UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA – IM/UFRJ

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

João Luiz Carvalho de Oliveira

Analogias e Diferenças entre a Trigonometria no Campo dos Números Reais e no Campo dos Números Complexos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT, do Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro-UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre, no Mestrado Profissional em Rede Nacional em Matemática.

Orientadora: Professora Walcy Santos

Rio de Janeiro
2014

João Luiz Carvalho de Oliveira

Analogias e Diferenças entre a Trigonometria no Campo dos Números Reais e no Campo dos Números Complexos

Dissertação Submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada por**:**

Prof.ª Dra. Walcy Santos
Instituto de Matemática – UFRJ
Orientadora/Presidente da Banca Examinatória

Prof. Dr. Nilson da Costa Bernardes Junior
Instituto de Matemática – UFRJ

Prof. Dr. Francisco Xavier Fontenele Neto
Instituto de Matemática – UFF

Aprovado em:.

Local de defesa: Sala C–116, bloco C – Instituto de Matemática,

Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha esposa Michelle e ao meu filho Davi, razões de toda a minha alegria.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por colocar pessoas tão maravilhosas em minha vida, que muito contribuíram em minha trajetória, e tornaram a realização desse projeto uma realidade. São elas, meus pais, Helio e Edir, que desde sempre doaram cada instante de suas vidas para me proporcionar uma boa educação. A minha esposa Michelle, pela maravilhosa companheira, que de forma incomparável, sempre abdicou de tudo para estar sempre ao meu lado, cujo apoio foi fundamental para a conclusão deste trabalho. A minha orientadora Walcy Santos, pela brilhante orientação, incentivo e enorme dedicação ao magistério.

RESUMO

Este trabalho faz uma análise comparativa entre a trigonometria no campo dos números reais e a trigonometria no campo dos números complexos. Para isso, é mostrado que o ponto de partida para as relações trigonométricas em $\mathbb{C}$ é a fórmula de Euler.

Dessa forma, o trabalho começa com uma breve parte histórica sobre a fórmula de Euler e os dois matemáticos que estão intrinsecamente ligados à ela. A partir daí, é demonstrada não só a fórmula de Euler, como também diversas propriedades trigonométricas em $\mathbb{C}$, que são válidas também em $\mathbb{R}$. Além disso, também são apresentadas algumas diferenças que ocorrem quando se muda o conjunto numérico de estudo.

Palavras-chave: Trigonometria, Reais, Complexos

ABSTRACT

This work makes a comparative analysis between trigonometry in the field of real numbers and trigonometry in the field of complex numbers. For this, it is shown that the starting point for the trigonometric relationships in $\mathbb{C}$ is Euler's formula.

Thus, the work begins with a brief historical part on Euler's formula and the two mathematicians who are inextricably linked to it. From there, it is demonstrated not only Euler's formula, as well as many trigonometric properties in $\mathbb{C}$, which are also valid in $\mathbb{R}$. Moreover, some differences that occur when changing the set of numerical study are also presented.

Keywords: Trigonometry, Real, Complex

Sumário

INTRODUÇÃO

Quem plantou a semente que acabou resultando na ideia de tudo que será apresentado neste trabalho foi um aluno, ao me fazer uma pergunta que eu não soube responder.

A cerca de cinco anos atrás, enquanto eu estava em uma turma de 3º ano do Ensino Médio, havia na sala um menino, que sempre ao final de cada conteúdo, me fazia perguntas bem interessantes, e levantava questionamentos bem relevantes. Mas um dia, em uma aula de trigonometria, ele me fez a seguinte pergunta: "Professor, o seno de um número complexo pode ser maior do que 1?" Na hora, eu não soube responder, e isso me incomodou muito, já que nas aulas de didática, sempre escutei que deveríamos saber sempre bem mais do que ensinamos. Assim que saí da sala de aula, perguntei para os colegas professores que ali estavam, e ninguém soube responder.

Fiquei curioso não só em aprender, mas também de entender porque sempre que eu perguntava aos meus colegas professores sobre o assunto, ninguém sabia me responder.

Grande parte dos professores justificava não conhecer o assunto por não terem tido aula de funções complexas em sua graduação. A outra parte, que teve aula de funções complexas na sua graduação, justificou o desconhecimento do assunto, alegando que o curso de funções complexas tinha um conteúdo muito extenso, assim as propriedades básicas eram deixadas como exercícios, que nunca eram feitos...e a maioria dos livros de funções complexas, por sua vez, também deixam tais propriedades como exercícios.

Conclusão, relações tão elementares, e que podem despertar a curiosidade de muitos alunos, acabam passando em branco.

Este trabalho vem para responder a vários questionamentos, e demonstrar detalhadamente diversas propriedades que, em geral, são sempre deixadas a cargo do leitor, e ficando sem uma resposta final. Mostrar muitas das semelhanças e diferenças que ocorrem quando estende-se o conjunto numérico de estudo, fazendo uma análise comparativa entre a trigonometria dos números reais e a trigonometria no campo dos números complexos.

O trabalho começa com um capítulo sobre um pouco da história dos dois matemáticos que estão diretamente ligados a fórmula que serve de base para tudo que será demonstrado ao longo dos capítulos. A fórmula de Euler, que nos diz que

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x,$$

onde $e \approx 2{,}718$ representa a base dos logaritmos naturais, i representa a unidade imaginária dos números complexos, e x um número real em radianos. Em tal capítulo também é discutido o fato de que a fórmula de Euler, não foi o Euler que desenvolveu!

No capítulo 2 deste trabalho, essa fórmula será demonstrada, e no capítulo 8, será provado que a fórmula continua sendo válida quando estende-se o conjunto numérico da variável de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{C}$. E ao longo dos capítulos serão demonstradas várias relações que são válidas em ambos os conjuntos, como também serão mostradas algumas diferenças existentes. Será discutido não só como se calcula senos e cossenos de números complexos, como também o que ocorre com as suas limitações e periodicidades em $\mathbb{C}$. Será mostrado que, agora, as funções seno e cosseno não serão mais limitadas, e que elas continuam sendo funções periódicas, o problema agora, será achar o período!

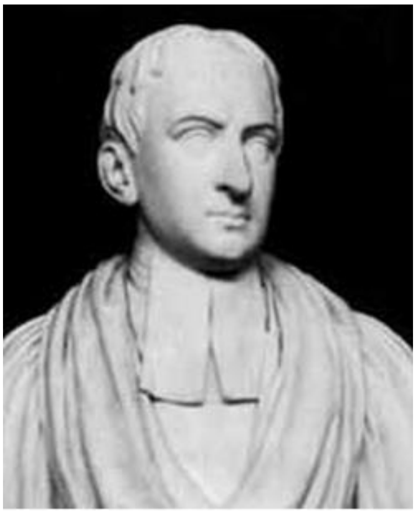
Além do trabalho mostrar um exemplo de como resolver uma equação trigonométrica em $\mathbb{C}$ é muito mais trabalhoso do que em $\mathbb{R}$, também é apresentado um capítulo para uma discussão quanto ao gráfico de uma função trigonométrica em $\mathbb{C}$. Já que tal visualização é impossível, e isso também será justificado, será mostrado ao leitor, como se pode, mesmo sem a visualização de um gráfico, entender o comportamento de todos os pontos da função.

Capítulo I

Parte Histórica

A igualdade $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$ é hoje conhecida como a famosa fórmula de Euler. Em alguns textos, ela é conhecida como fórmula de Euler-Cotes. Antes de mostrarmos a veracidade dessa fórmula, vamos primeiramente ver quem foi Euler, quem foi Roger Cotes, e por que a fórmula recebe tais nomes.

Roger Cotes



Roger Cotes nasceu em 10 de julho de 1682 em Leicester, Inglaterra, e morreu em 5 de junho de 1716 em Cambridge, Inglaterra.

Roger Cotes, filho do casal Robert Cotes e Grace Farmer, é um exemplo de brilhante matemático que não teve tempo de contribuir mais para a ciência devido a morte prematura.

Roger Cotes frequentou a escola de Leicester, e logo cedo, por volta dos doze anos de idade, seus professores já haviam percebido o talento diferenciado do jovem Cotes para a matemática. Seu tio, o reverendo John Smith, foi um grande incentivador e estimulador de Cotes. Com o intuito de ajudar ao máximo o jovem Cotes a desenvolver suas habilidades matemáticas, seu tio passou a cuidar pessoalmente da educação de Cotes, que foi morar com seu tio, assumindo assim a sua tutela e inclusive pondo o menino para ser instruído por um professor particular. E a partir daí foi só sucesso.

Mais tarde, Cotes viria a estudar na famosa escola de St. Paul, em Londres. Mas ainda assim, recebia orientações do seu tio, e os dois trocavam correspondências sobre discussões matemáticas.

Estudou em Cambridge onde depois tornou-se professor. Em 1706, com apenas 23 anos, foi nomeado para ocupar a cadeira de professor Plumian de Astronomia e Filosofia Experimental, cargo criado por Thomas Plume (1630-1704). Na época, a ideia da criação do cargo, era dar ao ocupante da cadeira, todo o suporte necessário para a pesquisa, que ia desde material, instalações e até moradia a um professor considerado notável na área, com perspectiva de grandes contribuições para a instituição. Conseguir essa vaga foi um fato surpreendente para alguém ainda tão jovem. É claro que a nomeação de alguém tão jovem incomodou e contrariou a muitos na Universidade. Mas, além do talento indiscutível para assumir tal cargo, o que também influenciou em muito, e pesou de forma decisiva para Cotes assumir a cátedra, foi a indicação de Isaac Newton (1642-1727) e William Whiston (1667-1752), que eram dois renomados matemáticos na ocasião.

Em 1711 foi eleito membro da Royal Society. Em 1713 foi ordenado diácono, ano em que posteriormente, também foi ordenado sacerdote.

De 1709 até 1713, dedicou grande parte de seu tempo à segunda edição do $Principia$ de Newton. Cotes não só organizou e revisou a edição, como também interferia diretamente, questionando Newton sobre alguns pontos. Tais questionamentos, foram muito enriquecedores para a obra, apesar de algumas vezes gerar discussões tensas entre os dois. Um exemplo de como Roger Cotes questionava alguns pontos com Newton, é a discussão gerada sobre a velocidade do fluxo de água que passa pelo furo de um recipiente cilíndrico. Nos cálculos, aparecia a raiz quarta de 2, e Newton chegou as seguintes aproximações:

$\frac{6}{5} = 1{,}200000000$ $\qquad$ $\frac{13}{11} = 1{,}181818182$ $\qquad$ $\frac{25}{21} = 1{,}190476190$

Discordando das aproximações dadas por Newton, Cotes chegou a seguinte aproximação:

$$\frac{44}{37} = 1{,}189189189$$

Hoje, sabemos que o valor correto é $\sqrt[4]{2} \approx 1{,}189207115$, e que Cotes tinha uma aproximação muito melhor.

Roger Cotes chegou a importantes resultados científicos. Dentre eles, vale ressaltar sua marcante contribuição ao cálculo integral, logaritmos e trigonometria.

Roger Cotes, morreu em 5 de junho de 1716 em Cambridge, Inglaterra, depois de passar muito mal, com os sintomas de diarreia, febre e delírios.

A maioria dos trabalhos de Cotes foram publicados depois de sua morte. Uma parte pelo seu primo Robert Smith, que passou a ocupar o lugar de Cotes como professor

Plumian após a sua morte. Robert Smith era filho do reverendo John Smith, que foi tutor de Roger. Além de amigo pessoal, devido ao laço familiar, Robert foi secretário de Roger enquanto ele era professor Plumian em Cambridge. Outra parte dos trabalhos de Cotes foi publicada pelo matemático Thomas Simpson (1710-1761).

Roger Cotes foi aluno e parceiro de Isaac Newton, que muito lamentou a morte de Cotes.

Realmente, quantas coisas deixamos de saber com a morte tão precoce de Roger Cotes.

Leonhard Euler

Leonhard Euler, matemático e físico, nasceu em 15 de abril de 1707, na Basileia, Suíça, e morreu em 18 de setembro de 1783, em São Petersburgo, Rússia. Euler foi sem sombra de dúvidas, uma das maiores mentes da história da humanidade.

Leonhard Euler foi o primeiro filho do casal Paul Euler e Margaret Brucker.

O pai de Euler veio de uma família modesta, onde em sua maioria eram artesãos. Já a mãe de Euler, veio de uma família com um grande número de estudiosos.

Quando Euler nasceu, seu pai, muito religioso, exercia a função de vigário na igreja de St. Jacob. Embora Teólogo, o pai de Euler achava importante ter contato com matemática na sua formação. Assim, o pai de Euler estudou matemática durante os primeiros anos na Universidade, e teve aulas com o famoso Jacques Bernoulli (1654-1705).

Aproximadamente um ano e meio depois do nascimento de Euler, o pai de Euler mudou-se com sua família para Riehen, no subúrbio da Basileia, onde assumiria o cargo de ministro protestante na paróquia local. À frente da paróquia ele passaria o resto de sua vida com total dedicação.

As primeiras aulas de matemática, Euler teve com seu pai, em casa. Perto dos oito anos de idade foi para a escola de latim. Para melhorar a qualidade de sua formação, seu pai contratou um professor particular, um jovem teólogo chamado Johannes Buckhardt, também com bons conhecimentos e adorador da matemática.

Euler foi matriculado na Universidade da Basileia para cursar Filosofia em 1720, aos 13 anos de idade. Fato que para época, não era tão incomum.

Já na Universidade, Euler teve aulas de matemática com o renomado Jean Bernoulli (1667-1748) o irmão mais novo de Jacques Bernoulli, que a esta altura, já havia falecido. E daí, começou a estudar também com dois dos filhos de Jean, Nicolaus e Daniel. Obviamente, a genialidade de Euler, rapidamente chamou a atenção de Jean Bernoulli, que logo apresentou a Euler livros de matemática avançada.

Jean Bernoulli, por conta de sua agenda lotada, não dava aulas particulares para Euler. Fez mais do que isso. Deu a Euler conselhos de como estudar sozinho, contato com os mais diversos tipos de livros de matemática e livre acesso a ele todos os sábados à tarde, com enorme generosidade para tirar suas dúvidas, e esclarecer suas indagações. É claro que Euler aproveitou ao máximo a oportunidade e foi devorando ferozmente cada livro, cada linha de conhecimento.

Em 1723, Euler graduou-se com o grau de mestre, e fez um discurso em latim, comparando a filosofia de Descartes com a de Newton.

Ainda muito jovem, e sob influência de seu pai, Euler entrou na faculdade de Teologia, mas na verdade, dedicava a maior parte de seu tempo estudando matemática.

O pai de Euler queria que seu filho seguisse o caminho da Teologia. Fez de tudo para que Euler tivesse uma boa educação, para dar-lhe uma grande bagagem cultural e intelectual. O que seu pai não esperava, era que Euler não trilhasse o mesmo caminho que ele. Jean Bernoulli, convenceu pessoalmente o pai de Euler, de que o menino teria um caminho brilhante na pesquisa matemática. Naquele momento, o pai de Euler não tinha mais como negar o talento incomparável que seu filho tinha. Assim, Euler teve um grande leque de conhecimento. Além da filosofia, matemática e teologia, Euler também estudou medicina, astronomia e línguas orientais.

Os encontros aos sábados de Euler com Jean Bernoulli não pararam após a graduação. Tais encontros ficaram famosos no mundo acadêmico. E quanto mais o tempo passava, mais Euler impressionava Jean Bernoulli.

Em 1726, Euler participou da famosa competição intelectual da Academia de Paris que consistia em resolver um problema de assuntos que variavam a cada edição. Naquele ano, o problema era encontrar o melhor lugar para colocar os mastros de um navio. Euler não ganhou o prêmio. Apesar de apresentar um excelente trabalho, ficou com o segundo lugar, recebendo uma menção honrosa.

Tal prêmio, Euler posteriormente veio a ganhar doze vezes.

É claro que não demorou muito para que Jean Bernoulli, antes um orientador de Euler passasse a ser um colega de área, e rapidamente fosse superado pelo jovem gênio.

Isso ficou bem claro em diversos resultados encontrados por Euler. Como um exemplo disso, temos a série infinita

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$$

Tal soma tentou ser calculada por grandes mentes como Newton, Leibniz e os próprios irmãos Bernoulli, Jacques e Jean.

O resultado, bem como os cálculos que levaram ao resultado de tal soma é de aproximadamente 1736. Euler encontrou

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

Quando Jean Bernoulli, que havia sido mentor de Euler, soube do resultado espetacular que nem ele próprio, nem seu irmão Jacques, já falecido, conseguiram resolver, ficou fascinado com a notícia, e lamentou seu irmão não estar vivo para ver os cálculos que levaram ao brilhante resultado.

Em 1727, quando ficou vaga a cadeira de física na Universidade da Basileia, Euler concorreu ao cargo, com o apoio total de seu mentor Jean Bernoulli, mas não foi aceito. Muito provavelmente, pela sua ainda pouca idade, e pela carência de uma boa quantidade de artigos publicados.

Nesse mesmo ano, Euler recebe um convite para integrar-se à Academia de Ciências de São Petersburgo, na Rússia, para onde os irmãos Bernoulli, Nicollaus e Daniel, filhos de Jean haviam ido como professores de matemática. Mas no dia em que Euler chegou à Rússia, a fundadora da Academia morre, e lá se instala uma grande crise. Um dos principais motivos para tal crise, foi por parte dos novos dirigentes, a aversão aos cientistas estrangeiros que integravam a Academia.

Em 1730 com a crise já superada, Euler torna-se professor de filosofia natural na Academia de São Petersburgo.

Em 1733 Daniel Bernoulli deixa a Rússia para ocupar a cadeira de matemática na Universidade da Basileia. Daí Euler assume o lugar de Daniel na Academia. Como Nicolaus Bernoulli já havia morrido antes mesmo de Euler chegar à Rússia, Euler passou a ser a referência em pesquisa matemática da Academia.

É claro que a saída de Daniel Bernoulli foi uma perda irreparável para Euler. Pois além de serem amigos desde a adolescência, seus laços se estreitaram ainda mais quando

Euler chegou à Rússia, e passou os primeiros anos na casa de Daniel, onde não só ficaram muito íntimos, e discutiam todos os dias sobre seus assuntos favoritos, matemática e física. Discussões que com certeza geraram muitas descobertas. Mas ao ocupar o posto de Daniel, Euler teve duas grandes conquistas. Em primeiro lugar, Euler passou a comandar toda pesquisa matemática da Academia, passando a ser o principal pesquisador. Tinha tempo e liberdade para estudar o quanto fosse necessário. Com isso Euler começou a publicar em larga escala e rapidamente teve reconhecimento mundial. Além disso, com o novo cargo, a situação financeira de Euler lhe permitiu tranquilidade e até um casamento em janeiro de 1734, com Katharina Gsell, filha de um pintor suíço. A união com Katharina rendeu 13 filhos, mas infelizmente, apenas 5 chegaram a idade adulta, fato que era relativamente comum pra época. O primeiro filho do casal, Johann Albrecht, também segue o caminho da matemática. E mais tarde, vem a ser um dos assistentes de Euler.

Ainda nessa década, Euler perde a visão do olho direito, fato que não abalou em nada a sua produção de livros e artigos.

Em 1741, Euler se muda para Alemanha para fazer parte da Academia de Berlim, assumindo o cargo de diretor. Euler integrou a Academia durante 25 anos. Nesse período, ele também manteve intensa a sua produção científica. Produção tão grande, que Euler durante toda a sua estadia em Berlim, ainda mandava artigos para serem publicados na Academia de São Petersburgo e na Academia da Prússia.

Apesar desse tempo em Berlim ter sido excelente para a vida pessoal e profissional de Euler, ele também se deparou com inúmeros problemas.

Em 1766 Euler é convidado pela Academia de Ciência de São Petersburgo para reassumir o seu cargo. Como o ambiente em Berlim já não estava nada bom, ele aceita o convite, e assim retorna à Rússia. Nesse mesmo ano, ele percebeu que agora estava perdendo a visão do olho esquerdo devido a uma catarata, que vinha já lhe incomodando a anos desde Berlim.

Euler, já se preparando para a total cegueira, começa a treinar escrever em uma grande lousa e ditar para seus secretários, e filhos, um deles, o matemático e físico, Johann Albrecht.

Em 1771, Euler fica completamente cego. Submete-se a uma cirurgia de catarata, que lhe dá novamente a visão por poucos dias. Embora bem sucedida, a cirurgia levou a formação de um abcesso, que logo deteriorou completamente a visão que lhe restava.

Nessa mesma década, Euler deparou-se com inúmeros problemas na sua vida pessoal. Mesmo sob várias adversidades, Euler continuou com sua intensa produção científica.

Em 18 de setembro de 1783, Euler morre subitamente, aos 76 anos de idade, vítima de um acidente vascular cerebral enquanto brincava com um de seus netos.

Além de suas publicações de teor avançado, Euler também escreveu livros didáticos para serem adotados nas escolas russas. Escreveu livros em todos os níveis. Apesar de sua língua nativa ser o alemão, Euler escreveu muitos livros em latim, em russo e alguns em francês.

O que destaca Euler na história da matemática é não só o teor de suas publicações, mas também a sua quantidade de material publicado, entre livros e artigos. Euler foi um dos maiores produtores de matemática da história. Sua produção foi demasiadamente intensa por toda sua vida acadêmica. Sua criatividade para desvendar as ciências matemáticas e da natureza nunca tiveram sequer um período de pouca produtividade, muito menos de escassez. Mesmo depois de completamente cego sua produção continuou a todo vapor. E de fato, aproximadamente metade de toda sua produção científica foi publicada durante o segundo período de sua estadia na Rússia, isto é, de 1766 até 1783, ano de sua morte. Foram apenas 17 anos, dos quais cerca de 12 desses anos, Euler estava completamente cego. Cerca de cinquenta anos após a sua morte, ainda se publicava artigos de autoria de Euler. Itens que ele antes de morrer, ditou ou escreveu na lousa para seus secretários e filhos.

Euler dizia que muitas de suas maiores descobertas matemáticas, ele fez enquanto segurava um bebê em um braço, escrevia com o outro, e ainda com outras crianças brincando em volta dos seus pés.

A lista de itens produzidos por Euler, incluindo os póstumos, contém cerca de 886 itens. A produção de Euler chegava em média, a cerca de 800 páginas por ano. O historiador Clifford Truesdell estima que durante o período de produção científica de Euler, isto é entre os anos de 1725 e 1800, um terço de toda a produção mundial nos campos da matemática, física e engenharia mecânica é de autoria de Leonhard Euler.

Além da herança relativa a quantidade de material deixada por Euler, ele também deixou grandes marcas na maneira de escrever matemática e os símbolos usados em suas notações. A linguagem e a notação adotada hoje, é muito semelhante a de Euler. Aqui estão alguns exemplos de notações introduzidas por Euler.

- e para representar a base dos logaritmos naturais, bem como lx para representar o logaritmo de x.
- i no lugar de $\sqrt{-1}$ para representar a unidade imaginária. Apesar de Euler ter sido o primeiro a usar a letra i para tal representação, só fez isso no fim de sua vida, e por isso Gauss foi o responsável pela difusão da ideia.
- π para representar a razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência. Nesse caso, Euler não foi o primeiro a escrever, mas foi ele o responsável por tornar essa notação amplamente usada.
- Σ para representar somatório.
- Δ para representar uma diferença finita.
- $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ para representar os valores do seno e do cosseno de funções trigonométricas.

- a, b, e c, letras minúsculas para representar os lados de um ABC, e o uso das letras maiúsculas A, B e C, para representar os ângulos opostos correspondentes.
- $f(x)$ para representar uma função de x. Essa provavelmente deve ter sido a notação mais importante criada por Euler.

Euler contribuiu para diversos ramos da ciência, com maior ênfase em matemática, física e astronomia. Tendo feito também muitos trabalhos para engenharia, artilharia, arquitetura e ciência naval.

Indiscutivelmente, Euler foi um dos matemáticos mais prolíferos de todos os tempos.

Roger Cotes x Leonhard Euler

Roger Cotes foi um dos primeiros a escrever uma equivalência a fórmula $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$. Na verdade, em 1714, ele publicou a seguinte igualdade

$$i\varphi = \log(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)$$

onde log representava o logaritmo natural, isto é, o logaritmo na base e ($e \approx 2{,}718$). E hoje, acredita-se que Roger Cotes foi o primeiro a escrever tal expressão. Note que na ocasião, Euler tinha cerca de 7 anos de idade.

O que Euler fez décadas depois, foi escrever de outra forma o que Cotes escreveu. Em 1748, Euler publicou a igualdade

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi$$

que hoje recebe seu nome. O brilhantismo de Euler não foi só escrever a fórmula de outra maneira. Escrevendo a fórmula usando exponencial, ao invés de logaritmo, Euler encontrou uma expressão muito mais fácil de manipular algebricamente em termos de somas e subtrações. Dessa forma, Euler demonstrou diversos resultados sobre as funções trigonométricas de uma variável complexa, e assim Euler incorporou definitivamente os números complexos na álgebra das funções trigonométricas.

Usando a expressão $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi$, Euler chegou a diversos resultados, sendo dois deles fundamentais. As seguintes fórmulas

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} \quad \text{e} \quad \text{sen}\,\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$$

que hoje formam a base da trigonometria analítica complexa moderna.

É indiscutível que Roger Cotes escreveu a fórmula antes de Euler. E que Euler apenas a reescreveu de outro modo, que hoje é a maneira usual. Mas a maneira como Euler escreveu a fórmula foi e é muito mais usada. Além disso, os resultados que Euler concluiu e o campo de estudo que ele abriu as portas foi tão significativo, que acabou levando o crédito da descoberta. Essa foi apenas uma das diversas descobertas fantásticas que Leonhard Euler deixou para todos nós.

Capítulo II

A Fórmula de Euler

O objetivo deste capítulo é demonstrar a fórmula de Euler. Para isto, utilizaremos, sem demonstração, um importante resultado do Cálculo Diferencial e Integral, O Teorema de Taylor.

Primeiramente, vamos definir o que é uma série de Taylor.

Série de Taylor

Definição: Seja f uma função infinitamente diferenciável em um intervalo aberto I e seja a um número real em I. Assim, a série de Taylor para f em a é a série de potências

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

onde, por definição, $f^{(0)}(x) = f(x)$.

A série de Taylor para f em $a = 0$ é chamada de série de Maclaurin para f.

Embora uma função infinitamente diferenciável tenha uma série de Taylor, essa série de Taylor não necessariamente converge para a função.

Um exemplo disso é a função real $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & , se \;\; x \neq 0 \\ 0 & , se \;\; x = 0. \end{cases}$

f tem todas derivadas contínuas e $f^{(k)}(0) = 0$ para todo k. Assim, a série de Taylor em torno de 0 será

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0}{k!}(x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 0 = 0$$

que converge para 0, para todo x. Assim a série de Taylor de f só converge para f no ponto 0.

O teorema a seguir nos dá uma condição sob a qual a série de Taylor de uma função realmente converge para a função.

Teorema de Taylor

Seja f uma função infinitamente diferenciável em algum intervalo aberto contendo o número real a. Suponha que existe um número real positivo r e uma constante real positiva M tal que

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$$

se verifica para todos os valores de x no intervalo $(a-r, a+r)$ e todos os inteiros positivos n. Então a série de Taylor de f converge para f numa vizinhança de a, isto é,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

se verifica para todos os valores de x numa vizinhança de a. ([6], pag. 671)

Com base nesse resultado, veremos como ficam as expansões em série de potências das funções e^x, sen x e $\cos x$, definidas em $\mathbb{R}$ e com imagens em $\mathbb{R}$, onde $e \approx 2{,}718$ é a base dos logaritmos naturais.

Para $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, f é infinitamente diferenciável em $(-\infty, +\infty)$. Se r é um número real positivo, então, para todo x no intervalo $(-r, r)$ e n inteiro positivo, tem-se

$$\left|f^{(n)}(x)\right| = |e^x| = e^x \leq e^r$$

já que $x < r$. Assim, pondo $M = e^r$, pelo Teorema de Taylor, temos a garantia de que a série de Taylor de e^x converge para e^x. Como

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{f^{(0)}(a)}{0!}(x-a)^0 + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

para $a = 0$, fica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = \frac{f^{(0)}(0)}{0!}(x-0)^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}(x-0)^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}(x-0)^2 + \cdots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

Como $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, para todo x, aplicando o Teorema de Taylor, segue que,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

que também é chamada de série de Maclaurin para e^x.

Da mesma forma, para $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen} x$, f é infinitamente diferenciável em $(-\infty, +\infty)$. Como derivadas sucessivas de $\operatorname{sen} x$ nos dão somente $\pm \cos x$ ou $\pm \operatorname{sen} x$, em qualquer caso, para n inteiro positivo teremos sempre

$$\left|\frac{d^{(n)}}{dx} \operatorname{sen} x\right| \leq 1.$$

Pondo $M = 1$, tem-se

$$\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|\frac{d^{(n)}}{dx} \operatorname{sen} x\right| \leq 1 = M.$$

Como todas as derivadas em módulo são limitadas por 1, segue do Teorema de Taylor que a série de Taylor de $\operatorname{sen} x$ em torno de $a = 0$ converge para $\operatorname{sen} x$. Como

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{f^{(0)}(a)}{0!}(x-a)^0 + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

para $a = 0$, fica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = \frac{f^{(0)}(0)}{0!}(x-0)^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}(x-0)^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}(x-0)^2 + \cdots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

Aplicando o Teorema de Taylor, segue que

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 + \frac{\cos 0}{1!}x - \frac{\operatorname{sen} 0}{2!}x^2 - \frac{\cos 0}{3!}x^3 + \frac{\operatorname{sen} 0}{4!}x^4 + \frac{\cos 0}{5!}x^5 - \cdots$$

isto é,

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

se verifica para todos os valores de x.

Analogamente, prova-se que

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

No estudo dos números complexos, é comum representar um número z na chamada forma algébrica $z = a + bi$, onde a e b são números reais e i é a unidade imaginária ($i^2 = -1$) ou representá-lo na chamada forma trigonométrica (também dita polar) $z = |z|(\cos x + i\ \operatorname{sen} x)$, onde $|z|$ representa o módulo de z.

Nosso objetivo agora, com base nas expansões em séries de potências obtidas, é escrever uma representação exponencial para um número complexo. Tal representação tornará mais simples as demonstrações de diversos resultados da trigonometria no campo dos complexos.

Vimos que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Substituindo x por iy ($y \in \mathbb{R}$) nessa série, fazendo os cálculos (sem qualquer rigor na precisão da convergência) e lembrando do estudo de complexos que para k inteiro não-nulo, tem-se $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$ e $i^{4k+3} = -i$, segue que

$$e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - \frac{iy^7}{7!} + \cdots$$

Que é equivalente a escrever

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots\right).$$

Mas, já mostramos através do Teorema de Taylor que,

$$1 - \tfrac{y^2}{2!} + \tfrac{y^4}{4!} - \tfrac{y^6}{6!} + \cdots = \cos y \quad \text{e} \quad y - \tfrac{y^3}{3!} + \tfrac{y^5}{5!} - \tfrac{y^7}{7!} + \cdots = \operatorname{sen} y$$

para todo y real. Dessa forma, $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$ parece ser uma boa interpretação para e^{iy}. Além disso, como $e^{r+s} = e^r \cdot e^s$ para r e s reais, é natural esperarmos que $e^{x+yi} = e^x \cdot e^{iy}$. Com base nessas considerações, definimos a exponencial de um número complexo $z = x + yi$, com x e y reais por

$$e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Note que, para $z = 0 + yi$ obtemos a fórmula de Euler

$$e^{iy} = (\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Observemos que para $y = \pi$, tem-se $e^{i\pi} = -1 + 0$, obtendo a célebre igualdade

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

que contém cinco números muito significativos na matemática.

Além disso, lembremos do estudo de complexos que todo número complexo z pode ser escrito na chamada forma trigonométrica $z = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, onde $|z|$ representa o módulo de z e θ representa um argumento de z (na maioria das vezes θ representa o argumento principal de z). Da fórmula de Euler, $e^{i\theta} = (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$. Multiplicando ambos os membros da última igualdade por $|z|$, obtemos

$$|z|e^{i\theta} = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta).$$

Assim, todo número complexo $|z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ pode ser escrito como $|z|e^{i\theta}$, que é uma forma mais simples de escrevê-lo.

Na maioria dos textos em nível médio é comum representar $|z|$ por ρ. Dessa forma, em tais textos o número complexo é escrito como $\rho e^{i\theta}$.

Antes de avançarmos para o próximo capítulo, faremos algumas observações que serão relevantes para o desenvolvimento do conteúdo.

Observemos primeiramente que, assim como em $\mathbb{R}$, para qualquer número complexo z e n inteiro, tem-se

$$(e^z)^n = e^{nz}.$$

Com efeito, seja $z = x + yi$ um número complexo com x, e y reais. Assim,

$$(e^z)^n = [e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y)]^n = (e^x)^n(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y)^n.$$

Como x é real e n é inteiro, $(e^x)^n = e^{nx}$. Do estudo de números complexos, sabemos que para todo θ real e n inteiro, $(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)$ (igualdade conhecida como a fórmula de De Moivre). Assim,

$$(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y)^n = \cos(ny) + i\,\mathrm{sen}(ny).$$

Substituindo temos

$$(e^x)^n(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y)^n = e^{nx}[\cos(ny) + i\,\mathrm{sen}(ny)] = e^{nx+nyi} = e^{n(x+yi)}$$

donde

$$(e^z)^n = e^{nz},$$

como queríamos demonstrar. Em particular, para $n = -1$, tem-se $(e^z)^{-1} = e^{-z}$, para todo número complexo z.

Outra observação importante a fazer é que, dados dois números complexos z e w quaisquer, temos que $e^z e^w = e^{z+w}$.

De fato, sejam $z = x + yi$ e $w = a + bi$ dois números complexos com x, y, a e b reais. Assim,

$$e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \text{ e } e^w = e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b).$$

Do estudo de complexos, sabemos que dados dois números na forma trigonométrica, $p = (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ e $q = (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$, o produto pq é dado por

$$p \cdot q = [\cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta)].$$

Dessa forma,

$$e^z e^w = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)\, e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b)$$

$$e^z e^w = e^x e^a\, (\cos y + i \operatorname{sen} y)(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

e do produto de complexos, temos

$$e^z e^w = e^{x+a}[\cos(y + b) + i \operatorname{sen}(y + b)]$$

isto é,

$$e^z e^w = e^{z+w}.$$

Capítulo III

Calculando senos e cossenos de uma variável complexa

O objetivo deste capítulo é encontrar uma maneira de definir e calcular o cosseno e o seno de uma variável complexa. Para isso, começaremos analisando a forma exponencial de algumas expressões.

No capítulo anterior, acabamos de ver como escrever um número complexo na forma exponencial. Será que também é possível escrever uma forma exponencial para as funções $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$?

Vamos demonstrar que sim!

De fato, vimos que, $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$, então $e^{i(-x)} = \cos(-x) + i \operatorname{sen}(-x)$.

Como a função cosseno é uma função par e a função seno é uma função ímpar, temos que $\cos(-x) = \cos x$ e $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$.

Daí, teremos $e^{i(-x)} = \cos x - i \operatorname{sen} x$.

Assim, $e^{ix} + e^{i(-x)} = \cos x + i \operatorname{sen} x + \cos x - i \operatorname{sen} x = 2 \cos x$.

Logo, $2 \cos x = e^{ix} + e^{i(-x)}$, donde

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Da mesma forma, fazendo $e^{ix} - e^{i(-x)}$, obtemos

$$e^{ix} - e^{i(-x)} = \cos x + i \operatorname{sen} x - (\cos x - i \operatorname{sen} x) = 2i \operatorname{sen} x.$$

Logo, $2i \operatorname{sen} x = e^{ix} - e^{-ix}$, donde

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Nosso objetivo agora é estender o estudo das funções $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$, dos reais para o campo dos complexos, isto é, estudar tais funções definidas em $\mathbb{C}$ e com imagem em $\mathbb{C}$.

Para todo número real x, temos que $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, portanto, é natural definirmos a função cosseno de uma variável complexa por $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, para todo número complexo z.

Dessa forma, seja $z = x + yi$, um número complexo, com x e y reais, e i a unidade imaginária. Então, $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ é equivalente a escrever

$$\cos(x + yi) = \frac{e^{i(x+yi)} + e^{-i(x+yi)}}{2}.$$

Daí,

$$\cos(x + yi) = \frac{e^{ix+yi^2} + e^{-ix-yi^2}}{2}$$

$$\cos(x + yi) = \frac{e^{ix-y} + e^{-ix+y}}{2}$$

$$\cos(x + yi) = \frac{e^{ix} \cdot e^{-y} + e^{-ix} \cdot e^{y}}{2}.$$

Mas, $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ e $e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$, substituindo vem

$$\cos(x + yi) = \frac{e^{ix} \cdot e^{-y} + e^{-ix} \cdot e^{y}}{2}$$

$$\cos(x + yi) = \frac{(\cos x + i \operatorname{sen} x) \cdot e^{-y} + (\cos x - i \operatorname{sen} x) \cdot e^{y}}{2}$$

$$\cos(x + yi) = \frac{e^{-y} \cdot \cos x + e^{-y} \cdot i \operatorname{sen} x + e^{y} \cdot \cos x - e^{y} \cdot i \operatorname{sen} x}{2}$$

$$\cos(x + yi) = \frac{e^{-y} \cdot \cos x + e^{y} \cdot \cos x + e^{-y} \cdot i \operatorname{sen} x - e^{y} \cdot i \operatorname{sen} x}{2}$$

$$\cos(x + yi) = \frac{\cos x \ (e^{-y} + e^{y}) + i \operatorname{sen} x \, (e^{-y} - e^{y})}{2}$$

$$\cos(x + yi) = \cos x \left(\frac{e^{-y} + e^{y}}{2}\right) + i \operatorname{sen} x \left(\frac{e^{-y} - e^{y}}{2}\right)$$

donde

$$\cos(x + yi) = \cos x \left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right) - i \operatorname{sen} x \left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right).$$

Note que, $\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)$ e $\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)$ são exatamente por definição, as respectivas expressões do cosseno hiperbólico de y e do seno hiperbólico de y, cujas notações são respectivamente $\cosh y$ e $\operatorname{senh} y$, sendo y um número real. Assim, também podemos escrever

$$\cos(x+yi) = \cos x \ \cosh y - i \operatorname{sen} x \ \operatorname{senh} y.$$

Analogamente, para todo número real x, temos que $\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, portanto, é natural definirmos a função seno de uma variável complexa por $\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, para todo número complexo z.

Dessa forma, seja $z = x + yi$, um número complexo, com x e y reais e i a unidade imaginária. Então, $\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ é equivalente a escrever $\operatorname{sen}(x+yi) = \frac{e^{i(x+yi)}-e^{-i(x+yi)}}{2i}$. Daí,

$$\operatorname{sen}(x+yi) = \frac{e^{ix+yi^2} - e^{-ix-yi^2}}{2i}$$

$$\operatorname{sen}(x+yi) = \frac{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}{2i}$$

$$\operatorname{sen}(x+yi) = \frac{e^{ix} \cdot e^{-y} - e^{-ix} \cdot e^{y}}{2i}.$$

Mas, $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ e $e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$, substituindo, vem

$$\operatorname{sen}(x+yi) = \frac{(\cos x + i \operatorname{sen} x) \cdot e^{-y} - (\cos x - i \operatorname{sen} x) \cdot e^{y}}{2i}$$

$$\operatorname{sen}(x+yi) = \frac{e^{-y} \cdot \cos x + e^{-y} \cdot i \operatorname{sen} x - e^{y} \cdot \cos x + e^{y} \cdot i \operatorname{sen} x}{2i}$$

$$\operatorname{sen}(x+yi) = \frac{e^{-y} \cdot \cos x - e^{y} \cdot \cos x + e^{-y} \cdot i \operatorname{sen} x + e^{y} \cdot i \operatorname{sen} x}{2i}.$$

Multiplicando o numerador e o denominador do lado direito por i, vem

$$\operatorname{sen}(x+yi) = \frac{\cos x\,(e^{-y} - e^{y}) + i \operatorname{sen} x\,(e^{-y} + e^{y})}{2i} \cdot \frac{i}{i}$$

$$\operatorname{sen}(x+yi) = \frac{\cos x\,(e^{-y} - e^{y})\, i - \operatorname{sen} x\,(e^{-y} + e^{y})}{-2}$$

$$\operatorname{sen}(x+yi) = \cos x \left(\frac{e^{-y} - e^{y}}{-2}\right) i - \operatorname{sen} x \left(\frac{e^{-y} + e^{y}}{-2}\right)$$

$$\operatorname{sen}(x+yi) = \cos x \left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right) i + \operatorname{sen} x \left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}(x+yi) = \operatorname{sen} x \left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right) + i\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)\cos x.$$

Note que, $\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)$ e $\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)$ são exatamente, por definição, as respectivas expressões do cosseno hiperbólico de y e do seno hiperbólico de y, cujas notações são respectivamente $\cosh y$ e $\operatorname{senh} y$, sendo y um número real. Assim, também podemos escrever

$$\operatorname{sen}(x+yi) = \operatorname{sen} x\ \cosh y + \ i\operatorname{senh} y\ \cos x.$$

Exemplo 1: Calculemos o valor do seno do número complexo $z = 3 + 4i$.

Substituindo na fórmula

$$\operatorname{sen}(x+yi) = \operatorname{sen} x \left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right) + i\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)\cos x$$

$x = 3$ e $y = 4$, com x em radianos, tem-se

$$\operatorname{sen}(3+4i) = \operatorname{sen} 3 \left(\frac{e^{4}+e^{-4}}{2}\right) + i\left(\frac{e^{4}-e^{-4}}{2}\right)\cos 3.$$

Para $e \approx 2{,}718$, obtemos $\left(\frac{e^{4}+e^{-4}}{2}\right) \approx 27{,}296$ e $\left(\frac{e^{4}-e^{-4}}{2}\right) \approx 27{,}278.$

Como $\operatorname{sen} 3 \approx 0{,}141$ e $\cos 3 \approx -0{,}989$, substituindo os valores obtemos

$$\operatorname{sen}(3+4i) \approx 3{,}848 - 26{,}278\, i.$$

NOTA: Se ampliarmos o número de casas decimais das aproximações para obtermos um resultado mais preciso, encontraremos

$$\operatorname{sen}(3+4i) \approx 3{,}854 - 27{,}017\, i.$$

Exemplo 2: Calculemos o valor do cosseno do número complexo $z = 3 + 4i$.

Substituindo na fórmula

$$\cos(x+yi) = \cos x \left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right) - i\operatorname{sen} x\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)$$

$x = 3$ e $y = 4$, com x em radianos, tem-se

$$\cos(3+4i) = \cos 3 \left(\frac{e^{4}+e^{-4}}{2}\right) + i\operatorname{sen} 3\left(\frac{e^{4}-e^{-4}}{2}\right).$$

Para $e \approx 2{,}718$, obtemos $\left(\frac{e^4+e^{-4}}{2}\right) \approx 27{,}296$ e $\left(\frac{e^4-e^{-4}}{2}\right) \approx 27{,}278$.

Como $\operatorname{sen} 3 \approx 0{,}141$ e $\cos 3 \approx -0{,}989$, substituindo os valores obtemos

$$\cos(3+4i) \approx -26{,}995 + 3{,}846\, i.$$

NOTA: Se ampliarmos o número de casas decimais das aproximações para obtermos um resultado mais preciso, encontraremos

$$\cos(3+4i) \approx -27{,}035 + 3{,}851\, i.$$

Capítulo IV

Verificando as limitações das funções seno e cosseno de uma variável complexa

Neste capítulo vamos mostrar que as funções cosseno e seno no campo dos números complexos não são limitadas. Para isto, começaremos calculando o valor absoluto do número complexo $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2\,i\right)$, isto é, o valor de $\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2\,i\right)\right|$.

Novamente, pela fórmula

$$\operatorname{sen}(x + yi) = \operatorname{sen} x \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + i\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)\cos x$$

com x em radianos, substituindo $x = \frac{\pi}{2}$ e $y = 2$, tem-se

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2\,i\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\left(\frac{e^2 + e^{-2}}{2}\right) + i\left(\frac{e^2 - e^{-2}}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2}$$

como $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\left(\frac{e^2+e^{-2}}{2}\right) \approx 3{,}762$ e $\left(\frac{e^2-e^{-2}}{2}\right) \approx 3{,}627$

daí, substituindo os valores, tem-se

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2i\right) \approx 1 \cdot 3{,}762 + 3{,}627 \cdot 0$$

que nos fornece $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2i\right) \approx 3{,}762$, que é um número real. Como $|3{,}762| = 3{,}762$, temos que $\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2i\right)\right| \approx |3{,}762| = 3{,}762$.

Note que, encontramos um seno com valor absoluto maior do que 1, o que é impossível na trigonometria dos números reais. Mais adiante, faremos algumas comparações com as duas trigonometrias, a dos números reais e a dos números complexos, e mostraremos que, apesar de algumas diferenças, muitas propriedades da trigonometria dos reais, também são verdadeiras na trigonometria dos complexos.

Antes de começarmos com as observações, lembremos a definição de função limitada.

Definição: Uma função real $f: D \to \mathbb{R}$ é limitada se existe uma constante $M \geq 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M, \forall\, x \in D.$$

Para funções complexas, a definição é análoga. Uma função de uma variável complexa $f: D \to \mathbb{C}$ é limitada, se existe uma constante $M \geq 0$ tal que

$$|f(z)| \leq M, \forall\, z \in D.$$

A primeira observação a fazer é com relação ao valor encontrado para $\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+2i\right)\right| \approx 3{,}762$. Vimos que, no campo dos complexos podemos encontrar um valor absoluto para o seno maior do que 1. E para o cosseno, será que também é possível?

A resposta é sim. E mais, além de ultrapassar o valor 1, mostraremos que a função cosseno não é limitada em $\mathbb{C}$.

De fato, seja $z = yi$, um número complexo, sendo y um número real. Vimos anteriormente que

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

então,

$$\cos(yi) = \frac{e^{i(yi)} + e^{-i(yi)}}{2}$$

$$\cos(yi) = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2}$$

assim,

$$|\cos(yi)| = \left|\frac{e^{-y} + e^{y}}{2}\right| = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2}$$

mas $\frac{e^{-y}+e^{y}}{2} \to +\infty$ quando $y \to +\infty$,

então $|\cos(yi)| \to +\infty$, quando $y \to +\infty$.

Dessa forma mostramos que a função cosseno de uma variável complexa não é limitada. Diferentemente da função cosseno de uma variável real, onde $|\cos x| \leq 1$, para todo x real.

Com relação a função seno, calculamos o valor de $\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+2i\right)\right|$, encontrando aproximadamente $3{,}762$, que é maior do que 1. Mostraremos agora, que a função seno de uma variável complexa também não é limitada.

De fato, seja $z = yi$ um número complexo, com y pertencente ao conjunto dos números reais. Vimos que, $\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ para todo z complexo. Assim, para $z = yi$, teremos

$$\operatorname{sen}(yi) = \frac{e^{i(yi)} - e^{-i(yi)}}{2i}$$

$$\operatorname{sen}(yi) = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i}.$$

Multiplicando numerador e denominador por i, tem-se

$$\operatorname{sen}(yi) = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} \cdot \frac{i}{i}$$

$$\operatorname{sen}(yi) = \frac{e^{-y} - e^{y}}{-2}\ i$$

assim,

$$|\operatorname{sen}(yi)| = \left|\frac{e^{-y} - e^{y}}{-2}\ i\right|$$

mas, do estudo de números complexos, temos que $\frac{e^{-y} - e^{y}}{-2}\ i$ é um número imaginário puro, isto é, de parte real nula. Então podemos escrever

$$|\operatorname{sen}(yi)| = \left|0 + \left(\frac{e^{-y} - e^{y}}{-2}\right) i\right|.$$

E no campo dos complexos, o módulo de um número da forma $a + bi$, com a e b reais, é dado pela fórmula

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

daí,

$$|\operatorname{sen}(yi)| = \sqrt{(0)^2 + \left(\frac{e^{-y} - e^{y}}{-2}\right)^2}$$

$$|\operatorname{sen}(yi)| = \sqrt{\left(\frac{e^{-y} - e^{y}}{-2}\right)^2}$$

$$|\operatorname{sen}(yi)| = \left|\frac{e^{-y} - e^{y}}{-2}\right| = \left|\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right|.$$

Mas quando $y \to +\infty$, $\frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \to +\infty$,

então quando $y \to +\infty$, teremos $|\operatorname{sen}(yi)| \to +\infty$.

Logo, podemos concluir que a função seno de uma variável complexa não é limitada. Ao contrário do que ocorre no conjunto dos números reais, já que $|\operatorname{sen} x| \leq 1$, para todo x real.

Outra maneira de mostrarmos que a função seno de uma variável complexa não é limitada, é trabalhando direto com a fórmula

$$\operatorname{sen}(x+yi) = \operatorname{sen} x \left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right) + i\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)\cos x.$$

Fazendo $x = \frac{\pi}{2}$ e $y \in \mathbb{R}$, substituindo teremos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+yi\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right) + i\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+yi\right) = 1\cdot\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right) + i\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)\cdot 0$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+yi\right) = \left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right).$$

Assim, $\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+yi\right)\right| = \left|\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right|$.

Mas quando $y \to +\infty$, $\frac{e^{y}+e^{-y}}{2} \to +\infty$,

então quando $y \to +\infty$, teremos $\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+yi\right)\right| \to +\infty$.

Logo, podemos concluir que a função seno de uma variável complexa não é limitada.

Capítulo V

Algumas propriedades trigonométricas válidas em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$

Neste capítulo mostraremos algumas propriedades trigonométricas dos reais que se estendem para os complexos.

Propriedade 1: Para todo número complexo z,

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1.$$

De fato, sabemos que $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ e $\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.

Daí, $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2$

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = \frac{\left(e^{iz}\right)^2 - 2 \cdot e^{iz} \cdot e^{-iz} + \left(e^{-iz}\right)^2}{4 \cdot i^2} + \frac{\left(e^{iz}\right)^2 + 2 \cdot e^{iz} \cdot e^{-iz} + \left(e^{-iz}\right)^2}{4}$$

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = \frac{e^{2iz} - 2 \cdot e^0 + e^{-2iz}}{4 \cdot (-1)} + \frac{e^{2iz} + 2 \cdot e^0 + e^{-2iz}}{4}$$

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = \frac{-e^{2iz} + 2 - e^{-2iz}}{4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4}$$

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = \frac{2}{4} + \frac{2}{4}$$

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1,$$

como queríamos demonstrar.

Propriedade 2: Para todo número complexo z,

$$\cos(-z) = \cos z.$$

De fato, sabemos que $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$.

Então, $\cos(-z) = \frac{e^{i(-z)} + e^{-i(-z)}}{2} = \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \equiv \cos z$.

Logo, $\cos(-z) = \cos z$, como queríamos demonstrar.

Note que, a paridade da função cosseno não se restringe apenas aos reais. Acabamos de mostrar que o cosseno no campo dos complexos também é uma função par.

Propriedade 3: Para todo número complexo z,

$$\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$$

De fato, sabemos que $\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

Então $\operatorname{sen}(-z) = \frac{e^{i(-z)} - e^{-i(-z)}}{2i} = \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} = -\left(\frac{-e^{-iz} + e^{iz}}{2i}\right) = -\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) = -\operatorname{sen} z.$

Logo, $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$, como queríamos demonstrar.

Temos então, que o seno é uma função ímpar não somente nos reais, mas também no campo dos complexos.

Assim, o cosseno e o seno preservam as suas paridades quando estão no conjunto dos números complexos.

Propriedade 4: Sejam z_1 e z_2 números complexos. Então

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \ \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \ \operatorname{sen} z_2$$

e

$$\cos(z_1 - z_2) = \cos z_1 \ \cos z_2 + \operatorname{sen} z_1 \ \operatorname{sen} z_2.$$

De fato, sabemos que, para todo número complexo z,

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \ \text{ e } \ \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

Então, $\cos z_1 = \frac{e^{iz_1}+e^{-iz_1}}{2}$, $\cos z_2 = \frac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2}$, $\operatorname{sen} z_1 = \frac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2i}$ e $\operatorname{sen} z_2 = \frac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2i}$.

Assim,

$$\cos z_1 \ \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \ \operatorname{sen} z_2 =$$

$$\left(\frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2}\right) \cdot \left(\frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2}\right) - \left(\frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i}\right) \cdot \left(\frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i}\right) =$$

$$\left(\frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2}\right) \cdot \left(\frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2}\right) + \left(\frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2}\right) \cdot \left(\frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2}\right) =$$

$$= \frac{e^{iz_1+iz_2} + e^{iz_1-iz_2} + e^{-iz_1+iz_2} + e^{-iz_1-iz_2} + e^{iz_1+iz_2} - e^{iz_1-iz_2} - e^{-iz_1+iz_2} + e^{-iz_1-iz_2}}{4}$$

$$= \frac{e^{iz_1+iz_2} + e^{-iz_1-iz_2} + e^{iz_1+iz_2} + e^{-iz_1-iz_2}}{4}$$

$$= \frac{2 \cdot e^{iz_1+iz_2} + 2 \cdot e^{-iz_1-iz_2}}{4}$$

$$= \frac{e^{iz_1+iz_2} + e^{-iz_1-iz_2}}{2}$$

$$= \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+iz_2)}}{2}$$

daí,

$$\cos z_1 \ \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \ \operatorname{sen} z_2 = \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2}.$$

Mas, como $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, então $\cos(z_1 + z_2) = \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2}$ que é exatamente idêntico ao valor encontrado para $\cos z_1 \ \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \ \operatorname{sen} z_2$.

Logo, $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \ \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \ \operatorname{sen} z_2$, como queríamos demonstrar.

Note que, na trigonometria dos números reais, essa é a propriedade do cosseno da soma de dois arcos. Assim, provamos que ela também é válida no campo dos números complexos.

No caso $\cos(z_1 - z_2)$, basta notar que $\cos(z_1 - z_2) = \cos[z_1 + (-z_2)]$.

Aplicando a propriedade do cosseno da soma, já demonstrada, temos

$$\cos[z_1 + (-z_2)] = \cos z_1 \ \cos(-z_2) - \operatorname{sen} z_1 \ \operatorname{sen}(-z_2).$$

Mas, das propriedades 2 e 3, sabemos que o cosseno é uma função par e o seno é uma função ímpar, assim, $\cos(-z_2) = \cos z_2$ e $\operatorname{sen}(-z_2) = -\operatorname{sen} z_2$. Daí, fazendo as devidas substituições, tem-se

$$\cos[z_1 + (-z_2)] = \cos z_1 \ \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \ (-\operatorname{sen} z_2)$$

donde $\cos(z_1 - z_2) = \cos z_1 \ \cos z_2 + \operatorname{sen} z_1 \ \operatorname{sen} z_2$, como queríamos demonstrar.

Propriedade 5: Sejam z_1 e z_2 números complexos. Então

$$\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} z_1 \, \cos z_2 + \operatorname{sen} z_2 \, \cos z_1$$

e

$$\operatorname{sen}(z_1 - z_2) = \operatorname{sen} z_1 \, \cos z_2 - \operatorname{sen} z_2 \, \cos z_1.$$

De fato, sabemos que para todo número complexo z,

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \ \text{ e } \ \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

Então, $\cos z_1 = \frac{e^{iz_1}+e^{-iz_1}}{2}$, $\cos z_2 = \frac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2}$, $\operatorname{sen} z_1 = \frac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2i}$ e $\operatorname{sen} z_2 = \frac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2i}$.

Assim,

$$\operatorname{sen} z_1 \, \cos z_2 + \operatorname{sen} z_2 \, \cos z_1 =$$

$$= \left(\frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i}\right) \cdot \left(\frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2}\right) + \left(\frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i}\right) \cdot \left(\frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2}\right)$$

$$= \frac{e^{iz_1+iz_2} + e^{iz_1-iz_2} - e^{-iz_1+iz_2} - e^{-iz_1-iz_2} + e^{iz_1+iz_2} + e^{-iz_1+iz_2} - e^{iz_1-iz_2} - e^{-iz_1-iz_2}}{4i}$$

$$= \frac{e^{iz_1+iz_2} - e^{-iz_1-iz_2} + e^{iz_1+iz_2} - e^{-iz_1-iz_2}}{4i}$$

$$= \frac{2 \cdot e^{iz_1+iz_2} - 2 \cdot e^{-iz_1-iz_2}}{4i}$$

$$= \frac{e^{iz_1+iz_2} - e^{-iz_1-iz_2}}{2i}$$

daí,

$$\operatorname{sen} z_1 \, \cos z_2 + \operatorname{sen} z_2 \, \cos z_1 = \frac{e^{i(z_1+z_2)}-e^{-(iz_1+z_2)}}{2i}.$$

Mas, como $\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ então $\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \frac{e^{i(z_1+z_2)}-e^{-i(z_1+z_2)}}{2i}$ que é exatamente idêntico ao valor encontrado para $\operatorname{sen} z_1 \, \cos z_2 + \operatorname{sen} z_2 \, \cos z_1$.

Logo,

$$\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} z_1 \, \cos z_2 + \operatorname{sen} z_2 \, \cos z_1$$

como queríamos demonstrar.

Note que, na trigonometria dos números reais, essa é a propriedade do seno da soma de dois arcos. Assim, provamos que ela também é válida no conjunto dos números complexos.

De forma análoga a feita na propriedade 4, observando que $\operatorname{sen}(z_1 - z_2) = \operatorname{sen}[z_1 + (-z_2)]$, e utilizando a propriedade do seno da soma, já demonstrada, temos

$$\operatorname{sen}[z_1 + (-z_2)] = \operatorname{sen} z_1 \cos(-z_2) + \operatorname{sen}(-z_2) \cos z_1.$$

Mas, das propriedades 2 e 3, sabemos que o cosseno é uma função par e o seno é uma função ímpar, isto é, $\cos(-z_2) = \cos z_2$ e $\operatorname{sen}(-z_2) = -\operatorname{sen} z_2$. Daí, fazendo as substituições, tem-se

$$\operatorname{sen}[z_1 + (-z_2)] = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + (-\operatorname{sen} z_2) \cos z_1$$

donde

$$\operatorname{sen}(z_1 - z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_2 \cos z_1$$

como queríamos demonstrar.

Propriedade 6: Para todo número complexo z,

$$\cos(2z) = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z$$

e

$$\operatorname{sen}(2z) = 2 \operatorname{sen} z \cos z.$$

No conjunto dos números reais, essas são as chamadas fórmulas de arco duplo. Mostraremos que elas também são válidas no campo dos números complexos. Para isto, basta aplicar as fórmulas de soma de arcos, e tem-se os resultados imediatamente.

Com efeito, como

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2$$

fazendo $z_1 = z_2 = z$, tem-se

$$\cos(z + z) = \cos z \cos z - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} z$$

donde

$$\cos(2z) = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z.$$

Da mesma forma, como $\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + \operatorname{sen} z_2 \cos z_1$ fazendo $z_1 = z_2 = z$, tem-se $\operatorname{sen}(z + z) = \operatorname{sen} z \cos z + \operatorname{sen} z \cos z$, donde

$$\operatorname{sen}(2z) = 2 \operatorname{sen} z \cos z.$$

Propriedade 7: Para todo número complexo z,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z.$$

De fato, pela propriedade 3, temos que

$$\operatorname{sen}(z_1 - z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_2 \cos z_1$$

Fazendo $z_1 = \frac{\pi}{2}$ e $z_2 = z$, tem-se

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \cos z - \operatorname{sen} z \cos\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = 1 \cdot \cos z - \operatorname{sen} z \cdot 0$$

donde

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z.$$

Isto é, mostramos que o seno do complemento de um número complexo é igual ao cosseno desse mesmo número. Tal propriedade é muito utilizada na trigonometria do triângulo retângulo, e é ensinada a alunos do 9° ano do Ensino Fundamental, que ainda não tiveram contato com o círculo trigonométrico. Em tal nível, os números utilizados são apenas números reais.

Propriedade 8: Para todo número complexo z,

$$\cos(z + \pi) = -\cos z$$

e

$$\operatorname{sen}(z + \pi) = -\operatorname{sen} z.$$

De fato, pela propriedade 4, temos que

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2$$

Fazendo $z_1 = z$ e $z_2 = \pi$, tem-se

$$\cos(z + \pi) = \cos z \cdot (-1) - \operatorname{sen} z \cdot 0$$

donde

$$\cos(z+\pi) = -\cos z.$$

De forma análoga, pela propriedade 5,

$$\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} z_1 \ \cos z_2 + \operatorname{sen} z_2 \ \cos z_1.$$

Fazendo $z_1 = z$ e $z_2 = \pi$, tem-se

$$\operatorname{sen}(z+\pi) = \operatorname{sen} z \ \cos \pi + \operatorname{sen} \pi \ \cos z$$

$$\operatorname{sen}(z+\pi) = \operatorname{sen} z \cdot (-1) + 0 \cdot \cos z$$

donde

$$\operatorname{sen}(z+\pi) = -\operatorname{sen} z.$$

Como queríamos demonstrar.

Propriedade 9: Para todo número complexo z, tem-se:

(i) $\cos z = 0$ se e somente se $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, e
(ii) $\operatorname{sen} z = 0$ se e somente se $z = k\pi$

com k inteiro.

De fato, para todo número complexo $z = x + yi$, com x e y reais, temos que

$$\cos z = \cos(x+yi) = \cos x \left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right) - i \ \operatorname{sen} x \left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right).$$

Para termos $\cos z = 0$, devemos ter $\cos x \left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right) - i \ \operatorname{sen} x \left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right) = 0$

o que ocorre se, e somente se, $\cos x \left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right) = \ i \ \operatorname{sen} x \left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)$.

Note que, o primeiro membro da igualdade é livre da unidade imaginária i, sendo assim, $\cos x \left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)$ é real para quaisquer x e y. Dessa forma, teremos a igualdade se, e somente se, $\cos x \left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right) = 0$ e $i \operatorname{sen} x \left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right) = 0$.

Na primeira parte, $\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right) \neq 0$ para todo y. Então devemos ter $\cos x = 0$. Como x é real, $\cos x = 0$ se, e somente se, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, para k inteiro.

Por outro lado,

$$i \operatorname{sen} x\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)=0 \text{ se, e somente se, } \operatorname{sen} x=0 \text{ ou } \left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)=0.$$

Mas, para x real, nunca $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ se anulam simultaneamente. Como já temos que $\cos x = 0$, então devemos ter $\operatorname{sen} x \neq 0$, para todo x. Assim, para anularmos $i \operatorname{sen} x\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)=0$, devemos ter $\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)=0$, o que só ocorre quando $y=0$.

Logo, teremos $\cos z = 0$ se, e somente se $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ e $y=0$, isto é para $z=\frac{\pi}{2}+k\pi+0i$, donde $z=\frac{\pi}{2}+k\pi$, com k inteiro, como queríamos demonstrar.

Para o seno, procederemos de modo análogo.

Para todo número complexo $z = x + yi$, com x e y reais, temos que

$$\operatorname{sen} z=\operatorname{sen}(x+yi)=\operatorname{sen} x\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)+i\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)\cos x$$

e, $\operatorname{sen} z=0$, se e somente se, $\operatorname{sen} x\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)= -i\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)\cos x$.

Note que, o primeiro membro da igualdade é livre da unidade imaginária i, sendo assim, $\operatorname{sen} x\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)$ é real para quaisquer x e y. Dessa forma, teremos a igualdade se e somente se, $\operatorname{sen} x\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)=0$ e $-i\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)\cos x=0$.

Na primeira parte, $\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)\neq 0$ para todo y. Então devemos ter $\operatorname{sen} x=0$. Como x é real, $\operatorname{sen} x=0$ se, e somente se, $x=0+k\pi$, para k inteiro.

Por outro lado, $-i\cos x\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)=0$ se, e somente se, $\cos x=0$ ou $\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)=0$.

Mas, para x real, nunca $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ se anulam simultaneamente. Como necessariamente $\operatorname{sen} x=0$, então $\cos x\neq 0$. Logo, devemos ter $\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)=0$, o que só ocorre quando $y=0$.

Assim, teremos $\operatorname{sen} z=0$ se, e somente se, $x=0+k\pi$ e $y=0$, isto é, para $z=0+k\pi+0i$, donde $z=k\pi$, com k inteiro, como queríamos demonstrar.

Note que as funções cosseno e seno de uma variável complexa, se anulam nos mesmos pontos das funções cosseno e seno no campo dos reais. Vale ressaltar que os pontos que anulam uma função são chamados de zeros da função.

Capítulo VI

A periodicidade das funções seno e cosseno em $\mathbb{C}$

Sabemos que no campo dos números reais, as funções cosseno e seno são periódicas e ambas possuem período 2π.

Lembremos que, por definição, uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica, se existe um número real positivo T, tal que $f(x+T) = f(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

O menor valor de T que satisfaz a condição acima é chamado $período$ de f.

Para funções de uma variável complexa a definição é análoga, mudando é claro, as variáveis a serem estudadas.

Mostraremos que no campo dos números complexos as funções cosseno e seno também são periódicas.

De fato, pela propriedade 4, para todos z_1 e z_2 números complexos,

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1\ \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1\ \operatorname{sen} z_2$$

Fazendo $z_1 = z$ e $z_2 = 2\pi$, tem-se

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z\ \cos 2\pi - \operatorname{sen} z\ \operatorname{sen} 2\pi$$

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z \cdot 1 - \operatorname{sen} z \cdot 0$$

donde

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z.$$

Dessa forma, mostramos que a função cosseno no campo dos complexos é periódica.

E quanto ao período? Podemos afirmar que seu período é 2π, como ocorre nos reais?

A resposta é não! Pois, de forma rigorosa, partindo da definição, o período da função cosseno é o menor número positivo T, tal que $\cos(z+T) = \cos z$. Mas $\mathbb{C}$ não é corpo ordenado. Logo, não faz sentido no conjunto dos complexos, dizer que 2π é o menor. Assim, só podemos garantir a existência da periodicidade.

Apesar se soar estranho uma função ser periódica e não possuir período, temos também em $\mathbb{R}$, uma função com tal característica.

Considere a função constante, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 2$. Temos que, para qualquer T real, $f(x+T) = f(x) = 2$. Assim a função f é periódica. Mas, não existe um menor valor positivo para T, tal que $f(x+T) = f(x)$. Logo, não podemos determinar um período para tal função.

Vamos agora, mostrar que a função seno de uma variável complexa também é uma função periódica. Procederemos de modo análogo ao feito para a função cosseno.

Com efeito, pela propriedade 5, temos que, para todos z_1 e z_2 números complexos,

$$\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + \operatorname{sen} z_2 \cos z_1.$$

Fazendo $z_1 = z$ e $z_2 = 2\pi$, tem-se

$$\operatorname{sen}(z + 2\pi) = \operatorname{sen} z \cos(2\pi) + \operatorname{sen}(2\pi) \cos z$$

$$\operatorname{sen}(z + 2\pi) = \operatorname{sen} z \cdot 1 + 0 \cdot \cos z$$

donde

$$\operatorname{sen}(z + 2\pi) = \operatorname{sen} z.$$

Provamos então que a função seno é periódica no campo dos números complexos. E de modo análogo a função cosseno, como $\mathbb{C}$ não é corpo ordenado, não faz sentido procurar um menor número complexo para representar o período da função.

NOTA: Em alguns textos, qualquer número T tal que $f(x+T) = f(x)$ é dito um período da função. Não precisa ser o menor T para ser considerado um período para a função. Caso exista, o menor número T tal que $f(x+T) = f(x)$ é chamado de período fundamental, e indicado por T_0.

Dessa forma, determinadas funções possuem infinitos números que podem representar um período. Mas apenas um ou nenhum número que possa representar o período fundamental. Nesse contexto, aí sim, podemos dizer que 2π é um período para as funções cosseno e seno em $\mathbb{C}$. E nesse caso, como $\mathbb{C}$ não é corpo ordenado, tais funções em uma variável complexa não possuem um período fundamental.

Capítulo VII

Resolvendo uma equação trigonométrica em $\mathbb{C}$

Vejamos agora como fica a resolução de uma equação trigonométrica em $\mathbb{C}$.

Vamos determinar todos os números complexos $z = x + yi$, com x e y reais, tais que

$$\cos z = 2.$$

Resolução:

Sabemos que $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, daí, a equação $\cos z = 2$ é equivalente a

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2$$

donde

$$e^{iz} + e^{-iz} = 4.$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por e^{iz}, temos

$$e^{iz} \cdot e^{iz} + e^{iz} \cdot e^{-iz} = e^{iz} \cdot 4$$

$$\left(e^{iz}\right)^2 + e^{iz-iz} = 4e^{iz}$$

$$\left(e^{iz}\right)^2 - 4e^{iz} + 1 = 0.$$

Fazendo a substituição $e^{iz} = m$, fica

$$(m)^2 - 4m + 1 = 0$$

que é uma equação do 2° grau na incógnita m. Resolvendo temos

$$m = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2}$$

$$m = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Mas $m = e^{iz}$, segue então que $e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3}$.

Como $z = x + yi$, temos que, $e^{i(x+yi)} = 2 \pm \sqrt{3}$

$$e^{ix-y} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$e^{ix} \cdot e^{-y} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Mas da fórmula de Euler, temos que $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$, substituindo tem-se

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x) \cdot e^{-y} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$e^{-y} \cdot \cos x + i\, e^{-y} \cdot \operatorname{sen} x = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Note que $2 \pm \sqrt{3}$ é um número complexo cuja parte imaginária é nula. Então, para termos a igualdade devemos ter

$$e^{-y} \cdot \cos x = 2 \pm \sqrt{3} \quad \text{e} \quad i\, e^{-y} \cdot \operatorname{sen} x = 0.$$

Da igualdade $i\, e^{-y} \cdot \operatorname{sen} x = 0$, devemos ter $\operatorname{sen} x = 0$, já que e^{-y} nunca se anula. Dessa forma $x = n\pi$, com n inteiro.

Vamos agora analisar a igualdade $e^{-y} \cdot \cos x = 2 \pm \sqrt{3}$. Já sabemos que $x = n\pi$, com n inteiro. Separemos em dois casos, n ímpar e n par.

Se n ímpar, temos então que $\cos x = \cos(n\pi) = -1$. Substituindo temos

$$e^{-y} \cdot (-1) = 2 \pm \sqrt{3}$$

donde

$$-e^{-y} = 2 + \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad -e^{-y} = 2 - \sqrt{3}.$$

Mas ambos os casos é impossível, já que $-e^{-y}$ é sempre negativo para todo y, e $2 + \sqrt{3}$ assim como $2 - \sqrt{3}$ são números positivos. Logo, para n ímpar, a equação não tem solução.

Se n par, então $\cos x = \cos(n\pi) = 1$. Substituindo em $e^{-y} \cdot \cos x = 2 \pm \sqrt{3}$, temos

$$e^{-y} \cdot (1) = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Assim $e^{-y} = 2 \pm \sqrt{3}$, donde $-y = \log_e(2 \pm \sqrt{3})$, donde

$$y = -\ln(2 + \sqrt{3}) \quad \text{ou} \quad y = -\ln(2 - \sqrt{3}) \Leftrightarrow$$

$$y = -\ln(2 + \sqrt{3}) \quad \text{ou} \quad y = \ln(2 - \sqrt{3})^{-1}.$$

Mas $(2 - \sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$, daí

$$y = -\ln(2 + \sqrt{3}) \quad \text{ou} \quad y = \ln(2 + \sqrt{3}).$$

Dessa forma, as soluções da equação $\cos z = 2$ são todos os números complexos $z = x + yi$, com $x = n\pi$, n par, e $y = -\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$ ou $y = \ln(2+\sqrt{3})$.

Como n é par, então $n = 2k$, com k inteiro. Assim, as soluções são da forma

$$z = 2k\pi \pm i\ \ln(2+\sqrt{3}), \text{ com } k \text{ inteiro.}$$

Faremos agora uma prova real. Vamos verificar que o valor encontrado para z, realmente representa o conjunto de soluções da equação $\cos z = 2$, em $\mathbb{C}$.

Mostraremos o caso $z = 2k\pi + i\ln(2+\sqrt{3})$, com k inteiro. O caso onde $z = 2k\pi - i\ln(2+\sqrt{3})$ é inteiramente análogo.

De fato, sabemos que $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$. Substituindo $z = 2k\pi + i\ln(2+\sqrt{3})$, com k inteiro, teremos

$$\cos[2k\pi + i\ln\left(2+\sqrt{3}\right)] = \frac{e^{i[2k\pi+i\ \ln\left(2+\sqrt{3}\right)]} + e^{-i[2k\pi+i\ \ln\left(2+\sqrt{3}\right)]}}{2}$$

$$= \frac{e^{2k\pi i}\cdot e^{-\ln\left(2+\sqrt{3}\right)} + e^{-2k\pi i}\cdot e^{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}}{2}$$

$$= \frac{e^{2k\pi i}\cdot e^{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}} + e^{-2k\pi i}\cdot e^{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}}{2}.$$

Como vimos anteriormente, $\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1} = 2+\sqrt{3}$, então $\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1} = 2-\sqrt{3}$. Substituindo, teremos

$$\cos[2k\pi + i\ln\left(2+\sqrt{3}\right)] = \frac{e^{2k\pi i}\cdot e^{\ln(2-\sqrt{3})} + e^{-2k\pi i}\cdot e^{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}}{2}$$

$$= \frac{e^{2k\pi i}\cdot(2-\sqrt{3}) + e^{-2k\pi i}\cdot(2+\sqrt{3})}{2}$$

$$= \frac{2\,e^{2k\pi i} - \sqrt{3}\,e^{2k\pi i} + 2\,e^{-2k\pi i} + \sqrt{3}\,e^{-2k\pi i}}{2}$$

$$= \frac{2\,(e^{\pi i})^{2k} - \sqrt{3}\left(e^{\pi i}\right)^{2k} + 2\,(e^{\pi i})^{-2k} + \sqrt{3}\,(e^{\pi i})^{-2k}}{2}.$$

Mas atenção, da fórmula de Euler,

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

assim,

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi.$$

Como $\cos\pi = -1$ e $\mathrm{sen}\,\pi = 0$, temos que $e^{i\pi} = -1 + 0 = -1$.

Substituindo em $\cos[2k\pi + i\ln(2+\sqrt{3})]$, temos

$$\cos[2k\pi + i\ln(2+\sqrt{3})] = \frac{2\cdot(-1)^{2k} - \sqrt{3}\cdot(-1)^{2k} + \ 2\cdot(-1)^{-2k} + \sqrt{3}\cdot(-1)^{-2k}}{2}$$

$$\cos[2k\pi + i\ln(2+\sqrt{3})] = \frac{2-\sqrt{3} + \ 2+\sqrt{3}}{2}$$

donde

$$\cos\left[2k\pi + i\ln(2+\sqrt{3})\right] = 2.$$

Como queríamos mostrar.

CapítuloVIII

A fórmula de Euler no conjunto dos números complexos

Mostraremos que a fórmula de Euler, que foi o ponto inicial para todas as relações da trigonometria dos complexos, também é válida em uma variável complexa, isto é, mostraremos que para todo número complexo z, tem-se

$$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z.$$

De fato, sabemos que $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ e $\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.

Assim,

$$\cos z + i \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} + i \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z + i \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} + \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$

$$\cos z + i \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} + e^{-iz} + e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$

$$\cos z + i \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} + e^{iz}}{2}$$

$$\cos z + i \operatorname{sen} z = \frac{2\, e^{iz}}{2},$$

donde

$$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z,$$

como queríamos demonstrar.

Capítulo IX

Refletindo sobre gráficos em $\mathbb{C}$

Nosso objetivo agora é observar como se comporta o gráfico de uma função trigonométrica no campo dos números complexos.

Quando temos uma função no conjunto dos números reais, $y = f(x)$, podemos representar o gráfico no plano cartesiano de coordenadas retangulares xy. Nesse caso, temos o domínio unidimensional e o contradomínio unidimensional, nos fornecendo um gráfico de pontos (x, y) que pode ser representado num plano, isto é, fornecendo uma figura em uma região bidimensional.

Quando temos uma função no conjunto dos números complexos, $w = f(z)$, temos o domínio bidimensional e o contradomínio bidimensional, já que todo número complexo pode ser representado como um par ordenado. Nesse caso, teremos um gráfico em um espaço de dimensão 4, o que é impossível de ser visualizado.

O que pode ser feito para se obter algumas informações sobre o comportamento da função, é exibir conjuntos de pontos correspondentes z e w em dois planos.

Sendo z e w números complexos da forma $z = x + yi$ e $w = u + vi$, representaremos cada um desses números pelos seus afixos (x, y) e (u, v).

Chamaremos de $z - plano$, o plano que contém os pontos do domínio de f, e de $w - plano$, o plano que contém os pontos do contradomínio de f. Assim, cada ponto (x, y) no $z - plano$, estará associado a um ponto (u, v) no $w - plano$, através da aplicação f.

Dessa forma, analisaremos quando um ponto se desloca no $z - plano$, o que acontece, ou seja, como se move seu ponto correspondente no $w - plano$.

Portando, teremos dois gráficos, um em cada plano. O primeiro representando os pontos do domínio, e o segundo, representando os pontos da imagem, no contradomínio.

Vamos então analisar o comportamento dos pontos do domínio, e do contradomínio da função seno de uma variável complexa.

Considere a função $w = \operatorname{sen} z$, no conjunto dos números complexos, isto é, $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, tal que $f(z) = \operatorname{sen} z$.

Como foi dito anteriormente, vamos representar os pontos (x, y) do domínio de f em um plano, denominado $z - plano$, e representar os pontos (u, v) do contradomínio de f em um outro plano, denominado $w - plano$. E a partir daí, estudar o comportamento de cada ponto (u, v), quando seu correspondente (x, y) no outro plano se desloca.

Vamos considerar inicialmente no $z - plano$, as retas horizontais $y = c$, c constante real, e analisar em que curvas elas transformam-se no $w - plano$ através da aplicação f.

Vimos anteriormente que, para $z = x + yi \in \mathbb{C}$, com $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sen}(x + yi) = \operatorname{sen} x \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + i \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right) \cos x$$

que também pode ser escrito como

$$\operatorname{sen}(x + yi) = \operatorname{sen} x \ \cosh y + \ i \operatorname{senh} y \ \cos x.$$

Assim, a função f pode ser escrita como

$$f(x + yi) = \operatorname{sen} x \ \cosh y + \ i \operatorname{senh} y \ \cos x.$$

Sendo $w = (u, v)$ a imagem de $z = (x, y)$ através da aplicação f, temos que

$$w = \operatorname{sen} x \ \cosh y + i \operatorname{senh} y \ \cos x$$

é um complexo com parte real $u = \operatorname{sen} x \ \cosh y$ e parte imaginária $v = \operatorname{senh} y \ \cos x$.

Para $y = c$, segue

$$\begin{cases} u = \operatorname{sen} x \ \cosh c \\ v = \operatorname{senh} c \ \cos x \end{cases}, x \in \mathbb{R}.$$

Que é um sistema de equações paramétricas no parâmetro x, de uma equação do tipo elíptica, considerando os possíveis casos degenerados.

De fato, dividindo ambos os membros da primeira igualdade por $\cosh c$, e da segunda igualdade por $\operatorname{senh} c$, obtemos

$$\frac{u}{\cosh c} = \operatorname{sen} x \ \text{ e } \ \frac{v}{\operatorname{senh} c} = \cos x.$$

Da relação fundamental da trigonometria, temos que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. Substituindo, temos

$$\left(\frac{u}{\cosh c}\right)^2 + \left(\frac{v}{\operatorname{senh} c}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{u^2}{(\cosh c)^2} + \frac{v^2}{(\operatorname{senh} c)^2} = 1$$

que é uma equação da forma $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$, que representa uma elipse centrada na origem. Como por definição,

$$\cosh y = \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) \text{ e } \operatorname{senh} y = \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right),$$

temos que

$$|\cosh c| > |\operatorname{senh} c|, \text{ para todo } c \text{ real.}$$

Temos então, que a equação $\frac{u^2}{(\cosh c)^2} + \frac{v^2}{(\operatorname{senh} c)^2} = 1$ representa uma elipse com reta focal sobre o eixo u, semieixo maior medindo $a = |\cosh c|$ e semieixo menor medindo $b = |\operatorname{senh} c|$.

Como a elipse está centrada na origem e possui a reta focal sobre o eixo u, as coordenadas dos focos serão $(-F, 0)$ e $(F, 0)$, onde $2F$ representa a medida da distância focal.

Da geometria analítica, em toda elipse, temos que $a^2 = b^2 + F^2$, donde $F^2 = a^2 - b^2$. Como $a = |\cosh c|$ e $b = |\operatorname{senh} c|$, temos $F^2 = |\cosh c|^2 - |\operatorname{senh} c|^2$.

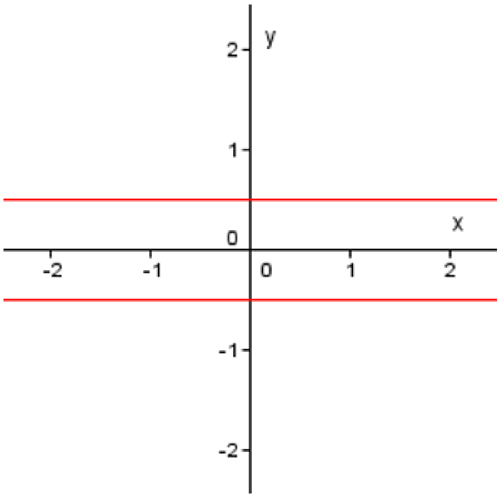
Mas, do estudo das funções hiperbólicas, temos que $(\cosh c)^2 - (\operatorname{senh} c)^2 = 1$, $\forall\, c \in \mathbb{R}$. Logo, $F^2 = 1$, donde $F = \pm 1$.

Como $F = \pm 1, \forall\, c \in \mathbb{R}$, resulta que todas as elipses terão as coordenadas dos focos $(-1{,}0)$ e $(1{,}0)$.

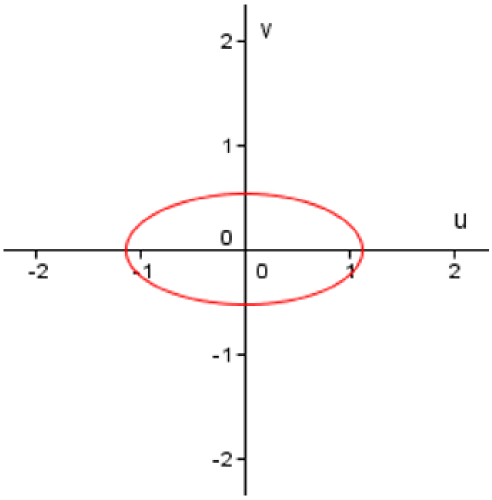
Na figura abaixo, temos o caso para $c = 0{,}5$ e $c = -0{,}5$. Mostra os pontos do domínio que estão sobre as retas horizontais $y = 0{,}5$ e $y = -0{,}5$ no $z = plano$. Através da aplicação f, as imagens desses pontos estão sobre a elipse

$$\frac{u^2}{(\cosh 0{,}5)^2} + \frac{v^2}{(\operatorname{senh} 0{,}5)^2} = 1$$

no $w - plano$.



$z - plano$



$w - plano$

Note também que, quando $c \to +\infty$ ou $c \to -\infty$, a elipse tende a se tornar uma circunferência.

De fato, voltando para a equação

$$\frac{u^2}{(\cosh c)^2} + \frac{v^2}{(\operatorname{senh} c)^2} = 1.$$

Como $\cosh c = \frac{e^c + e^{-c}}{2}$, quando $c \to +\infty$ ou $c \to -\infty$, $\left|\frac{e^c + e^{-c}}{2}\right| \to \frac{e^{|c|}}{2} \to +\infty.$

Como $\operatorname{senh} c = \frac{e^c - e^{-c}}{2}$, quando $c \to +\infty$ ou $c \to -\infty$, $\left|\frac{e^c - e^{-c}}{2}\right| \to \frac{e^{|c|}}{2} \to +\infty.$

Assim, para valores muito grandes de $|c|$, teremos $|\operatorname{senh} c| \approx |\cosh c| \approx \frac{e^{|c|}}{2}$.

E a equação $\frac{u^2}{(coshc)^2} + \frac{v^2}{(senhc)^2} = 1$ ficará aproximadamente igual a

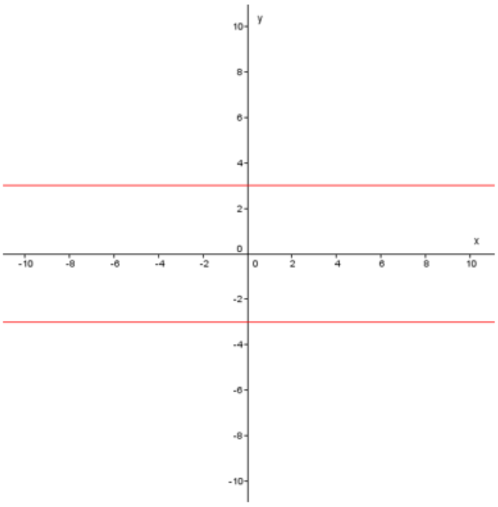
$$\frac{u^2}{\left(\frac{e^{|c|}}{2}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{e^{|c|}}{2}\right)^2} = 1 \Leftrightarrow u^2 + v^2 = \left(\frac{e^{|c|}}{2}\right)^2$$

que representa a equação de uma circunferência centrada na origem de raio $\frac{e^{|c|}}{2}$.

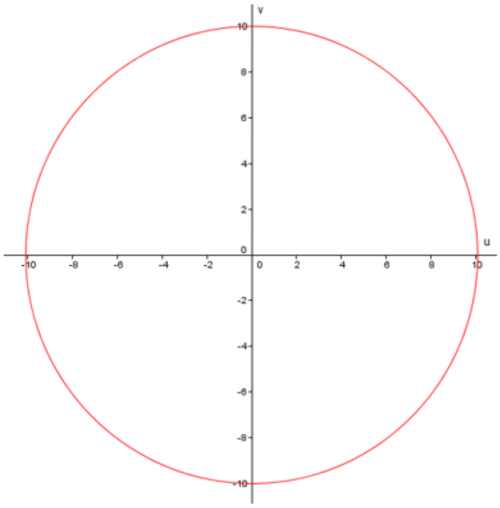
Observe que não precisamos de valores tão grandes de c para que a elipse no $w - plano$ se aproxime de uma circunferência.

Na figura abaixo temos o caso para $c = 3$ e $c = -3$, que no $z - plano$ são pontos sobre as retas $y = 3$ e $y = -3$. E através da aplicação f, as imagens desses pontos estão sobre a elipse $\frac{u^2}{(\cosh 3)^2} + \frac{v^2}{(\operatorname{senh} 3)^2} = 1$ no $w - plano$.

Como $\cosh 3 = \frac{e^3+e^{-3}}{2} \approx 10{,}067$ e $\operatorname{senh} 3 = \frac{e^3-e^{-3}}{2} \approx 10{,}017$, $\cosh 3$ e $\operatorname{senh} 3$ já são valores relativamente próximos, e assim, a elipse já se parece com uma circunferência.



$z - plano$



$w - plano$

Porém, note que, quando c se aproxima de 0, a elipse vai estreitando-se, até que, para $c = 0$, a elipse degenera-se, tornando-se um segmento de reta.

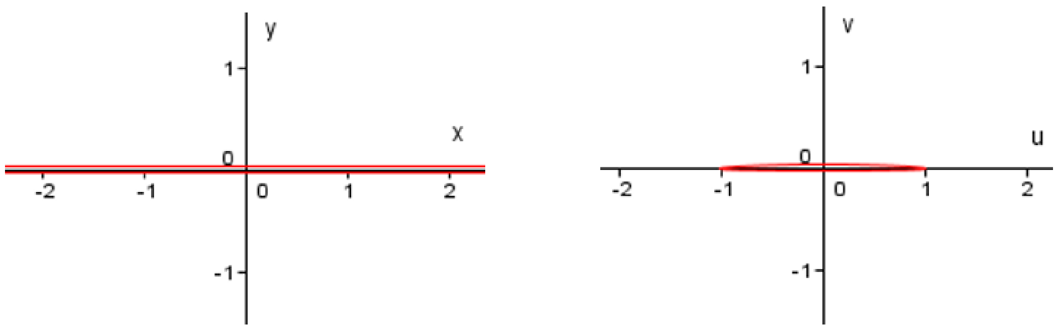
De fato, sabemos da geometria analítica, que a excentricidade da elipse é a razão entre a medida da semidistância focal e a medida do semieixo maior, isto é $\frac{F}{a}$, onde $F = \sqrt{a^2 - b^2}$. E quando a excentricidade tende a 1, a elipse tende a se estreitar. Conforme c se aproxima de 0,

$$a = |\cosh c| = \left|\frac{e^c+e^{-c}}{2}\right| \approx 1 \quad \text{e} \quad b = |\operatorname{senh} c| = \left|\frac{e^c-e^{-c}}{2}\right| \approx 0.$$

Assim, a excentricidade será

$$\frac{F}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{\sqrt{|\cosh c|^2-|\operatorname{senh} c|^2}}{|\cosh c|} \approx \frac{|\cosh c|}{|\cosh c|} = 1.$$

A figura abaixo mostra o caso para $c = 0{,}03$ e $c = -0{,}03$, que no $z - plano$ são pontos sobre as retas $y = 0{,}03$ e $y = -0{,}03$. E através da aplicação f, as imagens desses pontos estão sobre a elipse $\frac{u^2}{(\cosh 0{,}03)^2} + \frac{v^2}{(\operatorname{senh} 0{,}03)^2} = 1$ no $w - plano$.



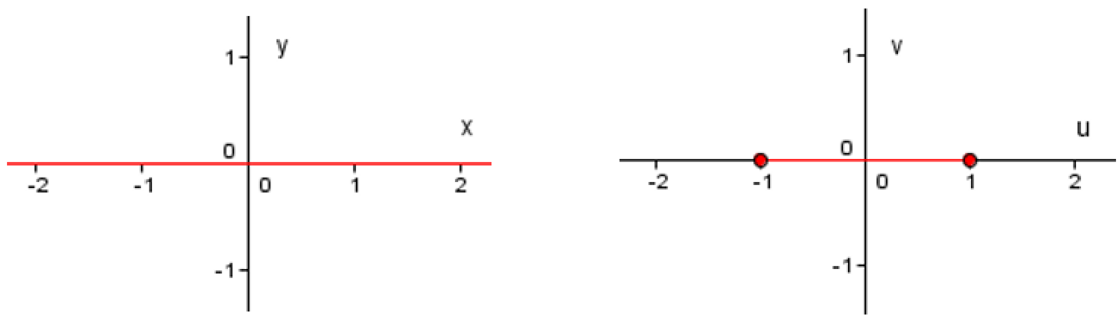
$z - plano$ $\qquad$ $w - plano$

Na figura abaixo, temos o caso $c = 0$. Substituindo nas equações paramétricas, temos

$$u = \operatorname{sen} x \cosh 0 = \operatorname{sen} x \cdot \left(\frac{e^0 + e^{-0}}{2}\right) = \operatorname{sen} x \cdot \left(\frac{1+1}{2}\right) = \operatorname{sen} x \quad \text{donde} \quad -1 \leq u \leq 1 \ \text{ e}$$

$$v = \operatorname{senh} 0 \ \cos x = \left(\frac{e^0 - e^{-0}}{2}\right) \cdot \cos x = \left(\frac{1-1}{2}\right) \cdot \cos x = 0.$$

Temos então um segmento de reta, cujas extremidades são os pontos $(-1{,}0)$ e $(1{,}0)$ sobre o eixo u do $w - plano$. Sendo assim, um caso degenerado da elipse, no $w - plano$.



$z - plano$ $\qquad$ $w - plano$

Vimos então que retas horizontais no $z - plano$ transformam-se em curvas do tipo elíptica no $w - plano$. Vamos agora ver o comportamento de retas verticais no $z -$

$plano$, e analisar em que curvas elas se transformam no $w - plano$ através da aplicação f.

Consideremos agora no $z - plano$, as retas verticais $x = k$, k constante real.

Vimos inicialmente que cada ponto $z = (x, y)$ no $z - plano$, tem como imagem o ponto $w = (u, v)$, no $w - plano$ através da aplicação f, tal que $w = f(z) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \operatorname{senh} y \cos x$, resultando em um número complexo com parte real $u = \operatorname{sen} x \cosh y$ e parte imaginária $v = \operatorname{senh} y \cos x$.

Fazendo agora a substituição $x = k$, temos

$$\begin{cases} u = \operatorname{sen} k \cosh y \\ v = \operatorname{senh} y \cos k \end{cases}, y \in \mathbb{R}.$$

Que é um sistema de equações paramétricas no parâmetro y, de uma equação do tipo hiperbólica, considerando os possíveis casos degenerados.

Com efeito, dividindo ambos os membros da primeira igualdade por $\operatorname{sen} k$, e da segunda igualdade por $\cos k$, temos

$$\frac{u}{\operatorname{sen} k} = \cosh y \text{ e } \frac{v}{\cos k} = \operatorname{senh} y.$$

Da trigonometria hiperbólica, temos que, para todo y real, $\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1$. Substituindo, temos

$$\left(\frac{u}{\operatorname{sen} k}\right)^2 - \left(\frac{v}{\cos k}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{u^2}{(\operatorname{sen} k)^2} - \frac{v^2}{(\cos k)^2} = 1,$$

que é uma equação da forma $\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} = 1$, que representa uma hipérbole centrada na origem e com reta focal sobre o eixo u, semieixo real medindo $a = |\operatorname{sen} k|$ e semieixo imaginário medindo $b = |\cos k|$.

Como a hipérbole está centrada na origem e possui a reta focal sobre o eixo u, as coordenadas dos focos serão os pontos $(-F, 0)$ e $(F, 0)$, onde $2F$ representa a medida da distância focal.

Da geometria analítica, em toda hipérbole, temos que $F^2 = a^2 + b^2$. Como $a = |\operatorname{sen} k|$ e $b = |\cos k|$, substituindo temos $F^2 = |\operatorname{sen} k|^2 + |\cos k|^2$.

Mas, do estudo das funções trigonométricas, temos que $(\operatorname{sen} k)^2 + (\cos k)^2 = 1$, $\forall\, k$. Logo, $F^2 = 1$, donde $F = \pm 1$.

Assim, teremos sempre hipérboles com focos de coordenadas $(-1,0)$ e $(1,0)$.

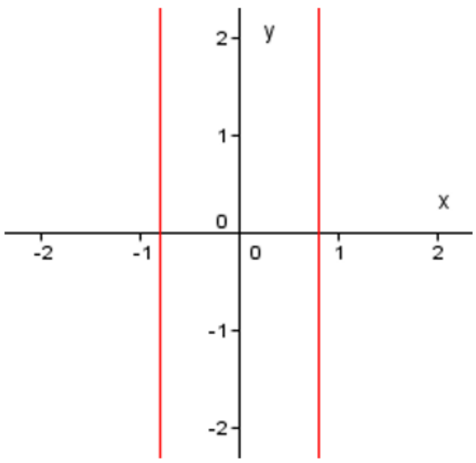
Do estudo das hipérboles, como ela está centrada na origem, suas assíntotas são as retas $v = \pm\frac{b}{a}u$. Nesse caso então, teremos como assíntotas as retas $v = \pm\frac{|\cos k|}{|\operatorname{sen} k|}u$.

Como na trigonometria dos números reais, por definição $\frac{\cos k}{\operatorname{sen} k} = \operatorname{cotg} k$, podemos então escrever as equações das assíntotas como $v = |\operatorname{cotg} k|u$ e $v = -|\operatorname{cotg} k|u$.

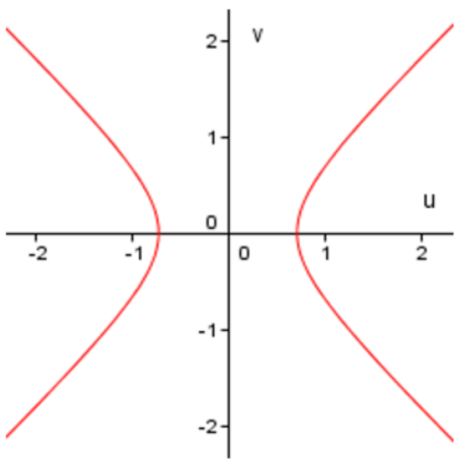
A figura abaixo, mostra o caso para $k = 0{,}8$ e $k = -0{,}8$. Representa os pontos do domínio que estão sobre as retas verticais $x = 0{,}8$ e $x = -0{,}8$ no $z - plano$. Através da aplicação f, as imagens desses pontos estão sobre a hipérbole

$$\frac{u^2}{(\operatorname{sen} 0{,}8)^2} - \frac{v^2}{(\cos 0{,}8)^2} = 1$$

no $w - plano$.



$z - plano$



$w - plano$

Note que, para as retas verticais $x = k$ no $z - plano$, quando $k \to +\infty$ ou $k \to -\infty$, não temos uma situação bem definida para suas imagens no $w - plano$, como no caso das retas horizontais. Isso porque, na equação $\frac{u^2}{(\operatorname{sen} k)^2} - \frac{v^2}{(\cos k)^2} = 1$, quando por exemplo $k \to +\infty$, o limite de $\operatorname{sen} k$ não existe.

Vejamos então o que ocorre quando k está numa vizinhança de determinados pontos.

Quando $k \to 0 + n\pi$, com n inteiro, os ramos das hipérboles vão se abrindo e seus vértices vão se aproximando da origem, até que, quando $k = 0 + n\pi$ temos no $w - plano$, pontos percorrendo todo o eixo v. Isto é, a hipérbole degenera-se para a reta $u = 0$, que é o eixo v do $w - plano$.

De fato, vimos que a hipérbole de equação $\frac{u^2}{(\operatorname{sen} k)^2} - \frac{v^2}{(\cos k)^2} = 1$, possui assíntotas $v = \pm|\operatorname{cotg} k|u$.

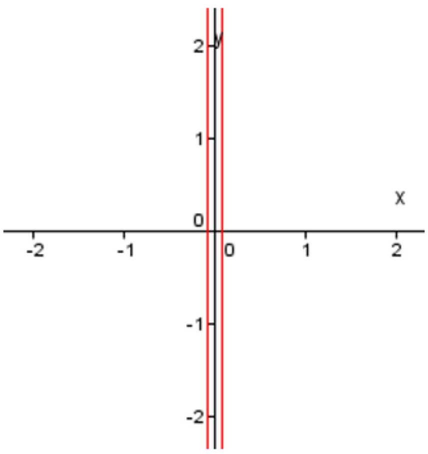
Quando $k \to 0 + n\pi$, $|\operatorname{sen} k| \to 0$, $|\cos k| \to 1$.

Daí, a medida do semieixo real $|\operatorname{sen} k|$, diminui até tornar-se nula, e nesse caso, os vértices da hipérbole se encontram na origem, e a medida $|\operatorname{cotg} k| \to +\infty$. Como $|\operatorname{cotg} k|$ e $-|\operatorname{cotg} k|$ são os coeficientes angulares das assíntotas da hipérbole, quando $|\operatorname{cotg} k| \to +\infty$ os ramos da hipérbole tendem a se abrir, até se encontrarem e formarem uma reta sobre o eixo v no $w - plano$.

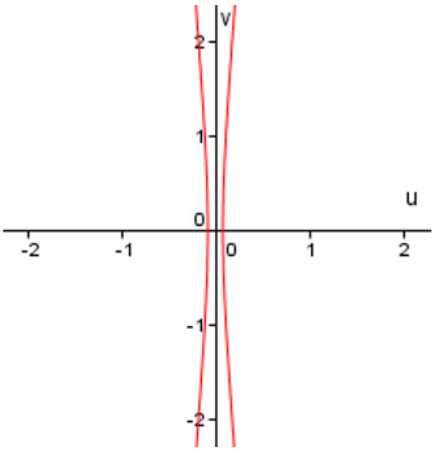
Na figura abaixo, temos o caso para $k = 0{,}08$ e $k = -0{,}08$. Mostra os pontos do domínio que estão sobre as retas verticais $x = 0{,}08$ e $x = -0{,}08$ no $z = plano$. Através da aplicação f, as imagens desses pontos estão sobre a hipérbole

$$\frac{u^2}{(\operatorname{sen} 0{,}08)^2} - \frac{v^2}{(\cos 0{,}08)^2} = 1$$

no $w - plano$.



$z - plano$



$w - plano$

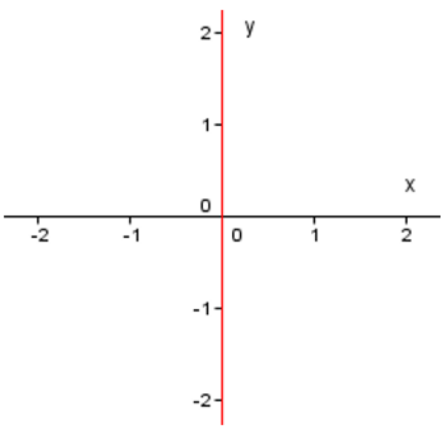
Note que quando $k = 0 + n\pi$, com n inteiro, $|\text{sen}\, k| = 0$, $|\cos k| = 1$. E substituindo nas equações paramétricas que geram a equação da hipérbole, temos

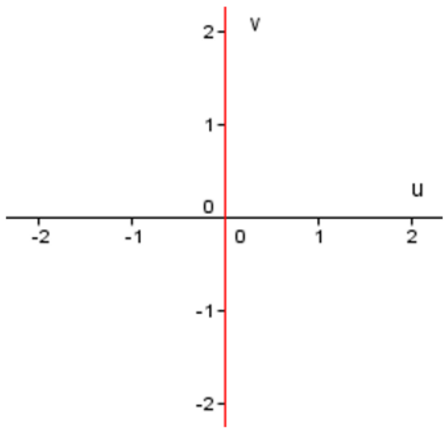
$$\begin{cases} u = \text{sen}\, k \ \cosh y \\ v = \text{senh}\, y \ \cos k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \text{sen}(0 + n\pi) \ \cosh y \\ v = \text{senh}\, y \ \cos(0 + n\pi) \end{cases}, \text{ com } n \text{ inteiro e } y \in \mathbb{R},$$

donde

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = \pm\, \text{senh}\, y \end{cases}, y \in \mathbb{R}.$$

Na figura abaixo, temos o caso para $k = 0$. Mostra os pontos sobre a reta vertical $x = 0$ no $z - plano$, e as imagens desses pontos, através da aplicação f, estão sobre a reta $u = 0$ no $w - plano$. Sendo assim, temos no $w - plano$ um caso degenerado da hipérbole.





Por fim, analisaremos o que ocorre quando $k \to \frac{\pi}{2} + n\pi$, com n inteiro.

Nesse caso, novamente na equação da hipérbole $\frac{u^2}{(\text{sen}\, k)^2} - \frac{v^2}{(\cos k)^2} = 1$, de assíntotas $v = \pm|\text{cotg}\, k|u$. Quando $k \to \frac{\pi}{2} + n\pi$, $|\text{sen}\, k| \to 1$, $|\cos k| \to 0$ e $|\text{cotg}\, k| \to 0$.

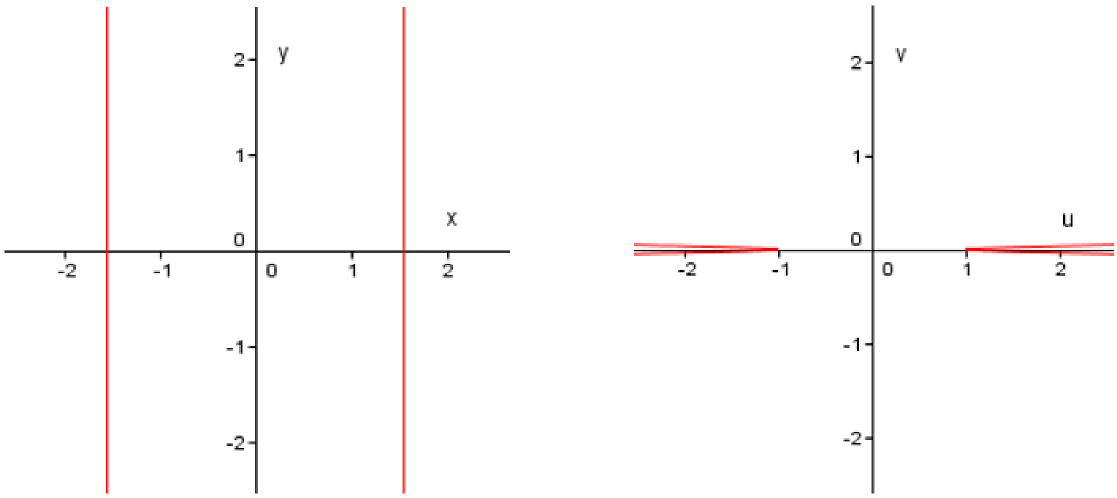
A medida do semieixo real é $a = |\text{sen}\, k|$. Como $|\text{sen}\, k| \to 1$, a medida do semieixo real se aproxima de 1, que é a medida da semidistância focal. Assim os vértices da hipérbole vão se aproximando dos focos.

Além disso, como $|\text{cotg}\, k|$ vai se aproximando de 0, as assíntotas vão se inclinando de modo a coincidir com o eixo u. Com isso, os dois ramos da hipérbole vão se fechando, até que, quando $k = \frac{\pi}{2} + n\pi$ os ramos da hipérbole convergem para duas semirretas sobre o eixo u, com origens nos focos.

A figura abaixo, apresenta o caso para $k = 1{,}55$ e $k = -1{,}55$. Mostra os pontos do domínio que estão sobre as retas verticais $x = 1{,}55$ e $x = -1{,}55$ no $z - plano$. Através da aplicação f, as imagens desses pontos estão sobre a hipérbole

$$\frac{u^2}{(\operatorname{sen} 1{,}55)^2} - \frac{v^2}{(\cos 1{,}55)^2} = 1$$

no $w - plano$.



$z - plano$ $\qquad$ $w - plano$

Observe que, quando $k = \frac{\pi}{2} + n\pi$, com n inteiro, $|\operatorname{sen} k| = 1$, $|\cos k| = 0$. Substituindo nas equações paramétricas que geram a equação da hipérbole, temos

$$\begin{cases} u = \operatorname{sen} k \ \cosh y \\ v = \operatorname{senh} y \ \cos k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \cosh y \\ v = \operatorname{senh} y \ \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \end{cases}, \text{ com } n \text{ inteiro e } y \in \mathbb{R},$$

donde

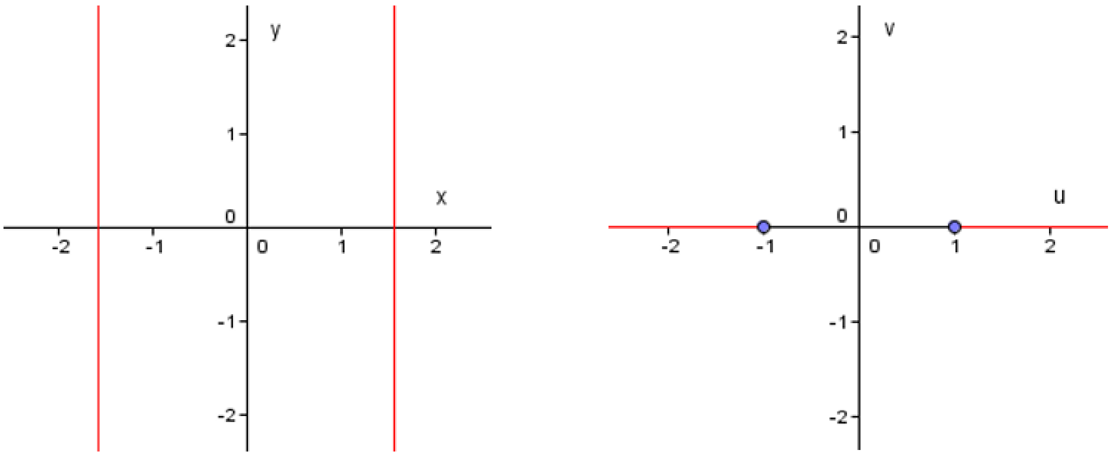
$$\begin{cases} u = \pm \cosh y \\ v = 0 \end{cases}, y \in \mathbb{R}.$$

que separamos em dois casos:

Se n par, $\begin{cases} u = \cosh y \\ v = 0 \end{cases}$, $y \in \mathbb{R}$. Que é a semirreta com origem em $(1,0)$, no sentido positivo do eixo u, e

Se n ímpar, $\begin{cases} u = -\cosh y \\ v = 0 \end{cases}$, $y \in \mathbb{R}$. Que é a semirreta com origem em $(-1{,}0)$, no sentido negativo do eixo u.

Na figura abaixo temos o caso para $k = \frac{\pi}{2}$ e $k = -\frac{\pi}{2}$. Mostra os pontos do domínio que estão sobre as retas verticais $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = -\frac{\pi}{2}$ no $z = plano$. Através da aplicação f, as imagens desses pontos estão sobre as semirretas, $v = 0$ com $u \geq 1$ e $v = 0$ com $u \leq -1$, no $w - plano$.



$z - plano$ $w - plano$

Nota: O estudo do gráfico da função cosseno é feito de modo inteiramente análogo.

Capítulo X

Considerações Finais

Na trigonometria dos números reais, temos por definição, que os valores da tangente, cotangente, secante e cossecante de um número real x, são respectivamente

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \ \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \ \sec x = \frac{1}{\cos x} \text{ e } \operatorname{cossec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

é claro, respeitando sempre o fato de que o denominador deve ser diferente de zero.

Assim, para um número complexo $z = x + yi$, com x e y reais, e sendo i a unidade imaginária dos números complexos, é natural definirmos a tangente, cotangente, secante e cossecante de uma variável complexa z, por

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}, \ \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}, \ \sec z = \frac{1}{\cos z} \text{ e } \operatorname{cossec} z = \frac{1}{\operatorname{sen} z}$$

da mesma forma, tomando o devido cuidado com o denominador, que deve ser sempre diferente de zero. Assim as funções tangente e secante são definidas para todo número complexo z, desde que $\cos z$ seja diferente de zero. Vimos que a função cosseno se anula para $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com k inteiro. Assim as funções tangente e secante de uma variável complexa são definidas para todo número complexo z, desde que $z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com k inteiro.

Analogamente, as funções cotangente e cossecante são definidas para todo número complexo z, desde que $\operatorname{sen} z$ seja diferente de zero. Como vimos, a função seno se anula para $z = k\pi$, com k inteiro. Assim as funções cotangente e cossecante de uma variável complexa são definidas para todo número complexo z, desde que $z \neq k\pi$, com k inteiro.

Note que, a partir dessas definições, pode-se chegar a diversas relações trigonométricas, assim como foi feito com o seno e o cosseno. Como exemplo, pode-se provar que para todo número complexo z,

$$\operatorname{tg}^2 z + 1 = \sec^2 z$$

com $z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, onde k é inteiro.

De fato, vimos que a relação fundamental da trigonometria dos números reais, vale também no campo dos números complexos. Assim, para todo número complexo z, temos que

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1.$$

Dividindo ambos os membros da igualdade por $\cos^2 z$, temos

$$\frac{\operatorname{sen}^2 z}{\cos^2 z} + \frac{\cos^2 z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z}$$

como $\sec z = \frac{1}{\cos z}$, substituindo na equação acima temos

$$\operatorname{tg}^2 z + 1 = \sec^2 z$$

como queríamos demonstrar.

Note que a relação demonstrada acima, no conjunto dos números complexos, também é válida no conjunto dos números reais.

Analogamente, prova-se que

$$\operatorname{cotg}^2 z + 1 = \operatorname{cossec}^2 z$$

desde que $z \neq k\pi$, com k inteiro.

Note que essa também é outra relação válida em $\mathbb{R}$, que estende-se para $\mathbb{C}$.

Outra relação que também é válida em $\mathbb{C}$, é a adição de arcos para tangente, isto é, dados z_1 e z_2 números complexos, temos que

$$\operatorname{tg}(z_1 + z_2) = \frac{\operatorname{tg} z_1 + \operatorname{tg} z_2}{1 - \operatorname{tg} z_1 \ \operatorname{tg} z_2}$$

é claro, desde que o denominador não se anule e respeitando a condição de existência das tangentes. E como consequência imediata dessa fórmula, substituindo $z_1 = z_2 = z$, prova-se que

$$\operatorname{tg}(2z) = \frac{2 \ \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg}^2 z}$$

que em $\mathbb{R}$, é a chamada fórmula de arco duplo para tangentes, também válida em $\mathbb{C}$.

Além dessas relações, prova-se facilmente diversos resultados em $\mathbb{C}$, que são válidos também em $\mathbb{R}$. Alguns deles serão listados a seguir.

Sejam z_1, z_2 e z números complexos quaisquer. Respeitando o domínio das funções, podemos afirmar que:

- $\operatorname{tg}(z_1 - z_2) = \frac{\operatorname{tg} z_1 - \operatorname{tg} z_2}{1 + \operatorname{tg} z_1 \ \operatorname{tg} z_2}$
- $\operatorname{tg}(-z) = -\operatorname{tg} z$
- $\operatorname{cotg}(-z) = -\operatorname{cotg} z$
- $\sec(-z) = \sec z$
- $\operatorname{cossec}(-z) = -\operatorname{cossec} z$

- $\operatorname{tg}(\pi + z) = \operatorname{tg} z$
- $\operatorname{cotg}(\pi + z) = \operatorname{cotg} z$
- $\sec(\pi + z) = -\sec z$
- $\operatorname{cossec}(\pi + z) = -\operatorname{cossec} z$

Assim, temos que em $\mathbb{C}$, as funções tangente, cotangente e cossecante são funções ímpares, enquanto que a função secante é uma função par. E já mostramos anteriormente, que as funções cosseno e seno conservam suas paridade de $\mathbb{R}$, em $\mathbb{C}$. Dessa forma, temos que todas as funções trigonométricas em $\mathbb{R}$, mantém as suas paridades em $\mathbb{C}$.

Vimos que as limitações das funções cosseno e seno em $\mathbb{C}$, são diferentes das limitações em $\mathbb{R}$. Já as funções tangente, cotangente, secante e cossecante que são ilimitadas em $\mathbb{R}$, são também ilimitadas em $\mathbb{C}$.

De fato, por exemplo a função tangente, é ilimitada em $\mathbb{R}$, isto é, para todo M real, sempre é possível encontrar um x no domínio, tal que $|\operatorname{tg} x| > M$. Como $\mathbb{R}$ está contido em $\mathbb{C}$, então a função tangente também será ilimitada em $\mathbb{C}$.

O mesmo argumento é válido para as funções cotangente, secante e cossecante de uma variável complexa.

Com relação ao estudo do gráfico das funções tangente, cotangente, secante e cossecante de uma variável complexa, o processo é inteiramente análogo ao feito no estudo do gráfico da função seno. Como o domínio é bidimensional e o contradomínio também é bidimensional, o gráfico será uma figura em um espaço de dimensão 4, e como já foi dito, é impossível de ser visualizado. O que se pode fazer para entender o comportamento da função, é construir um gráfico para os pontos do domínio e construir um outro gráfico para os respectivos pontos da imagem, para entender como se deslocam os pontos da imagem, quando os pontos do domínio se deslocam também.

Capítulo XI

Conclusão

É indiscutível que a contribuição de Euler para a Trigonometria Analítica Complexa atual, foi fundamental. Construindo não só os alicerces de tudo que se estuda hoje nessa área da Matemática, como também sua enorme contribuição para a forma de escrever a matemática usual.

Fazendo uma análise comparativa com a trigonometria no campo dos números reais e a trigonometria no campo dos números complexos, concluímos que, em alguns pontos a trigonometria se comporta de forma muito similar, ao mesmo tempo que, ao mudar o conjunto numérico de estudo, encontramos enormes diferenças.

De um modo geral, vimos que existem dois fatores que contribuem de forma relevante para tais diferenças. Um deles é o fato de que o conjunto dos números complexos não é um corpo ordenado, ao contrário do conjunto dos números reais. Outro fator que muito contribui para mais diferenças é a dimensão do domínio e do contradomínio. Pois em $\mathbb{R}$, tais conjuntos são unidimensionais, e para visualizar seus gráficos, precisamos apenas de uma região bidimensional, isto é, um plano. Em contrapartida, em $\mathbb{C}$, tais conjuntos são bidimensionais. Assim, para visualizar seus gráficos precisaríamos de uma região em um espaço de dimensão 4. Sendo assim impossível a sua visualização. E como foi feito no capítulo 9, o que fazemos para estudar o comportamento da aplicação $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, é observar como se comportam os pontos do contradomínio, quando os pontos do domínio se deslocam.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BOYER, Carl B. História da Matemática. Tradução por Elza F. Gomide. 2 ed. São Paulo: Blucher, 1996.

[2] DUNHAM, William. Journey through Genius: The Great Theorems of Mathematics. New York: Wiley, 1990.

[3] FERNANDEZ, Cecília S; BERNARDES Jr, Nilson C. Introdução às Funções de uma Variável Complexa. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[4] MAOR, Eli. Trigonometric Delights. New Jersey: Princeton University Press, 1998.

[5] KREISZIG, Erwing. Advanced Engineering Mathematics. New York: Wiley, 1979.

[6] MUNEM, Mustafa A; FOULIS, David J. Cálculo, Vol. 2. Tradução por André L. Cordeiro; André V. Pessoa; Evandro H. M. de A. Filho; José M. F. Filho; Mário F. sobrinho. Rio de janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos, 1982.

[7] CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. Geometria Analítica: um tratamento vetorial. 3 ed. São Paulo: Pearson, 2005.

[8] MACHADO, Antônio dos Santos. Álgebra Linear e Geometria Analítica. 2 ed. São Paulo: Atual, 1980.

[9] O'CONNOR, J.J; ROBERTSON, E.F. Euler Biography, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler.html - 31/07/2014.

[10] O'CONNOR, J.J; ROBERTSON, E.F. Cotes Biography, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cotes.html - 31/07/2014.

[11] GAUTSCHI, Walter. Leonhard Euler: His Life, The Man, and His Works, SIAM Review, Vol. 50, No. 1, pp. 3-33, 2008, http://www.euler-2007.ch/doc/Eulerlec.pdf - 20/09/2014.