INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ANÁLISE CRÍTICA DAS PROVAS DE MATEMÁTICA DE 2010 A 2013 DO ENEM

Leonardo Pereira Paula

Orientador: Mestre Eduardo Wagner

RIO DE JANEIRO

2014

INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ANÁLISE CRÍTICA DAS PROVAS DE MATEMÁTICA DE 2010 A 2013 DO ENEM

Leonardo Pereira Paula

Orientador: Mestre Eduardo Wagner

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

RIO DE JANEIRO

2014

Agradecimentos...

Aos meus pais que sempre me deram o suporte para que prosseguisse de forma satisfatória nos estudos.

À minha esposa Nivia e à minha filha Juliana que sempre me incentivaram e compreenderam os momentos que precisei me dedicar ao curso.

Aos meus professores do Instituto de Matemática da UFRJ com os quais muito aprendi e que sempre me inspiraram na minha carreira.

Ao professor Élcio (in memoriam) que com suas aulas, após minha formação na graduação, muito contribuiu para que eu iniciasse minha carreira como professor.

Ao professor Demetrius que muito contribuiu em duas fases de minha vida profissional.

Aos meus professores do IMPA que nesses dois anos fizeram com que eu me tornasse um profissional muito mais preparado.

Ao meu orientador Mestre Eduardo Wagner pela confiança e por toda ajuda prestada ao longo da realização desse trabalho

Resumo

PAULA, Leonardo Pereira. Análise crítica das provas de 2010 a 2013 do ENEM. Trabalho de fim de curso para obtenção do título de Mestre; orientador: Mestre Eduardo Wagner. PROFMAT, IMPA, 2014.

Este trabalho faz uma análise crítica das provas de 2010 (1ª aplicação), 2011, 2012 e 2013 do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

PALAVRAS- CHAVE: ENEM, MATRIZ DE REFERÊNCIA, OBJETOS DE CONHECIMENTO.

Sumário

1 Introdução

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) foi criado em 1998 e seu objetivo inicial era avaliar os conhecimentos dos alunos ao final do Ensino Médio. Em 2009 esse exame foi reestruturado, conforme consta do texto abaixo retirado do portal do MEC:

O Ministério da Educação apresentou uma proposta de reformulação do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e sua utilização como forma de seleção unificada nos processos seletivos das universidades públicas federais.

A proposta tem como principais objetivos democratizar as oportunidades de acesso às vagas federais de ensino superior, possibilitar a mobilidade acadêmica e induzir a reestruturação dos currículos do ensino médio.

As universidades possuem autonomia e poderão optar entre quatro possibilidades de utilização do novo exame como processo seletivo:

- Como fase única, com o sistema de seleção unificada, informatizado e on-line;
- Como primeira fase;
- Combinado com o vestibular da instituição;
- Como fase única para as vagas remanescentes do vestibular.

Nesse formato, a Matemática, que apresenta uma forma diferente de abordagem em relação aos vestibulares tradicionais, representa 25% do exame objetivo.

O objetivo deste trabalho é fazer uma análise crítica das últimas quatro provas do ENEM, verificando os objetivos cobrados, nível de aprofundamento do assunto e se os assuntos cobrados estão em sintonia com que o aluno estuda no Ensino Médio.

A ideia é examinar como o tópico abordado é ensinado nas escolas, como é abordado pelos livros, se a questão estava suficientemente clara, se era de interpretação dúbia, se envolvia conceitos que não eram propriamente de matemática ou se a questão era muito longa.

Com uma análise inicial, verifica-se que alguns assuntos da Matemática não são cobrados, pelo fato de não se encaixarem na matriz de referência onde constam as habilidades e competências da área de Matemática, como por exemplo, números complexos, polinômios, algumas funções, conceitos de geometria analítica e outros conceitos que aparecem nas provas, mas com pouco aprofundamento. Assim, os professores têm um grande desafio na forma de ministrarem os conteúdos.

Deve-se adequar os conteúdos à forma cobrada pelo ENEM? Não se deve esquecer que o ENEM não é a única forma de ingresso às universidades.

A preocupação que deve existir é a forma de abordagem do assunto, estimular o raciocínio lógico, o raciocínio geométrico, estimular a abstração e não simplesmente apresentar fórmulas aos alunos, mecanizando o processo ensino-aprendizagem. Deve-se mostrar a importância do conteúdo, torná-lo, na medida do possível, mais intuitivo e fazer com que utilizem fórmulas quando realmente houver necessidade.

Podemos citar, como exemplos, os assuntos progressões aritmética e geométrica. Não é interessante apresentar a fórmula do termo geral, sem mostrar sua dedução, mostrando que se pode escrever qualquer termo de uma sequência em função de outro e da razão, fazer com que os alunos verifiquem o comportamento dessas sequências.

Em análise combinatória, não ficar utilizando fórmulas completamente desnecessárias, sendo que com um conceito extremamente simples do princípio multiplicativo, o aluno consegue resolver os diversos problemas de contagem.

Não se pode falar em função afim, sem citar a importância do coeficiente da variável. Não só o tratando como coeficiente angular, mas citar a sua função mais importante, que é a taxa de variação da função.

Deve-se estimular os alunos a aplicarem os conceitos adquiridos em sala de aula no seu cotidiano. Essa mudança de atitude por parte dos professores, já é uma forma para a adaptação do conteúdo ao cobrado no ENEM.

Segue abaixo a matriz referência com os eixos cognitivos comuns e as habilidades e competências da área de conhecimento da matemática.

Os eixos comuns a todas as áreas ressaltam a importância da leitura e interpretação de texto que, sem esse domínio, compromete o entendimento das questões da prova de matemática.

EIXOS COGNITIVOS (comuns a todas as áreas de conhecimento)

I. **Dominar linguagens (DL)**: dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.

II. **Compreender fenômenos (CF)**: construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.

III. **Enfrentar situações-problema (SP)**: selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.

IV. **Construir argumentação (CA)**: relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.

V. **Elaborar propostas (EP)**: recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

Pode-se perceber a importância dessas habilidades para uma boa resolução da prova de matemática.

Pela experiência com alunos do ensino médio, é verificado que muitos desistem de resolver certas questões pelo fato do enunciado ser muito grande, com muitas informações. Com isso, deixa por muitas vezes de resolver uma questão relativamente simples, onde somente alguns trechos do texto servem de subsídios para a resolução.

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS (MT)

Matriz de Referência

A) Competências

Competência de área 1 – Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

H1 – Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações: naturais, inteiros, racionais ou reais.
H2 – Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
H3 – Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

H4 – Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.
H5 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

Competência de área 2 – Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

H6 – Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
H7 – Identificar características de figuras planas ou espaciais.
H8 – Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
H9 – Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Competência de área 3 – Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H10 – Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.
H11 – Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.
H12 – Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.
H13 – Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.
H14 – Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Competência de área 4 – Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H15 – Identificar a relação de dependência entre grandezas.
H16 – Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.
H17 – Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.
H18 – Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Competência de área 5 – Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

H19 – Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
H20 – Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
H21 – Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
H22 – Utilizar conhecimentos algébrico-geométricos como recurso para a construção de argumentação.
H23 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Competência de área 6 – Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

H24 – Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
H25 – Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
H26 – Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Competência de área 7 – Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

H27 – Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.
H28 – Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.
H29 – Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.
H30 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

2 Análise das Provas

Utilizei o seguinte critério para a quantificação das questões: dividi em 8 objetos de conhecimento, onde em cada uma deles há uma certa quantidade de assuntos, levando em consideração a matriz de referência.

B) Objetos de conhecimento

1) Conhecimentos numéricos.

O1 – Conjuntos numéricos e operações.
O2 – Fatoração, divisibilidade, razões e proporções.
O3 – Porcentagem, juros, unidades de medidas e relações de dependência entre grandezas.
O4 – Sequências e progressões.
O5 – Princípios de contagem.

2) Álgebra do ensino fundamental

O6 – Equações e inequações e problemas.
O7 – Sistemas lineares.

3) Geometria plana e espacial

O8 – Polígonos.
O9 – Circunferência.
O10 – Proporcionalidade, isometrias e semelhança.
O11 – Triângulo retângulo e trigonometria do ângulo agudo.
O12 – Áreas.
O13 – Prisma e pirâmide.
O14 – Cilindro, cone e esfera.

4) Análise de gráficos e tabelas (que não envolvam conhecimentos de estatística)

O15 – Representação e análise de dados.

5) Conhecimentos de estatística e probabilidade

O16 – Medidas de tendência central (média, moda e mediana).
O17 – Desvios e variância.
O18 – Probabilidade.

6) Funções.

O19 – Funções e gráficos.
O20 – Função afim.
O21 – Função quadrática.
O22 – Função exponencial.
O23 – Função logarítmica.

7) Trigonometria

O24 – Relações trigonométricas.
O25 – Funções trigonométricas.

8) Geometria Analítica

O26 – Coordenadas, distância entre dois pontos.
O27 – Equação da reta.
O28 – Retas paralelas e perpendiculares.
O29 – Circunferência e elipse.
O30 – Interseções.

Observação: não está clara na matriz de referência a abordagem de matrizes e determinantes, porém na prova de 2012 foi cobrado um item sobre multiplicação de matrizes. No caso não classifiquei esse item em análise de gráficos e tabelas, mas sim como uma habilidade que envolva conhecimento algébrico, pois o aluno precisaria saber multiplicação de matrizes.

Seguem as informações sobre as provas de 2010 a 2013

Quanto ao nível de dificuldade, a classificação como fácil, média e difícil atendeu aos seguintes critérios:

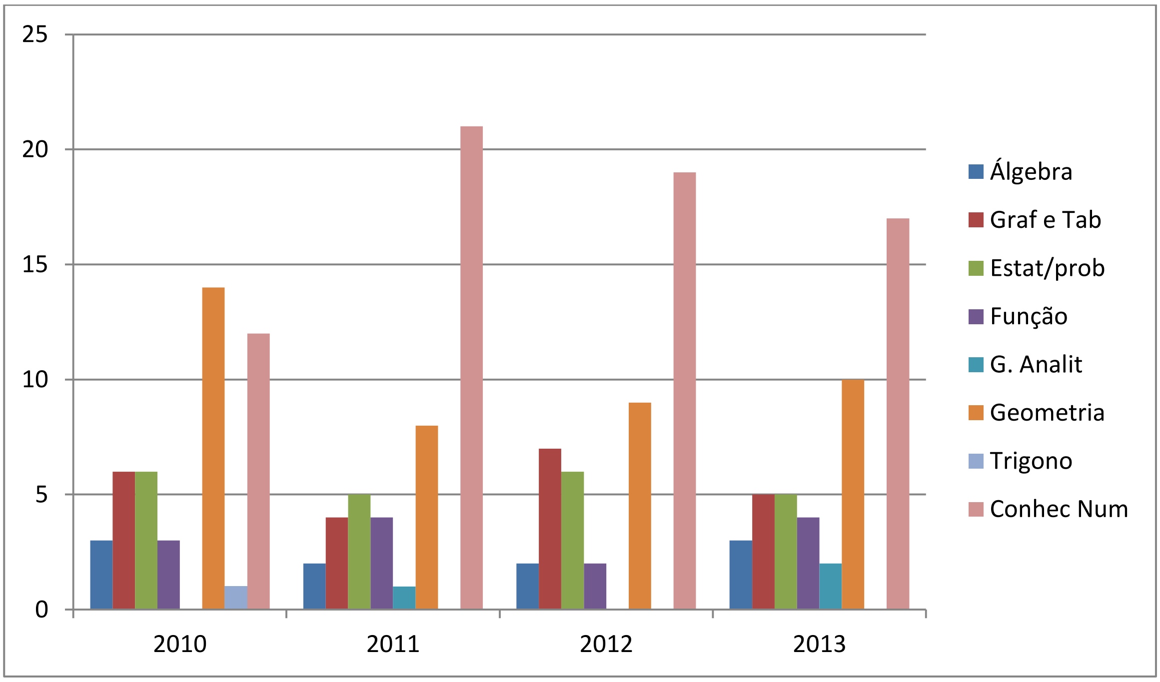
Além do meu julgamento, considerei também as experiências que obtive, resolvendo as provas com meus alunos tanto do 3º ano do Ensino Médio e com alunos de pré-vestibular.

Questão fácil: a maioria dos alunos bem preparados é capaz de resolver;

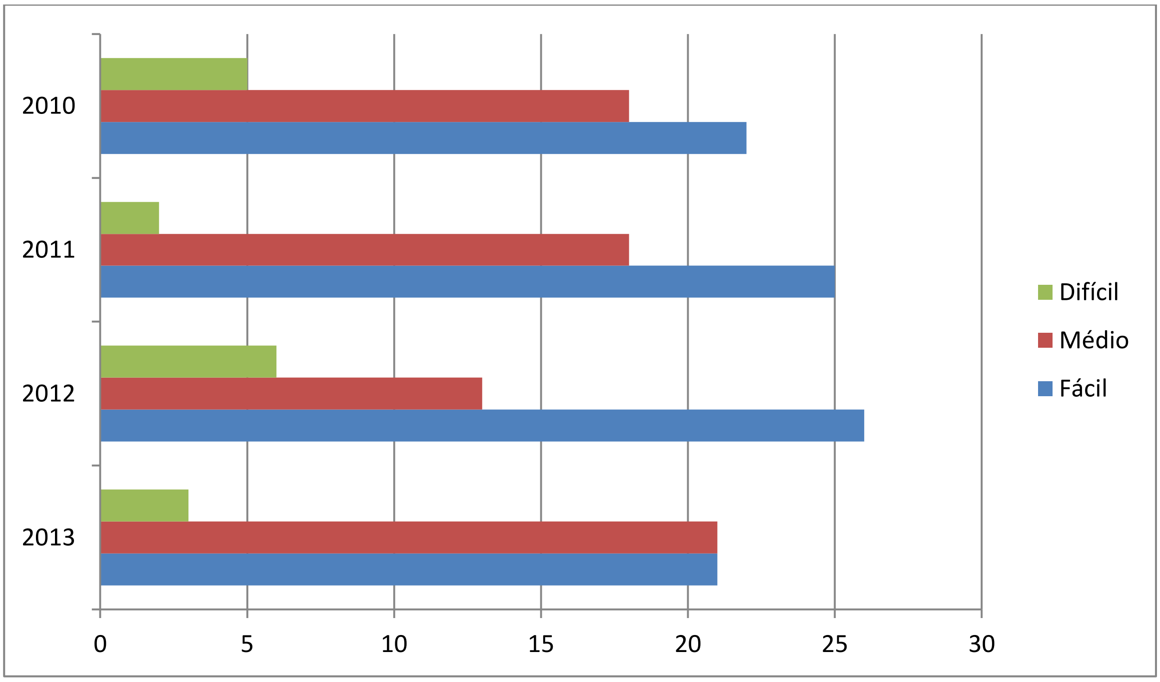
Questão média: cerca de metade desses alunos são capazes de resolver;

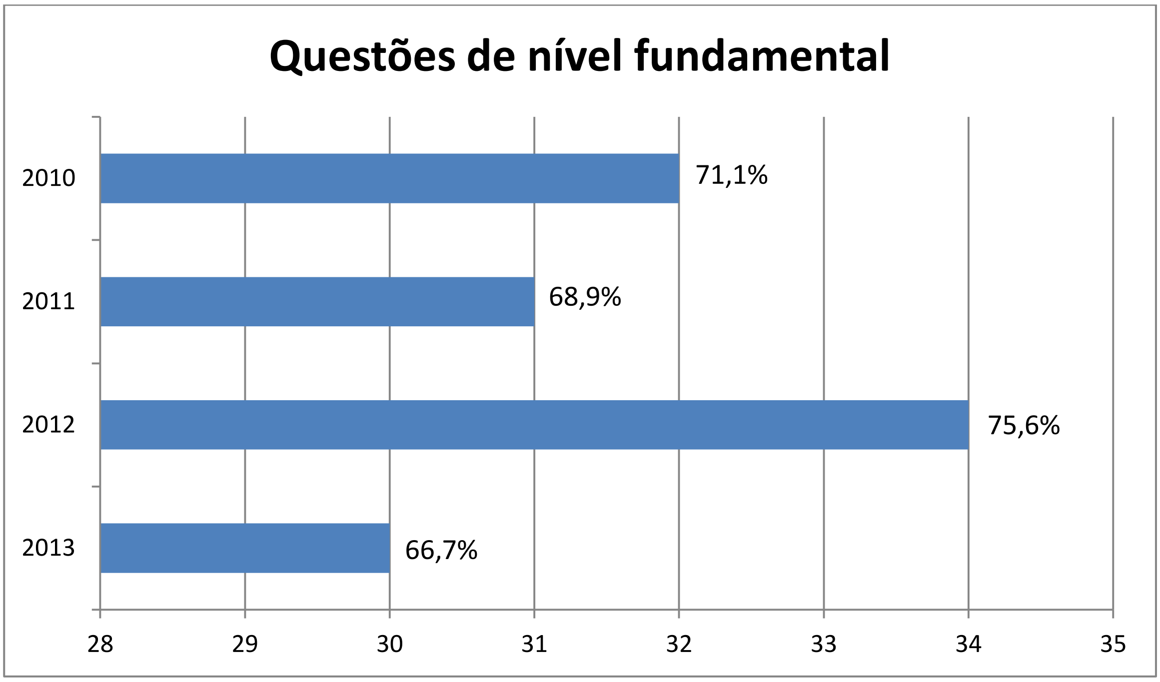
Questão difícil: mesmo bem preparados, esses alunos teriam dificuldade de resolver as questões.

Quantidade de itens por objeto de conhecimento

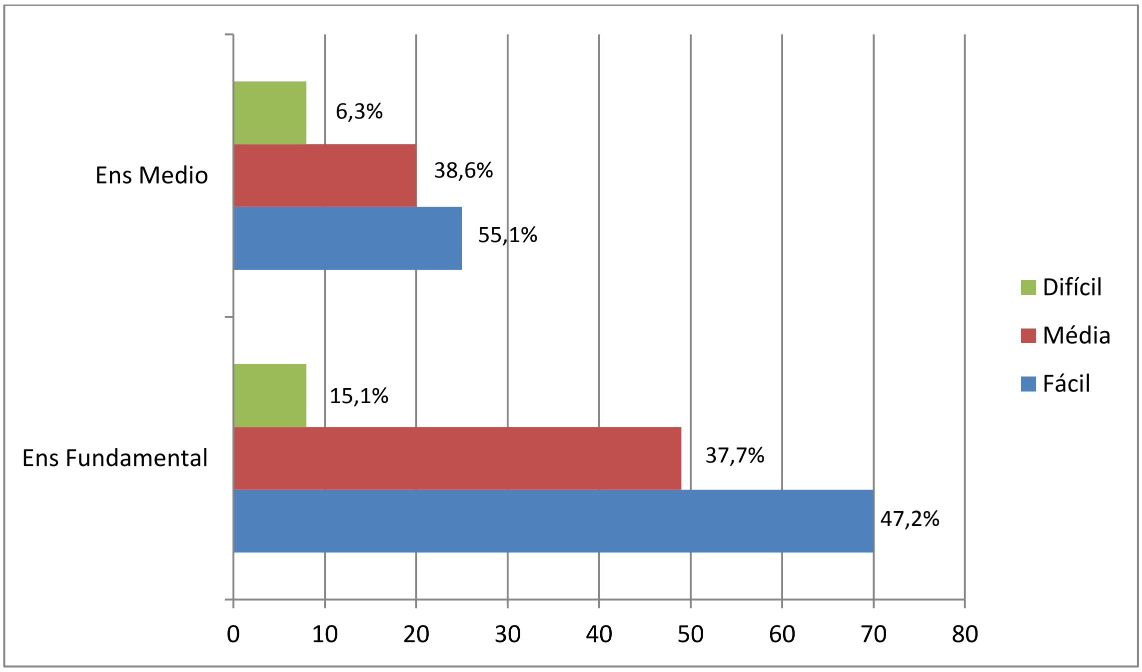


Nível de dificuldade





Nível de dificuldade com separação dos itens do Ensino médio e Ensino Fundamental das provas de 2010 a 2013



Pode-se observar tanto nas questões de Ensino Médio quanto nas do Ensino Fundamental que há o predomínio dos itens de nível de dificuldade fácil.

Identificação das questões por objetos de conhecimento

Prova Azul
Exercícios de conteúdos do Ensino Fundamental estão destacados na cor AMARELA.
Exercícios de conteúdos do Ensino Médio estão destacados na cor VERMELHA.

Assunto	2010	2011	2012	2013
01	158, 159	141, 145, 148, 164	142, 150, 157, 161, 168, 172, 177	147, 153
02		143, 146, 153, 161, 166	136, 145, 164, 167, 173	143, 145, 148, 155, 174
03	136, 137, 144, 154, 171, 172, 177	136, 138, 149, 157, 160, 175, 177, 178	140, 143, 147, 170, 171, 180	139, 154, 158, 163, 170
04	179	162		173
05	173	168, 174, 176	144	138, 149, 165, 169
06	149, 155, 169, 176	159, 180	138, 166	159, 171, 172
07				
08		151, 172		
09	163,164	165	137, 152	141, 178
10	161			164, 179, 180
11	160	155		136
12	150, 162	140	141, 159, 160	156, 167
13	139, 146, 178	144	149, 158, 165	
14	138, 151, 153, 157,168	147, 167	149, 153	157, 176
15	140, 141, 145, 148, 156, 180	139, 150, 169, 173	148, 151, 154, 155, 162, 163, 175	140, 142, 144, 160, 177

16	143, 167, 175	142, 154	174, 179	137, 162
17	170		176	
18	147, 174	163, 170, 171	139, 146, 178	146, 150, 168
19	142			161
20	166	152, 156, 179	156	
21	165		152	151, 152
22				
23		137		166
24				
25	152			
26		150		175
27				
28				
29				151

Observação: alguns itens abordaram mais de um objeto de conhecimento.

2.1 Prova de 2010

Pode-se perceber a predominância dos assuntos geometria plana e espacial e conhecimentos numéricos.

Há de se destacar que o assunto porcentagem consta em outros assuntos como geometria e análise de gráficos, além de ter sido quantificado em conhecimentos numéricos.

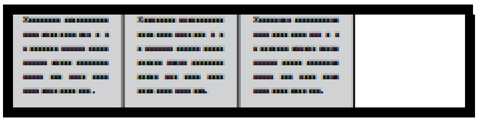
Todas as competências e quase todas as habilidades foram abordadas.

32 questões são do Ensino Fundamental, sendo então possível de serem resolvidas por um aluno do 9° ano.

Seguem abaixo algumas questões dessa prova que chamaram mais atenção, no que diz respeito aos índices de dificuldade, enunciados e o fato citado acima, os itens em que apareceu o assunto porcentagem aplicado a outro conteúdo.

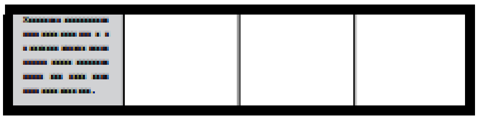
Questão 136

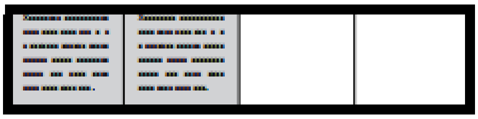
Um professor dividiu a lousa da sala de aula em quatro partes iguais. Em seguida, preencheu 75% dela com conceitos e explicações, conforme a figura seguinte.

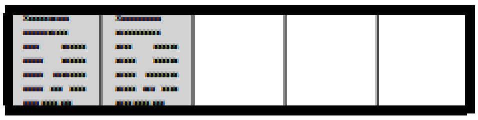


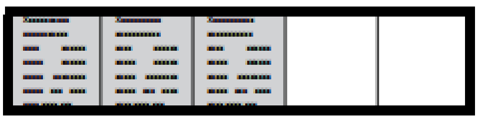
Algum tempo depois, o professor apagou a lousa por completo e, adotando um procedimento semelhante ao anterior, voltou a preenchê-la, mas, dessa vez, utilizando 40% do espaço dela.

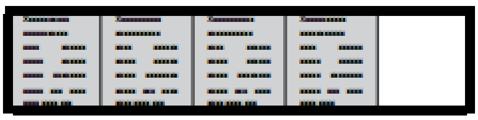
Uma representação possível para essa segunda situação é

A 

B 

C 

D 

E 

Comentários: o enunciado é bem claro e objetivo. É um tipo de questão comum nos livros didáticos e bem interessante, pois estabelece a relação entre frações e porcentagem. É muito comum na TV, nos jornais e em outros veículos de comunicação aparecerem informações dessas duas formas: 2/5 de alguma coisa ou 40% dessa coisa.

Habilidade: H1 (reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representação dos números e operações: naturais, inteiros, racionais ou reais).

Objeto de conhecimento: 03 (porcentagem, juros e relações de dependência entre grandezas).

Nível de dificuldade: fácil.

Questão 140

A classificação de um país no quadro de medalhas nos Jogos Olímpicos depende do número de medalhas de ouro que obteve na competição, tendo como critérios de desempate o número de medalhas de prata seguido do número de medalhas de bronze conquistados. Nas Olimpíadas de 2004, o Brasil foi o décimo sexto colocado no quadro de medalhas, tendo obtido 5 medalhas de ouro, 2 de prata e 3 de bronze. Parte desse quadro de medalhas é reproduzida a seguir.

Classificação	País	Medalhas de ouro	Medalhas de prata	Medalhas de bronze	Total de medalhas
8º	Itália	10	11	11	32
9º	Coreia do Sul	9	12	9	30
10º	Grã-Bretanha	9	9	12	30
11º	Cuba	9	7	11	27
12º	Ucrânia	9	5	9	23
13º	Hungria	8	6	3	17

Disponível em: http://www.quadroademedalhas.com.br. Acesso em: 05 abr. 2010 (adaptado).

Se o Brasil tivesse obtido mais 4 medalhas de ouro, 4 de prata e 10 de bronze, sem alteração no número de medalhas dos demais países mostrados no quadro, qual teria sido a classificação brasileira no quadro de medalhas das Olimpíadas de 2004?

A 13º
B 12º
C 11º
D 10º
E 9º

Comentários: é uma questão de análise de tabela, onde basta seguir as orientações que a questão fornece. Contextualização bem interessante e com um pouco de atenção, o aluno consegue resolver tranquilamente.

Habilidade: H25 (resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos).

Objeto de conhecimento: 15 (representação e análise de dados).

Nível de dificuldade: fácil.

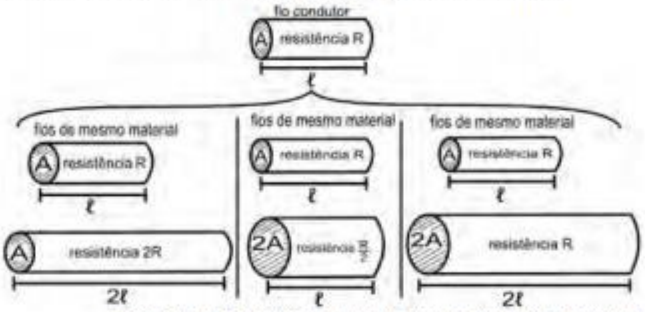
Questão 144

A resistência elétrica e as dimensões do condutor

A relação da resistência elétrica com as dimensões do condutor foi estudada por um grupo de cientistas por meio de vários experimentos de eletricidade. Eles verificaram que existe proporcionalidade entre:

- resistência (R) e comprimento (ℓ), dada a mesma secção transversal (A);
- resistência (R) e área da secção transversal (A), dado o mesmo comprimento (ℓ) e
- comprimento (ℓ) e área da secção transversal (A), dada a mesma resistência (R).

Considerando os resistores como fios, pode-se exemplificar o estudo das grandezas que influem na resistência elétrica utilizando as figuras seguintes.



Disponível em: http://www.efeitojoule.com. Acesso em: abr. 2010 (adaptado).

As figuras mostram que as proporcionalidades existentes entre resistência (R) e comprimento (ℓ), resistência (R) e área da secção transversal (A), e entre comprimento (ℓ) e área da secção transversal (A) são, respectivamente,

A direta, direta e direta.
B direta, direta e inversa.
C direta, inversa e direta.
D inversa, direta e direta.
E inversa, direta e inversa.

Comentários: enunciado que pode causar dificuldade ao aluno, com conceitos de física, mas que na realidade não influenciam na resolução da questão. Infelizmente, o assunto grandezas proporcionais, que é importantíssimo, só aparece no ensino fundamental, normalmente no 7º ano, mas deveria ser abordado também no Ensino Médio, já que os alunos se deparam tanto na Matemática quanto em outras ciências com relações entre grandezas e que, muitas vezes, são passadas para os alunos, sem comentar a situação de proporcionalidade.

Habilidade: H16 (resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas direta e inversamente proporcionais).

Objeto de conhecimento: 03 (porcentagem, juros e relações de dependências entre grandezas).

Nível de dificuldade: médio.

Questão 147

A figura I abaixo mostra um esquema das principais vias que interligam a cidade A com a cidade B. Cada número indicado na figura II representa a probabilidade de pegar um engarrafamento quando se passa na via indicada. Assim, há uma probabilidade de 30% de se pegar engarrafamento no deslocamento do ponto C ao o ponto B, passando pela estrada E4, e de 50%, quando se passa por E3. Essas probabilidades são independentes umas das outras.

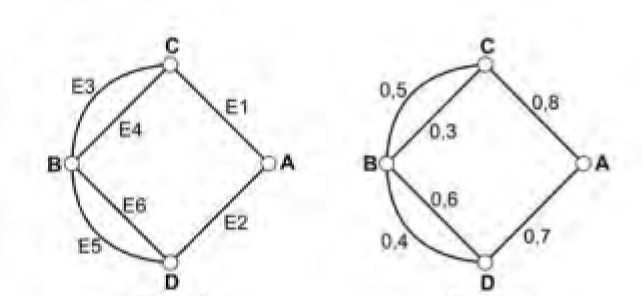


Figura I Figura II

Paula deseja se deslocar da cidade A para a cidade B usando exatamente duas das vias indicadas, percorrendo um trajeto com a menor probabilidade de engarrafamento possível.

O melhor trajeto para Paula é

- A E1E3.
- B E1E4.
- C E2E4.
- D E2E5.
- E E2E6.

Comentários: é uma questão que envolve probabilidade. Não é uma questão de resolução direta.

Resolução: a probabilidade de não pegar engarrafamento seguindo as vias das alternativas são:

E1E3 = (1 – 0,8) . (1 – 0,5) = 0,1.

E1E4 = (1 – 0,8) . (1 – 0,3) = 0,14.

Não é possível pegar o caminho E2E4.

E2E5 = (1 – 0,7) . (1 – 0,4) = 0,18

E2E6 = (1 – 0,7) . (1 – 0,6) = 0,12.

Logo o de menor probabilidade de engarrafamento é o caminho E2E5.

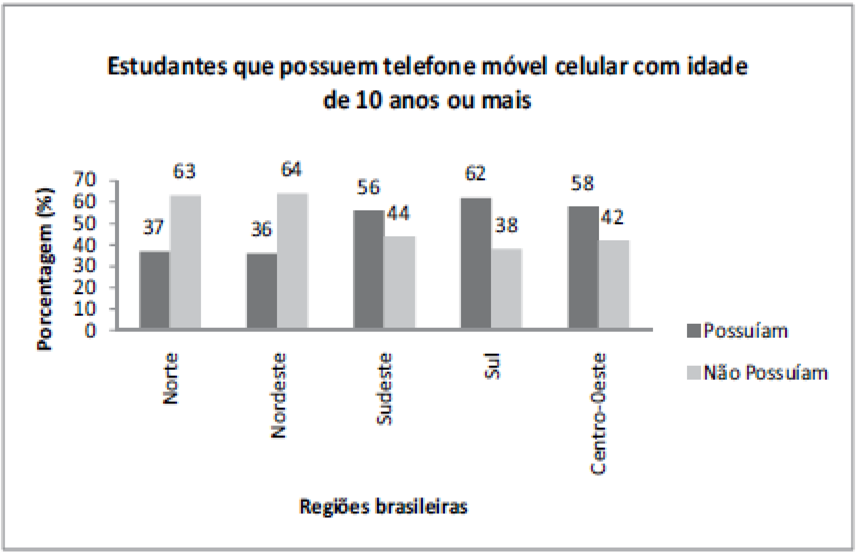
Habilidade: H30 (avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conceitos de estatística e probabilidade).

Objeto de conhecimento: 18 (probabilidade).

Nível de dificuldade: difícil.

Questão 141

Os dados do gráfico foram coletados por meio da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios.



Fonte: IBGE. Disponível em: http://www.ibge.gov.br. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

Supondo-se que, no Sudeste, 14 900 estudantes foram entrevistados nessa pesquisa, quantos deles possuíam telefone móvel celular?

- A 5 513
- B 6 556
- C 7 450
- D 8 344
- E 9 536

Comentários: é uma questão fácil de interpretação de gráfico e porcentagem, onde o aluno pode ganhar tempo no item, pois é possível resolver sem ter que chegar ao resultado final, pois no cálculo vai aparecer o produto 149 x 56. O produto de um número que termina em 9 por um número que termina em 6 sempre termina em 4 e nas alternativas somente a letra d aparece um número terminado em 4. Existe também a possibilidade e arredondar o valor para 15000, que tornará o cálculo mais simples.

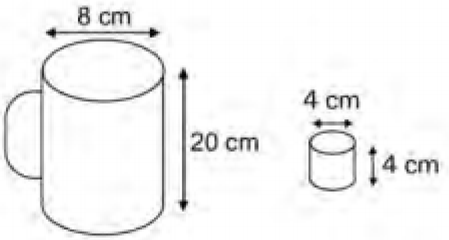
Habilidade: H25 (resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos).

Objeto de conhecimento: 15 (representação e análise de dados).

Nível de dificuldade: fácil.

Questão 151

Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram numa reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos, também cilíndricos.



Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade mínima de água na leiteira para encher os vinte copinhos pela metade. Para que isso ocorra, Dona Maria deverá

A) encher a leiteira até a metade, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.
B) encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.
C) encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.
D) encher duas leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.
E) encher cinco leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

Comentários: nessa questão e em quase todas de geometria espacial dessa prova, foram cobrados conceitos diretos de cálculos de volumes e áreas com aplicação no nosso cotidiano. Com um pouco de cuidado no que está pedindo e com o conhecimento de cálculo do volume do cilindro é uma questão fácil.

Habilidade: H8 (resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma).

Objeto de conhecimento: 14 (cilindro, cone e esfera).

Nível de dificuldade: fácil.

Questão 152

Um satélite de telecomunicações, t minutos após ter atingido sua órbita, está a r quilômetros de distância do centro da Terra. Quando r assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o *apogeu* e o *perigeu*, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de r em função de t seja dado por

$$r(t) = \frac{5\,865}{1 + 0{,}15 \times \cos(0{,}06t)}$$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de r, no *apogeu* e no *perigeu*, representada por S.

O cientista deveria concluir que, periodicamente, S atinge o valor de

A 12 765 km.
B 12 000 km.
C 11 730 km.
D 10 965 km.
E 5 865 km.

Comentário: questão que aborda o conceito de variação dos valores do cosseno. O candidato deverá perceber que o menor valor do $\cos 0{,}06t$ é -1 e o maior é 1. Não é uma relação tão direta de se perceber, pois na grande maioria dos livros didáticos não aparecem questões sobre esse conceito de forma contextualizada.

Resolução:

O valor máximo que irá atingir será quando o $\cos 0{,}06t = -1$, com isso o valor da expressão será $\frac{5865}{0{,}85} = 6900$ e o valor mínimo será $\frac{5865}{1{,}15} = 5100$. A soma desses valores será 12000.

Habilidade: H14 (avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas).

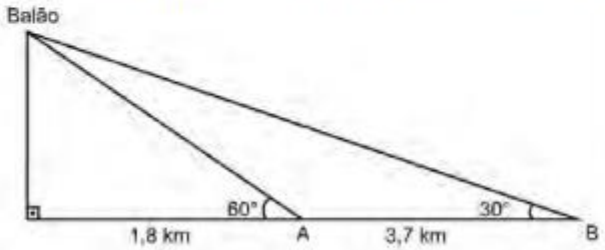
Objeto de conhecimento: 25 (funções trigonométricas).

Nível de dificuldade: difícil.

Questão 160

Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.

Disponível em: http://www.correiodobrasil.com.br. Acesso em: 02 maio 2010.



Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60°; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de 30°.

Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

- A 1,8 km
- B 1,9 km
- C 3,1 km
- D 3,7 km
- E 5,5 km

Comentários: é uma questão clássica dos livros didáticos. Calculando a tangente de 60° no triângulo, temos que $tg60° = \frac{h}{1{,}8}$, temos que $h = 3{,}1$ km aproximadamente. Há um detalhe nessa questão que não deve ter sido percebido na montagem. Se calcularmos a distância do balão ao ponto A, chegamos a 3,6 km, pois será o dobro da posição vertical do balão ao ponto A, porém o triângulo formado pelo vértice que contém o balão, o vértice A e o vértice B é isósceles e com isso essa distância deveria ser de 3,7 km e não 3,6 km.

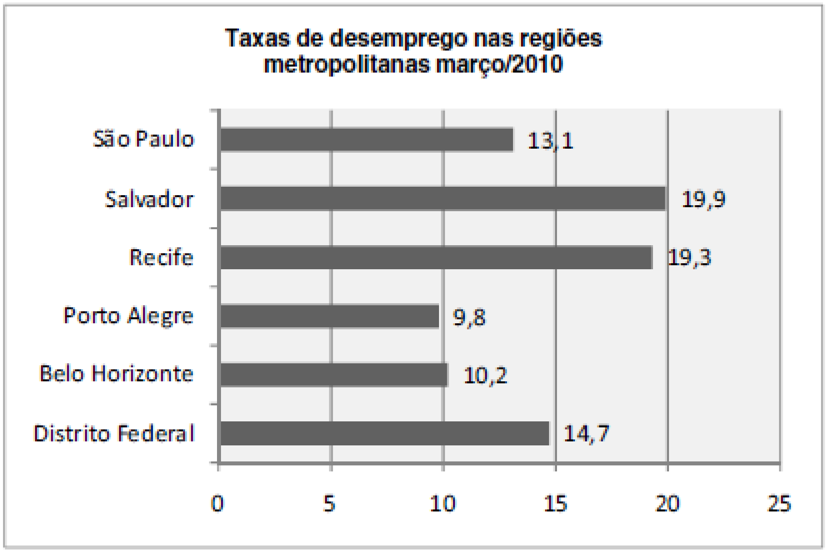
Habilidade: H9 (utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano).

Objeto de conhecimento: 11 (triângulo retângulo e trigonometria no triângulo retângulo).

Nível de dificuldade: médio.

Questão 145

Os dados do gráfico seguinte foram gerados a partir de dados colhidos no conjunto de seis regiões metropolitanas pelo Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (Dieese).



Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

Supondo que o total de pessoas pesquisadas na região metropolitana de Porto Alegre equivale a 250 000, o número de desempregados em março de 2010, nessa região, foi de

A 24 500.
B 25 000.
C 220 500.
D 223 000.
E 227 500.

Comentários: enunciado claro e objetivo. É um item em que o aluno pode ganhar tempo na resolução. É muito menos trabalhoso calcular 10% de algo do que 9,8%. 10% de 250 000 são 25000, como 9,8% é um valor um pouco menor que 25 000, a única alternativa que é possível é a letra a.

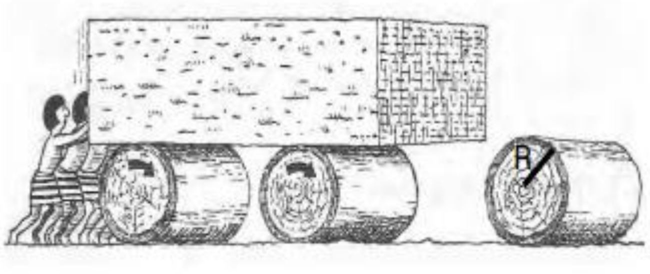
Habilidade: H25 (resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos).

Objeto de conhecimento: 03 (porcentagem, juros e relações de dependência entre grandezas).

Nível de dificuldade: Fácil.

Questão 163

A ideia de usar rolos circulares para deslocar objetos pesados provavelmente surgiu com os antigos egípcios ao construírem as pirâmides.



BOLT, Brian. **Atividades matemáticas**.Ed.Gradiva.

Representando por R o raio da base dos rolos cilíndricos, em metros, a expressão do deslocamento horizontal y do bloco de pedra em função de R, após o rolo ter dado uma volta completa sem deslizar, é

A $y = R$.
B $y = 2R$.
C $y = \pi R$.
D $y = 2\pi R$.
E $y = 4\pi R$.

Comentários: questão bem elaborada, difícil, pois não é tão claro para o aluno perceber que , enquanto o rolo dá uma volta sobre o solo, o bloco irá correr sobre o rolo a mesma distância da volta, logo $4\pi R$.

Habilidade: H22 (utilizar conhecimentos algébrico-geométricos como recurso para a construção de argumentação).

Objeto de conhecimento: 09 (circunferência).

Nível de dificuldade: difícil.

2.2 Prova de 2011

Há uma predominância de conhecimentos numéricos.

Há de se destacar que o assunto porcentagem consta em outros assuntos como geometria e análise de gráficos, além de ter sido quantificado em conhecimentos numéricos.

31 questões são do Ensino Fundamental, sendo então possível de serem resolvidas por um aluno do 9° ano do Ensino Fundamental.

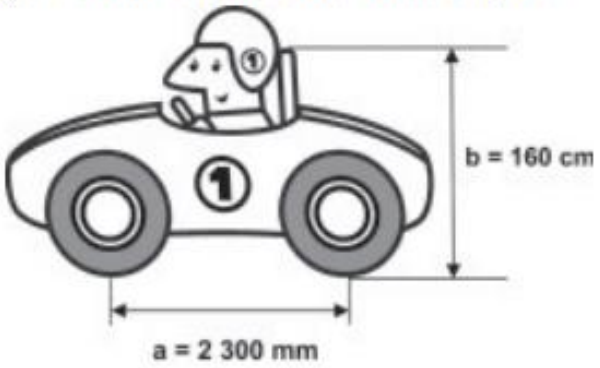
Todas as competências e quase todas as habilidades foram abordadas.

QUESTÃO 136

Um mecânico de uma equipe de corrida necessita que as seguintes medidas realizadas em um carro sejam obtidas em metros:

a) distância **a** entre os eixos dianteiro e traseiro;

b) altura **b** entre o solo e o encosto do piloto.



Ao optar pelas medidas **a** e **b** em metros, obtêm-se, respectivamente,

A 0,23 e 0,16.
B 2,3 e 1,6.
C 23 e 16.
D 230 e 160.
E 2 300 e 1 600.

Comentários: enunciado é claro e objetivo. Não é uma contextualização tão interessante.

Habilidade: H10 (identificar relações entre grandezas e unidades de medidas).

Objeto de conhecimento: 03 (porcentagem, juros e relações de dependência entre grandezas).

Nível de dificuldade: fácil.

QUESTÃO 137

O medidor de energia elétrica de uma residência, conhecido por "relógio de luz", é constituído de quatro pequenos relógios, cujos sentidos de rotação estão indicados conforme a figura:

Disponível em: http://www.enersul.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010.

A medida é expressa em kWh. O número obtido na leitura é composto por 4 algarismos. Cada posição do número é formada pelo último algarismo ultrapassado pelo ponteiro.

O número obtido pela leitura em kWh, na imagem, é

- (A) 2 614.
- (B) 3 624.
- (C) 2 715.
- (D) 3 725.
- (E) 4 162.

Comentários: é uma questão bem fácil. Somente com uma falta de atenção muito grande, um aluno do Ensino Médio pode errar. Basta observar os ponteiros dos relógios. Já é uma contextualização interessante, pois muitos relógios no nosso país ainda são desse tipo. A questão mostra uma situação que faz parte do nosso cotidiano.

Habilidade: H24 (utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências).

Objeto de conhecimento: 15 (representação e análise de dados).

Nível de dificuldade: fácil.

QUESTÃO 139

A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como M_w), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. M_w e M_0 se relacionam pela fórmula:

$$M_W = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log_{10}(M_0)$$

Onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina·cm.

O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_W = 7{,}3$.

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. Historic Earthquakes. Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado).

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. USGS Earthquake Magnitude Policy. Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado).

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe (em dina·cm)?

A) $10^{-5,10}$
B) $10^{-0,73}$
C) $10^{12,00}$
D) $10^{21,65}$
E) $10^{27,00}$

Comentários: o enunciado é grande, mas de fácil compreensão. É uma questão que envolve a aplicação de logaritmos, que é interessante, pois mostra a importância do assunto em fenômenos da natureza. O assunto logaritmo não é tão frequente nas provas do ENEM.

Habilidade: H21 (resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos).

Objeto de conhecimento: 23 (função logarítmica).

Nível de dificuldade: médio.

QUESTÃO 140

A figura seguinte mostra um modelo de sombrinha muito usado em países orientais.

Disponível em: http://mdmat.psico.ufrgs.br. Acesso em: 1 maio 2010.

Esta figura é uma representação de uma superfície de revolução chamada de

A) pirâmide.
B) semiesfera.
C) cilindro.
D) tronco de cone.
E) cone.

Comentários: questão fácil de reconhecimento de uma figura espacial. Apesar de ser uma questão sobre geometria espacial, o reconhecimento de figuras espaciais é visto no Ensino Fundamental, o que leva um aluno do 2° segmento do Ensino Fundamental a resolvê-la tranquilamente.

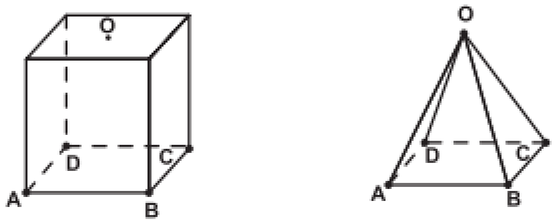
Habilidade: H7 (identificar características de figuras planas e espaciais).

Objeto de conhecimento: 14 (cilindro, cone e esfera).

Nível de dificuldade: fácil.

QUESTÃO 144

Uma indústria fabrica brindes promocionais em forma de pirâmide. A pirâmide é obtida a partir de quatro cortes em um sólido que tem a forma de um cubo. No esquema, estão indicados o sólido original (cubo) e a pirâmide obtida a partir dele.



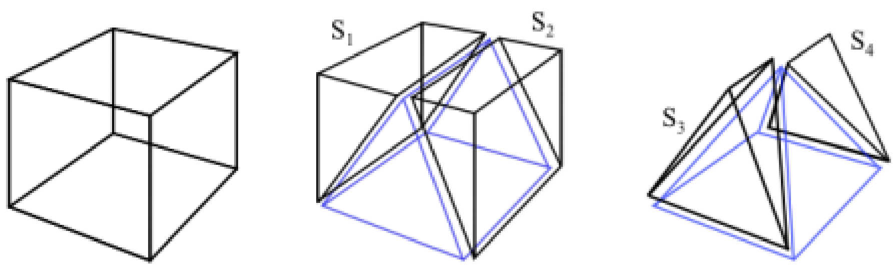
Os pontos A, B, C, D e O do cubo e da pirâmide são os mesmos. O ponto O é central na face superior do cubo. Os quatro cortes saem de O em direção às arestas $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, nessa ordem. Após os cortes, são descartados quatro sólidos.

Os formatos dos sólidos descartados são

- **A** todos iguais.
- **B** todos diferentes.
- **C** três iguais e um diferente.
- **D** apenas dois iguais.
- **E** iguais dois a dois.

Comentários: a grande maioria dos alunos tem dificuldade de enxergar esses cortes nas figuras que resultam outros sólidos. É uma contextualização interessante.

Resolução: podemos fazer os dois primeiros cortes a partir de O para as arestas AB e CD e após fazer os outros dois cortes para as arestas AD e BC. Podemos perceber que os sólidos descartados serão iguais dois a dois, conforme mostra as figuras abaixo.

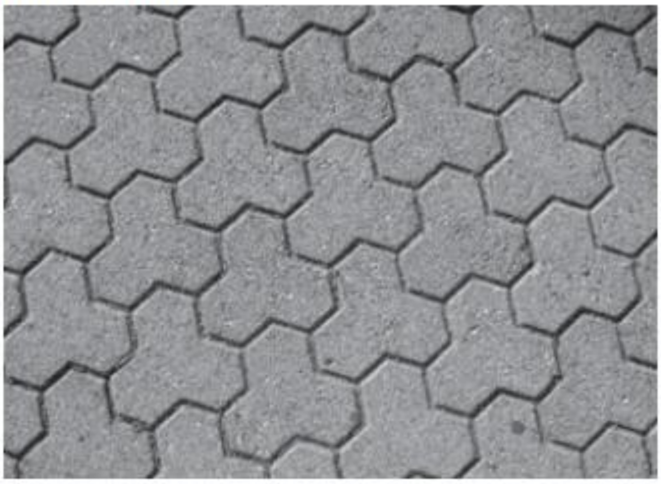


Habilidade: H9 (utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano).

Objeto de conhecimento: 13 (prisma e pirâmide).

Nível de dificuldade: difícil.

QUESTÃO 154



Disponível em: http://www.diaadia.pr.gov.br. Acesso em: 28 abr. 2010.

O polígono que dá forma a essa calçada é invariante por rotações, em torno de seu centro, de

A 45°.
B 60°.
C 90°.
D 120°.
E 180°.

Comentários: é uma questão de resolução simples, mas de visualização não tão direta, o que torna a questão difícil.

Resolução: o que o aluno deve observar é que o polígono que dá origem à calçada é um hexágono regular, onde seu ângulo interno vale 120°. Assim esses polígonos são dispostos por rotações de 120°.

Habilidade: H7 (identificar características de figuras planas ou espaciais).

Objeto de conhecimento: 08 (polígonos).

Nível de dificuldade: difícil.

QUESTÃO 157

Um jovem investidor precisa escolher qual investimento lhe trará maior retorno financeiro em uma aplicação de R$ 500,00. Para isso, pesquisa o rendimento e o imposto a ser pago em dois investimentos: poupança e CDB (certificado de depósito bancário). As informações obtidas estão resumidas no quadro:

	Rendimento mensal (%)	IR (imposto de renda)
POUPANÇA	0,560	ISENTO
CDB	0,876	4% (sobre o ganho)

Para o jovem investidor, ao final de um mês, a aplicação mais vantajosa é

A a poupança, pois totalizará um montante de R$ 502,80.
B a poupança, pois totalizará um montante de R$ 500,56.
C o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,38.
D o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,21.
E o CDB, pois totalizará um montante de R$ 500,87.

Comentários: é uma questão fácil, de enunciado claro e objetivo. Contextualização muito interessante, pois trata da pessoa se decidir pela melhor aplicação do seu dinheiro.

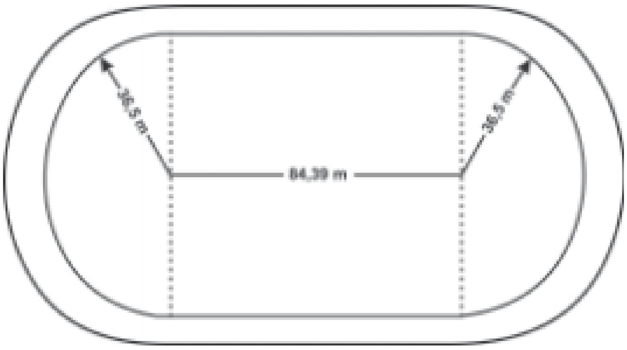
Habilidade: H5 (avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos).

Objeto de conhecimento: 03 (porcentagem, juros e relações de dependências entre grandezas).

Nível de dificuldade: fácil.

QUESTÃO 170

O atletismo é um dos esportes que mais se identificam com o espírito olímpico. A figura ilustra uma pista de atletismo. A pista é composta por oito raias e tem largura de 9,76 m. As raias são numeradas do centro da pista para a extremidade e são construídas de segmentos de retas paralelas e arcos de circunferência. Os dois semicírculos da pista são iguais.



BIEMBENGUT, M. S. **Modelação Matemática como método de ensino-aprendizagem de Matemática em cursos de 1º e 2º graus.** 1990. Dissertação de Mestrado. IGCE/UNESP, Rio Claro,1990 (adaptado).

Se os atletas partissem do mesmo ponto, dando uma volta completa, em qual das raias o corredor estaria sendo beneficiado?

A) 1
B) 4
C) 5
D) 7
E) 8

Comentários: questão de enunciado não tão claro. Nele consta que os atletas partem de um mesmo ponto, o que é impossível, pois cada uma estará em uma raia. E claramente o atleta da raia número 1 levará vantagem, pois está mais próximo do centro.

Habilidade: H9 (utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano).

Objeto de conhecimento: 09 (circunferência).

Nível de dificuldade: médio.

.

QUESTÃO 174

O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares.

Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75 913 é

A 24.
B 31.
C 32.
D 88.
E 89.

Comentários: o enunciado é claro e objetivo. A resolução é um pouco trabalhosa, mas é um tipo de questão que aparece com frequência nos livros didáticos do ensino médio.

Habilidade: H2 (identificar padrões numéricos ou princípios de contagem).

Objeto de conhecimento: 05 (princípios de contagem).

Nível de dificuldade: médio.

QUESTÃO 179

Uma indústria fabrica um único tipo de produto e sempre vende tudo o que produz. O custo total para fabricar uma quantidade *q* de produtos é dado por uma função, simbolizada por *CT*, enquanto o faturamento que a empresa obtém com a venda da quantidade *q* também é uma função, simbolizada por *FT*. O lucro total (*LT*) obtido pela venda da quantidade *q* de produtos é dado pela expressão $LT(q) = FT(q) - CT(q)$.

Considerando-se as funções $FT(q) = 5q$ e $CT(q) = 2q + 12$ como faturamento e custo, qual a quantidade mínima de produtos que a indústria terá de fabricar para não ter prejuízo?

A 0
B 1
C 3
D 4
E 5

Comentários: o enunciado é claro, onde o aluno dever ter cuidado no que está sendo pedido, fazendo a diferença entre o que foi faturado e o custo do produto.

Habilidade: H19 (identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas).

Objeto de conhecimento: 06 (equações, inequações e problemas).

Nível de dificuldade: fácil.

2.3 Prova de 2012

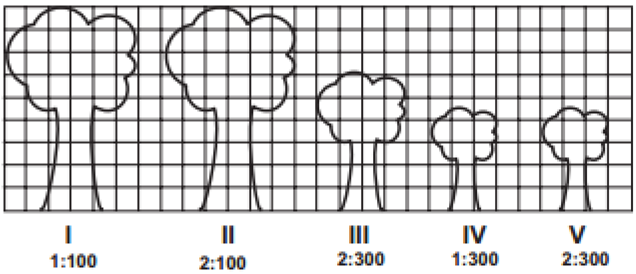
Apareceram mais questões sobre conhecimentos numéricos e geometria plana e espacial.

34 questões são do ensino fundamental, sendo possível de serem resolvidas por alunos do 9° ano do ensino fundamental.

Todas as competências e quase todas as habilidades foram abordadas.

QUESTÃO 137

Um biólogo mediu a altura de cinco árvores distintas e representou-as em uma mesma malha quadriculada, utilizando escalas diferentes, conforme indicações na figura a seguir.



Qual é a árvore que apresenta a maior altura real?

Ⓐ I
Ⓑ II
Ⓒ III
Ⓓ IV
Ⓔ V

Comentários: enunciado claro e objetivo. Contextualização interessante, onde o aluno deve saber trabalhar com as escalas e encontrar o tamanho real da árvore.

Habilidade: 11 (utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano)

Objeto de conhecimento: 02 (Fatoração, divisibilidade, razões e proporções).

Nível de dificuldade: fácil.

QUESTÃO 138

Em um jogo há duas urnas com 10 bolas de mesmo tamanho em cada urna. A tabela a seguir indica as quantidades de bolas de cada cor em cada urna.

Cor	Urna 1	Urna 2
Amarela	4	0
Azul	3	1
Branca	2	2
Verde	1	3
Vermelha	0	4

Uma jogada consiste em:

1º) o jogador apresenta um palpite sobre a cor da bola que será retirada por ele da urna 2;

2º) ele retira, aleatoriamente, uma bola da urna 1 e a coloca na urna 2, misturando-a com as que lá estão;

3º) em seguida ele retira, também aleatoriamente, uma bola da urna 2;

4º) se a cor da última bola retirada for a mesma do palpite inicial, ele ganha o jogo.

Qual cor deve ser escolhida pelo jogador para que ele tenha a maior probabilidade de ganhar?

A. Azul.
B. Amarela.
C. Branca.
D. Verde.
E. Vermelha.

Comentários: questão que requer muita concentração. Difícil, pois são várias etapas a serem observadas.

Resolução: o número de bolas na urna 2, após passar a bola da urna 1 para a urna 2 será:

Amarela: 0 ou 1.

Azul: 1 ou 2.

Branca: 2 ou 3.

Verde: 3 ou 4

Vermelha: 4.

Pode-se perceber que as que têm mais chances são as cores verde e vermelha.

A probabilidade de se retirar uma bola verde é $\frac{1}{10}.\frac{4}{11}+\frac{9}{10}.\frac{3}{11}=\frac{31}{110}$.

A probabilidade de se retirar uma bola vermelha é $\frac{10}{10}.\frac{4}{11}=\frac{40}{110}$. Logo a bola escolhida deve ser a vermelha.

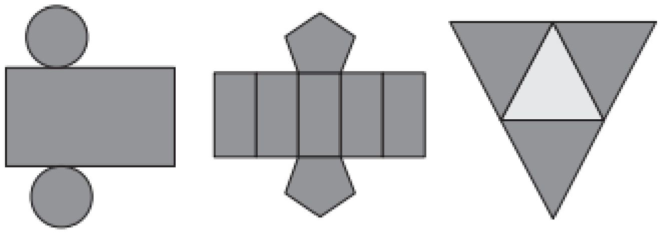
Habilidade: H30 (avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade).

Objeto de conhecimento: 18 (Probabilidade).

Nível de dificuldade: Difícil

QUESTÃO 141

Maria quer inovar em sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com diferentes formatos. Nas imagens apresentadas estão as planificações dessas caixas.



Quais serão os sólidos geométricos que Maria obterá a partir dessas planificações?

- **A** Cilindro, prisma de base pentagonal e pirâmide.
- **B** Cone, prisma de base pentagonal e pirâmide.
- **C** Cone, tronco de pirâmide e pirâmide.
- **D** Cilindro, tronco de pirâmide e prisma.
- **E** Cilindro, prisma e tronco de cone.

Comentários: enunciado claro e objetivo. Basta o aluno observar os sólidos que serão formados.

Habilidade: H7 (identificar características de figuras planas ou espaciais).

Objeto de conhecimento: 13 (prisma e pirâmide) e 14 (cilindro, cone e esfera).

Nível de dificuldade: fácil.

QUESTÃO 146

Um maquinista de trem ganha R$ 100,00 por viagem e só pode viajar a cada 4 dias. Ele ganha somente se fizer a viagem e sabe que estará de férias de 1º a 10 de junho, quando não poderá viajar. Sua primeira viagem ocorreu no dia primeiro de janeiro. Considere que o ano tem 365 dias.

Se o maquinista quiser ganhar o máximo possível, quantas viagens precisará fazer?

A) 37
B) 51
C) 88
D) 89
E) 91

Comentários: questão difícil, de enunciado confuso, pois não deixa claro o tempo de duração da viagem. A viagem dura algumas horas? Um, dois, três dias?

Resolução:

De 1° de janeiro a 31 de maio, temos 151 dias. Admitindo que a viagem dure 4 dias e que o maquinista não pode retornar no período de férias, ela não pode então viajar no dia 29 de maio. Dividindo 151 por 4, esse fará 37 viagens. De 11 de junho a 31 de dezembro, temos 204 dias. A primeira viagem sendo no dia 11 de junho, a última será no 201° dia, fará então 51 viagens. No total o número de viagens será 88.

Caso a viagem dure menos de 4 dias, ele então poderia viajar no dia 29 de maio, logo seriam 89 viagens.

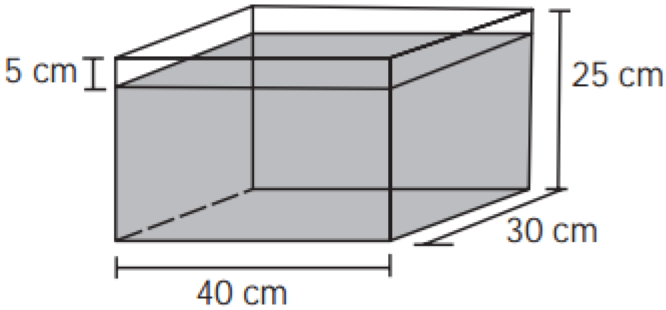
Habilidade: H5 (avaliar propostas de intervenção na realidade, utilizando conhecimentos numéricos).

Objeto de conhecimento: 01 (conjuntos numéricos e operações).

Nível de dificuldade: difícil.

QUESTÃO 147

Alguns objetos, durante a sua fabricação, necessitam passar por um processo de resfriamento. Para que isso ocorra, uma fábrica utiliza um tanque de resfriamento, como mostrado na figura.



O que aconteceria com o nível da água se colocássemos no tanque um objeto cujo volume fosse de 2 400 cm^3?

A) O nível subiria 0,2 cm, fazendo a água ficar com 20,2 cm de altura.

B) O nível subiria 1 cm, fazendo a água ficar com 21 cm de altura.

C) O nível subiria 2 cm, fazendo a água ficar com 22 cm de altura.

D) O nível subiria 8 cm, fazendo a água transbordar.

E) O nível subiria 20 cm, fazendo a água transbordar.

Comentários: questão que envolve conhecimentos de volume do paralelepípedo. O enunciado é bem claro. Com atenção e organização nos cálculos o aluno chega ao resultado.

Habilidade: H13 (avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente).

Objeto de conhecimento: 13 (prisma e pirâmide).

Nível de dificuldade: médio.

QUESTÃO 150

Arthur deseja comprar um terreno de Cléber, que lhe oferece as seguintes possibilidades de pagamento:

- Opção 1: Pagar à vista, por R$ 55 000,00;
- Opção 2: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 30 000,00, e mais uma prestação de R$ 26 000,00 para dali a 6 meses.
- Opção 3: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 20 000,00, mais uma prestação de R$ 20 000,00, para dali a 6 meses e outra de R$ 18 000,00 para dali a 12 meses da data da compra.
- Opção 4: Pagar a prazo dando uma entrada de R$ 15 000,00 e o restante em 1 ano da data da compra, pagando R$ 39 000,00.
- Opção 5: pagar a prazo, dali a um ano, o valor de R$ 60 000,00.

Arthur tem o dinheiro para pagar à vista, mas avalia se não seria melhor aplicar o dinheiro do valor à vista (ou até um valor menor) em um investimento, com rentabilidade de 10% ao semestre, resgatando os valores à medida que as prestações da opção escolhida fossem vencendo.

Após avaliar a situação do ponto de vista financeiro e das condições apresentadas, Arthur concluiu que era mais vantajoso financeiramente escolher a opção

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.
E) 5.

Comentários: o enunciado é claro. Questão bem contextualizada, onde há uma situação que envolve investimento de uma quantia que o aluno dispõe. É aplicação no cotidiano. O nível de dificuldade é médio devido à quantidade de cálculos que o aluno deverá fazer.

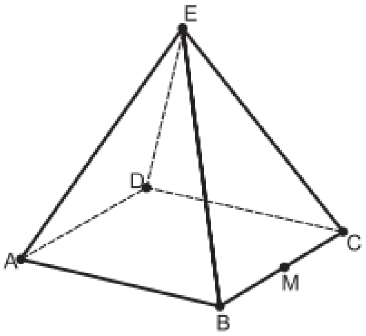
Habilidade: H5 (avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos).

Objeto de conhecimento: 03 (porcentagem, juros e relações entre grandezas).

Nível de dificuldade: médio.

QUESTÃO 154

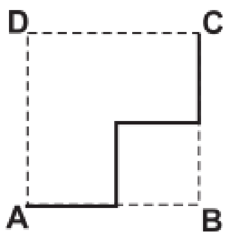
João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide.



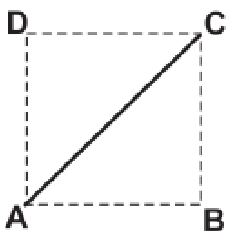
O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto A ao ponto E, a seguir do ponto E ao ponto M, e depois de M a C.

O desenho que Bruno deve fazer é

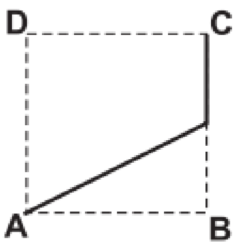
A



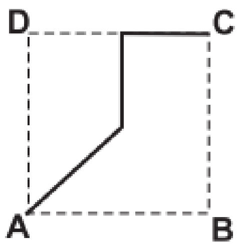
D



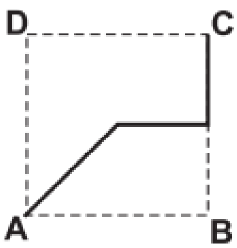
B



E



C



Comentários: o enunciado não diz que se trata de uma pirâmide regular de base quadrangular, mas por outro lado, como sabemos que existe uma única resposta correta, não vejo como poderia ser uma coisa diferente da letra e. É uma questão difícil, pois, normalmente, o aluno do ensino médio não consegue visualizar a situação descrita.

Habilidade: H6 (interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional).

Objeto de conhecimento: 13 (prisma e pirâmide).

Nível de dificuldade: difícil.

QUESTAO 165

Em exposições de artes plásticas, é usual que estátuas sejam expostas sobre plataformas giratórias. Uma medida de segurança é que a base da escultura esteja integralmente apoiada sobre a plataforma. Para que se providencie o equipamento adequado, no caso de uma base quadrada que será fixada sobre uma plataforma circular, o auxiliar técnico do evento deve estimar a medida R do raio adequado para a plataforma em termos da medida L do lado da base da estátua.

Qual relação entre R e L o auxiliar técnico deverá apresentar de modo que a exigência de segurança seja cumprida?

A) $R \geq L / \sqrt{2}$

B) $R \geq 2L / \pi$

C) $R \geq L / \sqrt{\pi}$

D) $R \geq L / 2$

E) $R \geq L / (2\sqrt{2})$

Comentários: questão difícil. Exige interpretação. O aluno tem que perceber que o diâmetro do círculo deve ser maior ou igual à diagonal do quadrado.

Resolução: como o diâmetro deve ser maior que a diagonal do quadrado, temos que $2R \geq L\sqrt{2}$, $R \geq \frac{L\sqrt{2}}{2}$, logo $R \geq \frac{L}{\sqrt{2}}$.

Habilidade: H9 (utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano).

Objeto de conhecimento: 09 (circunferência)

Nível de dificuldade: difícil

QUESTÃO 166

O globo da morte é uma atração muito usada em circos. Ele consiste em uma espécie de jaula em forma de uma superfície esférica feita de aço, onde motoqueiros andam com suas motos por dentro. A seguir, tem-se, na Figura 1, uma foto de um globo da morte e, na Figura 2, uma esfera que ilustra um globo da morte.

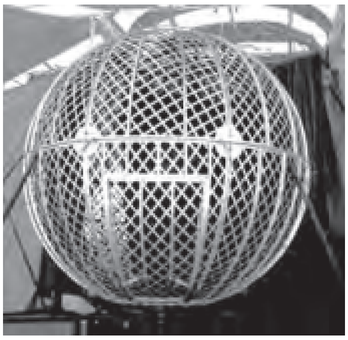


Figura 1

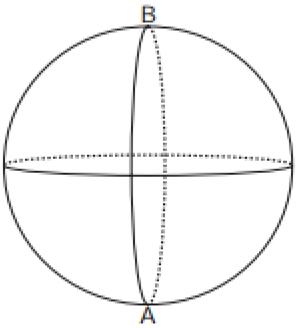
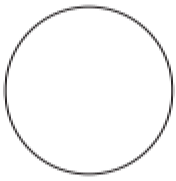


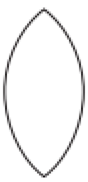
Figura 2

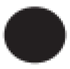
Na Figura 2, o ponto A está no plano do chão onde está colocado o globo da morte e o segmento AB passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao plano do chão. Suponha que há um foco de luz direcionado para o chão colocado no ponto B e que um motoqueiro faça um trajeto dentro da esfera, percorrendo uma circunferência que passa pelos pontos A e B.

A imagem do trajeto feito pelo motoqueiro no plano do chão é melhor representada por

A 

B 

C 

D 

E

Comentários: questão difícil. A visualização da situação descrita não é tão direta para o aluno.

Resolução: o plano da circunferência do motoqueiro intersecta o plano do chão numa reta. A imagem do trajeto estará sempre nessa reta. Logo a imagem é um segmento de reta.

Habilidade: H6 (interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional).

Objeto de conhecimento: 14 (cilindro, cone e esfera).

Nível de dificuldade: difícil.

QUESTÃO 169

Um aluno registrou as notas bimestrais de algumas de suas disciplinas numa tabela. Ele observou que as entradas numéricas da tabela formavam uma matriz 4x4, e que poderia calcular as médias anuais dessas disciplinas usando produto de matrizes. Todas as provas possuíam o mesmo peso, e a tabela que ele conseguiu é mostrada a seguir.

	1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre
Matemática	5,9	6,2	4,5	5,5
Português	6,6	7,1	6,5	8,4
Geografia	8,6	6,8	7,8	9,0
História	6,2	5,6	5,9	7,7

Para obter essas médias, ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela por

A) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Comentários: o enunciado é claro, porém não achei uma contextualização tão interessante. O aluno não precisa utilizar multiplicação de matrizes para calcular média aritmética. Não está clara na matriz de referência a cobrança de matrizes.

Habilidade: a que mais se aproxima é H21 (Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos).

Objeto de conhecimento: matrizes

Nível de dificuldade: médio.

QUESTÃO 173

O *designer* português Miguel Neiva criou um sistema de símbolos que permite que pessoas daltônicas identifiquem cores. O sistema consiste na utilização de símbolos que identificam as cores primárias (azul, amarelo e vermelho). Além disso, a justaposição de dois desses símbolos permite identificar cores secundárias (como o verde, que é o amarelo combinado com o azul). O preto e o branco são identificados por pequenos quadrados: o que simboliza o preto é cheio, enquanto o que simboliza o branco é vazio. Os símbolos que representam preto e branco também podem estar associados aos símbolos que identificam cores, significando se estas são claras ou escuras.

Folha de São Paulo. Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 18 fev. 2012 (adaptado).

De acordo com o texto, quantas cores podem ser representadas pelo sistema proposto?

A 14
B 18
C 20
D 21
E 23

Comentários: questão difícil. Enunciado muito complexo para o aluno.

Resolução: as cores primárias e aquelas que serão formadas pela justaposição de duas cores primárias terão 3 tonalidades, como por exemplo o azul pode ser o normal, o claro e o escuro.

Teremos as seguintes cores então:

Azul, Amarelo e Vermelho.

Justaposição de azul e amarelo.

Justaposição de azul e vermelho.

Justaposição de amarelo e vermelho.

Cada uma dessas cores terá 3 tonalidades, logo 18 cores somadas com o branco e o preto, teremos 20 cores diferentes.

Habilidade: H3 (resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos).

Objeto de conhecimento: 01 (conjuntos numéricos e operações).

Nível de dificuldade: difícil.

2.4 Prova de 2013

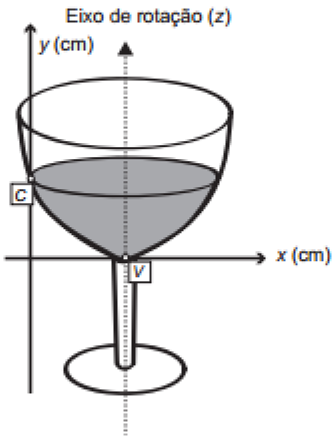
Predominância de geometria plana e conhecimentos numéricos.

30 questões são do ensino fundamental, sendo perfeitamente possível de serem resolvidas por um aluno do 9º ano do Ensino Fundamental.

Todas as competências e quase todas as habilidades foram abordadas.

QUESTÃO 136

A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo *z*, conforme mostra a figura.



A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$, onde *C* é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto *V*, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo *x*.

Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é

A) 1.
B) 2.
C) 4.
D) 5.
E) 6.

Comentários: o enunciado é claro. A dificuldade na questão é o fato da parábola ter sido rotacionada, mas com conceitos sobre função quadrática o aluno consegue resolver a questão.

Habilidade: H21 (resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos).

Objeto de conhecimento: 21 (função quadrática).

Nível de dificuldade: médio.

QUESTÃO 137

Muitos processos fisiológicos e bioquímicos, tais como batimentos cardíacos e taxa de respiração, apresentam escalas construídas a partir da relação entre superfície e massa (ou volume) do animal. Uma dessas escalas, por exemplo, considera que "o cubo da área S da superfície de um mamífero é proporcional ao quadrado de sua massa M".

HUGHES-HALLETT, D. et al. Cálculo e aplicações. São Paulo: Edgard Blücher, 1999 (adaptado).

Isso é equivalente a dizer que, para uma constante k > 0, a área S pode ser escrita em função de M por meio da expressão:

A) $S = k \cdot M$

B) $S = k \cdot M^{\frac{1}{3}}$

C) $S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^{\frac{1}{3}}$

D) $S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^{\frac{2}{3}}$

E) $S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^{2}$

Comentários: enunciado é claro. O aluno deve saber proporcionalidade e propriedades de potenciação e radiciação.

Habilidade: H3 (resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos).

Objeto de conhecimento: 01 (conjuntos numéricos e operações).

Nível de dificuldade: médio.

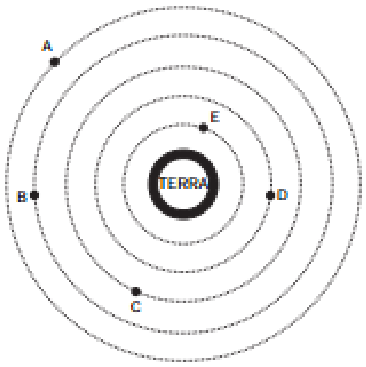
QUESTÃO 138

A Lei da Gravitação Universal, de Isaac Newton, estabelece a intensidade da força de atração entre duas massas. Ela é representada pela expressão:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$$

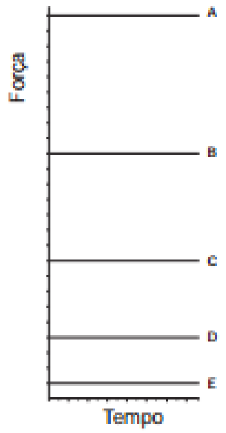
onde m_1 e m_2 correspondem às massas dos corpos, d à distância entre eles, G à constante universal da gravitação e F à força que um corpo exerce sobre o outro.

O esquema representa as trajetórias circulares de cinco satélites, de mesma massa, orbitando a Terra.

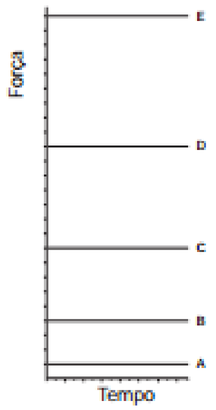


Qual gráfico expressa as intensidades das forças que a Terra exerce sobre cada satélite em função do tempo?

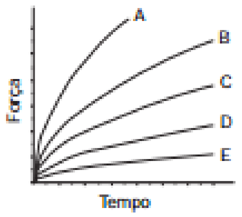
A



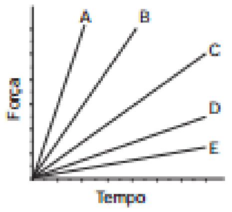
B



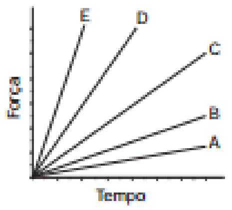
C



D



E



Comentários: enunciado claro. Questão muito interessante, onde o aluno deve perceber que a força é inversamente proporcional ao quadrado da distância.

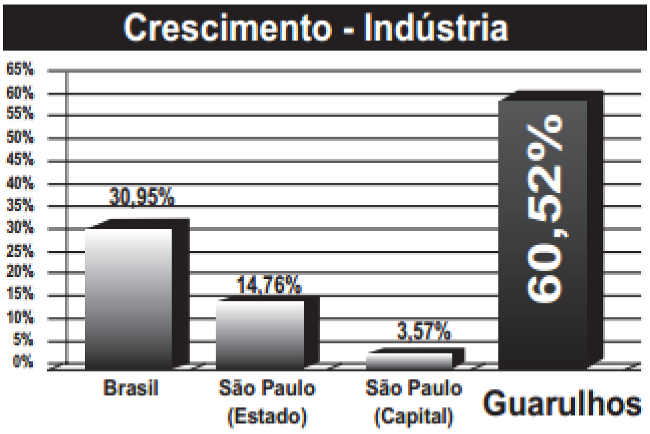
Habilidade: H16 (resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais).

Objeto de conhecimento: 03 (porcentagem, juros e relações de dependência entre grandezas).

Nível de dificuldade: médio.

QUESTÃO 139

A cidade de Guarulhos (SP) tem o 8º PIB municipal do Brasil, além do maior aeroporto da América do Sul. Em proporção, possui a economia que mais cresce em indústrias, conforme mostra o gráfico.



Fonte: IBGE, 2002-2008 (adaptado).

Analisando os dados percentuais do gráfico, qual a diferença entre o maior e o menor centro em crescimento no polo das indústrias?

A 75,28

B 64,09

C 56,95

D 45,76

Comentários: enunciado é claro. Questão muito fácil. Basta fazer a diferença entre o maior e menor valor percentual. O problema que percebo é no gráfico, pois Guarulhos está dentro do estado de São Paulo, que está dentro do Brasil. Não prejudica a resolução da questão, mas poderia ter sido melhor elaborada.

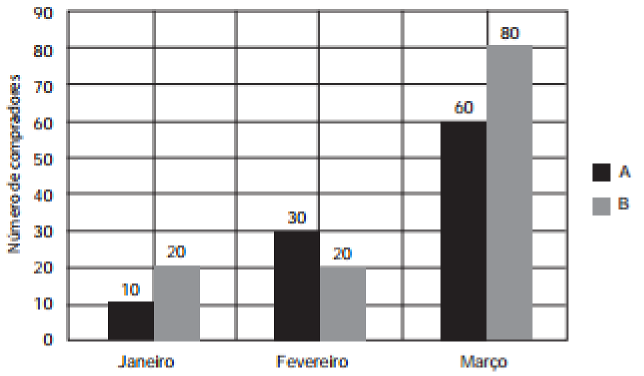
Habilidade: H25 (resolver problema com dados apresentados em tabelas e gráficos).

Objeto de conhecimento: 15 (representação e análise de dados).

Nível de dificuldade: fácil.

QUESTÃO 141

Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:



A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B.

Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

A $\frac{1}{20}$

B $\frac{3}{242}$

C $\frac{5}{22}$

D $\frac{6}{25}$

E $\frac{7}{15}$

Comentários: enunciado é claro e objetivo. Questão de probabilidade de resolução simples.

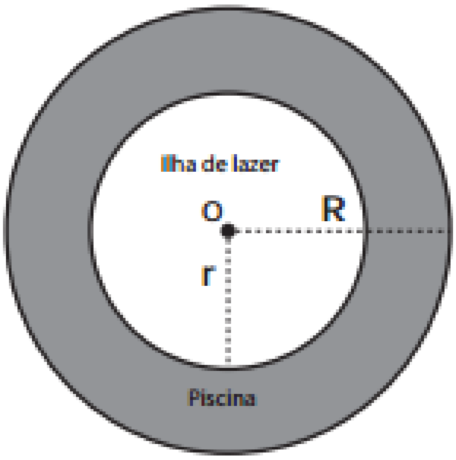
Habilidade: H28 (resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade).

Objeto de conhecimento: 18 (probabilidade).

Nível de dificuldade: fácil.

QUESTÃO 145

Num parque aquático existe uma piscina infantil na forma de um cilindro circular reto, de 1 m de profundidade e volume igual a 12 m³, cuja base tem raio **R** e centro **O**. Deseja-se construir uma ilha de lazer seca no interior dessa piscina, também na forma de um cilindro circular reto, cuja base estará no fundo da piscina e com centro da base coincidindo com o centro do fundo da piscina, conforme a figura. O raio da ilha de lazer será **r**. Deseja-se que após a construção dessa ilha, o espaço destinado à água na piscina tenha um volume de, no mínimo, 4 m³.



Considere 3 como valor aproximado para π.

Para satisfazer as condições dadas, o raio máximo da ilha de lazer **r**, em metros, estará mais próximo de

- (A) 1,6.
- (B) 1,7.
- (C) 2,0.
- (D) 3,0.
- (E) 3,8.

Comentários: questão bem contextualizada, difícil, que trabalha diferença de volumes do cilindro. Como o aluno tem a visão de cima da piscina, não fica tão claro observar os cilindros que ele terá que calcular os volumes.

Resolução: Seja V1 o volume da piscina antiga. V2 o volume da piscina nova. Dado no problema, V1 = 12.

O volume da ilha é $\pi r^2.1 = \pi r^2$

Temos que V2 = V1 – Volume da ilha,

$12 - 3r^2 = 4$,

$3r^2 = 8$,

$r = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}$, como r > 0, r é aproximadamente 1,6.

Habilidade: H9 (utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano).

Objeto de conhecimento: 14 (cilindro, cone e esfera).

Nível de dificuldade: difícil.

QUESTÃO 147

Para se construir um contrapiso, é comum, na constituição do concreto, se utilizar cimento, areia e brita, na seguinte proporção: 1 parte de cimento, 4 partes de areia e 2 partes de brita. Para construir o contrapiso de uma garagem, uma construtora encomendou um caminhão betoneira com 14 m³ de concreto.

Qual é o volume de cimento, em m³, na carga de concreto trazido pela betoneira?

A 1,75
B 2,00
C 2,33
D 4,00
E 8,00

Comentários: questão fácil de resolução de equação do 1º grau. Com um pouco de atenção, o aluno não terá problemas para resolver.

Habilidade: H21 (resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos).

Objeto de conhecimento: 06 (equações, inequações e problemas).

Nível de dificuldade: fácil.

QUESTÃO 156

As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de 15° com a vertical e elas têm, cada uma, uma altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o segmento AB). Estas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.

Disponível em: www.flickr.com. Acesso em: 27 mar. 2012.

Utilizando 0,26 como valor aproximado para a tangente de 15° e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço

- **A** menor que 100 m^2.
- **B** entre 100 m^2 e 300 m^2.
- **C** entre 300 m^2 e 500 m^2.
- **D** entre 500 m^2 e 700 m^2.
- **E** maior que 700 m^2.

Comentários: questão bem contextualizada onde a figura é representada por um prisma obliquo, mas a resolução se dá por trigonometria no triângulo retângulo.

Habilidade: H8 (resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma).

Objeto de conhecimento: 11 (triângulo retângulo e trigonometria do ângulo agudo).

Nível de dificuldade: médio.

QUESTÃO 160

Um programa de edição de imagens possibilita transformar figuras em outras mais complexas. Deseja-se construir uma nova figura a partir da original. A nova figura deve apresentar simetria em relação ao ponto O.

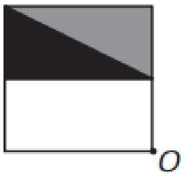
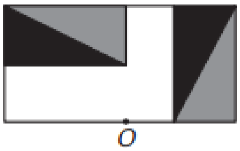
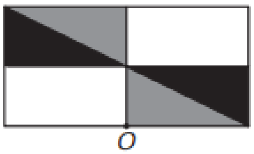
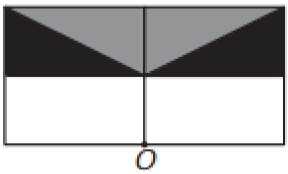


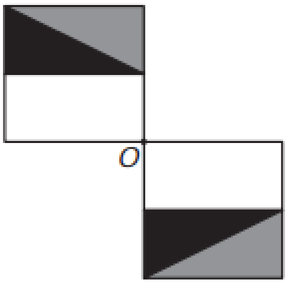
Figura original

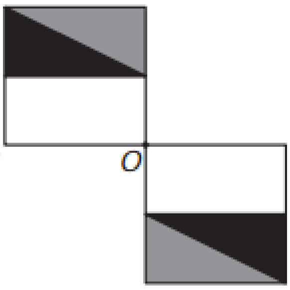
A imagem que representa a nova figura é:

A 

B 

C 

D 

E 

Comentários: é um problema que normalmente causa dificuldade para o aluno. A grande maioria não está acostumada a trabalhar com isometrias. .

Resolução: para que uma figura seja simétrica à outra em relação a um ponto O, a distância de todos os pontos de uma ao ponto O deve ser a mesma dos pontos simétricos da outra em relação a esse ponto O. Se for traçado um eixo vertical e um horizontal passando pelo ponto O e pelos lados da figura, percebe-se que a original se encontra no segundo quadrante.

Sendo assim a figura simétrica deve estar no quarto, com todos os pontos equidistantes aos pontos originais da figura.

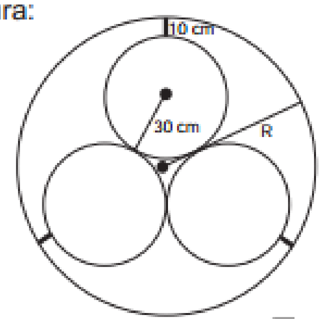
Habilidade: H7 (identificar características de figuras planas ou espaciais).

Objeto de conhecimento: 10 (proporcionalidade, isometrias e semelhança).

Nível de dificuldade: difícil.

QUESTÃO 178

Em um sistema de dutos, três canos iguais, de raio externo 30 cm, são soldados entre si e colocados dentro de um cano de raio maior, de medida R. Para posteriormente ter fácil manutenção, é necessário haver uma distância de 10 cm entre os canos soldados e o cano de raio maior. Essa distância é garantida por um espaçador de metal, conforme a figura:



Utilize 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.
O valor de R, em centímetros, é igual a

A 64,0.
B 65,5.
C 74,0.
D 81,0.
E 91,0.

Comentários: questão bem interessante. A solução exige que o aluno trace segmentos para depois sim aplicar seus conhecimentos geométricos.

Resolução: unindo os centros das três circunferências menores forma-se um triângulo, cujo centro coincide com o centro da circunferência maior (baricentro), cujo raio R é igual aos 10 cm da distância entre os canos de raios menores e com o de raio maior, somada com os 30 cm do raio do cano menor mais a distância do centro da circunferência maior ao da menor (d).

Essa distância (d) é igual a dois terços da altura do triângulo equilátero.

Como o lado do triângulo é 60 cm, temos que $d = \frac{2}{3} . \frac{60\sqrt{3}}{2} = 34$.

Logo R = 40 + 34 = 74.

Habilidade: H7 (identificar características de figuras planas ou espaciais).

Objeto de conhecimento: 09 (circunferência).

Nível de dificuldade: difícil.

3 Conclusão

Após as análises das provas de 2010 a 2014 do ENEM, há alguns pontos em comuns nessas avaliações:

As habilidades e competências que constam da matriz de referência aparecem na sua quase totalidade.

No mínimo 2/3 das questões são de nível fundamental.

A matriz de referência não deixa clara a cobrança de alguns assuntos como, por exemplo, matrizes e determinantes.

A competência número 1 deixa claro que o assunto números complexos não é cobrado.

A grande maioria dos itens é de nível de dificuldade fácil, onde com um mínimo de conhecimento do assunto é possível resolver o item de forma bem direta, sem perder tanto tempo.

A grande dificuldade da avaliação é o tempo, já que em média são 3 minutos por item. Mesmo que algumas questões sejam bem diretas, onde o candidato não precisa dos 3 minutos, sendo possível destinar esse tempo para outras questões, é uma avaliação muito cansativa. 45 questões é um número considerável, porém é uma forma de tentar abordar todas as competências e habilidades da matriz de referência.

Apesar de ser o Exame Nacional do Ensino Médio, foi verificado que no máximo 1/3 dos itens é sobre conteúdos do Ensino Médio.

Foi observado que as questões, com pouquíssimas exceções, foram bem elaboradas. Houve contextualizações bem interessantes, onde o aluno poderia aplicar os conhecimentos adquiridos em sala de aula no seu cotidiano.

Mesmo que certos conteúdos do Ensino Médio não constam dessa avaliação, não acredito que tenha que haver uma mudança radical nos conteúdos do Ensino Médio, mas sim a forma de abordagem, até por que, não podemos estabelecer somente como meta preparar o aluno para fazer o ENEM e outros vestibulares. A Matemática tem uma missão muita mais nobre na formação dos alunos.

Já que os assuntos sobre conhecimentos numéricos são os mais cobrados, é importante fazê-los aparecerem em assuntos do Ensino Médio. É fácil cobrar em exercícios do Ensino Médio os assuntos porcentagem, grandezas proporcionais, medidas de grandezas em diversas situações.

Quanto à distribuição dos assuntos, acredito que conteúdos do Ensino Médio poderiam aparecer em maior quantidade. É claro que determinados assuntos como Matrizes, sistemas, determinantes e algumas funções, normalmente são assuntos muito trabalhosos e de difícil contextualização, mas a Geometria Analítica poderia ser melhor explorada. Questões, por exemplo, onde a solução por geometria analítica fosse mais interessante do que por geometria sintética.

Espero que esse trabalho sirva de fonte de consulta para professores e alunos, já que esses precisam estar atualizados com o modelo de prova proposto pelo ENEM, verificando as características principais que são a interdisciplinaridade e contextualização de conteúdos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRÉ, Marli. (Org.). **O papel da pesquisa na formação e na prática dos professores**. Campinas: Papirus, 2001, 92-93 p.

Site do INEP: www.inep.gov.br .

DA SILVA, Josimar José. Uma análise crítica das provas da primeira fase da OBMEP – Nível 3.

LIMA, Elon Lages; MORGADO. A. C., WAGNER, Eduardo, CARVALHO, Paulo Cesar P.. **Temas e Problemas**. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Elon Lages; MORGADO. A. C., WAGNER, Eduardo, CARVALHO, Paulo Cesar P.. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2006

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática contexto e aplicações**. São Paulo: Ática, 2011.