

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC  
CENTRO DE MATEMÁTICA COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

GIL DO PRADO LIMA

GEOMETRIA ANALÍTICA NO ESPAÇO: PROJEÇÕES  
DA ESFERA



Universidade Federal do ABC

Santo André-SP

2014

GIL DO PRADO LIMA

GEOMETRIA ANALÍTICA NO ESPAÇO: PROJEÇÕES  
DA ESFERA

Dissertação apresentada no Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) na Universidade Federal do ABC, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Sinuê Dayan Barbero Lodovici

Santo André-SP

2014

## Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me acompanhado em todos os momentos da minha vida me ajudando a trilhar por caminhos de forma segura e consciente.

Acredito na matemática como uma ciência que não deve apenas ser estudada e sim vivida, uma ciência que parte de processos indutivos e justamente por isso pode ser construída a qualquer tempo e qualquer lugar, necessitando apenas de reflexão e extrema paixão, justamente por isso a necessidade de aprofundar os conhecimentos dos profissionais desta área propiciando aperfeiçoamento e desenvolvimento.

Gostaria de agradecer a SBM juntamente com a CAPES e a UFABC, por ter concebido esta idéia brilhante e também por concretizá-la, certamente este é um importante passo rumo a um futuro promissor.

Aos professores: João Motta, Rodney Bassanezi, André Fonseca, Armando Caputi, Rafael Grisi, Antônio Faleiros, Márcio Fabiano e Sinuê Lodovici que ministraram aulas durante o curso de forma esplêndida com dedicação, esforço e competência sendo vistos como exemplos de profissionais. A todos companheiros de turma que demonstraram forte espírito de união e mutuamente nos ajudamos.

Em especial meus agradecimentos ao professor Sinuê Lodovici, cujo qual orientou este trabalho de forma objetiva e determinada, me levando

a várias reflexões sobre o tema de estudo através questionamentos eficientes e pertinentes, não poupou esforços para concretizar este estudo dispondo de todos recursos possíveis para finalizá-lo.

Aos professores Márcio Fabiano e Fernando Manfio que participaram de forma brilhante da banca examinadora, contribuindo para o desenvolvimento e aprofundamento das idéias contidas neste trabalho.

Ao meu grande amigo Erik David que divide comigo a mesma paixão pela matemática, que tenho o prazer de conviver antes mesmo das aulas do PROFMAT cujo qual também é aluno e que me ensinou que conhecimento não pode ser dividido apenas multiplicado.

A minha querida esposa Marcela Ogata que me apoiou incondicionalmente em todos os sentidos, sem a qual não teria chegado até aqui.

Ao apoio da minha família, Roseli do Prado minha mãe, Givaldo Romão meu pai e Givaldo Junior meu irmão, que sempre acreditaram em mim mesmo quando as condições não eram propícias.

Por fim agradeço a todos que contribuíram de forma direta ou indireta pra meu crescimento pessoal e profissional.

## Resumo

O presente estudo nasce da necessidade de uma abordagem da geometria analítica no espaço tridimensional no ensino médio.

Observando livros e materiais de apoio de geometria, nota-se a ausência de um tratamento analítico da geometria espacial. Usualmente, na maioria dos textos percebe-se apenas uma breve análise de problemas geométricos espaciais do ponto de vista da geometria clássica (no volume de sólidos). Assim sendo, pode ser útil ao estudante uma introdução, através de uma visão algébrica, da geometria tridimensional.

Pensando nisto, este trabalho procura despertar o interesse do leitor para a geometria analítica do espaço através de um problema de interesse de muitos: a planificação da esfera e suas aplicações à cartografia.

**Palavras-chave:** geometria analítica espacial, projeções, planificações, vetores, meridianos, paralelos, esfera, plano.

## Abstract

The subject of this work is an attempt to fulfil some of the needs of high school students on analytic geometry in the three dimensional space.

By observing geometry books and supporting materials, one can notice that most references lack an approach to spatial analytic geometry. Usually, most texts only present a brief approach to spacial geometry from a classic geometry's point of view (on the volume of solids). So, it might be useful for the student an introduction of the spatial geometry from an algebraic point of view.

Thus, this work tries to awake the interest of the reader about the spatial analytic geometry by presenting a problem which catches the interests of many: the planification of the sphere and its applications to cartography.

**Key-words:** spatial analytic geometry, projections, planification, vectors, meridians, parallels, sphere, plane.

---

---

# SUMÁRIO

---

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Coordenadas no plano e vetores</b>                       | <b>13</b> |
| 1.1      | Coordenadas Cartesianas . . . . .                           | 13        |
| 1.2      | Coordenadas Polares . . . . .                               | 16        |
| 1.3      | Coordenadas Cartesianas e Coordenadas Polares . . . . .     | 18        |
| 1.4      | Vetores . . . . .   | 21        |
| 1.5      | Vetores Equipolentes . . . . .                              | 22        |
| 1.6      | Operações com Vetores . . . . .                             | 24        |
| 1.6.1    | Adição de Vetores . . . . .                                 | 24        |
| 1.6.2    | Regra do Paralelogramo . . . . .                            | 25        |
| 1.6.3    | Subtração de vetores . . . . .                              | 25        |
| 1.6.4    | Soma de vetor e ponto . . . . .                             | 27        |
| 1.6.5    | Propriedades de Operações com Vetores . . . . .             | 28        |
| 1.7      | Combinação Linear . . . . .                                 | 28        |
| 1.8      | Vetores linearmente dependentes e linearmente independentes | 29        |
| 1.9      | Produto Escalar . . . . .                                   | 30        |
| 1.9.1    | Propriedades do Produto Escalar . . . . .                   | 32        |
| 1.10     | Produto Vetorial . . . . .                                  | 32        |
| 1.10.1   | Propriedades do Produto Vetorial . . . . .                  | 34        |

---

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>2</b> | <b>Retas e Planos no Espaço</b>   | <b>35</b> |
| 2.0.2    | Retas no Espaço . . . . .   | 35        |
| 2.0.3    | Posições relativas entre retas no espaço . . . . .                      | 37        |
| 2.0.4    | Distâncias relativas a pontos, retas e planos . . . . .                 | 42        |
| <b>3</b> | <b>Cartografia</b>  | <b>54</b> |
| 3.1      | Conceitos Cartográficos . . . . .                                       | 55        |
| 3.1.1    | Coordenadas através de Longitude e Latitude . . . . .                   | 57        |
| 3.1.2    | Longitude, latitude e coordenadas cartesianas tridimensionais . . . . . | 59        |
| 3.2      | Planificações da esfera . . . . .                                       | 62        |
| 3.2.1    | Projeção cilíndrica . . . . .   | 63        |
| 3.2.2    | Projeção cônica . . . . .   | 66        |
| 3.2.3    | Projeções azimutais . . . . .   | 68        |
| <b>4</b> | <b>Projeções da Esfera</b>  | <b>74</b> |
| 4.1      | Convenções . . . . .  | 74        |
| 4.2      | Projeção Estereográfica . . . . .                                       | 75        |
| 4.2.1    | Projeção estereográfica em coordenadas cartesianas . . . . .            | 76        |
| 4.2.2    | Projeção estereográfica de meridianos e paralelos . . . . .             | 78        |
| 4.2.3    | Atividades Propostas . . . . .  | 82        |
| 4.3      | Projeção Cilíndrica . . . . .   | 87        |
| 4.3.1    | Projeção da esfera no cilindro . . . . .                                | 88        |
| 4.3.2    | Planificação do cilindro e Projeção cilíndrica no plano . . . . .       | 89        |
| 4.3.3    | Projeção cilíndrica de meridianos e paralelos . . . . .                 | 93        |
| 4.3.4    | Atividades Propostas . . . . .  | 98        |



---

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 4.4   | Projeção Ortogonal . . . . .                            | 102 |
| 4.4.1 | Projeção ortogonal em coordenadas cartesianas . . . . . | 103 |
| 4.4.2 | Meridianos e paralelos na projeção ortogonal . . . . .  | 105 |
| 4.4.3 | Atividades Propostas . . . . .                          | 107 |
| 4.5   | Projeção Gnomônica . . . . .                            | 110 |
| 4.5.1 | Projeção gnomônica em coordenadas cartesianas . . . . . | 111 |
| 4.5.2 | Projeção gnomônica de meridianos e paralelos . . . . .  | 112 |
| 4.5.3 | Atividades Propostas . . . . .                          | 115 |
| 4.6   | Projeção cônica . . . . .                               | 118 |
| 4.6.1 | Planificando o cone . . . . .                           | 122 |
| 4.6.2 | Projeção cônica de paralelos e meridianos . . . . .     | 127 |
| 4.6.3 | Atividades Propostas . . . . .                          | 131 |

## Notação

|                           |  |
|---------------------------|--|
| $\exists$                 | : <i>existe</i>  |
| $\forall$                 | : <i>qualquer que seja</i> ou <i>para todo(s)</i>  |
| $\Rightarrow$             | : <i>implica</i>   |
| $\Leftrightarrow$         | : <i>se, e somente se</i>  |
| $\therefore$              | : <i>portanto</i>  |
| $:=$                      | : <i>definição</i> (o termo à esquerda de $:=$ é definido pelo termo ou expressão à direita) |
| i.e.                      | : <i>id est</i> (em português, <i>isto é</i> )   |
| $\square$                 | : <i>indica o final de uma demonstração</i>  |
| $\overleftrightarrow{AB}$ | : <i>reta passando pelos pontos A e B</i>  |
| $AB$                      | : <i>segmento de reta ligando os pontos A e B</i>  |
| $\overline{AB}$           | : <i>segmento orientado de reta ligando os pontos A e B</i>                                  |
| $\overrightarrow{AB}$     | : <i>vetor determinado pelos pontos A e B</i>  |
| $\vec{v}$                 | : <i>vetor v</i>   |
| $\vec{v} \cdot \vec{u}$   | : <i>produto escalar entre os vetores u e v</i>  |
| $\ \overline{AB}\ $       | : <i>comprimento do segmento <math>\overline{AB}</math></i>                                  |
| $\ \vec{v}\ $             | : <i>comprimento do vetor v</i>  |
| $\ \overrightarrow{AB}\ $ | : <i>comprimento do vetor <math>\overrightarrow{AB}</math></i>                               |
| $ A $                     | : <i>determinante da matriz A</i>  |
| $\overleftrightarrow{R}$  | : <i>reta R</i>  |
| $\overrightarrow{P}$      | : <i>semi-reta P</i>   |

---

---

# INTRODUÇÃO

---

Buscamos abordar a geometria analítica no espaço tridimensional como uma poderosa ferramenta para uma melhor compreensão de planos, cones, esferas e quaisquer outros elementos provenientes destes temas através da visão algébrica.

Iniciamos este trabalho com o conceito referente a coordenadas e trabalhamos com os diferentes sistemas e as diferentes formas de se interpretar pontos em um dado plano, analisamos também o espaço tridimensional e sua representação de pontos, posteriormente exploramos a idéia de vetores e suas operações passando por dependência e independência linear além de produto vetorial e escalar.

Na seqüência utilizamos o estudo de vetores para construção de retas e planos ambos no espaço, analisamos as posições relativas a cada um e suas peculiaridades, observamos as propriedades inerentes a cada par de retas e planos, buscamos e definimos cada interseção proposta, além de ressaltarmos as principais características de cada plano e sua respectiva construção.

Partindo do conteúdo já abordado apresentamos o conceito de cartografia traçamos um panorama a respeito de sua importância e seu desenvolvimento ao longo da história, evidenciamos as diferentes maneiras de executar - la além das peculiaridades e diferenças decorrentes de

cada uma.

Encerramos este estudo com uma abordagem prática do conceito cartográfico, definimos esferas, planos e retas de interseção projetamos pontos, calculamos distâncias e evidenciamos as alterações na projeção de meridianos e paralelos, exemplificamos cada tipo de projeção e suas peculiaridades através de exercícios resolvidos e uma abordagem intuitiva.

Por fim a criação deste trabalho visa despertar o interesse do leitor para este campo tão vasto e repleto de aplicações que é a geometria analítica, abrindo precedentes para exploração deste tema de diversas outras formas suprimindo quaisquer outros propósitos.

# COORDENADAS NO PLANO E VETORES

---

## 1.1 Coordenadas Cartesianas

Iniciamos este capítulo com o estudo de ferramentas que nos proporcionam compreender um importante conceito matemático à geometria analítica. A geometria analítica é o estudo de elementos geométricos através de métodos algébricos. Ela é vista como a união da geometria com a álgebra e utiliza para isso um sistema de coordenadas previamente estabelecido, um dos sistemas de coordenadas muito utilizados neste desenvolvimento é o sistema de coordenadas cartesianas.

O sistema de coordenadas cartesianas foi desenvolvido pelo matemático francês René Descartes, este sistema procura identificar pontos em um determinado plano através de eixos perpendiculares entre si, abordaremos neste capítulo o sistema de duas dimensões e posteriormente o de três dimensões.

### **Sistema cartesiano em duas dimensões**

Neste sistema temos o eixo  $x$  chamado de eixo das abscissas e o eixo  $y$  chamado de eixo das ordenadas. A junção da abscissa do ponto e de sua ordenada formam as coordenadas do ponto, o eixo  $x$  é perpendicular ao eixo  $y$  e ambos eixos são divididos em intervalos igualmente espaçados,

o ponto de intersecção entre os eixos é chamado de origem do sistema e pode ser representado por  $O = (0, 0)$ , convencionou-se que as coordenadas dos pontos seriam dadas por  $(x_0, y_0)$ , onde  $x_0$  representa a abcissa do ponto e  $y_0$  sua ordenada.

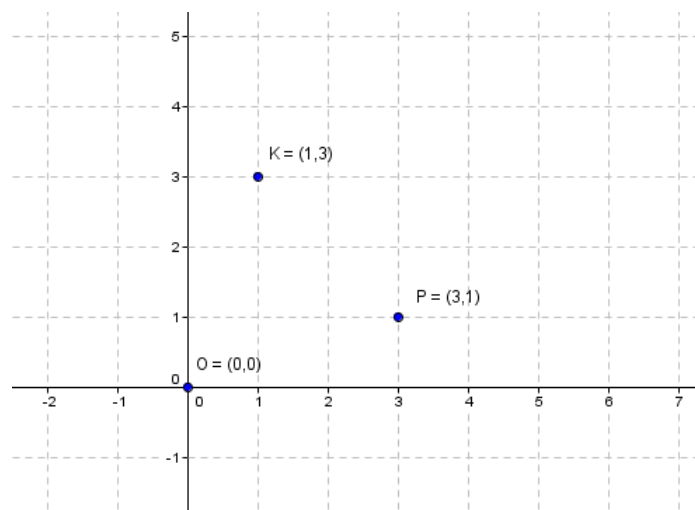


Figura 1.1: Plano cartesiano

A partir do ponto  $O = (0, 0)$  define-se o sentido dos eixos. As abcissas e ordenadas em sentido contrário recebem o sinal negativo. Logo podemos dividir o plano cartesiano em quatro quadrantes:

- I quadrante  $\rightarrow$  pontos na forma  $(x_0, y_0)$ .
- II quadrante  $\rightarrow$  pontos na forma  $(-x_0, y_0)$ .
- III quadrante  $\rightarrow$  pontos na forma  $(-x_0, -y_0)$ .
- IV quadrante  $\rightarrow$  pontos na forma  $(x_0, -y_0)$ .

Sejam dois pontos  $P$  e  $Q$  dados no plano cartesiano a cada par de pontos no plano corresponde um número real denominado distância en-

tre os pontos, utilizaremos a notação  $d(P, Q)$  para representar no plano a distância entre os pontos  $P$  e  $Q$ , definimos então algumas propriedades.

- $d(P, Q) \geq 0$ .
- $d(P, Q) = 0 \iff P = Q$ .
- $d(P, Q) = d(Q, P)$ .
- $d(P, Q) < d(P, K) + d(K, Q)$  (desigualdade triangular) onde  $P, K$  e  $Q$  não são colineares.
- $d(P, Q) = d(P, K) + d(K, Q) \iff$  onde  $P, Q$  e  $K$  são colineares e  $K$  está entre  $P$  e  $Q$ .

### Sistema cartesiano em três dimensões

Similar ao sistema cartesiano de duas dimensões, o sistema cartesiano de três dimensões mantém todas as propriedades já mencionadas, porém temos um acréscimo de um eixo, ou seja, a representação de cada ponto no sistema tridimensional é dada por  $P = (x_0, y_0, z_0)$ , onde temos  $x$  como eixo das abcissas,  $y$  como eixo das ordenadas e  $z$  como eixo das cotas.

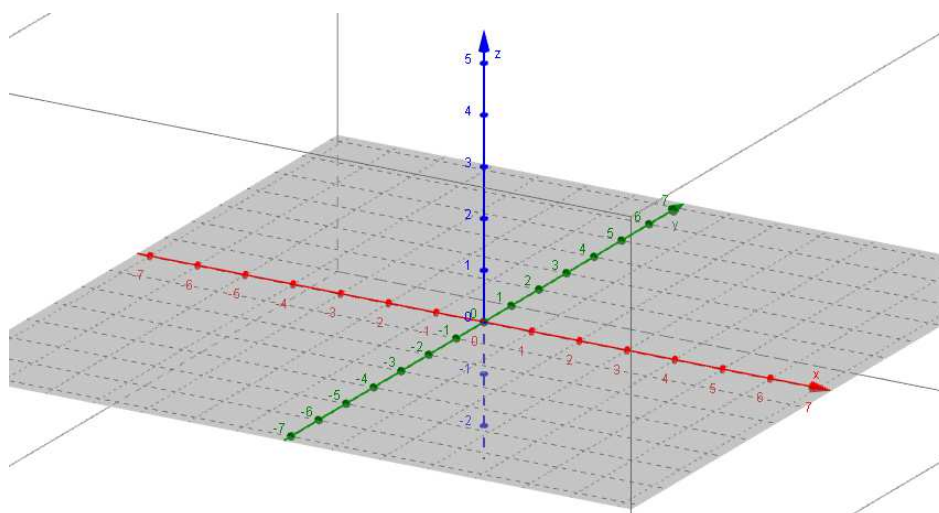


Figura 1.2: Plano em três dimensões

Como podemos ver os eixo  $x$ ,  $y$  e  $z$  são mutuamente perpendiculares e a interseção dos eixos resulta no ponto  $O = (0, 0, 0)$  que é tido como a origem do sistema.

## 1.2 Coordenadas Polares

Além das coordenadas cartesianas existem também outras formas de identificar pontos no plano, veremos agora uma delas as **coordenadas polares**.

No sistema de coordenadas polares é definido primeiramente a origem  $O$  e o eixo polar, onde o eixo polar é uma semi-reta de origem  $O$ . Adotamos também uma unidade de medida que expressa a distância de qualquer ponto  $P$  a origem.

Logo as coordenadas polares são dadas no seguinte formato  $P = (r, \theta)$ , onde  $r$  indica a distância de  $P$  a origem do sistema  $O$  e  $\theta$  é o ângulo que o segmento  $\overline{OP}$  faz com o eixo polar.



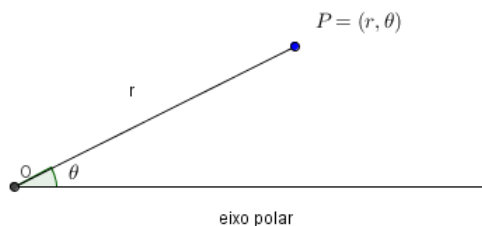


Figura 1.3: Sistema de Coordenadas Polares

Convencionou-se que a medida do ângulo  $\theta$  tomada no sentido anti-horário em relação ao eixo polar é positiva, e negativa se tomada no sentido horário, portanto podemos ter duas coordenadas polares que representam o mesmo ponto.

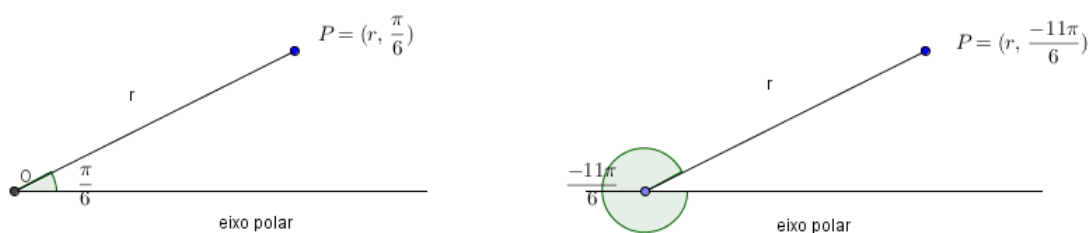


Figura 1.4: Diferentes representações polares de um mesmo ponto

Sendo  $r$  a medida da distância à origem de nossa coordenada polar é aceitável que  $r$  é sempre maior que zero, porém podemos ter também

coordenadas polares onde  $r < 0$ , isto significa, que tomamos o raio em sentido oposto a semi-reta que contém o ponto com raio positivo, veja:

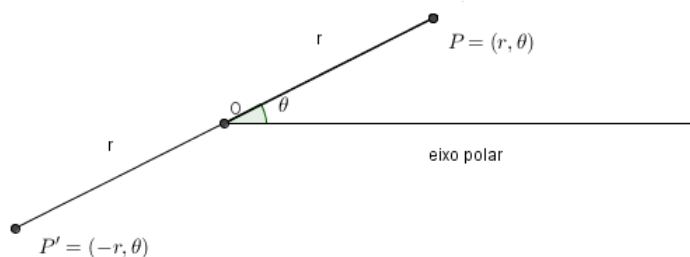


Figura 1.5: representação polar onde o raio é negativo

### 1.3 Coordenadas Cartesianas e Coordenadas Polares

Podemos facilmente transpor coordenadas polares em coordenada cartesianas e vice-versa, admitindo que temos dois sistemas (cartesiano e polar), onde a origem de ambos sistemas é a mesma e ambos utilizam a mesma unidade de medida, vamos definir a relação que existe entre o ponto  $P = (x_0, y_0)$  em coordenadas cartesianas para o ponto  $P = (r, \theta)$  em coordenadas polares.

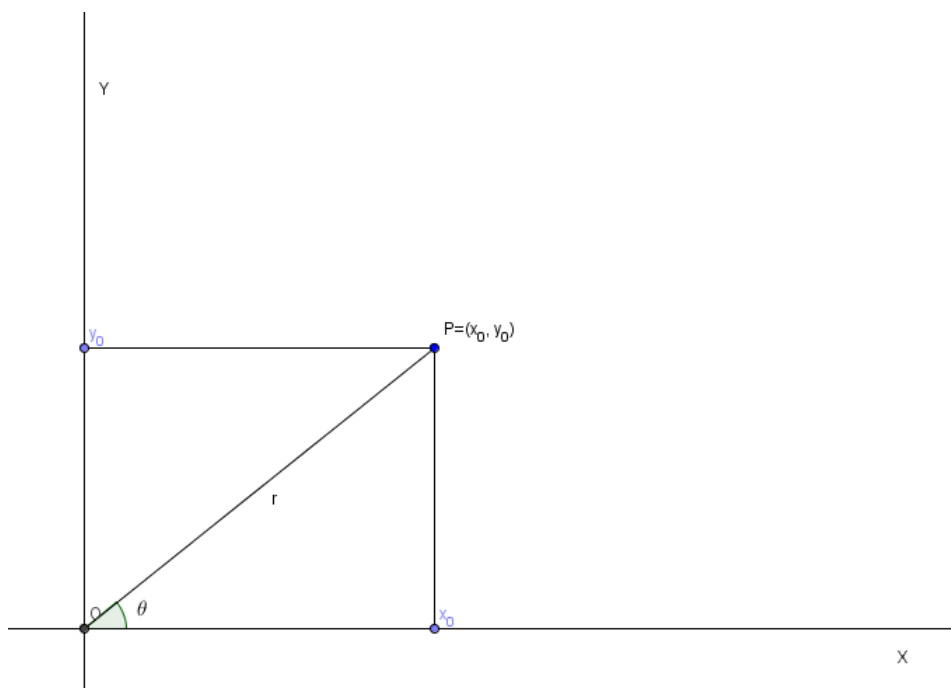


Figura 1.6: relação entre sistema cartesiano e polar

Logo temos as relações entre as coordenadas polares e cartesianas, onde podemos obter também  $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ .

$$\cos(\theta) = \frac{x_0}{r} \iff x_0 = r \cdot \cos(\theta)$$

$$\text{sen}(\theta) = \frac{y_0}{r} \iff y_0 = r \cdot \text{sen}(\theta).$$

Seja o ponto  $P = (\sqrt{3}, 1)$  e o ponto  $Q = (2, \frac{\pi}{4})$ , vamos converter o ponto  $P$  para coordenadas polares e o ponto  $Q$  para coordenadas cartesianas.

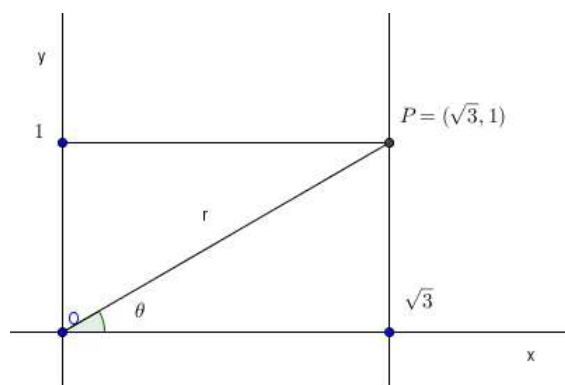


Figura 1.7: coordenada cartesiana para coordenada polar

$$x_0 = r \cdot \cos(\theta) \iff (\sqrt{3} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1}) \cdot \cos(\theta) \iff \sqrt{3} = 2 \cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \theta = \text{Arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \iff \theta = \frac{\pi}{6}$$

Logo podemos concluir que o representante do ponto  $P = (\sqrt{3}, 1)$  em coordenadas cartesianas é o ponto  $P = (2, \frac{\pi}{6})$  em coordenadas polares.

Faremos agora a conversão do ponto  $Q$  para coordenadas cartesianas.

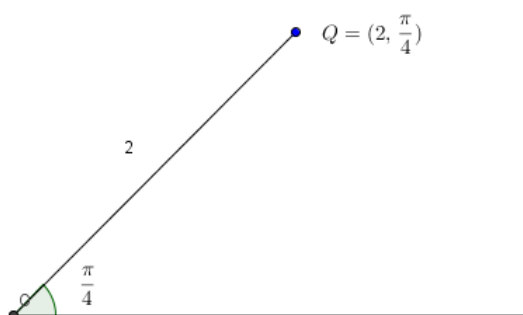


Figura 1.8: coordenada polar para coordenada cartesiana

$$x_0 = r.\cos(\theta) \iff x_0 = 2.\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

$$y_0 = r.\sen(\theta) \iff y_0 = 2.\sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

Concluimos que o ponto  $P = (2, \frac{\pi}{4})$  em coordenadas polares corresponde ao ponto  $P = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$  em coordenadas cartesianas.

## 1.4 Vetores

Uma ferramenta que nos dará suporte para compreender vários aspectos da geometria analítica consiste no estudo de vetores.

Um vetor é definido como um segmento orientado dotado de direção, sentido e comprimento. Vetores são frequentemente representados por uma seta ou segmento de reta orientado, o comprimento da seta representa o tamanho do vetor e a seta aponta a direção do vetor.

Seja dois pontos quaisquer  $A$  e  $B$  em um espaço vetorial  $V^n$ , ou seja, um espaço vetorial de  $n$  dimensões, o segmento orientado partindo do ponto  $A$  ao ponto  $B$  denomina-se vetor  $\overrightarrow{AB}$ , ou seja, tomando um espaço  $V^2$  se  $A = (x_1, y_1)$  e  $B = (x_2, y_2)$  logo  $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ .

Observe que podemos utilizar qualquer base vetorial para a construção de vetores, no decorrer de nosso estudo abordaremos primordialmente o espaço  $V^2$  e o espaço  $V^3$ , ou seja, sendo  $A = (x_0, y_0, z_0)$  e  $B = (x_1, y_1, z_1)$  o vetor  $\overrightarrow{AB}$  em  $V^3$  será representado por  $\overrightarrow{AB} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ .

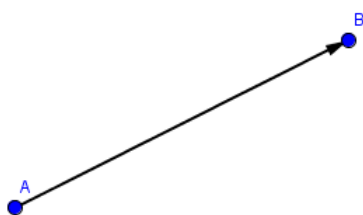


Figura 1.9: vetor AB

**Vetor Nulo**, é o vetor que tem como representante um segmento orientado nulo, e pode ser indicado por  $\vec{0}$ .

## 1.5 Vetores Equipolentes

Dizemos que dois vetores são equipolentes se ambos são nulos ou possuem mesmo sentido, direção e comprimento, ou seja, tomando um espaço vetorial  $V^2$ , tal que, vetor  $\overrightarrow{AB}$  onde  $A = (x_1, y_1)$  e  $B = (x_2, y_2)$ , e o vetor  $\overrightarrow{CD}$  onde  $C = (x_3, y_3)$  e  $D = (x_4, y_4)$  se  $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$  e  $y_2 - y_1 = y_4 - y_3$  podemos dizer que existe uma relação de equipolência entre os vetores  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  representada por  $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ .

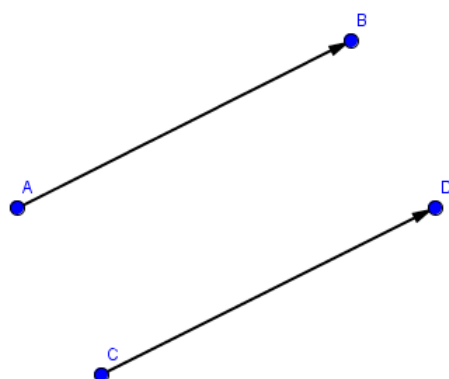


Figura 1.10: vetor AB equipolente ao vetor CD

**Exemplo 1.1** Dado o vetor  $\vec{u} = (3, 2)$  contido no espaço  $V^2$  e o ponto  $P = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ , determine o ponto  $P'$  que satisfaz  $\vec{u} \sim \overrightarrow{PP'}$ .

$$\text{Seja } P' = (x, y)$$

$$\overrightarrow{PP'} = (x, y) - (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$$

$$\overrightarrow{PP'} = (x - \frac{3}{2}, y - \frac{1}{2})$$

$$(x - \frac{3}{2}, y - \frac{1}{2}) = (3, 2)$$

$$\text{logo } x - \frac{3}{2} = 3 \quad e \quad y - \frac{1}{2} = 2$$

$$\text{portanto : } P' = (\frac{9}{2}, \frac{5}{2}) \quad \text{onde } \overrightarrow{PP'} \sim \vec{u}$$

## 1.6 Operações com Vetores

### 1.6.1 Adição de Vetores

Dado um móvel que desloca-se de por três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  em um determinado plano, partindo de  $A$  até  $B$  e posteriormente de  $B$  até  $C$ , logo podemos representar a trajetória deste móvel por:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

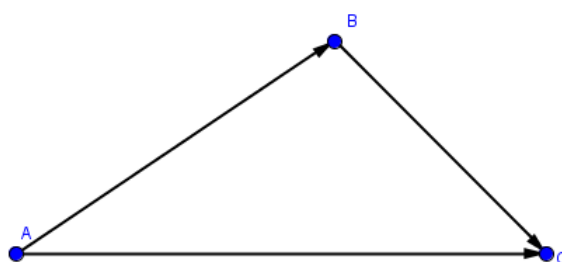


Figura 1.11: soma do vetor  $AB$  com o vetor  $BC$

Analisando esta operação no plano tridimensional sendo dois vetores quaisquer onde  $\overrightarrow{AB} = (x_1, y_1, z_1)$  e  $\overrightarrow{BC} = (x_2, y_2, z_2)$ , podemos considerar a soma destes dois vetores como  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ , onde a soma de  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{BC}$  também pode ser chamada de resultante entre  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{BC}$ .



### 1.6.2 Regra do Paralelogramo

Seja dois vetores não paralelos  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , contidos no espaço onde  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ , e dado um ponto P qualquer do espaço, tomamos dois vetores equipolentes a  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  onde  $\vec{u} = \overrightarrow{PT}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{PR}$ , se PRST é um paralelogramo onde S é um ponto contido no plano o vetor  $\overrightarrow{PS}$  é a resultante de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

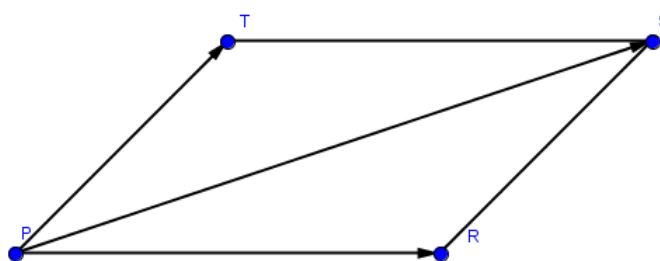


Figura 1.12: Paralelogramo PRST

### 1.6.3 Subtração de vetores

A subtração de vetores também pode ser tratada como uma soma, para isso basta lembrarmos que a subtração vetorial é apenas a soma de um vetor com o simétrico de outro.

Seja o vetor  $\overrightarrow{AB} = (x_1, x_2)$  e o vetor  $\overrightarrow{CD} = (y_1, y_2)$  logo, o vetor simétrico a  $\overrightarrow{CD}$  é igual a  $-\overrightarrow{CD} = (-y_1, -y_2)$ , portanto:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = (x_1, x_2) + (-y_1, -y_2)$$

$$\overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{CD}) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2)$$

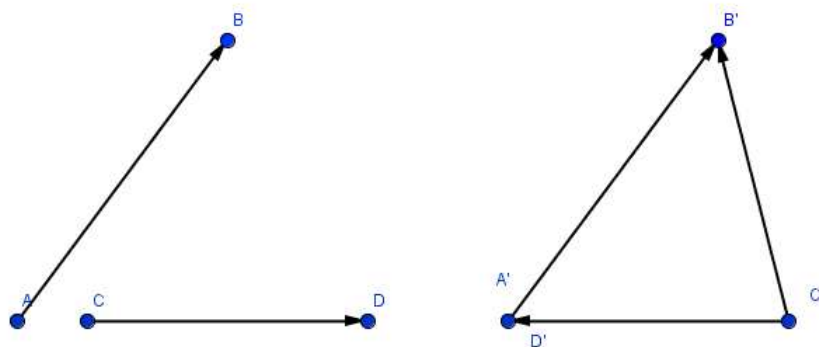


Figura 1.13: subtração do vetor AB com o vetor CD

Como podemos ver na figura 1.13 acima existe uma relação de equipolência entre os vetores  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{A'B'}$  e tratando-se de uma subtração vetorial entre  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  temos:

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'} \quad e \quad \overrightarrow{CD} \sim -\overrightarrow{C'D'}$$

logo:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{C'D'}$$

portanto:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{C'B'}$$

**Exemplo 1.2** Determine os vetores que são construídos a partir de operações entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  sendo  $\vec{u} = (3, 8)$  e  $\vec{v} = (2, 5)$

$$\vec{\alpha} = 2\vec{u} + \vec{v}$$

$$\vec{\alpha} = 2(3, 8) + (2, 5)$$

$$\vec{\alpha} = (6, 16) + (2, 5)$$

$$\vec{\alpha} = (8, 19)$$

$$\vec{\beta} = 3\vec{u} - \vec{v}$$

$$\vec{\beta} = 3(3, 8) - (2, 5)$$

$$\vec{\beta} = (9, 24) - (2, 5)$$

$$\vec{\beta} = (7, 19)$$

#### 1.6.4 Soma de vetor e ponto

Como já vimos a soma de vetores resulta em um vetor. Já a soma de um vetor com um ponto nos dá um ponto.

Dado um ponto  $P$  e um vetor  $\vec{u}$ , e um ponto  $Q$  onde o segmento orientado  $PQ$  é equipolente ao vetor  $\vec{u}$ , é chamada soma de  $P$  com  $\vec{u}$  o ponto  $Q$ .

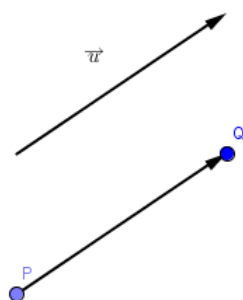


Figura 1.14: soma do ponto  $P$  com o vetor  $u$

$$P + \vec{u} = Q \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \sim \vec{u}$$

Logo podemos entender  $P + \vec{u}$  como o resultado do deslocamento

do ponto P ao longo de um representante do vetor  $\vec{u}$ , onde o ponto P está situado inicialmente na origem do representante do vetor  $\vec{u}$ .

### 1.6.5 Propriedades de Operações com Vetores

Algumas propriedades das operações com vetores satisfazem às propriedades aritméticas, o que facilita a transposição de problemas algébricos em problemas geométricos, seguem as propriedades onde os vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , estão contidos em um espaço vetorial  $V^n$ :

- **Comutatividade** :  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- **Associatividade** :  $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
- **Existência de elemento neutro aditivo** : o vetor  $\vec{0}$  (ou vetor nulo) é tal que  $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
- **Existência de inversos aditivos** : para cada vetor  $\vec{u}$  existe um único vetor, que designamos  $-\vec{u}$ , o simétrico aditivo de  $\vec{u}$ , tal que  $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

## 1.7 Combinação Linear

Seja a expressão  $\vec{u} = \vec{V}_1 a_1 + \vec{V}_2 a_2 + \dots + \vec{V}_n a_n$ , se existem escalares  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  que verifiquem a igualdade então podemos dizer que  $\vec{u}$  é combinação linear dos vetores  $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_n$ .

Sejam os vetores em  $V^2$ ,  $\vec{u} = (x_1, y_1)$ ,  $\vec{v} = (x_2, y_2)$  e  $\vec{w} = (x_3, y_3)$ , e os escalares  $a_1$  e  $a_2$  se existir  $(x_1, y_1) = a_1(x_2, y_2) + a_2(x_3, y_3)$  teremos o sistema:

$$\begin{cases} a_1x_2 + a_2x_3 = x_1 \\ a_1y_2 + a_2y_3 = y_1 \end{cases}$$

Se o sistema acima apresentar solução única, então podemos dizer que o vetor  $\vec{u}$  pode ser escrito como **combinação linear** dos vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ .

## 1.8 Vetores linearmente dependentes e linearmente independentes

- Um vetor  $\vec{u}$  é **linearmente dependente** apenas se for nulo, ou seja,  $\vec{u} = \vec{0}$ , caso contrário é **linearmente independente** onde  $\vec{u} \neq \vec{0}$ .
- Sejam dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são paralelos então eles são **linearmente dependentes**, se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não são paralelos então são **linearmente independentes**.
- Sejam três vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  se ambos vetores são paralelos a um plano  $\pi$  então  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são **linearmente dependentes**, caso contrário são **linearmente independentes**.
- Quaisquer quatro ou mais vetores são sempre **linearmente dependentes**.

Seja qualquer expressão da forma  $a_1\vec{V}_1 + a_2\vec{V}_2 + \dots + a_n\vec{V}_n = \vec{0}$  onde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  são escalares, se a expressão se verifica somente para todos escalares nulos então os vetores são **linearmente independentes**, caso

qualquer escalar for diferente de zero então os vetores são **linearmente dependentes**.

Dada uma sequência de vetores  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$  se qualquer vetor da sequência pode ser escrito como dos **combinação linear** dos demais vetores, então trata-se de uma sequência de vetores **linearmente dependentes** .

## 1.9 Produto Escalar

Tendo em vista que já foram abordadas diversas propriedades elementares no estudo de vetores, um conceito primordial e que será uma ferramenta indispensável no estudo de Geometria Analítica é o conceito de **produto escalar** o qual se relaciona diretamente com ângulos e ortogonalidade.

Utilizaremos a notação  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  para simbolizar o produto escalar.

Sejam dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , conforme a figura 1.15 e  $\theta$  o menor ângulo entre eles.

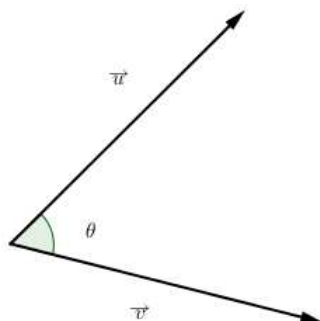


Figura 1.15:

O produto escalar é dado pelo produto dos módulos de  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e o cosseno do ângulo  $\theta$ , vamos demonstrar o produto escalar para o espaço vetorial  $V^2$  onde  $\vec{u} = (x_1, y_1)$  e  $\vec{v} = (x_2, y_2)$ .

O módulo do vetor  $\vec{u}$  representado por  $\|\vec{u}\|$  será definido como o comprimento do vetor, ou seja, dado o vetor  $\vec{u} = (x_1, y_1)$  seu módulo é igual a  $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ , este raciocínio segue análogo para o vetor  $\vec{v}$ .

Logo pela lei dos cossenos podemos concluir:

$$\begin{aligned} \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 &= \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{v}\|\|\vec{u}\|\cos(\theta) \\ 2\|\vec{v}\|\|\vec{u}\|\cos(\theta) &= -\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 \\ 2\|\vec{v}\|\|\vec{u}\|\cos(\theta) &= -((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2) + x_2^2 + y_2^2 + x_1^2 + y_1^2 \\ 2\|\vec{v}\|\|\vec{u}\|\cos(\theta) &= -(x_2^2 + x_1^2 - 2x_2x_1 + y_2^2 - 2y_1y_2 + y_1^2) + x_2^2 + y_2^2 + x_1^2 + y_1^2 \\ 2\|\vec{v}\|\|\vec{u}\|\cos(\theta) &= -x_2^2 - x_1^2 + 2x_2x_1 - y_2^2 + 2y_1y_2 - y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + x_1^2 + y_1^2 \\ 2\|\vec{v}\|\|\vec{u}\|\cos(\theta) &= 2x_1x_2 + 2y_1y_2 \\ \|\vec{v}\|\|\vec{u}\|\cos(\theta) &= x_1x_2 + y_1y_2 = \vec{u} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

Logo a partir da demonstração acima, podemos definir o cosseno do menor ângulo entre dois vetores:

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\|\|\vec{u}\|\cos(\theta) &= x_1x_2 + y_1y_2 = \vec{u} \cdot \vec{v} \\ \|\vec{v}\|\|\vec{u}\|\cos(\theta) &= \vec{u} \cdot \vec{v} \\ \cos(\theta) &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|\|\vec{u}\|} \implies \theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|\|\vec{u}\|}\right) \end{aligned}$$

Como podemos ver o **produto escalar** possibilita definir o ângulo entre dois vetores, independente de sua posição no plano. A demonstração segue análoga para qualquer base vetorial.

### 1.9.1 Propriedades do Produto Escalar

Dados quaisquer vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  e qualquer escalar  $\rho$  seguem as seguintes propriedades do produto escalar:

- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ .
- $\vec{u} \cdot (\rho \vec{v}) = (\rho \vec{u}) \cdot \vec{v} = \rho(\vec{u} \cdot \vec{v})$ .
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ .
- Se  $\vec{u} \neq \vec{0}$ , então  $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$

## 1.10 Produto Vetorial

A idéia de produto vetorial é largamente difundida no espaço vetorial  $V^3$ , onde possui maior significado, o cálculo do produto vetorial vem suprir a necessidade de calcular vetores ortogonais no espaço, já no caso de um espaço vetorial  $V^2$ , utilizamos este produto para cálculo de áreas de figuras geométricas quaisquer, delimitadas por ligações entre pontos.

Quando se calcula o produto vetorial de dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  em  $V^3$  encontra-se um vetor  $\vec{w}$  ortogonal simultaneamente a  $\vec{u}$  e a  $\vec{v}$ .



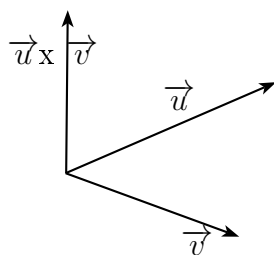


Figura 1.16: Produto vetorial entre o vetor  $u$  e o vetor  $v$

Sejam dois vetores  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$  e  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$  dados em um espaço vetorial  $V^3$  onde  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são linearmente independentes, podemos utilizar o produto vetorial para encontrarmos um representante da classe de vetores ortogonais a  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  simultaneamente. Utilizaremos a notação  $\vec{u} \times \vec{v}$  para representar o produto vetorial.

Logo sendo  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$  e  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ , temos  $\vec{u} \times \vec{v} = (y_1z_2 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, x_1y_2 - y_1x_2)$ .

Podemos ainda calcular o produto vetorial através de um determinante simbólico.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}$$

Onde o vetor  $(y_1z_2 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, x_1y_2 - y_1x_2)$  é ortogonal si-

multaneamente a  $\vec{u}$  e a  $\vec{v}$ .

### 1.10.1 Propriedades do Produto Vetorial

Vamos definir algumas propriedades do produto vetorial dados os vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  e o escalar  $\lambda$

- $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ .
- $\lambda(\vec{v} \times \vec{u}) = (\lambda\vec{v}) \times \vec{u} = \vec{v} \times (\lambda\vec{u})$ .
- $\vec{w} \times (\vec{v} + \vec{u}) = \vec{w} \times \vec{v} + \vec{w} \times \vec{u}$ .
- Se  $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$ , então  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{u} \times \vec{v}$  são linearmente independentes.

Como podemos ver o **produto escalar** de dois vetores resulta em um número real, já o **produto vetorial** entre dois vetores resulta em um vetor.

# RETAS E PLANOS NO ESPAÇO

## 2.0.2 Retas no Espaço

Uma das maneira de definirmos uma reta em duas dimensões, é encontrando um ponto pertencente a reta e um vetor que represente sua direção.

Já no espaço tridimensional, seguimos basicamente o mesmo princípio. Precisamos de um ponto que pertença a reta e um vetor que represente sua direção, abordaremos algumas formas de representar a reta, **equação paramétrica da reta** e **equação simétrica da reta**.

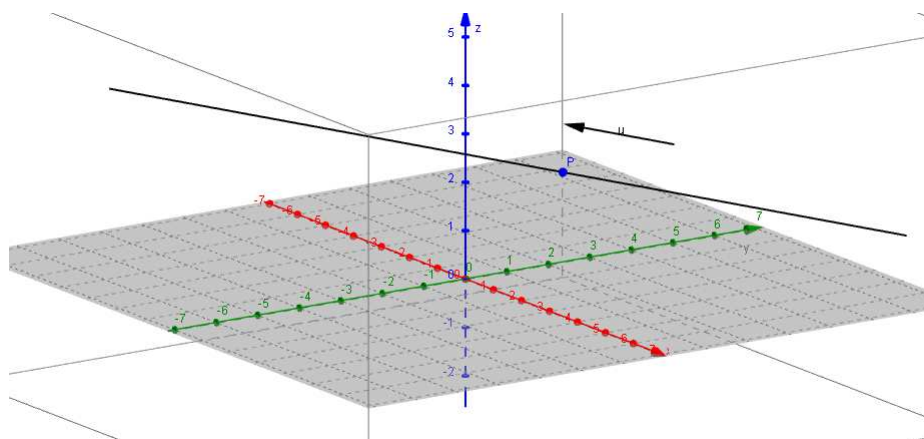


Figura 2.1: reta no espaço

### Equação paramétrica da reta

Neste tipo de equação, utilizamos o vetor que dá direção a reta chamado vetor diretor e um ponto qualquer que pertence a reta, definimos ainda um parâmetro  $t$  que a cada variação fornece um representante do vetor diretor que possui mesma direção da reta.

Seja  $(x_0, y_0, z_0)$  um ponto qualquer que pertence a reta  $\overleftrightarrow{R}$  e  $\vec{u} = (a, b, c)$  um vetor que seja paralelo a reta. A partir destas informações, já podemos definir a equação paramétrica da reta  $\overleftrightarrow{R}$ .

$$\overleftrightarrow{R} : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Como podemos ver, cada ponto da reta dado por  $(x, y, z)$  é determinado pela variável  $t$ .

### Equação simétrica da reta

Como podemos observar na equação paramétrica, todas as coordenadas dos eixos  $x, y$  e  $z$  são dadas em função do parâmetro  $t$  logo, na equação simétrica isolamos os parâmetros  $t$  em cada dimensão, veja:

$$\overleftrightarrow{R} : \begin{cases} x = x_0 + at \Rightarrow t = \frac{x-x_0}{a} \\ y = y_0 + bt \Rightarrow t = \frac{y-y_0}{b} \\ z = z_0 + ct \Rightarrow t = \frac{z-z_0}{c} \end{cases} \quad \text{onde } a, b, c \neq 0$$

Logo teremos  $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$  que é a **equação simétrica** da reta.

### 2.0.3 Posições relativas entre retas no espaço

Seja  $\overleftrightarrow{R}_1 = (A + \vec{u}t)$  e  $\overleftrightarrow{R}_2 = (B + \vec{v}k)$  retas no espaço onde  $A$  e  $B$  são pontos quaisquer, se  $\overleftrightarrow{R}_1$  e  $\overleftrightarrow{R}_2$  não pertencem ao mesmo plano então as retas são **reversas**, caso  $\overleftrightarrow{R}_1$  e  $\overleftrightarrow{R}_2$  pertençam ao mesmo plano então as retas podem ser **coincidentes**, **paralelas** ou **concorrentes**, veja:

- **concorrentes** se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não são múltiplos e  $\vec{u} \cap \vec{v} \neq \emptyset$ .
- **coincidentes** se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são múltiplos e  $\vec{u} \cap \vec{v} \neq \emptyset$ .
- **paralelas** se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são múltiplos e  $\vec{u} \cap \vec{v} = \emptyset$ .
- **reversas** se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não são múltiplos e  $\vec{u} \cap \vec{v} = \emptyset$ .

### Planos no espaço

Como veremos, podemos representar um plano por meio de equações, ou seja, dados três pontos quaisquer de um plano  $\pi$  podemos construir a equação coplanar que os contém e ainda definir quais outros pontos pertencem a este plano.

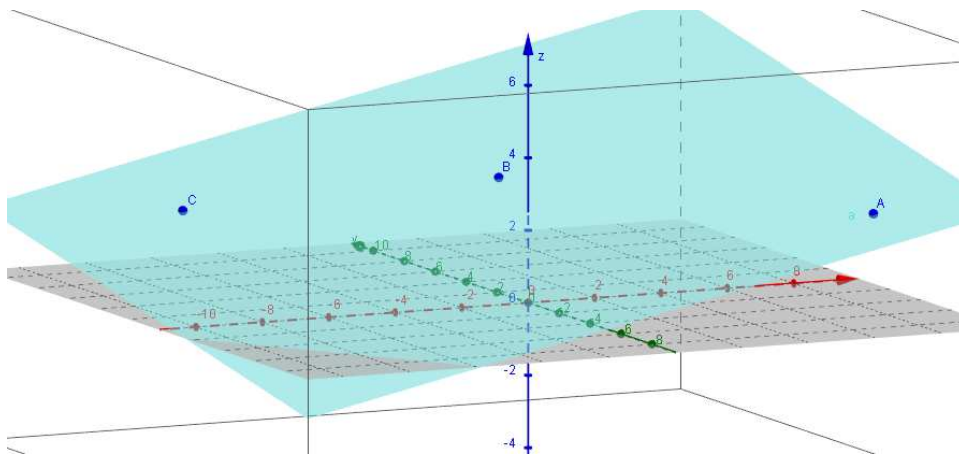


Figura 2.2: equação do plano pelos pontos A,B e C

## Equação Vetorial do Plano

Sejam dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  linearmente independentes e dois pontos  $P$  e  $Q$  do espaço, podemos escrever o ponto  $Q$  como a soma de  $P$  com uma **combinação linear** entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , ou seja:

$$Q = P + \vec{u}\theta + \vec{v}\lambda \quad \text{i.e.} \quad \text{equação vetorial do plano}$$

onde  $\theta$  e  $\lambda$  são escalares que admitem a igualdade.

## Equação paramétrica do plano

Podemos ainda utilizar a forma **paramétrica** para representar uma equação coplanar. Seja  $\vec{u} = (a, b, c)$  e  $\vec{v} = (c, d, e)$  dois vetores linearmente independentes e  $P = (x_0, y_0, z_0)$  um ponto qualquer, logo podemos escrever a equação vetorial do plano que nomeamos  $\pi$  e consequentemente sua equação paramétrica.

Assumindo  $\pi : (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (a, b, c)\theta + (c, d, e)\lambda$  como equação vetorial do plano, podemos utilizar esta equação vetorial para criarmos um sistema de equações paramétricas do plano.

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + a\theta + c\lambda \\ y = y_0 + b\theta + d\lambda \\ z = z_0 + c\theta + e\lambda \end{cases}$$

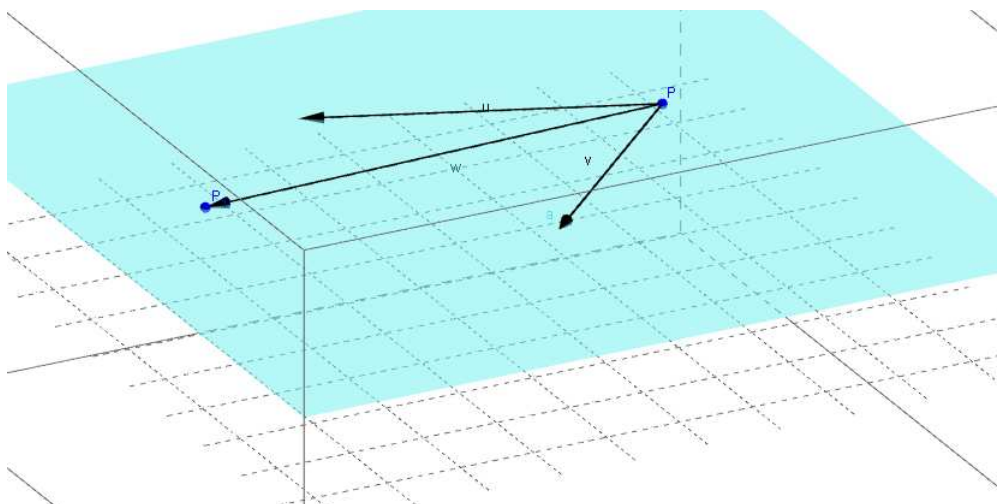


Figura 2.3: O ponto  $P_1$  é resultado da soma do ponto  $P$  com uma combinação linear entre os vetores  $u$  e  $v$

Como podemos ver, a equação paramétrica da reta contém apenas um parâmetro, enquanto a equação paramétrica do plano contém dois parâmetros, por esta razão dizemos que a reta é **unidimensional** enquanto o plano é **bidimensional**.

### Equação cartesiana do plano

Também podemos utilizar a **equação cartesiana** para descrever um plano neste tipo de equação, necessitamos apenas de um vetor normal ao plano chamado vetor **diretor do plano** e um ponto que pertence ao plano.

Seja  $\overrightarrow{AB} = (a, b, c)$  um vetor normal ao plano  $\pi$ , onde  $A = (x_0, y_0, z_0)$  é um ponto do plano já definido e  $K = (x, y, z)$  um ponto qualquer que pertence ao plano  $\pi$  tal que  $A \neq K$ , podemos concluir que o produto escalar entre  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AK}$  deve ser igual a zero pois  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AK}$ , logo:

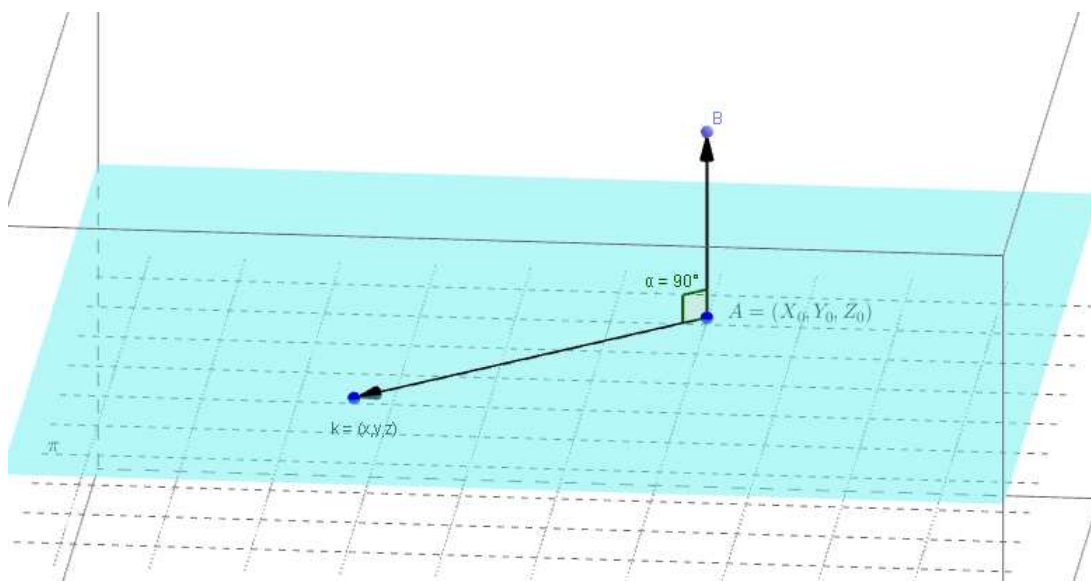


Figura 2.4: vetor AB perpendicular ao vetor AK

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AK} = 0$$

$$(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$$

Tendo em vista que o vetor  $\overrightarrow{AB} = (a, b, c)$  e o ponto  $A = (x_0, y_0, z_0)$  já estão definidos então  $-ax_0 - by_0 - cz_0$  é um escalar, logo podemos escrever  $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$  portanto a equação cartesiana do plano pode ser escrita como  $\mathbf{ax} + \mathbf{by} + \mathbf{cz} + \mathbf{d} = 0$ .

### Posições relativas entre planos

Dados dois planos no espaço  $\pi = A + \overrightarrow{u}a + \overrightarrow{v}b$  e  $\pi' = B + \overrightarrow{u'}c + \overrightarrow{v'}d$ , estes podem ser **coincidentes**, **paralelos** ou **concorrentes**.

- **coincidentes**  $\pi = \pi'$  se e somente se  $\overrightarrow{u'}$  e  $\overrightarrow{v'}$  são combinações lineares de  $\overrightarrow{u}$  e  $\overrightarrow{v}$  e B pertence a  $\pi$



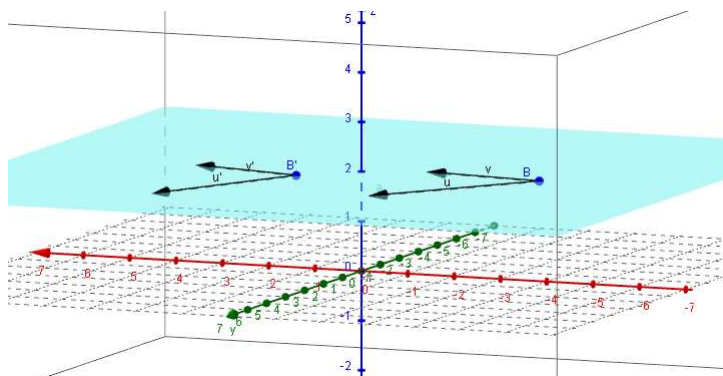


Figura 2.5: planos coincidentes

- **paralelos**  $\pi \cap \pi' = \emptyset$  se e somente se  $\vec{u}'$  e  $\vec{v}'$  são combinações lineares de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  e B não pertence a  $\pi$

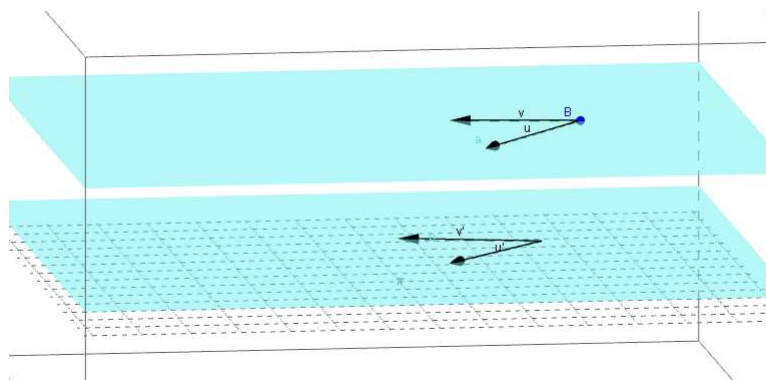


Figura 2.6: planos paralelos

- **concorrentes** se e somente se alguma das combinações  $(\vec{u}', \vec{u}$  e  $\vec{v})$ ,  $(\vec{v}', \vec{u}$  e  $\vec{v})$ ,  $(\vec{u}', \vec{u}'$  e  $\vec{v}')$  e  $(\vec{v}', \vec{u}'$  e  $\vec{v}')$  for **linearmente independente**

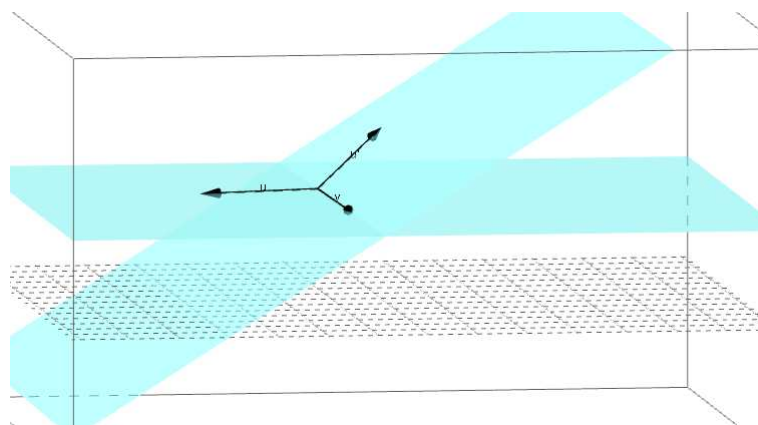


Figura 2.7: planos concorrentes

## 2.0.4 Distâncias relativas a pontos, retas e planos

Tendo em vista que já estudamos as diferentes posições entre retas e planos no espaço, veremos agora como calcular a distância entre estes elementos. Vale ressaltar porém que existem inúmeras maneiras de realizar estes cálculos. Elencamos apenas algumas com base no que já foi estudado.

### Distância de ponto a ponto

Sejam dois pontos  $A = (x_0, y_0, z_0)$  e  $B = (x_1, y_1, z_1)$  contidos no espaço tridimensional, podemos calcular a distância entre estes pontos utilizando o estudo de vetores.

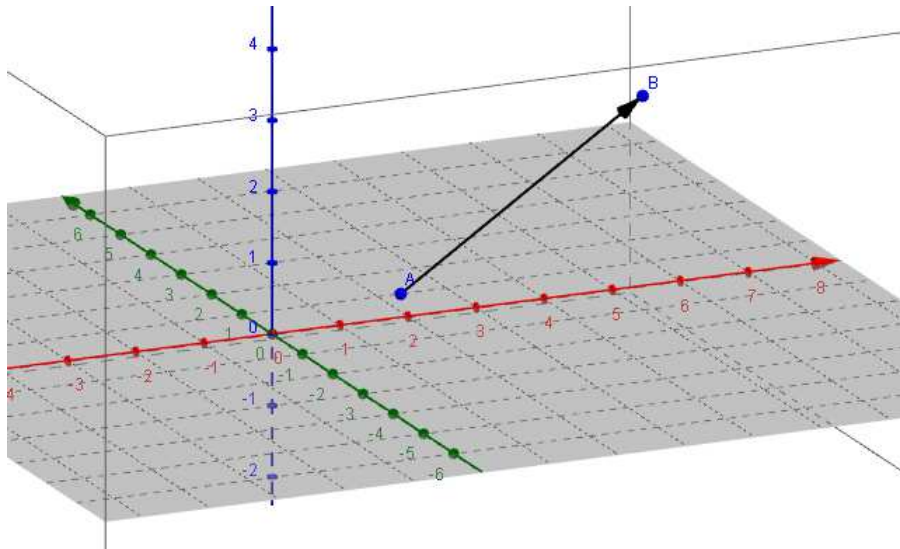


Figura 2.8: vetor AB

Utilizando o conceito de vetor apresentado na seção 1.4 podemos deduzir que a distância entre  $A$  e  $B$  é dada através do módulo do vetor  $\overrightarrow{AB}$  sendo representado por  $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$

**Atividade 2.1.** Sendo  $A = (3, 2, 2)$  e  $B = (2, 1, 5)$  dois pontos contidos no espaço tridimensional qual a distância entre  $A$  e  $B$

*Resolução:*  $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(2 - 3)^2 + (1 - 2)^2 + (5 - 2)^2} =$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{11}$$

□

### Distância de ponto a reta

Dada uma reta  $s : (x_0, y_0, z_0) + (a, b, c)t$  e um ponto  $P = (x_1, y_1, z_1)$  contidos no espaço, qual a distância entre  $s$  e  $P$

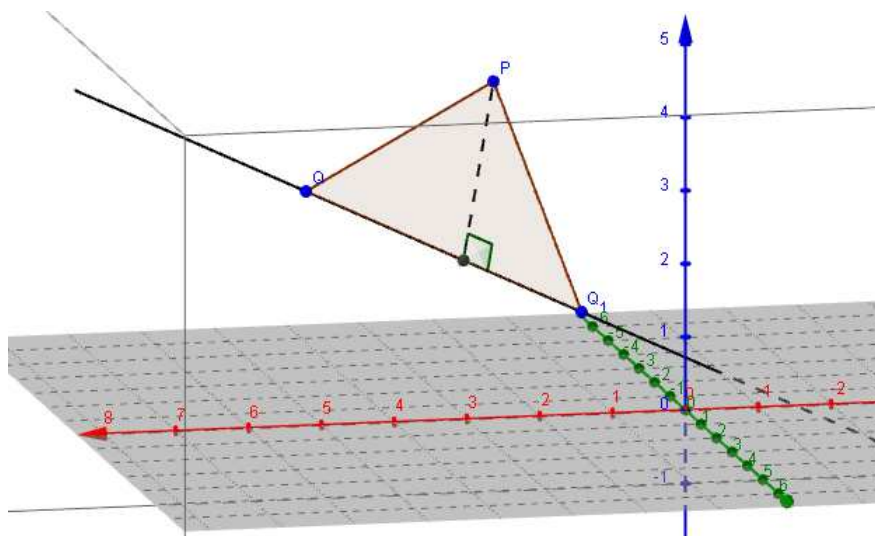


Figura 2.9:

Como visto na figura 2.9 podemos definir a distância entre  $P$  e  $s$ , simplesmente com a definição de área de triângulos.

Definindo dois pontos quaisquer  $Q$  e  $Q_1$  contidos na reta  $s$ , podemos calcular a área do triângulo  $PQQ_1$  através do produto vetorial.

Sendo um triângulo cuja área pode ser representada por  $A_T$  onde os pontos  $P, Q$  e  $Q_1$  definem o triângulo, temos:

$$A_T = \frac{\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PQ_1}\|}{2}$$

Logo sendo  $d(P, s)$  a distância do ponto  $P$  a reta  $s$ , podemos concluir:

$$\frac{\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PQ_1}\|}{2} = \frac{\|\overrightarrow{QQ_1}\| \times d(P, s)}{2} \quad \text{portanto} \quad d(P, s) = \frac{\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PQ_1}\|}{\|\overrightarrow{QQ_1}\|}$$

**Atividade 2.2.** Seja um ponto  $P = (1, -2, 5)$  e uma reta  $r : (-7, 8, 0) + (1, -3, 6)t$ , determine a distância entre o ponto  $P$  e a reta  $r$ .

*Resolução:* Sendo  $Q = (-7, 8, 0)$  e  $Q_1 = (-6, 5, 6)$  pontos contidos na reta  $r$ , vamos determinar primeiramente a área do triângulo  $PQQ_1$ ,

onde  $\overrightarrow{PQ} = (-8, 10, -5), \overrightarrow{PQ_1} = (-7, 7, 10), \overrightarrow{QQ_1} = (1, -3, 6)$  representando por  $A_T$  a área do triângulo  $PQQ_1$  temos:

$$A_T = \frac{\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PQ_1}\|}{2} \cong 31.88$$

encontrando a área do triângulo  $PQQ_1$  e definindo por  $d(P, r)$  a distância do ponto  $P$  a reta  $r$  temos:

$$\frac{d(P, r) \cdot \|\overrightarrow{QQ_1}\|}{2} \cong 31.88 \quad \text{portanto} \quad d(P, r) \cong \frac{(31.88) \cdot 2}{6.78} \cong 9.40$$

□

### Distância de ponto a plano

Sendo um plano  $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$  e um ponto qualquer  $P = (x_0, y_0, z_0)$  como definir a distância entre  $P$  e  $\alpha$ .

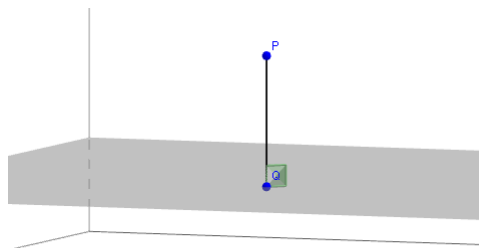


Figura 2.10:

Observe na figura 2.10 que construindo uma reta  $s$  perpendicular ao plano  $\alpha$  passando por  $P$  onde  $P \cap \alpha = \{Q\}$  temos  $d(P, \alpha) = d(P, Q)$ .

Logo a distância entre ponto e plano pode ser entendida como a distância entre ponto e ponto.

**Atividade 2.3.** Sendo um ponto  $P = (4, -1, 2)$  e um plano de equação  $\pi : -2x + 5y - z + 3 = 0$ , determine a distância entre  $P$  e  $\pi$ .

*Resolução:* Vamos construir uma reta  $s$  perpendicular a  $\pi$  passando por  $P$ , necessariamente  $\vec{u} = (-2, 5, -1)$  é o vetor diretor do plano  $\pi$ , logo definimos como  $s : (4, -1, 2) + (-2, 5, -1)t$  a equação vetorial da reta.

Realizando a interseção entre  $s$  e  $\pi$  temos:

$$s \cap \pi : -2(4 - 2t) + 5(-1 + 5t) - (2 - t) + 3 = 0$$

onde:

$$t = \frac{2}{5} \quad \text{portanto} \quad s \cap \pi = \left(\frac{16}{5}, 1, \frac{8}{5}\right)$$

Adotando  $s \cap \pi = Q$  onde  $P = (4, -1, 2)$  e  $Q = \left(\frac{16}{5}, 1, \frac{8}{5}\right)$ , temos  $d(P, Q) = d(P, \pi) = \frac{2\sqrt{30}}{5}$ . □

### Distância da reta ao plano

Seja uma reta  $s$  e um plano  $\alpha$ , podemos ter neste caso três posições relativas entre reta e plano.

A reta  $s$  pode ser secante ao plano  $\alpha$ , pode estar contida no plano  $\alpha$  ou pode ser paralela a  $\alpha$ . Sendo a distância entre a reta  $s$  e o plano  $\alpha$  definida pela menor distância de um ponto contido em  $s$  a  $\alpha$ , necessariamente a reta  $s$  deve ser paralela ao plano pois caso ela esteja contida ou seja secante ao plano a distância será zero.

Logo sendo  $s$  uma reta paralela ao plano  $\alpha$  temos que todo ponto  $P$  contido em  $s$  mantém a mesma distância a  $\alpha$  o que nos leva a concluir

que  $d(s, \alpha) = d(P, \alpha)$ , ou seja, o problema de calcular a distância entre reta e plano se resume a calcular a distância de ponto a plano, portanto a solução deste problema segue análoga ao que já foi feito no cálculo da distância entre ponto e plano.

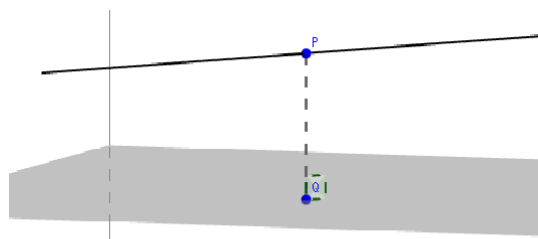


Figura 2.11:

**Atividade 2.4.** Calcule a distância entre a reta  $r : (1, 2, -1) + (-2, 5, -3)t$  e o plano  $\alpha : -x + 2y + 4z + 7 = 0$ .

*Resolução:* Sabemos que  $d(r, \alpha) = d(P, \alpha)$  onde  $P$  é qualquer ponto contido na reta  $r$ , logo sendo  $P = (1, 2, -1)$ , calculamos a distância entre  $P$  e  $\alpha$ .

Construindo uma reta  $s$  perpendicular a  $\alpha$  passando por  $P$ , temos:

$$s : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$$

Buscamos agora a interseção entre  $s$  e  $\alpha$ :

$$s \cap \alpha : -(1 - t) + 2(2 + 2t) + 4(-1 + 4t) + 7 = 0$$

Sendo  $t = \frac{-2}{7}$ , nomeamos a interseção entre  $s$  e  $\alpha$  por  $Q$ , logo

$d(r, \alpha) = d(P, Q)$  onde  $Q = (\frac{9}{7}, \frac{10}{7}, \frac{-15}{7})$  e  $P = (1, 2, -1)$  portanto  $d(r, \alpha) = \frac{2\sqrt{21}}{7}$ .  $\square$

### Distância entre planos

Definimos a distância entre dois planos  $\alpha$  e  $\beta$  como a menor distância entre um ponto contido em  $\alpha$  e um ponto contido em  $\beta$ , onde necessariamente  $\alpha$  é paralelo a  $\beta$ , pois caso sejam concorrentes ou secantes a menor distância é dada por zero.

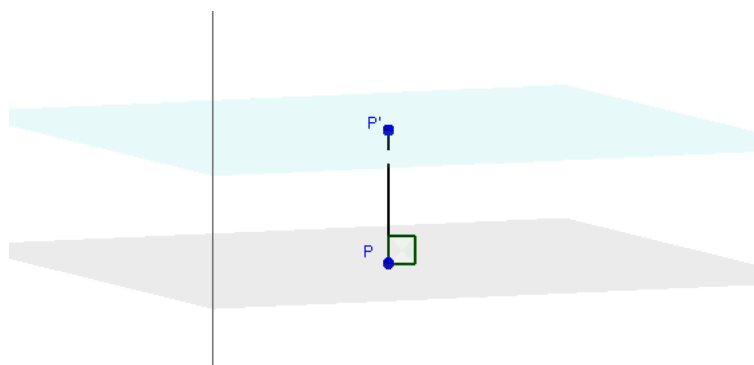


Figura 2.12:

Definindo o ponto  $P$  ou o ponto  $P'$  nosso problema se transforma na distância de um ponto ao plano, ou seja,  $d(\alpha, \beta) = d(P, \beta) = d(P', \alpha)$  sendo  $P \in \alpha$  e  $P' \in \beta$ .

**Atividade 2.5.** Calcule a distância entre o plano  $\alpha : 4x - 2y + 6z + 5 = 0$  e o plano  $\beta : 2x - y + 3z + 1 = 0$

*Resolução:* Adotando um ponto pertencente a  $\beta$  temos  $P' = (0, 4, 1)$ , construindo agora uma reta  $s$  perpendicular a  $\beta$  passando por  $P'$  utilizando para isso o vetor diretor do plano  $\beta$  dado por  $\vec{u} = (1, -1, 3)$ , temos:



$$s : \begin{cases} x = 2t \\ y = 4 - t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

faremos agora a interseção entre  $s$  e  $\alpha$

$$s \cap \alpha : 4(2t) - 2(4 - t) + 6(1 + 3t) + 5 = 0$$

Obtemos então  $t = \frac{-1}{8}$ , logo encontramos o ponto  $P = (\frac{-3}{14}, \frac{115}{28}, \frac{37}{28})$  e sabendo que  $P' = (0, 4, 1)$  temos  $d(\alpha, \beta) = d(P, P')$ , portanto.

$$d(\alpha, \beta) = \sqrt{(\frac{1}{8})^2 + (4 - \frac{115}{28})^2 + (1 - \frac{37}{28})^2} = \frac{3\sqrt{14}}{28}$$

□

### Distância entre retas

No caso de posições relativas entre retas como já vimos no capítulo anterior, elas podem ser concorrentes, coincidentes, paralelas ou reversas, tendo em vista que desejamos calcular a distância entre as retas, apenas o caso em que elas são paralelas ou reversas nos interessa, pois em qualquer outro caso a distância é zero.

Logo vamos começar pelo caso em que as retas são **paralelas**.

Sendo  $s$  e  $r$  duas retas paralelas, onde  $\vec{u}$  é vetor diretor de  $s$  e  $\vec{v}$  é vetor diretor de  $r$  necessariamente  $\vec{u} = \vec{v} \cdot \lambda$  onde  $\lambda$  é um escalar qualquer e  $s$  e  $r$  pertence ao mesmo plano.

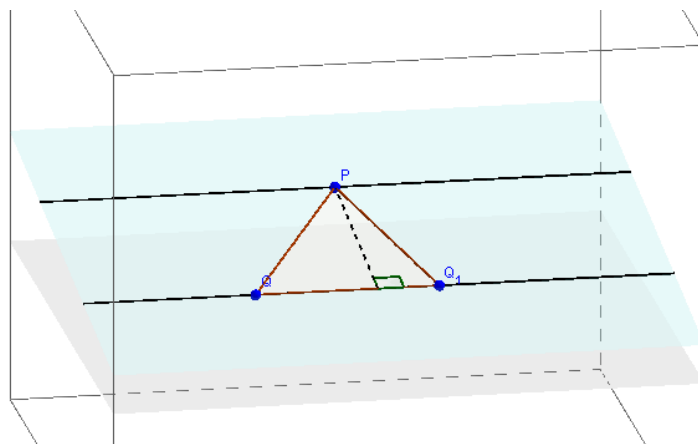


Figura 2.13:

Logo como observamos ver na figura 2.13 podemos calcular a distância entre retas paralelas utilizando a área do triângulo, tendo em vista que  $d(s, r) = d(P, s)$  onde  $P$  é qualquer ponto que pertence a  $r$ , observe que segue o raciocínio análogo a distância de ponto a reta.

$$\frac{\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PQ_1}\|}{2} = \frac{\|\overrightarrow{QQ_1}\| \cdot d(P, s)}{2} \quad \text{onde} \quad d(P, s) = \frac{\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PQ_1}\|}{\|\overrightarrow{QQ_1}\|}$$

**Atividade 2.6.** Sendo as retas  $s : (1, 2, -1) + (-1, 2, 4)t$  e  $r : (5, 0, 3) + (2, -4, -8)k$  calcule a distância entre estas retas.

*Resolução:* Trata-se de retas paralelas pois,  $(2, -4, -8) = \lambda(-1, 2, 4)$  onde  $\lambda = -2$ .

Logo temos  $P = (1, 2, -1) \in a$ ,  $Q = (5, 0, 3)$  e  $Q_1 = (7, -4, -5)$  onde  $P \in s, Q \in r$  e  $Q_1 \in r$ , sendo assim  $\overrightarrow{PQ} = (4, -2, 4)$ ,  $\overrightarrow{PQ_1} = (6, -6, -4)$  e  $\overrightarrow{QQ_1} = (2, -4, -8)$ , definimos então por  $A_T$  a área do triângulo  $PQQ_1$  segue:

$$A_T = \frac{\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PQ_1}\|}{2} \cong 26.30$$

Logo temos:

$$\frac{\|\overrightarrow{QQ_1}\| \cdot d(P, s)}{2} \cong 26.30 \quad \text{onde} \quad d(P, s) \cong 5.74$$

Sendo  $P \in s$  onde  $s \parallel r$  temos  $d(r, s) = d(P, s) = 5.74$  portanto  $d(r, s) = 5.74$

□

Faremos agora o caso de distâncias de retas no espaço onde as retas são **reversas**, sendo  $s : P + \vec{u}t$  e  $r : Q + \vec{v}t$  retas contidas no espaço tal que necessariamente  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são vetores linearmente independentes e  $s \cap r = \emptyset$ , calcule a distância entre  $s$  e  $r$ .

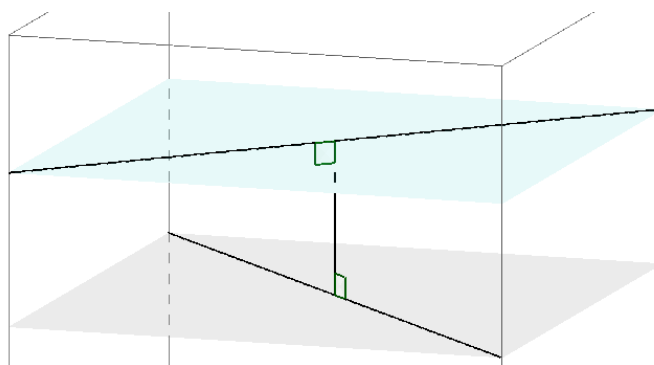


Figura 2.14:

Observe que a distância entre retas reversas pode ser dada pela distância dos planos que contém as retas  $r$  e  $s$ , logo nosso problema pode ser resumido no cálculo da distância entre planos.

**Atividade 2.7.** Sendo as retas  $r : (5, 2, 1) + (2, -2, 3)t$  e  $s : (1, 2, 2) + (1, 5, -1)m$ . Calcule a distância entre  $r$  e  $s$

*Resolução:*

A distância entre retas reversas  $r$  e  $s$  pode ser resumida pela distância dos planos que contém as respectivas retas. Dados os vetores  $\vec{u} = (2, -2, 3)$  e  $\vec{v} = (1, 5, -1)$  diretores das retas  $r$  e  $s$  respectivamente, vamos definir  $\vec{u} \times \vec{v}$ , que nos dará um vetor normal ao plano  $\alpha$  que contém a reta  $r$  e normal ao plano  $\beta$  que contém a reta  $s$ , logo:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

construindo o plano  $\alpha$  com vetor diretor  $\vec{u} \times \vec{v} = (-13, 5, 12)$  passando pelo ponto  $(5, 2, 1)$  temos:

$$\alpha : -13x + 5y + 12z + 43 = 0$$

analogamente construímos o plano  $\beta$  pelo ponto  $(1, 2, 2)$  temos:

$$\beta : -13x + 5y + 12z - 21 = 0$$

Vamos agora calcular a distância entre os planos  $\alpha$  e  $\beta$ .

Seja  $k$  a reta ortogonal aos planos  $\alpha$  e  $\beta$  passando pelo ponto contido em  $\alpha$ ,  $p = (5, 2, 1)$ .

$$k : \begin{cases} x = 5 - 13t \\ y = 2 + 5t \\ z = 1 + 12t \end{cases}$$

Logo faremos a interseção entre  $k$  e  $\beta$ .

$$k \cap \beta : -13(5 - 13t) + 5(2 + 5t) + 12(1 + 12t) - 21 = 0$$

Dado  $t = \frac{32}{169}$  onde a interseção entre  $k$  e  $\beta$  é dada pelo ponto  $Q = (\frac{33}{13}, \frac{498}{169}, \frac{553}{169})$ , concluímos  $d(r, s) = d(P, Q) = \frac{32\sqrt{2}}{13}$

□

## CARTOGRAFIA

---

Vamos introduzir neste capítulo, uma importante aplicação da geometria espacial à cartografia.

A cartografia é a ciência que trata da concepção, difusão, utilização e estudo dos mapas, existem mapas datados de 2500 a.c, ou seja, este é um tema milenar que foi se desenvolvendo ao longo do tempo e já serviu a vários propósitos sejam eles bélicos, geográficos ou ainda demarcações de território.

Algumas civilizações como os egípcios e os chineses, também dominaram a técnica da cartografia, para eles além do sentido de orientação, os mapas também serviam para controlar a cobrança de impostos pois haviam regiões previamente demarcadas, porém foram os gregos que deram um salto significativo nesta ciência, o sistema cartográfico grego nascido nas escolas de Alexandria e Atenas, utilizava conceitos matemáticos e científicos para construção dos mapas.

A matemática teve grande influência no desenvolvimento cartográfico especialmente com a criação do cálculo, Carl Friedrich Gauss entre outros matemáticos formularam trabalhos de grande importância para este desenvolvimento.

Um dos desafios da cartografia é representar o mais fielmente possível

a superfície esférica da terra em um dado plano, contudo todos os mapas tem distorções que são controláveis e aceitáveis desde que analisadas e interpretadas previamente. Sabendo que não há como evitar as distorções, algumas projeções cartográficas são classificadas de acordo com a característica que preservam. Projeções equidistantes preservam distâncias entre pontos, projeções conformes preservam ângulos e projeções equivalentes mantém a proporção entre as áreas em toda a superfície.

### 3.1 Conceitos Cartográficos

Seja a Terra um planeta esférico que gira em torno de si mesmo, definindo assim um eixo de rotação. As intersecções deste eixo com a superfície terrestre denominamos de polo sul e polo norte.

Para localização de pontos na Terra, foi necessário o desenvolvimento de dois conceitos primordiais são eles **meridianos** e **paralelos**.

**Paralelos:** A intersecção de cada plano perpendicular ao eixo de rotação terrestre com o globo é denominado paralelo, o paralelo central da esfera é denominado linha do **equador** e divide a terra em hemisfério norte e hemisfério sul.

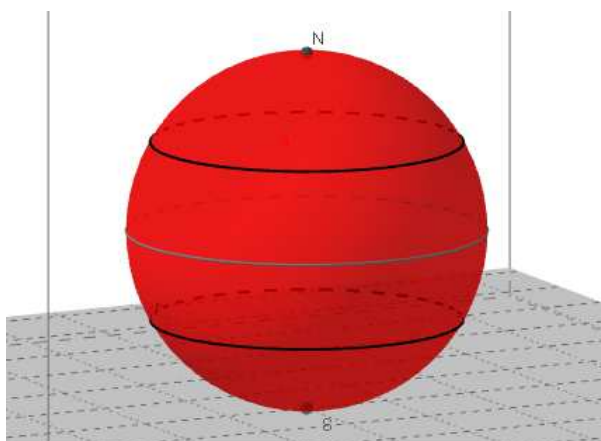


Figura 3.1: representação de paralelos no globo

**Meridianos:** Seja um semi-plano que passa necessariamente pelo polo norte e polo sul, a intersecção deste semi-plano com a esfera denominamos meridianos, o meridiano mais conhecido é o meridiano de **Greenwich** e por convenção, o plano que o contém divide o globo terrestre em ocidente e oriente.

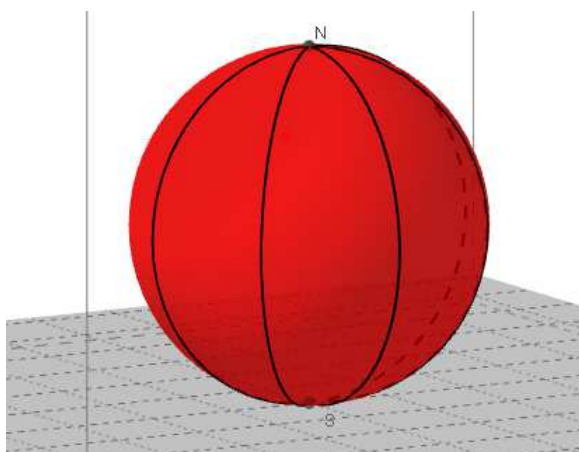


Figura 3.2: representação de meridianos no globo



### 3.1.1 Coordenadas através de Longitude e Latitude

Através dos meridianos e paralelos criamos um sistema de localização exata de pontos no globo terrestre, primeiramente devemos lembrar que todo sistema de coordenadas necessita de uma origem e a origem de nosso sistema será a intersecção da linha do equador com o meridiano de Greenwich, a partir desta definição podemos construir o conceito de latitude e longitude.

**Longitude:** Seja um ponto  $P$ , contido em um determinado paralelo  $\alpha$  e um ponto  $P_m$  pertencente ao meridiano de Greenwich, o ângulo medido em graus ( $^\circ$ ) entre  $PCP_m$  onde o ponto  $C$  é o centro da esfera, representa a longitude do ponto  $P$ . Esta distância varia de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  para leste ou para oeste, ou simplesmente adotamos sinal negativo para localidades a oeste e positivo para localidades a leste.

Observe na figura 3.3 um ponto cuja longitude corresponde a  $70^\circ$  Oeste

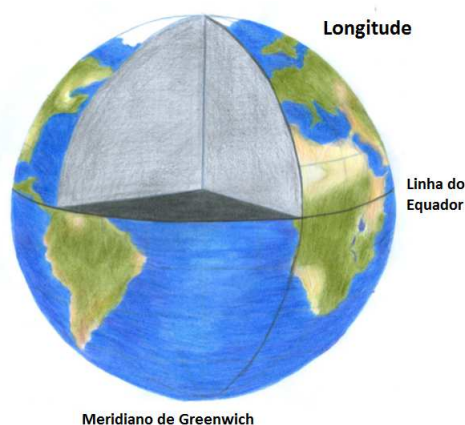


Figura 3.3: Longitudes

**Latitude:** Seja um ponto  $P$  contido em um determinado meridiano

$\beta$  e um ponto  $P_e$  pertencente a linha do equador, o ângulo medido em graus ( $^\circ$ ) entre  $PCP_e$ , onde o ponto  $C$  é o centro da esfera, representa a longitude do ponto  $P$ . Esta distância esta compreendida entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$  para norte ou para sul, sendo positiva no sentido norte e negativa no sentido sul.

Observe na figura 3.4 um ponto cuja a latitude corresponde a  $90^\circ$  Norte.

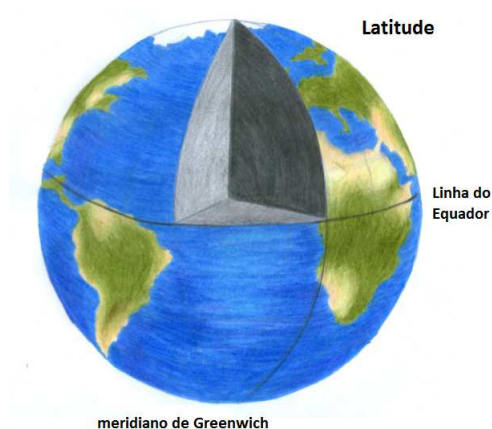


Figura 3.4: Latitudes

Veja uma das possíveis planificações<sup>1</sup> do globo terrestre, observe que os paralelos são representados por linhas horizontais enquanto os meridianos por linhas verticais. A origem do sistema é dada pela interseção entre o meridiano de Greenwich e a linha do equador.

<sup>1</sup>Disponível em: < [http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5f/Miller\\_projection\\_SW.jpg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5f/Miller_projection_SW.jpg) >  
Acesso ago. 2014.

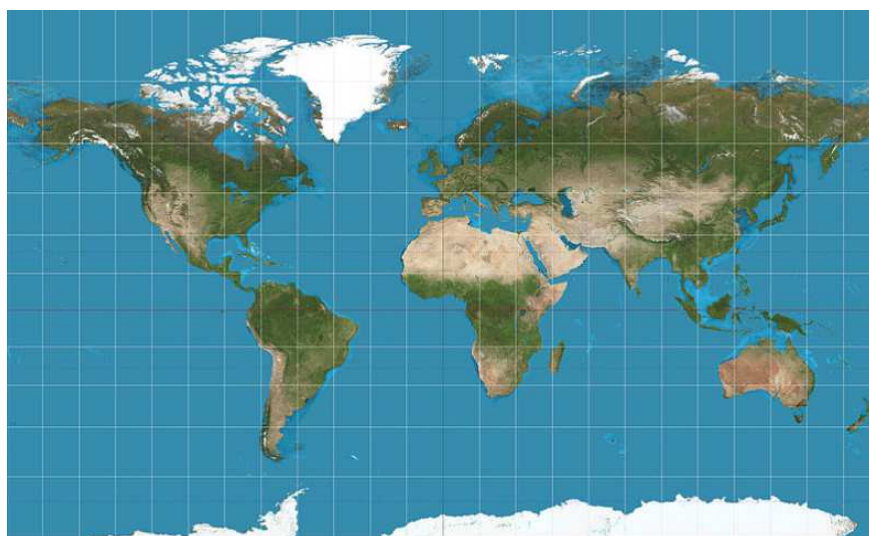


Figura 3.5: Latitudes e Longitudes

### 3.1.2 Longitude, latitude e coordenadas cartesianas tridimensionais

No decorrer de nosso trabalho, vamos construir diferentes tipos de projeções e explicar cada uma de suas peculiaridades, porém para facilitar nosso desenvolvimento utilizaremos o sistemas de coordenadas cartesianas  $(x_0, y_0, z_0)$ . Decorre então a importância da projeção do conceito de latitude e longitude para coordenadas cartesianas no espaço.

Tomando com referência uma esfera  $\gamma$  de raio  $r$  que representa o globo terrestre, representaremos esta esfera no plano cartesiano tridimensional através da equação  $\gamma : x^2 + y^2 + (z - r)^2 = r^2$ .

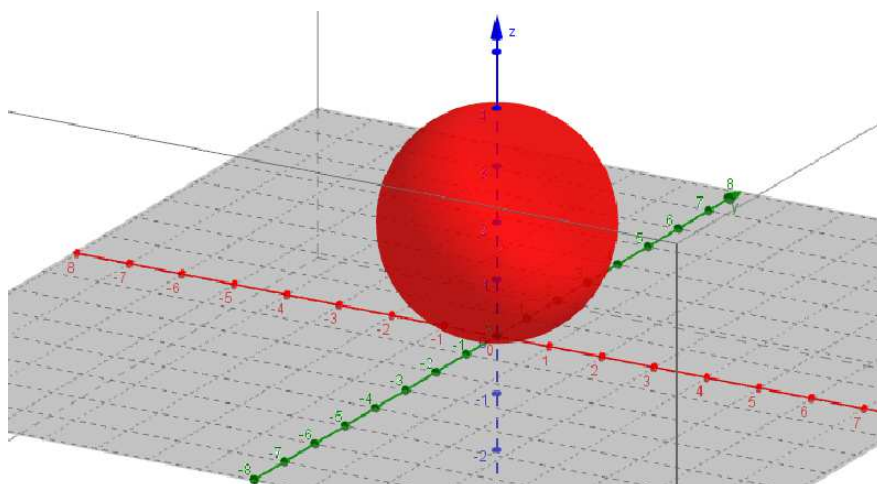


Figura 3.6: esfera  $\gamma$  no plano tridimensional

Seja a cidade de Santo André no estado de São Paulo tendo aproximadamente as coordenadas latitude  $\cong -23^\circ 39'$  e longitude  $\cong -46^\circ 32'$ , vamos obter suas coordenadas no sistemas cartesiano tridimensional sendo o globo terrestre representado pela esfera  $\gamma : x^2 + y^2 + (z - r)^2 = r^2$ .

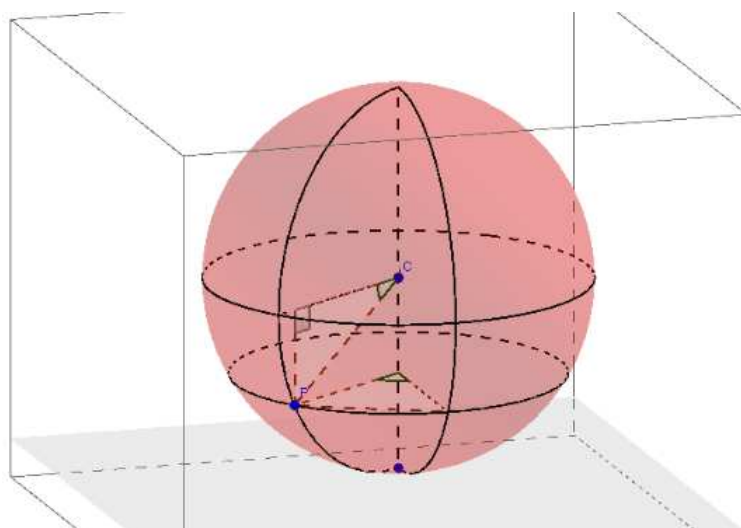


Figura 3.7: coordenadas da cidade de Santo André

Observe que devemos transportar as coordenadas latitude  $\cong -23^\circ 39'$  e longitude  $\cong -46^\circ 32'$  para o formato  $(x_0, y_0, z_0)$ , vamos inicialmente nomear como  $C$  o ponto que representa o centro da esfera,  $O$  a origem

do sistema e  $P$  o ponto referente a cidade de Santo André.

Primeiramente vamos determinar a coordenada do eixo das cotas ( $z$ ). Observe na figura 3.8 a seção que contém o arco referente a latitude.

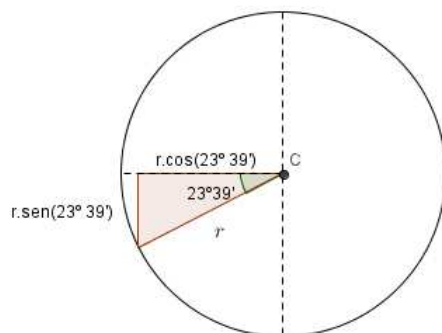


Figura 3.8: Seção contendo o meridiano pertencente a cidade de Santo André

Necessariamente nossa coordenada no eixo  $z$  será :

$$\text{sen}(23^{\circ}39') = \frac{z_0}{r} \quad \text{logo} \quad z_0 = r \text{sen}(23^{\circ}39') \quad \therefore \quad z = r - r \text{sen}(23^{\circ}39')$$

Utilizando agora a seção que contém o arco referente as longitudes, podemos definir a coordenada do eixo das abcissas e do eixo das ordenadas.

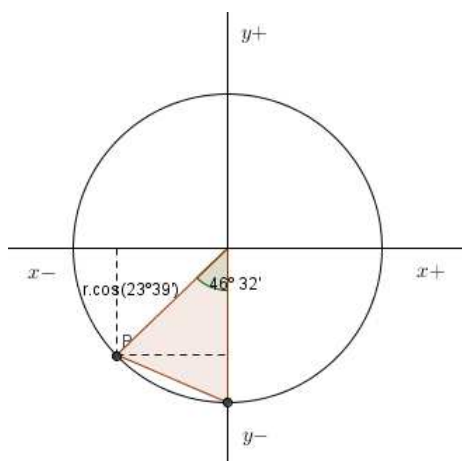


Figura 3.9: seção contendo o paralelo pertencente a cidade de Santo André

Buscando a abcissa do ponto  $P$  temos:

$$\operatorname{sen}(46^{\circ}32') = \frac{x}{r \cos(23^{\circ}39')} \quad \text{logo} \quad x = r \cdot \cos(23^{\circ}39') \cdot \operatorname{sen}(46^{\circ}32')$$

Buscando a ordenada de  $P$  temos:

$$\operatorname{cos}(46^{\circ}32') = \frac{y}{r \cos(23^{\circ}39')} \quad \text{logo} \quad y = r \cdot \cos(23^{\circ}39') \cdot \operatorname{cos}(46^{\circ}32')$$

Observe que o sinal das coordenadas do ponto é determinado pelo octante o qual o ponto está situado, esta relação está diretamente ligada a posição da esfera no plano tridimensional. Tendo em vista que nosso ponto pertence ao octante de coordenadas  $(-x, -y, z)$  a posição da cidade de Santo André em coordenadas cartesianas será  $P = (-r \cdot \cos(23^{\circ}39') \cdot \operatorname{sen}(46^{\circ}32'), -r \cdot \cos(23^{\circ}39') \cdot \operatorname{cos}(46^{\circ}32'), r - r \operatorname{sen}(23^{\circ}39'))$

## 3.2 Planificações da esfera

Buscando superar o desafio de planificar o globo terrestre, vários cartógrafos desenvolveram diferentes maneiras de realizar este feito, lembrando que cada projeção desenvolvida possui suas próprias características distorções e alterações provenientes de sua execução.

Veja o mapa da Continente Africano representado de diferentes maneiras. Observe que as projeções divergem em relação a área. A escolha da projeção se relaciona diretamente com a característica a ser preservada.



Figura 3.10: Continente Africano

Veremos agora alguns tipos de projeções suas aplicações, formas de construção e peculiaridades.

### 3.2.1 Projeção cilíndrica

Na projeção cilíndrica o globo terrestre é envolvido por um cilindro, este tipo de projeção foi largamente utilizado nas cartas náuticas, uma de suas variações mais conhecidas é a projeção de **Mercator**.

A projeção de **Mercator** foi a primeira representação cartográfica que abrangeu todo o globo terrestre. Ela foi elaborada pelo geógrafo, cartógrafo e matemático **Gerhard Mercator** (1512-1594) nascido na região de Flandres (atual Bélgica). Ingressou na Universidade de Lovain para estudar ciências humanas e filosofia (1530), dois anos depois obteve o grau de mestre, a projeção de mercator é considerada uma das projeções mais utilizadas em todo o mundo.

Gerhard Mercator foi considerado por muitos, como pai da cartografia moderna. Grande parte de suas obras, foram inspiradas nos escritos antigos de Ptolomeu, um dos grandes nomes da geografia e representações gráficas na antiguidade.

Adotamos os pontos  $S$  e  $N$  como polo sul e polo norte respectivamente.

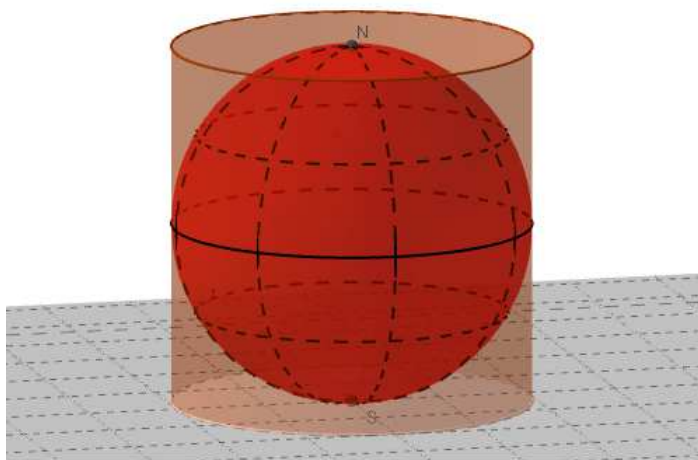


Figura 3.11: representação da projeção cilíndrica

Para construção deste modelo de projeção, adotamos um eixo simétrico comum tanto a esfera, como ao cilindro e traçamos semi-retas perpendiculares ao eixo simétrico intersectando esfera e cilindro.

Na figura 3.12 analisamos uma seção proveniente da interseção da esfera com um plano de eixo simétrico  $\overleftrightarrow{NS}$ , as retas perpendiculares ao eixo intersectam esfera e cilindro, transpondo assim pontos do cilindro para a esfera.



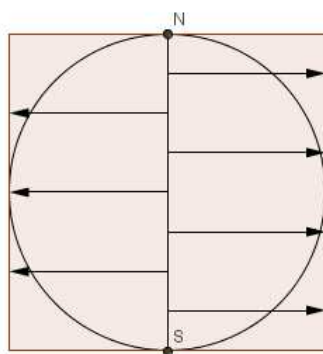


Figura 3.12: seção da projeção cilíndrica

### Principais características da projeção cilíndrica

- Os polos norte e sul não são planificados.
- As regiões próximas dos polos norte e sul possuem a representação de sua área ampliada, ou seja, com o aumento da latitude tomado em módulo ocorrem a ampliação das regiões próximas aos extremos do globo.
- Meridianos e paralelos são representados por linhas perpendiculares entre si sendo: meridianos linhas verticais e paralelos linhas horizontais.
- Todos paralelos possuem o mesmo comprimento da linha do equador, onde a linha equatorial é o único ponto de tangência entre esfera e cilindro.
- É uma projeção conforme, ou seja, mantém a forma e os ângulos das coordenadas geográficas

Observe um mapa construído na figura<sup>2</sup> 3.13 a partir da projeção

<sup>2</sup>Disponível em: < <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/ea/Equirectangular->

cilíndrica.

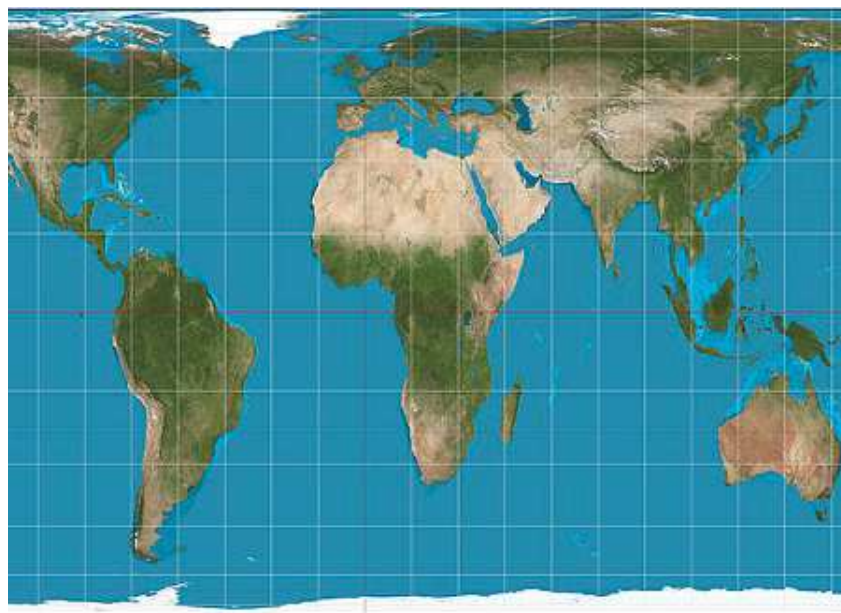


Figura 3.13:

### 3.2.2 Projeção cônica

Neste tipo de projeção, temos o globo envolvido por um cone que posteriormente será planificado, os paralelos são representados no cone planificado na forma de semi-círculos e os meridianos como retas secantes em um único ponto comum.

---

*projection.jpg* > Acesso ago. 2014.

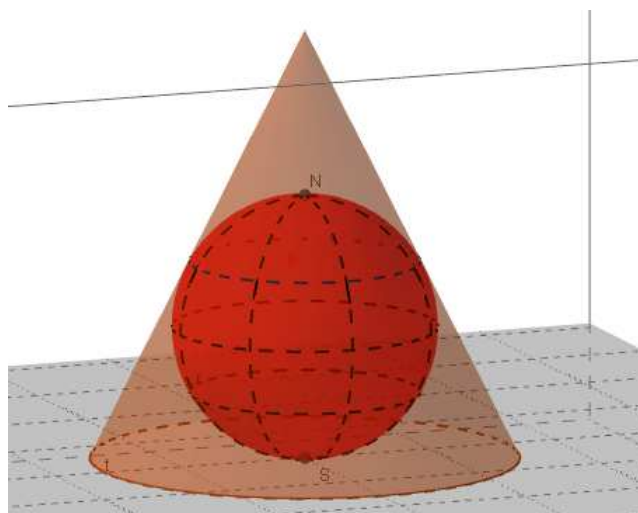


Figura 3.14: representação da projeção cônica

Observe uma seção do cone representada pela interseção entre um plano com eixo simétrico  $\overleftrightarrow{NS}$  e o cone, para projeção de pontos da esfera para o cone, tomamos semi-retas com origem  $S$  e intersectando-as com a esfera e o cone.

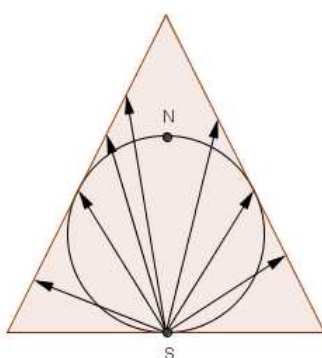


Figura 3.15: seção cônica

### Principais características da projeção cônica

- O polo sul não possui representação no cone planificado.
- Os meridianos são representados por linhas convergentes em um

único ponto, sendo este o vértice do cone e os paralelos são representados por círculos concêntricos também ao vértice do cone.

- As regiões mais distantes da interseção entre esfera e cone tem sua área ampliada.

Veja uma planificação<sup>3</sup> do globo terrestre construída através da projeção cônica.

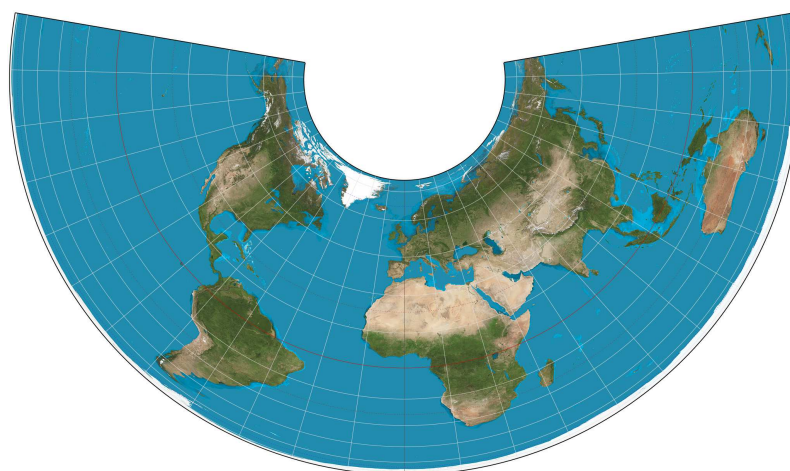


Figura 3.16:

### 3.2.3 Projeções azimutais

Existem várias formas de criar uma projeção azimutal, basicamente este tipo de projeção se baseia na planificação do globo através de um plano tangente ao globo onde a interseção entre plano e globo é definida como centro da projeção. Vamos abordar previamente três tipos de projeções azimutais: **projeção estereográfica**, **projeção gnomônica** e **projeção ortogonal**, posteriormente nos aprofundaremos mais nestas projeções.

<sup>3</sup>Disponível em: < [http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1f/Albers\\_projection\\_SW.jpg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1f/Albers_projection_SW.jpg) >  
Acesso ago. 2014.

### Projeção estereográfica

Nesta projeção temos uma semi-reta partindo do ponto oposto ao ponto de tangência entre esfera e plano.

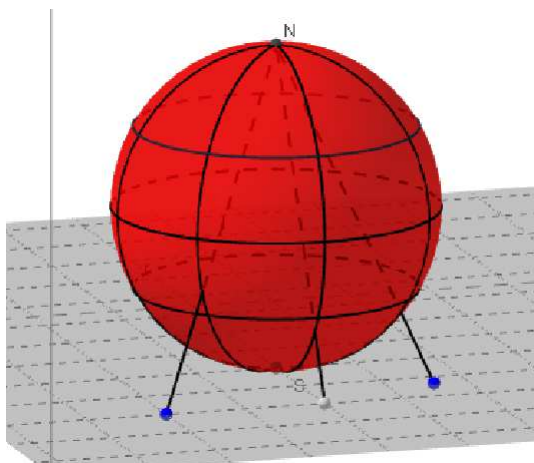


Figura 3.17: representação de projeções azimutais

Observe à seção que representa a intersecção entre a esfera e um plano que passa necessariamente pelo ponto  $N$  e pelo ponto  $S$ . Adotamos semi-retas com origem no ponto  $N$  e intersectamos esfera e plano.

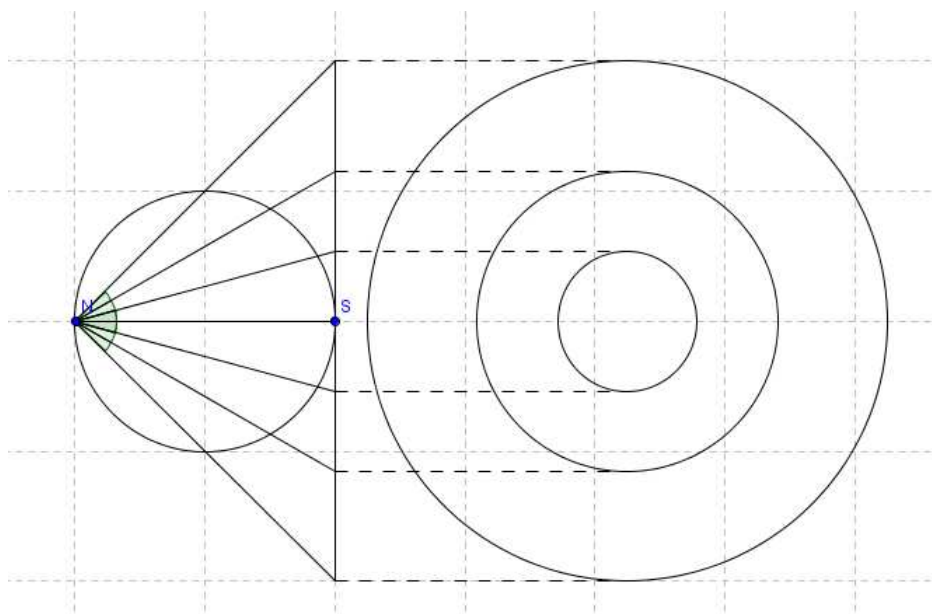


Figura 3.18: projeção estereográfica

### Projeção gnomônica

Na projeção gnomônica temos uma semi-reta partindo do centro da esfera e intersectando plano e esfera juntamente.

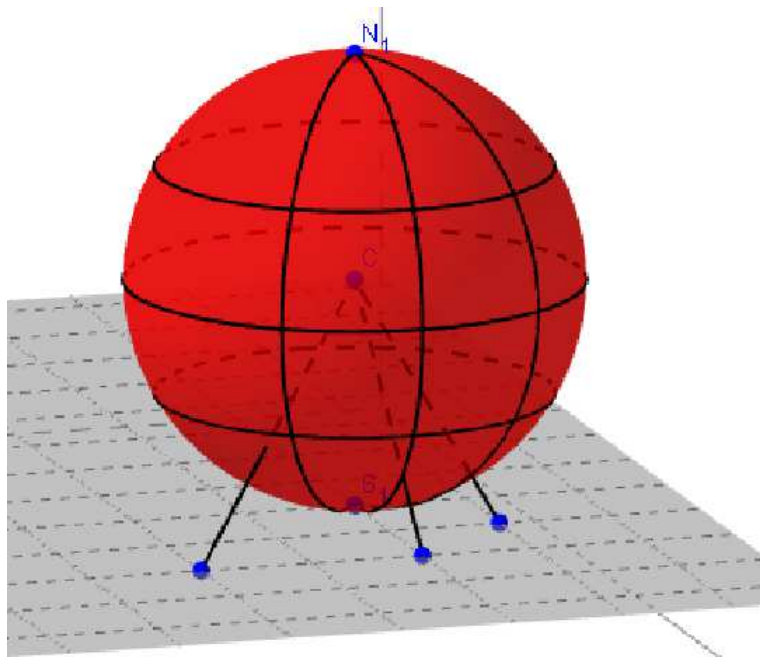


Figura 3.19: projeção estereográfica

Observe a seção que representa a interseção de um plano que passa por  $N$  e  $S$ . Pontos da esfera são projetados por semi-retas que passam pelo centro da esfera e intersectam o plano.

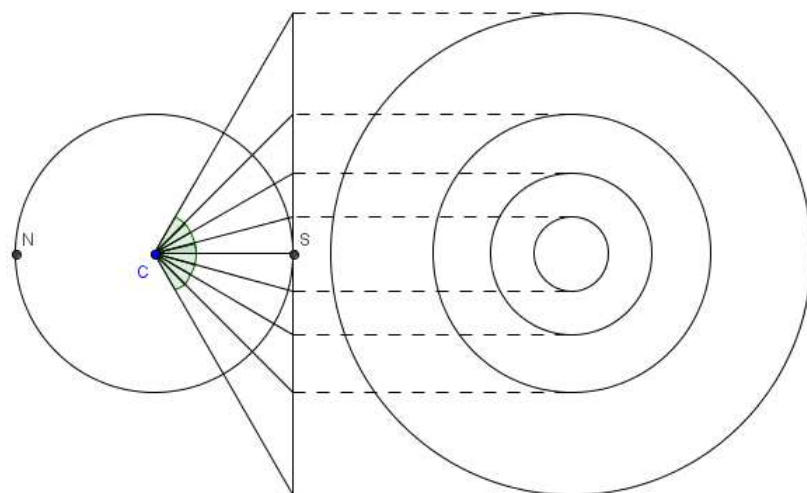


Figura 3.20: Projeção Gnomônica

### Projeção ortogonal

Nesta forma de projeção azimutal, a esfera é intersectada por retas perpendiculares ao plano de projeção.

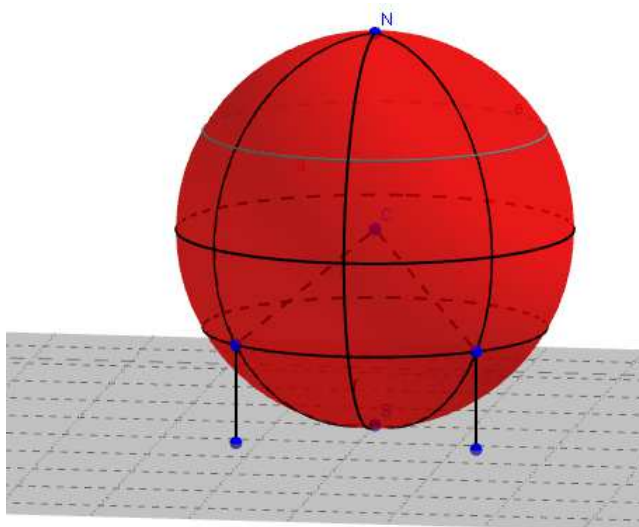


Figura 3.21: Projeção ortogonal

Observe na figura 3.22 que os pontos contidos na esfera são projetados a partir de retas perpendiculares ao plano.

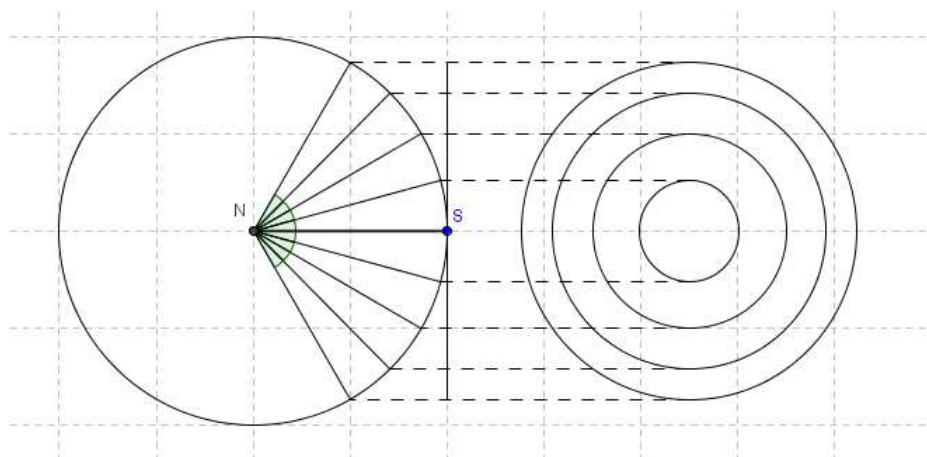


Figura 3.22: Projeção Ortogonal

### Principais características das projeções azimutais

- O ponto de tangência entre esfera e plano torna-se o centro do mapa.
- As regiões distantes do centro do mapa tem sua área ampliada
- Meridianos são representados por retas que se intersectam no centro e paralelos são dados por círculos concêntricos ao centro do mapa.

Observe um mapa<sup>4</sup> construído a partir de uma projeção azimutal.

---

<sup>4</sup>Disponível em: < [http : //upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/37/Lambert – azimuthal – equal – area.jpg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/37/Lambert-azimuthal-equal-area.jpg) > Acesso ago. 2014.





Figura 3.23:

---

# PROJEÇÕES DA ESFERA

---

Neste capítulo estudaremos mais pontualmente algumas projeções da esfera no plano, uma das inúmeras aplicações da geometria analítica espacial. Tais projeções, conforme já discutido no Capítulo 3, aparecem em abundância no estudo da **cartografia**, ciência que trata da concepção, difusão, utilização e estudos de mapas.

Existem várias maneiras de “mapear” a esfera. Trataremos aqui das projeções **Estereográfica**, **Cilíndrica**, **Ortogonal**, **Gnomônica** e **Cônica**. Antes porém, adotemos algumas convenções de notação.

## 4.1 Convenções

Ao longo desse capítulo consideraremos fixados uma esfera  $\gamma$  de raio  $r$  e dois pontos diametralmente opostos dessa esfera, os quais denotaremos por  $N$  e  $S$  e chamaremos **pólo norte** e **pólo sul** de  $\gamma$ , respectivamente. Motivados pelo estudo do globo terrestre, chamaremos a reta  $\overleftrightarrow{NS}$  de **eixo de rotação** da esfera.

Ainda motivados pela aplicação clássica das projeções em cartografia, definimos numa esfera  $\gamma$  com eixo  $\overleftrightarrow{NS}$  fixado, curvas denominadas meridianos e paralelos:

- **Meridianos** são semi-círculos obtidos pela intersecção de  $\gamma$  com os semi-planos de base  $\overleftrightarrow{NS}$ .
- **Paralelos** são as curvas obtidas pela intersecção de  $\gamma$  com planos ortogonais ao eixo de rotação  $\overleftrightarrow{NS}$ .

Para nós, uma **projeção da esfera**  $\gamma$  no plano euclidiano  $\mathbb{E}^2$  é uma aplicação bijetora contínua  $p : U \rightarrow V$ , onde  $U$  é um subconjunto da esfera  $\gamma$  e  $V$  um subconjunto do plano  $\mathbb{E}^2$ . Isto é,  $p$  é uma aplicação um-a-um de  $U$  em  $V$  que, em algum sentido, leva pontos em  $U$  em pontos em  $V$ .

É interessante notar que não existem bijeções contínuas entre toda a esfera e todo um plano. Isso é um fato topológico decorrente de funções contínuas preservarem compacidade e a esfera ser um espaço compacto e o plano não.

Nas seções seguintes, denotaremos por  $\pi$  o plano (do espaço) a ser identificado com o plano euclidiano  $\mathbb{E}^2$  e assumiremos  $\mathbb{E}^2$  munidos das coordenadas cartesianas usuais.

## 4.2 Projeção Estereográfica

Na versão mais clássica da projeção estereográfica, projetamos a esfera  $\gamma$  no plano  $\pi$  que tangencia a esfera em  $S$ , traçando retas secantes a esfera a partir de  $N$  (Ver Figura 4.1). Cada ponto  $P$  da esfera será mapeado no ponto  $Q$  dado pela intersecção de  $\pi$  com a reta  $\overleftrightarrow{NP}$ .

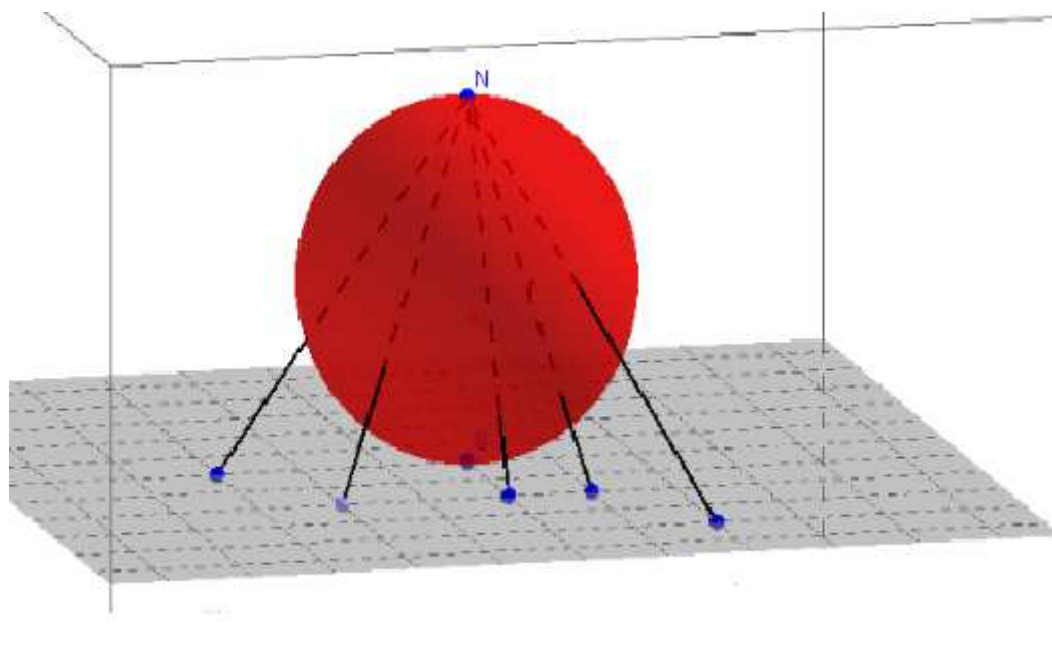


Figura 4.1: Projeção Estereográfica

Observe que a projeção  $p$  descrita acima é uma bijeção entre  $U = \gamma - \{N\}$  e todo o plano  $\pi$  ( $p : (\gamma - \{N\}) \rightarrow \pi$ ).

#### 4.2.1 Projeção estereográfica em coordenadas cartesianas

Para parametrizarmos a esfera de uma forma simples, porém geral, adotemos algumas convenções que facilitarão nossos cálculos.

Considere a esfera  $\gamma$  centrada no ponto  $C = (0, 0, r)$ . Sejam  $S = (0, 0, 0)$  e  $N = (0, 0, 2r)$ . Desse modo temos que  $\pi$  é o plano  $Oxy$ . Observamos que para toda esfera  $\gamma$  de raio  $r$  e quaisquer escolhas de  $S$  e  $N$ , podemos tomar um sistema de coordenadas centrado em  $S$  onde o centro  $C$  de  $\gamma$  tem as coordenadas acima descritas (e de modo que  $\pi$  é o plano  $Oxy$ ).

Para tal sistema de coordenadas temos:

$$\gamma : x^2 + y^2 + (z - r)^2 = r^2$$

$$\pi : z = 0.$$

Seja  $P = (x_0, y_0, z_0)$  um ponto qualquer da  $\gamma$ . Encontremos as coordenadas de sua projeção  $Q \in \pi$ .

Para tal considere a reta  $\overleftrightarrow{NP}$  de equação vetorial  $X = N + t(\overrightarrow{NP})$ . Tomando  $X = (x, y, z)$ , temos as equações paramétricas de  $\overleftrightarrow{NP}$ :

$$\overleftrightarrow{NP} : \begin{cases} x = x_0 t \\ y = y_0 t \\ z = 2r + (z_0 - 2r)t \end{cases}$$

Tomando a intersecção de  $\overleftrightarrow{NP}$  com o plano  $z = 0$  obtemos:

$$2r + (z_0 - 2r)t = 0$$

Donde temos que a reta  $\overleftrightarrow{NP}$  intersecta  $\pi$  para o parâmetro:

$$t = \frac{2r}{2r - z_0}.$$

Observe que é necessário que  $2r - z_0 \neq 0$ , tendo em vista que conforme construimos a reta  $\overleftrightarrow{NP}$  e o plano  $\pi$ , a intersecção entre mesmos nunca poderá ser vazia, logo:

$$Q = \left( \left( \frac{2r}{2r - z_0} \right) x_0, \left( \frac{2r}{2r - z_0} \right) y_0, 0 \right)$$

Fazendo a identificação canônica de  $\pi = Oxy$  com o plano cartesiano

(projeção nas duas primeiras coordenadas) temos a projeção:

$$\begin{aligned} p : (\gamma - \{N\}) &\longrightarrow \mathbb{E}^2 \\ (x_0, y_0, z_0) &\longmapsto \left( \left( \frac{2r}{2r-z_0} \right) x_0, \left( \frac{2r}{2r-z_0} \right) y_0 \right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

**Observação 4.1.** *É um bom exercício observar que, tivessemos nós tomado  $\gamma$  com centro na origem do sistema de coordenadas e  $\pi : z = (-r)$  teríamos obtido a projeção:*

$$\begin{aligned} p : (\gamma - \{N\}) &\longrightarrow \mathbb{E}^2 \\ (x_0, y_0, z_0) &\longmapsto \left( \left( \frac{2r}{r-z_0} \right) x_0, \left( \frac{2r}{r-z_0} \right) y_0 \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

## 4.2.2 Projeção estereográfica de meridianos e paralelos

### Projetando Meridianos

Como já sabemos, os semi-círculos da esfera passando com extremos pelo polo norte e pelo polo sul são chamados **meridianos**. Vimos que, fixado um meridiano, existe um único semi-plano  $\mu$  que o contém e que contém o eixo de rotação da esfera (e, portanto o pólo norte da esfera). Notando que a imagem pela projeção estereográfica de pontos da esfera contidos no plano  $\mu$  continuam no mesmo semi-plano, não é difícil concluir que a imagem do meridiano por tal projeção é a semi-reta dada pela interseção de  $\mu$  com o plano  $Oxy$ .

Considere o meridiano pelo ponto  $A = (x_0, y_0, z_0)$  da esfera,  $A \neq N$ ,  $A \neq S$ . Encontremos a equação de  $\pi$ :

$$\overrightarrow{AN} = (0, 0, 2r) - (x_0, y_0, z_0) = (-x_0, -y_0, 2r - z_0)$$

$$\overrightarrow{AS} = (0, 0, 0) - (x_0, y_0, z_0) = (-x_0, -y_0, -z_0)$$

Daí temos  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = ((2y_0), (-2x_0), 0)$  e,

$$\pi : (2y_0)x - (2x_0)y = 0 \quad (x_0x) \geq 0.$$

Logo para encontrar a projecção  $\underline{R}$  do meridiano contido no plano  $\pi$  basta encontrar a intersecção de  $\mu$  com o plano  $Oxy$  ( $z = 0$ ):

$$\underline{R} : \begin{cases} (2y_0)x - (2x_0)y = 0 \\ z = 0 \quad (x_0x) \geq 0. \end{cases}$$

Dessa intersecção obtemos como equações paramétricas da  $\underline{R}$ :

$$\underline{R} : \begin{cases} x = x_0t \\ y = y_0t \quad t \geq 0. \\ z = 0 \end{cases}$$

Um estudo de extrema relevância no campo das projecções cartográficas, é constituído justamente pelas distorções ao tentar planificar uma esfera, como já sabemos é impossível se manter todas as características do globo simultaneamente sejam elas distâncias, proporções ou ângulos.

Logo vamos abordar em cada projecção as alterações cometidas principalmente na projecção de meridianos e paralelos

Observe agora na projecção estereográfica de meridianos algumas peculiaridades.

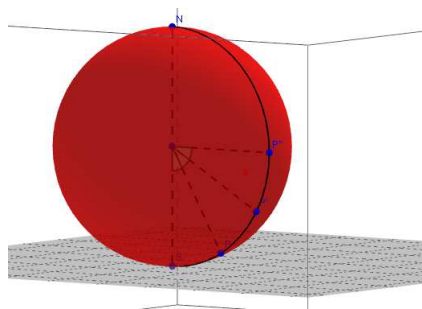


Figura 4.2:

Considere na figura 4.2 arcos correspondentes a ângulos de  $\frac{\pi}{6}$  radianos.

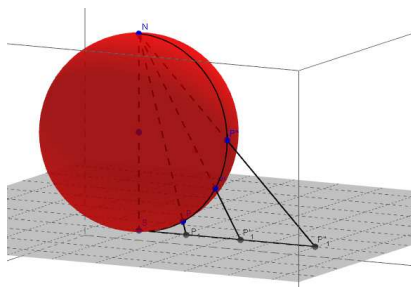


Figura 4.3:

Observe porém, na figura 4.3 que a projeção destes pontos que distam  $(\frac{\pi}{6})r \approx 0.52r$  entre si na esfera, têm distância crescente no plano a medida que o ponto a ser projetado se afasta do ponto  $S$ , sendo  $|\overrightarrow{SP_1}| \approx 0.53r$ ,  $|\overrightarrow{P_1P_1'}| \approx 0.62r$  e  $|\overrightarrow{P_1P_1''}| \approx 0.85r$

Podemos então, concluir que os arcos a serem projetados próximos do ponto  $N$  possuem uma distorção maior que os arcos próximos do ponto  $S$ .



### Projetando Paralelos

Paralelos são circunferências contidas em planos perpendiculares ao eixo de rotação da esfera. Iremos utilizar novamente o plano  $Oxy$  como plano projeção e o eixo  $Oz$  como eixo de rotação da esfera.

Podemos deduzir que a projeção de um paralelo contido na esfera para o plano se resume a um círculo, cujo raio é multiplicado por uma constante. Como já sabemos a transposição de um ponto qualquer da esfera dado por  $P = (x_0, y_0, z_0)$  resulta no ponto  $P' = ((\frac{2r}{2r-z_0}).x_0, (\frac{2r}{2r-z_0}).y_0, 0)$  que pertence ao plano, logo para projetarmos um paralelo  $\alpha$  para o plano  $Oxy$ , basta multiplicarmos o raio do paralelo pela constante  $(\frac{-2r}{z_0-2r})$  onde  $z_0$  representa a coordenada  $z$  de todos os pontos que pertencem ao plano  $\alpha$ , logo se  $x^2 + y^2 = R^2$  onde  $z = z_0$  é um paralelo contido na esfera então  $x^2 + y^2 = ((\frac{2r}{2r-z_0})R)^2$  é a projeção deste paralelo no plano  $Oxy$ .

Comparando a projeção de dois paralelos idênticos da esfera, encontramos algumas diferenças significativas.

Seja uma esfera  $\gamma : x^2 + y^2 + (z - r)^2 = r^2$  onde está contido o paralelo  $\alpha$  que pertence ao plano  $z = \frac{r}{2}$  e o paralelo  $\beta$  pertencente ao plano  $z = \frac{3r}{2}$ , necessariamente  $\alpha$  e  $\beta$  possuem raio igual a  $\frac{r\sqrt{3}}{2}$ , porém na projeção estereográfica destes paralelos encontramos alguns contrastes.

Projetando o paralelo  $\alpha$  temos:

$$\begin{aligned}
 j : (\gamma) &\longrightarrow Oxy \\
 \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = (\frac{r\sqrt{3}}{2})^2 \\ z = \frac{r}{2} \end{array} \right. &\longmapsto x^2 + y^2 = (\frac{2r\sqrt{3}}{3})^2 \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

Projetando o paralelo  $\beta$  temos:

$$j : (\gamma) \longrightarrow Oxy$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ z = \frac{3r}{2} \end{cases} \longmapsto x^2 + y^2 = (2r\sqrt{3})^2 \quad (4.4)$$

Observe que apesar de  $\alpha$  e  $\beta$  serem paralelos idênticos, na projeção estereográfica o raio de  $\alpha$  foi multiplicado pela constante  $\frac{4}{3}$ , enquanto o raio de  $\beta$  foi multiplicado pela constante 4, ou seja, quanto mais próximo do ponto  $N$  maior será o raio do paralelo.

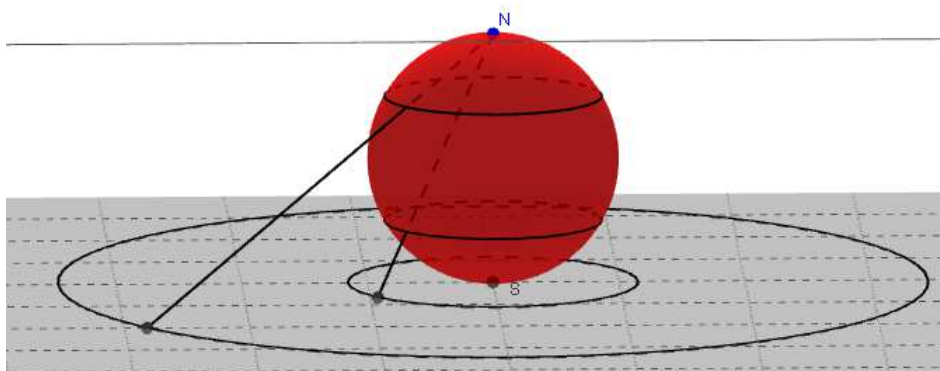


Figura 4.4:

### 4.2.3 Atividades Propostas

**Atividade 4.1.** Dada uma esfera de raio 2 e centro  $(0, 0, 2)$ , encontre a projeção estereográfica do ponto  $P = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$  pertencente a esfera no plano  $Oxy$

*Resolução:* Consideremos, como feito na Seção 4.2, a esfera de equação  $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$ ,  $N = (0, 0, 4)$  e  $z = 0$ , o plano de projeção.

A reta  $\overleftrightarrow{NP}$  tem como equações paramétricas:

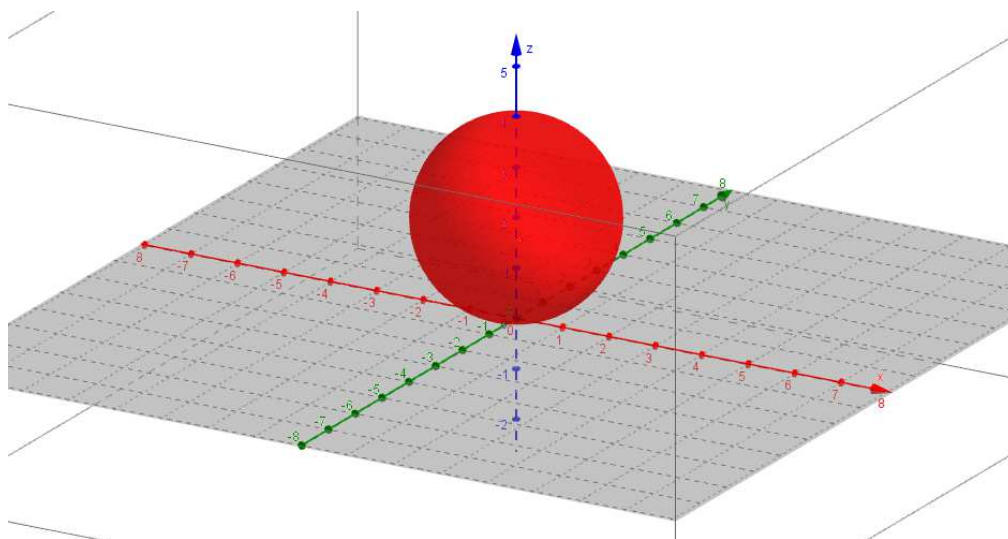


Figura 4.5: esfera  $\implies x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 2^2$

Podemos projetar pontos da esfera diretamente para o plano, para isso vamos utilizar a função 4.1 já construída anteriormente.

$$\begin{aligned}
 p : (\gamma - \{N\}) &\longrightarrow \mathbb{E}^2 \\
 (x_0, y_0, z_0) &\longmapsto \left( \left( \frac{2r}{2r - z_0} \right) x_0, \left( \frac{2r}{2r - z_0} \right) y_0 \right)
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 p : P &\longrightarrow \mathbb{E}^2 \\
 (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) &\longmapsto (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

□

**Atividade 4.2.** Dado o ponto  $P = (2, 0, 2)$  e o ponto  $S = (0, 0, 0)$  que pertencem a equação de esfera  $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 2^2$ , calcule a distância entre estes dois pontos na esfera, projete através da projeção estereográfica estes pontos no plano e compare suas distâncias na esfera e no plano.

*Resolução:*

Como já sabemos, a distância entre pontos em uma esfera não pode ser calculada como uma linha reta, por isso precisamos do ângulo  $POS$  onde o ponto  $O$  é o centro da esfera. Temos  $\vec{OS} = (0, 0, -2)$  e  $\vec{OP} = (2, 0, 0)$ .

Como  $\vec{OS} \cdot \vec{OP} = 0$  temos:

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

Sabendo que o perímetro da maior circunferência da nossa esfera corresponde a  $4\pi$  e por sua vez este perímetro corresponde a  $2\pi$  radianos, logo  $\frac{\pi}{2}$  radianos irá corresponder a uma distância de  $\pi$ .

Portanto a distância entre os pontos  $P$  e  $S$  que pertencem a esfera é igual a  $\pi$ .

Usando a equação (5.26) para projetar os pontos  $S = (0, 0, 0)$  e  $P = (2, 0, 2)$  em  $S'$  e  $P'$  respectivamente obtemos:

$$S' = (0, 0)$$

$$P' \left( \left( \frac{4}{2} \right) 2, 0 \right) = (4, 0)$$

Assim a distância de  $P$  a  $S$  na esfera é igual  $\pi \approx 3.1415$ , mas estes mesmos pontos projetados no plano distam 4 entre si, logo podemos concluir que a distância entre dois pontos em uma esfera pode não ser a mesma caso estes pontos sejam projetados no plano. De fato, a projeção estereográfica sempre aumenta as distâncias entre pontos.  $\square$

**Atividade 4.3.** Dada uma esfera de centro  $C = (0, 0, 5)$  onde raio  $r = 5$ , um paralelo contido no plano  $z = 2$  e um meridiano contido no plano

$\pi : -4x + 2y = 0$  onde o ponto  $(\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, 5)$  pertence ao meridiano, faça a projeção estereográfica deste meridiano e deste paralelo no plano  $Oxy$ .

*Resolução:*

### Projetando o paralelo

Podemos deduzir que a equação do paralelo é dada por  $x^2 + y^2 = 4^2$  onde todos os pontos que atendem esta equação mantêm  $z = 2$ .

Como já sabemos na projeção estereográfica para projetar um ponto  $P = (x_0, y_0, z_0)$  da esfera para o plano  $Oxy$  deve-se multiplicar as coordenadas pela constante  $t = \frac{2r}{2r-z_0}$  onde  $z = 0$  assim temos  $P' = (x_0 \cdot \frac{2r}{2r-z_0}, y_0 \cdot \frac{2r}{2r-z_0}, 0)$ , portanto podemos concluir que a projeção de um paralelo da esfera consiste em uma circunferência com o raio multiplicado pela constante  $t = \frac{2r}{2r-z_0}$  onde  $r$  é o raio da esfera e  $z_0$  é onde o paralelo está contido.

Logo, se  $x^2 + y^2 = 4^2$  é a equação do paralelo contido na esfera onde  $z = 2$ , então a projeção deste paralelo no plano  $Oxy$  será dada por  $x^2 + y^2 = ((\frac{2 \cdot 5}{2 \cdot 5 - 2}) \cdot 4)^2$ .

Assim, se temos o paralelo  $x^2 + y^2 = 4^2$  então a projeção deste paralelo no plano  $Oxy$  será  $x^2 + y^2 = 5^2$ .

### Projetando o meridiano

Vamos projetar agora o meridiano que está contido no plano  $\pi : -4x + 2y = 0$  no plano  $Oxy$ , para realizar esta projeção sabemos que basta fazer a intersecção do plano  $\pi$  com o plano  $Oxy$ .

Seja  $\vec{u} = (0, 0, 1)$  vetor diretor do plano  $Oxy$  e  $\vec{v} = (-4, 2, 0)$  vetor diretor do plano  $\pi$  e sabendo que a intersecção entre estes dois planos é uma reta podemos definir o vetor diretor desta reta através do produto vetorial entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , logo:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Sendo  $\vec{u} \times \vec{v} = (-2, 4, 0)$  basta agora definir um ponto que pertence a reta de intersecção entre  $Oxy$  e  $\pi$ , para isso adotando  $z = 0$  temos:

$$\begin{cases} -4x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Necessariamente temos vários pontos de cota igual a zero contidos na reta de intersecção, logo adotaremos o ponto  $(1, 2, 0)$  para construção da reta de intersecção.

$$\pi \cap Oxy : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - 4t \\ z = 0 \end{cases}$$

Tendo em vista que o ponto  $(\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, 5)$  pertence ao meridiano e a reta de projeção deve estar contida no mesmo octante do ponto, o parâmetro  $t$  deve assumir  $t \geq 0$ .

□

### 4.3 Projeção Cilíndrica

Nesta projeção temos uma esfera  $\gamma$  que será inscrita no interior de um cilindro equilátero  $\beta$  com o mesmo eixo de rotação  $\overleftrightarrow{NS}$  e raio da base igual ao raio  $r$  da esfera.

Para projetar um ponto  $P$  da esfera tomamos a semi-reta  $\underline{E}_P$  por  $P$  perpendicular a  $\overleftrightarrow{NS}$ . O ponto de interseção da semi-reta  $\underline{E}_P$  com o cilindro, denominamos  $Q$  e é a projeção de  $P$  no cilindro.

Finalmente, planificamos o cilindro "recortando-o" ao longo de uma reta vertical  $s$  pré-determinada e assim, obtemos a projeção da esfera numa região retangular  $V$  do plano euclideo ( $-\pi r \leq x < \pi r, 0 < y < 2r$ ).

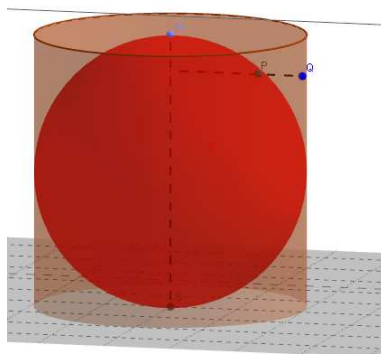


Figura 4.6: Projeção cilíndrica

A composta da função que projeta a esfera no cilindro com a planificação do cilindro, é o que chamamos de projeção cilíndrica  $p$  da esfera. A função  $p : U \rightarrow V$  é uma bijeção entre a esfera sem seus pólos, ou seja,  $U = (\gamma - N, S)$  e a região retangular  $V$  de  $\mathbb{E}^2$  descrita pelas desigualdades :

$$V : \begin{cases} -\pi r \leq x < \pi r \\ 0 < y < 2r \end{cases}$$

### 4.3.1 Projeção da esfera no cilindro

Para facilitar nossos cálculos, consideraremos uma esfera com centro  $C = (0, 0, 0)$ , onde o eixo de rotação  $\overleftrightarrow{NS}$  seja o eixo coordenado  $Oz$  e o ponto de tangência da esfera com a base do cilindro seja o ponto  $S = (0, 0, -r)$ . Tomamos estes parâmetros tendo em vista que todo cilindro e toda esfera pode ser deslocada no espaço assumindo essas posições sem que suas propriedades sejam alteradas.

Vamos encontrar a projeção  $Q$  do ponto  $P = (x_0, y_0, z_0)$  onde  $Q$  é um ponto do cilindro e  $P$  um ponto da esfera.

Definindo algumas equações essenciais temos:

$$\begin{aligned} \gamma : x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \\ \beta : x^2 + y^2 &= r^2, \quad 0 \leq z < 2r \\ \overleftrightarrow{NS} : (0, 0, 1)t &\quad (t \in R). \end{aligned}$$

Tomamos então  $\underline{E}$  como a semi-reta  $\underline{P_1P}$  onde  $P_1 = (0, 0, z_0)$ . Tal semi-reta é assim, perpendicular a  $\overleftrightarrow{NS}$  e passa por  $P$ .

$$\underline{E} : \begin{cases} x = x_0t \\ y = y_0t \quad \text{onde } t \geq 0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

Realizando a intersecção da semi-reta  $\underline{E}$  com o cilindro  $\beta$  teremos a projeção  $Q$ .



$$\underline{E} \cap \beta : (x_0 t)^2 + (y_0 t)^2 = r^2$$

Podemos observar na equação de intersecção que o parâmetro  $t$  assume dois valores.

$$t^2 = \frac{r^2}{x_0^2 + y_0^2}$$

$$\text{logo temos } t = \sqrt{\frac{r^2}{x_0^2 + y_0^2}} \text{ ou } t = -\sqrt{\frac{r^2}{x_0^2 + y_0^2}}$$

Sabendo que cada parâmetro  $t$  dá origem a um ponto, necessariamente temos dois pontos para  $Q$ , tendo em vista que buscamos o parâmetro onde  $t \geq 0$  é necessário neste caso descartar o valor negativo.

$$\begin{aligned} g : (\gamma - \{N, S\}) &\longrightarrow \beta \\ (x_0, y_0, z_0) &\longmapsto \left( \left( \frac{x_0 r}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \right), \left( \frac{y_0 r}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \right), z_0 \right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Neste caso particular, podemos assumir como representante do ponto  $P$  no cilindro  $\beta$  o ponto  $Q = \left( \left( \frac{x_0 r}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \right), \left( \frac{y_0 r}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \right), z_0 \right)$

### 4.3.2 Planificação do cilindro e Projeção cilíndrica no plano

Na projeção cilíndrica, projetamos a esfera  $\gamma$  no cilindro  $\beta$ , porém estamos trabalhando com esferas planificadas, logo este cilindro precisa tomar a forma de um plano.

Seja  $Q = (x_1, y_1, z_1)$  um ponto que pertence ao cilindro, vamos projetar este ponto no plano.

Como já sabemos, o eixo  $Oz$  é o eixo simétrico de nosso cilindro equilátero de raio  $r$ , logo para abrirmos o cilindro em um retângulo, é

preciso definir uma **reta de corte** paralela ao eixo  $Oz$  que esteja contida no cilindro.

Para mapearmos o ponto  $Q = (x_1, y_1, z_1)$  do cilindro num ponto do plano cartesiano  $Oxz$ , basta tomarmos a coordenada  $y$  igual a  $z_1$  e  $x$  como a "distância" (no cilindro) do ponto  $Q$  a uma reta de referência  $\overleftrightarrow{R}$ .

Para facilitar nossos cálculos, tomaremos  $\overleftrightarrow{R}$  como a reta vertical pelo ponto  $X = (r, 0, 0)$ :

$$\overleftrightarrow{R} : \begin{cases} x = r \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

Mais precisamente, seja  $Q = (x_1, y_1, z_1)$  com  $y_1 > 0$ . Considere o círculo por  $Q$  num plano normal a  $\overleftrightarrow{NS}$ . A coordenada  $x$  da projeção de  $Q$  no plano cartesiano é então, o comprimento do arco entre  $Q$  e  $Q_1$ , onde  $Q_1$  é a interseção do círculo com a reta  $\overleftrightarrow{R}$ . De modo a mantermos a continuidade da projeção do cilindro no plano cartesiano, se  $y_1 \leq 0$  tomamos a coordenada  $x$  da projeção de  $Q$  como menos o comprimento acima descrito. Tal escolha "recorta" o cilindro ao longo da reta  $\overleftrightarrow{K}$ :

$$\overleftrightarrow{K} : \begin{cases} x = -r \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

**Observação 4.2.** *Essa divisão em  $y_1 > 0$  e  $y_1 \leq 0$  do cilindro aparece, pois por definição, o ângulo entre dois vetores está entre  $0$  e  $\pi$  porém, para darmos uma volta completa no cilindro temos que variar o ângulo  $\theta = \angle Q_2Q_1$  entre  $-\pi$  e  $\pi$ .*

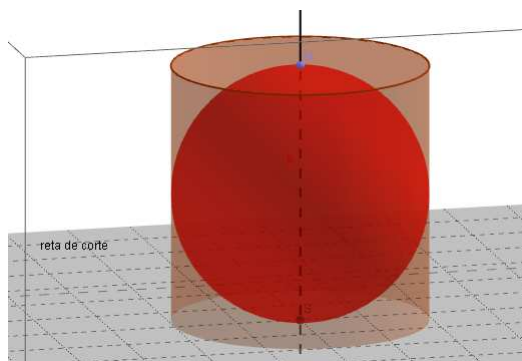
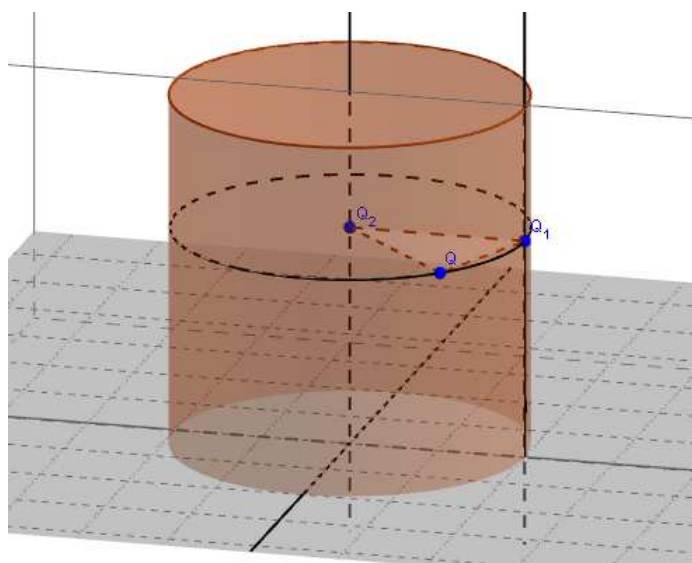


Figura 4.7: reta de corte

Para o cálculo da distância de  $Q$  a reta de corte, calculemos utilizando o produto interno do ângulo entre  $Q = (x_1, y_1, z_1)$  e  $Q_1 = (r, 0, z_1)$  com vértice  $Q_2 = (0, 0, z_1)$ .

Figura 4.8: Triângulo  $QQ_1Q_2$ 

Primeiramente, vamos calcular o ângulo  $QQ_2Q_1$  definido por  $\theta$ .

Sendo  $\overrightarrow{QQ_2} = (-x_1, -y_1, 0)$ ,  $\overrightarrow{Q_1Q_2} = (-r, 0, 0)$  onde  $\|\overrightarrow{QQ_2}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$  e  $\|\overrightarrow{Q_1Q_2}\| = r$  desenvolvendo o conceito de produto interno temos:

$$\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{QQ_2} \cdot \overrightarrow{Q_1Q_2}}{\|\overrightarrow{QQ_2}\| \cdot \|\overrightarrow{Q_1Q_2}\|} \quad \text{donde} \quad \cos(\theta) = \frac{x_1}{r},$$

logo,

$$\theta = \arccos\left(\frac{x_1}{r}\right)$$

A definição do ângulo  $\theta$ , possibilita o cálculo da distância entre o ponto  $Q$  e a reta  $\overleftrightarrow{K}$ , sendo  $2\pi r$  o perímetro da circunferência para um ângulo de  $2\pi$  radianos, podemos recorrer a proporcionalidade para definir a distância procurada.

Logo podemos definir a distância entre  $Q$  e  $\overleftrightarrow{K}$  como  $r \cdot \arccos\left(\frac{x_1}{r}\right)$

Estamos em condições agora de identificar a projeção de pontos do cilindro  $\beta$  no plano  $Oxz$ .

$$\begin{aligned} f^+ : (\beta^+) &\longrightarrow Oxz \\ (x_1, y_1, z_1) &\longmapsto \left( \left( r \cdot \arccos\left(\frac{x_1}{r}\right) \right), z_1 \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde  $\beta^+$  é a região do cilindro  $\beta$  com  $y > 0$ .

Agora, se  $Q = (x_1, y_1, z_1)$  com  $y_1 \leq 0$ ,

$$\theta = -\arccos\left(\frac{x_1}{r}\right)$$

Assim,

$$\begin{aligned} f^- : (\beta^-) &\longrightarrow Oxz \\ (x_1, y_1, z_1) &\longmapsto \left( \left( -r \cdot \arccos\left(\frac{x_1}{r}\right) \right), z_1 \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde  $\beta^-$  é a região do cilindro  $\beta$  com  $y \leq 0$ .

Finalmente temos:

$$\begin{aligned} f : (\beta) &\longrightarrow Oxz \\ (x_1, y_1, z_1) &\longmapsto \left( \left( \frac{y_1}{|y_1|} \right) r \cdot \arccos\left(\frac{x_1}{r}\right), z_1 \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

A projeção cilíndrica da esfera (no plano cartesiano) é desse modo a composta  $p = (f \circ g)$ , da equação acima e da equação 4.7, logo temos:

$$\begin{aligned} p : \gamma - N, S &\longrightarrow Oxz \\ (x_0, y_0, z_0) &\longmapsto \left( \left( \frac{y_0}{|y_0|} \right) r \cdot \arccos\left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}\right), z_0 \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

### 4.3.3 Projeção cilíndrica de meridianos e paralelos

#### Projetando Meridianos

Seja  $\gamma$  uma esfera de centro  $O = (0, 0, 0)$ , contida em um cilindro  $\beta$  cujo eixo simétrico seja  $z$  e seja  $\pi$  um plano que contém o meridiano  $\alpha$  o qual desejamos projetar.

Podemos deduzir que a projeção do meridiano  $\alpha$  no cilindro  $\beta$  se reduz a interseção do plano  $\pi$  com o cilindro  $\beta$ .

Definindo a equação do cilindro e do plano, temos  $\beta : x^2 + y^2 = r^2$  onde  $0 < z < 2r$  e  $\pi : x(y_0) - y(x_0) = 0$ , observe que o plano  $\pi$  nada mais é que um plano com eixo simétrico  $z$  por um ponto qualquer  $P = (x_0, y_0, z_0)$  que também pertence ao meridiano.

Intersecção do cilindro  $\beta$  com o plano  $\pi$ :

$$\beta \cap \pi : \left( \frac{y(x_0)}{y_0} \right)^2 + y^2 = r^2$$

desenvolvendo nossa equação teremos:

$$\beta \cap \pi : y^2 = \frac{y_0^2 \cdot r^2}{x_0^2 + y_0^2}$$

observe a existência de dois resultados possíveis:

$$\beta \cap \pi : y = \pm \frac{y_0 \cdot r}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$$

Logo podemos construir duas retas de intersecção entre cilindro e plano, que poderiam representar a projeção do meridiano  $\alpha$  contido no plano  $\pi$ .

$$\beta \cap \pi : \begin{cases} x = \frac{x_0 \cdot r}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \\ y = \frac{y_0 \cdot r}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \\ z = t \end{cases}$$

$$\beta \cap \pi : \begin{cases} x = -\frac{x_0 \cdot r}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \\ y = -\frac{y_0 \cdot r}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \\ z = t \end{cases}$$

É importante ressaltar que apenas uma reta representa o meridiano  $\alpha$  proposto, tendo em vista que uma única reta está contida no mesmo octante que o ponto  $P = (x_0, y_0, z_0)$ , logo a equação que representa a projeção do meridiano  $\alpha$  no cilindro  $\beta$  será:

$$\beta \cap \pi : \begin{cases} x = \frac{x_0 \cdot r}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \\ y = \frac{y_0 \cdot r}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \\ z = t \end{cases}$$

Projetando o meridiano no plano cartesiano pela função  $f$  descrita na seção anterior temos :

$$f(\beta \cap \pi) : \begin{cases} x = \left(\frac{y_0}{|y_0|}\right) r \cdot \arccos\left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}\right) \\ z = t \end{cases}$$

Que descreve uma reta por  $p(P)$  paralela ao eixo  $Oz$

Vamos analisar, agora as variações cometidas pela projeção cilíndrica estudando a projeção de meridianos.

Seja a esfera  $\gamma$  contida no cilindro  $\beta$  e um meridiano  $\alpha$  contido em  $\gamma$ , conforme a figura 4.9, onde admitimos a existência de dois arcos do meridiano  $\alpha$  com ângulo central  $\frac{\pi}{4}$

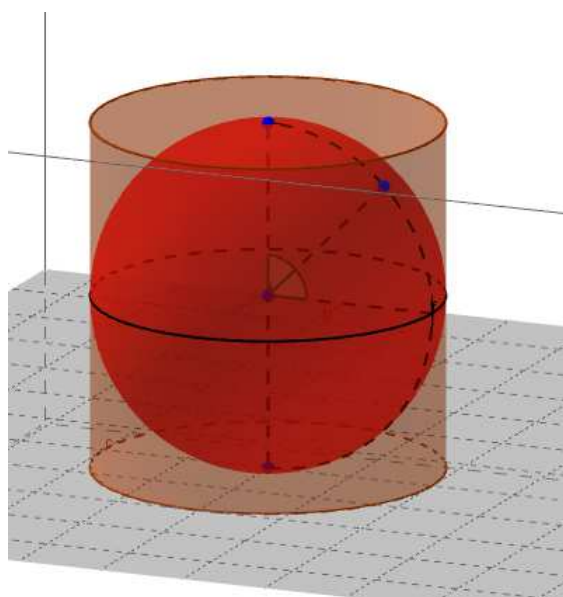


Figura 4.9: Arcos do meridiano  $\alpha$  contidos na esfera

Observe que na figura 4.10 que apresenta a projeção de dois arcos idênticos pertencentes ao meridiano  $\alpha$  no cilindro  $\beta$ , existe uma variação no comprimento das projeções, sendo  $\|\overrightarrow{EQ}\| = \frac{r\sqrt{2}}{2}$  e  $\|\overrightarrow{QQ'}\| = \frac{2r-r\sqrt{2}}{2}$

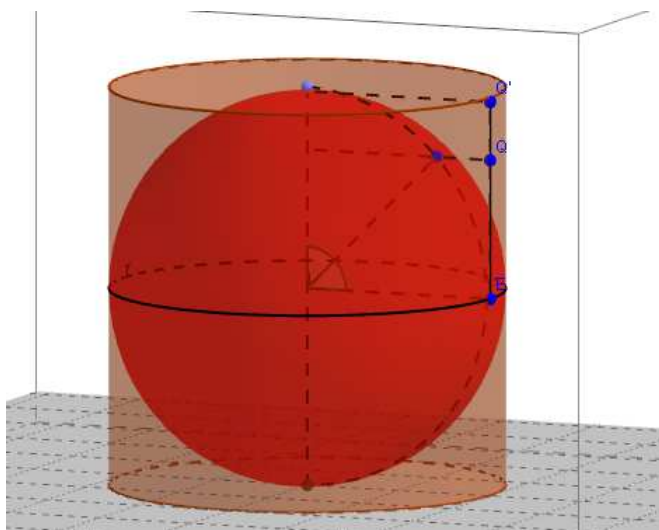


Figura 4.10: Projeção de arcos do meridiano  $\alpha$  no cilindro  $\beta$

Note que quanto mais distante da linha do equador, maior será a diferença entre o comprimento do arco e sua respectiva projeção, ou seja, as áreas próximas da linha do equador possuem uma representação mais fiel do que as próximas dos pontos  $N$  e  $S$ .

### Projetando paralelos

Seja  $\gamma$  uma esfera de centro  $C = (0, 0, 0)$  e raio  $r$  contida em um cilindro  $\beta$ , havendo um paralelo  $\delta$  pertencente a esta esfera necessariamente há um plano  $\pi$  que contém este paralelo.

Logo a projeção do paralelo  $\delta$  no cilindro  $\beta$ , se resume a intersecção do plano  $\pi$  com o cilindro  $\beta$ .

Construindo a equação do cilindro temos  $\beta : x^2 + y^2 = r^2$  onde  $-r < z_0 < r$ , para o plano  $\pi$  vamos adotar a equação  $\pi : z = z_0$ , logo temos a intersecção:



$$\pi \cap \beta : \begin{cases} x = r \cos(t) \\ y = r \sin(t) \\ z = z_0 \end{cases}$$

Tendo em vista que parametrizamos  $\pi \cap \beta$  podemos agora utilizar a função  $p$  a fim de transpor o paralelo  $\delta$  para o plano  $Oxz$ .

$$\begin{aligned} p : \quad \gamma - \{N, S\} &\longrightarrow Oxz \\ (r \cos(t), r \sin(t), z_0) &\longmapsto \left( \left( \frac{r \sin(t)}{|r \sin(t)|} \right) r \cdot (t), z_0 \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Necessariamente também há peculiaridades na projeção de paralelos, quando utilizamos a projeção cilíndrica.

Na figura 4.11 podemos notar claramente que todos paralelos contidos em  $\gamma$  quando projetados, possuem o mesmo perímetro da base do cilindro, porém sabemos que o único paralelo que possui este perímetro é a linha do equador.

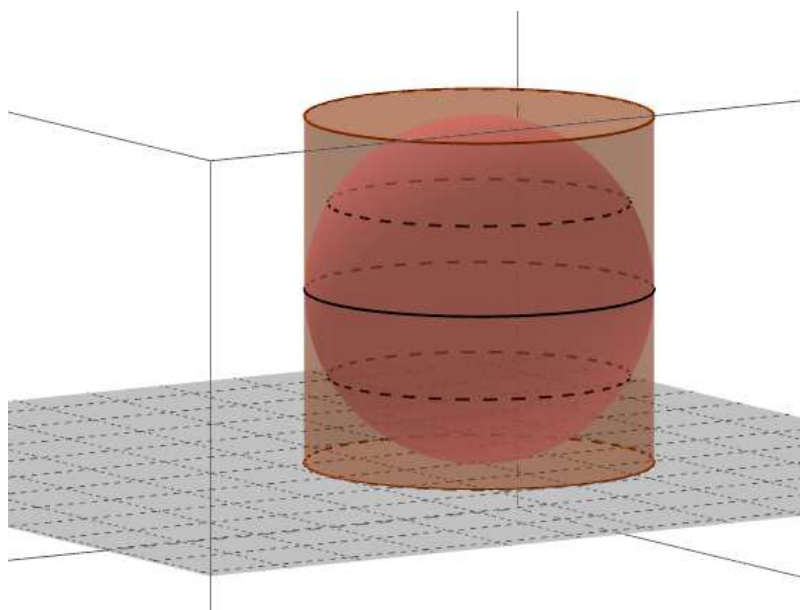


Figura 4.11: projetando paralelos

Logo todos os paralelos contidos na esfera  $\gamma$  possuem projeções cujo comprimento é  $2\pi.r$ , onde  $r$  é dado pelo raio da base do cilindro.

Portanto o único paralelo representado fielmente é a linha equatorial, todos os outros paralelos tem seu perímetro acrescido.

#### 4.3.4 Atividades Propostas

**Atividade 4.4.** Dado um cilindro de equação  $\beta: x^2 + y^2 = 2^2$  onde  $0 < z < 4$  e uma esfera  $\gamma: x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 2^2$  contida neste cilindro, identifique o representante do ponto  $P = (1, \sqrt{2}, 3)$  pertence a esfera no cilindro.

*Resolução:* Sendo o eixo  $z$  simétrico comum tanto na esfera como ao cilindro, traçamos uma reta semi-reta  $\overleftrightarrow{K}$  perpendicular a  $z$  passando por  $P$ .

$$\overleftrightarrow{K} : \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{2}t \\ z = 3 \end{cases} \text{ onde } t > 0$$

realizando a intersecção entre  $\beta$  e  $\overleftrightarrow{K}$  temos:

$$\beta \cap \overleftrightarrow{K} : (t)^2 + (\sqrt{2}t)^2 = 4$$

o parâmetro  $t$  assume dois valores distintos, logo:

$$\beta \cap \overleftrightarrow{K} : t = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ ou } t = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Necessariamente excluimos o parâmetro negativo e obtemos a função

$g$ :

$$\begin{aligned} g : (\gamma - \{N, S\}) &\longrightarrow \beta \\ (1, \sqrt{2}, 3) &\longmapsto \left( \left( \frac{2\sqrt{3}}{3} \right), \left( \frac{2\sqrt{6}}{3} \right), 3 \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

□

**Atividade 4.5.** *Seja um cilindro  $\beta$  de raio da base 5 e altura 10, cuja base está contida no plano  $Oxy$ , sendo  $z$  eixo simétrico. Dê as coordenadas do ponto  $P = (4, 3, 1)$  pertencente ao cilindro, em uma esfera  $\gamma: x^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 5^2$  inscrita em  $\beta$ .*

*Resolução:* Construimos uma semi-reta  $\underline{K}$  que seja perpendicular a  $z$  e passe pelo ponto  $P = (4, 3, 1)$ .

$$\underline{K} : \begin{cases} x = 4t \\ y = 3t \quad \text{onde } t > 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Para que seja definida a projeção é necessário a intersecção entre a semi-reta  $\underline{K}$  e a esfera  $\gamma: x^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 5^2$ .

$$\overleftrightarrow{K} \cap \gamma : (4t)^2 + (3t)^2 = 9$$

logo:

$$\overleftrightarrow{K} \cap \gamma : t^2 = \frac{9}{25}$$

Sendo  $t = \frac{3}{5}$  ou  $t = -\frac{3}{5}$  adotamos o parâmetro que mantém a reta no

mesmo octante do ponto  $(4, 3, 1)$

$$\begin{aligned} (\beta) &\longrightarrow \gamma \\ (4, 3, 1) &\longmapsto \left( \left( \frac{12}{5} \right), \left( \frac{9}{5} \right), 1 \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

□

**Atividade 4.6.** Considere um cilindro de equação  $\beta: x^2 + y^2 = 9$  onde  $-3 < z < 3$  e uma esfera de raio 3 centrada na origem. Realize a projeção no plano  $Oxz$  do paralelo  $\alpha$  contido no plano  $\pi: z = 1$ .

*Resolução:* Para calcular a projeção do paralelo  $\alpha$  contido no plano  $\pi$ , primeiramente vamos definir a interseção entre  $\beta$  e  $\pi$

$$\pi \cap \beta : \begin{cases} x = \sqrt{8}\cos(t) \\ y = \sqrt{8}\sen(t) \\ z = 1 \end{cases}$$

Utilizamos agora nossa função  $f$  para transpor o paralelo contido no cilindro para o plano  $Oxz$ :

$$\begin{aligned} f : (\beta - \{N, S\}) &\longrightarrow Oxz \\ (\sqrt{8}\cos(t), \sqrt{8}\sen(t), 1) &\longmapsto \left( \left( \frac{\sqrt{8}\sen(t)}{|\sqrt{8}\sen(t)|} \right) . r . \arccos\left(\frac{\sqrt{8}\cos(t)}{r}\right), 1 \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

□

**Atividade 4.7.** Dado um meridiano contido em uma esfera  $\gamma$  de centro  $C = (0, 0, 0)$  e raio igual a 5, tal que o semi-plano  $\mu$  representado pela equação  $2y - x = 0$  onde  $y > 0$  contém o meridiano  $\alpha$ . Projete este meridiano no plano  $Oxz$ , utilizando o cilindro  $\beta: x^2 + y^2 = 5^2$

onde  $-5 < z < 5$ , sabendo que o ponto  $P = (2, 1, 2\sqrt{5})$  pertence ao meridiano.

*Resolução:* para projetar o meridiano primeiramente devemos fazer a intersecção entre  $\beta$  e  $\mu$ .

$$\beta \cap \mu : (2y)^2 + y^2 = 5^2$$

como esperado teremos dois valores que satisfazem a intersecção.

$$\beta \cap \mu : y \pm \sqrt{5}$$

Logo podemos construir duas retas de projeção do meridiano  $\alpha$  no cilindro  $\beta$

$$\beta \cap \mu : \begin{cases} x = 2\sqrt{5} \\ y = \sqrt{5} \\ z = t \end{cases}$$
$$\beta \cap \mu : \begin{cases} x = -2\sqrt{5} \\ y = -\sqrt{5} \\ z = t \end{cases}$$

Sabemos que ambas as retas estão contidas no cilindro logo, é necessário definir qual reta representa a projeção do meridiano  $\alpha$ , observe que neste caso qualquer meridiano e sua respectiva projeção no cilindro mantém o mesmo octante, sabendo que o ponto  $P = (2, 1, 2\sqrt{5})$  pertence ao meridiano, temos:

$$\beta \cap \mu : \begin{cases} x = 2\sqrt{5} \\ y = \sqrt{5} \\ z = t \end{cases}$$

Porém ainda é necessário a projeção desta reta no plano  $Oxz$ , para isto basta utilizarmos a função já construída  $f$ , para projeção da reta  $\beta \cap \mu$ .

$$\begin{aligned} f : (\beta \cap \mu) &\longrightarrow Oxz \\ (2\sqrt{5}, \sqrt{5}, t) &\longmapsto \left( 5 \cdot \arccos\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right), t \right) \\ (2\sqrt{5}, \sqrt{5}, t) &\longmapsto (2.318, t) \end{aligned} \quad (4.16)$$

□

## 4.4 Projeção Ortogonal

Este tipo de projeção, possibilita apenas a projeção de metade da esfera sendo necessário duas planificações para contemplar toda a esfera, faremos a planificação apenas uma vez tendo em vista que o procedimento para a outra metade é análogo.

Considere  $\gamma$  a esfera com eixo de rotação  $\overleftrightarrow{NS}$ . Seja  $\pi$  um plano ortogonal a  $\overleftrightarrow{NS}$ . A projeção de um ponto  $P$  na semi-esfera inferior (superior) de  $\gamma$  é dada pela interseção de uma reta  $\overleftrightarrow{K}$  paralela a  $\overleftrightarrow{NS}$  passando por  $P$  com o plano  $\pi$ .

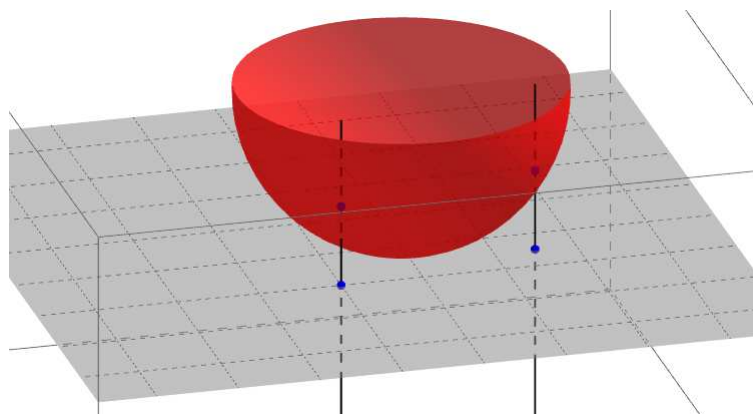


Figura 4.12: Projeção Ortogonal

#### 4.4.1 Projeção ortogonal em coordenadas cartesianas

##### Projetando pontos da esfera para o plano

Adotando a semi-esfera  $\gamma : x^2 + y^2 + (z - r)^2 = r^2$  onde  $z \leq r$  e o plano de projeção o plano  $Oxy$ , estudemos qual a projeção do ponto  $P = (x_0, y_0, z_0)$  pertencente a semi-esfera inferior ( $z \leq r$ ) no plano  $\pi$ .

Sendo  $z = 0$  a equação do plano  $Oxy$ , desejamos construir uma reta  $\overleftrightarrow{K}$  perpendicular a  $\pi$  passando por  $P$  logo:

$$\overleftrightarrow{K} : \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 + t \end{cases}$$

A intersecção da reta  $\overleftrightarrow{K}$  com o plano  $Oxy$  resulta na projeção do ponto  $P$  sobre  $\pi$ .

$$k \cap \pi : (z_0 + t) = 0$$

Sendo  $t = -z_0$  basta agora utilizar este parâmetro para transposição

do ponto  $P$

$$\begin{aligned} p : (\gamma^-) &\longrightarrow D_r \\ (x_0, y_0, z_0) &\longmapsto (x_0, y_0) \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde  $\gamma^-$  é a região de  $\gamma$  com  $z \leq r$  e  $D_r$  é o disco de raio  $r$  centrado no ponto  $(0, 0)$  do plano cartesiano.

### Projetando pontos do plano para a esfera

Faremos agora o caminho inverso da projeção, seja o ponto  $Q = (x_0, y_0, 0)$  pertencente ao plano  $Oxy$ , projete este ponto na semi-esfera  $\gamma : x^2 + y^2 + (z - r)^2 = r^2$  onde  $z \leq r$ .

Traçando uma reta  $\overleftrightarrow{R}$  perpendicular a  $Oxy$  por  $Q$  temos:

$$\overleftrightarrow{R} : \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = t \end{cases}$$

Logo basta definirmos a intersecção de  $\overleftrightarrow{R}$  com a esfera  $\gamma$

$$\overleftrightarrow{R} \cap \gamma : (x_0)^2 + (y_0)^2 + (t - r)^2 = r^2$$

onde temos:

$$\overleftrightarrow{R} \cap \gamma : t^2 - 2tr + x_0^2 + y_0^2 = 0$$

Observe que nosso parâmetro  $t$  assume dois valores:

$$t_1 = \frac{2r + \sqrt{(-2r)^2 - 4(x_0^2 + y_0^2)}}{2} \quad \text{ou} \quad t_2 = \frac{2r - \sqrt{(-2r)^2 - 4(x_0^2 + y_0^2)}}{2}$$



Necessariamente devemos optar pelo parâmetro  $t$  que proporciona uma distância de  $Q$  ao ponto de projeção menor que o raio da semi-esfera, para isso basta observar que o parâmetro  $t_2$  é o único que atende as condições propostas, logo:

$$\begin{aligned} g : D_r &\longrightarrow \gamma^- \\ (x_0, y_0, 0) &\longmapsto (x_0, y_0, r - \sqrt{r^2 - (x_0^2 + y_0^2)}) \end{aligned} \quad (4.18)$$

#### 4.4.2 Meridianos e paralelos na projeção ortogonal

##### Projetando meridianos

Seja uma semi-esfera  $\gamma : x^2 + y^2 + (z - r)^2 = r^2$  onde  $z \leq r$  sobreposta ao plano  $Oxy$  onde a intersecção de  $Oxy$  e  $\gamma$  resulta no ponto  $P = (0, 0, 0)$  e um meridiano  $\alpha$  contido em um plano  $\theta$ , podemos deduzir que a projeção do meridiano  $\alpha$  no plano  $Oxy$  se resume a semi-reta de intersecção entre  $Oxy$  e  $\theta$ , sendo o ponto  $P = (x_0, y_0, z_0)$  pertencente ao meridiano  $\alpha$ .

Sabemos que  $\theta : y(x_0) - x(y_0) = 0$ , tendo em vista que este plano possui eixo simétrico  $z$  e passa pelo ponto  $P = (x_0, y_0, z_0)$ .

Logo realizando a intersecção de  $\theta$  com o disco  $D_r$ , temos:

$$\theta \cap Oxy : \begin{cases} x = x_0 \cdot t \\ y = y_0 \cdot t \\ z = 0 \end{cases}$$

Observe que apenas os pontos onde  $t > 0$  representam a projeção do meridiano  $\alpha$  no plano  $Oxy$ , pois trata-se da projeção de um semi-círculo contido no mesmo octante do ponto  $(x_0, y_0, z_0)$ .

Na projeção ortogonal não é possível projetarmos um meridiano completo, apenas metade de seu comprimento.

Observe a projeção na figura 4.13 que representa a projeção do meridiano  $\alpha$  no plano  $Oxy$

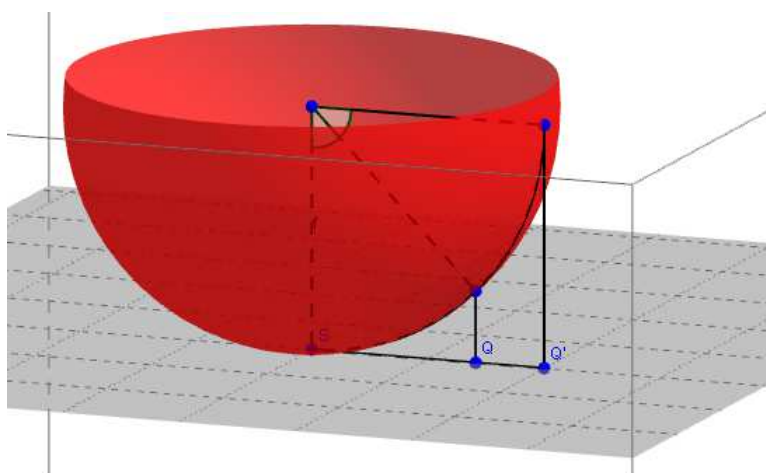


Figura 4.13: Projeção Ortogonal

Observe que apesar dos arcos projetados serem idênticos à  $\frac{\pi \cdot r}{4}$ , temos a projeção do comprimento do arco mais próximo de  $S$  dada por  $\|\overrightarrow{SQ}\| = \frac{r\sqrt{2}}{2}$ , enquanto o arco mais distante de  $S$  possui projeção igual a  $\|\overrightarrow{QQ'}\| = \frac{2r-r\sqrt{2}}{2}$ .

Concluimos então que arcos mais próximos de  $S$  possuem uma margem de erro menor em sua projeção, logo quanto mais distantes de  $S$  maior a margem de erro referente a projeção dos arcos.

### Projetando paralelos

Dada uma semi-esfera  $\gamma : x^2 + y^2 + (z - r)^2 = r^2$  onde  $z \leq r$  e o plano  $Oxy$ , onde  $\gamma \cap Oxy = (0, 0, 0)$ , seja um paralelo  $\theta : x^2 + y^2 = r^2$  em que  $z = r$ , observe que a projeção deste paralelo no plano  $Oxy$  nada mais é do que o círculo de equação  $x^2 + y^2 = r^2$  onde  $z = 0$ .

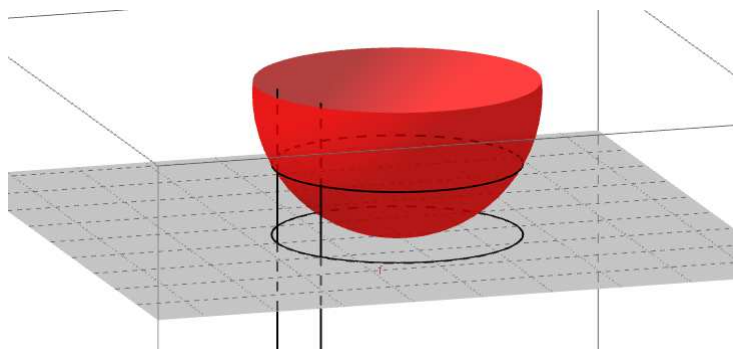


Figura 4.14: Projetando Paralelos na Projeção Ortogonal

Logo neste caso a projeção de paralelos na projeção ortogonal se trata apenas da mudança de coordenada para  $z = 0$ .

A projeção ortogonal é a única projeção estudada neste capítulo que não há alteração nos paralelos projetados, ou seja, todas as características do paralelo inicial são mantidas apenas o plano é mudado.

### 4.4.3 Atividades Propostas

**Atividade 4.8.** Dada a esfera  $\gamma : x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2^2$  onde  $0 \leq z \leq 4$  e o ponto  $P = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$  pertencente a esfera qual a projeção do ponto  $P$  sobre o plano  $Oxy$ .

*Resolução:* Sabemos que um representante da classe de vetores normais ao plano  $Oxy$  é dado por  $\vec{u} = (0, 0, 1)$ , podemos então construir uma reta  $\overleftrightarrow{K}$  que passe por  $P$  e tenha o vetor  $\vec{u}$  como vetor diretor:

$$\overleftrightarrow{K} : \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Sendo a reta  $\overleftrightarrow{K}$  já determinada, basta que seja feita a intersecção

entre  $\overleftrightarrow{K}$  e  $Oxy$ .

$$\overleftrightarrow{K} \cap Oxy : 2 + t = 0$$

Logo teremos  $t = -2$ , estamos então em condições de projetar o ponto  $P$  no plano  $Oxy$ .

$$\begin{aligned} p : (\gamma) &\longrightarrow Oxy \\ (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2) &\longmapsto (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Dada a maneira como foi construída a projeção, podemos observar que dado um ponto  $P$  qualquer pertencente a esfera, a projeção deste ponto no plano é dada pelas mesmas coordenadas no eixo  $x$  e no eixo  $y$ , porém a coordenada em  $z$  deverá ser igual a zero.

□

**Atividade 4.9.** Dado o ponto  $P = (1, 1, 0)$  pertencente ao plano  $Oxy$ , qual a projeção deste ponto na esfera  $\gamma$  de raio 3 e centro  $C = (0, 0, 3)$

*Resolução:* Construindo uma reta  $\overleftrightarrow{K}$  perpendicular ao plano  $Oxy$  passando pelo ponto  $P$  temos:

$$\overleftrightarrow{K} : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$$

Sendo  $\gamma : x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 3^2$  faremos a intersecção entre  $\gamma$  e  $\overleftrightarrow{K}$

$$\gamma \cap \overleftrightarrow{K} : 1^2 + 1^2 + (t - 3)^2 = 3^2$$

onde:

$$\gamma \cap \overleftrightarrow{K} : t^2 - 6t + 2 = 0$$

Logo, temos dois parâmetros que correspondem a nossa projeção  $t = 3 + \sqrt{7}$  ou  $t = 3 - \sqrt{7}$ , estes parâmetros geram os pontos  $(1, 1, 3 + \sqrt{7})$  e  $(1, 1, 3 - \sqrt{7})$ , basta agora identificar qual ponto possui distância ao plano menor ou igual a 3.

Neste caso, necessariamente adotamos o ponto que possui a menor coordenada no eixo  $z$ , tendo em vista que a coordenada  $z$  representa a distância entre o ponto  $P$  e o plano  $Oxy$ , ou seja,  $(1, 1, 3 - \sqrt{7})$ .

logo:

$$\begin{aligned} g : (Oxy) &\longrightarrow \gamma \\ (0, 0, 1) &\longmapsto (1, 1, 3 - \sqrt{7}) \end{aligned} \quad (4.20)$$

□

**Atividade 4.10.** Dada uma esfera  $\gamma : x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 5^2$  onde  $-2 \leq z \leq 8$ , um paralelo contido no plano  $\alpha : z = 1$  e um meridiano pertencente ao plano  $\pi : 3y - 2x$ , projete o meridiano e o paralelo no plano  $\theta : z = -2$  onde o ponto  $P = (3, 4, 3)$  pertence ao meridiano.

*Resolução:*

### Projeção do Paralelo

Construindo a equação que representa o paralelo temos:

$$\pi \cap \theta : \begin{cases} x = \sqrt{21}\cos(t) \\ y = \sqrt{21}\sen(t) \\ z = 1 \end{cases}$$

projetando este paralelo no plano  $z = -2$ , temos a mesma equação de paralelo porém agora fixado o parâmetro  $z = -2$ , ou seja.

$$\pi \cap \theta : \begin{cases} x = \sqrt{21}\cos(t) \\ y = \sqrt{21}\sen(t) \\ z = -2 \end{cases}$$

### Projeção do Meridiano

Sabendo que o meridiano está contido no plano  $\pi : 3y - 2x$ , basta que seja feita a intersecção entre o plano  $\pi$  e o plano de projeção  $\theta = -2$ , logo temos:

$$\pi \cap \theta : \begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = -2 \end{cases}$$

Sabendo que o ponto  $P = (3, 4, 3)$ , pertence ao meridiano logo a projeção está definida onde o parâmetro  $t \geq 0$ .

□

## 4.5 Projeção Gnomônica

Este tipo de projeção é muito semelhante à projeção ortogonal, a projeção gnomônica também propicia apenas o mapeamento de metade dos pontos da esfera.

Seja uma semi-esfera  $\gamma$  de centro  $C$  e um plano qualquer  $\pi$  definido no espaço que tangencia a semi-esfera, a relação entre os pontos da semi-esfera  $\gamma$  e do plano  $\pi$  é dada por uma semi-reta  $\underline{K}$  secante a esfera  $\gamma$  e

ao plano  $\pi$  com origem  $C$

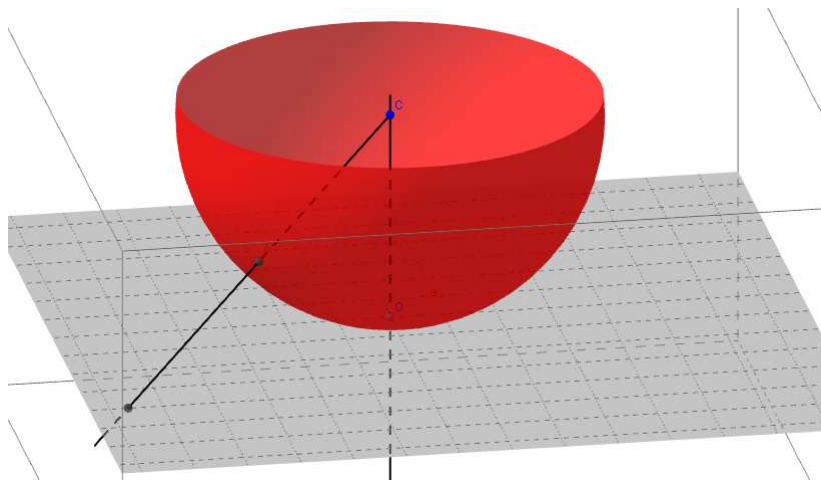


Figura 4.15: Projeção Gnomônica

Como podemos ver na figura 4.15 a semi-reta que parte do ponto  $C$ , intersecta tanto a esfera como o plano, logo podemos definir uma bijeção  $\rho : \gamma^- \rightarrow D_r$ , onde  $\gamma^-$  são pontos da semi-esfera que mantêm distância do plano de projeção menor ou igual ao raio da esfera e  $V = D_r$  a região circular que contém a projeção da semi-esfera  $\gamma$

#### 4.5.1 Projeção gnomônica em coordenadas cartesianas

Dada a semi-esfera  $\gamma : x^2 + y^2 + (z - r)^2 = r^2$  onde  $z \leq r$ , sendo o plano  $Oxy$  tangente a semi-esfera no ponto  $Q = (0, 0, 0)$ . Qual o representante do ponto  $P = (x_0, y_0, z_0)$ , pertencente a semi-esfera no plano.

Primeiramente vamos definir uma reta  $\underline{K}$  passando necessariamente por  $P = (x_0, y_0, z_0)$  e pelo centro da esfera dado pelo ponto  $O = (0, 0, r)$ .

$$\underline{K} : \begin{cases} x = x_0 t \\ y = y_0 t \\ z = r + (z_0 - r)t \end{cases}$$

Realizando a intersecção entre a semi-reta  $\overleftrightarrow{K}$  e o plano  $Oxy$  temos:

$$\underline{K} \cap Oxy : r + (z_0 - r)t = 0$$

Obtemos então o parâmetro  $t = \frac{r}{r-z_0}$

Substituindo o parâmetro  $t$  na reta  $\underline{K}$  adotamos  $(x_0 \cdot \frac{r}{r-z_0}, y_0 \cdot \frac{r}{r-z_0}, 0)$  como ponto que representa a projeção do ponto  $P$  no respectivo plano  $Oxy$ .

Logo:

$$\begin{aligned} \rho : \quad \gamma^- &\longrightarrow D_r \\ (x_0, y_0, z_0) &\longmapsto (x_0 \cdot (\frac{r}{r-z_0}), y_0 \cdot (\frac{r}{r-z_0}), 0) \end{aligned} \quad (4.21)$$

## 4.5.2 Projeção gnomônica de meridianos e paralelos

### Projetando meridianos

A projeção de Meridianos na projeção gnomônica se dá de forma similar a projeção de meridianos na projeção ortogonal, ou seja, sendo uma semi-esfera  $\gamma$ , um plano  $\alpha$  que contém o meridiano a ser projetado e um plano  $\pi$  que tangencia a esfera, a projeção do meridiano se resume a intersecção dos planos  $\pi$  e  $\alpha$ .

Dado um plano  $\alpha : y(x_0) - x(y_0) = 0$  que contém um meridiano  $\theta$  que passa pelo ponto  $(x_0, y_0, z_0)$ , qual a projeção deste meridiano no plano  $Oxy$ .



Realizando a interseção entre o plano  $\alpha$  e o plano  $Oxy$  temos:

$$\alpha \cap Oxy : \begin{cases} x = x_0t \\ y = y_0t \quad \text{onde } t \geq 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Necessariamente a semi-reta  $\alpha \cap Oxy$  representa a projeção do meridiano  $\theta$  no plano  $Oxy$ .

Analisando a projeção de arcos idênticos de um meridiano  $\theta$  na figura 4.16 notamos algumas distorções significativas.

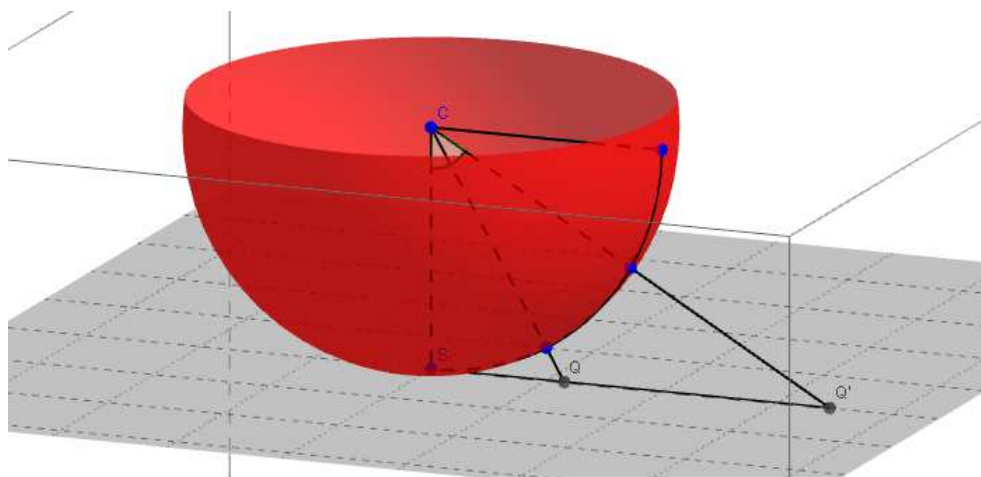


Figura 4.16: Projeção gnomônica de meridianos

Observe que apesar de projetarmos arcos idênticos correspondentes a  $\frac{r\pi}{6}$ , o arco mais distante do ponto  $S$  possui maior margem de erro, sendo  $\|\overrightarrow{SQ}\| = \frac{r\sqrt{3}}{3}$  e  $\|\overrightarrow{QQ'}\| = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$ , logo concluímos que quanto mais nos afastarmos do ponto  $S$ , maior as alterações nos arcos do meridiano a serem projetados.

### Projetando Paralelos

Na projeção de paralelos podemos observar algumas semelhanças com a projeção de paralelos estereográfica, ou seja, se temos um paralelo contido na semi-esfera a projeção deste paralelo se resume a um círculo de raio multiplicado por uma constante, como já sabemos se  $P = (x_0, y_0, z_0)$  é um ponto da esfera então  $P' = (x_0 \cdot (\frac{r}{r-z_0}), y_0 \cdot (\frac{r}{r-z_0}), 0)$  é um ponto do plano, portanto se temos um paralelo de equação  $x^2 + y^2 = R^2$  contido no plano  $z = z_0$  a projeção deste paralelo no plano  $Oxy$  se trata de uma circunferência com raio multiplicado pela constante  $(\frac{r}{r-z_0})$  onde  $r$  é dado pelo raio da esfera, logo a equação do paralelo contido na esfera projetado no plano  $Oxy$  será  $x^2 + y^2 = (R \cdot (\frac{r}{r-z_0}))^2$ .

Portanto se  $x^2 + y^2 = R^2$  é um paralelo contido na esfera então  $x^2 + y^2 = (R \cdot (\frac{r}{r-z_0}))^2$  é a projeção deste paralelo no plano  $Oxy$ .

Como podemos deduzir há uma distorção significativa de paralelos quando projetados em um dado plano, tendo em vista que todo paralelo tem seu raio multiplicado por  $\frac{r}{r-z_0}$  podemos concluir que quanto maior a distância do paralelo ao ponto  $S = (0, 0, 0)$  maior será sua distorção.

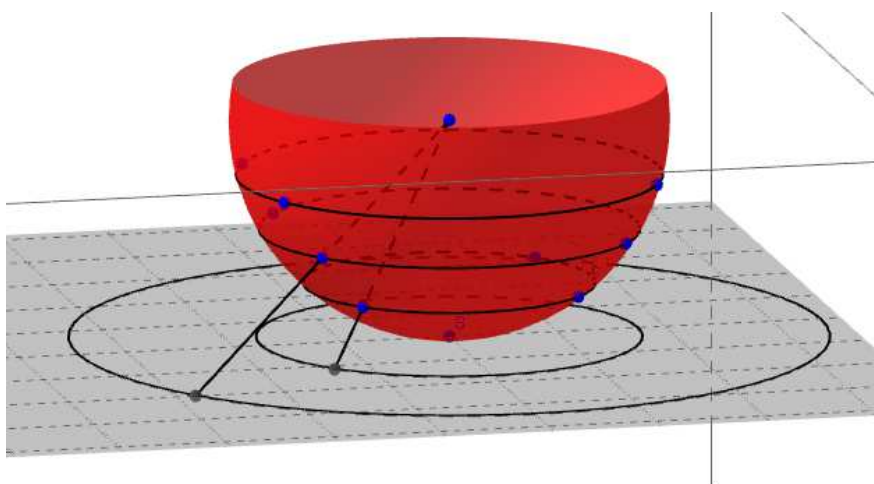


Figura 4.17: Projeção gnomônica de meridianos

### 4.5.3 Atividades Propostas

**Atividade 4.11.** *Seja o ponto  $P = (5, 2, 0)$  que pertence ao plano  $Oxy$ , qual o representante do ponto  $P$  em uma semi-esfera  $\gamma$  de raio 3 e centro  $C = (0, 0, 3)$ .*

*Resolução:* Vamos definir uma semi-reta  $\underline{K}$  passando por  $C$  e  $P$ .

$$\underline{K} : \begin{cases} x = 5t \\ y = 2t \quad \text{onde } t \geq 0 \\ z = 3 - 3t \end{cases}$$

Sendo  $\gamma : x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 3^2$  para  $z \leq 3$  basta encontrarmos a intersecção entre  $\underline{K}$  e  $\gamma$

$$\underline{K} \cap \gamma : (5t)^2 + (2t)^2 + (-3t)^2 = 9$$

onde o parâmetro  $t$  assume dois valores  $t = \frac{3\sqrt{38}}{38}$  e  $t = \frac{-3\sqrt{38}}{38}$ , logo  $P' = \left(\frac{15\sqrt{38}}{38}, \frac{6\sqrt{38}}{38}, \frac{114-9\sqrt{38}}{38}\right)$  e  $P'' = \left(-\frac{15\sqrt{38}}{38}, -\frac{6\sqrt{38}}{38}, \frac{114+9\sqrt{38}}{38}\right)$ , portanto

é necessário definir qual parâmetro proporciona o ponto com distância em relação ao plano  $Oxy$  menor que 3.

Sendo  $d(P', Oxy) = 1,54$  e  $d(P'', Oxy) = 4,45$  necessariamente o ponto candidato a projeção será  $P' = \left(\frac{15\sqrt{38}}{38}, \frac{6\sqrt{38}}{38}, \frac{114-9\sqrt{38}}{38}\right)$ .

□

**Atividade 4.12.** Dada uma semi-esfera de raio 2 e centro  $C = (0, 0, 2)$ , onde o plano  $\pi$  tangencia a esfera no ponto  $P = (0, \sqrt{3}, 1)$  qual a representação do ponto  $P' = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$  pertencente a esfera no plano  $\pi$

*Resolução:*

Construindo uma semi-reta  $\underline{K}$  partindo de  $C$  e passando por  $P'$ , temos:

$$\underline{K} : \begin{cases} x = \sqrt{2}t \\ y = \sqrt{2}t \\ z = 2 \end{cases}$$

Para definirmos a equação do plano  $\pi$ , necessariamente precisamos de um vetor normal ao plano e um ponto que pertence a  $\pi$ .

Utilizando os pontos  $C$  e  $P$ , encontramos o vetor  $\vec{u} = (0, \sqrt{3}, -1)$ , então basta agora adotar o ponto  $P = (0, \sqrt{3}, 1)$ , logo  $\pi : \sqrt{3}y - z - 2 = 0$ . Sendo definido  $\underline{K}$  e  $\pi$ , basta agora fazer a intersecção entre reta e plano, logo:

$$\underline{K} \cap \pi = \sqrt{3}(\sqrt{2}t) - 4 = 0$$

$$\begin{aligned} \gamma^- &\longrightarrow D_r \\ (0, \sqrt{3}, 1) &\longmapsto \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}, 2\right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

□

**Atividade 4.13.** Sendo uma semi-esfera  $\gamma : x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 2^2$  onde  $z < 2$  e o paralelo  $\alpha$  contido no plano  $\pi : z = 1$ . Projete através da projeção gnomônica o paralelo  $\alpha$  no plano  $Oxy$ .

*Resolução:*

Vamos parametrizar a equação do paralelo  $\alpha$  contido na esfera, logo:

$$\alpha : \begin{cases} x = \sqrt{3}\cos(t) \\ y = \sqrt{3}\sen(t) \\ z = 1 \end{cases}$$

Como já vimos, para realizar a projeção de paralelos, basta multiplicar o raio do paralelo por  $\left(\frac{r}{r-z_0}\right)$ , onde  $r$  é dado pelo raio da esfera e  $z_0$  a coordenada em  $z$  do eixo que o contém, logo podemos utilizar a função  $\rho$  a fim de projetar o paralelo  $\alpha$

$$\begin{aligned} \rho : \quad \gamma^- &\longrightarrow D_r \\ (\sqrt{3}\cos(t), \sqrt{3}\sen(t), 1) &\longmapsto (2\sqrt{3}\cos(t), 2\sqrt{3}\sen(t), 0) \end{aligned} \quad (4.23)$$

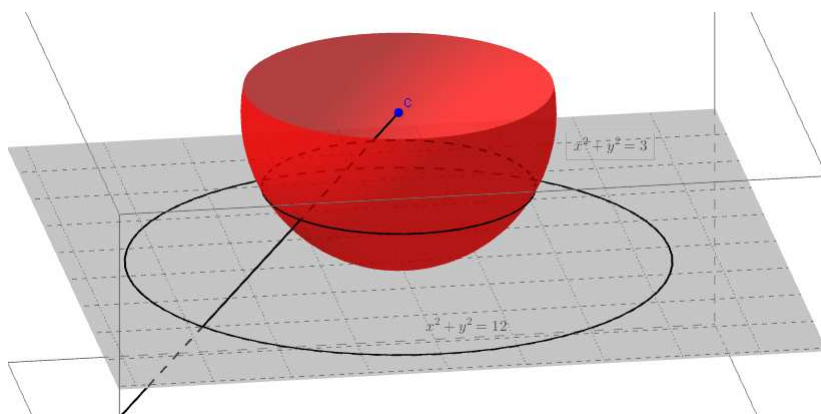


Figura 4.18: Projeção Paralelos com a Projeção Gnomônica

□

**Atividade 4.14.** Sendo um meridiano  $\alpha$  contido no plano  $\pi : -2x + y = 0$  e uma semi-esfera  $\gamma : x^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 5^2$  onde  $z > 5$ , projete o meridiano  $\alpha$  no plano  $Oxy$ , sabendo que o ponto  $P = (-1, 2, 0)$  pertence ao meridiano  $\alpha$ .

*Resolução:* Sendo dada a equação do plano  $\pi$  que contém o meridiano, basta realizar a intersecção do plano  $Oxy$  e  $\pi$ , logo:

$$Oxy \cap \pi : \begin{cases} x = -t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases}$$

Sabendo que o ponto  $P = (-1, 2, 0)$  pertence ao meridiano a reta  $Oxy \cap \pi$  representa a projeção do meridiano  $\alpha$  apenas para  $t \geq 0$ . □

## 4.6 Projeção cônica

Nesta projeção, iremos projetar a esfera em um cone e posteriormente planificá-lo.

Considere um cone  $\beta$  de altura  $h$  e raio da base  $h$ , com base no plano  $Oxy$  e uma esfera  $\gamma$  de raio  $r$  ( $r = h(\sqrt{2} - 1)$ ) e centro  $C$  inscrita no cone.

Dado  $P$  em  $\gamma$ , tomaremos a  $\underline{K}$  passando por  $P$  com vértice no pólo sul  $S$  de  $\gamma$ . A interseção da  $\underline{K}$  com o cone nos dará um ponto  $Q$  que é a projeção de  $P$  sobre o cone. A projeção cônica será dada, então "recortando-se" o cone ao longo de uma reta geratriz pré-fixada e identificando-o com uma seção do disco  $D_r$  de raio  $r$  do plano, mais especificamente a região com coordenadas polares  $0 < r < g$  e  $\frac{-\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ , onde  $g$  é o comprimento da geratriz do cone.

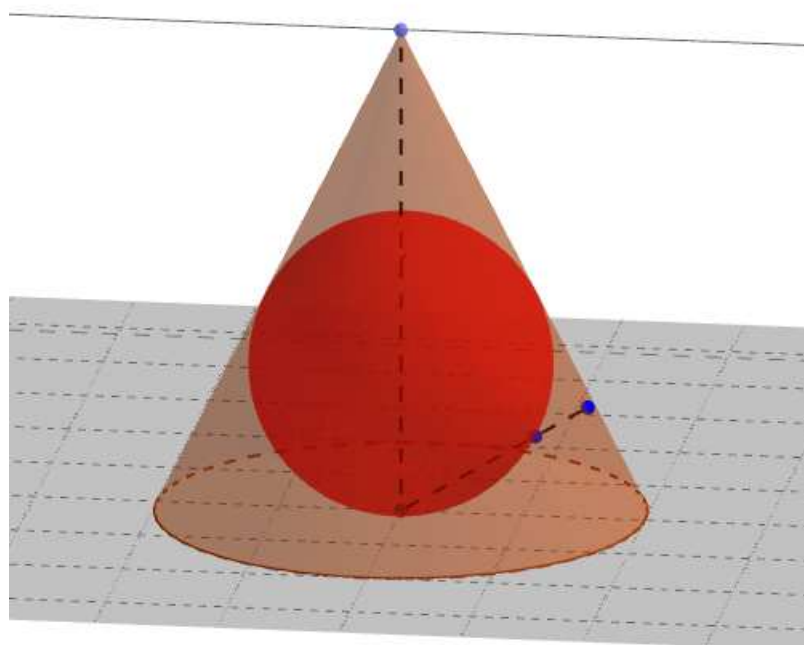


Figura 4.19: Projeção Cônica

### Projeção cônica em coordenadas cartesianas

Para facilitar nossos cálculos sem perder sua generalidade, adotaremos um cone  $\beta$  cuja base está contida no plano  $Oxy$ , tem eixo de simetria  $O_z$  e raio da base igual a altura  $h$ . Considere  $\gamma$  a esfera inscrita no cone

de raio  $r$  e centro  $C = (0, 0, r)$  (Pólo sul  $S = (0, 0, 0)$ ).

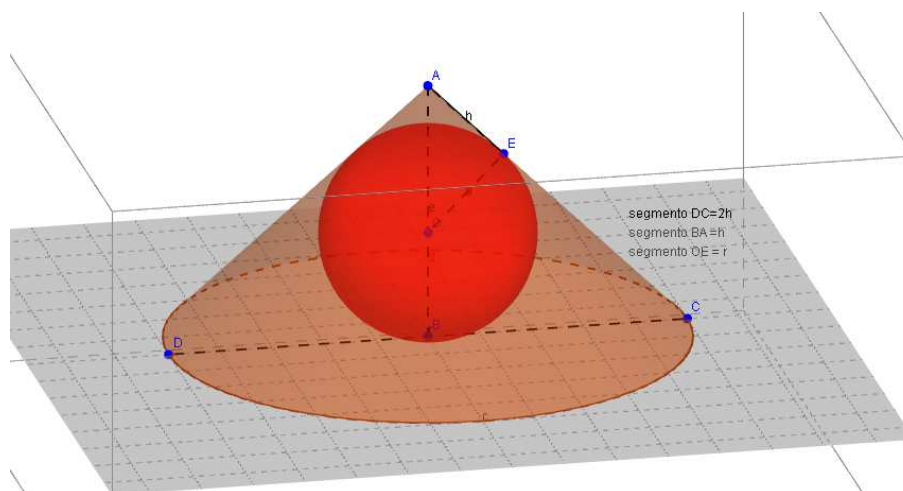


Figura 4.20: semelhanças no cone

Para construção da equação deste cone é necessário escrever a altura( $h$ ) referente ao cone  $\beta$  em função do raio( $r$ ) da esfera  $\gamma$  inscrita no cone, logo:

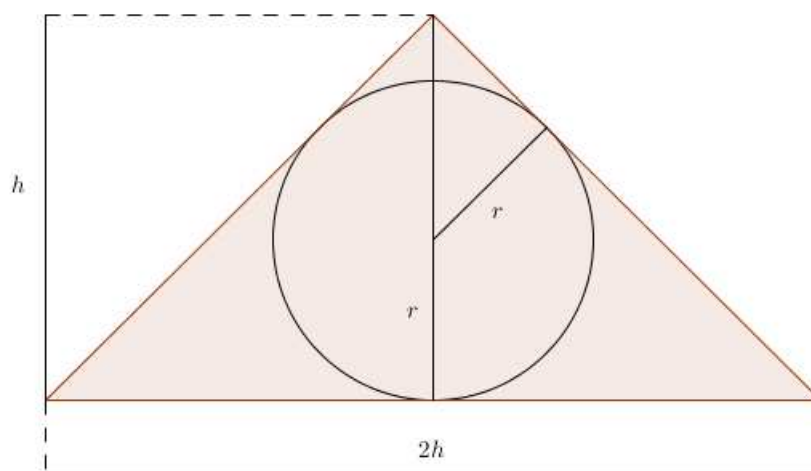


Figura 4.21:

Por Pitágoras  $h^2 - hr = rh\sqrt{2}$ , donde encontramos  $h = r(1 + \sqrt{2})$ . Assim temos que a equação que representa o cone  $\beta$  é  $\beta : x^2 + y^2 =$



$(r(1 + \sqrt{2}) - z)^2$  onde  $0 \leq z \leq r(1 + \sqrt{2})$ .

Sendo  $P = (x_0, y_0, z_0)$  um ponto qualquer pertencente a esfera, podemos encontrar a equação da semi-reta  $\underline{K}$  que estabelece a relação entre os pontos do cone e da esfera:

$$\underline{K} : \begin{cases} x = x_0t \\ y = y_0t \\ z = z_0t \end{cases} \text{ onde } t \geq 0$$

Observe que temos agora tanto a equação do cone  $\beta : x^2 + y^2 = (r(1 + \sqrt{2}) - z)^2$  como da semi-reta  $\underline{K} = (0, 0, 0) + t(x_0, y_0, z_0)$ , para encontrarmos a projeção do ponto  $P = (x_0, y_0, z_0)$  pertencente a esfera no cone basta que seja feita a intersecção entre  $\beta$  e  $\underline{K}$ .

$$\beta \cap \underline{K} : (x_0t)^2 + (y_0t)^2 = (r(1 + \sqrt{2}) - z_0t)^2$$

Usando que  $x_0^2 + y_0^2 + (z_0 - r)^2 = r^2$  temos:

$$\beta \cap \underline{K} : t^2(x_0^2 + y_0^2 - z_0^2) + t(2z_0r(1 + \sqrt{2})) - r^2(1 + \sqrt{2})^2 = 0$$

Simplificando nossa equação temos:

$$\beta \cap \underline{K} : t^2(2z_0r - 2z_0^2) + t(2r(1 + \sqrt{2})z_0) - r^2(1 + \sqrt{2})^2 = 0$$

A solução com  $t \geq 0$  é então:

$$t = \frac{r(1 + \sqrt{2})}{z_0 + \sqrt{2z_0r - z_0^2}} = \frac{(1 + \sqrt{2})r}{z_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$$

Donde temos:

$$Q = \left[ \frac{(1 + \sqrt{2}) \cdot r}{z_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \right] (x_0, y_0, z_0)$$

Desse modo, temos a projeção  $g$  de  $(\gamma - \{N, S\})$  no cone  $\beta - \{V, C\}$ , onde  $V$  é o vértice do cone e  $C$  a circunferência da base do cone, dada por:

$$\begin{aligned} g : (\gamma - \{N, S\}) &\longrightarrow (\beta - \{V, C\}) \\ (x_0, y_0, z_0) &\longmapsto \left[ \frac{(1 + \sqrt{2}) \cdot r}{z_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \right] (x_0, y_0, z_0) \end{aligned} \quad (4.24)$$

#### 4.6.1 Planificando o cone

Como já sabemos, a simples transposição dos pontos da esfera para pontos do cone não é suficiente, é necessário planificar o cone, ou seja, encontrar pontos no cone e transpor para pontos em um determinado plano.

Tomando como referência o cone  $\beta : x^2 + y^2 = (z - (r + r\sqrt{2}))^2$  onde  $0 \leq z \leq r + r\sqrt{2}$ , vamos planificar as coordenadas deste cone para o plano cartesiano. Para isso, utilizaremos o conceito de coordenadas polares com o intuito de simplificar nossos cálculos. Tomemos  $Q = (x_1, y_1, z_1)$  um ponto qualquer pertencente ao cone e encontremos a projeção  $f(Q) = (p, \theta)$  de  $Q$  no plano (em coordenadas polares).

Lembrando que o vértice do cone é dado por  $V = (0, 0, r + r\sqrt{2})$  e seja  $Q = (x_1, y_1, z_1)$  um ponto qualquer pertencente ao cone que desejamos planificar, podemos tomar  $p = d(V, Q) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + (z_1 - r(1 + \sqrt{2}))^2} = \sqrt{2(x_1^2 + y_1^2)}$ .

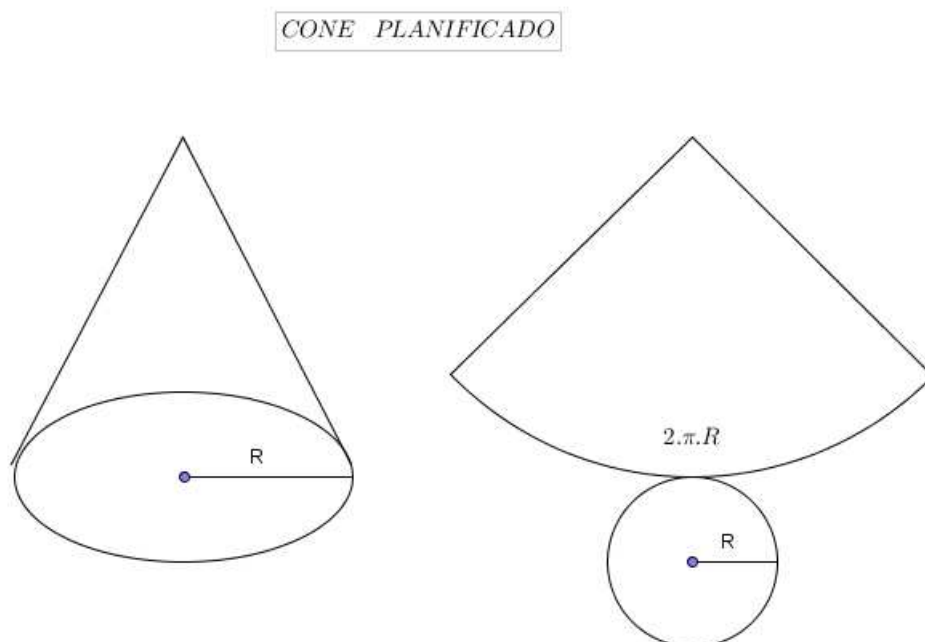


Figura 4.22: Planificação do cone

É necessário agora encontrarmos o ângulo  $\theta$  de nossa coordenada polar, primeiramente vamos calcular o ângulo  $\alpha$  do setor circular que dá origem ao cone.

Seja  $g$  o comprimento da geratriz do cone.

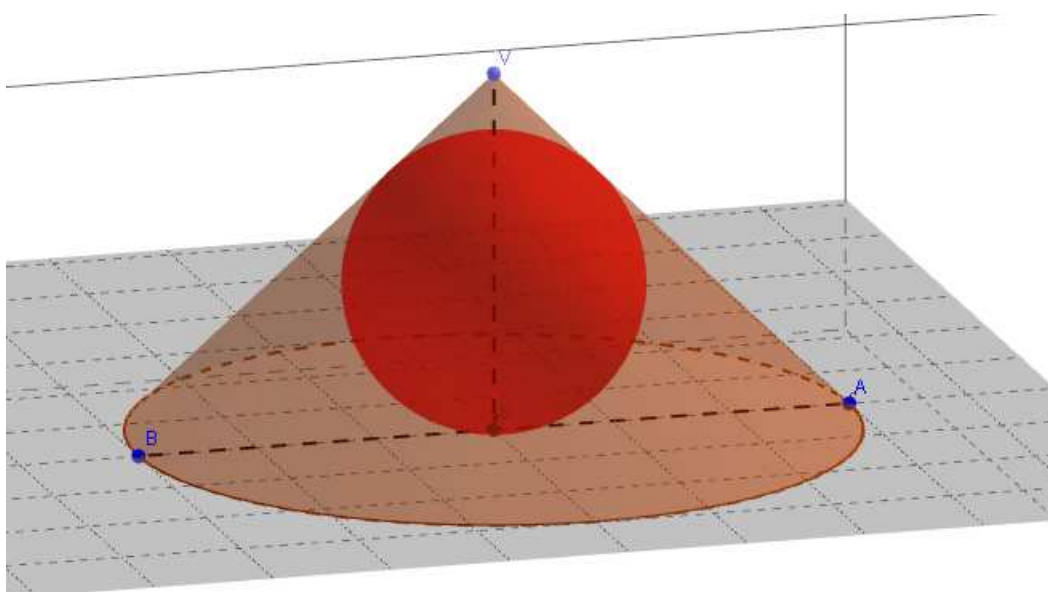


Figura 4.23: definindo a geratriz do cone

Considere  $A = (h, 0, 0)$  um ponto da base do cone. Temos:

$$g = d(V, A) = h\sqrt{2}$$

Como  $2\pi h$  é o comprimento do círculo da base do cone temos:

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{2\pi h}{2\pi g}$$

Logo  $\alpha = \pi\sqrt{2}$  é o ângulo em radianos correspondente ao setor circular do cone.

Ainda com  $A = (h, 0, 0)$  e  $V$  o vértice do cone, tomemos agora a reta  $\overleftrightarrow{VA}$  como referência no "corte" do cone. Note que, analogamente ao que fizemos na planificação do cilindro, faremos o corte no cone ao longo da reta  $\overleftrightarrow{VB}$  onde  $B = (-h, 0, 0)$ .

Nosso próximo passo será definir o ângulo  $\varphi$  entre os pontos  $Q = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $Q_z = (0, 0, z_1)$  e  $Q_1 = (\sqrt{x_1^2 + y_1^2}, 0, z_1)$ , onde o triângulo  $QQ_zQ_1$  está contido em um plano  $\alpha$  paralelo ao plano  $Oxy$  e o ponto  $Q_1$  pertence a reta  $\overleftrightarrow{VA}$  conforme a figura 4.24. Para isso vamos utilizar o conceito de produto interno.

Considere inicialmente (como fizemos na projeção do cilindro) que o ângulo  $\varphi$  é menor que  $\pi$  radianos, ou seja, que  $y_1 > 0$ .

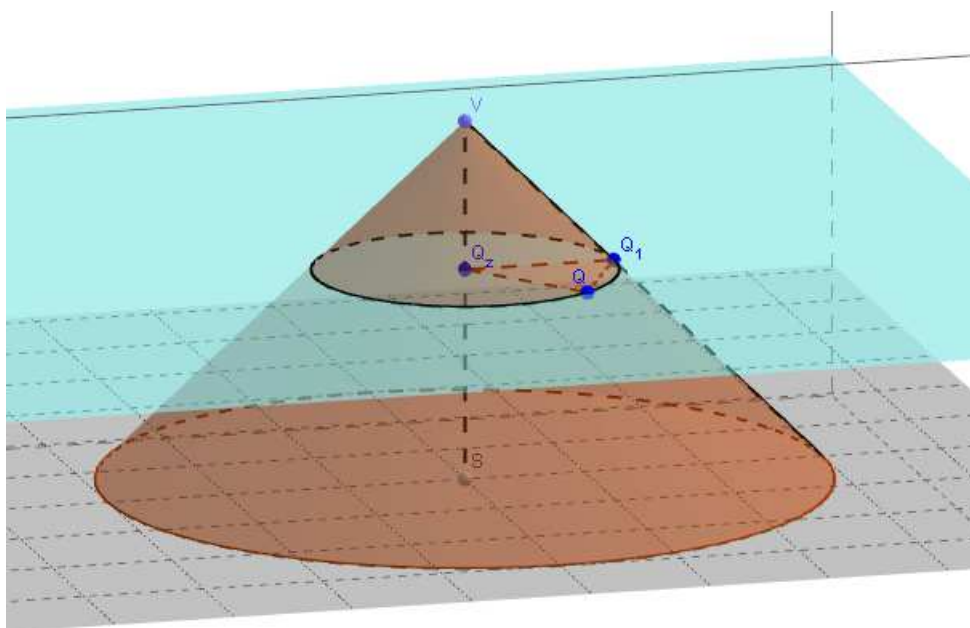


Figura 4.24: Triângulo  $QQ_zQ_1$  contido em  $\alpha$

Como  $\overrightarrow{QQ_z} = (x_1, y_1, 0)$ ,  $\overrightarrow{Q_1Q_z} = (0, \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, 0)$  onde  $\|QQ_z\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$  e  $\|Q_1Q_z\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ , logo

$$\cos(\varphi) = \frac{\overrightarrow{QQ_z} \cdot \overrightarrow{Q_1Q_z}}{\|QQ_z\| \cdot \|Q_1Q_z\|} \quad \text{onde} \quad \cos(\varphi) = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

Logo:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}\right)$$

Já tendo definido o ângulo  $\varphi$  estamos agora em condições de determinar o ângulo  $\theta$  da coordenada polar da projeção de  $Q$  no plano.

Sabemos que  $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$  está para  $\pi\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$  como  $\theta$  está para  $\varphi \cdot \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ .

Portanto:

$$\theta = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\varphi$$

E assim:

$$\theta = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \arccos \left( \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \right)$$

Se  $y_1 \leq 0$ , de modo análogo ao que fizemos na projeção do cilindro, tomamos:

$$-\theta = - \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \arccos \left( \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \right)$$

Assim, de modo geral, temos:

$$\theta = \left( \frac{y_1}{|y_1|} \right) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \arccos \left( \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \right)$$

Desse modo a projeção  $f$  do cone  $\beta$  no setor circular  $S$  de raio  $g = h\sqrt{2} = r(2 + \sqrt{2})$  e ângulo  $\pi\sqrt{2}$  dado em coordenadas polares por

$$S = \{(\rho, \theta); 0 < \rho < g, - \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \pi \leq \theta < \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \pi\},$$

é:

$$\begin{aligned} f : (\beta - \{V, C\}) &\longrightarrow S \\ (x_1, y_1, z_1) &\longmapsto \left( \sqrt{2(x_1^2 + y_1^2)}, \left( \frac{y_1}{|y_1|} \right) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \arccos \left( \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Finalmente, compondo a projeção  $g$  da esfera no cone  $f$  e fazendo a

planificação do cone, temos a projeção cônica da esfera  $p = f \circ g$  :

$$p : (\gamma - \{N, S\}) \longrightarrow S$$

$$(x_0, y_0, z_0) \longmapsto \left( \frac{(1+\sqrt{2}) \cdot r \cdot \sqrt{2(x_0^2 + y_0^2)}}{z_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, \left( \frac{y_0}{|y_0|} \right) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \arccos \left( \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \right) \right) \quad (4.26)$$

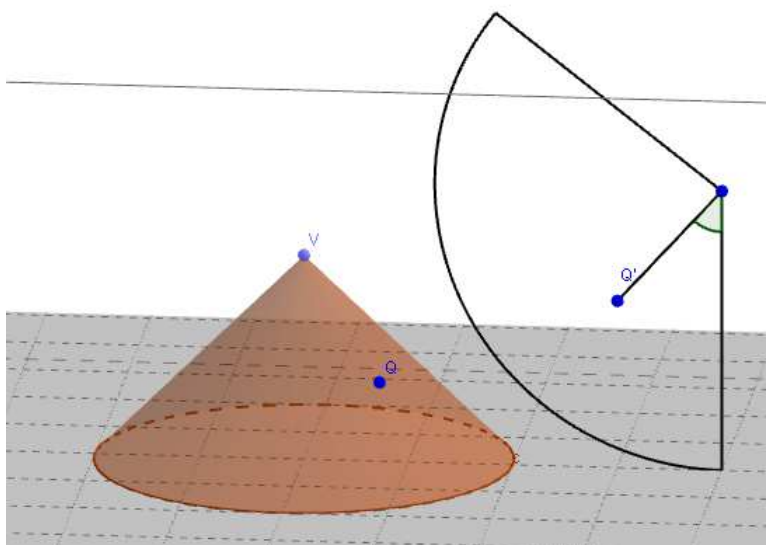


Figura 4.25: Transposição de pontos do espaço para o plano

## 4.6.2 Projeção cônica de paralelos e meridianos

### Projetando paralelos

Similar a planificação do cone, também utilizaremos as coordenadas polares para projeção de paralelos, como podemos observar um paralelo definido na esfera, nada mais é do que uma seção de um círculo no plano com raio igual a distância do vértice do cone a qualquer ponto contido no paralelo.

Seja uma esfera  $\gamma : x^2 + y^2 = (z - r)^2$  inscrita em um cone  $\beta : x^2 + y^2 = (z - (r + r\sqrt{2}))^2$  onde  $0 \leq z \leq r + r\sqrt{2}$  e um paralelo  $\alpha$

contido no plano  $\pi : z = \frac{r}{2}$ , vamos definir a equação deste paralelo no plano  $Oyz$ .

Vamos primeiramente definir a equação do paralelo  $\alpha$  parametrizada:

$$\alpha : \begin{cases} x = \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right) \cos(t) \\ y = \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right) \operatorname{sen}(t) \\ z = \frac{r}{2} \end{cases}$$

Sendo o paralelo  $\alpha$  contido na esfera utilizaremos a função composta  $p : f \circ g$  a qual leva pontos da esfera diretamente para o setor circular  $S$

$$\begin{aligned} p : (\gamma - \{N, S\}) &\longrightarrow S \\ \left(\left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right) \cos(t), \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right) \operatorname{sen}(t), \frac{r}{2}\right) &\longmapsto \left(\left(\frac{(1+\sqrt{2})r\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot t\right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Note que na projeção de paralelos também existem alterações.

Seja uma esfera  $\gamma : x^2 + y^2 + (z - r)^2 = r^2$  inscrita em um cone  $\beta$ , cujo diâmetro da base é igual a altura e dois paralelos contidos na esfera, sendo o paralelo  $\alpha$  contido no plano  $z = \frac{r}{4}$  e o paralelo  $\theta$  contido no plano  $z = \frac{7r}{4}$ , necessariamente ambos possuem o mesmo raio, porém ao projetarmos os paralelos  $\alpha$  e  $\beta$  o paralelo que possui maior distância em relação ao ponto  $N$ , sofre a maior distorção, observe a figura.



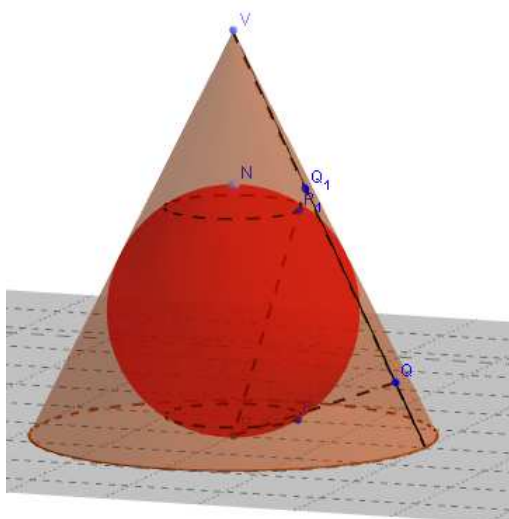


Figura 4.26:

Notamos que  $|\overrightarrow{QV}| > |\overrightarrow{Q_1V}|$ , claramente podemos concluir que quanto mais próximo distante do ponto  $N$ , maior será a diferença entre o paralelo contido na esfera e sua respectiva projeção.

### Projetando Meridianos

Seja uma esfera  $\gamma : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  e sabendo que todos os meridianos desta esfera estão contidos em semi planos que possuem eixo  $Oz$ , logo podemos deduzir que a projeção de um meridiano  $\alpha$  contido em um plano  $\pi$  no cone  $\beta$  é a intersecção entre  $\pi$  e  $\beta$ , posteriormente precisamos transpor o meridiano  $\alpha$  para o plano de projeção, para isso basta observarmos que a projeção do meridiano no plano se resume a reta que passa pelo vértice ( $V$ ) do cone e pela projeção de um ponto qualquer contido no meridiano  $\alpha$ .

Logo vamos utilizar novamente a função composta  $p : f \circ g$  a fim de transpor um ponto qualquer  $P = (x_0, y_0, z_0)$  contido no meridiano  $\alpha$  e

na esfera  $\gamma$ , para o setor circular  $S$ .

$$p : (\gamma - \{N, S\}) \longrightarrow S$$

$$(x_0, y_0, z_0) \longmapsto \left( \left( \frac{(1+\sqrt{2}) \cdot r \cdot \sqrt{2(x_0^2 + y_0^2)}}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0}} \right), \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \arccos \left( \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \right) \right)$$

(4.28)

Necessariamente a equação polar de uma reta  $s$  é dada por  $(r, \theta)$ , onde  $r$  pertence aos reais e representa a distância de qualquer ponto da reta ao polo do sistema, já  $\theta$  está definido e representa o ângulo entre os pontos contidos na reta e o eixo polar do sistema.

Portanto partindo da projeção do ponto  $P = (x_0, y_0, z_0)$  contido na esfera para o setor circular  $S$ , podemos definir a equação da projeção do meridiano  $\alpha$  que será dada por:

$$\alpha : \left( r, \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \arccos \left( \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \right) \right)$$

Observe que  $r$  pertence aos reais, onde o polo de nosso sistema é dado por  $(0, 0, r + r\sqrt{2})$  e nosso eixo focal tem equação  $(r, 0, 0) + (0, 0, 1)t$ .

Ao realizarmos a projeção cônica de um meridiano  $\alpha$  pertencente a uma esfera  $\gamma$ , onde a esfera está contida em um cone  $\beta$ , existem algumas peculiaridades que vale a pena ressaltar.

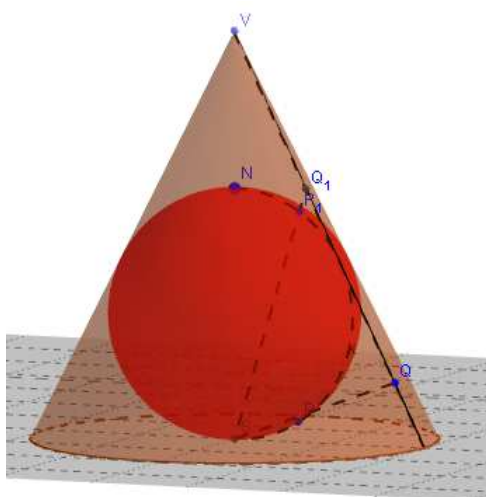


Figura 4.27:

Note que a distorção ocorrida na projeção cônica depende do cone que é escolhido para inscrever a esfera. Sendo uma esfera  $\gamma: x^2 + y^2 + (z - r)^2 = r^2$  e um cone  $\beta$  que circunscreve a esfera onde o diâmetro da base é igual à duas vezes a altura ( $h$ ), podemos deduzir que a projeção de um meridiano  $\alpha$  cujo comprimento é  $\pi \cdot r$ , é dado pelo comprimento da geratriz do cone, no caso específico do nosso cone  $\beta$  será  $h\sqrt{2}$ , ou seja, a distorção de nossa projeção cônica é dada através da escolha do cone que fará projeção

### 4.6.3 Atividades Propostas

**Atividade 4.15.** *Seja um cone  $\beta$  com eixo simétrico  $z$ , altura 2, raio da base 1 e vértice  $V = (0, 0, 2)$ . Determine a equação do cone e a equação da esfera  $\gamma$  inscrita no cone.*

*Resolução:* Com as informações que temos, podemos construir a equação referente ao cone utilizando seu vértice e a base, logo:

$$\beta : x^2 + y^2 = \left( \frac{z-2}{-2} \right)^2$$

Observe a seção que representa uma vista frontal entre cone e esfera.

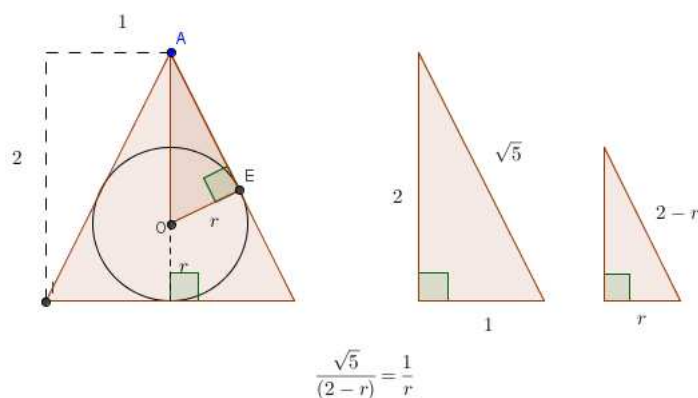


Figura 4.28: seção frontal da esfera e do cone

aplicando a semelhança de triângulos temos

$$r\sqrt{5} = 2 - r \quad \text{logo} \quad r = \frac{2}{1 + \sqrt{5}}$$

Definindo o raio da esfera temos juntamente as coordenadas de seu centro, portanto estamos em condições de construir a equação da esfera, logo:

$$\gamma : x^2 + y^2 + \left( z - \frac{2}{\sqrt{5} + 1} \right)^2 = \left( \frac{2}{\sqrt{5} + 1} \right)^2$$

□

**Atividade 4.16.** *Seja uma esfera de equação  $\gamma : x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2^2$  e um cone  $\beta$  que circunscreve a esfera, onde o raio da base é igual a altura. Determine a equação do cone  $\beta$  e a projeção do ponto  $P = (\sqrt{3}, 1, 2)$  pertencente a esfera  $\gamma$  no cone.*

*Resolução:*

Vamos utilizar o conceito de proporcionalidade para definir a equação do cone, observe a figura 4.29 que representa uma seção do cone  $\beta$  e da esfera inscrita  $\gamma$ .

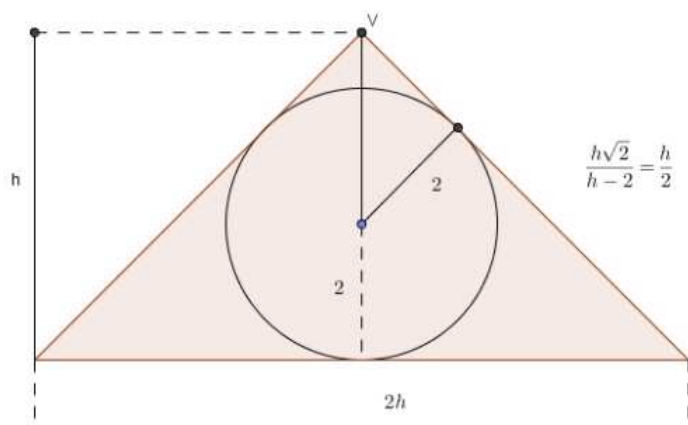


Figura 4.29:

a partir da relação de proporcionalidade obtemos a seguinte equação:

$$h^2 - 2h - 2h\sqrt{2} = 0$$

logo:

$$h = 0 \quad \text{ou} \quad h = 2 + 2\sqrt{2}$$

sendo a altura do cone definida por  $h = 2 + 2\sqrt{2}$  estamos agora em condições de definir sua equação  $\beta : x^2 + y^2 = (z - (2 + 2\sqrt{2}))^2$  onde  $0 \leq z \leq 2 + 2\sqrt{2}$ .

Para projetarmos o ponto  $P = (\sqrt{3}, 1, 2)$  pertencente a esfera  $\gamma$  no

cone  $\beta$ , vamos utilizar a função  $g$  que já construímos anteriormente.

$$\begin{aligned}
 p : (\gamma - \{N, S\}) &\longrightarrow \beta - \{V, C\} \\
 (\sqrt{3}, 1, 2) &\longmapsto \left( \left( \frac{1+\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \sqrt{3}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}, (1 + \sqrt{2}) \right)
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

□

**Atividade 4.17.** *Seja a esfera  $\gamma : x^2 + y^2 + (z - 2) = 2^2$  onde  $0 < z < 2 + 2\sqrt{2}$  que contém o paralelo  $\lambda$  no plano  $z = 1$  e um meridiano  $\alpha$  contido no plano  $x - y = 0$ , projete o paralelo  $\pi$  e o meridiano  $\alpha$  no cone  $\beta$  planificado no plano  $Oyz$ , dado que o ponto  $Q = (1, 1, 2 + \sqrt{2})$  pertence ao meridiano  $\alpha$ .*

*Resolução:*

**Projetando o paralelo.**

Sendo conhecida a equação de  $\gamma$  e o plano que contém o paralelo  $\lambda$ , podemos parametrizar  $\lambda$ , logo

$$\lambda : \begin{cases} x = \sqrt{3}\cos(t) \\ y = \sqrt{3}\sen(t) \quad \text{onde } t > 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Utilizando agora a função  $p : f \circ g$  que leva pontos da esfera diretamente para o setor circular, temos:

$$\begin{aligned}
 p : (\gamma - \{N, S\}) &\longrightarrow S \\
 (\sqrt{3}\cos(t), \sqrt{3}\sen(t), 1) &\longmapsto \left( \left( \frac{(1+\sqrt{2})r\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}} \right), \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot (t) \right)
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

**Projetando o meridiano.**

Assumindo que o ponto  $Q = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)$  pertence ao meridiano, usaremos a função  $p : f \circ g$  a fim de transpor  $Q$  da esfera para o setor circular  $S$

$$\begin{aligned} (\gamma - \{N, S\}) &\longrightarrow S \\ (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2) &\longmapsto \left( \frac{(1+\sqrt{2}) \cdot r \cdot \sqrt{2}}{2}, \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \arccos \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Para definirmos a equação polar da reta, basta utilizarmos o ângulo já definido referente ao ponto  $Q$ , logo em nosso sistema polar de polo  $(0, 0, 2 + \sqrt{2})$  e eixo polar  $(0, 0, 2 + \sqrt{2}) + (0, 0, 1)t$ , temos como representante da equação do meridiano  $\alpha$  a equação  $\left( r, \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \arccos \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)$  onde  $r$  está contido nos reais.

□

---

---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [1] P. Boulos; I. de Camargo, *Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial*, Makron Books, 3ª Edição (2005).
- [2] C. de Oliveira, *Curso de Cartografia Moderna*, Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (1988).
- [3] S. Dutch, *Spherical Projections*, University of Wisconsin - Green Bay, <http://www.uwgb.edu/dutchs/structge/sphproj.htm>.
- [4] C. Faria, *História da Cartografia*, <http://www.infoescola.com/cartografia/historia-da-cartografia/>.
- [5] C. A. Furuti, *Cartographical Map Projections*, <http://www.progonos.com/furuti/MapProj/Normal/TOC/cartTOC.html>.
- [6] R. Grisi; D. Miranda; S. Lodovici, *Geometria Analítica e Vetorial*, <http://gradmat.ufabc.edu.br/disciplinas/ga/notas-de-aulas/>.
- [7] J. C. Polking, *Mapping the sphere*, Park City Mathematics Institute, <http://math.rice.edu/~polking/cartography/cart.pdf>.
- [8] J. Stewart, *Cálculo, Vol. 2*, Cengage, 7ª Edição (2013).
- [9] *Laboratório de Cartografia*, UFSM, <http://coral.ufsm.br/cartografia/>.



- 
- [10] Site “Só Geografia”, *Cartografia*,  
<http://www.sogeografia.com.br/Conteudos/Cartografia/>.