INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

PROFMAT – SBM

LUIGI AMATO BRAGANÇA AMORIM

O ENSINO DO PRINCÍPIO DAS CASAS DOS POMBOS NO ENSINO BÁSICO

RIO DE JANEIRO

2013

LUIGI AMATO BRAGANÇA AMORIM

O ENSINO DO PRINCÍPIO DAS CASAS DOS POMBOS NO ENSINO BÁSICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (PROFMAT – SBM) para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Carlos Gustavo Moreira

RIO DE JANEIRO

2013

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer primeiramente a Deus, pois reconheço que sem Ele a minha vida não teria sentido. Pude, no decorrer desse curso, perceber o quanto fui capacitado para chegar até este momento. Obrigado Senhor pelo teu amor, pela tua graça, pelas tuas bênçãos e por mais esta vitória.

Quero agradecer especialmente a minha esposa, que durante todo este tempo foi uma companheira inigualável. Além de todo o carinho e compreensão, esta linda mulher me deu um motivo a mais para continuar com afinco neste mestrado, sem contar que, esta me presenteou com o meu primeiro filho, Miguel. Melina, todas as vezes que olho para você, acredito cada vez mais que Deus faz tudo perfeito. Miguel, à medida que você foi crescendo no ventre, crescia em mim o desejo de perseverar. O seu nascimento culminou com a conclusão deste trabalho. Minha família, muito obrigado.

Quero agradecer aos meus pais, que, mesmo diante das limitações, me fizeram ser quem eu sou hoje. Mesmo com discordâncias conseguiram me fazer crescer. Pai e mãe, muito obrigado por tudo.

Quero agradecer aos meus parentes que sempre acreditaram em mim: Meu avô Amorim, minha avó Irene (in memorian), minha irmã Ana Cláudia, Meus sobrinhos Vivian e Vitor, minha tia Janete, minha sogra Edileusa, meus cunhados Alexandre, Priscila e André, Minha avó Adalgisa, meu sogro Nelson e meu irmão de criação Valdecir. Obrigado a todos.

Quero agradecer aos membros da igreja Assembleia de Deus Vitória em Cristo filial Rua Jacuí, que em todo este tempo acompanharam a minha trajetória e compreenderam os meus motivos mesmo estando à frente desta. Tudo o que estou vivendo é resposta de orações.

SUMÁRIO

*** Capítulos escritos com a colaboração de Anderson Luis Barbosa da Costa**

1 Introdução*

Torna-se cada vez mais frequente o relato de docentes que observam em suas aulas um profundo desinteresse dos alunos pelos conteúdos matemáticos apresentados ao longo do ensino básico. Normalmente este desinteresse vem acompanhado de dificuldades na compreensão e no desenvolvimento de argumentações lógicas necessárias para a resolução de problemas.

Desta forma, é fundamental que as atividades e conteúdos trabalhados pelo professor em qualquer etapa do ensino fundamental e do ensino médio promovam, sempre que possível, uma formação educacional que gere pessoas críticas e com senso argumentativo, capazes de criar, interpretar, responder e explicar situações problemas envolvendo Matemática.

Considerando a fragilidade atual em que se dá a formação dos jovens na escola e as demandas crescentes da sociedade em que vivemos, é necessário que se crie momentos nas aulas de Matemática em que os conteúdos sejam apresentados estimulando o desenvolvimento de pensamentos lógicos.

Em vista da alteração do cenário descrito anteriormente, apresentamos como objetivo principal do presente trabalho oferecer subsídios aos professores de Matemática que, na medida do possível e de acordo com a realidade encontrada, desejam inserir o ensino do Princípio das Casas dos Pombos não apenas como mais um conteúdo do plano de curso anual, mas como uma ferramenta indispensável para a resolução de inúmeros problemas relacionados às mais diversas áreas da Matemática e que pode, com planejamentos adequados, despertar um maior interesse dos alunos pelas aulas de Matemática e desencadear situações inovadoras que favoreçam a utilização de argumentos lógicos na resolução de problemas.

1.1 Por que ensinar Matemática?

Todo professor de Matemática comprometido com sua profissão e com o desenvolvimento intelectual e social da sociedade já deve ter se perguntado: qual é o meu objetivo ao ensinar Matemática? Esta pergunta tem, ao longo dos anos, diferentes respostas, dependendo da concepção de sociedade, de educação e de matemática do professor. A mudança da sociedade, marcada por vários progressos científicos e avanços tecnológicos, define novas exigências para os jovens. Este ritmo acelerado de mudanças na sociedade exige do cidadão que ele saiba lidar com dados numéricos e interpretá-los, trabalhar em grupo, expor suas ideias por escrito ou oralmente, ter pensamento crítico e ser criativo. Além disso, é importante ter a capacidade de resolver problemas e de saber utilizar diferentes recursos tecnológicos.

Desta forma, a Matemática do ensino fundamental e do ensino médio deve procurar, sempre que possível, fazer uso de problemas diversificados que estimulem o desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno, estimulando-o a participar mais ativamente das aulas de Matemática.

1.2 O ensino de Matemática e o compromisso com a formação do cidadão

Como professor, acredito que toda educação comprometida com uma sólida formação cidadã privilegia a autonomia, o processo individual e coletivo de construção do conhecimento. Entretanto, na realidade escolar brasileira, não se verifica efetivamente esta prática pedagógica, isto porque muitas escolas têm como objetivo fazer com que os alunos acumulem informações mesmo que estas não tragam nenhuma motivação e não façam o menor sentido para eles.

Nas escolas brasileiras observa-se com frequência que muitos professores recorrem a exercícios de aplicação imediata em quase todas as suas aulas. Quando se utilizam de problemas, os mesmos são típicos, com enunciados curtos e com resolução por meio de estratégias treinadas anteriormente. A apresentação dos conteúdos ocorre oralmente, partindo de definições, exemplos e propriedades (que nem sempre são provadas). Considera-se que uma reprodução correta pelo aluno do que foi apresentado pelo professor é a evidência de que ocorreu aprendizagem. Essa prática de ensino completamente focada no professor mostra-se ineficaz, pois muitas vezes o aluno só aprendeu a reproduzir, mas não apreendeu o conteúdo.

Imaginemos um professor de matemática que no primeiro dia de aula convida seus alunos a resolverem cinco problemas dispostos no quadro. Após ouvir diversas reclamações como *"Ah professor, primeiro dia. Relaxa!"*, *"Ele só pode tá de brincadeira!"*, *"Não vou copiar mesmo!"*, o professor diz aos seus alunos que os problemas não eram difíceis e que envolviam apenas raciocínio lógico.

Depois de um certo tempo, o professor resolve debater os problemas com a classe e conclui mostrando que dois problemas não possuem solução, dois possuem mais de uma solução e um dos problemas o próprio professor não sabe resolver. Assim, se reiniciam as reclamações de todo tipo: *"Professor, como é um problema não tem solução?", "Onde estão os cálculos?","Não tem que dá um número como resposta?","Você não sabe? Mas você não é professor?"*.

A situação exposta anteriormente talvez indique que o professor terá muita dificuldade durante o ano letivo se quiser ensinar de forma diferente da tradicional. Muitos diante de situações como essa abandonam seus planejamentos e voltam ao tradicionalismo com medo de desagradar aos alunos à direção escolar.

Segundo Onuchic (1999),

> *"Quando os professores ensinam matemática através de resolução de problemas, eles dão a seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver sua própria compreensão. À medida que a compreensão dos alunos se torna mais profunda e mais rica, sua habilidade em usar matemática para resolver problemas aumenta consideravelmente."*

Os PCN (1997) indicam que ao colocarmos o foco na resolução de problemas, o que se defende é uma proposta que Falzetta (2003) resume nos seguintes princípios:

> • *O ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;*
>
> • *O problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;*
>
> • *Aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na história da Matemática;*
>
> • *O aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas. Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações;*
>
> • *A resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem,*

pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.”

1.3 Motivações para a escolha da proposta de trabalho

Em geral o ensino de Matemática na escola básica é tecnicista e prioriza manipulações aritméticas e algébricas. Inúmeras vezes, regras e fórmulas descontextualizadas e não justificadas direcionam a prática docente, fato que não proporciona aos discentes experiências frequentes com argumentos matemáticos que os conduzam a analisar e refletir sobre problemas científicos e cotidianos.

As aulas de Matemática, em geral, não promovem discussões e desafios e acabam contribuindo para que os alunos considerem esta disciplina rígida, inimiga e impeditiva do avanço de suas vidas profissionais. Não a veem como aliada fundamental para o desenvolvimento científico, econômico e social da humanidade e facilitadora na resolução de problemas que possam ser enfrentados ao longo da vida, mas unicamente como promotora de desânimo, frustração e fracasso escolar.

Os conteúdos matemáticos do currículo escolar são muito ricos, mas frequentemente não são devidamente explorados pelo professor em sala de aula. As demandas da sociedade contemporânea exigem cada vez mais do docente o desenvolvimento de atividades escolares desafiadoras e o trabalho com problemas que proporcionem aos alunos acesso a questionamentos e reflexões, em vista do desenvolvimento do raciocínio lógico e de uma formação escolar mais sólida.

Segundo Dante (2000, p.12 e 13)

“A busca da solução de um problema que os desafia é mais dinâmica e motivadora do que a que segue o clássico esquema de explicar e repetir. O real prazer de estudar matemática está na satisfação que surge quando o aluno por si só resolve um problema. Quanto mais difícil, maior a satisfação em resolvê-lo. Um bom problema sucinta a curiosidade e desencadeia no aluno um comportamento de pesquisa, diminuindo sua passividade e conformismo.”

Em particular, na sala de aula e nos livros didáticos, a Análise Combinatória não é explorada em todos os seus aspectos. Priorizam-se técnicas de contagem e aplicações de fórmulas que, na maior parte das vezes, não são justificadas pelo professor e, portanto, não são compreendidas pelos alunos.

Apesar de ser uma das principais ferramentas da combinatória e ser utilizado nas mais diversas áreas da Matemática, o Princípio das Casas dos Pombos (PCP), facilmente compreendido e quase óbvio, não está presente nos livros didáticos brasileiros, não é valorizado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (que focam o estudo da Combinatória por meio de técnicas de contagem) e não possui suas inúmeras potencialidades exploradas ao longo do ensino básico. O PCP difere de muitos conteúdos abordados no ensino fundamental e médio na medida em que, sendo um argumento frequentemente usado em provas de teoremas, não oferece uma fórmula ou equação na qual é possível substituir variáveis para se chegar a um resultado desejado.

Na medida em que são amplamente reconhecidas as potencialidades deste princípio no meio acadêmico e sua apresentação pode ser facilmente compreendida por alunos do ensino fundamental e médio, nos perguntamos: Por que não apresentá-lo aos nossos alunos da escola básica? Por que não permitir que nossos alunos tenham acesso a um conteúdo de extrema importância científica e de fácil compreensão? Por que não apresentar um conceito que pode lhes dar a oportunidade de não só repetir ou refazer exercícios durante as aulas de Matemática, mas também de desenvolver a capacidade de adaptar o conhecimento obtido para resolver problemas em novos contextos, estimulando, portanto, a formação de um cidadão mais crítico e autônomo?

Acreditamos que ao apresentar o Princípio das Casas dos Pombos na escola básica o professor terá uma boa oportunidade de aprofundar o conhecimento matemático dos alunos e ajudá-los a desenvolverem habilidades diversas como, por exemplo, a construção de uma redação matemática mais formal e argumentativa. Além disso, explorar no quadro negro as diversas respostas e argumentações apresentadas pelos alunos ao resolverem questões em que a utilização do PCP é fundamental para se chegar a solução pode contribuir para que eles sintam-se coautores da aula e participantes da construção de sua própria aprendizagem.

Smole (2000, p. 26) afirma que:

“Cada vez que se pede a um aluno para dizer o que fez e por que, para verbalizar os procedimentos que adotou, para relatar enfim suas reflexões pessoais, estamos permitindo que modifique conhecimentos prévios, reflita sobre o que fez e elabore significados para as ideias e os procedimentos matemáticos envolvidos na situação.”

Desta forma, com este trabalho desejamos contribuir com o professor que, reconhecendo a importância do PCP e sentindo-se insatisfeito com a receptividade negativa e o fraco rendimento de seus alunos nas aulas de Matemática, deseje inserir, na medida do possível, o PCP em seus planejamentos anuais, tanto em turmas do ensino fundamental quanto do ensino médio. Por meio deste material busca-se oferecer um suporte inicial para a implementação das alterações curriculares desejadas. Esperamos assim contribuir para que haja uma participação mais ativa dos alunos durante as aulas de Matemática e, principalmente, para que a aprendizagem dos conceitos apresentados a eles ocorra de forma significativa e satisfatória.

2 Relato de experiência

A partir do momento em que definimos o tema do projeto de conclusão de curso, planejei uma aula com o objetivo de apresentar para os meus alunos questões simples, cujo pano de fundo era o “princípio das casas dos pombos”.

Logo após a exibição das questões, estaria a observar como reagiriam os alunos diante de questões que buscassem deles um raciocínio pessoal, inato a cada um, pois, acreditava que a grande maioria nunca tivesse sido confrontada ou se deparado com esse tipo de problema, que não exigia deles um conhecimento prévio de alguma fórmula ou regra para que se pudesse alcançar o resultado desejado.

As questões apresentadas foram as seguintes:

1- Qual o número mínimo de pessoas deve haver em um grupo para que possamos garantir que duas delas nasceram no mesmo mês?

2- Qual o menor número de pessoas que precisamos ter para garantir que duas delas nasceram no mesmo dia da semana?

3- Quantas rolagens de dado (um dado de 6 faces) são necessárias para se ter certeza que um mesmo número vai cair duas vezes?

4- Uma caixa há 12 bolas de mesmo tamanho: 3 brancas, 4 vermelhas e 5 pretas. Quantas bolas no mínimo uma pessoa deve retirar no escuro para ter certeza que entre elas há uma bola preta?

Ao aplicar essas questões em todas as minhas turmas do ensino fundamental, ou seja, nas turmas do 9º ano (1901 e 1902), da Escola Municipal Rostham Pedro de Farias, escola da prefeitura do Rio de Janeiro; e nas turmas do 7º ano (701, 702 e 703), da Escola

Municipal Luis de Lemos, escola da prefeitura de Nova Iguaçu, me deparei com uma resposta bastante positiva, já que esse tipo de desafio produziu um tipo de interesse diferenciado, como uma disputa saudável, onde fortaleceu-se a expectativa de encontrar a solução, já que para isso o aluno não precisava depender de algum tipo de decoreba ou uma memorização de algum tipo de regra, fórmula, mas dele mesmo, através de seu raciocínio livre, cooperando inclusive para um sentimento de mútua ajuda, que os fizeram com que eles se juntassem em prol da resolução das questões oferecidas.

Neste relato, quero ressaltar a turma 703, da Escola Municipal Luís de Lemos, na qual foi aplicado esse tipo de questão, exatamente por esta ser uma turma que os professores expressam uma dificuldade maior de trabalho, pois são alunos com defasagem idade x série e outras. Sabemos que essa defasagem é um dos maiores problemas do ensino fundamental brasileiro, em que encontramos muitos alunos que já passaram por algumas reprovações e, uma das possíveis consequências é o abandono escolar. Alunos com essas características são afetados psicologicamente, tornando-se pessoas que passam a demonstrar um desvio de conduta, sentindo-se incapazes de aprender, alimentando-se por suas frustrações, por já estarem contaminados pelo sentimento de incapacidade, devendo este ser sinalizado pelo educador para busca de orientação psicológica e/ou médica.

Apesar de tudo isso, a turma 703 foi a que mais se destacou, não apenas por ter encontrado o resultado satisfatório, mas a forma como desenvolveu sua interação grupal.

A primeira questão quando apresentada proporcionou um pequeno transtorno inicial na turma, já que a pergunta, pela sua simplicidade, não exigia técnicas específicas, mas apenas um raciocínio lógico; fizeram com que eles discutissem sobre as respostas apresentadas. Pude perceber que eles não buscaram apenas um número que satisfizesse o problema, mas sim o porquê desse número.

Após mostrar a resolução do primeiro problema, apresentei o Princípio da casa de pombos na sua versão mais simples, exibindo o que estava por traz de cada questão. Todas as outras três questões foram resolvidas sem a minha ajuda. No final de cada uma delas eu perguntava o que representava as casas e o que representava os pombos. Na quarta questão, deduzir as casas não era tão simples, logo, precisei direcioná-los para que eles pudessem perceber o que representava as casas.

Gostaria de enfatizar que esta foi a melhor aula que eu ministrei nesta turma. Em nenhuma outra aula eu consegui a participação de todos os alunos; em todas as aulas, até o final do período escolar, eles me perguntavam: “Não vamos mais fazer aquele negócio de casas e pombos?” A partir dessa aula coloquei em todas as minhas avaliações uma questão parecida com as que foram vistas neste relato, e, nesta turma especificamente, o resultado foi muito positivo.

3 Objetivos*

O presente trabalho tem como principais objetivos:

- Propiciar aos autores do trabalho uma oportunidade de se aprofundarem em um conteúdo de enorme importância para a Matemática e de refletirem sobre suas práticas docentes atuais;
- Desenvolver material teórico compacto para consulta e estudo por parte do professor de Matemática que deseja se aprofundar no estudo do Princípio da Casa dos Pombos e. portanto, ter maior segurança na apresentação deste conteúdo em sala de aula;
- Pesquisar, produzir e apresentar atividades experimentais para o ensino do Princípio das Casas dos Pombos, buscando, sempre que possível, relacioná-lo com os mais diversos conteúdos matemáticos trabalhados na escola básica;
- Oferecer ao professor de Matemática propostas didáticas diferenciadas para o ensino do Princípio das Casas dos Pombos no ensino fundamental e médio, abrindo possibilidades de adaptação à realidade observada na sala de aula.

4 Metodologia*

Com o objetivo de construirmos uma base sólida para a superação dos desafios encontrados ao longo da realização do presente trabalho, seguimos alguns passos que se tornaram indispensáveis para a o sucesso e concretização dos objetivos apresentados anteriormente.

- Consulta aos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do Ensino Fundamental e do Ensino Médio;
- Consulta a artigos científicos de autores renomados da Educação Matemática sobre resolução de problemas, ensino de combinatória e áreas afins;
- Realização de uma profunda revisão bibliográfica que forneça embasamento teórico quanto aos aspectos pedagógicos da pesquisa;
- Consulta a artigos científicos que tratem com profundidade dos aspectos históricos, teóricos e das principais aplicações do PCP na Matemática;
- Consulta a materiais produzidos para a formação continuada de professores por diversas instituições e grupos de pesquisa nacionais;
- Aprofundamento no estudo dos aspectos teóricos do PCP, de suas diversas definições (da mais simples a mais abrangente) e de suas aplicações clássicas;
- Elaboração, coleta e análise de atividades produzidas para os exemplos apresentados ao longo do presente texto e para os planos de aula propostos aos professores de Matemática do ensino fundamental e médio.

5 O Princípio das Casas dos Pombos*

O Princípio das Casas dos Pombos (PCP), também conhecido como Princípio das gavetas de Dirichlet, pois acredita-se que o primeiro relato deste principio foi feito por Dirichlet em 1834 com o nome de Schubfachprinzip ("princípio das gavetas"), pode ser apresentado por meio de diversas afirmações. Vejamos algumas possibilidades:

i) Se n pombos devem ser postos em k casas, n > k, então pelo menos uma casa irá conter mais de um pombo;

ii) Se em n casas são postos n + 1 pombos, então haverá uma casa com pelo menos dois pombos;

iii) Se o número de elementos de um conjunto finito A é maior do que o número de elementos de um outro conjunto B, então uma função de A em B não pode ser injetiva.

Apresentamos a seguir versões mais gerais do PCP:

iv) Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_k$, números inteiros maiores ou iguais a 1. Se temos k casas e pelo menos $a_1 + a_2 + \ldots + a_k - k + 1$ pombos, então haverá na casa j, para algum $j \leq k$, um número maior ou igual a a_j pombos.

v) Se n pombos devem ser colocados em k casas, com n > k, então, em alguma casa haverá pelo menos $\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1$ pombos, onde $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x;

Embora se trate de uma afirmação evidente e elementar, o PCP é útil para resolver problemas que, à primeira vista, são obscuros e não imediatos. Para aplicá-lo, devemos identificar, na situação dada, quem faz o papel dos pombos e quem faz o papel das casas. Nos capítulos seguintes iremos apresentar sugestões de atividades que possam iniciar a apresentação do PCP para alunos do ensino básico e aprofundar as suas aplicações clássicas.

5.1 Despertando o interesse do aluno

Ao iniciarmos a apresentação de um novo conteúdo aos nossos alunos, é desejável que sejam apresentados problemas iniciais interessantes e desafiadores com o objetivo de motivá-los. Num primeiro momento, estes problemas podem ser difíceis para eles. Mas, ao longo do período em que este novo conteúdo for trabalhado, os problemas iniciais podem ser retomados e reapresentados com suas respectivas soluções.

Neste momento, o professor poderá utilizar novos recursos, agora já conhecidos pelo aluno. Desta forma eles perceberão que o conhecimento que eles adquiriram com a aprendizagem do novo conteúdo trabalhado em sala de aula pelo professor não foi em vão, pois facilitaram e facilitarão a resolução de diversos problemas de Matemática que, num primeiro momento, parecem ser muito obscuros.

Vejamos a seguir alguns problemas sobre o PCP que, por serem desafiadores e não habituais, podem ser propostos pelo professor em sala de aula seguindo a mesma linha de pensamento exposta anteriormente.

PROBLEMA 1:

Quantas pessoas, no mínimo, devem morar numa casa com 7 quartos para garantirmos que pelo menos duas dormem num mesmo quarto?

É fácil observar que se a casa tiver até 7 moradores, é possível termos no máximo uma pessoa por quarto. Já se a casa tiver 8 ou mais moradores, teremos o número de moradores (pombos) maior que o número de quartos (casas), o que garante, pelo PCP, que pelo menos duas pessoas dormem no mesmo quarto.

PROBLEMA 2:

Numa cidade, o número de habitantes é maior que o número de fios de cabelo na cabeça de cada um dos moradores. Ou seja, se contarmos os fios de cabelo de cabelo da cabeça de qualquer um deles, esse número será menor que a população da cidade. Ali, não existem dois habitantes que tenham o mesmo número de fios de cabelo e não há ninguém com exatos 618 fios de cabelo na cabeça. Qual é o maior número possível de habitantes dessa cidade?

Sejam n a população da cidade e k o número de fios de cabelo de um determinado habitante, $0 \leq k < n$.

Suponhamos inicialmente que $\mathrm{n} \leq 618$. Como k pode assumir n valores distintos $(0, 1, 2, \dots, n-1)$ e a cidade possui n habitantes, é possível termos todos os habitantes com quantidades distintas de fios de cabelo .

Suponhamos agora que $n > 618$. Agora k só pode assumir $n-1$ valores distintos, pois $k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \backslash \{618\}$. Sendo assim, o número possível de fios de cabelo de um habitante (casas) é menor que a população da cidade (pombos). Logo, pelo PCP, pelo menos dois moradores da cidade possuem o mesmo número de fios de cabelo.

Concluímos, portanto, que o número máximo de habitantes que a cidade deve ter para que as condições do problema sejam satisfeitas é 618.

PROBLEMA 3:

Será que existem duas pessoas no mundo que possuem o mesmo número de amigos? (admitamos que "ser amigo" seja uma relação simétrica, ou seja, se a é amigo de b, então b é amigo de a).

Para resolvermos o problema, temos que o mundo possui um número finito de habitantes, portanto, chamemos esse número de n. Observe que uma pessoa pode não ter amigos, pode ter 1 amigo, ou 2 amigos, e assim sucessivamente, até $\mathrm{n}-1$ amigos, pois no mundo com n habitantes, uma pessoa só pode se amiga no máximo de $\mathrm{n}-1$ pessoas. Considere o número de amigos como as casas, tal que a casa $[0]$ está a pessoa que não possui amigos, a casa $[1]$ está a pessoa que possui 1 amigo, e assim sucessivamente.

$$\underbrace{[0],[1],[2],\cdots,[\mathrm{n}-1]}_{\text{n casas}}$$

Agora, observe que se uma pessoa ocupar a casa $[0]$, nenhuma outra poderá ocupar a casa $[\mathrm{n}-1]$, pois, como a relação é simétrica, não pode existir uma pessoa que não possua amigos e outra que é amigo de todos e, vice-versa.

Portanto, temos $\mathrm{n}-1$ casas para serem ocupadas e, considerando o número de participantes como pombos, segue que temos n pombos.

Logo, pelo PCP, haverá uma casa com pelo menos dois pombos, o que mostra que há duas pessoas que possuem exatamente o mesmo número de amigos.

5.2 Relacionando o PCP com outros conteúdos do ensino básico

Os problemas que se utilizam do PCP como recurso primordial em suas soluções, podem facilmente estar relacionados a outros conteúdos e áreas da Matemática trabalhados na escola durante todo o ensino básico, o que favorece a utilização do PCP como ferramenta matemática frequente e poderosa na resolução de problemas. Vejamos alguns exemplos:

1. Aritmética

Prove que, dados 11 números inteiros quaisquer, a diferença entre dois deles será um múltiplo de 10.

É fácil verificar que diferença entre dois números inteiros será um múltiplo de 10 quando eles tiverem o mesmo resto na divisão por 10. Sabemos que existem dez restos possíveis nesta divisão (casas) e que temos disponíveis onze números inteiros (pombos). Logo, pelo PCP, dois destes números terão restos iguais na divisão por 10, ou seja, a diferença entre eles será um múltiplo de 10.

2. Análise Combinatória

Uma prova de concurso possui 10 questões de múltipla escolha, com cinco alternativas cada. Qual é o menor número de candidatos para o qual podemos garantir que pelo menos 3 deles preencheram o cartão resposta com exatamente as mesmas respostas para todas as questões?

Neste problema teremos que adaptar o uso do PCP às condições apresentadas. Queremos garantir agora que em cada “casa” (gabarito) haja pelo menos três “pombos”(candidatos). Cada uma das 10 questões do concurso pode ser respondida de 5 maneiras diferentes. Desta forma, pelo Princípio Multiplicativo, há 5^{10} maneiras de preenchermos o cartão resposta. Facilmente podemos concluir que se o concurso tiver até 2.

5^{10} candidatos, ainda não poderemos garantir que mais de dois candidatos (pombos) terão gabaritos (casas) iguais. Já se tivermos $2.\ 5^{10} + 1$ candidatos, teremos o número de “casas” maior que o dobro do número de “pombos”, o que garante, pelo PCP, que pelo menos três candidatos preencheram o cartão resposta com exatamente as mesmas respostas para todas as questões.

3. Geometria Plana

Escolhem-se 5 pontos ao acaso sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que pelo menos um dos segmentos que eles determinam tem comprimento menor ou igual a $\sqrt{2}$ *.*

Iniciemos a resolução do problema com uma construção: Vamos dividir o quadrado de lado 2 em outros quatro de lado 1 criando dois segmentos com extremidades nos pontos médios dos lados opostos do quadrado original. Desta forma subdividimos o quadrado original em 4 quadrados menores de modo que a distância máxima entre dois pontos em cada uma destes novos quadrados é, pelo teorema de Pitágoras, $\sqrt{2}$ (diagonais dos quadrados de lado 1). Como temos 4 quadrados de lado 1 (casas) e iremos escolher 5 pontos (pombos), pelo menos dois pontos escolhidos estarão numa mesma “casa” e, portanto, determinam um segmento menor ou igual a $\sqrt{2}$.

4. Geometria Espacial

Escolhem-se 9 pontos ao acaso interiores ou nas faces de um cubo de aresta 2. Mostre que pelo menos um dos segmentos que eles determinam tem comprimento menor ou igual a $\sqrt{3}$*.*

Neste exemplo utilizaremos um recurso análogo ao utilizado no exemplo anterior. Agora iremos dividir o cubo em 8 cubos menores de aresta 1, seccionando-o por meio de três planos, onde cada um deles passa pelo centro do cubo e é paralelo a duas faces opostas. Desta forma subdividimos o cubo original em 8 cubos menores de modo que a distância máxima entre dois pontos em cada uma destes novos cubos é, por Pitágoras, $\sqrt{3}$

(diagonais dos cubos de aresta 1). Como temos 8 cubos de aresta 1 (casas) e iremos escolher 9 pontos (pombos), pelo menos dois pontos escolhidos estarão numa mesma “casa” e, portanto, determinam um segmento menor ou igual a $\sqrt{3}$.

5. Geometria Analítica

Sejam 5 pontos distintos do plano com coordenadas inteiras. Mostre que pelo menos um par de pontos tem ponto médio com coordenadas inteiras.

Dados dois pontos do plano A = (xa, ya) e B = (xb, yb), o ponto médio M do segmento AB é dado por M = $\left(\frac{\text{xa} + \text{ya}}{2}, \ \frac{\text{xb}+ \text{yb}}{2}\right)$. Além disso, sabemos que a média entre dois números inteiros será um número inteiro se eles tiverem a mesma paridade, ou seja, ou os dois são pares ou são ímpares. Quando analisamos um ponto do plano com coordenadas inteiras, encontramos um dos seguintes tipos de coordenadas (casas): (PAR, PAR), (PAR, ÍMPAR), (ÍMPAR, PAR), (ÍMPAR, ÍMPAR). Ao escolhermos 5 pontos (pombos) do plano, pelo menos dois deles terão coordenadas do mesmo tipo e, consequentemente, o ponto médio do segmento que tem estes pontos como extremidade também terão coordenadas inteiras.

6- Funções

Sejam A e B dois conjuntos finitos tais que o número de elementos de A é maior que o número de elementos de B. Prove que não existe função injetiva de A em B.

Observe que neste exercício propomos a prova de uma das formas em que apresentamos o Princípio das Casas dos Pombos no início do capítulo. Apesar da afirmação talvez ser óbvia para os alunos, a solução deste problema em sala de aula é uma ótima oportunidade para o professor estimular o espírito de participação e cooperação dos alunos com a aula e com outros colegas. Além disso, o professor pode mostrar que, em Matemática, muitas vezes temos que provar o óbvio e que isso nem sempre é fácil.

A seguir apresentaremos duas soluções para o problema, ou seja, duas demonstrações para o PCP, uma menos formal e outra com maior rigor matemático. O professor ao apresentar o PCP deve demonstrá-lo utilizando a forma que considerar mais adequada ao nível de sua turma. Vamos para as soluções.

1ª solução: Seja f uma função de A em B. Para construirmos esta função devemos escolher para cada elemento de A um único elemento em B para ser sua imagem. Como o número de elementos de A (pombos) é maior que o número de elementos de B (casas), teremos pelo menos dois elementos de A com imagens iguais em B, ou seja, f não pode ser injetiva.

2ª solução: Iremos utilizar o princípio da indução finita.

Etapa base: Suponha o número de elementos de B igual a zero, ou seja, B = ∅. Então não existe função f de A em B que seja injetiva.

Hipótese de indução: Suponha que f não é injetiva, sendo f uma função de A em B onde o número de elementos de A é maior que o número de elementos de B, que é menor ou igual a n, onde $n \geq 0$.

Etapa de indução: Suponha que f é uma função de A em B onde o número de elementos de A é maior que o número de elementos de B, que é igual a $n+1$. Escolhemos agora algum elemento $a \in$ A. Se existe um elemento b tal que $f(a) = f(b)$, então obviamente f não é injetiva e a prova está concluída. Então, suponha que não exista tal elemento. Considere agora os conjuntos A $- \{a\}$ e B $- \{f(a)\}$ e a função g de A $- \{a\}$ em B $- \{f(a)\}$ que é idêntica a f para todos os elementos de A $- \{a\}$. Agora, a hipótese de indução pode ser aplicada, pois B $- \{f(a)\}$ possui n elementos e o número de elementos de A $- \{a\}$ é maior que o número de elementos de B $- \{f(a)\}$.

5.3 Aprofundando o Princípio das Casas dos Pombos

Muitas vezes o professor de Matemática constata que alguns de seus alunos possuem habilidades matemáticas diferenciadas com relação aos outros de mesma faixa etária. Pelo fato deles terem enorme facilidade para compreender novos conceitos, normalmente o professor tem dificuldade em mantê-los atentos na sala de aula, já que muitos deles consideram as aulas de Matemática enfadonhas e muitas vezes inúteis.

Em casos como estes é necessário apresentar frequentemente problemas verdadeiramente desafiadores, que os estimulem a participar das aulas e favoreçam o desenvolvimento de suas habilidades inatas, sejam elas reconhecidas ou não pelo professor.

Visando atender a grupos de alunos que estejam no patamar descrito anteriormente, o professor ao apresentar o Princípio das Casas dos Pombos pode inserir nesta apresentação algumas de suas aplicações clássicas que aparecem com enorme frequência em Olimpíadas de Matemática e são muito utilizadas por matemáticos das mais diversas áreas de pesquisa.

Algumas dessas aplicações são o Teorema de Dirichlet e o Teorema de Ramsey, assuntos que consideramos primordiais para aqueles que desejam se aprofundar no estudo da Matemática.

5.3.1 Teorema de Dirichlet

Dado um número irracional α, é possível encontrar infinitos números racionais $\frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ de tal forma que $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$, ou seja, existem infinitas aproximações racionais para um número irracional com erro menor que o inverso do quadrado do denominador.

Acredita-se que na demonstração desse teorema, Dirichlet utilizou pela primeira vez o PCP de forma relevante. Ao longo da prova algumas notações nos serão muito úteis:

$\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro tal que $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$, ou seja, é a parte inteira de x;

$\{x\}$ = x - $\lfloor x \rfloor$ ϵ $[0, 1)$, ou seja, é a parte fracionária de x.

Seja $N \in \mathbb{N}$ um número "grande" e seja α um número irracional.

Considere os $N + 1$ números: $0, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{N\alpha\} \in [0,1)$.

Agora, particione $[0,1)$ em N "intervalinhos": $[0, 1) = \bigcup_{k=1}^{N} \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right)$

Novamente, pelo PCP, podemos afirmar que haverá um "intervalinho" (casa) com pelo menos dois números (pombos).

Desta forma, concluímos que existem dois números $\{i\alpha\}$ e $\{j\alpha\}$, com $0 \leq i < j \leq N$, tais que:

$|\{j\alpha\} - \{i\alpha\}| < \frac{1}{N}$ e $|\{j\alpha\} - \{i\alpha\}| = |(j\alpha - \lfloor j\alpha \rfloor) - (i\alpha - \lfloor i\alpha \rfloor)| = |j\alpha - i\alpha - \lfloor j\alpha \rfloor + \lfloor i\alpha \rfloor| = |(j-i)\alpha - (\lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor)| < \frac{1}{N}$.

Considerando $q \coloneqq j - i$ e $p \coloneqq \lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor$, temos $j - i$ e $\lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor$ inteiros e garantimos que $0 < q < N$, ou seja, $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{N}$. Desta forma mostramos que $|q\alpha - p| < \frac{1}{N} \leq \frac{1}{q}$. Dividindo ambos os membros da desigualdade por q temos $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Nq} \leq \frac{1}{q^2}$, o que prova a existência de uma aproximação racional $\frac{p}{q}$ de α com erro menor que $\frac{1}{q^2}$.

Provaremos agora que existem infinitas aproximações racionais de α da forma descrita anteriormente.

Sejam $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \cdots, \frac{p_k}{q_k}$ aproximações racionais de α e $\delta \coloneqq min\left\{\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right|, 1 \leq j \leq k\right\} > 0$.

Como podemos escolher N tão grande quanto quisermos, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \delta$.

Logo, $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{N} < \delta \leq \left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right|$ e $\frac{p}{q} \neq \frac{p_j}{q_j}\ \forall\, j \leq k$, o que garante a existência de infinitas aproximações racionais $\frac{p}{q}$ de α com erros menores que $\frac{1}{q^2}$.

Vejamos agora algumas observações interessantes relacionadas ao Teorema de Dirichlet.

1ª Observação: Algumas aproximações racionais muito boas de π são bastante conhecidas. Vejamos alguns exemplos:

Para $\frac{p}{q} = \frac{22}{7}$, temos:

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| = |3{,}141592654 \ldots - 3{,}142857143 \ldots| = 0{,}001264489 \ldots < 0{,}020408163 \ldots = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{q^2}$$

Para $\frac{p}{q} = \frac{355}{113}$, temos:

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| = |3{,}141592654 \ldots - 3{,}14159292 \ldots| = 0{,}000000266 \ldots < 0{,}000078314 \ldots = \frac{1}{113^2} = \frac{1}{q^2}$$

2ª Observação: A seguir apresentamos uma proposição que mostra ser possível encontrar infinitas aproximações racionais de ω (razão áurea) por meio da razão de números de Fibonacci consecutivos.

A sequência de números reais F_n dada por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ para todo n ≥ 0, é chamada de sequência de Fibonacci. Mostre que $\left|\frac{F_n+1}{F_n} - \omega\right| < \frac{1}{{F_n}^2}$ *para todo n ≥ 1*

Dado: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(\omega^n - (-1)^n.\ \omega^{-n})$, *onde* $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Observe que mostrar $\left|\frac{F_n+1}{F_n} - \omega\right| < \frac{1}{{F_n}^2}$ equivale a mostrar que $|F_{n+1} - \omega.F_n| < \frac{1}{Fn}$.

Inicialmente vamos provar por indução que $|F_{n+1} - \omega.F_n| = \omega^{-n}$, para todo n ≥ 0.

Para n = 0, temos $|F_1 - \omega.F_0| = |1 - \omega.0| = 1 = \omega^{-0}$.

Suponhamos que $|F_{n+1} - \omega.F_n| = \omega^{-n}$ seja verdadeiro para algum n ≥ 0. Provaremos agora que a igualdade anterior também é verdadeira para n+1, ou seja:

$|F_{n+2} - \omega.F_{n+1}| = \omega^{-(n+1)}$.

De fato, $|F_{n+2} - \omega . F_{n+1}| = |F_{n+1} + F_n - \omega . F_{n+1}| = |F_n - (\omega - 1) . F_{n+1}| =$

$|F_n - \omega^{-1} . F_{n+1}| = \omega^{-1} . |\omega . F_n - F_{n+1}| = \omega^{-1} . \omega^{-n} = \omega^{-(n+1)}$.

Para finalizarmos a demonstração, basta agora provar que para n ≥ 1, $\omega^{-n} < \frac{1}{F_n}$, o que

equivale a $F_n < \omega^n$. De fato, $F_1 = 1 < \omega$, $F_2 = 1 < \omega^2$ e, por indução, para n ≥ 1,

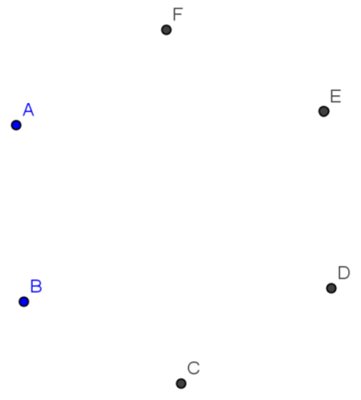
temos $F_{n+2} = F_n + F_{n+1} < \omega^{n+1} + \omega^n = \omega^n.(\omega + 1) = \omega^n . \omega^2 = \omega^{n+2}$.

5.3.2 Teorema de Ramsey

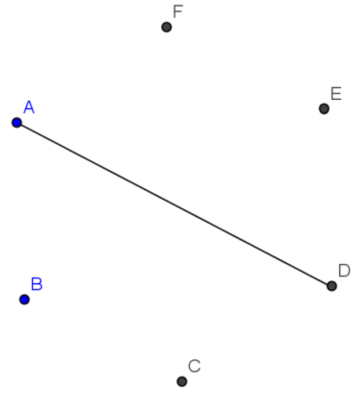
Outra aplicação clássica do PCP é o Teorema de Ramsey. Antes de enunciá-lo iremos apresentar por meio de um exemplo um caso particular do teorema.

Numa reunião há 6 pessoas. Mostre que necessariamente existem 3 pessoas que se conhecem mutuamente ou 3 pessoas que não se conhecem mutuamente (admitamos que, se a conhece b, então b conhece a).

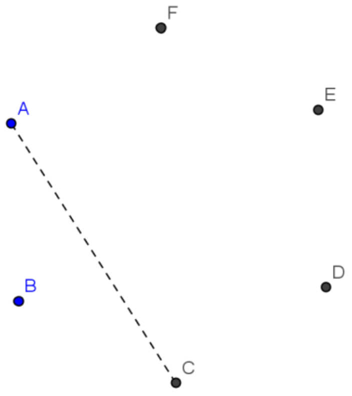
Vamos representar as 6 pessoas por 6 pontos não colineares quando tomados 3 a 3, formando assim um hexágono.



Se duas pessoas se conhecem, então as ligaremos por um segmento contínuo. Por exemplo, A e D se conhecem.

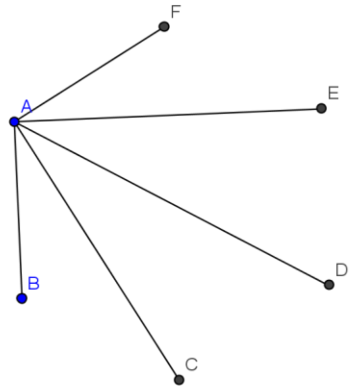


Agora, se duas pessoas não se conhecem, as ligaremos por um segmento tracejado. Por exemplo, A e C não se conhecem.

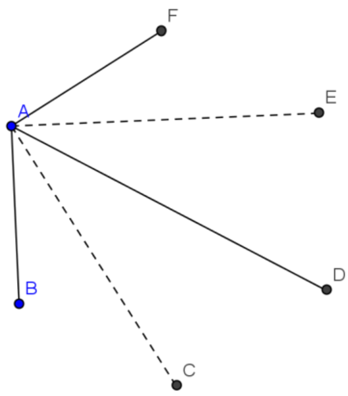


Desta forma, todos os possíveis segmentos que unem quaisquer dois pontos foram construídos. Estes segmentos traçados são os lados e as diagonais do hexágono formado.

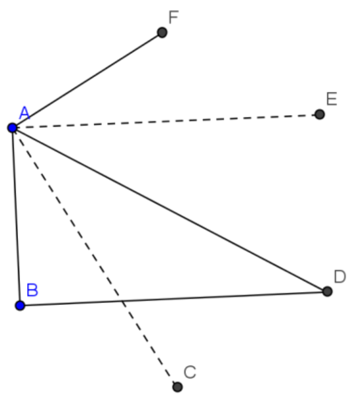
Fixemos o ponto A. A partir deste ponto partem 5 segmentos, como mostra a figura abaixo. Considerando os pontos como pombos e os segmentos contínuos ou segmentos tracejados como casas, temos 5 pombos e 2 casas e, pelo PCP, haverá pelo menos 3 segmentos contínuos ou pelo menos 3 segmentos tracejados, ou seja, a pessoa A conhece ou não conhece pelo menos 3 pessoas.



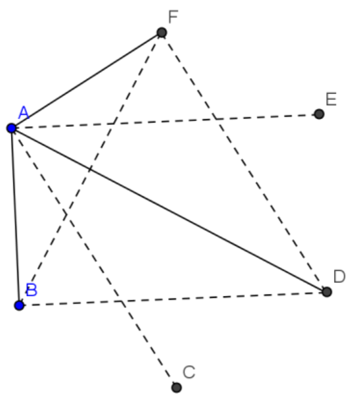
Admitamos que haja 3 segmentos contínuos partindo de A cujas extremidades são, por exemplo, B, D e F.



Se algum dos segmentos BD, BF ou DF for contínuo, o problema está resolvido, pois, este segmento juntamente com os que ligam seus extremos ao ponto A formam um triângulo contínuo e, portanto, 3 pessoas se conhecem mutuamente.



Agora, se nenhum dos segmentos citados é contínuo, então eles formam um triângulo tracejado, ou seja, há 3 pessoas que não se conhecem mutuamente.



O caso que partem três segmentos tracejados de A é análogo ao caso anterior. Desta forma, concluímos a demonstração.

Teorema de Ramsey: Para todo $m, n \geq 1$ existe $R \geq 1$ tal que em uma reunião com R pessoas, existem m que se conhecem ou n que não se conhecem. Chamamos o menor número R com esta propriedade de $R(m,n)$.

Por definição, temos $R(n,1) = R(1,n) = 1$. Sabemos também que $R(m,2) = m$ para todo $m \geq 2$, pois em qualquer conjunto de m pessoas, ou todas as pessoas se conhecem ou pelo menos 2 não se conhecem. Além disso, $R(m,n) = R(n,m)$, pois conhecer ou não conhecer é simétrico segundo o enunciado.

Observe que conhecemos todos os valores de $R(m,n)$ em que $m + n \leq 4$. $R(1,1) = R(2,1) = R(1,2) = R(3,1) = R(1,3) = 1$ e $R(2,2) = 2$.

Provemos agora, por indução, que $R(m,n) \leq R(m-1,n) + R(m,n-1)$ para todo $m + n > 4$ e $m, n \geq 2$.

Por hipótese de indução, existem os números $R(m-1,n)$ e $R(m,n-1)$ pois $(m-1) + n = m + (n-1) < m + n$.

Seja $R \coloneqq R(m-1,n) + R(m,n-1)$. Considere uma festa com R pessoas, cada pessoa sendo representada por um ponto. Se duas pessoas se conhecem, então elas serão ligadas por um segmento contínuo, caso contrário, serão ligadas por um segmento tracejado.

Fixemos uma pessoa P. Pelo PCP, de P saem pelo menos $R(m-1,n)$ segmentos contínuos ou pelo menos $R(m,n-1)$ segmentos tracejados. De fato, pois saem $R-1=R(m-1,n)+R(m,n-1)-1$ segmentos de P, e $R(m-1,n)+R(m,n-1)-1>(R(m-1,n)-1)+(R(m,n-1)-1)$.

Suponhamos que saem pelo menos $R(m-1,n)$ segmentos contínuos de P. Então, há pelo menos $R(m-1,n)$ pessoas. Portanto, existem pelo menos $m-1$ pessoas que se conhecem ou n que não se conhecem. Como P conhece todos eles, caso haja $m-1$ que se conhecem, junte a pessoa P, e temos pelo menos m pessoas que se conhecem. Caso contrário, haverá n pessoas que não se conhecem.

O caso em que saem pelo menos $R(m-1,n)$ segmentos tracejados de P é análogo ao caso anterior. Desta forma, concluímos a demonstração do teorema.

6. Plano de aula para o ensino fundamental

Aula de Princípio das Casas dos Pombos

Duração: 2 tempos de 50 minutos seguidos (1 encontro)

Descrição da Aula

A aula começa com um problema motivacional

Problema: Quantas pessoas eu preciso ter, para garantir que duas delas nasceram no mesmo mês?

O professor coloca o problema no quadro e motiva a turma a ir dando respostas, até que um aluno acerte. Depois de responder, o professor explica o raciocínio da questão, onde os meses indicam as casas e as pessoas indicam os pombos, colocando uma pessoa em cada mês, o professor levará o aluno a notar que todos os meses estarão ocupados quando for alocar a 12ª pessoa, logo a 13ª pessoa terá que compartilhar o mês com alguém, portanto, não importa onde a 13ª fique, sempre terá pelo menos duas pessoas no mesmo mês. Depois disso o professor estende o problema para o caso 3 pessoas completarem ano no mesmo mês. Portanto, no mínimo 13 pessoas.

Problema: Quantas pessoas eu preciso ter, para garantir que três delas nasceram no mesmo mês?

Mais uma vez, o professor instiga a turma a responder até que um aluno acerte. Quando esse aluno falar a resposta correta o professor pergunta como ele chegou nessa resposta. Ele provavelmente deve responder que saiu preenchendo uma casa por vez até que chegou na casa 25 e esse é o número mínimo de pessoas. Percebemos que utilizamos o mesmo raciocínio da pergunta anterior. Essa é a deixa para apresentar-lhes o Princípio das Casas dos Pombos.

"Quando se tem três pombos e duas gaiolas, pelo menos dois pombos vão morar na mesma gaiola."

Uma vez enunciado, o professor explica para a turma o que o PCP quer dizer.

- Quando se tem um número maior de pombos que de casas, inevitavelmente, alguma casa vai possuir mais de um. Nesse momento é necessário o professor deixar claro o que significa casas e o que significa pombos, bem como identificá-los em cada problema. Para tal, o professor pode definir usando os problemas acima e em seguida utilizar os dois problemas sugeridos abaixo para fixar a ideia.

Problema: Quantas vezes temos que lançar o dado para garantir que o mesmo número cairá pelo menos duas vezes?

Depois de os alunos resolverem, o professor começa a responder mostrando um dado, e que ele possui 6 faces, daí ele argumenta que se cada face for diferente das demais então, será preciso 6 lançamentos para percorrer todas as faces; exemplificando. Logo, se os 6 primeiros resultados forem diferentes, o 7º lançamento será igual a algum resultado anterior. Ou seja, as possibilidades de resultados são as casas, que são 6, e os lançamentos são os pombos. Portanto serão precisos, pelo menos, 7 lançamentos para garantir dois resultados iguais.

Problema: Em uma caixa há 12 bolas do mesmo tamanho: 3 brancas, 4 vermelhas e 5 pretas. Uma pessoa, no escuro, deve retirar n bolas da caixa, e ter a certeza que, entre elas, existem 3 da mesma cor. Qual o menor valor de n?

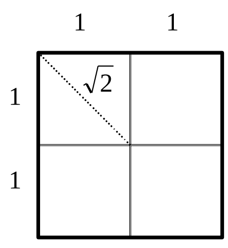
Como são 3 cores, cabe ao professor mostrar que em três lançamentos pode-se percorrer todas as cores. Com mais 3 lançamentos, percorre todas as cores duas vezes, logo, se temos duas bolas de cada cor, qualquer que seja a cor da sétima bola, garantimos que existem 3 da mesma cor. Ou seja, o menor valor para n é 7.

Uma vez explicado o problema, o professor propõe uma lista de 5 exercícios para que os alunos resolvam. Esses exercícios podem ser resolvidos em grupo e 10 minutos é tempo suficiente.

Logo depois, corrige os problemas no quadro e resolve 3 problemas mais difíceis, aumentando o nível um pouco, mostrando que o PCP pode ser usado em diversos casos e de diversas formas. Para tal, sugere-se utilizar os problemas abaixo.

Problema: Escolhe-se 5 pontos ao acaso sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que pelo menos um dos segmentos que eles determinam, tem comprimento menor ou igual que $\sqrt{2}$.

Resposta: Tendo uma superfície de um quadrado de lado 2, dividamos ele em 4 quadrados de lado 1. Tem-se que como a diagonal de cada quadrado menor mede $\sqrt{2}$, para que os pontos distem mais que $\sqrt{2}$, é necessário que fiquem em quadrados diferentes, porém, temos 4 quadrados e 5 pontos, logo, 4 casas e 5 pombos; então, dois pombos ficarão na mesma casa, ou seja, dois pontos ficarão no mesmo quadrado. Como a maior distância entre os pontos de um quadrado é a sua diagonal, esses dois pontos são menores ou iguais a $\sqrt{2}$.



Problema: Dentre três números quaisquer, a diferença entre dois deles é par?

Resposta: Para que a diferença entre dois números seja par, é necessário que os dois números sejam pares ou os dois números sejam ímpares. Como se tem 3 números, para serem pares ou ímpares, temos que par ou ímpar são as casas, e dentro dessas duas casas queremos colocar três números. Logo 3 pombos para duas casas. Sendo assim, ou dois números são pares, e a sua diferença é par, ou dois números são ímpares, e a sua diferença também é par.

Problema: Todos os pontos de um plano são pintados de azul ou vermelho. Prove que podemos encontrar dois pontos da mesma cor que distam 10 cm.

Resposta: Para tal problema, tome um triângulo equilátero de 10 cm de lado. Esse triângulo possui 3 vértices e, como temos apenas 2 cores, azul ou vermelho, pelo PCP, dois vértices serão da mesma cor. Logo, a distância desses dois pontos será 10 cm.

Logo após resolver os problemas, o professor passa uma lista para os alunos responderem em casa e trazerem na próxima aula.

Lista de exercícios para casa

1 – Um prédio possui 20 apartamentos. Qual o mínimo de cartas que Jaiminho, o carteiro, deverá entregar a fim de que um apartamento receba 5 cartas?

Resposta: Jaiminho pode entregar até 4 cartas em cada apartamento, como são 20 apartamentos, o total de cartas que ele pode entregar para que ninguém receba 5 cartas é de $4 \times 20 = 80$. Portanto, na 81ª carta, obrigatoriamente, ele terá entregado 5 cartas em algum apartamento.

2 – Em uma caixa há 12 bolas do mesmo tamanho: 3 brancas, 4 vermelhas e 5 pretas. Quantas bolas uma pessoa no escuro tem que retirar para ter a certeza que uma delas é branca?

Resposta: Como temos 5 bolas pretas e 4 bolas vermelhas então, para termos a certeza de que vai ser tirado uma bola branca, temos que tirar as 5 bolas pretas e as 4 vermelhas antes, que dão um total de 9 bolas. Logo, na décima bola, garantimos que ela é branca. Portanto, no mínimo 10 bolas.

3 – Em uma gaveta há 12 meias bancas e 12 meias petas. Quantas meias devemos retirar ao acaso para termos certeza de obter um par de meias da mesma cor?

Resposta: Como são duas cores, por PCP, basta tirar 3 meias.

4 – Quantos estudantes devem ter numa turma para garantir que dois estudantes dessa turma tenham a mesma nota no exame final, sabendo que a nota varia de 0 a 100?

Resposta: Como a nota vai de 0 a 100, tem 101 opções de notas. Logo, por PCP, precisa-se de 102 pessoas.

5 – Num pomar de laranjeiras tem mais árvores que laranjas em qualquer das laranjeiras. Não existem duas laranjeiras com o mesmo número de laranjas. E também não há nenhuma laranjeira com exatas 18 laranjas. Qual é o maior número possível de laranjeiras desse pomar?

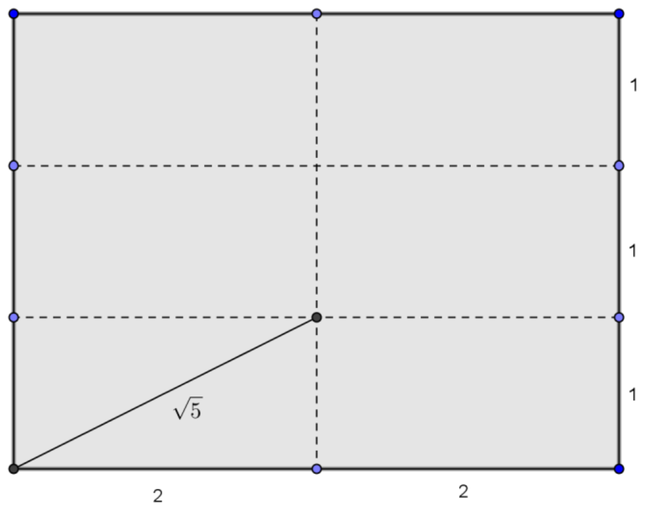
Resposta: Como o problema fala que não há nenhuma laranjeira com exatas 18 laranjas, e sensato começar a observar com18 laranjeiras. Suponhamos que temos 18 laranjeiras e 18 possibilidades de quantidades de laranja, a saber, 0, 1, 2,..., 17 que responde ao problema. Porém, caso seja maior que 18, 19, por exemplo, tem-se 19 laranjeiras e 18 possibilidades para quantidades de laranjas em laranjeiras, a saber, 0,1, 2, ..., 17 (18 não pode). O que contraria o fato de não haver laranjeiras com o mesmo número de laranjas. Logo, o número máximo é 18 laranjeiras.

6 – Mostre que entre um grupo de 5 inteiros (não necessariamente consecutivos) existem 2 com o mesmo resto, quando divididos por 4.

Resposta: Quando dividimos um número por 4, podemos ter resto 0, 1, 2 ou 3; logo tem-se 4 possibilidades de resto para 5 números e, pelo PCP, há pelo menos dois números que possuem o mesmo resto quando divididos por 4.

7 – Sete pontos são selecionados dentro de um retângulo 3 por 4. Prove que há dois desses pontos tais que a distância entre eles é no máximo igual a $\sqrt{5}$.

Resposta: Vamos dividir o retângulo 3 por 4 em seis retângulos 2 por 1. Como a maior distância entre dois pontos numa mesma região é $\sqrt{5}$, pelo PCP, haverá uma região com pelo menos 2 pontos e, portanto, a distância entre dois pontos será no máximo $\sqrt{5}$.



8 - Em uma reunião há n pessoas. Mostre que existem duas pessoas que conhecem exatamente o mesmo número de outros participantes (admitimos que “conhecer” seja uma relação simétrica, ou seja, se a conhece b, então b conhece a).

Resposta: Ver o problema 3 do capítulo 5. A resolução é análoga.

7. Práticas docentes na resolução de problemas*

Ao longo de todo o texto mostramos que o docente que opta pelo ensino do PCP no ensino básico tem uma ótima oportunidade de melhorar a formação matemática de seus alunos, porém, para isso, necessariamente precisará refletir e se preparar para o trabalho com a resolução de problemas em sala de aula.

Frequentemente nós professores nos questionamos sobre quais práticas docentes devemos realizar para que a aprendizagem de nossos alunos seja efetiva. De fato, não há um manual que defina como devemos agir em sala de aula para que nossos alunos aprendam. Apesar disso, acreditamos que algumas ações podem nos guiar nesta árdua tarefa. Desta forma, apresentamos a seguir algumas sugestões de leituras para o professor que deseja se aprofundar neste assunto.

O livro *"A Arte de Resolver Problemas"* de George Pólya é uma obra muito famosa que pode ajudar aos professores que desejam mais informações sobre como agir em sala de aula para despertar nos alunos a autonomia necessária para a resolução de problemas matemáticos. Uma das sugestões apresentadas por Pólya em seu livro é a seguinte:

"Um professor de Matemática tem, assim, uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios para alcançar este objetivo."

Outra obra de Pólya que segue a mesma linha de pensamento é um artigo chamado *"10 mandamentos para professores de Matemática"*. Neste artigo Pólya faz comentários sobre algumas práticas que considera fundamentais para professores de matemática. Segue a lista dos mandamentos:

1. Tenha interesse por sua matéria.

2. Conheça sua matéria.

3. Procure ler o semblante dos seus alunos; procure enxergar suas expectativas e suas dificuldades; ponha-se no lugar deles.

4. Compreenda que a melhor maneira de aprender alguma coisa é descobri-la você mesmo.

5. Dê aos seus alunos não apenas informação, mas know-how, atitudes mentais, o hábito de trabalho metódico.

6. Faça-os aprender a dar palpites.

7. Faça-os aprender a demonstrar.

8. Busque, no problema que está abordando, aspectos que possam ser úteis nos problemas que virão — procure descobrir o modelo geral que está por trás da presente situação concreta.

9. Não desvende o segredo de uma vez — deixe os alunos darem palpites antes — deixe-os descobrir por si próprios, na medida do possível.

10. Sugira; não os faça engolir à força.

Esperamos que com a leitura dos textos sugeridos o professor leitor sinta-se mais preparado para apresentar com mais clareza e segurança o PCP em sala de aula.

8. Conclusão e perspectivas

Após apresentado os argumentos que trazem as dificuldades dos alunos no sentido da aprendizagem, face ao estímulo mal aplicado, talvez, de nossa atual pedagogia, diferente das propostas apresentadas e aqui defendidas, faz-se entender o grande fracasso escolar.

A educação tem aplicado várias fórmulas em sua pedagogia, mas parece que a prática tem se mostrado ineficaz quanto à teoria elaborada para o ensino. Através deste tipo de experiência, como o princípio das casas dos pombos, podemos encontrar uma revelação dos caminhos que poderemos seguir para conseguirmos uma resposta mais apropriada para a interação professor/aluno e conteúdo/aprendizagem.

É certo que muitos outros problemas que fogem a nossa competência têm contribuído fortemente para a evasão de alunos e desvio das intenções que deveriam marcar a estada do aluno em sala de aula.

Sabemos que somos educadores; precisamos além da informação formar mentes que respirem o sensato, o equilíbrio e a visão que possa norteá-los de forma positiva na caminhada do crescimento intelectual. Não será uma tarefa fácil, mas devemos aproveitar as experiências aplicadas para buscarmos montar uma nova estratégia que une o estímulo que desejamos alcançar, como professores, nos alunos, e a grande volta por cima das circunstâncias sociais que retiram o interesse, a vontade e a visão do aluno em se mostrar aplicado em aprender para “ser”; dimensionar nas mentes acadêmicas de que tudo que é negativo no dia a dia da vida pode ser suplantado por uma pedagogia que valoriza a capacidade individual e inata do indivíduo e que nutre seus interesses, estimulando-os a continuar prosseguindo para descobrir cada vez mais que é possível valorizar interesses, por se ter despertado nele (aluno) um novo horizonte, até então adormecido através desse tipo de aplicação de ensino.

Parece que começamos a perceber um atraso na forma dos conteúdos que devem ser ministrados pelos professores, o que nos leva a repensar certos conceitos hoje praticados na nossa pedagogia, que impede o progresso natural do aluno, a partir de seu próprio raciocínio, por não haver um estímulo que o leve a perceber a sua potencialidade, trazendo um desânimo e consequentemente um sentimento de incapacidade.

Independente de uma provável iniciativa do nosso sistema pedagógico, no que diz respeito as suas responsabilidades e interesses no desenvolvimento intelectual do aluno, proponho aos professores que hoje questionam uma nova investida em sala de aula, para melhor conduzir um programa de ensino, buscando uma receptividade mais aquecida por parte de seus alunos, a utilização de métodos não padronizados, em que se busca experiências vivenciadas por outros docentes, que aplicaram métodos diferenciados, com assuntos não comuns a um padrão instituído pelos livros didáticos com resultados mais convenientes e satisfatórios.

Acreditando numa nova perspectiva de êxito a ser alcançado na aplicação deste tipo de abordagem, apresento um plano de aula, como ponto de partida inicial, para que o docente venha estimular-se na busca de novos meios de condução, como também na criação de métodos que proporcionem dinâmica diferenciada para os alunos e maior eficácia na sua aprendizagem, produzindo assim um interesse cada vez maior no discente.

Pensar é melhor que repetir; quando somos levados a interagir através do raciocínio, ficamos sempre mais prontos a uma escalada segura para a percepção dos fatos que precisam ser identificados pela sua essência e não pelo seu envoltório, o que traz o verdadeiro estímulo na busca do conhecimento, principalmente, lógico.

9. Referências bibliográficas*

ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA (1988). Renovação do currículo de Matemática. Lisboa: APM.

***BELL**. M, **POLLAK**. Henry O, **THOMPSON**. M, **USISKIN**. Z (NCTM), Aplicações da matemática escolar. Rio de Janeiro: Atual, 2003*

CARVALHO, P. C. P. O Princípio das Gavetas. Olimpíada Brasileira de Matemática. Disponivel a partir de: em www.obm.org.br/opencms/revista_eureka/lista.html. Acesso em: 08/01/13.

CERIOLI, M.R**; FREITAS**, R.; **VIANA**, P. Princípio das casas de pombo. Disponível a partir de: http://www.uff.br/grupodelogica/textos/principio_das_casas_de_pombo.pdf. Acesso em: 10/01/13

DANTE, Luiz Roberto. Didática da resolução de problemas de matemática. São Paulo: Ática, 2000.

FALZETTA, Ricardo. Idéias simples que ensinam. Nova Escola online. Disponível a partir de: http://novaescola.abril.com.br/index.htm?ed/165_set03/html/premio. Acesso em: 14/11/07

GRUPO DE TRABALHO APLICAÇÕES E MODELAÇÃO DA APM (GTAM). Disponível a partir de: http://www.apm.pt/apm/GTAM/home.html. Acesso em 2006

HOLANDA, B. Princípio da Casa dos Pombos I. Programa Olímpico de Treinamento, Curso de Combinatória - Nível 2. Aula 7. Disponível a partir de: http://www.poti.impa.br/upload/Aula%2007%20-%20PCP%20I.pdf. Acesso em: 15/01/13

HOLANDA, B. Princípio da Casa dos Pombos II. Programa Olímpico de Treinamento, Curso de Combinatória - Nível 2. Aula 8. Disponível a partir de: http://www.poti.impa.br/upload/Aula%2008%20-%20PCP%20II.pdf . Acesso em: 15/01/13

IMENES, Luiz Marcio P. e **LELIS**, Marcelo. Relações entre cidadania e ensino de matemática. Temas e Debates. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. ano 7, nº 5,1995.

LIMA, E.L.; **CARVALHO**, P.C.P; **WAGNER**, E. e **MORGADO**, A.C (2004). A Matemática do Ensino Médio. Volume 2. Sociedade Brasileira da Matemática.

MORGADO, A.; **CARVALHO**, J,; **CARVALHO**, P.; **FERNANDEZ**, P. (1991). Análise Combinatória e Probabilidade. Sociedade Brasileira da Matemática

OLIVEIRA, K.I.M; **FERNANDÉZ**, A.J.C (2010). Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções. Sociedade Brasileira da Matemática.

ONUCHIC,L.R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. São Paulo, Editora Unesp. 1999. p. 199-218

PARRA, Cecília. **SAIZ**, Irmã. Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

PÓLYA, G. A Arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do método matemático. Editora Interciência, 1995.

PÓLYA, G. Dez mandamentos para professores. Artigo publicado no "Journal of Educatíon", University of British Columbia, Vancouver and Victoria (3) 1959, p. 61-69.

SANTOS, M. C. dos, Algumas concepções sobre o ensino-aprendizagem em matemática. In Educação Matemática em Revista, N°12. São Paulo, SBEM, 2002.

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO BÁSICA. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/SEF,1997.

SMOLE, K. S., **DINIZ**, M. I. e **CÂNDIDO**, P. Resolução de problemas. Coleção Matemática de 0 a 6 anos. Porto alegre: Artes Médicas Sul, 2000.Vol.2