**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**

**CENTRO DE CIÊNCIAS**

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO DE MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**PEDRO SÉRGIO SALES DE SOUSA**

# A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS NATURAIS: UM FOCO NAS QUATRO OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS

**FORTALEZA**
**2014**

PEDRO SÉRGIO SALES DE SOUSA

# A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS NATURAIS: UM FOCO NAS QUATRO OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), do Departamento de Matemática da Universidade Federal Do Ceará – UFC, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

FORTALEZA

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

S698c Sousa, Pedro Sérgio Sales de
A construção dos números naturais: um foco nas quatro operações fundamentais / Pedro Sérgio Sales de Sousa. – 2014.
40 f. : enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2014.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Números naturais. 2. Operações fundamentais. 3. Axioma de Peano. I. Título.

CDD 372

PEDRO SÉRGIO SALES DE SOUSA

# A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS NATURAIS: UM FOCO NAS QUATRO OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 28 / 11 / 2014.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Luciano Mari
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho
Universidade Federal do Ceará (UFC)

*Dedico este trabalho a minha esposa que desde o início do curso esteve presente me apoiando e incentivando. Dedico também a meus filhos, Eloá Pietra e Pedro Davi.*

# AGRADECIMENTOS

*A Deus por todas as oportunidades a mim concedidas e dentre elas a de participar deste programa de Mestrado.*

*A minha esposa, Viviane, pela presença, paciência e compreensão por todos os momentos de ausência decorrentes de horas de estudos dedicadas ao PROFMAT.*

*Ao Coordenador do Curso (PROFMAT - UFC), Prof. Dr. Marcelo Melo, pelo ótimo trabalho realizado.*

*Ao meu Orientador, Professor Dr. Marcelo Melo, por todo apoio, atenção e disponibilidade a mim dedicados, essenciais nessa reta final.*

*Aos colegas de curso da turma 2012, por todos os momentos difíceis enfrentados e superados.*

*Aos amigos que estiveram presentes nas ocasiões em que pensei em desistir. E que com suas palavras me fortaleceram para dar sequência a essa etapa da vida.*

*A todos que direta e indiretamente deram sua contribuição na execução desta dissertação.*

***Contando a História dos Números***

*A história desse cordel*
*Faz tempo que começou*
*Há muitos e muitos anos*
*Quando o povo precisou*
*Contar o que possuía*
*Pra saber o seu valor.*

*Era preciso contar*
*As ovelhas que criavam*
*Contavam também os bois*
*Os peixinhos que pescavam*
*O trigo que se colhia*
*E os animais que caçavam.*

*Eles contavam também*
*O tanto de noite e dia*
*Para poder controlar*
*A plantação que nascia*
*O dia em que se plantava*
*E o dia em que se colhia.*

*Pra poder representar*
*As quantidades contadas*
*Os pastores das ovelhas*
*Tinham pedras arrumadas*
*Cada ovelha do curral*
*Tinha pedra separada.*

*Quando as ovelhas saíam*
*Pra comer seu capinzinho*
*O pastor botava as pedras*
*Separadas num saquinho*
*Cada ovelha que saía*
*Aumentava seu montinho.*

*Chegando o final do dia*
*Era hora de voltar*
*O pastor organizava*
*A filinha pra contar*
*Cada ovelha que entrava*
*Uma pedra era seu par.*

(...)
**Cordel Infantil**
**Autora: Ana Raquel Campos**
**Recife – 3ª Edição.**

# RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar a construção dos números naturais e a definição axiomática no que diz respeito às quatro operações fundamentais para alunos e professores do ensino fundamental. Para isso foi apresentado uma sequência abordando inicialmente as considerações sobre o estudo da Matemática, o conceito de Matemática, o saber matemático e um breve histórico matemático para se perceber como teorias e práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas num contexto específico de cada época. No segundo momento foi descrita a construção dos números naturais através dos axiomas de Peano, prosseguindo com a definição rigorosa de cada operação e finalizando com a relação de ordem no conjunto dos números naturais.



Palavras-chave: Números naturais. Operações fundamentais. Axioma de Peano.

## ABSTRACT

This paperaims to presentthe constructionof the natural numbersandthe axiomaticdefinitionwith respectto the fourfundamental operationsfor students and teachersof elementary school.Tothis was presenteda sequenceinitiallyaddressingon the studyof mathematics, the concept of mathematics,mathematicalknowledge anda mathematicalbrief historytosee howmathematical theories andpractices are designed, developed and usedin a specific contextof each era. The second momentwas describedthe constructionof natural numbersthrough thePeano axioms, continuing with therigorous definitionof each operation andending with theorder relationin theset of natural numbers.



Keywords: Natural numbers. Fundamental operations. Peano axiom.

# SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

A criação dos símbolos na pré-história foi muito importante para o desenvolvimento da Matemática. Naquela época o homem já buscava, mesmo que instintivamente, desenvolver relações matemáticas, como a soma ou a subtração. A preocupação em fazer contagens, em diversas situações do dia a dia, gerou a necessidade de se criar um modelo de contagem abstrata, formado por uma estrutura de elementos enumeráveis conhecidos como o conjunto dos números naturais.

A Matemática vista como um conteúdo estratégico de ensino e aprendizagem na vida escolar ao ser desenvolvida e praticada pelo aluno desperta neste sua criatividade e lhe possibilita a compreensão do contexto ao qual está inserido.

O presente texto é fruto de ideias que surgiram de um estudo acerca do nível de proficiência dos alunos do Ensino Fundamental II de uma rede municipal de ensino, aproximadamente 9000 alunos, isto é, 95% dos alunos não dominam o conteúdo mínimo necessário para o estudo adequado da Matemática para a sua série. Percebeu-se que as operações de adição, subtração com reserva, multiplicação de dois fatores que possuam dois ou mais algarismos e divisão da mais simples possível não foram compreendidas pelos alunos.

Documentos oficiais do Governo Federal, como os Parâmetros Curriculares Nacionais e as Matrizes Curriculares do Sistema de Avaliação da Educação Básica e da Prova Brasil, recomendam que a ação de ensinar um algoritmo ao aluno é muito mais do que memorizar passos, mas sim dar sentido a cada etapa de uma operação. E dar sentido as operações com números naturais é a motivação para promover uma aprendizagem significativa para o professor e seus alunos.

Este trabalho teve como objetivo geral apresentar a construção dos números naturais e a definição axiomática no que diz respeito às quatro operações fundamentais para alunos e professores do ensino fundamental. Assim sendo foi fundamentado em investigações bibliográficas que enfocam a importância da construção dos números naturais para a Matemática, bem como para a humanidade.

## 2 CONSIDERAÇÕES SOBRE O ESTUDO DA MATEMÁTICA

Dentro do contexto escolar, mais especificamente do programa de ensino básico, independentemente de cultura, raça, religiões ou sistemas políticos, a Matemática, ao lado da Língua Materna, é de fundamental importância. Ambas possuem um valor instrumental e constituem condição de possibilidade do conhecimento em qualquer assunto para o qual a atenção é dirigida.

Da mesma forma pela qual a Língua Materna não poderia ser reduzida apenas a um código, a Matemática, também, não poderia restringir-se a uma linguagem formal: a aprendizagem de cada uma dessas disciplinas requer a construção de um instrumental para uma melhor relação com a realidade, como a organização de um sistema de representação, possibilitando o acesso ao conhecimento científico. Assim, considerando os aspectos envolvidos na disciplina de matemática, neste tópico são abordadas algumas considerações acerca do conceito, saber e histórico dessa ciência.

### 2.1 O Conceito de matemática

A Matemática ao longo da história é descrita como uma arte que teve uma participação de grande importância na forma como o homem sente a age perante o mundo, conjuntura esta que fez com que os gregos passassem a tratá-la como a essência do conhecimento.

Considerada uma ciência dinâmica, resultante do trabalho de numerosos gênios criativos, cujos alguns nomes a história registrou e outros não, a Matemática mesmo sendo um produto de séculos de vida em civilização encontra-se sempre em processo de construção, pois, foi e é influenciada e estimulada por muitos acontecimentos e ocorrência de natureza econômica, social e política.

De forma que nas últimas décadas do século XX, entre os matemáticos, uma definição de ampla aceitação é que a Matemática consiste na ciência das regularidades (padrões), ou seja, cabe ao matemático investigar padrões abstratos, tanto reais como imaginários, visuais ou mentais, buscando, assim, isonomia nos números, no espaço, na ciência e na imaginação (COURANT; ROBBINS, 2000).

Didaticamente se define a Matemática como a disciplina que estuda as quantidades, medidas, espaços, estruturas e variações, de forma a procurar por padrões, formular conjecturas e, por meio de deduções rigorosas a partir de axiomas e definições, estabelecer novos resultados.

Trata-se a Matemática de uma ciência que foi criada a fim de contar e resolver problemas com uma razão de existirem. Teorias das mais complexas contadas por matemáticos sobrevoaram a mente humana de como a matemática foi criada.

Até mesmo hoje, ela supera todas as ciências em necessidade humana, chegando até a superar a necessidade de se comunicar por meio de um idioma compreensível de tal região. A Matemática foi, é, e será uma grande necessidade humana. Nossos ancestrais também necessitavam de conhecimento dentre os quais poderiam se comunicar, comerciar e trocar. Desde aí, os princípios básicos do início da matemática foram se aperfeiçoando. Poucos milênios antes de Cristo, a inteligência humana se desenvolveu mais, e a necessidade de uma ciência complicada para resolver desde os mais simples problemas até grandes vendas também.

Porém, as primeiras concepções tiveram seu início no período Paleolítico, mediante a necessidade do homem primitivo em estimar quantidades de alimentos, pessoas e animais, surgindo, assim, as primeiras concepções matemáticas, as quais contribuíram para o desenvolvimento do conceito de número, o qual se iniciou com a simples percepção de diferenças e semelhanças e evoluiu através de contagens primitivas com o uso de pedras, ossos e dos dedos das mãos (OLIVEIRA; et. al., 2009).

Fato é que os grandes matemáticos surgiram tanto antes de Cristo como depois de Cristo, descobrindo fórmulas, soluções e cálculos. A inteligência do homem era algo tão magnífico, que a matemática evoluiu mais rápido do que as próprias conclusões e provas matemáticas do homem.

Pode-se, portanto, dizer que o desenvolvimento de argumentos matemáticos aconteceu de forma gradual e perceptiva de acordo com as necessidades dos sujeitos históricos, através da criação e recriação da Matemática (BARASUOL, 2006).

## 2.2 O Saber matemático

Entre outras palavras, uma pessoa que tem sucesso no campo da Matemática é uma pessoa que sabe raciocinar e pensar de maneira adequada. E, no sentido inverso, uma pessoa que sabe raciocinar aprenderá facilmente o conhecimento matemático.

Muitas indagações são feitas sobre: como aprender e entender Matemática. E muitos são os fatores que contribuem para tolher a aprendizagem do aluno e o trabalho do professor de Matemática.

De forma que no processo ensino-aprendizagem da Matemática as dificuldades encontradas por alunos e professores são muitas e conhecidas. E estas têm se tornado um contratempo para toda a comunidade escolar e para a sociedade.

A prática pedagógica na Matemática, muitas vezes, tem se deparado com alunos que não conseguem assimilar os conteúdos trabalhados em sala de aula, ou seja, o aluno não consegue entender a Matemática que a escola lhe ensina, e muitos são reprovados nesta disciplina, ou então, mesmo que aprovados, sentem dificuldades em utilizar o conhecimento adquirido; em síntese, não consegue efetivamente ter acesso a esse saber de fundamental importância. Sendo, portanto, nítida a ausência do *feedback* desejado, uma vez que os alunos queixam-se de não entendê-la, de não aprendê-la.

Diante dessa realidade o professor, consciente de que não consegue alcançar resultados satisfatórios junto ao alunado e tendo dificuldades de, por si só, repensar satisfatoriamente seu fazer pedagógico procura novos elementos - muitas vezes, meras receitas de como ensinar determinados conteúdos - que, acredita, possam melhorar este quadro.

A Matemática é uma disciplina que muitos consideram um verdadeiro quebra-cabeça, porém é possível torná-la agradável, empolgante e prazerosa. Para que isto ocorra, é importante que o aluno descubra a sua importância e relevância, sua utilidade e, ainda, que ela, é indispensável no cotidiano do indivíduo e que sua aprendizagem não é tão difícil quanto parece ser.Lima (1992, p. 2) cita que:

> Matemática não se aprende passivamente. Os exercícios ensinam a usar conceitos e proposições, desfazem certos mal-entendidos, ajudam a fixar na mente ideias novas, dão oportunidade para explorar as fronteiras da validez das teorias expostas no texto e reconhecer a necessidade das hipóteses, apresentam aplicações dos teoremas demonstrados e informam o leitor sobre resultados adicionais.

O saber matemático não se consolida como um rol de ideias prontas a serem memorizadas; muito, além disso, considera-se um processo significativo de ensino, conduzindo os alunos à exploração de uma grande variedade de informações, bem como o estabelecimento de relações entre fatos e conceitos de modo a incorporar os contextos do mundo real, as experiências e o modo natural de envolvimento para o desenvolvimento das noções matemáticas com vistas à aquisição de diferentes formas de percepção da realidade. Mas ainda é preciso avançar no sentido de conduzir os educandos a perceberem a evolução das ideias matemáticas, ampliando progressivamente a compreensão que delas se tem (MIGUEL, 2005).

## 2.3 Breve Histórico da matemática

A História da Ciência e, em particular, a História da Matemática, constitui um dos capítulos mais interessantes do conhecimento. Permite compreender a origem das ideias que deram forma à nossa cultura e observar também os aspectos humanos do seu desenvolvimento: enxergar os homens que criaram essas ideias e estudar as circunstâncias em que elas se desenvolveram.

Assim, esta história é um valioso instrumento para o ensino/aprendizado da própria matemática. Pode-se entender porque cada conceito foi introduzido nesta ciência e porque, no fundo, ele sempre era algo natural no seu momento. Permite também estabelecer conexões com a história, a filosofia, a geografia e várias outras manifestações da cultura.

Conhecendo a história da Matemática pode-se perceber que as teorias que hoje aparecem acabadas e elegantes resultaram sempre de desafios que os matemáticos enfrentaram, que foram desenvolvidas com grande esforço e, quase sempre, numa ordem bem diferente daquela em que são apresentadas após todo o processo de descoberta.

A Matemática teve sua origem na Europa, porém recebeu algumas contribuições das civilizações indianas e islâmicas. Esta disciplina chegou à forma conhecida atualmente, entre os séculos XVI e XVII. Ganhou um caráter universal devido ao predomínio da ciência e das novas tecnologias que foram desenvolvidas no continente europeu, a partir do século XVII. “[...] a universalização da Matemática foi um primeiro passo em direção à globalização que estamos testemunhando em todas as atividades e áreas do conhecimento” (D'AMBROSIO, 2001, p.73).

A Matemática pode ser definida, de acordo com os teóricos, como a ciência dos números e das formas, das relações e das medidas, e das inferências, tendo como principais características, a inclusão da precisão, do rigor e da exatidão.Por isso é categorizada como uma ciência exata, visto que suas soluções, em geral, dependem de um processo dedutivo, isto é, de uma conclusão necessária, em virtude da correta aplicação das regras lógicas.

D’Ambrosio (2001, p.74) ressalta, ainda, que

> Os grandes heróis Matemática, isto é, aqueles indivíduos historicamente apontados como responsáveis pelo avanço e consolidação dessa ciência são identificados na Antiguidade grega e posteriormente na Idade Moderna, nos países centrais da Europa, sobretudo na França, Itália e Alemanha.

A origem da palavra Matemática advém do grego ‘*mathema*’, que significa aprendizagem. Muito antes de o homem construir sua própria moradia, ele logo aprendeu a contar. A invenção do número é mais antiga que a invenção da forma de representá-lo. As civilizações antigas reuniram conhecimentos matemáticos sem, contudo estruturá-los mediante ligações lógicas e convenientes, por essa razão, considera-se a Grécia Antiga como o berço da Matemática.

”[...] A História da Matemática é um elemento fundamental para se perceber como teorias e práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas num contexto específico de sua época” (D’AMBROSIO, 2001, p.74).

A Matemática foi bastante desenvolvida entre os séculos XIV e XV, tanto nos mosteiros quanto nas universidades. Sendo, de acordo com os registros, a primeira escola de Matemática desenvolvida na cidade de Bagdá, durante a Idade Média.

No processo de transição do século XIX para o século XX foi realizado o Primeiro Congresso Matemático Internacional em Chicago, no ano de 1893, e em 1900, o Segundo Congresso Internacional em Paris. David Hilbert apresentou neste congresso uma lista com 23 problemas que, de acordo com sua opinião, seriam a principal preocupação de matemáticos e estudiosos no século XX (MACIEL, 2013).

Atribui-se ao matemático Felix Klein (1849-1925), por defender um ensino que considerasse as condições psicológicas de cada aluno, observando a intuição e deixando em segundo plano a parte sistemática, à importância, inicial, dada à Educação Matemática como uma disciplina, isto na cidade de Roma no ano de 1908(MACIEL, 2013).

Por volta da década de 1960 a 1970 pretendendo-se conciliar o conhecimento matemático ao dos currículos escolares surge uma Matemática escolar renovada, chamada de Matemática Moderna (MM) que tinha como um de seus intentos unificar a Álgebra, a Aritmética e a Geometria.Segundo Pavanello (1989, p.103):

> A ideia central da Matemática Moderna consistia em trabalhar a matemática do ponto de vista de estruturas algébricas com a utilização da linguagem simbólica da teoria dos conjuntos. Sob esta orientação, não só se enfatizava o ensino da álgebra, como se inviabilizava o da Geometria da forma como este era feito tradicionalmente.

No que se refere ao Brasil a História da Matemática inicia-se com o seu descobrimento, embora no período colonial e no Império, muito pouco tenha sido registrado. Nesta época, o ensino era ministrado de forma tradicional, modelado a partir do sistema português e a pesquisa era incipiente. Não havia universidades, nem também, imprensa.

A partir do translado da família real para o Brasil em 1808, foi criada além de uma imprensa, vários estabelecimentos educacionais e culturais, tais como, academias de formação, bibliotecas e um jardim botânico.

Dentre essas academias, em 4 de dezembro de 1810, foi criada a Academia Real Militar, que além de objetivar formar oficiais de diversos campos, também recebeu o desígnio de atuar sobre a formação científica, tendo por isso sido a instituição pioneira em propor o curso completo de *Sciencias Mathematicas*. Para Castro (1999, p.25) a estruturação do "*Curso Mathematico*", seguia o seguinte padrão:

> O lente (professor) do primeiro ano ensinava aritmética, álgebra (até as equações de quarto graus), geometria, trigonometria retilínea e noções de trigonometria esférica. O do segundo ano ensinava álgebra superior, geometria analítica, cálculo diferencial e integral. O do terceiro lecionava mecânica (estática e dinâmica), hidrostática e esférica, óptica, astronomia e geodésia.

Com o advento da República, mesmo havendo uma forte influência dos franceses, principalmente pelas ideias do positivismo, no que se refere à educação matemática, a evolução foi muito restrita. Mas com o iniciar do século XX as pesquisas no campo matemático começaram a se manifestar, quando sugiram Otto de Alencar, Teodoro Ramos, Amoroso Costa e Lélio Gama, no Rio de Janeiro.

Após a Segunda Guerra Mundial, houve um grande desenvolvimento da pesquisa científica, sendo criado o Conselho Nacional de Pesquisas no ano de 1955 e em 1957, em Poços de Caldas, o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e realizados os Colóquios Brasileiros de Matemática (CONCEIÇÃO, 2014). Segundo Fiorentini (1995, p.13)

> Após 1950, a educação matemática brasileira passaria por um período de intensa mobilização em virtude da realização dos cinco Congressos Brasileiros de Ensino da Matemática (1955, 1957, 1959, 1961 e 1966) e do engajamento de um grande número de professores brasileiros no movimento internacional de reformulação e modernização do currículo escolar, que ficou sendo conhecido como o Movimento da Matemática Moderna (MMM).

Pouco a pouco, foram se expandindo em todo o país os Centros de Ciências e Matemática, tendo por finalidade a preparação de professores para o desenvolvimento de um ensino proposto nos projetos traduzidos e em produções próprias, deixando para as décadas seguintes grandes e importantes influências.

A História da Matemática tem servido para alguns pesquisadores como motivação para o trabalho com o desenvolvimento de diversos conceitos matemáticos. O estudo da construção histórica do conhecimento matemático leva a uma maior e mais completa compreensão da evolução de seu conceito, dando ênfase ás principais dificuldades inerentes ao conceito que está sendo trabalhado.

Somente uma história contextualizada, orientada, e com o domínio de suas potencialidades plenamente cumpridas pelo professor, é que irá trazer um retorno positivo, dando ao aluno a dimensão histórica e social do que ele está aprendendo, e levando-o a uma interação com o que está aprendendo. Quando isso de fato ocorrer, de fato ter-se-á dado uma aprendizagem significativa.

## 3. CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS NATURAIS

***Deus fez os números naturais.***
***O resto é obra dos homens*.**
*LeopoldKronecker*

### 3.1 Origem dos Números

Percorrendo-se a História da Matemática verifica-se que a origem desta ciência surgiu como parte da vida diária do homem, e se há validade no princípio biológico da “sobrevivência do mais apto” a persistência da raça humana provavelmente tem relação com o desenvolvimento no homem de conceitos matemáticos (BOYER, 1996).

A princípio a noção primitiva de número deveria estar relacionada com contrastes mais do que com semelhanças, a diferença entre uma ovelha e um rebanho, uma árvore e uma floresta sinalizam que uma ovelha e uma árvore possuem algo em comum – sua unicidade. Desta mesma forma observaria que certos grupos, como os pares, podem ser postos em correspondências um a um. As mãos podem ser relacionadas com os pés, os olhos, orelhas ou as narinas. A essa percepção de uma propriedade abstrata que certos grupos têm em comum é que definimos como número.

Euler (1765) define o número como sendo algo resultante da comparação realizada entre duas grandezas da mesma espécie, onde uma é categorizada como unidade. É fato que o conceito de número foi um processo longo e gradual e pode ter sido desenvolvido tão cedo no desenvolvimento cultural do homem quanto o uso do fogo, talvez há 300.000 anos. Aos poucos, à medida que se civilizava, a humanidade apoderou-se desse modelo abstrato de contagem que são os números naturais.

A heterogeneidade de técnicas (Figura 1) utilizadas nas representações numéricas dos povos babilônios, egípcios, mesopotâmios, chineses, romanos, maias, hindus, árabes entre outros permitiu o desenvolvimento de sistemas para o armazenamento de grandes números. Um avanço muito posterior na abstração desses sistemas foi o desenvolvimento da ideia do zero como um número com o seu próprio numeral. O conceito da forma como ele é utilizado hoje se originou com o matemático indiano Brahmagupta em 628. No entanto, o zero já era utilizado como um número por todas as calculadoras da idade média originalmente por Dionysius Exiguus em 525.

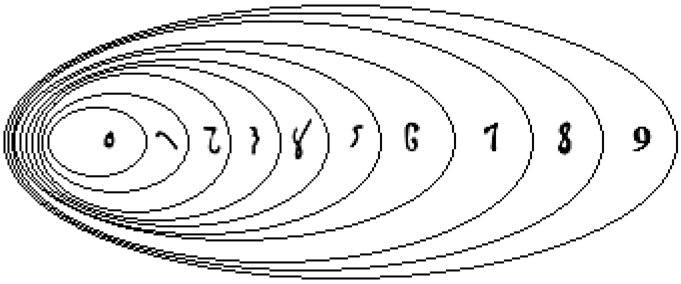

**Figura 1 –**Representações das técnicas numéricas
Fonte: Próprio autor, 2014.

O conjunto dos números naturais é o primeiro conjunto numérico que aparece na história de qualquer civilização ou em qualquer tratado sobre os fundamentos da Matemática. Ao primeiro estudo esquemático sobre esses números atribui-se aos filósofos gregos Pitágoras e Arquimedes. Mas, estudos independentes também ocorreram por volta do mesmo período na Índia, China e Mesoamérica.

Giuseppe Peano, logicista e matemático italiano, autor de mais de 200 livros e artigos, nasceu em Spinetta em 1858 e morreu em Turim em 1932. Suas contribuições teóricas em matemática tiveram grandes destaques na área da teoria dos conjuntos. Na obra *“Arithmetices Principia: Nova Methodo Exposita”* de 1889 apresenta matematicamente rigorosa axiomatização dos números naturais por meio de ideias intuitivas apoiadas em conceitos matemáticos já conhecidos ou admitidos conhecidos que ficaram conhecidos posteriormente como os Axiomas de Peano. Esses axiomas formalizam a ideia de que todos os números naturais podem ser obtidos a partir do número 1 pela soma sucessiva da unidade.

### 3.2 Axiomas de Peano

A formalização do conceito de número natural de acordo com Ferreira (2010)pode se dá como uma simples noção de grandeza, isto é, como expressão de uma quantidade, mas assumir a existência desses números se faz necessário a utilização dos Axiomas de Peano que reúne fatos básicos e intuitivos sobre os números naturais. A partir desses axiomas podemos definir ou deduzir todos os conceitos e demais propriedades que conhecemos acerca dos números naturais, dentre as quais podemos destacar as operações de adição e multiplicação, a relação de ordem, o princípio da Boa Ordenação e o Princípio das Gavetas.

Peano considera três entes primitivos: *número natural, zero e sucessor,* correlacionados por três axiomas.

Antes, considera-se a existência de um conjunto *IN* e uma função $s: IN \to IN$, chamada função sucessor verificando:

($A_1$)*s* é injetora:

$$n, m \in IN, \quad s(n) = s(m) \Rightarrow n = m$$

($A_2$) Existe um elemento em *IN*, que denotaremos por*0*, e chamaremos de zero, que não está na imagem de *s:* $0 \notin s(IN)$

($A_3$) Se um subconjunto *X* de *IN*satisfazer *(i)* e *(ii)* abaixo, então *X* = *IN*:

*(i)* $0 \in k$;

*(ii) Se* $k \in X$, *então* $s(k) \in X$.

*IN*se Chama Conjunto dos Números Naturais.O axioma ($A_2$) garante que $IN \neq \phi$ e que possui pelo menos dois elementos (0 e *s*(0)), pois $0 \in IN$ e $s(0) \neq 0$, já que está garantido que $0 \notin s(IN)$.

Continuaremos a analisar outros elementos de *IN,* veja que $s(s(0)) \neq 0$, pois $0 \notin s(IN)$ e $s(s(0)) \neq s(0)$, pois pelo axioma ($A_1$), *s* é injetora. Analogamente, $s(s(s(0))) \neq 0$, $s(s(s(0))) \neq s(0)$, $s(s(s(0))) \neq s(s(0))$ pelos mesmos axiomas ($A_1$) e ($A_2$) já citados anteriormente.

De forma análoga, as imagens de $s(s(0))$ e $s(s(s(0)))$ por s também estão em *IN* e são diferentes de $0,\ s(0),\ s(s(0)),\ s(s(s(0)))$ já mencionados.

Em Ferreira (2010), no exercício 33 do capítulo 2 e na proposição 2.3.6 fica demonstrado que $s^n(0) \neq s^k(0)$ *para todo k < n*.

Considerando esses sucessores de forma repetida podemos então escrever $0 \in IN,\ s(0) \in IN,\ s(s(0)) \in IN,\ s(s(s(0))) \in IN$ e assim sucessivamente. Devido a este fato é que consideramos *IN* infinito.

***3.2.1 Definição***

Um conjunto *X* diz-se infinito quando existe uma função injetora $f : IN \to X$ . Um conjunto é dito finito quando não for infinito. Ou seja, um conjunto é infinito quando contiver um subconjunto *Y* em bijeção com *IN.*

Outra forma de definir a infinitude de um conjunto é dizer que existe uma bijeção entre ele e um subconjunto próprio dele. Também podemos provar ainda que um conjunto é finito se, e somente se, ele for vazio ou estiver em bijeção com um conjunto do tipo $I_n = \{1,2,3,4,\ldots,n\}$, para algum $n \in IN \setminus \{0\}$. A esse *n*, quando existe, é único e chama-se número de elementos de X ou número cardinal do conjunto *X*. A correspondência $f : I_n \to X$ chama-se uma contagem dos elementos de *X*.

O terceiro axioma de Peano é conhecido na literatura matemática como Princípio de Indução Finita, ou Princípio de Indução Matemática, ou simplesmente Princípio de Indução. Esse princípio é uma característica muito importante do conjunto dos números naturais, pois serve tanto como técnica de demonstração de identidades e propriedades envolvendo os números naturais quanto serve para definirmos conceitos e funções com domínio em *IN*.

O axioma ($A_2$) nos garante que $0 \notin s(IN)$. Contudo, o que significa $s(IN)$ ? O teorema seguinte, especificamente seu item *(ii)* responderá esse questionamento.

### *3.2.2 Teorema*

Se $s: IN \to IN$ é a função sucessor, então tem-se:

*(i)* $s(n) \neq n$, para todo $n \in IN$ (*nenhum número natural é sucessor de si mesmo*).

*(ii)* $s(IN) = IN \setminus \{0\}$ (*0 é o único número natural que não é sucessor de nenhum número natural)*.

Demonstração:

*(i)* Considere *A* o subconjunto de *IN* constituídos dos elementos $n \in IN$ tais $s(n) \neq n$. Basta usar o Princípio de Indução para mostrar que *A* = *IN,* ou seja*,* $s(n) \neq n$, qualquer que seja $n \in IN$. Perceba que $0 \in A$, pois $s(0) \neq 0$ já que $0 \notin s(IN)$, por ($A_2$). Verifica-se agora que vale a seguinte implicação: $Se\ k \in A,\ então\ s(k) \in A$. De fato:

$k \in A \Leftrightarrow s(k) \neq k.$ Aplicando *s* em ambos os lados.

Obtemos $s(s(k)) \neq s(k)$. Mas, *s* é injetora.

Logo, $s(k) \in A$.

Portanto, *A* = *IN.*

*(ii)* Analogamente, usaremos o Princípio de Indução no conjunto

$A = \{0\} \cup s(IN)\ (\subset IN)$

Veja:

$0 \in A$ e $(k \in A \Rightarrow s(k) \in s(IN) \subset A)$.

Logo, *A* = *IN* e como $0 \notin s(IN)$, então $s(IN) = IN \setminus \{0\}$.

### *3.2.3 Definição*

Todo elemento de $IN \setminus \{0\}$ é sucessor de um único número natural, que se chama seu *antecessor.*

## 3.3 Operações com os Números Naturais

Os números fazem parte de uma série de grandes invenções da humanidade resultante da necessidade de recenseamento de bens, no registro de tempo ou de inventários de terras. Imagina-se que a função inicial dos números tenha sido a de quantificar. Sendo, portanto a Aritmética o mais elementar e mais antigo ramo da matemática que lida com os números e com as operações possíveis entre eles.

Os cálculos matemáticos avançaram significativamente na sua popularização com a criação dos algarismos indo-arábicos, pois foi possível combinar métodos mais simples para cálculos do que os já existentes na Europa, como por exemplo, o sistema grego ou romano de numeração. Essa criação baseada no conceito de lugar, valor e notação posicional permitiu que um sistema de numeração representasse de forma sólida números naturais de qualquer ordem.

### *3.3.1 Adição de números naturais*

#### *3.3.1.1 Definição*

A *adição* de dois números naturais, *m* e *n*, é designada por *m*+*n* e definida recursivamente do seguinte modo:

$$\begin{cases} m+0=m \\ m+s(n)=s(m+n) \end{cases}$$

Observe que $m+s(0)\overset{(i)}{=}s(m+0)\overset{(ii)}{=}s(m)$ e que na igualdade (i) utilizamos a segunda linha da definição, enquanto que na igualdade (ii) utilizamos a primeira linha da definição que admite a existência de um número natural que pode ser somado a qualquer número natural m resultando no próprio m.

Também podemos destacar que $m+s(s(0))=s(m+s(0))=s(s(m))$ . Podemos ainda, formalizar a expressão abaixo usando o Princípio da Indução:

$$m+\overbrace{s(\dots s(s(0))}^{k\ \ vezes}=s(m+\overbrace{s(\dots s(s(0))}^{k\ \ vezes})=s(s(m+\overbrace{s(\dots s(s(0))}^{k-1\ \ vezes})))=\dots=\overbrace{s(\dots s(s(m))}^{k+1\ \ vezes})=s^{k+1}(m)$$.

Esse processo nos mostra que a soma *m*+*n* está bem definida para todo par *m* e *n* de números naturais. De fato, para cada *m* natural fixado arbitrariamente, definimos o conjunto $S_m=\{n\in IN;\ \ m+n\ \ está\ \ definida\}$.

Perceba que $0\in S_m$ e se $k\in S_m$ , então $s(k)\in S_m$ , pois como vimos anteriormente, $m+s(k)=s(m+k)$. Portanto, por ($A_3$), $S_m=IN$. Como tomamos *m* natural arbitrário, $S_m=IN$, qualquer que seja *m* natural, isto é, *m*+*n* está definida para todo par *(m,n)* de números naturais, o que nos garante que a adição acima definida é de fato uma operação em *IN.*

### 3.3.1.2 Histórico

Os símbolos do sistema indo-arábico nem sempre tiveram a formaconhecida da atualidade. Veja como eles se transformaram, no decorrer do tempo:


**Figura 2 –** Evolução dos símbolos do sistema indo-arábico

Fonte: Imenes, p. 34, 1995.

### *3.3.1.3 Definição*

Indicaremos por 1 (lê-se “um”) o número natural que é sucessor de 0, ou seja, $1 = s(0)$.

### *3.3.1.4 Proposição*

Para todo número natural *m,* tem-se $s(m) = m+1$ e $s(m) = 1+m$. Portanto, $m+1 = 1+m$.

Demonstração:

Para a primeira igualdade, tem-se $m+1 = m + s(0) = s(m+0) = s(m)$.

Para a segunda igualdade, considera-se o conjunto $A = \{m \in IN; \ \ s(m) = 1+m\}$.

É fácil ver que $0 \in A$, pois $s(0) = 1 = 1 + 0$. Seja $m \in A$. Mostra-se que $s(m) \in A$. De fato, como $s(m) = 1 + m$, tem-se que $s(s(m)) = s(1 + m) = 1 + s(m)$, ou seja, $s(m) \in A$. Assim, pelo ($A_3$), temos $A = IN$.

A partir de agora passar-se-á a adotar a notação indo-arábica (de base dez) para os elementos de *IN*:

Já tem-se os símbolos $0 \ e \ 1 = s(0)$ e sabe-se que $0,\ s(0),\ s(s(0)),\ s(s(s(0))), \ldots \in IN$. Define-se:

$$\begin{cases} s(s(0)) = s(1) = 2 \ (l\hat{e} - se \ dois) \\ s(s(s(0))) = s(2) = 3 \ (l\hat{e} - se \ tr\hat{e}s) \\ s(s(s(s(0)))) = s(3) = 4 \ (l\hat{e} - se \ quatro) \\ s(s(s(s(s(0))))) = s(4) = 5 \ (l\hat{e} - se \ cinco) \\ \ldots \end{cases}$$

Desta forma sabe-se que:

$$\{0,\ s(0),\ s(s(0)),\ s(s(s(0))), \ldots\} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\} \subset IN.$$

***3.3.1.5 Teorema***

$IN = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$.

Demonstração: seja $S = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$. Na verdade, *S* foi construído como um subconjunto de *IN* que contém o 0 e também o sucessor de qualquer elemento nele contido, isto é, se $k \in S$, então $s(k) \in S$. Ora, pelo Princípio da Indução, $S = IN$.

Veja que $0 \neq 1$, porém ainda não comparamos 0 com 1, ou seja, não formalizamos ainda a ideia de que 1 é maior que 0. Isso decorrerá a partir da definição de uma relação de ordem em *IN.*

Agora será mostrado algumas adições em *IN*, utilizando a notação anterior:

a) $1+1=s(1)\overset{*}{=}2.$

b) $2+1\overset{(a)}{=}2+s(0)=s(2+0)=s(2)=3.$

c) $2+2=2+s(1)=s(2+1)=s(2+s(0))=s(s(2+0)=s(s(2))\overset{(b)}{=}s(3)=4.$

### *3.3.1.6 Propriedades da Adição*

#### *3.3.1.6.1Teorema*

Sejam *m*, *n* e *p* números naturais arbitrários. São verdadeiras as afirmações:

*(i)* Propriedade associativa da adição: $m+(n+p)=(m+n)+p.$

*(ii)* Propriedade comutativa da adição: $m+n=n+m.$

*(iii)* Lei do cancelamento da adição: $m+p=+n+p\Rightarrow m=n.$

*Demonstração.*

*(i)* Fixa-se os naturais *m* e *n* e aplica-se o Princípio de Indução sobre *p.*

Seja $A_{(m,n)}=\{p\in IN; m+(n+p)=(m+n)+p\}.$

Sabe-se que $0\in A_{(m,n)}$, pois $m+(n+0)=(m+n)+0$. Mostrar-se-á agora que se $k\in A_{(m,n)}$, então $s(k)\in A_{(m,n)}$.

De fato:

$$m+(n+s(k))=m+s(n+k)=s(m+(n+k))=s((m+n)+k)=(m+n)+s(k).$$

Logo, $A_{(m,n)}=IN$. Como *m* e *n* números naturais arbitrários, obtém-se *(i)*.

*(ii)* Fixa-se o natural*m*e aplica-se o Princípio de Indução sobre *n.*

Seja $C_m = \{n \in IN; n + m = m + n\}$.

Sabe-se que $0 \in C_m$ , pois $0 + m = m + 0$ ,aplicando *s* em ambos os lados, tem-se $s(0+m) = s(m+0) \Rightarrow s(0) + m = m + s(0) \Rightarrow 1 + m = m + 1$, conforme provado na proposição 3.2.1.4.Mostrar-se-á agora que se $k \in C_m$ , então $s(k) \in C_m$ .

De fato:

$$m + s(k) = s(m+k) = s(k+m) = s(k) + m.$$

Logo, $C_m = IN$ . Como *m*é número natural arbitrário, obtém-se*(ii).*

*(iii)* Fixa-se os naturais *m* e *n* e aplica-se o Princípio de Indução sobre *p.*

Seja $A_{(m,n)} = \{p \in IN; m + p = n + p \Rightarrow m = n\}$.

Sabe-se que $0 \in A_{(m,n)}$ , pois $m + 0 = n + 0 \Rightarrow m = n$ . Mostrar-se-á agora que se $k \in A_{(m,n)}$ , então $s(k) \in A_{(m,n)}$ .

De fato: $m + s(k) = n + s(k) \Rightarrow s(m+k) = s(n+k) \Rightarrow s(m) = s(n)$

Logo, $A_{(m,n)} = IN$ . Como *m* e *n* números naturais arbitrários, obtemos *(iii).*

### *3.3.2 Subtração de números naturais*

#### *3.3.2.1 Definição*

A *subtração* de dois números naturais, *m* e *n*, é designada por *m – n*e só está definida em *IN* quando $n \leq m$ (Relação de Ordem)e é único o número natural *p* tal que $m = n + p$. (D'AMBROSIO, 2001).

A *subtração* é a operação que a todo par *(m,n)* de números naturais, com $n \leq m$, faz corresponder a diferença *m – n .* Essa operação não está completamente definida: a diferença *m – n* só tem significado quando $n \leq m$.

#### *3.3.2.2 Histórico*

Os sinais das operações levaram muito tempo para chegar à forma como os conhecemos hoje. Nos túmulos dos antigos egípcios foram descobertos certos papiros de grande valor histórico e científico. Através destes papiros foi possível estudar o desenvolvimento da matemática pelos antigos egípcios. Um destes antigos documentos é o Papiro Rhind, cuja autoria é creditada ao calculista egípcio Ahmés e data de 2.000 a.C.(CENTURIÓN, 1994).

No papiro Rhind, para indicar a adição e a subtração, os egípcios utilizavam duas pernas de avestruz, uma par de pernas num sentido indicava a adição, enquanto que o outro par no sentido oposto indicava a subtração.

No século XVIII, na Itália, por exemplo, a adição era representada pela letra p, em cima da qual se colocava um til (~). Assim para indicar a adição de 10 e 4, escrevia-se:$10\tilde{p}4$. A letra p vinha da palavra latina *plus*, que significa mais.

Para indicar a subtração entre 10 e 4, utilizava-se a letra m, da palavra latina minus, com um til (~) em cima. Por exemplo: $10\tilde{m}4$.

Os símbolos “+” e “–” tal como conhecemos hoje, foram utilizados pela primeira vez pelo alemão Johann Widmann, em 1489, na “*MercantileArithmetic*”, para indicar excesso ou diferença em medidas.

Quem primeiro utilizou os símbolos “+” e “–” em expressões matemáticas foi o holandês Hoecke, em 1514.

Outra justificativa para a origem do símbolo “+” provém da palavra latina *et,* cujo significado é *e*, pois em alguns manuscritos indicava-se a adição pela palavra *et*.

### *3.3.3. Multiplicação de números naturais*

#### *3.3.3.1 Definição*

A *multiplicação* de dois números naturais, *m* e *n*, é designada por *m . n*e definida recursivamente do seguinte modo:

$$\begin{cases} m \cdot 0 = 0 \\ m \cdot (n+1) = m \cdot n + m \end{cases}$$

Como de costume, adotaremos a notação de justaposição para a multiplicação:

$$m \cdot n = mn \,.$$

Veja que na própria definição de multiplicação está o cerne da propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição, conforme o item *(ii)* do teorema abaixo.

Esta definição nos fornece a multiplicação de um número natural arbitrário *m* por 0.

#### 3.3.3.2 Propriedades da Multiplicação

##### 3.3.3.2.1 Teorema

Sejam *m*, *n* e *p* números naturais arbitrários. São verdadeiras as afirmações:

*(i)* $mn \in IN$ , isto é, a multiplicação de fato é uma operação em *IN*.
*(ii)* Existência do elemento neutro multiplicativo: $1 \cdot n = n \cdot 1 = n$;
*(iii)* Distributividade: $m(n + p) = mn + np$ e $(m + n)p = mp + np$ ;
*(iv)* Associatividade: $m(np) = (mn)p$ ;
*(v)* $mn = 0 \Rightarrow m = 0 \ \ ou \ \ n = 0$ ;
*(vi)* Comutatividade: $mn = nm$.

Demonstração: *novamente, usa-se o princípio de indução para demonstrar todos os seis itens.*

*(i)* Fixa-se o natural *m*e aplica-se o Princípio de Indução sobre *n.*
$1 \cdot m = m \in IN$ é verdadeira, pois tem-se $1 \cdot 0 = 0$, por definição e sob a hipótese de que $1 \cdot m = m$, obtém-se: $1 \cdot (m+1) = 1 \cdot m + 1 = m + 1$.

Suponha-se que para algum *p* $\in IN$ tem-se*m, p* $\in IN$ .Tem-se $m \cdot (p+1) = mp + m$ , por definição e sob a hipótese de que $1 \cdot m = m$ , obtém-se $mn \in IN$ .

*(ii)* Mostrar-se-á inicialmente que $n \cdot 1 = n$:

$$n \cdot 1 = n(0+1) \overset{*}{=} n \cdot 0 + n \overset{*}{=} 0 + n = n$$

Em * usou-se a definição de multiplicação na segunda e na terceira igualdades acima.

Mostrar-se agora, por indução em *n*, que $1 \cdot n = n$. Tem-se $1 \cdot 0 = 0$, por definição e sob a hipótese de que $1 \cdot n = n$, obtém-se: $1 \cdot (n+1) = 1 \cdot n + 1 = n + 1$.

*(iii)* Fixa-se os naturais *n* e *p* e aplica-se o Princípio de Indução sobre *m.*

Seja $A_{(n,p)} = \{m \in IN; m(n+p) = mn + mp\}$.

Sabe-se que $0 \in A_{(n,p)}$, pois $0 \cdot (n+p) = 0 \cdot n + 0 \cdot p$. Mostrar-se-á agora que se $k \in A_{(n,p)}$, então $s(k) \in A_{(n,p)}$.

$k(n+p) = kn + kp$, hipótese de indução.

Mostrar-se-á que $(k+1)(n+p) = (k+1)n + (k+1)p$.

Prova:

$$kn + kp + n + p = (kn + n) + (kp + p) = n(k+1) + p(k+1) = (k+1)(n+p)$$

Tendo sido usada a hipótese de indução, a propriedade comutativa da adição e a definição de multiplicação.

Logo, $s(k) \in A_{(n,p)}$.

Analogamente, mostrou-se que $(m+n)p = mp + np$.

*(iv)* Fixa-se os naturais *n* e *p* e apliquemos o Princípio de Indução sobre *m.*

Seja $A_{(n,p)} = \{m \in IN; m(np) = (mn)p\}$.

Sabe-se que $0 \in A_{(n,p)}$, pois $0 \cdot (np) = 0 = (0 \cdot n) \cdot p$. Mostrar-se-á agora que se $k \in A_{(n,p)}$, então $s(k) \in A_{(n,p)}$.

$k(np) = (kn)p$ , hipótese de indução.Mostrar-se-á que $(k+1)(np) = [(k+1)n]p$.

Prova: $(kn)p + np = k(np) + np = (k+1)n + (kn+n)p = [(k+1)n]p$

Tenso sido usadoa hipótese de indução, a propriedade da distributividade e a definição de multiplicação.

Logo, $s(k) \in A_{(n,p)}$ .

*(v)* Inicialmente, usaremos a proposição:

Sejam *m* e *n* números naturais arbitrários tais que $m + n = 0.\ Então\ m = n = 0$ .

Suponha-se que $n \neq 0$ . Então $n = s(n') = n'+1$, para certo $n' \in IN$ .

Tem-se: $0 = m + n = m + (n'+1) = (m + n') + 1 = s(m + n')$ , o que é absurdo, pois zero não é sucessor de nenhum número natural.

Logo, $n = 0$ e obtém-se $m = m + 0 = m + n = 0$ , como desejado.

Prova da Propriedade *(v)*:

Suponha $n \neq 0$ , isto é, $n = n'+1$, para certo $n' \in IN$ .

Considere $mn = 0$ e $n \neq 0$ , hipótese.

Assim, $mn = m \cdot (n'+1) = mn'+m \cdot 1 = mn'+m = 0$

Daí, pela proposição acima concluímos que $mn' = m = 0$

Logo, $m = 0$ .

Analogamente, se $mn = 0\ e\ n \neq 0$ , concluiremos que $m = 0$ .

*(vi)* Fixa-se o natural *m*arbitrariamente e aplica-se o Princípio de Indução sobre *n.*

Seja $A = \{n \in IN; mm = nm\}$.

Sabe-se que $0 \in A$, pois $m \cdot 0 = 0 \cdot m$ . Mostrar-se-á agora que se $k \in A$, então $s(k) \in A$.

De fato: $m \cdot s(k) = m \cdot (k+1) = mk + m = km + m = (k+1) \cdot m = s(k) \cdot m$.

Logo, $A = IN$. Como *m* e *n*números naturais arbitrários, obtém-se*(i).*

### *3.3.4 Divisão entre números naturais*

Como a divisão de um número natural por outro nem sempre é possível, expressa-se esta possibilidade através da relação de divisibilidade.

Quando não existir uma relação de divisibilidade entre dois números, pode ver que ainda será possível efetuar uma "divisão com resto pequeno", chamada de "divisão euclidiana".

#### *3.3.4.1 Definição*

A *divisão* entre dois números naturais, *m* e *n*, com $n \neq 0$, diz-se que m divide n, escrevendo $m/n$, quando existir um número natural *p* tal que $m = n \cdot p$. Nesse caso, pode-se dizer também que *n* é divisor ou um fator de *m* ou, ainda, que *m* é um múltiplo de *n.*(MONTEIRO, 1973).

## 3.4 Relação de ordem em *IN*

A relação de ordem em IN permitirá comparar os números naturais, formalizando a ideia intuitiva de que pretende captar o sentido intuitivo de relações como maior, menor, anterior, posterior, como por exemplo, que 0 é menor que 1, que 1 é menor que 2, que 2 é menor que 3 e assim por diante.

### *3.4.1 Definição*

Uma relação binária R em um conjunto não vazio A diz-se uma relação de ordem em A quando satisfizer as condições seguintes, para quaisquer $x,\ y,\ z \in A$:

*(i)* reflexividade: $xRx$ .

*(ii)* antissimetria: se $xRy$ e $yRx$, então $x = y$ .

*(iii)* transitividade: se $xRy$ e $yRz$, então $xRz$.

### *3.4.2 Definição*

Um conjunto não vazio A, munido de uma relação de ordem, diz-se um conjunto ordenado.

### *3.4.3 Definição*

Dados $m, n \in IN$, dizemos que $mRn$ se existir $p \in IN$ talque $n = m + p$ .

*R* é uma relação de ordem em *IN,* pois satisfaz as condições seguintes, para quaisquer $m,\ n,\ p \in IN$ :

*(i)* reflexividade: $mRm$.

*(ii)* antissimetria: se $mRn$ e $nRm$, então $m = n$ .

*(iii)* transitividade: se $mRn$ e $nRp$, então $mRp$ .

### *3.4.4 Definição*

Para $m, n \in IN$ , se $mRn$ , onde R é a relação da definição anterior, dizemos que *m* é menor do que ou igual a *n* e passaremos a escrever o símbolo $\leq$ no lugar de *R:* Assim, $m \leq n$ significará $mRn$ .

**Notação:**

1. Se $m \leq n$, mas $m \neq n$, escrevemos $m < n$ e dizemos que m é menor do que n.
2. Escreveremos $n \geq m$ como alternativa a $m \leq n$. Leremos n é maior do que ou igual a m.
3. Escreveremos $n > m$ como alternativa a $m < n$. Leremos n é maior do que m.

### *3.4.5 Proposição*

Para todo $n \in IN^*, n > 0,$ dizemos $1 = n \ ou \ 1 < n.$

Demonstração por indução:

Seja *X* o seguinte subconjunto de *IN*:

$X = \{n \in IN^*; n = 1 \ ou \ 1 < n\}.$

De fato, $1 \in X$ já que $1 = 1$. Além disso, se $n \in X$, temos duas alternativas:

*(i)* $n \neq 1$. Neste caso, $1 < n.$ já que $n \in X$. Deste modo, existe $p \in IN$ tal que $1 + p = n$. Sabemos que $s(n) = s(1 + p) = 1 + s(p)$, logo existe $p' = s(p) \in IN$ tal que $s(n) = 1 + s(p)$. Daí se deduz que $n \in X$ e $n \neq 1$, $s(n) > 1$, logo $s(n) \in X$.

*(ii)* $n = 1$. Neste caso, $s(1) = 1 + 1$ e já foi demonstrado acima que $s(1) \in X$.

Obviamente, se $n \in X$, $n = 1$ ou $n \neq 1$. Nos dois casos vimos que $s(n) \in X$.

Portanto, para todo natural $n \in X$, $s(n) \in X$. Como $1 \in X$, pelo Princípio de Indução $X = IN$.

### *3.4.6 Proposição - Lei da Tricotomia*

Para quaisquer $m, n \in IN$, temos que uma, e apenas uma, das relações seguintes ocorre:

*i)* $m < n;$

*ii)* $m = n;$

*iii)* $m > n.$

Demonstração: Provar-se-á inicialmente que duas dessas relações não podem ocorrem simultaneamente. Depois, mostrar-se-á que uma delas necessariamente ocorre.

Note que *(i)* e *(ii)*, bem como *(ii)* e *(iii)*, são incompatíveis, por definição. Quanto a*(i)* e *(iii)* ocorrendo simultaneamente, teríamos: $n = m + p$ e $m = n + p'$, com $p, p' \neq 0$, de onde obtemos:

$$n + 0 = n = (n + p') + p = n + (p + p').$$

Cancelando *n*, obtém-se $p + p' = 0$. Pela proposição (Sejam *m* e *n* números naturais arbitrários tais que $m + n = 0.$ *Então* $m = n = 0$ ). Segue que $p = p' = 0$, uma contradição.

Mostrar-se-á agora que uma das três relações acontece. Seja m um natural arbitrário e consideremos o conjunto $M = \{x \in IN; x = m \ ou \ \ x > m \ ou \ \ x < n\}$.

Prove-se por indução que $M = IN;$

Demonstração. Tem-se que $0 \in IN$, pois $0 = m$ ou $0 \neq m$. No último caso, pela proposição 2.4.1.4., $m > 0.$

Mostrar-se-á agora que a hipótese $k \in IN$ acarreta $k + 1 \in IN$. Considera-se três situações:

1. $k = m$. Neste caso, $k + 1 = m + 1$, de onde $k + 1 > m$ e, portanto, $k + 1 \in IN$.
2. $k > m$. Neste caso, existe $p \in IN^*$ tal que $k = m + p$. Então $k + 1 = (m + p) + 1$, de onde $k + 1 > m$ e, portanto, $k + 1 \in IN$.
3. $k < m$. Neste caso, existe $p \in IN^*$ tal que $m = k + p$. Como $p \neq 0$, então $p = p' + 1$, para um certo $p' \in IN$. Logo:

$$m = k + (p' + 1) = k + (1 + p') = (k + 1) + p'.$$

Se $p'=0$, então $m=k+1$ e $k+1\in IN$. Se $p'\neq 0$, então $m>k+1$ e $k+1\in IN$. Assim, pelo Princípio de Indução $M = IN$.

***3.4.7 Teorema Compatibilidade da relação de ordem com as operações em IN***

Sejam $a, b\ e\ c\in IN$, números naturais quaisquer. São válidas as seguintes implicações:

*i)* $a\leq b\Rightarrow a+c\leq b+c$;

*ii)* $a\leq b\Rightarrow ac\leq bc$;

Demonstração.

*(i)* $a\leq b\Leftrightarrow$ existe $p\in IN$ tal que $b=a+p$. Segue daí que:

$b+c=(a+p)+c=a+(p+c)=(a+c)+p$ de onde obtemos $b+c\geq a+c$.

*(ii)* $a\leq b\Leftrightarrow$ existe $p\in IN$ tal que $b=a+p$. Multiplicando ambos os membros da igualdade por c, pelas propriedades comutativa e distributiva da multiplicação temos:

$bc=cb=c(a+p)=ca+cp$ de onde obtemos $bc\geq ac$.

***3.4.8 Teorema Lei do Cancelamento da Multiplicação***

Sejam $a, b\ e\ c\in IN$ com $c\neq 0$, tais que $ac=bc$. Então $a=b$.

Demonstração. Se $a>b$, teríamos $ac>bc$ o que contaria a suposição de que $ac=bc$.

O caso $a<b$ é análogo. Logo, pela lei da tricotomia $a=b$.

***3.4.9 Teorema***

Sejam $a, b\in IN$. Então $a<b$ se, e somente se $a+1\leq b$.

Demonstração. Se $a < b$, teríamos $b = a + p$, para algum $p \in IN$. Então:

$$b = a + p = a + (q + 1) = a + (1 + q) = (a + 1) + q \Rightarrow b \geq a + 1.$$

A recíproca é imediata.

Sabe-se que $IN = \{0, \ s(0), \ s(s(0)), \ s(s(s(0))), \ldots\} = \{0, \ 1, \ 2, \ 3, \ \ldots\}$, isto é, *IN* é formado por 0 e pelos seus sucessivos sucessores.

Pela definição da relação de ordem, temos que $0 < 1 < 2 < 3 < \ldots$, ou seja, se $a \in IN$, então $a < s(a)$, pois $s(a) = a + 1$.

Além disso, não há números naturais compreendidos entre $a$ e $s(a)$, qualquer que seja $a \in IN$, pois $a < r < a + 1$, acarretaria, pelo teorema 2.4.1.8., $a + 1 \leq r < a + 1$, uma contradição.

Pode-se perceber que os axiomas de Peano e suas consequências realmente cumprem o objetivo de tornar rigoroso o conceito de número natural.

***3.4.10 Teorema Princípio da Boa Ordem***

Todo subconjunto não vazio de números naturais possui um menor elemento.

Demonstração. Seja *S* um tal subconjunto de *IN* e consideremos o conjunto $M = \{n \in IN; n \leq x, \forall x \in S\}$. Claro que $0 \in M$. Como $S \neq \phi$, tome $s \in S$. Então $s + 1 \notin M$, pois $s + 1$ não é menor ou igual a $s$. Assim, $M \neq IN$. Como $0 \in M$ e $M \neq IN$, deve existir $m \in M$ tal que $m + 1 \notin M$, caso contrário, pelo Princípio de Indução, $M = IN$.

Afirma-se que um tal *m* é o menor elemento de S, isto é, $m = \min S$.

Como $m \in M$ , então $m \leq x, \ \forall x \in S$ , do que resultaria $m+1 \in M$ , em contradição com a escolha de *m.*

Logo $m \in S$, conforme queríamos demonstrar.

Atenta-se para o fato de que o Princípio da Indução e o Princípio da Boa Ordem são equivalentes.

# 4 CONCLUSÃO

Conclui-se que o estudo dos números naturais é um fator de suma importância no ensino da Matemática, por está diretamente relacionado com o dia a dia do aluno, possibilitando a este estabelecer e relacionar habilidades matemáticas fundamentais, através das operações com os números naturais.

A formalização no conjunto dos números naturais através dos Axiomas de Peano, assumindo a existência de um conjunto satisfazendo tais axiomas e formalizando todas as propriedades, demonstrando-as através desses axiomas foi a consolidação de demonstrar rigorosamente o que já se sabia desde o Ensino Básico. A abordagem histórica e bibliográfica dada ao trabalho vem confirmar que o estudo sobre o conjunto dos números naturais é um fator decisivo no ensino da Matemática, por está diretamente relacionado com o dia a dia do aluno, possibilitando a este estabelecer e relacionar habilidades matemáticas fundamentais, através das operações com os números naturais.

## 5 REFERÊNCIAS

BARASUOL, F. F. A matemática da pré-história ao antigo Egito.**UNI revista**, v. 1, n° 2, 2006.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2ª ed.. São Paulo: Edgar. Blucher, 1996.

CASTRO, Francisco Mendes de Oliveira - **A Matemática no Brasil**. 2 ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 1999.

CENTURIÓN, M. **Números e operações**. Conteúdo e metodologia da Matemática. São Paulo: Editora Scipione, 1994.

CONCEIÇÃO, C. R. da. **As Olimpíadas Brasileiras de Matemática nas Escolas Públicas e suas Possíveis Contribuições para o Processo de Ensino-Aprendizagem de Matemática.** 2014. 56f. Monografia. (Graduação em Matemática). São Gonçalo, Rio de Janeiro: Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2014.

COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é matemática?** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2000.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática**: elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte; Autêntica, 2001.

FERREIRA, J.**A construção dos números**. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

FIORENTINI, D. **Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil.** São Paulo: Zietetiké, v. 3, n. 4, 1995.

IMENES, L. M. **A numeração Indo-Arábica**. 7 ed. São Paulo: Editora Scipione, p. 34, 1995.**(**Coleção Vivendo a Matemática)

LIMA, E.L. **Curso de Análise**. Rio de Janeiro: IMPA, v. 1, 1992 (Projeto Euclides).

MACIEL, D. M. **Mudança no ensino da Matemática a partir do ENEM:** uma análise em livros didáticos do Ensino Médio. 2013. 47f. Monografia (Graduação em Matemática). Pará de Minas: Faculdade de Pará de Minas, 2013.

MIGUEL, A. **História, filosofia e sociologia da educação matemática na formação do professor:** um programa de pesquisa. Educação e Pesquisa, São Paulo, v. 31, n. 1, jan./abr., p. 137-152, 2005.

MONTEIRO, L. H. J. **Iniciação as estruturas algébricas**, 5 ed. São Paulo: G.E.E.M.1973.

OLIVEIRA, J. S. B. de et al. **Histórias da Matemática:** contribuições e descobertas para o ensino-aprendizagem de Matemática. Pará: UEPA, 2009.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da Geometria:** uma visão histórica**.** Dissertação de Mestrado em Educação.Campinas, SP: Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas,1989.