Universidade Federal de Juiz de Fora

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Marcelo de Moura Costa

Uma abordagem introdutória de cônicas para o ensino médio através do Geogebra

Juiz de Fora

2013

Marcelo de Moura Costa

Uma abordagem introdutória de cônicas para o ensino médio através do Geogebra

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki

Juiz de Fora

2013

Costa, Marcelo de Moura.

Uma abordagem introdutória de cônicas para o ensino médio
através do Geogebra / Marcelo de Moura Costa. - 2013.
61f. : il.

Orientador: Olímpio Hiroshi Miyagaki
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)
Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

1. Cônicas. 2. Lugar Geométrico. 3. Geogebra. I. Título.

Marcelo de Moura Costa

Uma abordagem introdutória de cônicas para o ensino médio através do Geogebra

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal de Juiz de Fora.

Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki
(Orientador)
PROFMAT
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

Prof. Dr. Regis Castijos Alves Soares Junior
PROFMAT
UFJF

Prof. Dr. Mercio Botelho Faria
UFV

Juiz de Fora, 25 de março de 2013.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela oportunidade a mim concedida, pois sem Ele, nada posso e nada sou.

A Alírio, in memoriam, e Lizete, meus pais, pelo empenho e amor em criar todos os seus filhos.

Aos meus irmãos, Marcus, Alaíde e Ataíde, in memoriam, que nunca deixaram de me incentivar.

A Ester, minha eterna companheira, Ana Luíza e Pedro Lucas, meus amados filhos, pela compreensão e paciência das constantes ausências, e pelo constante apoio e incentivo.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFJF pelo acolhimento, paciência e dedicação durante esses dois anos, em especial ao meu orientador Olímpio, que sempre se mostrou solícito e atencioso me mostrando que a humildade é sempre o melhor caminho.

À banca examinadora, pelas contribuições dadas, oportunizando a realização desse sonho.

À CAPES, pelo apoio financeiro recebido (bolsas de estudo).

Aos meus colegas do Mestrado, em especial aos três companheiros, Brasílio, Márcio e Paulo, que comigo perseveraram nessas tantas viagens durante esse período.

RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo promover uma reflexão sobre o estudo das cônicas pelo uso de sua definição como Lugar Geométrico seguindo um enfoque analítico. Iremos explorar a construção das cônicas utilizando o *software* de geometria dinâmica Geogebra. É necessário ratificar que o *software* é o meio e não a finalidade da aprendizagem, pois este deve minimizar as limitações relativa à visualização e compreensão de um objeto, bem como a compreensão de sua simetria e translação, sem perder o objetivo de explorar os conceitos matemáticos envolvidos.
Palavras-Chave: Cônicas; Lugar Geométrico; Geogebra.

RÉSUMÉ

Cette dissertation a pour objectif d'effectuer une réflexion sur l'etude des coniques (en utilisant leur definition) en tant que Lie Géometrique, se concentrant sur l'aspect analytique. Nous analyserons la consttruction des coniques en utilisant un logiciel de géometrie dynamique Geogebra. Il est important de rappeler que le logiciel est un moyen et non la finalité de l'apprentissage, cela devrait alors minimiser les limites relatives à la visualisation et à compréhension d'un objet, ansi que sa symetrie et sa translation, sans perdre de vue l'objectif d'explorer les concepts mathematiques impliqués.
Mots-clés: Coniques; Lie Geométrique; Geogebra.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Essa dissertação prioriza apresentar atividades de construção geométrica seguidas de questionamentos, de modo que o aluno seja conduzido a tentar concluir sobre as cônicas, ainda que de maneira superficial. Após algumas das atividades, que objetivam formar uma ideia intuitiva do assunto, a teoria será apresentada ao estudante de modo a ajudá-lo a compreender o assunto.

Inicialmente será abordado o estudo das cônicas pela sua definição de lugar geométrico, pois cada vez mais é evidente que a dificuldade dos alunos em compreender esse conteúdo vem aumentando, devido à queda na qualidade de ensino público. Consta no artigo [15] e em [9] que a geometria analítica é ensinada, em geral, na terceira série do ensino médio, de forma completamente desconectada de todos os assuntos que o aluno supostamente tenha aprendido nos anos anteriores. Há uma impressão de que a geometria analítica serve apenas para resolver problemas na última série do colégio.

Embora a escola de ensino médio regular não devesse ter como função somente preparar o aluno para o vestibular, é notável que o atual modelo de seleção dos alunos provoca uma ruptura muito traumática para o educando; pois o ENEM passa a ser a chance de continuidade de seus estudos. Um eventual fracasso nesse exame implica passar da situação de estudante à condição de desempregado. Não se pode ignorar, ainda, que o número crescente de adesões das universidades ao Exame Nacional do Ensino Médio acaba por nortear os professores. Consequentemente, a opção de estudar as cônicas pode ficar muito comprometida, visto que é um conteúdo quase inexistente nas avaliações do ENEM.

É necessário, pois, maior motivação ao estudo das cônicas através do emprego das tecnologias no ensino aprendizagem. Na pesquisa [11] acerca da retenção da aprendizagem, da Socondy-Vaccum Oil Co. Studies, lê-se que o método de ensino visual retém a informação mais do que o método de ensino oral. Quando são utilizados, simultaneamente, os dois métodos, há 85% dos dados retidos após três horas de exposição ao conteúdo e 65% depois de três dias de aplicação do método audivisual. Baseado-se nestes dados, o estudo das cônicas será feita por meio do *software* livre GEOGEBRA (http://www.geogebra.org), a fim de propiciar a visualização e a investigação das abordagens de determinadas definições, visto que alguns de seus recursos, como a animação e o rastro, são excelentes meios facilitadores para a compreensão. Entretanto, há de se esclarecer que o *software* é um instumento e não o objetivo da aprendizagem.

As atividades abordam o aspecto de lugar geométrico das cônicas, seguidas da abordagem de certas propriedades, sendo que algumas foram baseadas no material do próprio PROFMAT, em MA23-Geometria Analítica. Para o bom funcionamento do método apresentado, vale ratificar que o aluno tenha conhecimentos básicos de geometria euclidiana e analítica; que esteja familiarizado com o uso do *software* Geogebra.

2 PRELÚDIO À HISTÓRIA DAS CÔNICAS

De acordo com algumas bibliografias [1],[2],[3] e [10], é atribuído à Menaecmus, discípulo de Eudóxio, por volta de 350 a.C., como o primeiro a tratar das seções cônicas. Mas foi Apolônio de Perga (séc. III a.C.) quem desenvolveu o trabalho sobre as Seções Cônicas, escrito em oito livros, sendo que sete destes se preservaram. Ele extrai as curvas através de uma superfície cônica mediante seções planas, daí a denominação de seções cônicas. e [4]

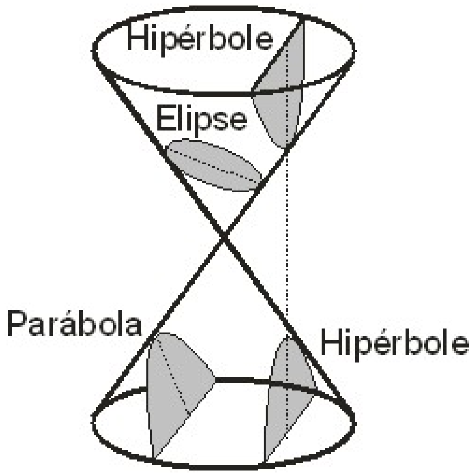

Figura 2.1: seções cônicas

Os nomes elipse, parábola e hipérbole eram uma terminologia pitagórica (séc. VI a.C.), usada no método "aplicações de áreas", a qual era específica para o estudo e comparação das mesmas.

Essa "aplicação" consistia em construir a base de um retângulo de modo que esta ficava sobre um segmento retilíneo, de tal modo que, uma extremidade da base coincidisse com uma extremidade do segmento, então poderíamos ter três situações: a base da figura construída era mais curta, ou mais comprida, ou igual ao dado segmento, e eram designados por *elleipsis*, "falta"; *hyperbole*, "excesso" e *parabole*, "comparação", vejam [13] e [3].

Para entendermos melhor, de acordo com estudos históricos [3], consideremos uma cônica de vértice A, eixo principal $\overrightarrow{AB}$, com P um ponto genérico da cônica e Q o pé de uma perpendicular baixada de P sobre $\overrightarrow{AB}$. Pelo ponto A construímos a perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ e sobre este, marca-se a distância $\overline{AR}$ que atualmente denominamos de *latus rectum* ou “parâmetro p” (o comprimento da corda que passa por um foco da cônica e é perpendicular ao eixo principal).

Aplicando ao segmento $\overline{AR}$ um retângulo de área $(\overline{PQ})^2$, sendo $\overline{AQ}$ um dos seus lados. De acordo com a aplicação, teremos um dos três casos: igual, exceda ou por falta, Apolônio denominou de parábola, hipérbole ou elipse respectivamente.

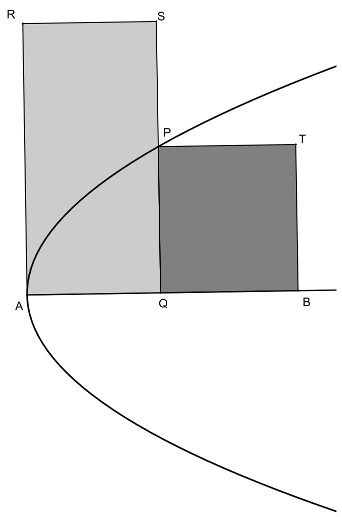

Figura 2.2: Método as áreas

Através dos trabalhos de François Viète, a teoria das equações e da inovação, introduzida por Descartes e Fermat, formas de associar equações indeterminadas a linhas geométricas, permitiram que Fermat expressasse, algebricamente, os lugares geométricos discutidos por Apolônio. Seus estudos resultaram em sete equações como forma irredutíveis, a partir da equação geral do segundo grau com duas variáveis que, atualmente é escrita como:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

3 ELIPSE

Neste capítulo iremos propor atividades aos alunos, de modo que possamos abordar: a elipse como lugar geométrico, forma canônica da elipse, a simetria da elipse, a elipse com centro $\overline{O} = (x_0, y_0)$, a construção de uma reta tangente à uma elipse, a propriedade bissetora de uma elipse e relacionar a área de uma elipse com de uma circunferência.

Atividade I, adaptada [7]:
Objetivos: Fazer com que o aluno perceba que a soma dos segmentos construídos é constante, após a habilitação do rastro. Oportunizar que o aluno perceba que a elipse como lugar geométrico, bem como seu comportamento em relação à distância entre os focos.
Material necessário: computador e o *software* Geogebra.
Tempo de atividade: 30 min.

- Abra o Geogebra;
- Trace uma semirreta de origem A que passe pelo ponto B;
- Escolha um ponto C sobre a semirreta, e renomeie o ponto A para F_1 e o ponto C para F_2, depois torne o ponto B oculto;
- Trace um círculo de centro F_1, contendo F_2 no seu interior;
- Escolha um ponto D no círculo, não pertencendo à semirreta $\overrightarrow{F_1F_2}$;
- Trace os segmentos $\overline{DF_1}$ e $\overline{DF_2}$;
- Trace a mediatriz do segmento $\overline{DF_2}$ e determine o ponto P de interseção da mediatriz com o segmento $\overline{DF_1}$;
- Trace os segmentos $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$.

Responda:

1. O que podemos afirmar sobre o ponto P por situar-se na mediatriz do segmento $\overline{DF_1}$?

2. Observe na janela de Álgebra, os valores dos segmentos $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$, digite no campo de entrada a soma desses segmentos. Mova o ponto D sobre o círculo e diga o que aconteceu com os valores dos segmentos e o valor da soma dos segmentos. O que podemos concluir sobre o fato observado?

3. Habilite o rastro no ponto P e mova o ponto D, ao longo do círculo. Como você descreveria a figura formada?

4. Desabilite o rastro do ponto P e aproxime os pontos F_1 e F_2, habilite novamente o rastro do ponto P e desloque o ponto D ao longo do círculo. O que aconteceu com a figura formada?

5. Desabilite o rastro do ponto P e aproxime os pontos F_1 e F_2 de modo que os pontos sejam coincidentes. Habilite novamente o rastro do ponto P e desloque o ponto D ao longo do círculo. O que aconteceu com a figura formada?

6. Desabilite o rastro do ponto P e afaste os pontos F_1 e F_2, de modo que o ponto F_2 seja coincidente com o raio da circunferência. Habilite novamente o rastro do ponto P e desloque o ponto D ao longo do círculo. O que aconteceu com a figura formada?

7. Desabilite o rastro do ponto P e afaste os pontos F_1 e F_2, de modo que o ponto F_2 ultrapasse o raio da circunferência. Habilite novamente o rastro do ponto P e desloque o ponto D ao longo do círculo. O que aconteceu com a figura formada?

Definição: Consideremos dois pontos no plano, F_1 e F_2, os quais denominaremos de focos, o lugar geométrico de todos os pontos P dado para os quais temos que $\overline{F_1P}$ + $\overline{F_2P}$ é igual a uma constante, $2a$, com $a > 0$, e sendo esta medida maior que a distância entre os focos, $2c$, tal que $c \geq 0$, é denominada de *elipse*. Logo, vejamos em [7] e [4] que

$$0 \leq c < a \text{ e } d(F_1, F_2) = 2c,$$
$$\boxed{\mathscr{E} = \{P/d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a\}}$$

Terminologia[7] e [4]:

- Ao considerarmos F_1 e F_2 como os focos da elipse, teremos que a reta r que contém os focos será denominada de reta focal, e a distância ente os foco de $2c$;

- Ao construírmos a elipse, iremos observar que a interseção da mesma, com a reta focal, irá determinar dois pontos, A_1 e A_2, os quais iremos denominar de vértices da elipse, e a distância entre eles de $2a$. Vale lembrar que, de acordo com a definição, $2c < 2a$;
- O segmento $\overline{A_1A_2}$, de comprimento $2a$, é denominado de eixo focal da elipse;
- O centro da elipse é o ponto C, o qual é ponto médio de A_1 e A_2 tanto quanto de F_1 e F_2;
- A reta perpendicular à reta focal que passa pelo ponto C, iremos denominá-la de reta não focal da elipse;
- Os pontos de interseção da reta não focal com a elipse irão determinar dois pontos, B_1 e B_2, que irão formar um segmento, eixo não focal e os iremos denominar de vértices sobre a reta não focal;
- A distância entre os vértices da reta não focal será $2b$;

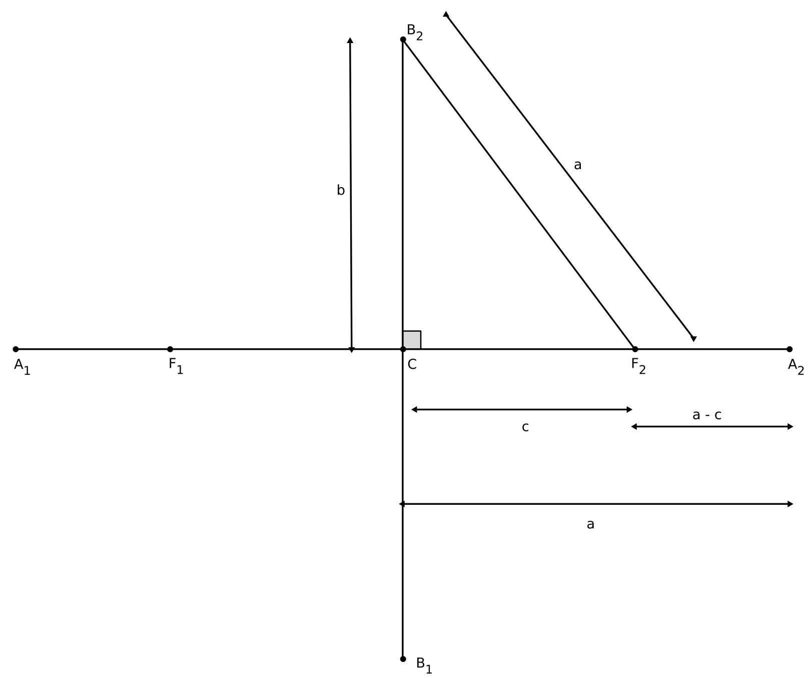

Figura 3.1: Eixos da elipse

- Pela própria definição e por B_1 e B_2 encontrarem-se na mediatriz de $\overline{A_1A_2}$, temos que $d(B_1,F_1) = d(B_1,F_2) = d(B_2,F_1) = d(B_2,F_2) = a$;

- Vale lembrar que a medida do semieixo não focal, pode ser determinada pelo Teorema de Pitágoras, $b = \sqrt{a^2 - c^2}$;

- A razão entre os segmentos c e a determinam a excentricidade da elipse, sendo expressa por e, onde $e = \dfrac{c}{a}$, observermos que $0 \leq e \leq 1$.

3.1 FORMA CANÔNICA DA ELIPSE

Seja uma elipse $\mathscr{E}$ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX, então temos:

Focos $\begin{cases} F_1 = (-c, 0) \\ F_2 = (c, 0) \end{cases}$;

Vértices sobre o eixo focal $\begin{cases} A_1 = (-a, 0) \\ A_2 = (a, 0) \end{cases}$;

Vértices sobre o eixo não focal $\begin{cases} B_1 = (0, -b) \\ B_2 = (0, b) \end{cases}$;

onde $0 < c < a$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Caso a elipse tenha a reta focal coincidente com o eixo OY, então teríamos:

Focos $\begin{cases} F_1 = (0, -c) \\ F_2 = (0, c) \end{cases}$;

Vértices sobre o eixo focal $\begin{cases} A_1 = (0, -a) \\ A_2 = (0, a) \end{cases}$;

Vértices sobre o eixo não focal $\begin{cases} B_1 = (-b, 0) \\ B_2 = (b, 0) \end{cases}$.

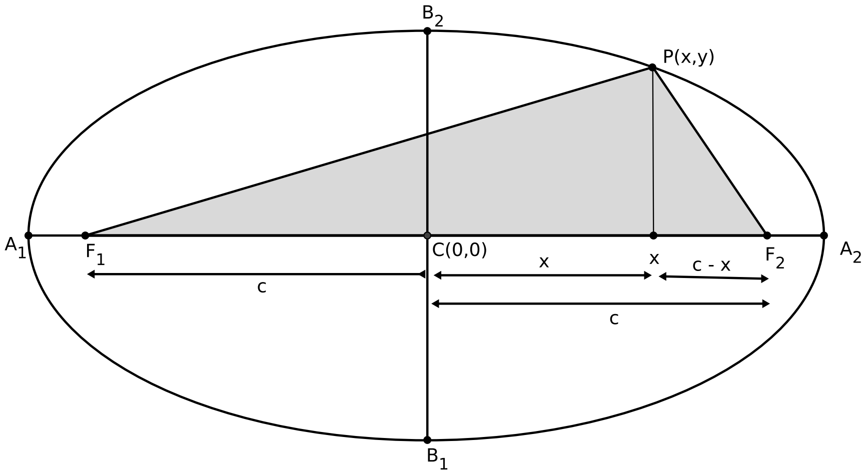

Figura 3.2: Elipse e as suas coordenadas

Pela figura anterior e, ao que foi feito em [14], temos:

$$\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a, \text{ por definição (1);}$$
$$\overline{F_1P}^2 = y^2 + (x+c)^2 \qquad (2);$$
$$\overline{F_2P}^2 = y^2 + (c-x)^2 \qquad (3);$$

Fazendo (2) - (3), teremos

$$\overline{F_1P}^2 - \overline{F_2P}^2 = 4cx$$

$$(\overline{F_1P} + \overline{F_2P})(\overline{F_1P} - \overline{F_2P}) = 4cx, \quad \text{mas de acordo com a definição,} \quad \overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a, \quad \text{logo,}$$

$$2a(\overline{F_1P} - \overline{F_2P}) = 4cx$$
$$\overline{F_1P} - \overline{F_2P} = \frac{2cx}{a}$$

$$\overline{F_1P} - (2a - \overline{F_1P}) = \frac{2cx}{a}$$

$$2\overline{F_1P} = \frac{2cx}{a} + 2a$$

$$\overline{F_1P} = \frac{cx}{a} + a, \quad \text{substituindo na própria definição}$$

$$\overline{F_2P} = a - \frac{cx}{a}, \quad \text{substituindo em (2),}$$

$$\left(\frac{cx}{a} + a\right)^2 = y^2 + (c+x)^2$$

$$\left(cx+a^2\right)^2 = a^2y^2 + a^2\left(x+c\right)^2$$

$$a^4 - a^2c^2 = a^2y^2 + a^2x^2 - c^2x^2$$

$$a^2y^2 + \left(a^2-c^2\right)x^2 = a^2\left(a^2-c^2\right) \quad (4),$$

como $2a > 2c \;\Rightarrow\; a > c$, logo, $a^2 - c^2$ é positivo e $a^2 - c^2 = b^2$, substituindo em (4) tem-se

$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, e dividindo ambos os membros por a^2b^2, obtemos:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Caso a elipse tenha a reta focal coincidente com o eixo OY, então teremos:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

Atividade II:
Objetivo: Fazer com que o aluno perceba a simetria da elipse.
Material necessário: computador e o *software* Geogebra.
Tempo de atividade: 15 min.

- Abra o Geogebra;
- No campo de entrada, digite: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$;
- Marque um ponto qualquer sobre a elipse que não pertença aos eixos coordenados;
- Marque outro ponto, agora, pelo campo de entrada, usando o valor da abscissa do primeiro e o simétrico de sua ordenada;
- Marque outro ponto, pelo campo de entrada, usando o valor do simétrico da abscissa do primeiro e o valor de sua ordenada;
- Marque outro ponto, pelo campo de entrada, usando os valores simétricos das coordenadas do primeiro ponto, porém, com suas posições invertidas.

Responda:

1. Que conclusão podemos tirar em relação à atividade anterior?

3.2 SIMETRIA DA ELIPSE

Para qualquer ponto $P(x,y)$ de uma elipse, teremos seu simétrico também pertencente à elipse, tanto em relação à reta focal quanto à reta não focal ou mesmo em relação ao seu centro.

Atividade III:
Objetivo: Através de uma generalização da fórmula, o aluno irá relacionar o deslocamento do centro da elipse pelas coordenadas por ele atribuídas e a relação que essas coordenadas com a fórmula algébrica, assim, como a variação do eixo focal podendo ser paralelo ao eixo OX ou ao eixo OY.
Material necessário: computador e o *software* Geogebra.
Tempo de atividade: 30 min.

- Abra o Geogebra
- Clique sobre o botão deslizante para lançar dois valores, a e b;
- No campo de entrada digite: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;
- Mova o cursor de a, tanto para a esquerda, quanto para a direita;
- Mova o cursor de b, tanto para a esquerda, quanto para a direita;

Responda:

1. O que aconteceu com a elipse quando os valores apresentados foram $a<b$?
2. O que aconteceu com a elipse quando os valores apresentados foram $a=b$?
3. O que aconteceu com a elipse quando os valores apresentados foram $a>b$?

Continuando a atividade

- Agora, lance novamente, no controle deslizante os valores c e d;
- Redigite a equação da elipse para: $\frac{(x-c)^2}{a^2}+\frac{(y-d)^2}{b^2}=1$. Afim de facilitar a visualização, com o botão direito do mouse sobre os botões deslizantes, vá em propriedades e coloque: mín=-10, máx=10 e incremento=1;

- Coloque c e d iguais a zero, e com o uso do eixo das coordenadas e dos vértices, determine o centro da elipse, através da ferramenta ponto médio;

Responda:

1. Arraste o deslizante de c para valores positivos e negativos, sempre olhando a fórmula apresentada na janela de álgebra. O que aconteceu? Qual a relação da fórmula com o centro da elipse?
2. Arraste o deslizante de d para valores positivos e negativos, sempre olhando a fórmula apresentada na janela de álgebra. O que aconteceu? Qual a relação da fórmula com o centro da elipse?
3. Altere os valores de a e b de modo que possamos ter os três caso da atividade anterior, arraste o deslizante ora de c, ora de d. Que conclusão podemos obter da relação da fórmula quanto ao seu centro e sua posição?

3.3 ELIPSE COM CENTRO $\overline{O} = (x_0, y_0)$

Temos uma elipse de centro deslocado da origem quando ela é transladada dos eixos coordenados, podendo ser tratado em dois casos: com a reta focal paralela ao eixo OX ou com o eixo focal paralelo ao eixo OY. Devido à similaridade dos casos, iremos abordar apenas o primeiro caso, através de uma adaptação [7] e [4].

Consideremos uma elipse de centro $\overline{O} = (x_0, y_0)$, com eixo focal paralelo ao eixo OX, conforme figura abaixo.

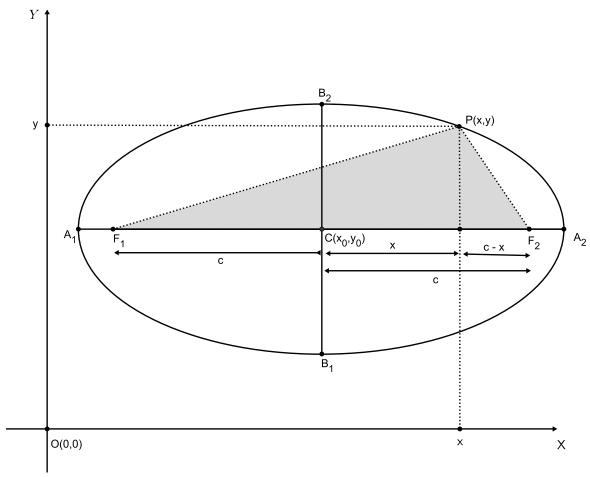

Figura 3.3: Elipse com centro $\overline{O} = (x_0, y_0)$ e eixo focal paralelo ao eixo OX

Consideremos um novo sistema de coordenadas $\overline{O}\ \overline{X}\ \overline{Y}$, de tal modo que o centro $\overline{O}$ da elipse esteja na origem desse novo sistema. Os focos da elipse seriam $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$, observemos que o ponto $P = (x, y)$ da elipse, no sistema de coordenadas OXY, passará a ter coordenadas $P = (\overline{x}, \overline{y})$, conforme a figura seguinte:

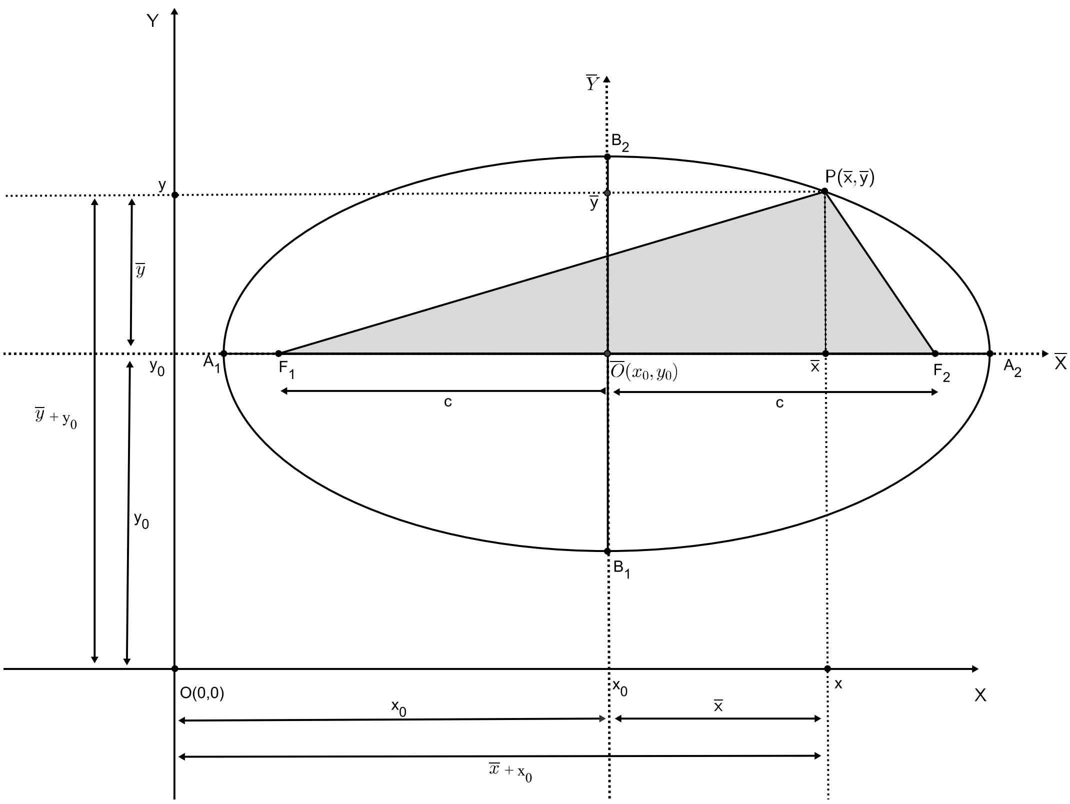

Figura 3.4: Elipse no novo sistema de coordenadas $\overline{O}\ \overline{X}\ \overline{Y}$

Então teríamos a seguinte relação, $x = \overline{x} + x_0$ e $y = \overline{y} + y_0$, e a equação da elipse no sistema de coordenadas $\overline{O}\ \overline{X}\ \overline{Y}$ é:

$$\frac{\overline{x}^2}{a^2} + \frac{\overline{y}^2}{b^2} = 1$$

Usando a relação anterior para voltarmos ao sistema de coordenadas OXY, a equação da elipse será:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Caso a elipse tenha a reta focal coincidente com o eixo OY, então teríamos:

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$$

Atividade IV, adaptada de [6]:
Objetivo: Possibilitar ao aluno o conhecimento necessário para construir uma reta tangente à uma elipse por um ponto qualquer e compreender os argumentos matemáticos da construção.
Material necessário: computador e o *software* Geogebra.
Tempo de atividade: 30 min.

- Abra o Geogebra;
- Construa uma elipse, usando a ferramenta, selecionando dois focos A, B e um ponto C;
- Determine um ponto D sobre a elipse;
- Construa duas semirretas, iniciando nos focos até o ponto D;
- Construa uma circunferência de centro em D, e raio até um dos focos;
- Determine o ponto E de interseção, da circunferência, com a semirreta, de modo que possamos construir um triângulo isósceles, traçando o segmento $\overline{AE}$ do ponto de interseção como o foco;
- Oculte a circunferência;
- Construa outra circunferência, de centro em D e raio até o outro foco;
- Determine o ponto F de interseção da circunferência com a semirreta $\overrightarrow{BD}$, de modo que possamos construir um triângulo isósceles, traçando o segmento $\overline{BF}$ do ponto de interseção como o foco;
- Oculte a circunferência;
- Determine os pontos médios de cada segmento $\overline{AE}$ e $\overline{BF}$, os quais pertencerão às bases dos triângulos isósceles;
- Trace uma reta r, que passe pelos pontos médios.

Responda:

1. O que podemos afirmar sobre os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PE}$? E os segmentos $\overline{PB}$ e $\overline{PF}$? Que argumentação matemática pode sustentar nossa afirmação?

2. Como você descreveria as propriedades matemáticas da reta r, em relação às figuras formadas?

3. Mova o ponto D sobre a elipse. Como você descreveria o comportamento da reta r?

4. O que a visualização nos leva intuitivamente a concluir sobre a reta r em relação à elipse?

3.4 CONSTRUINDO UMA RETA TANGENTE À UMA ELIPSE

Baseado no artigo [12], uma vez construída uma elipse através de seus focos, tomemos um ponto P, qualquer da elipse. Sabemos que, por definição, teremos a relação, $\overline{PF_1}+\overline{PF_2} = 2a$. Caso houvesse um ponto X, tal que satisfizesse a relação $\overline{XF_1}+\overline{XF_2} < 2a$, poderíamos afirmar que o ponto encontra-se no interior da elipse e, caso a relação fosse $\overline{XF_1}+\overline{XF_2} > 2a$, então poderíamos afirmar que o ponto encontra-se no exterior da elipse. Logo, uma reta será tangente à elipse em um ponto P, se para qualquer outro ponto Q da reta, distinto de P, tenhamos $\overline{QF_1}+\overline{QF_2} > 2a$. Tomemos uma reta r, que passe pelo ponto P, de modo que ela seja bissetriz do ângulo formado pela semirreta $\overrightarrow{PB}$, oposta à semirreta $\overrightarrow{PF_1}$, de modo que $\overline{PB} = \overline{PF_2}$ e pela semirreta $\overrightarrow{PF_2}$ que é oposta a semirreta $\overrightarrow{PA}$, de modo que $\overline{PA} = \overline{PF_1}$. Ao tomarmos um ponto Q sobre a reta r, distinto de P, temos que a reta r, além de ser bissetriz das semirretas, é também mediatriz, pois os triângulos APF_1 e BPF_2 são isósceles, conforme a figura abaixo:

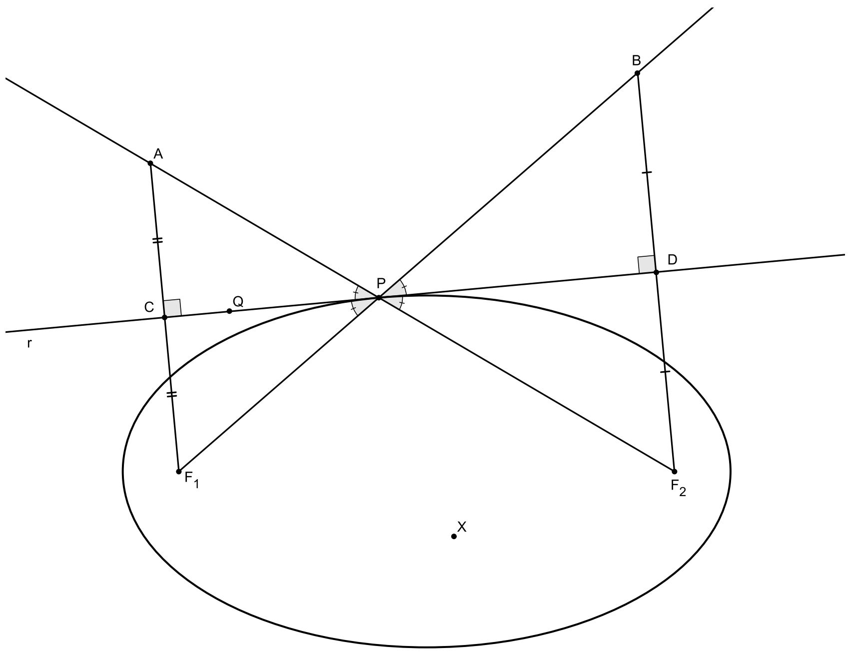

Figura 3.5: Elipse e a sua tangente ao ponto P

Logo teremos as seguintes desigualdades:

$$\overline{AF_2} = \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$
$$\overline{QF_1} + \overline{QF_2} = \overline{AQ} + \overline{BQ} = \overline{AQ} + \overline{QF_2} > \overline{AF_2} = 2a$$

Assim, podemos concluir que o ponto Q é exterior à elipse e a reta r só possui um ponto pertencente à elipse, ou seja, a reta r é tangente à elipse em P.

Atividade V:
Objetivo: Fazer com que o aluno perceba a propriedade bissetora da elipse.
Material necessário: computador e o *software* Geogebra.
Tempo de atividade: 20 min.

- Abra o Geogebra;
- Construa uma elipse usando a ferramenta selecionando dois focos e um ponto;
- Determine um ponto D sobre a elipse;
- Construa os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$;
- Através da ferramenta reta tangente, determine a reta tangente à elipse no ponto D;
- Sobre a reta, determine os pontos E e F, de modo que o ponto D esteja entre eles;
- Use a ferramenta ângulo e determine os ângulos $\widehat{EDA}$ e $\widehat{BDF}$.

Responda:

1. Qual é a relação entre os ângulos $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$?
2. Mova o ponto D sobre a elipse. O que você observou?
3. Qual a conclusão que podemos formular sobre a reta tangente e os ângulos observados?

Teorema 3.1. Propriedade bissetora da elipse, veja [16] e [17]:

Seja uma elipse $\mathscr{E}$ com focos F_1 e F_2 e, seja um ponto $P \in \mathscr{E}$. Nesse caso a reta r, tangente a elipse em P, forma ângulos iguais com os raios focais $\overline{F_1P}$ e $\overline{F_2P}$.

A demonstração deste teorema foge do escopo deste trabalho. Aos interessados, veja [17].

A recíproca dessa propriedade seria: "Se os ângulos formados entre uma reta que passa por um ponto de uma elipse e, os seus raios focais forem iguais, então a reta é tangente à elipse".

Demonstração:

Baseado em [16], suponhamos um ponto P de uma elipse de focos F_1 e F_2. Tracemos uma reta por P, e determinemos sobre a mesma, dois pontos Q e R, de modo que P esteja entre eles e, de tal forma que os ângulos formados com os raios focais $\widehat{QPF_1}$ e $\widehat{RPF_2}$ sejam iguais. Tracemos por F_1 uma reta que seja perpendicular à reta que passa por P e prolonguemos o segmento $\overline{PF_2}$ até obter a o ponto S de interseção com a reta que passa por F_1, conforme a figura abaixo:

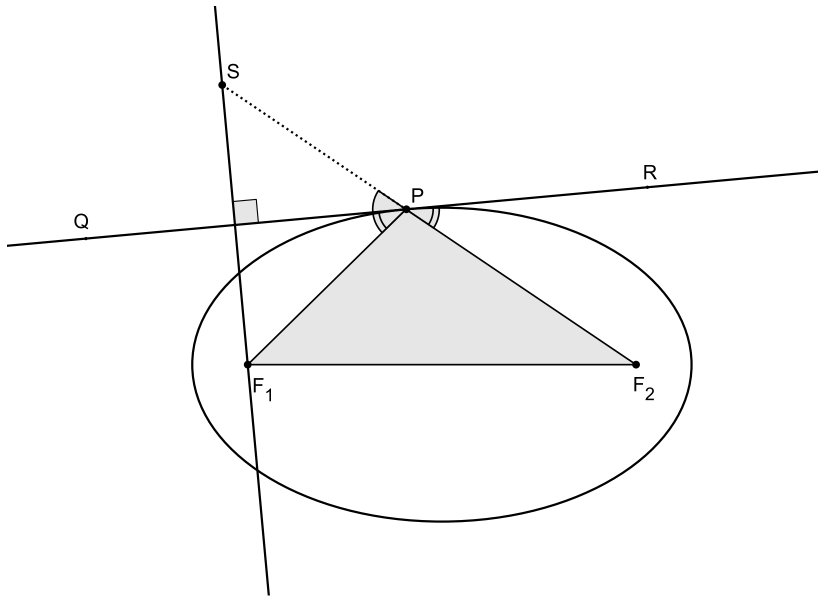

Figura 3.6: Elipse e a sua propriedade bissetora

Temos que os $\widehat{SPQ}$ e $\widehat{RPF_2}$ são iguais pois, são opostos pelo vértice, ora, então o triângulo SPF_1 é isósceles pois, a reta que é perpendicular também será mediatriz e bissetriz, consequentemente os segmentos $\overline{PS}$ e $\overline{PF_1}$ são iguais e podemos concluir que o segmento $\overline{F_2S} = 2a$. Se a reta que passa por esse ponto P é tangente à elipse, então ela é única. Se pela reta que passa pelo ponto P traçarmos outro ponto T, ainda teremos que os segmentos $\overline{ST}$ e $\overline{F_1T}$ são iguais, uma vez que a reta ainda é uma mediatriz de SF_1. Logo, se $P \neq T$, irá existir um triângulo TSF_1 tal que $\overline{F_1T} + \overline{F_2T} = \overline{ST} + \overline{F_1T} > \overline{F_2S} = 2a$. Este fato nos leva a concluir que todo ponto T, distinto de P, que encontrar-se na reta, é exterior à elipse. Logo a reta que passa por R e Q é tangente à elipse, em P. A figura que se segue irá ilustrar o fato de maneira melhor.

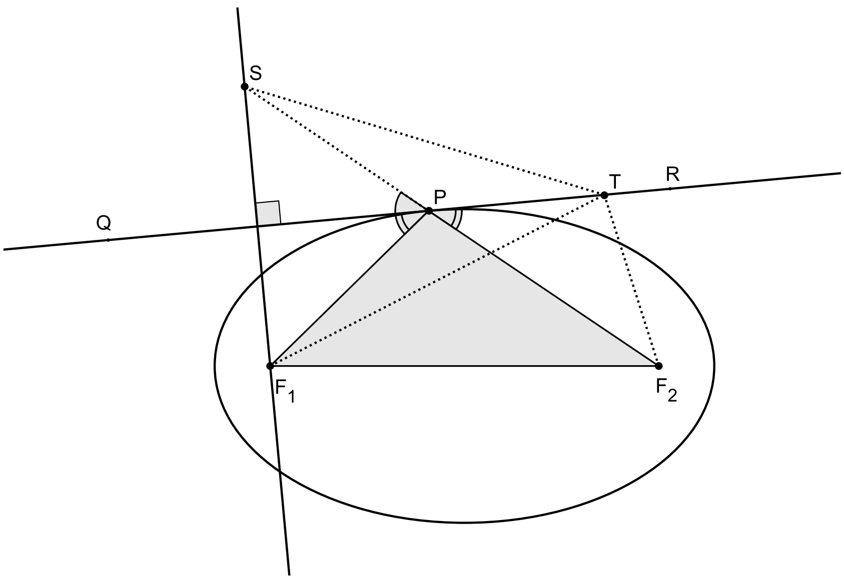

Figura 3.7: Elipse e a sua tangente

Atividade VI:

Objetivo: Preparar o aluno para que possa compreender o raciocínio que permitiu calcular a área da elipse.

Material necessário: computador e o *software* Geogebra.

Tempo de atividade: 20 min.

- Abra o Geogebra;
- Construa uma elipse qualquer, com centro na origem dos eixos e, reta focal sobre o eixo OX;
- Construa uma semicircunferência, com os vértices da elipse coincidindo, sendo esta, ocupando o primeiro e segundo quadrante;
- Trace os semieixos da elipse;
- Escolha dois ou três pontos quaisquer, sobre o eixo das abscissas e interno à elipse;
- Trace as perpendiculares ao eixo das abscissas, que passe pelos pontos escolhidos;
- Trace os segmentos formados pelos pontos escolhidos sobre o eixo OX e a semicircunferência;
- Trace os segmentos formados pelos pontos escolhidos sobre o eixo OX e a parte da elipse interna à semicircunferência.

Responda:

1. Pelo campo de entrada, determine as razões entre os segmentos da elipse e da circunferência, construídos pela mesma abscissa. O que você pode dizer sobre os valores encontrados?

2. Pelo campo de entrada determine a razão entre o semieixo não focal e o semieixo focal. Há alguma relação com os valores encontrados no ítem anterior?

Sem perda de generalidade, de acordo com a bibliografia [16], consideremos uma elipse com centro, na origem e eixo focal sobre o eixo das abscissas, e uma circunferência com centro na origem e raio igual ao semieixo focal, coincidindo com os vértices do eixo focal da elipse. Temos que cada abscissa da elipse é coincidente com a da circunferência. Fazendo uma análise somente de meia circunferência e meia elipse, referente aos primeiro e segundo quadrantes, conforme a figura que se segue:

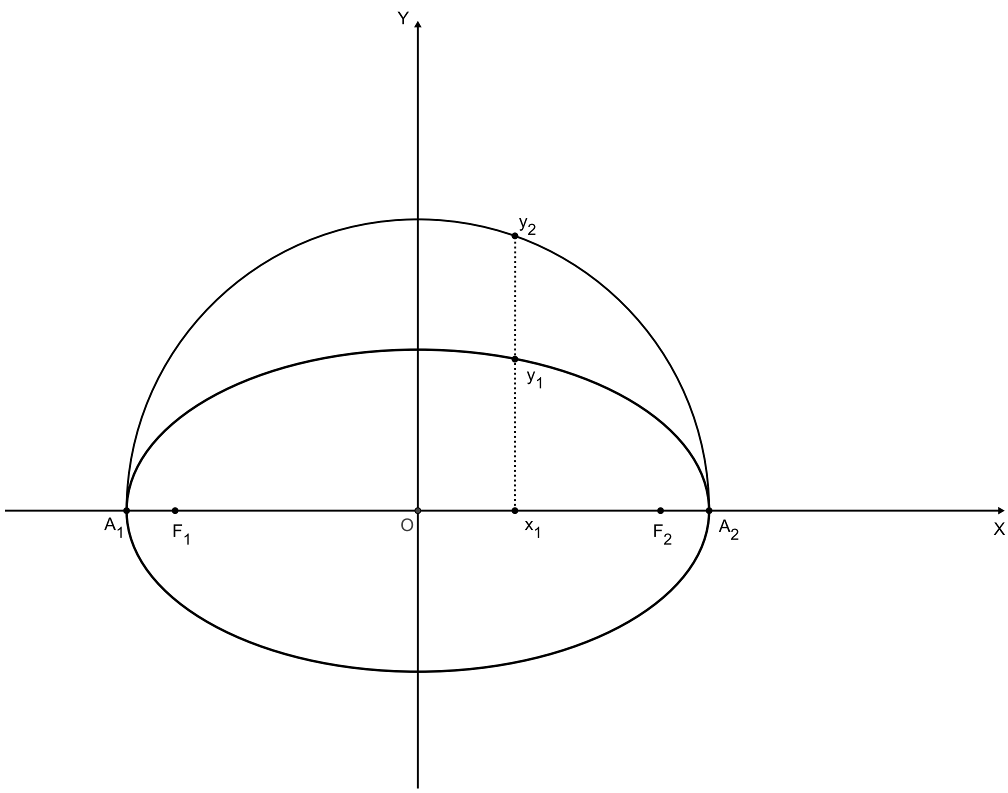

Figura 3.8: Elipse e a semicircunferência

A circunferência tem por expressão $x^2 + y_2^2 = a^2$, e a elipse, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$. Suas respectivas imagens positivas podem ser determinadas através de $y_2 = \sqrt{a^2 - x^2}$ e $y_1 = \sqrt{\frac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2}}$, sendo que, também podemos expressar $y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Então, a razão entre os segmentos determinados pelas imagens y_1 e y_2, referente à mesma abscissa pode ser determinada através de:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{b}{a}$$

Consideremos agora, que na semielipse, seja construída um polígono de n lados, e que pelos vértices e os valores correspondentes a estes, no eixo das abscissas, determinemos n trapézios. Prolonguemos os lados paralelos, determinados pelos segmentos perpendiculares ao eixo das abscissas, até a interseção com a circunferência, isso também determinará outro polígono de n lados, conforme a figura abaixo:

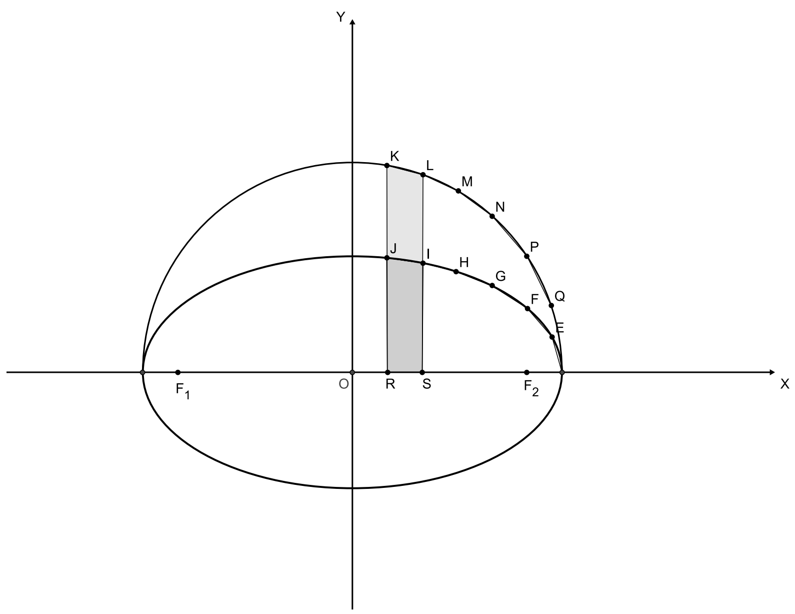

Figura 3.9: Elipse e a semicircunferência e seus respectivos trapézios

Baseado na bibliografia [14],consideremos que a altura dos trapézios seja mínima, isto é, muito próxima de zero, que teremos é que as bases serão quase que coincidentes. Logo, estarão na mesma razão que os segmentos que a compõem. Se pensarmos que todos os segmentos possíveis estão na mesma razão, podemos concluir que, a razão entre as áreas da semielipse e da semicircunferência estará na mesma razão que os segmentos, permitindo concluir que a razão entre as áreas da elipse e da circunferência também será a mesma, logo:

$$\frac{A_\varepsilon}{A_c} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{A_\varepsilon}{\pi a^2} = \frac{b}{a}$$

$$\text{Área da Elipse} = A_\varepsilon = ab\pi.$$

Isso nos leva a concluir, que a área da elipse é igual à média geométrica entre as áreas das circunferências, de diámetros iguais ao eixo focal e ao eixo não focal.

$$\text{Área da Elipse} = A_\varepsilon = \sqrt{\pi a^2 \ . \ \pi b^2} = \sqrt{\pi^2 . a^2 . b^2} = ab\pi.$$

4 HIPÉRBOLE

Neste capítulo iremos propor atividades aos alunos, de modo que possamos abordar: a hipérbole como lugar geométrico, forma canônica da hipérbole, a simetria da hipérbole, a hipérbole com centro $\overline{O} = (x_0, y_0)$, a construção de uma reta tangente à uma hipérbole e a construção de assíntotas uma vez fornecida a hipérbole.

Atividade VII, adaptada [7]:
Objetivos: Fazer com que o aluno perceba que a diferença dos segmentos construídos é constante, após a habilitação do rastro. Mostrar a hipérbole como lugar geométrico, bem como seu comportamento em relação à distância entre os focos.
Material necessário: computador e o *software* Geogebra.
Tempo de atividade: 30 min.

- Abra o Geogebra;
- Trace uma reta determinada pelos pontos A e B;
- Escolha um ponto C sobre a semirreta e, renomeie o ponto A para F_1 e o ponto C para F_2, depois torne o ponto B oculto;
- Trace um círculo de centro F_1, de modo que F_2 esteja exterior ao círculo;
- Escolha um ponto D, no círculo, não pertencente à reta $\overleftrightarrow{F_1F_2}$;
- Trace a reta $\overleftrightarrow{DF_1}$;
- Trace o segmento $\overline{DF_2}$;
- Trace a mediatriz do segmento $\overline{DF_2}$ e determine o ponto P de interseção da mediatriz com o a reta $\overleftrightarrow{DF_1}$.

Responda:

1. O que podemos afirmar sobre o ponto P, por situar-se na mediatriz do segmento $\overline{DF_2}$?

2. Como podemos expressar, algebricamente, a relação entre as distâncias de $\overline{PD}$ e $\overline{PF_2}$?

3. Trace os segmentos $\overline{PF_1}$, $\overline{F_1D}$ e $\overline{PF_2}$. Mova o ponto D sobre o círculo e observe na janela de álgebra os valores dos segmentos. O que podemos dizer sobre os valores dos segmentos ao mover o ponto D?

4. Como você expressaria, algebricamente, a relação entre as distâncias dos segmentos em função do segmento $\overline{F_1D}$?

5. Habilite o rastro no ponto P e mova o ponto D, ao longo do círculo. Como você descreveria a figura formada? Ela é sempre contínua? Caso não seja sempre contínua, quando deixarará de ser?

6. Desabilite o rastro do ponto P e afaste os pontos F_1 e F_2, habilite novamente o rastro do ponto P e desloque o ponto D, ao longo do círculo. O que aconteceu com a figura formada?

Definição: Consideremos dois pontos no plano, F_1 e F_2, os quais denominaremos de focos. O lugar geométrico de todos os pontos P, dado para os quais temos que $|\overline{F_1P}$ - $\overline{F_2P}|$ é igual a uma constante, $2a$, com $a > 0$, e sendo essa medida maior que a distância entre os focos, $2c$, tal que $c > 0$, é denominada de *hipérbole*. Logo, temos de acordo com [7] e [4] que:

$$0 \leq a < c \text{ e } d(F_1, F_2) = 2c,$$
$$\boxed{\mathscr{H} = \{P / |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}}$$

Terminologia[7] e [4]:

- Ao considerarmos F_1 e F_2 como os focos da hipérbole, teremos que a reta r que contém os focos será denominada de reta focal, e a distância entre os focos de $2c$;

- Ao construírmos a hipérbole, iremos observar que a interseção da mesma com a reta focal irá determinar dois pontos, A_1 e A_2, os quais iremos denominar de vértices da hipérbole, e a distância entre entre eles de $2a$. Vale lembrar que de acordo com a definição $2a < 2c$;

- O segmento $\overline{A_1A_2}$, de comprimento $2a$, é denominado de eixo focal da hipérbole;

- O centro da hipérbole, é o ponto C, o qual é ponto médio de A_1 e A_2, tanto quanto de F_1 e F_2;

- A reta perpendicular à reta foca que passa pelo ponto C, será denominada de reta não focal da hipérbole;

- A reta não focal não intersecta a hipérbole, pois teríamos que $|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 0$;

- Sobre a reta não focal, teremos dois pontos imaginários, B_1 e B_2, os quais iremos denominar de vértices imaginários, que irão formar um segmento, denominado de eixo não focal, o qual tem como ponto médio o ponto C;

- A distância entre os vértices imaginários da reta não focal será $2b$;

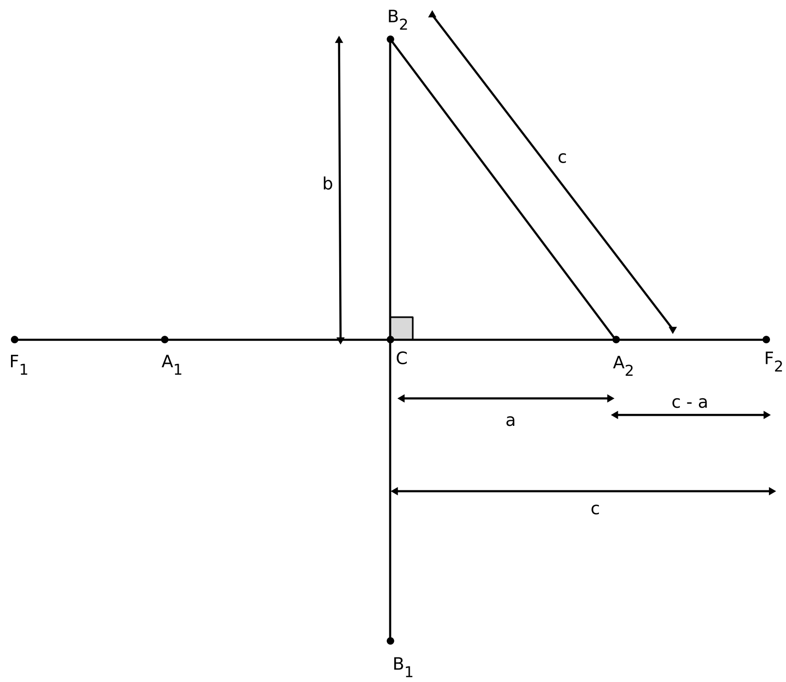

Figura 4.1: Eixos da hipérbole

- Vale lembrar que, a medida do semieixo não focal, pode ser determinada pelo Teorema de Pitágoras, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$;

- A razão entre os segmentos c e a determinam a excentricidade da elipse, sendo expressa por e, onde $e = \dfrac{c}{a}$. Observermos que $e > 1$.

4.1 FORMA CANÔNICA DA HIPÉRBOLE

Seja uma hipérbole ε com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX, então temos:

Focos $\begin{cases} F_1 = (-c,0) \\ F_2 = (c,0) \end{cases}$;

Vértices sobre o eixo focal $\begin{cases} A_1 = (-a,0) \\ A_2 = (a,0) \end{cases}$;

Vértices sobre o eixo não focal $\begin{cases} B_1 = (0,-b) \\ B_2 = (0,b) \end{cases}$;

onde $0 < c < a$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Caso a hipérbole tenha a reta focal coincidente com o eixo OY, então teríamos:

Focos $\begin{cases} F_1 = (0,-c) \\ F_2 = (0,c) \end{cases}$;

Vértices sobre o eixo focal $\begin{cases} A_1 = (0,-a) \\ A_2 = (0,a) \end{cases}$;

Vértices sobre o eixo não focal $\begin{cases} B_1 = (-b,0) \\ B_2 = (b,0) \end{cases}$.

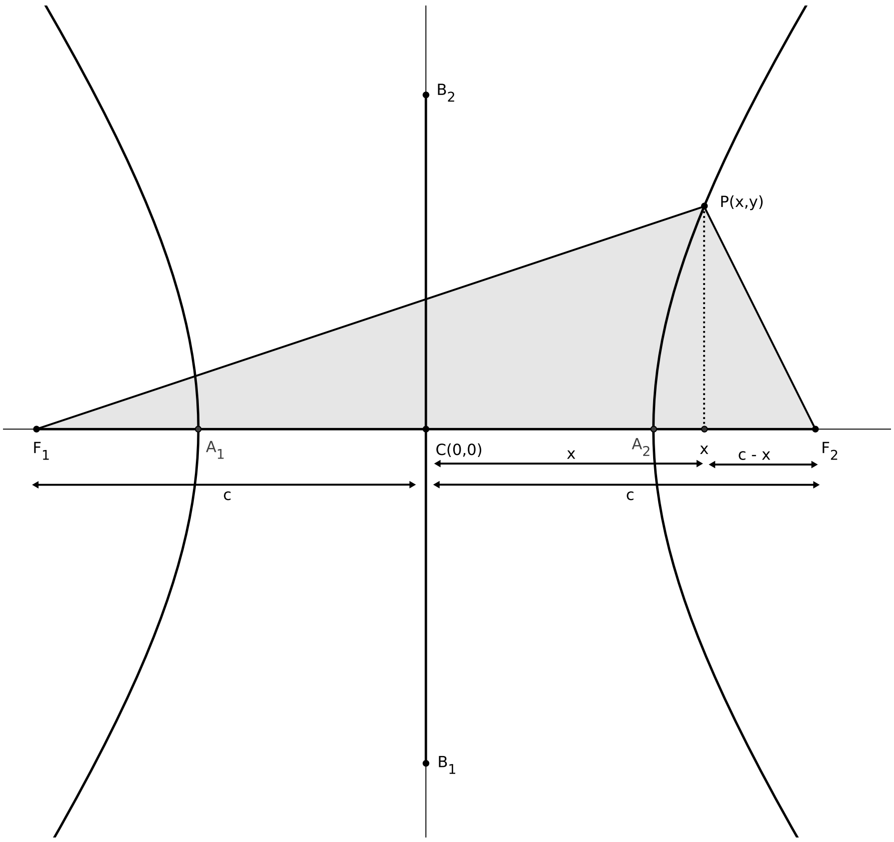

Figura 4.2: Hipérbole e as suas coordenadas

Pela figura anterior e, uma adaptação [14], temos:

$$\overline{F_1P} \text{ - } \overline{F_2P} = 2a, \text{ por definição (1);}$$
$$\overline{F_1P}^2 = y^2 + (x+c)^2 \qquad (2);$$
$$\overline{F_2P}^2 = y^2 + (c-x)^2 \qquad (3);$$

Fazendo (2) - (3), teremos,

$$\overline{F_1P}^2 - \overline{F_2P}^2 = 4cx$$
$$(\overline{F_1P} + \overline{F_2P})(\overline{F_1P} - \overline{F_2P}) = 4cx, \quad \text{mas de acordo com a definição,} \quad \overline{F_1P} - \overline{F_2P} = 2a, \quad \text{logo,}$$
$$2a(\overline{F_1P} + \overline{F_2P}) = 4cx$$
$$\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = \frac{2cx}{a}$$

$$\overline{F_1P} + (2a + \overline{F_1P}) = \frac{2cx}{a}$$

$$2\overline{F_1P} = \frac{2cx}{a} - 2a$$

$$\overline{F_1P} = \frac{cx}{a} - a, \quad \text{substituindo na própria definição,}$$

$$\overline{F_2P} = a + \frac{cx}{a}, \quad \text{substituindo em (2),}$$

$$\left(\frac{cx}{a} + a\right)^2 = y^2 + (c+x)^2$$

$$\left(cx + a^2\right)^2 = a^2y^2 + a^2(x+c)^2$$

$$a^4 - a^2c^2 = a^2y^2 + a^2x^2 - c^2x^2$$

$$a^2y^2 + \left(a^2 - c^2\right)x^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right)$$

$$a^2y^2 - \left(c^2 - a^2\right)x^2 = -a^2\left(c^2 - a^2\right) \quad (4)$$

como $2c > 2a \;\Rightarrow\; c > a$, logo, $c^2 - a^2$ é positivo e $c^2 - a^2 = b^2$, substituindo em (4) tem-se

$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$, e dividindo ambos os membros por $-a^2b^2$, obtemos:

$$-\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Caso a hipérbole tenha a reta focal coincidente com o eixo OY, então teremos:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

Atividade VIII:
Objetivo: Fazer com que o aluno perceba a simetria da hipérbole.
Material necessário: computador e o *software* Geogebra.
Tempo de atividade: 15 min.

- Abra o Geogebra;
- No campo de entrada digite: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$;
- Marque um ponto qualquer, sobre a hipérbole que não pertença aos eixos coordenados;
- Marque outro ponto, agora pelo campo de entrada, usando o valor da abscissa do primeiro e o simétrico de sua ordenada;
- Marque outro ponto, pelo campo de entrada, usando o valor do simétrico da abscissa do primeiro e o valor de sua ordenada;
- Marque outro ponto, pelo campo de entrada, usando os valores simétricos das coordenadas do primeiro ponto porém, com suas posições invertidas.

Responda:

1. Que conclusão podemos tirar em relação à atividade anterior?

4.2 SIMETRIA DA HIPÉRBOLE

Para qualquer ponto $P(x,y)$ de uma hipérbole, teremos seu simétrico também pertencente à hipérbole, tanto em relação à reta focal quanto à reta não focal ou mesmo em relação ao seu centro.

Atividade IX:
Objetivo: Possibilitar que o aluno relacione o deslocamento do centro da hipérbole pelas coordenadas, por ele atribuídas e a relação que essas coordenadas com a fórmula algébrica, através de uma generalização da fórmula.
Material necessário: computador e o *software* Geogebra.
Tempo de atividade: 30 min.

- Abra o Geogebra;
- Clique sobre o botão deslizante para lançar dois valores, a e b;
- No campo de entrada digite: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;
- Mova o cursor de a, tanto para a esquerda, quanto para a direita;
- Mova o cursor de b, tanto para a esquerda, quanto para a direita;

Responda:

1. O que aconteceu com a hipérbole, quando movemos apenas o cursor a ?
2. O que aconteceu com a hipérbole, quando movemos apenas o cursor b ?

Continuando a atividade anterior:

- Agora lance novamente, no controle deslizante, os valores c e d;

- Redigite a equação da hipérbole para: $\frac{(x-c)^2}{a^2} - \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1$, a fim de facilitar a visualização. Com o botão direito do mouse sobre os botões deslizantes, vá em propriedades e coloque: mín=-10, máx=10 e incremento=1;

Responda:

1. Arraste o deslizante de c para valores positivos e negativos, sempre olhando a fórmula apresentada na janela de álgebra. O que aconteceu? Qual a relação da fórmula com o centro da hipérbole?

2. Arraste o deslizante de d para valores positivos e negativos, sempre olhando a fórmula apresentada na janela de álgebra. O que aconteceu? Qual a relação da fórmula com o centro da hipérbole?

3. Que conclusão podemos obter da relação da fórmula quanto ao seu centro e sua posição?

4.3 HIPÉRBOLE COM CENTRO $\overline{O} = (x_0, y_0)$

Temos uma hipérbole de centro deslocado da origem quando ela é transladada dos eixos coordenados, podendo ser tratado em dois casos: com a reta focal paralela ao eixo OX ou com o eixo focal paralelo ao eixo OY. Devido à similaridade dos casos, iremos abordar apenas o primeiro caso, através de uma adaptação [7] e [4].

Consideremos uma hipérbole de centro $\overline{O} = (x_0, y_0)$, com eixo focal paralelo ao eixo OX, conforme a figura seguinte.

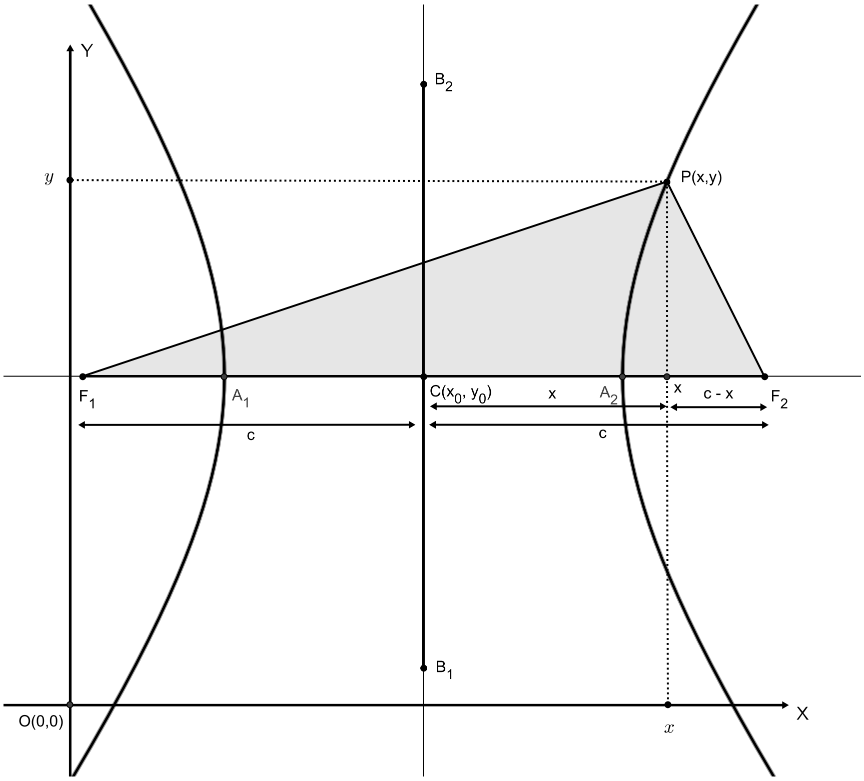

Figura 4.3: Hipérbole com centro $\overline{O} = (x_0, y_0)$ e eixo focal paralelo ao eixo OX

Consideremos um novo sistema de coordenadas $\overline{O}\ \overline{X}\ \overline{Y}$, de tal modo que, o centro $\overline{O}$ da hipérbole esteja na origem desse novo sistema. Os focos da hipérbole seriam $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$, observemos que o então ponto $P = (x, y)$ da hipérbole no sistema de de coordenadas OXY, passará a ter coordenadas $P = (\overline{x}, \overline{y})$, conforme a figura que se segue:

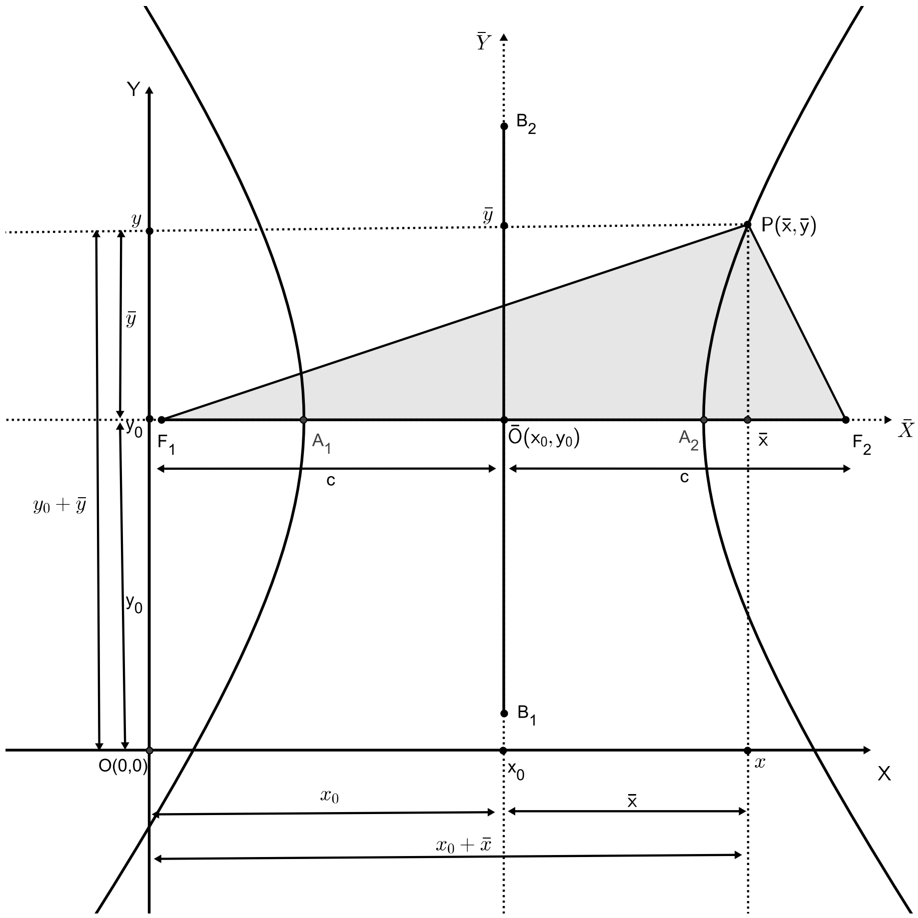

Figura 4.4: Hipérbole no novo sistema de coordenadas $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$

Então teríamos a seguinte relação, $x = \overline{x} - x_0$ e $y = \overline{y} + y_0$, e a equação da hipérbole, no sistema de coordenadas $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ é:

$$\frac{\overline{x}^2}{a^2} - \frac{\overline{y}^2}{b^2} = 1.$$

Usando a relação anterior para voltarmos ao sistema de coordanadas OXY, a equação da hipérbole será:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Caso a hipérbole tenha a reta focal coincidente com o eixo OY, teremos:

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} - \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$$

Atividade X adaptada[8]:
Objetivos: Fazer com que o aluno saiba construir as assíntotas de uma hipérbole dada, através de seus focos e conceitos geométricos, bem como, possibilitar que ele possa concluir que, embora embora uma hipérbole tenha um único par de assíntotas, a recíproca não é válida.
Material necessário: computador e o *software* Geogebra.
Tempo de atividade: 45 min.

- Abra o Geogebra;
- Construa uma hipérbole através da ferramenta, constuir uma hipérbole, pelos focos e um ponto;
- Construa a reta focal;
- Pela interseção, determine os vértices da reta focal;
- Através da ferramenta ponto médio, determine o centro da hipérbole;
- Construa a reta não focal;
- Contrua uma circunferência de centro no ponto médio e raio até um dos focos;
- Determine o ponto de interseção da circunferência com a reta perpendicular ao vértice da hipérbole.

Responda:

1. Quais são os elementos da hipérbole determinados pelos pontos obtidos na construção?
2. Através da ferramenta reflexão em relação à uma reta, clique no ponto de interseção da perpendicular, com a circunferência, depois a reta focal, novamente clique no ponto de interseção da perpendicular com a circunferência e depois a reta não focal, e por último, clique num em um pontos obtidos na reflexão e na reta focal ou na reta não focal, de modo que tenhamos obtido quatro pontos. Usando a ferramenta polígono, ligue os quatro pontos. Qual a figura obtida? Como podemos matematicamente garantir isso?
3. Construa retas pelas diagonais da figura obtida. Como você expressaria o coeficente angular dessas retas? Essas retas intersectam a hipérbole? Quais são essas retas? Mova os focos e diga o que aconteceu com elas?

4. Construa uma circunferência de centro no ponto médio e raio em algum ponto, sobre uma das retas da diagonal da figura. Construa outro polígono através da interseção da circunferência com as retas diagonais. Construa outra hipérbole usando como foco, os pontos de interseção da nova circunferência com a reta focal e um dos pontos obtidos da interseção da mesma com as retas diagonais. O que podemos concluir? Uma hipérbole possui um único par de assíntotas? E um par de assíntotas possui uma única hipérbole?

Atividade XI:
Objetivos: Fazer com que o aluno perceba a relação da excentricidade das cônicas, compreendendo a razão dos segmentos das distâncias focais da elipse e do segmento da distância entre os vértices, bem como descobrir quando há a variação da razão para obter a hipérbole.
Material necessário: computador e o *software* Geogebra.
Tempo de atividade: 30 min.
:

- Abra o Geogebra;
- Trace uma reta determinada pelos pontos A e B;
- Escolha um ponto C sobre a semirreta, e renomeie o ponto A para F_1 e o ponto C para F_2, depois torne o ponto B oculto; $\overline{XF_1} - \overline{XF_2} < 2a$; então, poderíamos afirmar que o ponto encontra-se na região interna da hipérbole que contém F_1;
- Trace um círculo de centro F_1, de modo que F_2 esteja interno ao círculo;
- Escolha um ponto D no círculo, não pertencendo à reta $\overleftrightarrow{F_1F_2}$;
- Trace a reta $\overleftrightarrow{DF_1}$;
- Trace o segmento $\overline{DF_2}$;
- Trace a mediatriz do segmento $\overline{DF_2}$ e determine o ponto P, de interseção da mediatriz com o a reta $\overleftrightarrow{DF_1}$.

Responda:

1. Habilite o rastro no ponto P e mova o ponto D ao longo do círculo; observe a figura descrita. Desabilite o rastro e afaste o ponto F_2 de tal forma que este fique exterior ao círculo. Habilite novamenteo rastro no ponto P e mova no ponto D, ao longo do círculo e observe

a figura descrita. Como você justificaria, matematicamente, as duas transformações por serem distintas?

2. Qual é o ponto de transição das transformações? O que ele representa nas construções?

Atividade XII:
Objetivos: Fazer com que o aluno saiba construir uma reta tangente à uma hipérbole por um ponto qualquer e compreenda os argumentos matemáticos da construção.
Material necessário: computador e o *software* Geogebra.
Tempo de atividade: 30 min.

- Abra o Geogebra;
- Construa uma hipérbole através dos focos F_1 e F_2 e um ponto qualquer;
- Determine um ponto P qualquer sobre a hipérbole;
- Construa os segmentos $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$;
- Construa a reta bissetriz r do ângulo $\widehat{F_1PF_2}$;
- Construa uma circunferência de centro em P, de modo que o raio seja até o foco mais próximo da circunferência, afim de orientação, iremos supor que o raio foi até o foco F_2;
- Determine o ponto Q da interseção da circunferência, com o formado pelo ponto P e o outro foco;

Responda:

1. O que podemos afirmar sobre os segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{PF_2}$? Que argumentação matemática pode sustentar nossa afirmação?

2. Como você descreveria as propriedades matemáticas da reta r em relação à figura formada pelos pontos P, Q e F_2?

3. Mova o ponto P sobre a hipérbole, como você descreveria o comportamento da reta r?

4. O que a visualização nos leva, intuitivamente a concluir sobre a reta r em relação à elipse?

4.4 CONSTRUINDO UMA RETA TANGENTE À UMA HIPÉRBOLE

Baseado no artigo [12], uma vez construída uma hipérbole através de seus focos, tomemos um ponto P qualquer da hipérbole. Sabemos que, por definição, teremos a relação, $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$. Caso houvesse um ponto X, tal que satisfizesse, a relação $|\overline{XF_1} - \overline{XF_2}| < 2a$ $(-2a < \overline{XF_1} - \overline{XF_2} < 2a)$, poderíamos afirmar que o ponto encontra-se entre os dois ramos da hipérbole, e caso o ponto X satisfizesse a relação fosse $\overline{XF_1} - \overline{XF_2} < -2a$, então, poderíamos afirmar que o ponto encontra-se na região interna da hipérbole que contém F_1, e por último, caso houvesse um ponto X que satisfizesse a relação $\overline{XF_1} - \overline{XF_2} > 2a$, então poderíamos afirmar que o ponto encontra-se na região interna da hipérbole que contém F_2. Logo, uma reta será tangente à hipérbole em um ponto P, se para qualquer outro ponto Q da reta, distinto de P, tenhamos $\overline{QF_1} - \overline{QF_2} < 2a$. Tomemos uma reta r que passe pelo ponto P, de modo que ela seja bissetriz do ângulo formado pela semirreta $\overrightarrow{F_1P}$ e a semirreta $\overrightarrow{F_2P}$, tomemos um ponto R sobre a semirreta $\overrightarrow{F_1P}$, de modo que R esteja entre F_1 e P e $\overline{PR} = \overline{PF_2}$. Ao tomarmos um ponto Q sobre a reta r, interno ao triângulo PRF_2 e distinto de P, temos que a reta r, além de ser bissetriz das semirretas, é também mediatriz, pois o triângulo PRF_2 é isósceles, conforme a figura abaixo:

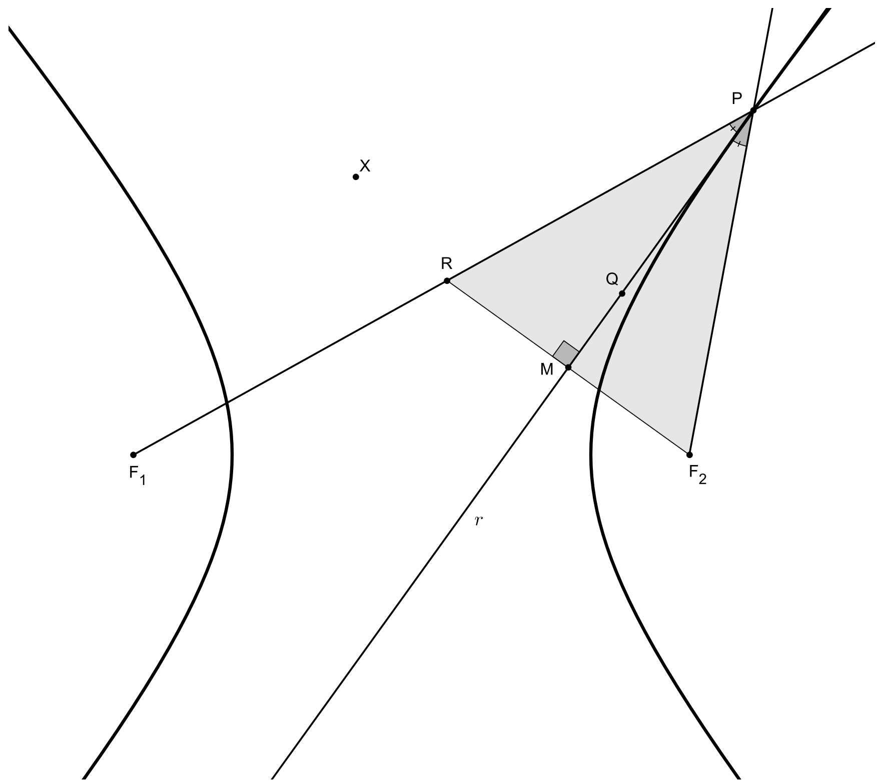

Figura 4.5: Hipérbole e a sua tangente ao ponto P

Temos que $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = \overline{F_1R}$ e, portanto, $\overline{F_1R} = 2a$. Considerando o triângulo QRF_1, iremos ter, pela desigualdade triangular que:

$$\begin{gathered}
\overline{QR} < \overline{QF_1} + \overline{F_1R} \\
\overline{QF_1} < \overline{QR} + \overline{F_1R} \\
\overline{QR} - \overline{F_1R} < \overline{QF_1} < \overline{QR} + \overline{F_1R} \\
|\overline{QF_1} - \overline{QR}| < \overline{F_1R} \text{ como } \overline{QR} = \overline{QF_2} \\
|\overline{QF_1} - \overline{QF_2}| < \overline{F_1R}, \text{ mas } \overline{F_1R} = 2a, \text{ logo,} \\
|\overline{QF_1} - \overline{QF_2}| < 2a
\end{gathered}$$

Essa desigualdade ocorre para todo ponto Q, distinto de P; portanto, com excessão do ponto P, qualquer outro ponto da reta r irá encontrar-se na região exterior da hipérbole, concluindo assim que a reta r é tangente à hipérbole em P.

5 PARÁBOLA

Neste capítulo iremos propor atividades aos alunos, de modo que possamos abordar: a parábola como lugar geométrico, forma canônica da parábola, a simetria da parábola, a parábola com centro $\overline{O} = (x_0, y_0)$, a construção de uma reta tangente à uma parábola e a construção da reta diretriz e do foco uma vez fornecida a parábola.

Atividade XIII, adaptada [7] e [5]:
Objetivo: Fazer com que o aluno após habilitar o rastro, perceba a definição de lugar geométrico da parábola.
Material necessário: computador e o *software* Geogebra.
Tempo de atividade: 30 min.

1. Abra o Geogebra;
2. Trace uma reta r definida, por dois pontos A e B;
3. Escolha um ponto C, não pertencente à reta r;
4. Escolha um ponto D pertencente à reta r;
5. Trace uma reta s, perpendicular à reta r, pelo ponto D;
6. Trace a reta mediatriz referente ao segmento $\overline{CD}$;
7. Determine o ponto E, de interseção da reta s, com a reta mediatriz;
8. Construa um triângulo através da ferramenta polígono, interligando os pontos C, D e E.

Responda:

1. O que podemos afirmar sobre o triângulo CDE?
2. O que podemos afirmar sobre os lados $\overline{CE}$ e $\overline{DE}$?

3. Mova o ponto D sobre a reta r. O triângulo CDE mudou? O que podemos afirmar sobre ele?

4. O que podemos afirmar sobre a distância do ponto E ao ponto C e ao ponto D?

5. Habilite o rastro no ponto E e mova o ponto D sobre a reta r. Qual a figura formada?

6. Como poderíamos definir a figura formada, baseando-se nos questionamentos anteriores?

Definição: Seja uma reta d e um ponto F do plano não pertencente à reta d. O lugar geométrico dos pontos P equidistantes ao ponto F e à reta d é denominado de *parábola*. Logo, temos de acordo com uma adaptação [7] e [4] que:

$$\boxed{\mathscr{P} = \{P/d(P,F) = d(P,d)\}}$$

Terminologia[7] e [4]:

- Ao considerarmos o ponto F, como o foco da parábola $\mathscr{P}$ e a reta d como a reta diretriz da mesma, iremos tomar que a distância do foco à reta será p, $d(F,d) = p$, tal medida será denominada de parâmetro da parábola;

- Denominaremos reta focal a reta f perpendicular à reta diretriz que contenha o foco;

- Tomemos como A o ponto de interseção da reta focal com a reta diretriz;

- O ponto médio do segmento $\overline{AF}$ será o ponto V o qual iremos denominá-lo de vértice da parábola.

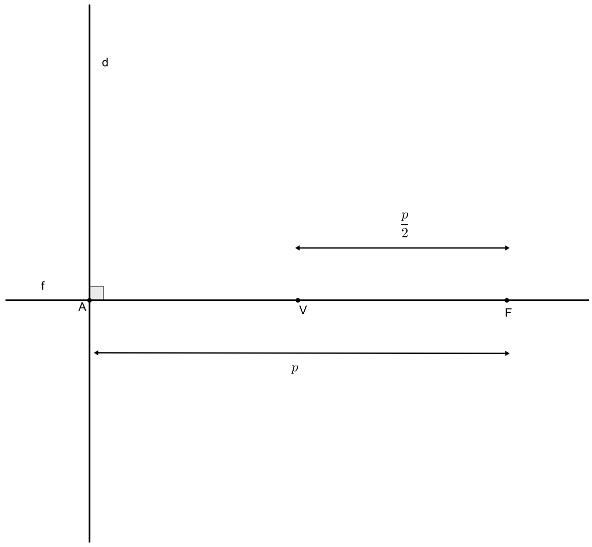

Figura 5.1: Retas da parábola

5.1 FORMA CANÔNICA DA PARÁBOLA

Seja uma parábola $\mathscr{P}$, com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX e, considerando o foco à direita da reta diretriz d. Então teremos:

Vértice: $V(0,0)$;

Foco: $F(\frac{p}{2},0)$;

Reta diretriz d: $x = -\frac{p}{2}$.

Caso considerássemos o foco à esquerda da reta diretriz d, então:

Vértice: $V(0,0)$;

Foco: $F(-\frac{p}{2},0)$;

Reta diretriz d: $x = \frac{p}{2}$.

Ainda, teríamos mais dois casos a considerar, quando a reta focal é coincidente com o eixo OY. Então teríamos: que considerar:

- O foco acima da reta diretriz d, logo:

Vértice: $V(0,0)$;

Foco: $F(0,\frac{p}{2})$;

Reta diretriz d: $y = -\frac{p}{2}$.

- Ou considerar o foco abaixo da reta diretriz d, então:

Vértice: $V(0,0)$;

Foco: $F(0, -\frac{p}{2})$;

Reta diretriz d: $y = \frac{p}{2}$.

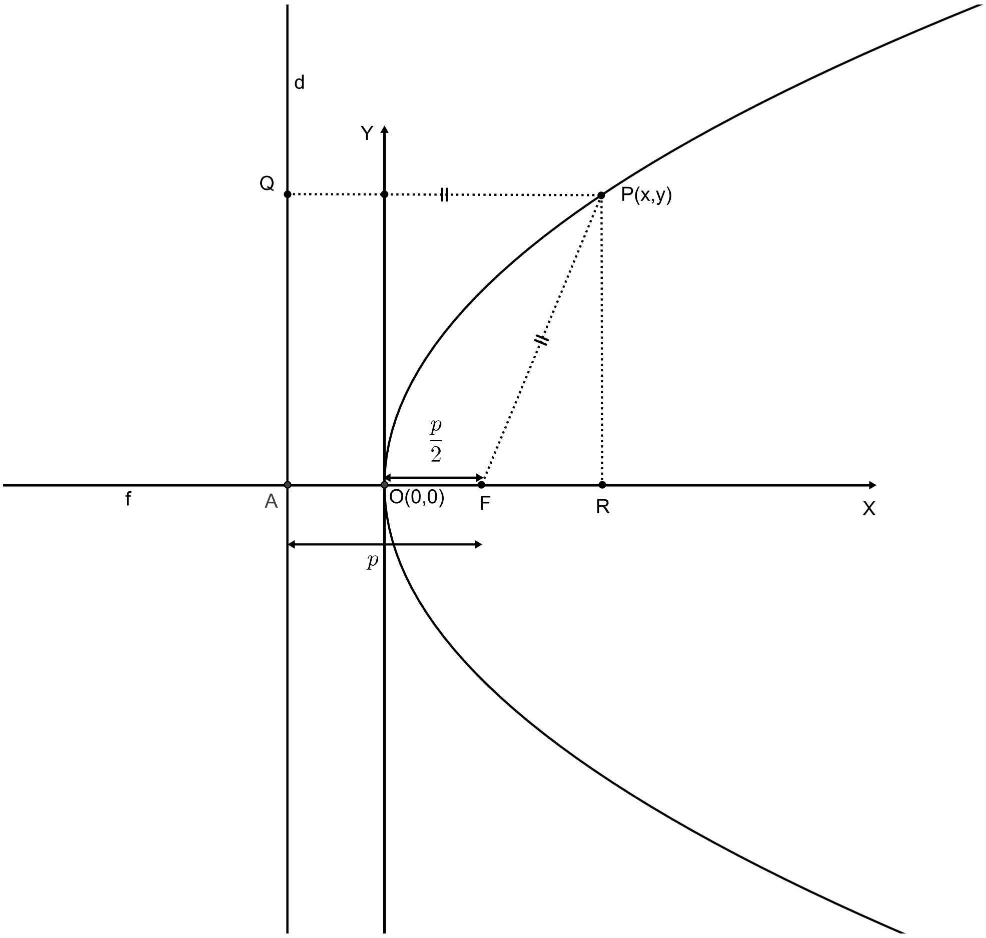

Figura 5.2: Parábola e as suas coordenadas

$$\overline{PQ} = \overline{AF} + \overline{FR}$$
$$\overline{AF} + \overline{FR} = x + \frac{p}{2}$$

$$\overline{PQ} = \overline{PF} \text{ (por definição)}$$

$$\overline{PF}^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = y^2 + \left(x-\frac{p}{2}\right)^2$$

$$2px = y^2 \Rightarrow \boxed{y^2 = 2px}$$

Para o caso do foco encontrar-se à esquerda da reta diretriz, $F(-\frac{p}{2},0)$, ao seguirmos os mesmos passos anteriores, iremos encontrar:

$$\boxed{y^2 = -2px}$$

Ainda teremos mais dois casos, quando a parábola $\mathscr{P}$, com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo Oy, deveremos considerar o foco acima da reta diretriz d, então teremos:

$$\boxed{x^2 = 2py}$$

E quando o foco estiver abaixo da reta diretriz d, então:

$$\boxed{x^2 = -2py}$$

Atividade XIV:
Objetivo: Fazer com que o aluno perceba a simetria da parábola.
Material necessário: computador e o *software* Geogebra.
Tempo de atividade: 15 min.
Atividade para o aluno :

- Abra o Geogebra;
- No campo de entrada digite: $y^2 = x$
- Marque um ponto qualquer sobre a parábola que não pertença aos eixos coordenados;
- Marque outro ponto. Agora pelo campo de entrada, usando o valor da abscissa do primeiro e o simétrico de sua ordenada;
- Marque outro ponto, pelo campo de entrada, usando o valor do simétrico da abscissa do primeiro e o valor de sua ordenada;
- Marque outro ponto, pelo campo de entrada, usando os valores simétricos das coordenadas do primeiro ponto, porém com suas posições invertidas.

- Repita os passos anteriores, porém para a parábola $x^2 = y$;

Responda:

1. Que conclusão podemos tirar em relação à atividade anterior?

5.2 SIMETRIA DA PARÁBOLA

Para qualquer ponto $P(x,y)$ de uma parábola, teremos seu simétrico também pertencente à parábola porém, somente em relação à sua reta focal.

Atividade XV:
Objetivo: Fazer com que o aluno relacione o deslocamento do vértice pelas coordenadas, por ele atribuídas, bem como a inversão da concavidade, através de uma generalização da fórmula.
Material necessário: computador e o *software* Geogebra.
Tempo de atividade: 30 min.

- Abra o Geogebra e tenha a certeza de que a malha esteja sendo exibida;
- Clique sobre o botão deslizante para lançar o valor p;
- No campo de entrada, digite: $y^2 = 2px$;
- Mova o cursor de p, tanto para a esquerda, quanto para a direita;
- Clique na janela de álgebra e mude a fórmula da parábola para $x^2 = 2px$;
- Mova novamente o cursor de p, tanto para a esquerda, quanto para a direita;

Responda:

1. O que aconteceu com a parábola quando movemos o cursor p para valores positivos e negativos em relação ao eixo focal?
2. O que aconteceu com a parábola quando movemos o cursor b para valores próximos de zero, tanto a direita quanto à esquerda?

Continuando a atividade anterior:

- Agora, lance novamente, no controle, deslizante os valores a e b;
- Redigite a equação da parábola para: $(y-a)^2 = 2p(x-b)$, afim de facilitar a visualização. Com o botão direito do mouse sobre os botões deslizantes, vá em propriedades e coloque: mín=-10, máx=10 e incremento=1;
- Coloque os valores para os parâmetros $a = b = p = 1$;
- Marque o ponto $P(1,1)$ sobre a parábola. Observe que ele é o vértice da parábola (para visualizar melhor, basta colocar os parâmetros a e b iguais a zero);

Responda:

1. Arraste o deslizante de a, para valores positivos e negativos, sempre olhando para o vértice da parábola. O que aconteceu? Qual a relação da fórmula com o vértice da parábola?
2. Arraste o deslizante de b, para valores positivos e negativos, sempre olhando para o vértice da parábola. O que aconteceu? Qual a relação da fórmula com o vértice da parábola?
3. Que conclusão podemos obter, da relação da fórmula, quanto ao seu vértice e sua posição?
4. Responda as perguntas anteriores, redigitando a equação da parábola para: $(x-a)^2 = 2p(y-b)$;

5.3 PARÁBOLA COM CENTRO $\overline{O} = (x_0, y_0)$

Temos uma parábola de vértice deslocado da origem quando ela é transladada dos eixos coordenados, podendo ser tratado em dois casos, ou a reta focal paralela ao eixo OX ou com o eixo focal paralelo ao eixo OY. Devido à similaridade dos casos, iremos abordar apenas o primeiro caso, através de uma adaptação [7] e [4].

Consideremos uma parábola de centro $\overline{O} = (x_0, y_0)$, com eixo focal paralelo ao eixo OX e, foco à direita da reta diretriz, conforme figura que se segue.

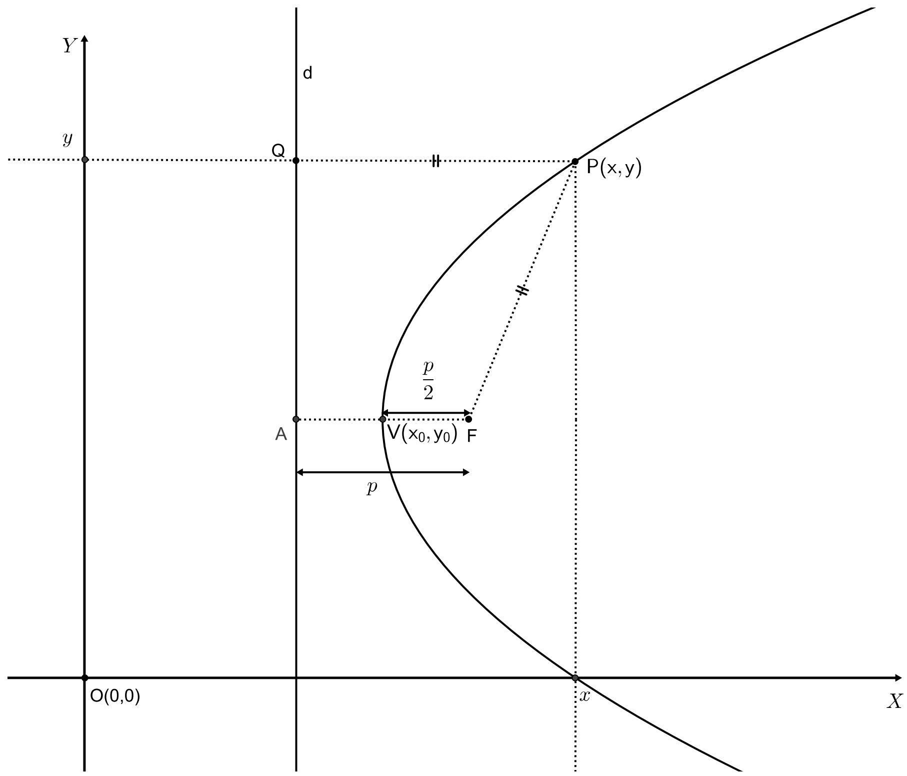

Figura 5.3: Parábola com centro $\overline{O} = (x_0, y_0)$ e eixo focal paralelo ao eixo OX

Consideremos um novo sistema de coordenadas $\overline{O}\ \overline{X}\ \overline{Y}$, de tal modo que, o vértice $\overline{O}$ da parábola esteja na origem desse novo sistema. O vértice da parábola seria $\overline{O} = (x_0, y_0)$. Observemos que o ponto $P = (x, y)$ da parábola no sistema de de coordenadas OXY, passará a ter coordenadas $P = (\overline{x}, \overline{y})$, conforme a figura a seguir:

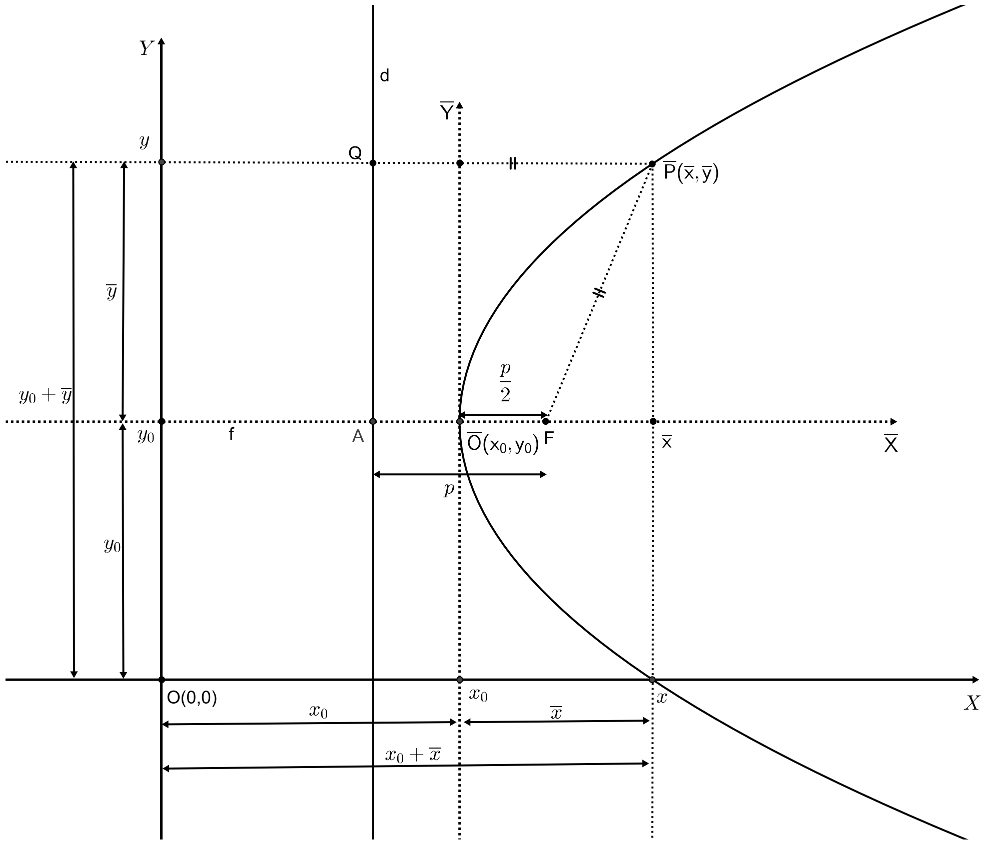

Figura 5.4: Parábola no novo sistema de coordenadas $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$

Então, teríamos a seguinte relação, $x = \overline{x} + x_0$ e $y = \overline{y} + y_0$. E a equação da parábola, no sistema de coordenadas $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ é:

$$\overline{y}^2 = 2p\overline{x}$$

Usando a relação anterior para voltarmos ao sistema de coordanadas OXY, a equação da parábola será:

$$(y - y_0)^2 = 2p\,(x - x_0)$$

Para o caso do foco encontrar-se à esquerda da reta diretriz, ao seguirmos os mesmos passos anteriores, iremos encontrar

$$(y - y_0)^2 = -2p\,(x - x_0)$$

Ainda teremos mais dois casos, quando a parábola $\mathscr{P}$, com reta focal coincidente com o eixo OY e vértice transladado, deveremos considerar o foco acima da reta diretriz d, então teremos:

$$(x-x_0)^2 = 2p\,(y-y_0)$$

E quando o foco estiver abaixo da reta diretriz d, teremos:

$$(x-x_0)^2 = -2p\,(y-y_0)$$

Atividade XVI:
Objetivos: Fazer com que o aluno perceba a relação da concavidade da parábola em relação ao lado em que se posiciona à reta diretriz, bem como a abertura da parábola em relação à sua proximidade com a reta diretriz
Material necessário: computador e o *software* Geogebra.
Tempo de atividade: 30 min.

1. Abra o Geogebra;
2. Trace uma reta r, definida por dois pontos A e B, paralela ao eixo OX;
3. Escolha um ponto C, não pertencente à reta r;
4. Escolha um ponto D, pertencente à reta r;
5. Construa uma parábola através da ferramenta, definindo o ponto C, como foco e a reta r, como a reta diretriz;

Responda:

1. Aproxime e afaste o ponto C da reta diretriz. Como você descreveria o comportamento da parábola?
2. Caso você tenha colocado o ponto C acima da reta diretiz, desloque-o até que o mesmo encontre-se abaixo da reta, ou caso tenha construído com o ponto abaixo, faça o contrário. O que aconteceu com a parábola quando o ponto referente ao foco mudou de lado, em relação à reta diretriz?

Atividade XVII:
Objetivos: Fazer com que o aluno saiba construir uma reta tangente à uma parábola por um ponto qualquer e, compreenda os argumentos matemáticos da construção.
Material necessário: computador e o *software* Geogebra.
Tempo de atividade: 30 min.

1. Trace um reta s perpendicular à reta r, pelo ponto D;
2. Determine o ponto E de interseção da reta s com a parábola;
3. Construa um triângulo, através da ferramenta polígono interligando os pontos C, D e E.
4. Oculte a reta s para termos uma visualização melhor;
5. Trace a reta mediatriz referente ao segmento $\overline{CD}$;

Responda:

1. O que podemos afirmar sobre os segmentos $\overline{CE}$ e $\overline{DE}$? Que argumentação matemática pode sustentar nossa afirmação?
2. Mova o ponto D sobre a reta r, como você descreveria o comportamento da reta mediatriz?
3. O que a visualização nos leva, intuitivamente a concluir sobre a reta mediatriz em relação à parábola?

5.4 CONSTRUINDO UMA RETA TANGENTE À UMA PARÁBOLA

Baseado no artigo [12], uma vez construída uma parábola, temos que esta divide o plano em duas regiões: uma, onde cada ponto tem a distância ao foco menor que sua distância à reta diretriz e outra, onde a distância de cada ponto ao foco é maior que a distância à reta diretriz, ou seja, ponto interior ou exterior à curva respectivamente. Através de sua reta diretriz, tomemos um ponto Q qualquer, da reta diretriz, e tracemos por ele, uma reta perpendicular, até interceptar a parábola, obtendo um ponto P. Através de seu foco F, ao construirmos o triângulo FPQ, sabemos que ele é isósceles, pois $\overline{FP} = \overline{PQ}$ pela própria definição. A reta mediatriz r do segmento $\overline{FQ}$ é também a altura do triângulo. Tomemos um outro ponto R qualquer, distinto de P, da mediatriz r, interno ao triângulo, conforme a figura que se segue:

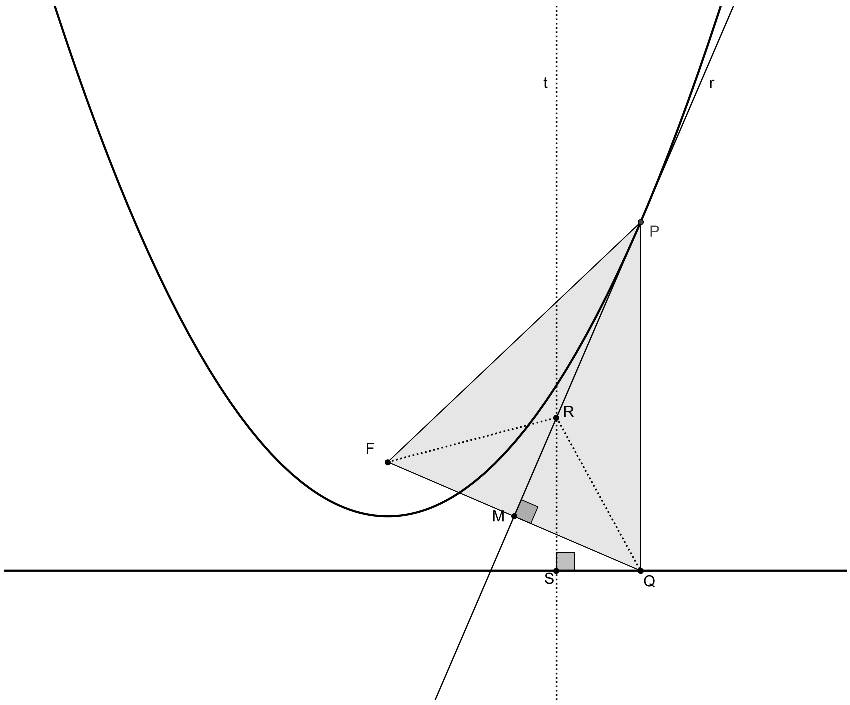

Figura 5.5: Parábola e a sua tangente ao ponto P

Se S é o pé da perpendicular à reta perpendicular t que passa por R, temos que $\widehat{RQS} < \widehat{RSQ}$, logo temos que, $\overline{FR} = \overline{RQ} > \overline{RS}$, ou seja o ponto R é exterior à parábola. Assim, concluímos que a reta mediatriz r é tangente à parábola em P.

Atividade XVIII adaptada [8]:

Objetivo: Fazer com que o aluno saiba construir o eixo focal, vértice, foco e a reta diretriz de uma parábola qualquer, utilizando conceitos geométricos, para justificar a construção.

Material necessário: computador e o *software* Geogebra.

Tempo de atividade: 45 min.

1. Abra o Geogebra;

2. Desabilite a malha e os eixos da tela;

3. Digite no campo de entrada $y^2 = 4x$;

4. Trace uma corda qualquer $\overline{AB}$ de maneira que esta intersecte a reta focal, lembre-se que ela não é visível;

5. Trace uma corda qualquer $\overline{CD}$ paralela a primeira;
6. Através dos pontos médios das duas cordas, trace uma reta r;
7. Trace uma reta s perpendicular à reta r e, determine os pontos de E e F de interseção com a parábola;
8. Determine o ponto médio do segmento $\overline{EF}$;
9. Trace a reta t paralela à reta r, passando pelo ponto médio do segmento $\overline{EF}$;
10. Determine o ponto V, de interseção da reta t, com a parábola;
11. Escolha um ponto G qualquer sobre a parábola;
12. Usando a ferramenta reta tangente, determine a reta tangente à parábola em G;
13. Determine o ponto H de interseção da reta tangente, com a reta t;
14. Trace uma reta u, paralela à t, em G;
15. Trace uma circunferência de centro em G e raio qualquer, de maneira que o vértice da parábola seja externo a ela;
16. Determine o ponto H de interseção da circunferência com a reta u, mais próximo do vértice da parábola;
17. Trace uma reta perpendicular à reta tangente em H;
18. Determine o ponto I de interseção, da reta perpendicular à reta tangente, com a circunferência;
19. Trace a reta v que contenha os pontos I e G;
20. Determine o ponto J, de interseção da reta v, com a reta t;
21. Trace uma circunferência de centro em V e raio $\overline{VJ}$;
22. Determine o ponto L de interseção, anterior, com a reta t;
23. Trace uma reta m perpendicular à reta t em L.

Responda:

1. Você consegue identificar os elementos da parábola na construção?

2. Explique, matematicamente, quais os passos da construção que garantem a reta focal.

3. Explique, matematicamente, quais os passos da construção que contribuíram para determinar o foco;

4. Explique matematicamente quais os passos da construção que garantiram a construção da reta diretriz.

5. Que construções geométricas poderiam ser feitas, para averiguar a exatidão da construção dos elementos da parábola?

CONCLUSÃO

Verifica-se que a abordagem do esboço das cônicas, atualmente, é confundida com o gráfico de funções, o que dificulta a percepção de lugar geométrico. Ao longo de mais de quinze anos atuando em sala de aula, em escolas públicas, percebo uma enorme dificuldade do aluno em assimilar que algumas cônicas possam ter o eixo focal paralelo ao eixo OX, como a parábola. Isso decorre da sua associação com o gráfico de uma função.

Diante desses aspectos, esta dissertação propõe-se, de modo geral, à seguinte contribuição: o resgate da definição das cônicas pelo definição de lugar geométrico, obtido pelo próprio aluno em sua construção geométrica, assim como algumas de suas propriedades.

A utilização do *software* de geometria dinâmica vem de encontro à idéia de criar um ambiente mais receptivo ao aluno em sala de aula, uma vez que esta geração encontra-se muito familiarizada com computadores e a tecnologia desperta-lhe sempre maior curiosidade; além de ser um agente facilitador da aprendizagem. Durante as construções geométricas propostas neste trabalho serão utilizados alguns conceitos da geometria euclidiana, abordados do ensino fundamental ao segundo ano do ensino médio, de maneira que esse conteúdo não pareça totalmente desconectado dos demais assuntos focalizados nas etapas anteriores.

Os questionários das atividades após as construções geométricas pretendem conduzir o aluno a um raciocínio matemático que se mostrará eficiente para a compreensão e assimilação dos conceitos teóricos e das demonstrações apresentadas após as atividades, pois os alunos já possuíram uma idéia formada pela própria observação da construção geométrica do objeto em questão.

Não é pretensão do trabalho propor um roteiro rígido de abordagem das cônicas, nem restringir o conteúdo ao que será apresentado aqui, mas permitir que a partir dessas atividades, o professor possa criar muitas outras intervenções pedagógicas de modo a encorajar seus alunos à participação nas aulas bem como a ajudá-los a desenvolver uma autonomia na busca de novos conhecimentos.

Finalmente, convém mencionar que a leitura deste trabalho é de fácil compreensão, porque centraliza-se no desenvolvimento dos alunos do ensino médio. Espera-se, pois, que possa servir de sugestão para que se elaborem aulas ou atividades tanto por iniciativa de professores quanto de graduandos.

REFERÊNCIAS

[1] BORDALLO, M. As Cônicas na Matemática Escolar Brasileira: História, Presente e Futuro. *Dissertação* Rio de Janeiro: UFRJ, dissertação de mestrado, 2011. e [4]

[2] BOYER, C.B. História da Matemática. *Hist. Matemática* São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda. 8ª Reimpressão, 1989.

[3] EVES, H. História da Geometria; tradução Hygino H. Domingues, Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. *Hist. Geometria* São Paulo: Atual Editora, 1992.

[4] FRENSEL, K.; DELGADO, J. Geometria Analítica. *Matemática* Maranhão: UFMA, 2011.

[5] GIRALDO, V.; PINTO MATOS, F. R.; SILVANI CAETANO, P. A. Recursos Computacionais no Ensino de Matemática. *Coleção Profmat* Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[6] LOPES, J.F. Cônicas e Aplicações. *Dissertação* São Paulo: Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", dissertação de mestrado, 2011.

[7] MA23-Geometria Analítica. *Coleção Profmat* Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[8] MELO E CUNHA, G.N. Curso de Desenho Geométrico e Elementar. *Desenho Geométrico* Rio de Janeiro: Editora Paulo de Azevedo Ltda, 4ª Edição, 1951.

[9] NETO, F.Q. Tradução Comentada da Obra "Novos Elementos das Seções Cônicas" (Philippe de La Hire - 1679) e sua Relevância para o Ensino de Matemática. *Dissertação* Rio de Janeiro: UFRJ, dissertação de mestrado, 2008.

[10] ROQUE, T. M.; PITOMBEIRA, J. B. Tópicos de História da Matemática. *Coleção Profmat* Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[11] SANT'ANNA, F. M.; ENRICONE, D.; ANDRÉ, L. C.; TURRA, C. M. G. Planejamento de Ensino e Avaliação. *Educação* Porto Alegre: SAGRA-DC LUZZATTO Editores, 11ª Edição, pg. 157 e 158, 1995.

[12] SATO, J. As cônicas e suas aplicações. Retas tangentes à uma cônica. *artigo* Uberlândia: UFU, 2005.Disponível em: http://www.sato.prof.ufu.br/Conicas/node15.html. Acesso em 12 de jan. 2013.

[13] SILVA, G. S. Por que elipse, parábola e hipérbole? *Matemática* São Paulo: Revista do Professor de Matemática, n. 7, pg. 43 e 44, 1985.

[14] SONNET; FRONTERA. Géométrie Analytique a Deux Dimenions. *Matemática* France: Imp. Paul BRODRARD.

[15] WAGNER, E. Sobre o ensino e Geometria Analítica. *Educação* São Paulo: Revista do Professor de Matemática, n. 41, pg. 17 e 18, 1999.

[16] WAGNER, E.; ARAÚJO MOREIRA, C. G. T. 10 Olimpíadas Iberoamericanas de Matemica, *Matemática* Madrid: FOTOJAE, S.A. 1996.

[17] VALLADARES, R.J.C. Elipse, sorrisos e sussurros. *Matemática Educação* São Paulo: Revista do Professor de Matemática, n. 36, pg. 24 à 28, 1998.