há um tigre no aposento 2 e há uma dama no aposento 3.)

5 Aplicações do Cálculo Sentencial

36. $T_1 \wedge T_2 \wedge D_3$. 30, 35 **SD**
(Há um tigre no aposento 1 e há um tigre no aposento 2 e há uma dama no aposento 3.)
37. D_3 36 **D**
(Há uma dama no aposento 3.)
38. V_3 11, 37 **MP**
(O letreiro da porta 3 é verdadeiro.)
39. $T_2 \rightarrow V_1$ 12 **BC**
(Se há um tigre no aposento 2, então o letreiro da porta 1 é verdadeiro.)
40. $T_2 \rightarrow V_2$ 13 **BC**
(Se há um tigre no aposento 2, então o letreiro da porta 2 é verdadeiro.)
41. V_1 22, 39 **MP**
(O letreiro da porta 1 é verdadeiro.)
42. V_2 22, 40 **MP**
(O letreiro da porta 2 é verdadeiro.)
43. $V_1 \wedge V_2$ 41, 42 **C**
(São verdadeiros os letreiros das portas 1 e 2.)
44. $V_1 \wedge V_2 \wedge V_3$ 38, 43 **C**
(São verdadeiros os letreiros das portas 1, 2 e 3.)
45. $\neg(V_1 \wedge V_2 \wedge V_3) \wedge (V_1 \wedge V_2 \wedge V_3)$ * 5, 44 **C**
(Não são verdadeiros, simultaneamente, os letreiros das portas 1, 2 e 3 e são verdadeiros os letreiros das portas 1, 2 e 3.)
46. $\neg T_1$ 23, 45 **DA**
(Não há um tigre no aposento 1.)

Assim, concluímos T_2 (linha 22) e $\neg T_1$ (linha 46). Resta-nos apenas finalizar a dedução:

47. $D_1 \vee T_1$ 1 **D**
(Há uma dama no aposento 1 ou há um tigre no aposento 1.)
48. D_1 46, 47 **SD**
(Há uma dama no aposento 1.)

Portanto, o prisioneiro deve escolher o aposento 1.

Exemplo 5.4 Um prisioneiro deve escolher um entre nove aposentos, cujas portas continham letreiros com os seguintes dizeres:

- **Porta 1:** A dama está em um aposento de número ímpar.
- **Porta 2:** Este aposento está vazio.
- **Porta 3:** Ou o letreiro 5 está correto ou o letreiro 7 está errado.
- **Porta 4:** O letreiro 1 está errado.
- **Porta 5:** Ou o letreiro 2 ou o letreiro 4 está correto.
- **Porta 6:** O letreiro 3 está errado.
- **Porta 7:** A dama não está no aposento 1.
- **Porta 8:** Neste aposento há um tigre e o aposento 9 está vazio.
- **Porta 9:** Há um tigre neste aposento e o letreiro 6 está errado.

O rei explicou ao prisioneiro que em apenas um aposento havia uma dama; os oito restantes, ou abrigavam um tigre ou estavam vazios. Além disso, o rei acrescentou que o letreiro na porta do aposento da dama era verdadeiro, que eram falsos aqueles nas portas de aposentos com tigres e que poderiam ser verdadeiros ou falsos os letreiros dos aposentos vazios.

Após estudar a situação por um longo tempo, o prisioneiro indagou o rei, afirmando que o problema não havia solução. "Vamos lá, pelo menos me dê uma pista decente; o aposento 8 está ou não vazio?", perguntou o prisioneiro.

Ao receber do rei a informação solicitada, o prisioneiro pôde deduzir onde estava a dama.

Em que aposento estava a dama? [3]

Para $i \in \{1, \dots, 9\}$, sejam:

- D_i : A dama está no aposento i .
- T_i : Há um tigre no aposento i .
- Z_i : O aposento i está vazio.
- V_i : O letreiro da porta i é verdadeiro.

5 Aplicações do Cálculo Sentencial

Os letreiros são abreviado para:

- Porta 1: $D_1 \vee D_3 \vee D_5 \vee D_7 \vee D_9$
- Porta 2: Z_2
- Porta 3: $V_5 \vee \neg V_7$
- Porta 4: $\neg V_1$
- Porta 5: $V_2 \vee V_4$
- Porta 6: $\neg V_3$
- Porta 7: $\neg D_1$
- Porta 8: $T_8 \wedge Z_9$
- Porta 9: $T_9 \wedge \neg V_6$

Agora, vamos extrair do texto nossas premissa. Para $i \in \{1, \dots, 9\}$, temos que, se a dama está no aposento i , então o letreiro da porta i é verdadeiro e, se há um tigre no aposento i , então o letreiro da porta i é falso. Além disso, em um aposento ou há apenas uma dama ou há apenas um tigre ou este está vazio. Logo, nossas primeiras premissas são:

- $D_i \vee T_i \vee Z_i$
- $D_i \rightarrow V_i$
- $T_i \rightarrow \neg V_i$
- $\neg(D_i \wedge T_i)$
- $\neg(D_i \wedge Z_i)$
- $\neg(Z_i \wedge T_i)$

Cada letreiro gera um bicondicional:

- $V_1 \leftrightarrow (D_1 \vee D_3 \vee D_5 \vee D_7 \vee D_9)$
- $V_2 \leftrightarrow Z_2$
- $V_3 \leftrightarrow (V_5 \vee \neg V_7)$

5 Aplicações do Cálculo Sentencial

- $V_4 \leftrightarrow \neg V_1$
- $V_5 \leftrightarrow (V_2 \vee V_4)$
- $V_6 \leftrightarrow \neg V_3$
- $V_7 \leftrightarrow \neg D_1$
- $V_8 \leftrightarrow (T_8 \wedge Z_9)$
- $V_9 \leftrightarrow (T_9 \wedge \neg V_6)$

Note que há 63 premissas, o que tornaria uma dedução formal um trabalho não muito atraente. Sendo assim, utilizaremos as ferramentas do CS para obter conclusões por partes, ou seja, concluiremos novas fórmulas utilizando mais de uma lista e, em cada uma, listaremos apenas as premissas necessárias para a conclusão desejada.

Iniciemos, notando que, como disse o prisioneiro, esse problema não tem solução apenas com as premissas acima. Isso ocorre pela possibilidade de ter aposentos vazios, não permitindo obter nenhuma conclusão precisa, pois, nesse caso, o letreiro pode ser verdadeiro ou falso. Se o prisioneiro pôde deduzir onde estava a dama após obter a informação a respeito do aposento 8, então ele pôde saber com precisão se o respectivo letreiro era verdadeiro ou falso, ou seja, a informação dada a ele pelo rei era que o aposento 8 não estava vazio. Logo, obtemos como premissa $D_8 \vee T_8$. Assim, temos que

$$D_8 \vee T_8, D_8 \rightarrow V_8, V_8 \leftrightarrow (T_8 \wedge Z_9), T_8 \rightarrow \neg V_8 \vdash \neg V_8$$

. De fato:

1. $D_8 \vee T_8$ **P**
(A dama está no aposento 8 ou há um tigre no aposento 8.)
2. $D_8 \rightarrow V_8$ **P**
(Se a dama está no aposento 8, então o letreiro da porta 8 é verdadeiro.)
3. $V_8 \leftrightarrow (T_8 \wedge Z_9)$ **P**
(O letreiro da porta 8 é verdadeiro se, e somente se, há um tigre no aposento 8 e o aposento 9 está vazio.)
4. $T_8 \rightarrow \neg V_8$ **P**
(Se há um tigre no aposento 8, então o letreiro da porta 8 é falso.)

5 Aplicações do Cálculo Sentencial

- | | | |
|-----|--|-----------|
| 5. | D_8
(A dama está no aposento 8.) | * SPA |
| 6. | V_8
(O letreiro da porta 8 é verdadeiro.) | 2, 5 MP |
| 7. | $V_8 \rightarrow (T_8 \wedge Z_9)$
(Se o letreiro da porta 8 é verdadeiro , então há um tigre no aposento 8 e o aposento 9 está vazio.) | 3 BC |
| 8. | $T_8 \wedge Z_9$
(Há um tigre no aposento 8 e o aposento 9 está vazio.) | 6, 7 MP |
| 9. | T_8
(Há um tigre no aposento 8.) | 8 D |
| 10. | $\neg V_8$
(O letreiro da porta 8 é falso.) | 4, 9 MP |
| 11. | $V_8 \wedge \neg V_8$
(O letreiro da porta 8 é verdadeiro e o letreiro da porta 8 é falso.) | * 6, 10 C |
| 12. | $\neg D_8$
(A dama não está no aposento 8.) | 5, 11 DA |
| 13. | T_8
(Há um tigre no aposento 8.) | 1, 12 SD |
| 14. | $\neg V_8$
(O letreiro da porta 8 é falso.) | 4, 13 MP |

Sendo o letreiro 8 falso, concluiremos que o aposento 9 abriga um tigre e, consequentemente, o letreiro 6 será verdadeiro, isto é:

$$\neg(D_9 \wedge T_9), \neg V_8, D_9 \vee T_9 \vee Z_9, T_8, T_9 \rightarrow \neg V_9, V_9 \leftrightarrow (T_9 \wedge \neg V_6), D_9 \rightarrow V_9, V_8 \leftrightarrow (T_8 \wedge Z_9) \vdash V_6$$

De fato:

- | | | |
|----|---|---|
| 1. | $\neg(D_9 \wedge T_9)$
(Não ocorre, simultaneamente: a dama está no aposento 9 e há um tigre no aposento 9.) | P |
|----|---|---|

5 Aplicações do Cálculo Sentencial

2. $\neg V_8$ P
(O letreiro da porta 8 é falso.)
3. $D_9 \vee T_9 \vee Z_9$ P
(A dama está no aposento 9 ou há um tigre no aposento 9 ou o aposento 9 está vazio.)
4. $D_9 \rightarrow V_9$ P
(Se a dama está no aposento 9, então o letreiro da porta 9 é verdadeiro.)
5. T_8 P
(Há um tigre no aposento 8.)
6. $T_9 \rightarrow \neg V_9$ P
(Se há um tigre no aposento 9, então o letreiro da porta 9 é falso.)
7. $V_9 \leftrightarrow (T_9 \wedge \neg V_6)$ P
(O letreiro da porta 9 é verdadeiro **se, somente se**, há um tigre no aposento 9 e o letreiro da porta 6 é falso.)
8. $V_8 \leftrightarrow (T_8 \wedge Z_9)$ P
(O letreiro da porta 8 é verdadeiro **se, somente se**, há um tigre no aposento 8 e o aposento 9 está vazio.)
9. $(T_8 \wedge Z_9) \rightarrow V_8$ 8 BC
(Se há um tigre no aposento 8 e o aposento 9 está vazio, então o letreiro da porta 8 é verdadeiro.)
10. $\neg(T_8 \wedge Z_9)$ 2, 9 MT
(Não ocorre, simultaneamente: há um tigre no aposento 8 e o aposento 9 está vazio.)
11. $\neg T_8 \vee \neg Z_9$ 10 PS
(Não há um tigre no aposento 8 ou o aposento 9 não está vazio.)
12. $\neg Z_9$ 5, 11 SD
(O aposento 9 não está vazio.)
13. $D_9 \vee T_9$ 3, 12 SD
(A dama está no aposento 9 ou há um tigre no aposento 9.)

5 Aplicações do Cálculo Sentencial

14. D_9 * SPA
(A dama está no aposento 9.)
15. V_9 4, 14 MP
(O letreiro da porta 9 é verdadeiro.)
16. $V_9 \rightarrow (T_9 \wedge \neg V_6)$ 7 BC
(Se o letreiro da porta 9 é verdadeiro, **então** há um tigre no aposento 9 e o letreiro da porta 6 é falso.)
17. $T_9 \wedge \neg V_6$ 15, 16 MP
(Há um tigre no aposento 9 e o letreiro da porta 6 é falso.)
18. T_9 17 D
(Há um tigre no aposento 9.)
19. $D_9 \wedge T_9$ 14, 18 C
(Se a dama está no aposento 9, então há um tigre no aposento 9.)
20. $(D_9 \wedge T_9) \wedge \neg(D_9 \wedge T_9)$ * 1, 19 C
(A dama está no aposento 9 e há um tigre no aposento 9, e simultaneamente não ocorre: a dama está no aposento 9 e há um tigre no aposento 9.)
21. $\neg D_9$ 14, 20 DA
(A dama não está no aposento 9.)
22. T_9 13, 21 SD
(Há um tigre no aposento 9.)
23. $\neg V_9$ 6, 22 MP
(o letreiro da porta 9 é falso.)
24. $(T_9 \wedge \neg V_6) \rightarrow V_9$ 7 PS
(Se há um tigre no aposento 9 e o letreiro da porta 6 é falso, **então** o letreiro da porta 9 é verdadeiro.)
25. $\neg(T_9 \wedge \neg V_6)$ 23, 24 MT
(Não ocorre: há um tigre no aposento 9 e o letreiro da porta 6 é falso.)
26. $\neg T_9 \vee \neg(\neg V_6)$ 25 PS
(Não há um tigre no aposento 9 ou o letreiro da porta 6 não é falso.)

5 Aplicações do Cálculo Sentencial

27. $\neg\neg V_6$ 22, 26 SD
 (O letreiro da porta 6 não é falso.)

28. V_6 27 PS
 (O letreiro da porta 6 é verdadeiro.)

Prosseguindo, sendo verdadeiro o letreiro 6, podemos concluir que são falsos os letreiros 3 e 5 e verdadeiro o letreiro 7, isto é:

$$V_6, V_6 \leftrightarrow \neg V_3, V_3 \leftrightarrow (V_5 \vee \neg V_7) \vdash \neg V_5 \wedge V_7 \wedge \neg V_3$$

De fato:

1. V_6 P
 (O letreiro da porta 6 é verdadeiro.)

2. $V_6 \leftrightarrow \neg V_3$ P
 (O letreiro da porta 6 é verdadeiro se, e somente se, o letreiro da porta 3 é falso.)

3. $V_3 \leftrightarrow (V_5 \vee \neg V_7)$ P
 (O letreiro da porta 3 é verdadeiro se, e somente se, o letreiro da porta 5 é verdadeiro ou o letreiro da porta 7 é falso.)

4. $V_6 \rightarrow \neg V_3$ 2 BC
 (Se o letreiro da porta 6 é verdadeiro, então o letreiro da porta 3 é falso.)

5. $\neg V_3$ 1, 4 MP
 (O letreiro da porta 3 é falso.)

6. $(V_5 \vee \neg V_7) \rightarrow V_3$ 3 BC
 (Se o letreiro da porta 5 é verdadeiro ou o letreiro da porta 7 é falso, então o letreiro da porta 3 é verdadeiro.)

7. $\neg(V_5 \vee \neg V_7)$ 5, 6 MT
 (Não ocorre: o letreiro da porta 5 é verdadeiro ou o letreiro da porta 7 é falso.)

8. $\neg V_5 \wedge \neg(\neg V_7)$ 7 PS
 (O letreiro da porta 5 é falso e o letreiro da porta 7 não é falso.)

9. $\neg V_5 \wedge V_7$ 8 PS
 (O letreiro da porta 5 é falso e o letreiro da porta 7 é verdadeiro.)

5 Aplicações do Cálculo Sentencial

10. $\neg V_5 \wedge V_7 \wedge \neg V_3$ 5, 9 C
 (O letreiro da porta 5 é falso e o letreiro da porta 7 é verdadeiro e o letreiro da porta 3 é falso.)

Agora, $\neg V_5 \wedge V_7 \wedge \neg V_3, V_5 \leftrightarrow (V_2 \vee V_4), V_7 \leftrightarrow \neg D_1 \vdash \neg V_2 \wedge \neg V_4 \wedge \neg D_1$. De fato:

1. $\neg V_5 \wedge V_7 \wedge \neg V_3$ P
 (O letreiro da porta 5 é falso e o letreiro da porta 7 é verdadeiro e o letreiro da porta 3 é falso.)
2. $V_5 \leftrightarrow (V_2 \vee V_4)$ P
 (O letreiro da porta 5 é verdadeiro **se, e somente se**, o letreiro da porta 2 é verdadeiro ou o letreiro da porta 4 é verdadeiro.)
3. $V_7 \leftrightarrow \neg D_1$ P
 (O letreiro da porta 7 é verdadeiro se, e somente se, a dama não está no aposento 1.)
4. $\neg V_5$ 1 D
 (O letreiro da porta 5 é falso.)
5. V_7 1 D
 (O letreiro da porta 7 é verdadeiro.)
6. $(V_2 \vee V_4) \rightarrow V_5$ 2 BC
 (**Se** o letreiro da porta 2 é verdadeiro ou o letreiro da porta 4 é verdadeiro, **então** o letreiro da porta 5 é verdadeiro.)
7. $\neg(V_2 \vee V_4)$ 4, 6 MT
 (Não ocorre: o letreiro da porta 2 é verdadeiro ou o letreiro da porta 4 é verdadeiro.)
8. $\neg V_2 \wedge \neg V_4$ 7 PS
 (O letreiro da porta 2 é falso e o letreiro da porta 4 é falso.)
9. $V_7 \rightarrow \neg D_1$ 3 BC
 (Se o letreiro da porta 7 é verdadeiro, então a dama não está no aposento 1.)
10. $\neg D_1$ 5, 9 MP
 (A dama não está no aposento 1.)

5 Aplicações do Cálculo Sentencial

11. $\neg V_2 \wedge \neg V_4 \wedge \neg D_1$ 8, 10 C
(O leteiro da porta 2 é falso e o leteiro da porta 4 é falso e a dama não está no aposento 1.)

Além disso:

$$\neg V_5 \wedge V_7 \wedge \neg V_3, D_3 \rightarrow V_3, D_5 \rightarrow V_5 \vdash \neg D_3 \wedge \neg D_5$$

De fato:

1. $\neg V_5 \wedge V_7 \wedge \neg V_3$ P
(O leteiro da porta 5 é falso e o leteiro da porta 7 é verdadeiro e o leteiro da porta 3 é falso.)
2. $D_3 \rightarrow V_3$ P
(Se a dama está no aposento 3, então o leteiro da porta 3 é verdadeiro.)
3. $D_5 \rightarrow V_5$ P
(Se a dama não está no aposento 5, então o leteiro da porta 5 é verdadeiro.)
4. $\neg V_5$ 1 D
(O leteiro da porta 5 é falso.)
5. $\neg V_3$ 1 D
(O leteiro da porta 3 é falso.)
6. $\neg D_5$ 3, 4 MT
(A dama não está no aposento 5.)
7. $\neg D_3$ 2, 5 MT
(A dama não está no aposento 3.)
8. $\neg D_3 \wedge \neg D_5$ 6, 7 C
(A dama não está no aposento 3 e a dama não está no aposento 5.)

Como o leteiro 4 é falso, deduzimos que o leteiro 1 é verdadeiro, isto é:

$$\neg V_4, V_4 \leftrightarrow \neg V_1 \vdash V_1$$

De fato:

1. $\neg V_4$ P
(O leteiro da porta 4 é falso.)

5 Aplicações do Cálculo Sentencial

2. $V_4 \leftrightarrow \neg V_1$ **P**
(O letreiro da porta 4 é verdadeiro se, e somente se, o letreiro da porta 1 é falso.)
3. $\neg V_1 \rightarrow V_4$ **2 BC**
(Se o letreiro da porta 1 é falso, então o letreiro da porta 4 é verdadeiro.)
4. $\neg\neg V_1$ **1, 3 MT**
(O letreiro da porta 1 não é falso.)
5. V_1 **4 PS**
(O letreiro da porta 1 é verdadeiro.)

Por fim:

$$V_1 \leftrightarrow (D_1 \vee D_3 \vee D_5 \vee D_7 \vee D_9), V_1, \neg D_1, \neg D_9, \neg D_3 \wedge \neg D_5 \vdash D_7$$

De fato:

1. $V_1 \leftrightarrow (D_1 \vee D_3 \vee D_5 \vee D_7 \vee D_9)$ **P**
(O letreiro da porta 1 é verdadeiro se, somente se, a dama está no aposento 1 ou 3 ou 5 ou 7 ou 9.)
2. V_1 **P**
(O letreiro da porta 1 é verdadeiro.)
3. $\neg D_1$ **P**
(A dama não está no aposento 1.)
4. $\neg D_3$ **P**
(A dama não está no aposento 3.)
5. $\neg D_5$ **P**
(A dama não está no aposento 5.)
6. $\neg D_9$ **P**
(A dama não está no aposento 9.)
7. $V_1 \rightarrow (D_1 \vee D_3 \vee D_5 \vee D_7 \vee D_9)$ **1 BC**
(Se o letreiro da porta 1 é verdadeiro, então a dama está no aposento 1 ou 3 ou 5 ou 7 ou 9.)

5 Aplicações do Cálculo Sentencial

8. $D_1 \vee D_3 \vee D_5 \vee D_7 \vee D_9$ 2, 7 **MP**
(A dama está no aposento 1 ou 3 ou 5 ou 7 ou 9.)
9. $D_3 \vee D_5 \vee D_7 \vee D_9$ 3, 8 **SD**
(A dama está no aposento 3 ou 5 ou 7 ou 9.)
10. $D_5 \vee D_7 \vee D_9$ 4, 9 **SD**
(A dama está no aposento 5 ou 7 ou 9.)
11. $D_7 \vee D_9$ 5, 10 **SD**
(A dama está no aposento 7 ou 9.)
12. D_7 6, 11 **SD**
(A dama está no aposento 7.)

Logo, a dama estava no aposento 7.

6 CÁLCULO DE PREDICADOS DE PRIMEIRA ORDEM (CPO)

Vimos que o CS não é suficiente para analisar alguns tipos de argumentos. Agora, a estrutura interna de algumas fórmulas será considerada. Veremos as regras de inferência para fórmulas quaisquer, notando o paralelismo dos resultados do CPO com os do CS. Iniciemos analisando a noção de verdade no CPO.

6.1 Estrutura e Verdade

Gostaríamos, como no CS, de determinar se uma fórmula é verdadeira ou falsa, baseando-nos em seus componentes. Como as fórmulas do CPO são mais complexas, utilizaremos a noção de "estrutura" [1]:

Definição 6.1 Uma *estrutura* \mathfrak{A} para uma linguagem \mathcal{L} é um par ordenado $\langle A, I \rangle$, onde A é um conjunto não vazio, e I é uma função, que chamaremos de *interpretação*, tal que:

1. a toda constante individual c de \mathcal{L} , I associa um objeto de discurso $I(c) \in A$;
2. a cada letra sentencial S de \mathcal{L} , I associa um valor $I(S) \in \{V, F\}$;
3. a cada constante de predicado n -ário P de \mathcal{L} , $n \geq 1$, I associa um subconjunto $I(P) \subseteq A^n$.

Exemplifiquemos: Seja $A = \{\text{Arnaldo}, \text{Bernaldo}, \text{Cernaldo}, \text{Dernaldo}\}$ o universo de discurso e $\mathcal{L} = \{a, b, c, d, P, Q, R, S\}$ ¹ uma linguagem, onde P e Q são constantes de predicado unário, S uma constante de predicado zero-ário e R uma constante de predicado binário. Sejam $\mathfrak{A} = \langle A, I \rangle$ uma estrutura, S : "Está calor", P : "... é professor", Q : "... mora na Itália" e R : "... é mais alto do que ..." tal que:

- $I(a) = \text{Arnaldo}, I(b) = \text{Bernaldo}, I(c) = \text{Cernaldo}, I(d) = \text{Dernaldo}$;
- $I(S) = V$;

¹A rigor, deveríamos incluir em \mathcal{L} as variáveis, operadores e sinais de pontuação. Porém, por comodidade, listaremos apenas os elementos necessários para nossa análise.

6 Cálculo de predicados de primeira ordem (CPO)

- $I(P) = \{\text{Arnaldo}, \text{Bernaldo}, \text{Cernaldo}\};$
- $I(Q) = \{\text{Dernaldo}\};$
- $I(R) = \{(\text{Arnaldo}, \text{Bernaldo}), (\text{Arnaldo}, \text{Cernaldo}), (\text{Arnaldo}, \text{Dernaldo}), (\text{Bernaldo}, \text{Cernaldo}), (\text{Bernaldo}, \text{Dernaldo}), (\text{Cernaldo}, \text{Dernaldo})\}.$

Assim, a estrutura \mathfrak{A} dá a seguinte interpretação: Arnaldo, Bernaldo e Cernaldo são professores, Dernaldo mora na Itália, está calor e Arnaldo é mais alto do que Bernaldo, este mais alto que Cernaldo, que é mais alto que Dernaldo. Neste último exemplo, podemos ter uma noção informal de como estabelecer se algumas fórmulas são verdadeiras. Por exemplo, Pa é provavelmente verdadeira, segundo \mathfrak{A} , já que Arnaldo é de fato professor. Da mesma forma, Rba é provavelmente falsa, já que Bernaldo não é mais alto do que Arnaldo. Podemos também analisar, ainda informalmente, fórmulas fechadas com quantificadores, como $\forall xPx$ ou $\exists xQx$. Segundo \mathfrak{A} , temos que $\forall xPx$ deve ser falsa, pois não ocorre que todos os elementos de A são professores e $\exists xQx$ deve ser verdadeira, pois pelo menos um dos elementos de A mora na Itália.

Agora, dado um aberto, por exemplo Px , não temos como afirmar se esta fórmula é verdadeira ou falsa. Seja α uma fórmula aberta cujas variáveis livres são x_1, \dots, x_n . Diremos que $\forall x_1, \dots, \forall x_n \alpha$ é o **fecho** de α . Note que o fecho de α é uma fórmula fechada.

Definição 6.2 *Seja α uma fórmula aberta, cujas variáveis livres são x_1, \dots, x_n . Então $\alpha[x_1 : i_1, \dots, x_n : i_n]$ é a fórmula obtida a partir de α pela substituição das ocorrências livres das variáveis x_1, \dots, x_n em α pelas constantes i_1, \dots, i_n .*

Seja α uma fórmula. Se α é verdadeira segundo uma estrutura \mathfrak{A} , escreveremos $\mathfrak{A}(\alpha) = V$. Se α é falsa segundo uma estrutura \mathfrak{A} , escreveremos $\mathfrak{A}(\alpha) = F$. Se α é uma fórmula aberta cujas variáveis livres são x_1, \dots, x_n , então $\mathfrak{A}(\alpha) = V$ se, e somente se, $\mathfrak{A}(\forall x_1, \dots, \forall x_n \alpha) = V$. Utilizaremos a seguinte definição [1]:

Definição 6.3 *Seja \mathcal{L} uma linguagem de primeira ordem e \mathfrak{A} uma estrutura para \mathcal{L} .*

1. $\mathfrak{A}(S) = V$ se, e somente se $I(S) = V$, onde S é uma constante de predicado zero-ário;
2. $\mathfrak{A}(Pt_1 \dots t_n) = V$ se, e somente se $(I(t_1), \dots, I(t_n)) \in I(P)$, onde P é uma constante de predicado n -ária, para $n \geq 1$, e t_1, \dots, t_n são constantes individuais;

6 Cálculo de predicados de primeira ordem (CPO)

3. $\mathfrak{A}(\neg\alpha) = V$ se, e somente se $\mathfrak{A}(\alpha) = F$;
4. $\mathfrak{A}(\alpha \vee \beta) = V$ se, e somente se, $\mathfrak{A}(\alpha) = V$ ou $\mathfrak{A}(\beta) = V$;
5. $\mathfrak{A}(\alpha \wedge \beta) = V$ se, e somente se, $\mathfrak{A}(\alpha) = \mathfrak{A}(\beta) = V$;
6. $\mathfrak{A}(\alpha \rightarrow \beta) = V$ se, e somente se, $\mathfrak{A}(\alpha) = F$ ou $\mathfrak{A}(\beta) = V$;
7. $\mathfrak{A}(\alpha \leftrightarrow \beta) = V$ se, e somente se, $\mathfrak{A}(\alpha) = \mathfrak{A}(\beta)$;
8. $\mathfrak{A}(\forall x\alpha) = V$ se, e somente se $\mathfrak{A}(\alpha[x : i]) = V$, para toda constante individual i ;
9. $\mathfrak{A}(\exists x\alpha) = V$ se, e somente se $\mathfrak{A}(\alpha[x : i]) = V$, para alguma constante individual i .

Agora, podemos verificar, no exemplo anterior, a veracidade ou não de uma fórmula, pelo item 2 da Definição 6.3. Temos que:

- $I(a) \in I(P)$. Logo $\mathfrak{A}(Pa) = V$.
- $(I(b), I(a)) = (\text{Bernaldo}, \text{Arnaldo}) \notin I(R)$. Logo, $\mathfrak{A}(Rba) = F$.
- $\mathfrak{A}(Px[x : d]) = \mathfrak{A}(Pd) = F$, pois $I(d) \notin I(P)$.
- $\mathfrak{A}(Qx[x : d]) = \mathfrak{A}(Qd) = V$, pois $I(d) \in I(Q)$.

6.2 Consequência e verdade lógica

Vimos a importância das tautologias no CS. Agora, veremos seu correspondente no CPO.

Definição 6.4 Uma fórmula α é uma **verdade lógica** (ou **logicamente verdadeira**) se, e somente se, para toda estrutura \mathfrak{A} , $\mathfrak{A}(\alpha) = V$. Uma fórmula α é uma **contradição** (ou **logicamente falsa**) se, e somente se, para toda estrutura \mathfrak{A} , $\mathfrak{A}(\alpha) = F$.

Vejam algumas verdades lógicas:

1. $\forall xPx \leftrightarrow \neg\exists x\neg Px$
2. $\neg\forall xPx \leftrightarrow \exists x\neg Px$
3. $\exists xPx \leftrightarrow \neg\forall x\neg Px$
4. $\neg\exists xPx \leftrightarrow \forall x\neg Px$
5. $\forall xPx \rightarrow \forall xPx$

Note que $\forall xPx \rightarrow \forall xPx$ tem um forma tautológica $A \rightarrow A$. Nas fórmulas com formato tautológico, as estruturas têm o mesmo papel das valorações. Sendo assim, qualquer fórmula com forma tautológica é uma verdade lógica.

Definição 6.5 *Seja Γ um conjunto de fórmulas e α uma fórmula. Diremos que α é uma consequência lógica de Γ (ou que Γ **implica logicamente** α), escreveremos $\Gamma \models \alpha$, se, e somente se, para toda estrutura \mathfrak{A} , se $\mathfrak{A}(\gamma) = V$, para todo $\gamma \in \Gamma$, então $\mathfrak{A}(\alpha) = V$.*

Note que usamos o mesmo símbolo de consequência tautológica para consequência lógica. Assim como fizemos com as tautologias, escreveremos $\models \alpha$ para dizer que α é verdade lógica. Vejamos que também serão válidos, no CPO, os teoremas 4.9, 4.10 e 4.11.

Teorema 6.6 $\alpha \models \beta$ se, e somente se, $\models \alpha \rightarrow \beta$.

Demonstração: Se $\alpha \models \beta$:

Seja \mathfrak{A} uma estrutura tal que $\mathfrak{A}(\alpha) = V$. Por definição, $\mathfrak{A}(\beta) = V$. Assim, temos que $\mathfrak{A}(\alpha \rightarrow \beta) = V$. Agora, seja \mathfrak{B} uma estrutura tal que $\mathfrak{B}(\alpha) = F$. Temos, por definição, que $\mathfrak{B}(\alpha \rightarrow \beta) = V$. Logo, a fórmula $\alpha \rightarrow \beta$ recebe o valor V , para qualquer estrutura, sendo então uma verdade lógica.

Se $\models \alpha \rightarrow \beta$, quando α recebe o valor V , em uma estrutura \mathfrak{A} , necessariamente β recebe o valor V . Logo, $\alpha \models \beta$.

□

Podemos generalizar o resultado, cuja demonstração é análoga:

Teorema 6.7 $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n \models \beta$ se, e somente se $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \models \alpha_n \rightarrow \beta$.

Teorema 6.8 $\models \alpha \leftrightarrow \beta$ se, e somente se, $\alpha \models \beta$ e $\beta \models \alpha$.

Se $\models \alpha \leftrightarrow \beta$, diremos que α e β são **logicamente equivalentes**. Vejamos algumas verdades lógicas e equivalências notáveis, sendo \mathfrak{A} uma estrutura e A o universo de discurso:

- $\models \neg \forall x \alpha \leftrightarrow \exists x \neg \alpha$

De fato, se $\mathfrak{A}(\neg \forall x \alpha) = V$, então $\mathfrak{A}(\forall x \alpha) = F$, acarretando, por definição, que não ocorre $\mathfrak{A}(\alpha[x : i]) = V$ para todo $i \in A$, isto é, $\mathfrak{A}(\alpha[x : i]) = F$ para algum $i \in A$. Isso implica que $\mathfrak{A}(\neg \alpha[x : i]) = V$ para algum $i \in A$. Logo, $\mathfrak{A}(\exists x \neg \alpha) = V$

e, portanto, $\neg\forall x\alpha \models \exists x\neg\alpha$.

Se $\mathfrak{A}(\exists x\neg\alpha) = V$, então $\mathfrak{A}(\neg\alpha[x : a]) = V$ para algum $a \in A$. Suponhamos, por absurdo, $\mathfrak{A}(\neg\forall x\alpha) = F$. Então, $\mathfrak{A}(\forall x\alpha) = V$. Em particular, $\mathfrak{A}(\alpha[x : a]) = V$, o que nos leva a uma contradição. Logo, $\mathfrak{A}(\neg\forall x\alpha) = V$ e, portanto, $\exists x\neg\alpha \models \neg\forall x\alpha$.

- $\models \neg\exists x\alpha \leftrightarrow \forall x\neg\alpha$
- $\models \forall x(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\forall x\alpha \wedge \forall x\beta)$
- $\models \exists x(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\exists x\alpha \wedge \exists x\beta)$

A verificação das três últimas segue-se de forma análoga, notando que a última não vale a recíproca, isto é, não é uma verdade lógica a fórmula $\models (\exists x\alpha \wedge \exists x\beta) \rightarrow \exists x(\alpha \wedge \beta)$. Basta fazer $\alpha = Px$: "x é par" e $\beta = Ix$: "x é ímpar", daí quais segue o resultado.

6.3 Dedução e regras de inferência para quantificadores

Veremos agora as regras de inferência para o CPO. Elas serão uma extensão das regras utilizadas no CS. Assim, se quisermos validar o argumento

$$Pab \vee Qcdf, \forall xSx \wedge \neg Qcdf \vdash Pab,$$

procederemos da seguinte maneira:

- | | |
|-----------------------------------|----------------|
| 1. $Pab \vee Qcdf$ | P |
| 2. $\forall xSx \wedge \neg Qcdf$ | P |
| 3. $\neg Qcdf$ | 2 D |
| 4. Pab | 1, 3 SD |

Voltemos ao exemplo do capítulo 3:

(A6)

- P1: Todo professor tem curso universitário. ($\forall x(Px \rightarrow Ux)$)

6 Cálculo de predicados de primeira ordem (CPO)

- P2: João é professor. (Pj)
- ► João tem curso universitário. (Uj)

Se utilizássemos as ferramentas do CS, teríamos que o argumento acima seria da forma

- P1: A.
- P2: B.
- ► C.

que não seria válido. Faz-se, então, necessário introduzirmos as regras para quantificadores.

Definição 6.9 *Seja α uma fórmula, t um termo e x uma variável. Dizemos que t é substituível por x em α se nenhuma ocorrência de t em α esteja no escopo de algum quantificador para x [1].*

Tratemos, inicialmente, do quantificador universal, onde $\alpha(c)$ é uma fórmula contendo pelo menos uma ocorrência da constante c e $\alpha[c : x]$ é a fórmula obtida pela substituição de todas as ocorrências da constante c pela variável x

- Eliminação do Universal (EU): $\forall x\alpha$, logo $\alpha[x : c]$, para qualquer constante c .
- Introdução do Universal (IU): $\alpha(c)$, logo $\forall x\alpha[c : x]$, desde que a constante c não ocorra em premissa nem em hipótese vigente e seja substituível por x em α . [1]

A regra (EU) não oferece muita dificuldade, pois é o significado do quantificador universal. Assim, podemos validar o argumento (A6):

- | | |
|-----------------------------------|---------|
| 1. $\forall x(Px \rightarrow Ux)$ | P |
| 2. Pj | P |
| 3. $Pj \rightarrow Uj$ | 1 EU |
| 4. Uj | 2, 3 MP |

Note que (EU) aplica-se para fórmulas gerais. Assim, se tivermos, por exemplo, a fórmula $\forall xPx \rightarrow Ux$, não podemos concluir $Pj \rightarrow Uj$, pois $\forall xPx \rightarrow Ux$ não é uma fórmula geral (e sim molecular). O princípio da regra (IU) é simples: se deduzirmos

6 Cálculo de predicados de primeira ordem (CPO)

uma determinada fórmula para uma constante c qualquer (isto é, sem nenhum tipo de restrição), então a fórmula é válida para qualquer constante. Analisemos suas restrições:

- Seja Px : " x é professor" e j : "João". Claramente, não é correta a dedução:

- | | |
|------------------|-------------|
| 1. Pj | P |
| 2. $\forall xPx$ | 1 IU |

Neste caso, estaríamos concluindo que todos são professores. A constante j não teve um caráter geral, ocasionando o erro.

- Seja Mxy : " x é maior do que y ", no universo dos números reais. Considere a fórmula $\exists xMx^2$. Se aplicássemos, em uma dedução, a regra (IU) para essa fórmula, ficaríamos com $\forall x\exists xMxx$, onde o primeiro quantificador, neste caso, seria supérfluo, e ficaríamos, então com $\exists xMxx$, que não estaria correto.

Visto isso, para validar, por exemplo,

$$\forall x(Px \rightarrow Qx), \forall x(Qx \rightarrow Rx) \vdash \forall x(Px \rightarrow Rx),$$

procederemos como a seguir:

- | | |
|-----------------------------------|----------------|
| 1. $\forall x(Px \rightarrow Qx)$ | P |
| 2. $\forall x(Qx \rightarrow Rx)$ | P |
| 3. $Pc \rightarrow Qc$ | 1 EU |
| 4. $Qc \rightarrow Rc$ | 2 EU |
| 5. $Pc \rightarrow Rc$ | 3, 4 SH |
| 6. $\forall x(Px \rightarrow Rx)$ | 5 IU |

Note que o resultado seria válido para qualquer constante, visto que a constante c teve um caráter geral. Agora, tratemos do quantificador existencial [1]:

1. Introdução do Existencial (IE): $\alpha(c)$, logo $\exists x\alpha(c : x)$, onde $\alpha(c : x)$ é a fórmula obtida pela substituição de uma ou mais ocorrências da constante c pela variável x e c seja substituível por x em α .

6 Cálculo de predicados de primeira ordem (CPO)

2. Eliminação do Existencial (EE): seja Γ um conjunto de fórmulas. Se $\Gamma \cup \{\exists x\alpha\} \vdash \alpha[x : c] \rightarrow \beta$, tal que c não ocorre em nenhuma fórmula de Γ (isto é, em nenhuma premissa), nem em hipótese vigente, nem em α , nem em β , então $\Gamma \cup \{\exists x\alpha\} \vdash \beta$.

A regra (IE) também não oferece dificuldade, salientando que a variável pode substituir *uma ou mais* ocorrências da constante em questão. Por exemplo, de $Pa \rightarrow Qa$, pela regra (IE), podemos concluir $\exists x(Px \rightarrow Qx)$ ou $\exists x(Pa \rightarrow Qx)$ ou $\exists x(Px \rightarrow Qa)$.

Antes de comentarmos as restrições da regra (EE), vamos ilustrá-la com um exemplo: suponhamos que desejamos validar o argumento $\exists x(Px \wedge Qx) \vdash \exists xPx$. Procederemos como a seguir:

- | | |
|---|----------------|
| 1. $\exists x(Px \wedge Qx)$ | P |
| 2. $Pc \wedge Qc$ | * PH |
| 3. Pc | 2 D |
| 4. $\exists xPx$ | * 3 IE |
| 5. $(Pc \wedge Qc) \rightarrow \exists xPx$ | 2, 4 DC |
| 6. $\exists xPx$ | 1, 5 EE |

Note que a fórmula obtida na linha 4 está condicionada a uma premissa hipotética, não sendo, então, a conclusão desejada. Esta foi obtida na linha 6, após termos concluído $(Pc \wedge Qc) \rightarrow \exists xPx$ a partir de $\exists x(Px \wedge Qx)$. Ilustremos as restrições de (EE) através de um exemplo: seja Px : " x é par", Ix : " x é ímpar" e Qx : " x é primo". Claramente, não está correta a dedução:

- | | |
|------------------------------|---------------|
| 1. $\exists x(Px \wedge Qx)$ | P |
| 2. $\exists x(Ix \wedge Qx)$ | P |
| 3. $Pc \wedge Qc$ | * PH |
| 4. $Ic \wedge Qc$ | ** PH |
| 5. Pc | 3 D |
| 6. Ic | 4 D |
| 7. $Pc \wedge Ic$ | 5, 6 C |

6 Cálculo de predicados de primeira ordem (CPO)

8. $\exists x(Px \wedge Ix)$	** 4, 7 IE
9. $(Ic \wedge Qc) \rightarrow \exists x(Px \wedge Ix)$	4, 8 DC
10. $\exists x(Px \wedge Ix)$	* 2, 9 EE
11. $(Pc \wedge Qc) \rightarrow \exists x(Px \wedge Ix)$	3, 10 DC
12. $\exists x(Px \wedge Ix)$	1, 11 EE

O erro foi ocasionado pela utilização da constante c na linha 4, já que esta ocorria em hipótese vigente (linha 3). Note que, pela regra *demonstração condicional*, poderíamos utilizar $Ic \wedge Qc$ como premissa hipotética. Porém, concluiríamos $(Pc \wedge Qc) \rightarrow [(Ic \wedge Qc) \rightarrow \exists x(Px \wedge Ix)]$.

Por fim, podemos ainda utilizar o *princípio da substituição*, onde também poderão ser usadas as verdades lógicas (VL).

6.4 O símbolo Identidade

Um importante predicado binário que utilizaremos bastante é o predicado de *identidade*, o qual simbolizamos por " $=$ ". Assim, se quisermos expressar " a é idêntico a b " na nossa linguagem, obteríamos $(= ab)$, que nada mais é afirmar que a e b tratam de um mesmo objeto. Porém, escreveremos de maneira usual, ou seja, $a = b$. Da mesma forma, $\neg(= ab)$ representaremos por $a \neq b$. Estabelecemos o *princípio da identidade* (PI):

- $\forall x(x = x)$
- Se $c_1 = c_2$, então $\models \alpha(c_1) \leftrightarrow \alpha(c_1 : c_2)$

Vimos que um dos objetivos da lógica é determinar a validade de sentenças a partir de um conjunto de premissas. As teorias matemáticas são construídas a partir de um conjunto inicial de premissas: os axiomas. Deseja-se obter sentenças que são consequência (lógica) dos axiomas: as *proposições*, os *teoremas* ou *corolários* (dependendo do contexto ou importância de tal sentença), em cujas demonstrações são usadas as regras de inferência da lógica clássica. Nosso principal objetivo é mostrar que as inferências utilizadas nas demonstrações matemáticas são aplicações das regras de inferência que apresentamos. Mais ainda, que muitos teoremas matemáticos, por mais complexo que sejam, são consequências lógicas de premissas relativamente simples.

7.1 Uma construção da geometria

A geometria é composta por inúmeros teoremas e possui diversas aplicações. Veremos os primeiros passos da construção da geometria (em um plano) a partir do sistema de axiomas de David Hilbert. Esse sistema é dividido em cinco grupos: incidência, ordem, congruência, continuidade e paralelismo [4]. Aqui, utilizaremos os axiomas de incidência (comuns às geometrias euclidiana e não-euclidiana) e o **CPO** para demonstrar algumas sentenças geométricas válidas. É importante salientar que podemos concluir alguma sentença (fórmula) se, e somente se, esta for uma *consequência lógica* dos axiomas.

Inicialmente, listemos alguns termos não definidos:

- ponto;
- plano;
- reta;
- estar sobre;

- estar entre;
- congruente.

Entenderemos "plano" como o conjunto formado por todos os pontos e retas. O termo "estar sobre" será entendido, em alguns casos, como "passar por". Por exemplo, serão equivalentes: "P está sobre r " e " r passa por P".

Definição 7.1 Três pontos distintos P , Q e R são **colineares** se existe uma reta r tal que P , Q e R estão sobre r .

Definição 7.2 n retas distintas r_1, \dots, r_n são **concorrentes** se existe um ponto P tal que P está sobre r_i , para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Definição 7.3 Duas retas r e s são **paralelas** se elas não se intersectam, isto é, se não há um ponto que está sobre ambas.

Agora, os axiomas que utilizaremos:

- Axioma de incidência 1 (AX1): dados dois pontos distintos P e Q , existe uma única reta r passando por P e Q .
- Axioma de incidência 2 (AX2): para toda reta r , existem dois pontos distintos que estão sobre r .
- Axioma de incidência 3 (AX3): existem três pontos distintos não colineares.

Adicionemos à lista um famoso axioma usado por Euclides, que aqui chamaremos de *Axioma da Identidade* (AXI): "Coisas iguais a uma terceira são iguais entre si".

Visto isso, queremos demonstrar:

Proposição 7.4 Se r e s são duas retas distintas e não paralelas, então elas possuem um único ponto em comum.

Vejamos como utilizar o **CPO** para demonstrar esta proposição. Definiremos uma linguagem \mathcal{L} para o nosso propósito¹. Nosso universo de discurso será um plano geométrico π . Para mantermos as convenções usuais da geometria, as constantes individuais para representar pontos serão letras maiúsculas e para retas letras minúsculas. Assim, utilizaremos letras gregas como constantes de predicado para

¹Aqui restringiremos nossa atenção para pontos e retas. Para um estudo mais detalhado de geometria utilizando o **CPO**, devemos incluir outros entes geométricos (como triângulos por exemplo).

diferenciá-las nitidamente das demais. Seja $\mathcal{L} = \{\alpha, \beta_2, \beta_3, \dots, \gamma, \rho, =\} \cup \pi$, onde α : "... está sobre ...", β_i : "(1), (2), ..., (i-1) e (i) são concorrentes", onde (1), (2), ..., (i-1) e (i) representam os i "lugares" da constante de predicado i -ária β_i , $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$, ρ : "... e ... são paralelas" e γ : "... , ... e ... são colineares". Convencionemos o seguinte: em qualquer fórmula cuja constante individual ou variável esteja em letra *maiúscula*, esta trata-se de um ponto; em qualquer fórmula cuja constante individual ou variável esteja em letra *minúscula*, esta trata-se de uma reta. Reservaremos as letras X , Y e Z , munidas ou não de índice, para variáveis que tratam de pontos. Assim, por exemplo, se quisermos escrever "o ponto P está sobre a reta r ", escreveremos " αPr "².

Agora, reescreveremos os axiomas em nossa linguagem:

- (AX1): $\forall X \forall Y \exists x [(X \neq Y) \rightarrow [(\alpha Xx \wedge \alpha Yx) \wedge \forall y [(\alpha Xy \wedge \alpha Yy) \rightarrow (x = y)]]]$
- (AX2): $\forall x \exists X \exists Y (X \neq Y \wedge \alpha Xx \wedge \alpha Yx)$
- (AX3): $\exists X \exists Y \exists Z [X \neq Y \wedge X \neq Z \wedge Z \neq Y \wedge \neg \gamma XYZ]$
- (AXI): $\forall X \forall Y \forall Z [(X = Y \wedge X = Z) \rightarrow (Y = Z)] \wedge \forall x \forall y \forall z [(x = y \wedge x = z) \rightarrow (y = z)]$

Pela definições, temos:

- (Def1): $\forall X \forall Y \forall Z [(X \neq Y \wedge X \neq Z \wedge Z \neq Y) \rightarrow [\gamma XYZ \leftrightarrow \exists x (\alpha Xx \wedge \alpha Yx \wedge \alpha Zx)]]$
- (Def2): $\forall x_1 \dots \forall x_n [(x_1 \neq x_2 \wedge \dots \wedge x_i \neq x_j \wedge \dots \wedge x_{n-1} \neq x_n) \rightarrow [\beta_n x_1 \dots x_n \leftrightarrow \exists X (\alpha Xx_1 \wedge \dots \wedge \alpha Xx_n)]]$, para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$ e $i \neq j$.
- (Def3): $\forall x \forall y [(x \neq y) \rightarrow [\rho xy \leftrightarrow \neg \exists X (\alpha Xx \wedge \alpha Xy)]]$

Note que (Def2) é um esquema de fórmulas. Por exemplo, para $n = 3$, temos

$$\forall x \forall y \forall z [(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z) \rightarrow [\beta_3 xyz \leftrightarrow \exists X (\alpha Xx \wedge \alpha Xy \wedge \alpha Xz)]].$$

Note ainda que (Def2) poderia ser a fórmula

$$\forall X \forall Y \forall Z [\gamma XYZ \leftrightarrow \exists x (\alpha Xx \wedge \alpha Yx \wedge \alpha Zx)],$$

uma vez que, dados três pontos, sendo pelo menos dois iguais, é garantida, pelos axiomas 1 e 3, a existência de uma reta passando por esses três pontos. Porém, é

²Esta convenção torna nossas fórmulas menos carregadas. A rigor, deveríamos introduzir duas constantes de predicado unárias, por exemplo, σ_1 : "... é ponto" e σ_2 : "... é reta. Assim, para escrever "o ponto P está sobre a reta r ", escreveríamos " $\alpha Pr \wedge \sigma_1 P \wedge \sigma_2 r$ ".

mais natural a ideia de colinearidade para pontos (pelo menos três) distintos.

Reescrevendo a proposição 6.1, obtemos

$$(P1) : \forall x \forall y [(x \neq y \wedge \neg \rho xy) \rightarrow [\exists X(\alpha Xx \wedge \alpha Xy) \wedge \forall Y((\alpha Yx \wedge \alpha Yy) \rightarrow X = Y)]].$$

Antes de iniciarmos as demonstrações, estabelecemos mais algumas convenções, para torná-las não excessivamente longas:

1. Poderemos não listar os axiomas ou definições, sendo considerados premissas em qualquer dedução. Quando estes forem utilizados para a conclusão de alguma fórmula, justificaremos esta por suas abreviações.
2. Poderemos fazer algumas aplicações das regras de inferência simultaneamente, todas elas justificadas na mesma linha.

Por exemplo: para concluirmos

$$(r = s \wedge r = t) \rightarrow (s = t),$$

ao invés de fazermos:

1. $\forall X \forall Y \forall Z [(X = Y \wedge X = Z) \rightarrow (Y = Z)] \wedge \forall x \forall y \forall z [(x = y \wedge x = z) \rightarrow (y = z)]$ **P**
2. $\forall x \forall y \forall z [(x = y \wedge x = z) \rightarrow (y = z)]$ **1 D**
3. $\forall y \forall z [(r = y \wedge r = z) \rightarrow (y = z)]$ **2 EU**
4. $\forall z [(r = s \wedge r = z) \rightarrow (s = z)]$ **3 EU**
5. $(r = s \wedge r = t) \rightarrow (s = t)$ **4 EU**

poderemos fazer:

1. $\forall x \forall y \forall z [(x = y \wedge x = z) \rightarrow (y = z)]$ **AXI, D**
2. $(r = s \wedge r = t) \rightarrow (s = t)$ **2 EU**

Assim, iniciemos a demonstração. Primeiramente, note que a fórmula que queremos deduzir é do tipo $\forall x \forall y \delta$ e que δ é um condicional. Logo, podemos introduzir uma premissa hipotética, utilizando constantes individuais quaisquer e, em caso de

7 Aplicações na Matemática

sucesso, introduzimos os quantificadores universais utilizando a regra (IU). É natural introduzirmos como premissa hipotética o antecedente do condicional desejado com constantes quaisquer:

- | | |
|-----------------------------------|-------------|
| 1. $r \neq s \wedge \neg \rho rs$ | * PH |
| 2. $r \neq s$ | 1 D |
| 3. $\neg \rho rs$ | 1 D |

Seguindo, utilizaremos a definição 3:

- | | |
|--|-----------------|
| 4. $(r \neq s) \rightarrow [\rho rs \leftrightarrow \neg \exists X(\alpha Xr \wedge \alpha Xs)]$ | Def3, EU |
| 5. $\rho rs \leftrightarrow \neg \exists X(\alpha Xr \wedge \alpha Xs)$ | 2, 4 MP |
| 6. $\neg \exists X(\alpha Xr \wedge \alpha Xs) \rightarrow \rho rs$ | 5 BC |
| 7. $\neg \neg \exists X(\alpha Xr \wedge \alpha Xs)$ | 3, 6 MT |
| 8. $\exists X(\alpha Xr \wedge \alpha Xs)$ | 7 PS |

Note que, de $r \neq s \wedge \neg \rho rs$ deduzimos $\exists X(\alpha Xr \wedge \alpha Xs)$. Pela regra (IU), deduzimos $\forall x \forall y (x \neq y \wedge \neg \rho xy) \rightarrow \exists X(\alpha Xx \wedge \alpha Xy)$, isto é, se duas retas são não paralelas e distintas, então elas são concorrentes. Note ainda que, a conclusão que desejamos é uma conjunção e que obtemos um de seus componentes. Prosseguindo:

- | | |
|---|------------------|
| 9. $\alpha Pr \wedge \alpha Ps$ | ** PH |
| 10. $(\alpha Qr \wedge \alpha Qs) \wedge P \neq Q$ | *** SPA |
| 11. $\exists x[(P \neq Q) \rightarrow [(\alpha Px \wedge \alpha Qx) \wedge \forall y[(\alpha Py \wedge \alpha Qy) \rightarrow (x = y)]]]$ | AX1, EU |
| 12. $[(P \neq Q) \rightarrow [(\alpha Pl \wedge \alpha Ql) \wedge \forall y[(\alpha Py \wedge \alpha Qy) \rightarrow (l = y)]]]$ | **** PH |
| 13. $(P \neq Q) \rightarrow [(\alpha Pl \wedge \alpha Ql) \wedge [(\alpha Pr \wedge \alpha Qr) \rightarrow (l = r)]]$ | 12 EU |
| 14. $(P \neq Q) \rightarrow [(\alpha Pl \wedge \alpha Ql) \wedge [(\alpha Ps \wedge \alpha Qs) \rightarrow (l = s)]]$ | 12 EU |
| 15. $\alpha Qr \wedge \alpha Qs$ | 10 D |
| 16. $P \neq Q$ | 10 D |
| 17. $(\alpha Pl \wedge \alpha Ql) \wedge [(\alpha Pr \wedge \alpha Qr) \rightarrow (l = r)]$ | 13, 16 MP |
| 18. $(\alpha Pl \wedge \alpha Ql) \wedge [(\alpha Ps \wedge \alpha Qs) \rightarrow (l = s)]$ | 14, 16 MP |

7 Aplicações na Matemática

19. $\alpha Pl \wedge \alpha Ql$	17 D
20. $(\alpha Pr \wedge \alpha Qr) \rightarrow (l = r)$	17 D
21. $(\alpha Ps \wedge \alpha Qs) \rightarrow (l = s)$	18 D
22. αQr	15 D
23. αQs	15 D
24. αPr	9 D
25. αPs	9 D
26. $\alpha Pr \wedge \alpha Qr$	22, 24 C
27. $\alpha Ps \wedge \alpha Qs$	23, 25 C
28. $l = r$	20, 26 MP
29. $l = s$	21, 27 MP
30. $r = s$	**** 28, 29 AXI, D, EU, C, MP
31. $[(P \neq Q) \rightarrow [(\alpha Pl \wedge \alpha Ql) \wedge \forall y[(\alpha Py \wedge \alpha Qy) \rightarrow (l = y)]]] \rightarrow (r = s)$	12, 30 DC
32. $r = s$	11, 31 EE
33. $r \neq s \wedge r = s$	*** 2, 30 C
34. $\neg[(\alpha Qr \wedge \alpha Qs) \wedge (P \neq Q)]$	10, 33 DA
35. $\neg(\alpha Qr \wedge \alpha Qs) \vee (P = Q)$	34 PS
36. $(\alpha Qr \wedge \alpha Qs) \rightarrow (P = Q)$	35 PS
37. $\exists X \forall Y[(\alpha Yr \wedge \alpha Ys) \rightarrow (X = Y)]$	** 36 IU, IE
38. $(\alpha Pr \wedge \alpha Ps) \rightarrow \exists X \forall Y[(\alpha Yr \wedge \alpha Ys) \rightarrow (X = Y)]$	9, 37 DC
39. $\exists X \forall Y[(\alpha Yr \wedge \alpha Ys) \rightarrow (X = Y)]$	8, 38 EE
40. $\exists X(\alpha Xr \wedge \alpha Xs) \wedge \exists X \forall Y[(\alpha Yr \wedge \alpha Ys) \rightarrow (X = Y)]$	8, 39 C
41. $\exists X[(\alpha Xr \wedge \alpha Xs) \wedge \forall Y[(\alpha Yr \wedge \alpha Ys) \rightarrow (X = Y)]]$	* 40 PS
42. $(r \neq s \wedge \neg prs) \rightarrow \exists X[(\alpha Xr \wedge \alpha Xs) \wedge \forall Y(\alpha Yr \wedge \alpha Ys) \rightarrow (X = Y)]$	1, 41 DC

43. $\forall x \forall y [(x \neq y \wedge \neg \rho xy) \rightarrow \exists X[(\alpha Xx \wedge \alpha Xy) \wedge \forall Y(\alpha Yx \wedge \alpha Yy) \rightarrow (X = Y)]]$ 1, 41
EE, IU

Note que, na linha 37, pudemos introduzir o quantificador universal para a variável Y , pois a constante Q não estava mais em hipótese vigente (encerrada na linha 33). Note ainda que, na linha 42, as constantes r e s ocorriam no escopo de um quantificador, mas não para as variáveis x e y , sendo assim substituíveis, respectivamente, por x e y . Agora, visto que (P1) está demonstrada, ela passa ser uma de nossas premissas para qualquer outra dedução.

Proposição 7.5 *Existem três retas distintas não concorrentes.*

Esta proposição pode ser reescrita:

$$(P2) : \exists x \exists y \exists z [(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z) \wedge \neg \beta_3 xyz]$$

Agora, devemos mostrar a *existência* de três retas. Uma boa estratégia é partir de algo cuja existência é garantida por algum axioma. Assim, demonstraremos esta proposição a partir da existência de três pontos não colineares. Para facilitar as próximas deduções, mostraremos que, do axioma 3, deduzimos

$$(P0) : \exists X \exists Y \exists Z [X \neq Y \wedge X \neq Z \wedge Z \neq Y \wedge \forall x (\neg \alpha Zx \vee \neg \alpha Yx \vee \neg \alpha Xx)].$$

De fato:

- | | |
|--|-----------------|
| 1. $\exists X \exists Y \exists Z [X \neq Y \wedge X \neq Z \wedge Z \neq Y \wedge \neg \gamma XYZ]$ | AX3 |
| 2. $P \neq Q \wedge P \neq R \wedge R \neq Q \wedge \neg \gamma PQR$ | *PH |
| 3. $P \neq Q \wedge P \neq R \wedge R \neq Q$ | 2 D |
| 4. $\neg \gamma PQR$ | 2 D |
| 5. $(P \neq Q \wedge P \neq R \wedge R \neq Q) \rightarrow [\gamma PQR \leftrightarrow \exists x (\alpha Px \wedge \alpha Qx \wedge \alpha Rx)]$ | Def1, EU |
| 6. $\gamma PQR \leftrightarrow \exists x (\alpha Px \wedge \alpha Qx \wedge \alpha Rx)$ | 3, 5 MP |
| 7. $\exists x (\alpha Px \wedge \alpha Qx \wedge \alpha Rx) \rightarrow \gamma PQR$ | 6 BC |
| 8. $\neg \exists x (\alpha Px \wedge \alpha Qx \wedge \alpha Rx)$ | 4, 7 MT |
| 9. $\forall x (\neg \alpha Px \vee \neg \alpha Qx \vee \neg \alpha Rx)$ | 8 PS |

7 Aplicações na Matemática

10. $P \neq Q \wedge P \neq R \wedge R \neq Q \wedge \forall x(\neg \alpha Px \vee \neg \alpha Qx \vee \neg \alpha Rx)$ 3, 9 C
11. $\exists X \exists Y \exists Z [X \neq Y \wedge X \neq Z \wedge Z \neq Y \wedge \forall x(\neg \alpha Zx \vee \neg \alpha Yx \vee \neg \alpha Xx)]$ *10 IE
12. $(P \neq Q \wedge P \neq R \wedge R \neq Q \wedge \neg \gamma PQR) \rightarrow \exists X \exists Y \exists Z [X \neq Y \wedge X \neq Z \wedge Z \neq Y \wedge \forall x(\neg \alpha Zx \vee \neg \alpha Yx \vee \neg \alpha Xx)]$ 2, 11 DC
13. $\exists X \exists Y \exists Z [X \neq Y \wedge X \neq Z \wedge Z \neq Y \wedge \forall x(\neg \alpha Zx \vee \neg \alpha Yx \vee \neg \alpha Xx)]$ 1, 12 EE

Assim como (P1), podemos utilizar (P0) como uma premissa. Iniciemos:

1. $\exists X \exists Y \exists Z [X \neq Y \wedge X \neq Z \wedge Z \neq Y \wedge \forall x(\neg \alpha Zx \vee \neg \alpha Yx \vee \neg \alpha Xx)]$ P0
2. $P \neq Q \wedge P \neq R \wedge Q \neq R \wedge \forall x(\neg \alpha Px \vee \neg \alpha Qx \vee \neg \alpha Rx)$ *PH
3. $\exists x[(P \neq Q) \rightarrow [(\alpha Px \wedge \alpha Qx) \wedge \forall y[(\alpha Py \wedge \alpha Qy) \rightarrow x = y]]]$ AX1, EU
4. $\exists x[(P \neq R) \rightarrow [(\alpha Px \wedge \alpha Rx) \wedge \forall y[(\alpha Py \wedge \alpha Ry) \rightarrow x = y]]]$ AX1, EU
5. $\exists x[(Q \neq R) \rightarrow [(\alpha Qx \wedge \alpha Rx) \wedge \forall y[(\alpha Qy \wedge \alpha Ry) \rightarrow x = y]]]$ AX1, EU

Vamos considerar, agora, as retas que passam pelos pontos admitidos:

6. $(P \neq Q) \rightarrow [(\alpha Pr \wedge \alpha Qr) \wedge \forall y[(\alpha Py \wedge \alpha Qy) \rightarrow r = y]]$ ** PH
7. $(P \neq R) \rightarrow [(\alpha Ps \wedge \alpha Rs) \wedge \forall y[(\alpha Py \wedge \alpha Ry) \rightarrow s = y]]$ *** PH
8. $(Q \neq R) \rightarrow [(\alpha Qt \wedge \alpha Rt) \wedge \forall y[(\alpha Qy \wedge \alpha Ry) \rightarrow t = y]]$ **** PH

O que fizemos até aqui foi simplesmente listar os elementos existentes. Continuando:

9. $P \neq Q$ 2 D
10. $P \neq R$ 2 D
11. $Q \neq R$ 2 D
12. $(\alpha Pr \wedge \alpha Qr) \wedge \forall y[(\alpha Py \wedge \alpha Qy) \rightarrow r = y]$ 6, 9 MP
13. $(\alpha Ps \wedge \alpha Rs) \wedge \forall y[(\alpha Py \wedge \alpha Ry) \rightarrow s = y]$ 7, 10 MP
14. $(\alpha Qt \wedge \alpha Rt) \wedge \forall y[(\alpha Qy \wedge \alpha Ry) \rightarrow t = y]$ 8, 11 MP
15. $(\alpha Pr \wedge \alpha Qr)$ 12 D

7 Aplicações na Matemática

16. $(\alpha Ps \wedge \alpha Rs)$	13 D
17. $(\alpha Qt \wedge \alpha Rt)$	14 D
18. $r = s$	*****SPA
19. αRs	16 D
20. $(\alpha Pr \wedge \alpha Qr \wedge \alpha Rr)$	15, 18, 19 PI, C
21. $(\alpha Pr \wedge \alpha Qr \wedge \alpha Rr) \wedge \neg(\alpha Pr \wedge \alpha Qr \wedge \alpha Rr)$	*****2, 20 D, EU, PS, C
22. $r \neq s$	18, 21 DA
23. $r = t$	*****SPA
24. αRt	17 D
25. $(\alpha Pr \wedge \alpha Qr \wedge \alpha Rr)$	15, 23, 24 PI, C
26. $(\alpha Pr \wedge \alpha Qr \wedge \alpha Rr) \wedge \neg(\alpha Pr \wedge \alpha Qr \wedge \alpha Rr)$	*****2, 25 D, EU, PS, C
27. $r \neq t$	23, 26 DA
28. $s = t$	*****SPA
29. αQt	17 D
30. $(\alpha Ps \wedge \alpha Qs \wedge \alpha Rs)$	16, 28, 29 PI, C
31. $(\alpha Ps \wedge \alpha Qs \wedge \alpha Rs) \wedge \neg(\alpha Ps \wedge \alpha Qs \wedge \alpha Rs)$	*****2, 30 D, EU, PS, C
32. $s \neq t$	28,31 DA
33. $\exists X(\alpha Xr \wedge \alpha Xs \wedge \alpha Xt)$	*****SPA

Até aqui, concluímos que as três retas citadas são distintas, que é parte integrante da fórmula que desejamos demonstrar. Para concluirmos a outra parte da fórmula, iniciamos (na linha 33) uma demonstração por absurdo. Como trata-se de um existencial, necessitaremos introduzir mais uma premissa hipotética. Prosseguindo:

34. $\alpha Hr \wedge \alpha Hs \wedge \alpha Ht$	*****PH
35. $H = Q$	*****SPA
36. αHs	34 D

7 Aplicações na Matemática

37. $\alpha Ps \wedge \alpha Qs \wedge \alpha Rs$ 16, 35, 36 **C, PI**
38. $(\alpha Ps \wedge \alpha Qs \wedge \alpha Rs) \wedge \neg(\alpha Ps \wedge \alpha Qs \wedge \alpha Rs)$ *****2, 37 **D, EU, PS, C**
39. $H \neq Q$ 35, 38 **DA**
40. $\exists x[(H \neq Q) \rightarrow [(\alpha Hx \wedge \alpha Qx) \wedge \forall y[(\alpha Hy \wedge \alpha Qy) \rightarrow x = y]]]$ **AX1, EU**
41. $(H \neq Q) \rightarrow [(\alpha Hl \wedge \alpha Ql) \wedge \forall y[(\alpha Hy \wedge \alpha Qy) \rightarrow l = y]]$ *******PH**
42. $(\alpha Hl \wedge \alpha Ql) \wedge \forall y[(\alpha Hy \wedge \alpha Qy) \rightarrow l = y]$ 39, 41 **MP**
43. $(\alpha Ht \wedge \alpha Qt) \rightarrow l = t]$ 42 **D, EU**
44. $(\alpha Hr \wedge \alpha Qr) \rightarrow l = r]$ 42 **D, EU**
45. $\alpha Ht \wedge \alpha Qt$ 17, 34 **D, C**
46. $\alpha Hr \wedge \alpha Qr$ 15, 34 **D, C**
47. $l = r$ 44, 46 **MP**
48. $l = t$ 43, 45 **MP**
49. $t = r$ 47, 48 **AXI, D, EU, C, MP**
50. $t = r \wedge t \neq r$ *****27, 49 **C**
51. $[(H \neq Q) \rightarrow [(\alpha Hl \wedge \alpha Ql) \wedge \forall y[(\alpha Hy \wedge \alpha Qy) \rightarrow l = y]]] \rightarrow (t = r \wedge t \neq r)$ 41, 50
DC
52. $t = r \wedge t \neq r$ *****40, 51 **EE**
53. $(\alpha Hr \wedge \alpha Hs \wedge \alpha Ht) \rightarrow (t = r \wedge t \neq r)$ 34, 52 **DC**
54. $t = r \wedge t \neq r$ *****33, 53 **EE**
55. $\neg \exists X[\alpha Xr \wedge \alpha Xs \wedge \alpha Xt]$ 33, 54 **DA**
56. $r \neq s \wedge t \neq r \wedge s \neq t$ 22, 27, 32 **C**
57. $(r \neq s \wedge t \neq r \wedge s \neq t) \rightarrow [\beta_3rst \leftrightarrow \exists X(\alpha Xr \wedge \alpha Xs \wedge \alpha Xt)]$ **Def2, EU**
58. $\beta_3rst \rightarrow \exists X[\alpha Xr \wedge \alpha Xs \wedge \alpha Xt]$ 56, 57 **MP, BC**
59. $\neg \beta_3rst$ 55, 58 **MT**

7 Aplicações na Matemática

$$60. \exists x \exists y \exists z [(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z) \wedge \neg \beta_3 x y z] \quad (****) (***) (**) (*) \quad 56, 59 \text{ C, IE}$$

$$61. \exists x \exists y \exists z [(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z) \wedge \neg \beta_3 x y z] \quad 2, 60 \text{ DC, EE}$$

Observe que, na linha 60, encerramos as quatro premissas hipotéticas (linhas 2, 6, 7 e 8) simultaneamente.

Proposição 7.6 *Para toda reta r , existe um ponto P tal que P não está sobre r .*

Queremos demonstrar (P3): $\forall x \exists X (\neg \alpha X x)$.

$$1. \exists X \exists Y \exists Z [X \neq Y \wedge X \neq Z \wedge Z \neq Y \wedge \forall x (\neg \alpha Z x \vee \neg \alpha Y x \vee \neg \alpha X x)] \quad \text{P0}$$

$$2. P \neq Q \wedge P \neq R \wedge Q \neq R \wedge \forall x (\neg \alpha P x \vee \neg \alpha Q x \vee \neg \alpha R x) \quad *PH$$

$$3. \neg \alpha P r \vee \neg \alpha Q r \vee \neg \alpha R r \quad 2 \text{ D, EU}$$

$$4. \exists X \exists Y \exists Z (\neg \alpha X r \vee \neg \alpha Y r \vee \neg \alpha Z r) \quad 3 \text{ IE}$$

A fórmula concluída na linha 4 afirma que existem três pontos, onde pelo menos um deles não está em uma reta qualquer. Este é o resultado que desejamos, porém não é a fórmula desejada. Devemos concluí-la através de alguma inferência lógica. Para isto, utilizaremos a verdade lógica $\exists x \exists y (\delta(x) \vee \delta(y)) \rightarrow \exists x \delta(x)$. De fato:

$$1. \exists x \exists y (\delta(x) \vee \delta(y)) \quad *PH$$

$$2. \delta(a) \vee \delta(b) \quad **PH$$

$$3. \neg \exists x \delta(x) \quad ***SPA$$

$$4. \forall x (\neg \delta(x)) \quad 3 \text{ PS}$$

$$5. \neg \delta(a) \quad 4 \text{ EU}$$

$$6. \neg \delta(b) \quad 4 \text{ EU}$$

$$7. \delta(a) \quad 2, 6 \text{ SD}$$

$$8. \delta(a) \wedge \neg \delta(a) \quad ***5, 7 \text{ C}$$

$$9. \exists x \delta(x) \quad **3, 8 \text{ DA}$$

$$10. (\delta(a) \vee \delta(b)) \rightarrow \exists x \delta(x) \quad *2, 9 \text{ DC}$$

$$11. \exists x \delta(x) \quad 1, 10 \text{ EE}$$

7 Aplicações na Matemática

Logo, retomando a dedução:

- | | |
|--|-----------------|
| 1. $\exists X \exists Y \exists Z [X \neq Y \wedge X \neq Z \wedge Z \neq Y \wedge \forall x (\neg \alpha Zx \vee \neg \alpha Yx \vee \neg \alpha Xx)]$ | P0 |
| 2. $P \neq Q \wedge P \neq R \wedge Q \neq R \wedge \forall x (\neg \alpha Px \vee \neg \alpha Qx \vee \neg \alpha Rx)$ | *PH |
| 3. $\neg \alpha Pr \vee \neg \alpha Qr \vee \neg \alpha Rr$ | 2 D, EU |
| 4. $\exists X \exists Y \exists Z (\neg \alpha Xr \vee \neg \alpha Yr \vee \neg \alpha Zr)$ | 3 IE |
| 5. $\exists X \exists Y \exists Z (\neg \alpha Xr \vee \neg \alpha Yr \vee \neg \alpha Zr) \rightarrow \exists X \neg \alpha Xr$ | VL |
| 6. $\exists X \neg \alpha Xr$ | *4, 5 MP |
| 7. $[P \neq Q \wedge P \neq R \wedge Q \neq R \wedge \forall x (\neg \alpha Px \vee \neg \alpha Qx \vee \neg \alpha Rx)] \rightarrow \exists X \neg \alpha Xr$ | 2, 6 DC |
| 8. $\exists X \neg \alpha Xr$ | 2, 7 EE |
| 9. $\forall x \exists X \neg \alpha Xx$ | 8 IU |

O que fizemos aqui foi mostrar o rigor nas demonstrações matemáticas, onde qualquer sentença deve ser uma consequência lógica dos axiomas. As inferências lógicas utilizadas nas demonstrações usuais são, na verdade, uma aplicação das regras de inferência que utilizamos. Vejamos uma demonstração matemática usual da proposição 6.1 e comparemo-la com nossa demonstração:

- Sejam r e s duas retas distintas e não paralelas. (linha 1)
- Pela definição 6.3 e por hipótese, elas se intersectam, isto é, existe um ponto P que está sobre r e s . (linhas 2 a 9)
- Suponha por absurdo que exista um ponto Q , diferente de P , tal que Q esteja sobre r e s . (linha 10)
- Pelo axioma de incidência 1, a linha r seria determinada univocamente pelos pontos P e Q . (linhas 11 a 13)
- Pelo axioma de incidência 1, a linha s seria determinada univocamente pelos pontos P e Q . (linhas 11 a 14)
- Assim, teríamos que $r = s$, levando-nos a um absurdo pois, por hipótese, $r \neq s$. (linhas 10 a 33)
- Logo, r e s possuem um único ponto em comum. (linhas 34 a 43)

Num primeiro momento, essas proposições podem ser entendidas como "óbvias", principalmente sob um olhar "euclidiano". Porém, ao assumir alguma sentença como verdadeira, pode-se cometer graves erros em demonstrações. Um caso famoso é a controvérsia sobre o quinto postulado de Euclides. "Por dois mil anos, matemáticos tentaram derivá-lo a partir dos outros quatro postulados ou substituí-lo por um mais auto-evidente"[4]. Todas tentativas de demonstrá-lo foram frustradas por conter passagens não devidamente justificadas, assim como as tentativas de substituí-lo, pois estas substituições foram feitas por sentenças logicamente equivalentes ao quinto postulado.

7.2 Demonstrações no ensino médio

Veremos agora como o estudo de lógica pode auxiliar no entendimento das demonstrações matemáticas no ensino médio. Suponhamos que um aluno do ensino médio precise demonstrar o seguinte teorema: "Seja $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ um polinômio e a um número complexo. Se $P(x)$ é divisível por $(x - a)$, então a é raiz de $P(x)$." É natural que algumas questões podem surgir para esse aluno: "o que devo fazer?"; "como começar?"; "onde quero chegar?".

Primeiramente, devemos ter claro o enunciado do teorema. A primeira parte deste simplesmente diz sobre o que estamos falando. Numa linguagem da lógica, o universo de discurso seria a união do conjunto dos números complexos com o conjunto das funções polinomiais com coeficientes complexos. A segunda parte trata-se de um condicional: "Se ... então ...".

Poderíamos introduzir uma linguagem a fim de construirmos fórmulas para a demonstração. Porém, uma linguagem formal do **CPO**, neste (e talvez muitos) caso(s), pode ser uma tarefa muito trabalhosa, talvez até mais do que a própria demonstração. Assim, podemos estabelecer uma linguagem um pouco mais curta, de forma que possamos traduzir as sentenças para fórmulas, sem o risco de interpretações errôneas. Uma boa estratégia, assim como fizemos no capítulo anterior, é utilizar notações usuais da teoria. Por exemplo, podemos utilizar letras minúsculas para constantes e variáveis que tratam de *números* e letras maiúsculas para constantes e variáveis que tratam de *polinômios*. Estabeleceremos: para nos referir ao polinômio $P(x)$ escreveremos simplesmente P ; $P(a)$, para todo $a \in \mathbb{C}$, será seu próprio representante; não utilizaremos as variáveis x ou X , para não confundi-las com as variáveis

dos polinômios; se $P(x)$ é divisível por $Q(x)$, escreveremos $Q|P$; as expressões matemáticas serão expressas como usualmente.

Analisemos o teorema: No enunciado, $P(x)$ é um polinômio qualquer. Logo, queremos demonstrar:

$$\forall Y[(x - a)|Y \rightarrow Y(a) = 0].$$

Agora, devemos ver quais são as **premissas** que temos à disposição (talvez o passo mais importante). Por definição (Def), se a é raiz de $P(x)$, então $P(a) = 0$. Também por definição, se $P(x)$ é divisível por $Q(x)$, então existe um polinômio $H(x)$ tal que $P(x) = H(x) \cdot Q(x)$. Assim, temos como uma das premissas $\forall Y_1 \forall Y_2 \exists Z[(Y_2|Y_1) \rightarrow (Y_1 = Z \cdot Y_2)]$, assim como as verdades lógicas em geral e os teoremas matemáticos (Teo) até então demonstrados. Iniciemos:

- | | |
|---|----------------|
| 1. $(x - a) P$ | *PH |
| 2. $\forall Y_1 \forall Y_2 \exists Z[(Y_2 Y_1) \rightarrow (Y_1 = Z \cdot Y_2)]$ | Def |
| 3. $\exists Z[((x - a) P) \rightarrow (P = Z \cdot (x - a))]$ | 2 EU |
| 4. $(x - a) P \rightarrow (P = Q \cdot (x - a))$ | **PH |
| 5. $P = Q \cdot (x - a)$ | 1, 4 MP |

O que fizemos até aqui, usualmente traduz-se: "Seja $P(x)$ um polinômio tal que $P(x)$ seja divisível por $(x - a)$. Por definição, existe um polinômio $Q(x)$ tal que $P(x) = Q(x) \cdot (x - a)$ ". Continuando:

- | | |
|---|----------------------|
| 6. $\forall Y \forall Z \forall y[(Y = Z) \rightarrow (Y(y) = Z(y))]$ | Def |
| 7. $[P = Q \cdot (x - a)] \rightarrow [P(a) = Q(a) \cdot (a - a)]$ | 6 EU |
| 8. $P(a) = Q(a) \cdot (a - a)$ | 5, 7 MP |
| 9. $\forall y(y - y = 0)$ | Teo |
| 10. $P(a) = Q(a) \cdot 0$ | 8, 9 EU, PI |
| 11. $\forall y(y \cdot 0 = 0)$ | Teo |
| 12. $P(a) = 0$ | 10, 11 EU, PI |

7 Aplicações na Matemática

A partir da linha 6, fizemos: "Por definição, $P(a) = Q(a) \cdot (a - a) = Q(a) \cdot 0 = 0$ ". Note que, em cada igualdade, há uma implicação lógica implícita, que fica evidente na dedução acima, onde utilizamos teoremas matemáticos (linhas 9 e 11). Dessa forma, chegamos ao resultado desejado. Basta apenas utilizarmos as regras de inferência para encerrar as premissas hipotéticas, que serão equivalentes à conclusão da demonstração: "Logo, $P(a) = 0$ ".

1. $(x - a) P$	*PH
2. $\forall Y_1 \forall Y_2 \exists Z [(Y_2 Y_1) \rightarrow (Y_1 = Z \cdot Y_2)]$	Def
3. $\exists Z [((x - a) P) \rightarrow (P = Z \cdot (x - a))]$	EU
4. $(x - a) P \rightarrow (P = Q \cdot (x - a))$	**PH
5. $P = Q \cdot (x - a)$	1, 4 MP
6. $\forall Y \forall Z \forall y [(Y = Z) \rightarrow (Y(y) = Z(y))]$	Def
7. $[P = Q \cdot (x - a)] \rightarrow [P(a) = Q(a) \cdot (a - a)]$	6 EU
8. $P(a) = Q(a) \cdot (a - a)$	5, 7 MP
9. $\forall y (y - y = 0)$	Teo
10. $P(a) = Q(a) \cdot 0$	8, 9 EU, PI
11. $\forall y (y \cdot 0 = 0)$	Teo
12. $P(a) = 0$	**10, 11 EU, PI
13. $\exists Z [((x - a) P) \rightarrow (P = Z \cdot (x - a))] \rightarrow (P(a) = 0)$	4, 12 IE, DC
14. $P(a) = 0$	*3, 13 EE
15. $(x - a) P \rightarrow P(a) = 0$	1, 14 DC
16. $\forall Y [(x - a) Y \rightarrow Y(a) = 0]$	15 IU

Assim, a utilização do **CPO** pode facilitar a compreensão de uma demonstração matemática, pois pode limitar a demonstração a procurar fórmulas válidas (teoremas, definições, etc.) compostas por fórmulas que figuram nas premissas ou na conclusão desejada e aplicar convenientemente as regras de inferência. Vejamos como transformar o problema de demonstrar uma sentença com essa perspectiva.

7 Aplicações na Matemática

Utilizaremos o exemplo apresentado no capítulo 3: "Se existe um número real x tal que $x \neq 0$ e $x^{-1} = 0$, então $1 = 0$ ". Primeiramente, passemos para uma linguagem de primeira ordem (já adequada convenientemente) o que queremos demonstrar: $\exists x(x \neq 0 \wedge x^{-1} = 0) \rightarrow (1 = 0)$.

- | | |
|--|------|
| 1. $\exists x(x \neq 0 \wedge x^{-1} = 0)$ | *PH |
| 2. $a \neq 0 \wedge a^{-1} = 0$ | **EU |

Agora, devemos procurar teoremas matemáticos relacionados às fórmulas que ocorrem acima. Um bom candidato é o teorema que diz que para todo número real diferente de zero, o produto desse número pelo seu inverso é igual a 1, isto é, $\forall x(x \neq 0 \rightarrow x \cdot x^{-1} = 1)$.

- | | |
|---|---------|
| 3. $a \neq 0$ | 2 EU, D |
| 4. $a^{-1} = 0$ | 2 EU, D |
| 5. $\forall x(x \neq 0 \rightarrow x \cdot x^{-1} = 1)$ | Teo |
| 6. $a \neq 0 \rightarrow a \cdot a^{-1} = 1$ | 5 EU |
| 7. $a \cdot a^{-1} = 1$ | 3, 6 MP |

Um outro bom candidato é um axioma matemático (AX): $\forall x \forall y \forall z(x = y \rightarrow z \cdot x = z \cdot y)$, juntamente com um teorema que utilizamos anteriormente:

- | | |
|---|--------------------|
| 8. $\forall x \forall y \forall z(x = y \rightarrow z \cdot x = z \cdot y)$ | AX |
| 9. $a^{-1} = 0 \rightarrow a \cdot a^{-1} = a \cdot 0$ | 8 EU |
| 10. $a \cdot a^{-1} = a \cdot 0$ | 4, 9 MP |
| 11. $\forall y(y \cdot 0 = 0)$ | Teo |
| 12. $1 = 0$ | **7, 10, 11 PI, EU |
| 13. $1 = 0$ | *2, 12 DC, EE |
| 14. $\exists x(x \neq 0 \wedge x^{-1} = 0) \rightarrow (1 = 0)$ | 1, 13 DC |

Devemos salientar que demonstramos um **condicional**, ou seja, que "1=0"se (no eventual caso) ocorresse $x \neq 0 \wedge x^{-1} = 0$.

Vimos como a lógica pode auxiliar na compreensão das demonstrações. O **CS**, embora tenha algumas limitações, pode ser um ótima ferramenta para a compreensão e prática do assunto, pois permite deduzir certas afirmações, a partir de outras, de uma forma "algébrica", ou seja, permite organizar as informações por meio de fórmulas simples e, a partir delas, concluir outras por meio das regras de inferência. Essa organização pode ser considerada como uma "transcrição" do pensamento, facilitando a compreensão e, sobretudo, a justificativa dos argumentos. Além disso, o **CS** pode ser aplicado em situações atraentes para um aluno de ensino básico, como enigmas, onde esse aluno estaria praticando seu raciocínio, o que poderia melhorar sua compreensão da matemática. O **CPO**, por sua vez, é um sistema mais rico e sua aplicação na matemática mostra como é sua essência, mostrando como são rigorosas suas demonstrações. É claro que sua aplicação *integral* pode não ser a melhor opção para o ensino básico, pois a tradução, para sua linguagem, de sentenças razoavelmente simples podem ser fórmulas demasiadamente complexas. Porém, uma adaptação conveniente dessa linguagem pode ser apresentada, não para que este aluno necessariamente utilize o **CPO**, mas que ele possa compreender por meio dele uma demonstração, uma vez que, em suas deduções, cada passagem é claramente justificada.

Por fim, devemos ter claro que tudo o que é conhecido na matemática nada mais é do que uma consequência lógica dos axiomas de cada teoria, e que, para fazermos uma demonstração, devemos ter duas coisas em mente: quais são as premissas que temos à disposição e como, a partir delas e das aplicações das regras de inferência lógicas, obtemos a conclusão desejada.

- [1] MORTARI, Cezar A. *Introdução à lógica*. 6 ed. São Paulo: EDITORA UNESP 2001
- [2] HEGENBERG, Leônidas. *Lógica*. 3 ed. Rio de Janeiro: EDITORA FORENSE 2012
- [3] SMULLYAN, Raymond. *A Dama ou o Tigre?*. Rio de Janeiro: JORGE ZAHAR ED. 2004
- [4] GREENBERG, Marvin Jay. *Euclidean and non-euclidean geometries: Development and History*. 3 ed. New York: w. H. Freeman and Company 1993