PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

Lynk dos Santos Cardia

UMA ABORDAGEM DO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL

Rio de Janeiro

2014

Lynk dos Santos Cardia

UMA ABORDAGEM DO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL:

A OTIMIZAÇÃO DE EMBALAGENS COMO CONTEXTUALIZAÇÃO DO CONCEITO DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS E VOLUMES DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado profissional em Matemática, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática junto ao programa PROFMAT-Sociedade Brasileira de Matemática/ Instituto de Matemática Pura e Aplicada sob a orientação do Professor Doutor Moacyr A.H.B da Silva

Rio de Janeiro, 28 de Novembro de 2014

Lynk dos Santos Cardia

UMA ABORDAGEM DO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL:

O USO DA OTIMIZAÇÃO DE EMBALAGENS COMO CONTEXTUALIZAÇÃO DO CONCEITO DE ARÉAS DE FIGURAS PLANAS E VOLUMES DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado profissional em Matemática, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática junto ao programa PROFMAT-Sociedade Brasileira de Matemática/ Instituto de Matemática Pura e Aplicada sob a orientação do Professor Doutor Moacyr Alvim Horta Barbosa da Silva

Aprovada em ____/____/____.

Banca Examinadora:

____

Orientador: Prof. Doutor Eduardo Moacyr Alvim Horta Barbosa da Silva - FGV

____

Prof. Mestre Eduardo Wagner - FGV

____

Prof. Doutor Paulo Cezar Pinto Carvalho – IMPA/FGV

Rio de Janeiro.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais, Maria Aparecida dos Santos Cardia e Ulysses Soares Cardia, que me proporcionaram a educação e me deram a direção a seguir, construindo e auxiliando minha formação pessoal.

Aos meus irmãos, que sempre me deram a força e a inspiração necessária para seguir em frente.

Ao meu amigo e colega de profissão, Cléber Fernandes, que me indicou o IMPA como referência acadêmica e sempre colaborou para o meu crescimento como professor e educador, acreditando no meu trabalho e no meu potencial. Sem dúvidas é uma inspiração e exemplo a ser seguido como profissional de educação. Sem ele, eu não teria chegado até aqui.

Aos meus alunos, que durante esses anos de magistério, me ensinaram muito mais do que aprenderam.

AGRADECIMENTOS

Ao orientador Professor Moacyr pela orientação, sugestões e esclarecimentos.

Ao Professores Eduardo Wagner, Elon Lages Lima e Paulo Cezar P. Carvalho e ao Monitor de Geometria do IMPA, Marcos Paulo, pelas incríveis aulas ministradas no IMPA.

Ao Professor Ronaldo Quintanilha, que me inspirou ainda no Ensino Médio, a me tornar professor de Matemática.

A todos os colegas e parceiros do curso. Em especial, a Gabriella Marques, pelo auxílio nos estudos durante o mestrado e apoio na revisão deste trabalho.

Ao amigo Kael Linkastro, pelo apoio, revisão e discussão da parte histórica deste trabalho.

À direção e coordenação do Colégio Guido de Fontgalland, que ao longo desses anos me propiciaram apoio e oportunidade para o desenvolvimento do meu trabalho.

Aos meus orientadores na Escola Parque, Daniel Bahiense, Luiza Saldanha e Adriana Nóbrega, com organização, paciência e competência, me mostraram uma outra visão da educação e da forma de ensinar.

A Deus, pela minha existência e por transformar meu sonho em realidade.

Muito obrigado.

RESUMO

Este projeto de pesquisa bibliográfica e de campo analisa metodologias utilizadas no ensino de geometria espacial e apresenta uma proposta ancorada no uso de material concreto, aplicada a alunos da 2ª série do Ensino Médio, objetivando a melhoria de seus conhecimentos a respeito dessa área da matemática. A proposta consiste na avaliação de características geométricas de embalagens de produtos encontrados no cotidiano dos alunos, com vistas à elaboração de novas embalagens, mais funcionais, empregando, para isso, elementos de geometria plana e espacial, como cálculo de volumes e de áreas de superfície.

Palavras-chave: Geometria Espacial; métodos de ensino; material concreto; embalagens; proposta de ensino.

ABSTRACT

This bibliographical and field research project analyses spatial geometry teaching methods and presents a proposal, for second grade high school students, based on the usage of concrete material. The proposal aims at improving the students' knowledge of geometry by means of requiring them to apply concepts, such as volume and surface area, in remodeling packages of daily-life products so as to increase their functionality.

Keywords: Space geometry; teaching methods; concrete material; packaging; teaching proposal.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática sempre foi vista pela sociedade como sendo a disciplina mais difícil do currículo escolar, para alguns, desinteressante e, para outros sem sentido e sem importância. A dificuldade aumenta quando se trata da Geometria em terceira dimensão. Em muitas salas de aula utiliza-se somente o quadro como recurso de ensino, fazendo representações bidimensionais de figuras tridimensionais, o que reduz a visão espacial dos sólidos geométricos, dificultando a identificação dos seus elementos, impedindo, até mesmo, que os alunos relacionem as figuras representadas a objetos reais. Assim, os educandos recebem conceitos engessados e são praticamente obrigados a decorar fórmulas e definições, não sendo capazes de desenvolver seu raciocínio lógico dedutivo.

Em virtude da argumentação feita anteriormente, considera-se que o objetivo desse trabalho é sugerir uma nova abordagem para o educador matemático para o ensino da Geometria espacial , fundamentada na concepção construtivista, propondo a análise e construção de embalagens, usando preferencialmente sólidos e suas partes estudadas nas aulas de geometria e aulas interativas, permitindo que os estudantes tenham uma visão concreta dos objetos, identificando seus elementos, construindo seu conhecimento. Espera-se que ao final do trabalho o educando seja capaz de: compreender e perceber as formas geométricas planas e espaciais como parte integrante do seu cotidiano; desenvolver visão espacial e habilidade no trato com sólidos geométricos, através de sua identificação às suas respectivas planificações; identificar as figuras geométricas que compõe as faces dos sólidos, as arestas, vértices e calcular as áreas: lateral e total, e volume bem como suas relações com a prática do custo benefício. Fomentar as relações dentro da própria Matemática e com outras áreas do conhecimento, o modo de como a proposta está estruturada (problematização, planejamento, execução, depuração e apresentação) permitindo que se desenvolvam várias competências e habilidades sugeridas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais do MEC; Desenvolver atitudes de autonomia e cooperação; Desenvolver a capacidade de expressar-se oral, escrita e graficamente em situações do dia a dia; Utilizar ferramentas matemáticas que lhe permita expressar-se criticamente; Refletir sobre a estrutura da proposta.

As situações "cotidianas" obrigam o indivíduo a usar dessa ferramenta que é a matemática (o desenvolvimento dos meios de comunicação, tecnologias e do conhecimento científico), mas, ele não percebe que a utiliza e acaba passando despercebida durante toda sua vida. É de suma importância que a presença do conhecimento matemático seja inferida, e claro, analisada e aplicada às inúmeras situações que rodeiam o mundo, visto que a matemática desenvolve o raciocínio e possibilita criatividade e o engajamento de ideias, o que traduz uma sensação de liberdade, fatores estes que estão diretamente ligados a sociedade.

Portanto, ela auxilia e propicia interdisciplinaridade com outras áreas do conhecimento (filosofia, sociologia, literatura, música, arte, política).

No momento em que o educador adota a metodologia interacionista construtivista para o ensino da Geometria Espacial, construindo material concreto e debatendo os possíveis resultados com os alunos, o aprendizado se torna significativo, pois o educando terá participação direta na construção de seu conhecimento. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do MEC,

> "Para tal, o ensino de Matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios."(MEC/SEF, 1997, p.31)."

Esta dissertação constará de sete capítulos.

O primeiro capítulo – Introdução – faz uma breve apresentação do trabalho e as motivações para a realização do mesmo, destacando objetivos e as possíveis consequências da utilização das embalagens e dos materiais concretos para o ensino de geometria.

O segundo capítulo – A Geometria Espacial – Mostrará aspectos históricos da geometria espacial, bem como os aspectos históricos das embalagens. Mostramos também, a parte conceitual básica e algumas pequenas abordagens metodológicas dos principais sólidos espaciais estudados no segundo ano do ensino médio, para que possamos fundamentar os capítulos posteriores.

O terceiro capítulo – Proposta Metodológica – descreverá primeiramente os principais motivos para a aplicação do trabalho de campo e todas as etapas do desenvolvimento da problematização, destacando também o objetivo final do trabalho que foi sugerido aos alunos do segundo ano da Escola Parque durante o ano de 2013.

O quarto capítulo - Apresentação dos Resultados - Mostrará os diversos tipos de projetos e propagandas apresentados pelos alunos. Faremos também, uma análise crítica desses trabalhos, bem como a verificação da assimilação dos conteúdos através de atividades propostas, e a verificação da evolução desse aprendizado, através de gráficos estatísticos dos resultados dessas avaliações.

O quinto capítulo - A conclusão - As considerações finais da pesquisa, com reflexão sobre as metodologias de ensino de geometria e sugestões de novas propostas e abordagens utilizando materiais concretos.

O sexto capítulo – As referências – Neste capítulo temos todas as referências utilizadas no suporte deste trabalho.

O sétimo capítulo – Anexos - Neste capítulo temos o anexo correspondente as atividades propostas do capítulo 4.

2 A GEOMETRIA ESPACIAL

O surgimento da Geometria Espacial aparece ligado às situações ligadas ao cotidiano da época, como divisão de terras, construção de moradias e navios, cálculo de áreas de volumes e ideia de distância. Esta última acredita-se que foram as primeiras fundamentadas no estudo da geometria e suas práticas utilizadas até os dias atuais com bastante frequência e aplicabilidade.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCN - (Ensino Médio), temos que:

> (...) As habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca. (BRASIL, 1997, p.44)

Segundo Guimarães (1996), a construção do real permite ao indivíduo a construção do conhecimento. Portanto, a estruturação das embalagens e suas possíveis modificações pelos educandos, os levam a concepção da realidade, permitindo-os conhecer as particularidades e regularidades dos objetos em questão, aplicando a construção do conhecimento material, possibilitando que cheguem paulatinamente ao conhecimento lógico, no qual o educando começa a refletir sobre a realidade, relacionando seus elementos concretamente ou mentalmente.

Piaget apud Becker (2011), o conhecimento não nasce com o indivíduo, nem é produto do meio, o sujeito constrói seu conhecimento interagindo, tanto com o meio tanto físico como social, descartando, assim, a ideia de conceito dado, seja na bagagem hereditária, física e social. A construção depende, portanto, das condições do indivíduo e do ambiente social do qual faz parte.

Para Brasil (1977), antes de o educador dar início a um assunto, deve criar condições de assimilação para aquilo que se deseja ensinar. Esse processo é apresentado como estímulo. Além disso, ele afirma que para Piaget a Matemática é construtiva, pois seus instrumentos, geralmente, são construídos com base na intuição e no espírito inventivo e, somente, num segundo momento, são estruturados axiomaticamente. Cada etapa do aprendizado serve de pesquisa e compreensão, para o tópico seguinte.

Para Cunha (1973), desenvolvemos noções lógicas independentemente de ensino. A escola deve, portanto, estimular o senso crítico e enriquecer esse desenvolvimento, formando, assim, um indivíduo capaz de enfrentar diversidades, porque contam com uma experiência e raciocínio abertos a novas coordenações.

Cunha e Freire (1996) compatibilizam da ideia que, quando o educando é agente do seu próprio desenvolvimento, desenvolve-se um pensamento inquisitivo e científico. Basta ao educador impulsionar a capacidade crítica do aluno, assim como sua curiosidade e criatividade.

Contudo, Paulo Freire reforça a ideia de que ensinar não é transmitir conhecimento, mas criar possibilidades para a sua produção ou a sua construção.

Lorenzato (2008) enfatiza a ideia de que o experimentar é próprio da natureza humana. A escola permite o envolvimento com o assunto em estudo, a participação das descobertas e socialização com os colegas de classe. A manipulação de objetos instiga o raciocínio, reflexão e construção do conhecimento. Manipular é valorizar o processo de construção do saber em vez do resultado dele, pois, na formação do aprendiz, mais importante que conhecer a solução é saber encontrá-la. Sendo, assim, a manipulação é o melhor modo para se conseguir a aprendizagem com significado, uma vez que ele realça o porquê, valorizando a compreensão, além de possibilitar a integração com diferentes assuntos, a redescoberta, a aprendizagem de diferentes estratégias de resolução de problemas e verificação de conjecturas e resultados. Para ele a descoberta é fundamental no ensino da Matemática, pois quando o aluno consegue fazer suas próprias descobertas, surge o gosto pela aprendizagem. Conclui que a descoberta é o caminho mais eficiente para a aprendizagem, porque possibilita a reconstrução do conhecimento, quando necessário, porque valoriza a compreensão.

Lorenzato (1995) justifica, ainda, a necessidade do ensino da Geometria, uma vez que, o indivíduo nunca poderia desenvolver o pensar geométrico, raciocínio visual e resolução de problemas geometrizados, sem esse ramo da Matemática.

2.1 ASPECTOS HISTÓRICOS

O ensino da geometria é de extrema importância, uma vez que, ao desenvolver habilidades relacionadas a este campo da matemática, o cidadão também desenvolve uma visão acerca do mundo necessária para compreensão e resolução de problemas que surgem no dia-a-dia. A geometria faz com que a matemática se torne mais completa e, ao haver um diálogo entre os conceitos dentro da matemática, se torna mais fácil de entender.

Acredita-se que a origem da História da Matemática tenha grande parte, se perdido com o decorrer dos milênios. Consequentemente, as informações pré-históricas são interpretadas com base nos poucos artefatos que restaram, segundo evidências fornecidas pela Antropologia, decorrentes da análise de documentos que remanesceram, segundo Boyer (1999).

Desde os primórdios da história da humanidade o homem necessita de abrigo e utensílios básicos como ferramentas de sobrevivência, pode-se citar, portanto, a moradia do povo Egípcio às margens do Rio Nilo, construídas pelos egípcios, que até então, não possuíam conhecimento acerca da Matemática, como ciência. Posteriormente, foram construídas as pirâmides no deserto do Egito, que são sólidos geométricos formados por triângulos isósceles compondo as faces laterais e uma base quadrangular.

Figura 1 - Pirâmides do Egito

A Geometria como ramo da Matemática surgiu enquanto atividade empírica dos povos antigos para atender as suas necessidades da época. Há indícios de que a Geometria tenha surgido no Egito, onde a população se concentrava em uma estreita faixa de terras férteis às margens do rio Nilo, na qual a atividade predominante era a agricultura.

O transbordamento anual do Rio Nilo deixava em suas margens um rico limo que adubava essas terras. Os Sacerdotes egípcios relataram a Heródoto que o rei Sesórtris, dividia igualmente essas terras entre todos os egípcios agricultores, que pagavam um tributo anual com base nessa repartição. Com as inundações do Rio Nilo parte desses lotes perdiam suas demarcações, o que levou os egípcios a criarem um método para remarcar essas terras. O rei então criou uma unidade de medida – o côvado - que era a distância da ponta de seu dedo médio ao cotovelo, essa medida era reproduzida em cordas e marcadas com nós. Os agrimensores, homens de confiança do rei, ficaram encarregados de cumprir essa atividade ficando conhecidos como estiradores de cordas, que iam até o local para refazer as delimitações das áreas de cultivo de cada agricultor. Tal atividade tornou os Egípcios hábeis delimitadores de terras, quando foram descobrindo, então, inúmeros princípios úteis relativos as características de linhas, ângulos e figuras.

Os primeiros conhecimentos geométricos foram elaborados a partir da necessidade do homem em compreender melhor o meio onde ele se encontrava. Registros históricos mostram que os egípcios e os Babilônicos tinham uma visão pragmática, o que fez com que eles através da observação e experimentação obtivessem resultados geométricos através do raciocínio indutivo. Conheciam casos particulares de áreas e até mesmo o teorema de Pitágoras, mas esse conhecimento ficava restrito somente para atender as suas necessidades práticas e não como ciência.

Os egípcios se limitavam a acumulação de conhecimentos que os habilitavam a resolver os problemas cotidianos, como traçados de limites, de comparação de áreas, de projetos arquitetônicos e engenharia de construções, dentre outros.

A Matemática deixa de ser vista como conhecimento empírico e passa a ser encarada com ciência à partir dos séculos VI e V a.C., na Grécia, por Tales de Mileto (624 - 548 a.C.), que em suas viagens extraiu informações sobre Geometria e Astronomia dos centros de conhecimento no Egito, transformando-as em uma teoria dedutiva, tornando-a uma ciência, sem preocupações com aplicações práticas, tendo um interesse teórico, desejando compreender a matéria por ela mesma, procurando demonstrações dedutivas e rigorosas das leis acerca do espaço, que governam aplicações práticas da Geometria. Diógenes Laércio, seguidos por Plínio e Plutarco, relatam que Tales mediu a altura das pirâmides do Egito, utilizando suas sombras, medindo o comprimento da projeção das pirâmides no chão, no mesmo momento em que a projeção de uma estaca na vertical era igual a sua altura.

Essa sistematização da Geometria é seguida por Pitágoras de Samos (570 – 500 a. C), que fundou em Crotona uma sociedade secreta, com fins religiosos e filosóficos, chamando-a de Pitagóricos, os quais deram uma nova ênfase aos elementos da Aritmética e Geometria utilizada no Egito e na Mesopotâmia. Não há relatos de produção matemática dos Pitagóricos, qualquer descoberta era atribuída a todos os membros da seita.

A Matemática Grega sofre grandes modificações, aproximadamente, 400 a.C, quando Platão se interessou pela Matemática, em especial pela Geometria, na qual evidenciou a necessidade de demonstrações rigorosas dedutivas sem verificação experimental. Fundou sua academia em Atenas, onde guiava e inspirava o desenvolvimento da atividade Matemática, ficando conhecido como "O criador de Matemáticos".

Boyer relata que talvez tenha sido na Sicília 388 a.C. que Platão soube dos cinco sólidos regulares, que eram associados a elementos cósmicos e que a veneração dos Pitagóricos pelo dodecaedro regular tenha sido o que levou Platão a considerá-lo último e quinto sólido, como um símbolo do universo.

Em 323 a.C. Alexandre, o Grande, morreu, desfazendo-se assim seu império Helenístico, gerando uma grande mudança política e cultural na Grécia, o que não fez com que Atenas deixasse de ser o centro do mundo Matemático. Com sua morte o controle do império de Alexandria estava nas mãos de Ptolomeu I, que voltou sua atenção para esforços construtivos, criando uma escola na qual Euclides, foi chamado para ensinar Matemática, que deu continuidade ao ensino da Geometria como ciência dedutiva, ou seja, toda a afirmação deve ser deduzida logicamente de outras afirmações mais simples e assim sucessivamente. Ele se utilizou de postulados, cujas afirmações, pelas suas simplicidades, deveriam ser aceitas por pessoas de bom senso e que eram, em um certo sentido, evidentes por si mesmas. Formulou leis de modo a torná-las rigorosas e absolutas, demonstrando suas leis geométricas. A obra de Euclides mais antiga e importante é, - "Os Elementos", cujo texto é o mais influente de todos os tempos, e chegou até nós. A introdução cobria toda a Matemática elementar – Aritmética. Esta obra está dividida em treze livros, dos quais os seis primeiros são sobre Geometria plana elementar.

O décimo contém trinta e nove proposições sobre Geometria em terceira dimensão, onde Euclides, apud Boyer (1999), define como sólido “aquilo que tem comprimento, largura e espessura”, as quatro últimas proposições são de quatro sólidos regulares, no qual o Tetraedro não faz parte, por conta de uma definição de pirâmide feita anteriormente. O último livro é exclusivamente dedicado a propriedades dos cinco sólidos regulares.

De acordo com Eves (1992),

> “Euclides produziu sua obra memorável, os Elementos, uma cadeia dedutiva única de 465 proposições compreendendo de maneira clara e harmoniosa geometria plana e espacial, teoria dos números e álgebra geométrica grega” (EVES, 1992, p. 12).

Boyer (1999) afirma que, na Geometria Espacial, ninguém se interessou mais pelos Sólidos que Arquimedes, cujas descobertas foram comunicadas ao lado de sucessores de Euclides, Boyer cita dois trabalhos de Geometria Espacial atribuídos a Arquimedes: “Sobre a esfera e cilindro” e “Sobre os cones e esferoides”.

A Geometria foi o segmento da Matemática que mais sofreu mudanças de gostos de uma época para outra, sendo redescoberta como ramo vivo da Matemática no período da Revolução Francesa, no início do século dezenove. A estrutura dedutiva de Os Elementos de Euclides ocultava algumas hipóteses, havendo, portanto, algumas definições sem sentido e algumas falhas lógicas.

David Hilbert (1862-1943), nascido na Prússia Oriental, realizou estudos Matemáticos na Universidade Könisberg, percebeu que nem todos os termos em Matemática podem ser definidos, por isso iniciou o tratamento com a Geometria com três objetos sem definição, como o ponto, a reta e o plano. No lugar dos cinco postulados de Euclides, Hilbert formulou para sua Geometria, vinte e um postulados, que ficaram conhecidos como axiomas de Hilbert, que enfatizavam que não se deve assumir propriedades, além das indicadas nos axiomas, dos termos não definidos na Geometria. Após sua obra, outras coleções de axiomas foram apresentadas por outros, fazendo com que o caráter puramente dedutivo e formal da Geometria ficasse completamente estabelecido desde o começo do século XX.

2.2 ASPECTOS HISTÓRICOS DAS EMBALAGENS

Em toda história da raça humana, nunca algo impulsionou tanto as grandes ideias, as grandes invenções, quanto a necessidade do homem. Sempre que surge uma necessidade, surge em seguida, uma solução. E não foi diferente com as embalagens, pois elas fazem parte da humanidade desde que o homem precisou proteger e transportar alimentos.

As embalagens também sofreram transformações de acordo com a evolução humana, assim como contam Moura & Banzato (2003), que em seus escritos fazem uma divisão do uso de embalagens em diferentes períodos do nosso tempo.

Na pré-história, há a teoria de que o desenvolvimento delas partiu do uso das mãos em forma de concha na intenção de transportar água. Atitude um tanto quanto ineficaz, resultando posteriormente no uso de chifres ocos, crânios de animais e conchas grandes. Já segundo Endler (2003), em seus estudos, descobriu que havia uma tribo que por conta da saída para caçar, precisavam armazenar água e alimentos para serem consumidos durante esse período e que para isso, se deduz, que eles faziam uso de recipientes. Por conta do domínio do fogo essa tribo passou a armazenar alimentos nas cavernas. Ainda não há certeza de onde surgiu a primeira embalagem.

Na antiguidade, ainda de acordo com Moura & Banzato e diante de controvérsias, a embalagem propriamente dita, nasceu do comércio(escambo) entre Mesopotâmia e o Egito com construções em alabastros, cântaros e garrafas rústicas e jarras feitas por moldagens em areia.

Na Idade média, não houve muitas alterações no uso das embalagens. Na verdade, acredita-se que elas sofreram um retrocesso e só fora reconhecida sua importância com a criação, na Europa, de recipientes fechados, como garrafas com tampa e barris com o intuito de proteger os produtos de vazamento e contaminação.

Já na idade moderna muitas mudanças ocorreram. Houve a intensificação da identificação impressa nas embalagens usadas em medicamentos. Houve a substituição do bloco de madeira por chapas de cobre ou de aço e a substituição da louça de barro por vidro. Funcionalmente, nada se alterou. A embalagem continuou sendo usada para armazenamento, transporte e proteção.

Por fim, na Idade Contemporânea, com o avanço tecnológico (Revolução Industrial), domínio do cultivo do solo e o surgimento de novos desafios quanto a conservação de alimentos e da preocupação com a fome por conta de catástrofes naturais e de guerras, foi preciso criar outros tipos de recipientes. Nesse momento a embalagem ainda não era vista como unidade de venda. O consumidor se tornou mais exigente e com aumento da concorrência entre os produtos semelhantes, as empresas tiveram que se diferenciar para alavancar suas vendas; foi aí que as embalagens começaram a desempenhar uma nova função: a de marketing. É o que conta Endler, Moura & Banzato (2003).

Sobre esta nova função da embalagem, cabe salientar que os administradores até o fim dos anos 1920 não reconheciam nas embalagens esta função, nem tão pouco que elas seriam capazes de atrair os consumidores, pois este conceito ainda não tinha sido estabelecido.

Somente nos anos de 1930 (pós crise de 29) que as embalagens passaram, de fato, a agregar a função de marketing, pois além de informar e persuadir os clientes a comprar, as embalagens ainda carregavam a imagem da empresa por intermédio da marca.

Com o surgimento e a propagação do autosserviço nos anos de 1950 e 1960 nos EUA, foi imprescindível o uso da embalagem na venda dos produtos e percebeu-se nessa época também, que ela poderia participar em outras fases no processo de comercialização dos produtos; desde a distribuição, passando pela reposição até o consumo dos produtos.

Com o propósito de atender à exigência de consumidores com altíssimo poder aquisitivo, as embalagens também passaram a ser mais atraentes e apresentar características de conveniência.

Hoje, sem exageros, se pode dizer que as embalagens são uma das maiores forças persuasivas na venda de um produto, visto que quase todos os artigos de consumo são embalados.

Na atualidade uma das mais novas atribuições da embalagem é de não permitir violação. A inviolabilidade é uma das características necessárias de uma embalagem, atribuição que nasceu depois do aumento de ataques terroristas e, junto a isso, surgiu também a necessidade de evitar falsificações.

O desenvolvimento de embalagens é considerado uma atividade multidisciplinar pois exige conhecimento de várias técnicas e ciências. Para Mestriner (2005), a embalagem é também, além das funções já citadas, um grande recurso para os profissionais de marketing, que podem trabalhar aspectos de exposição tanto em pontos de venda como na casa do próprio consumidor.

Em 1960, Cheskin (1964) determinou o produto, a embalagem, a propaganda e a determinação de preço como pilares para o programa de mercado e, no mesmo período, Jeromy McCarthy (SEMENIK & BAMOSSY, 1995), estabeleceu o composto de marketing conhecido como "Os quatro P's", que são: produto, preço, promoção e praça. A partir disso a relação entre os fundamentos de marketing e as embalagens pode facilmente ser feita uma vez que Kotler (2000) subdivide essas quatro áreas em componentes principais. A embalagem vem a ser uma subdivisão do produto, que junto com outros componentes desempenha a nobre função de despertar o desejo de compra no cliente.

No Brasil, acredita-se que as embalagens sempre foram produzidas. É no que também acreditam Cavalcanti & Chagas (2006), que contam sobre as embalagens, que os índios produziam *samburás* (cestos de cipó), consideradas as primeiras embalagens do país, passando por latões de leite e as barricas de água ardente. Tudo feito de forma artesanal. Ainda existe histórias sobre artesões vidreiros que vieram ao Brasil junto com a corte holandesa por volta de 1631 e que instalaram oficinas de artesanato em Pernambuco.

Com a vinda da corte portuguesa para o Brasil na primeira década do século XIX e logo depois a decisão de João XI de abertura dos portos às nações amigas, o Brasil ficou impedido de praticar qualquer atividade produtiva que competisse com Portugal. Foi só na metade deste século que o Brasil começou a ter suas primeiras fábricas, como a fábrica do português Francisco Ignácio da Siqueira Nobre, na Bahia, em 1810, que produzia vidros lisos, de cristal branco, frascos, garrafões e garrafas.

Com a construção de estradas de ferro, estaleiros, empresas de transporte urbano e gás, bancos e seguradoras no final do século XIX e início do século XX as indústrias voltadas para os bens de consumo começaram a despontar e a maior parte delas no Rio de janeiro. São Paulo só veio a se tornar a vanguarda da industrialização e da modernização brasileira depois da expansão cafeeira, que impulsionou a construção de ferrovias e a exportação do café para Europa. Paralelamente houve a expansão agrícola e o florescimento da indústria de transformação de aço.

O café torrado e moído, o açúcar refinado, o óleo de semente de algodão, o extrato de tomate em latas pequenas, o vinagre, a cerveja e guaranás eram alguns dos produtos de primeira necessidade produzidos no Brasil e comercializados pré-condicionado, segundo Vieira (1985). A maior parte dos produtos eram vendidos a granel e outros pesados no balcão e levados pelos consumidores embalados em papéis, em outros casos o próprio cliente levava sacos ou sacolas para transportar estes alimentos.

Depois da segunda guerra mundial houve a verdadeira revolução no campo das embalagens no Brasil, afirma Seragini (2003). Até então, o Brasil era condicionado a repetir o processo dos enlatados, já praticado nos países europeus. A guerra além de outras coisas, contribuiu para estimular o desenvolvimento de embalagens para uma multiplicidade de novos produtos que passaram a ser fabricados no Brasil, desde o simples sabão em pó até aparelhos eletrônicos, é o que afirma Vieira (1985).

Com a mudança sofrida pelo comércio, precisamente nos anos de 1950, onde bazares e empórios davam lugar a supermercados, as embalagens sofreram grandes transformações, e graça a industrialização crescente dos alimentos e as novas maneiras de acondicioná-los.

Resumidamente, a história da embalagem no Brasil começa nos cestos e samburás feito pelos índios, passando por enlatados, garrafas de vidro, saquinhos plásticos para acondicionamento de leite, até caixas de madeiras onde eram transportados os produtos de limpeza.

Assim como nos países europeus, como também nos EUA, onde se teve início o autosserviço, o supermercado no Brasil precisou mudar, causando grande influência na visão, forma, conteúdo e principalmente no conceito das embalagens, que passaram a desempenhar um papel importantíssimo na venda dos produtos, já que os supermercados não dispunham mais de vendedores.

Para redesenhar o modo de comprar e vender, supermercados e embalagens tiveram que coexistir em sintonia. Com esse objetivo alcançado o número de supermercados começou a aumentar, isso fez com que a embalagem funcionasse como indutor de venda, se tornando mais uma força de venda.

Por fim, é preciso registrar que o supermercado foi responsável por colocar diante do consumidor produtos concorrentes em prateleiras com objetivo de aumentar seu leque de escolhas.

Nos dias de hoje, muitos autores, inclusive os citados, questionam se, de fato, houve uma evolução nas embalagens e que para encontrar respostas para perguntas como essa, é preciso observar os valores de cada cliente e não as variações sofridas pelas embalagens.

2.3 CONCEITOS BÁSICOS E ABORDAGENS DA GEOMETRIA ESPACIAL

Qual o significado da palavra "3D"? A maioria dos objetos que conhecemos possuem três dimensões: comprimento, altura e largura. Inicialmente, o conceito de geometria de posição é pré-fixado desde as séries iniciais com os primeiros postulados e axiomas, conceituado o ponto, a reta, plano e as posições relativas entre eles. Utilizando as próprias folhas de cadernos dos alunos, livros, ou até mesmo as paredes da sala de aula, é possível introduzirmos o conceito de semiplanos, quando "encaixados", nos trazem a ideia dos diedros:

Ângulo diedro ou diedro ou ângulo diédrico, é a reunião de dois semiplanos de mesma origem, não contidos num mesmo plano (DOLCE, O. & POMPEO, J. N 2005, pág 80).

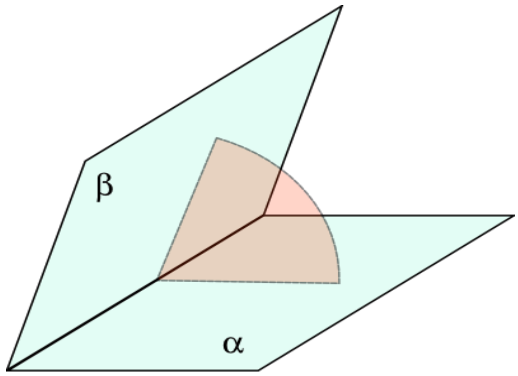


Figura 2 - Diedro e ângulo diédrico

Na junção de três semiplanos com reta comum ou "ângulo triédrico", conceituamos o triedro, que para melhor entendimento, utilizamos um caso particular que é o triedro tri retângulo. Uma atividade simples pode ser proposta para os alunos na construção do triedro, com papelão e tintas para colorir conforme mostra a figura a seguir, onde, os mesmos têm uma visualização imediata da ideia dos diedros e triedros e das primeiras noções de posição entre retas e planos.

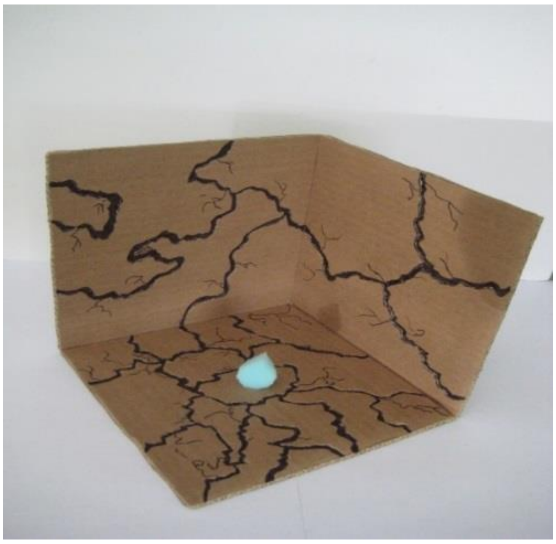


Figura 3 - Triedro Tri-retângulo

2.3.1 POLIEDROS

> [...] Uma abordagem usando esses dois conceitos, poliedro e superfície poliédrica (como mencionado), é encontrada em DI PIERRO NETO, et al., p.267. É interessante observar, entretanto, que o uso do termo "sólido geométrico" para significar indistintamente poliedro e superfície poliédrica é bastante comum. Isso ocorre, por exemplo, com o software Poly, onde o termo solids (ou sólidos) é utilizado, porém os objetos apresentados pelo software não são sólidos, o que pode ser observado quando exibimos a planificação dos mesmos no plano. [...] (FANTI, KODAMA e NECHI 2010, p. 731)

O primeiro momento de conflito ou problemática é a identificação dos principais elementos de um poliedro e o cálculo relacionado a quantidade desses elementos, uma vez que, conforme aumentamos o número de semiplanos (faces), temos que conjecturar uma maneira de descobrir tais resultados.

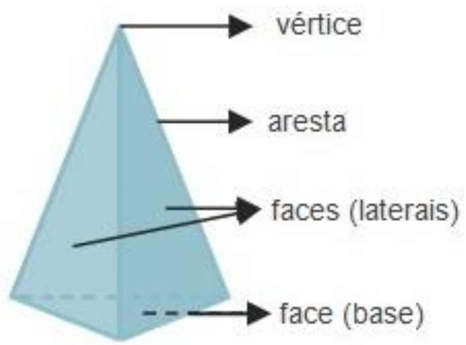


Figura 4 - Elementos de um poliedro

Na classificação dos poliedros, temos os convexos e não convexos:

> Todo poliedro limita uma região do espaço chamada de interior deste poliedro. Dizemos que um poliedro é convexo se o seu interior C é convexo, isto é, quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos de C está inteiramente contido em C. Em um poliedro convexo toda reta não paralela a nenhuma de suas faces o corta em, no máximo, dois pontos. [Lima et alii, 2006].

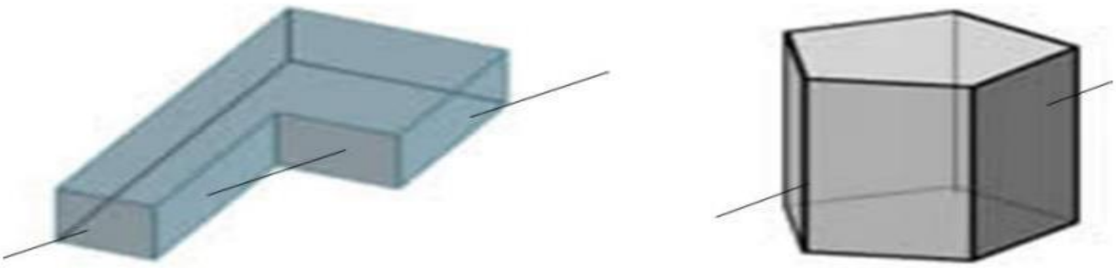


Figura 5 – Poliedro Não convexo e Poliedro Convexo

.

Partindo do pressuposto que cada face triangular possui três arestas, cada face quadrangular possui quatro arestas e assim sucessivamente, deduzimos que o número de arestas é dado por: $\frac{3.F_3+4.F_4+5.F_5+....}{2}$, onde F_3 é o número de faces triangulares, F_4 o número de faces quadrangulares e assim sucessivamente.

A relação de Euler, nos diz que em todo poliedro convexo, $V+F=A+2$, onde V é o número de vértices, F o número de faces e A o número de arestas de cada poliedro. As demonstrações da relação são apresentadas por Azambuja Filho (1983) e corrigida ou adaptada por Lima (1991). É válido ressaltar que a relação de Euler é válida para poliedros convexos, mas, para os poliedros não convexos, ela pode ou não ser válida.

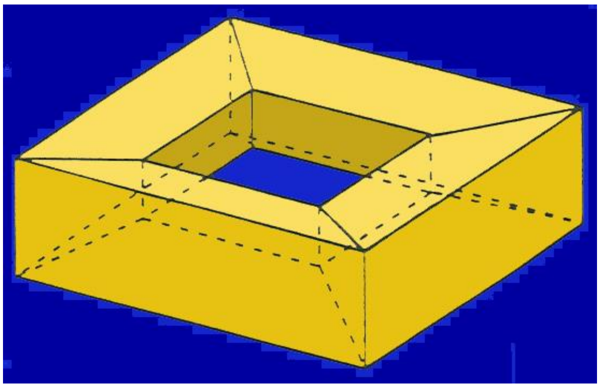


Figura 6 - Poliedro não convexo onde não vale a relação de Euller

A conclusão apresentada na Relação/Fórmula de Euler, foi uma homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler (1707 - 1783). Esta relação foi mostrada em uma carta escrita para seu amigo (também matemático) Christian Goldbach em 1750 (RICHESON, 2008, p.66). É válido ressaltar que um manuscrito de Descartes, produzido por volta de 1639 e encontrado por Leibniz em 1675, contém resultados a partir dos quais se poderia obter a Fórmula de Euler (LIMA, 1991. p. 69).

2.3.1.1 POLIEDROS REGULARES

Uma perfeita definição dos objetos desta seção, é descrita na citação abaixo:

> Um poliedro convexo é regular quando todas as suas faces são polígonos regulares iguais (mais precisamente, congruentes) e, além disso, em cada vértice do poliedro concorre o mesmo número de arestas. Tais poliedros são conhecidos como poliedros de Platão (LIMA, 1991).

Sabemos também, que só existem cinco poliedros regulares. São eles: Tetraedro Regular, Hexaedro Regular, Dodecaedro Regular e Icosaedro Regular.

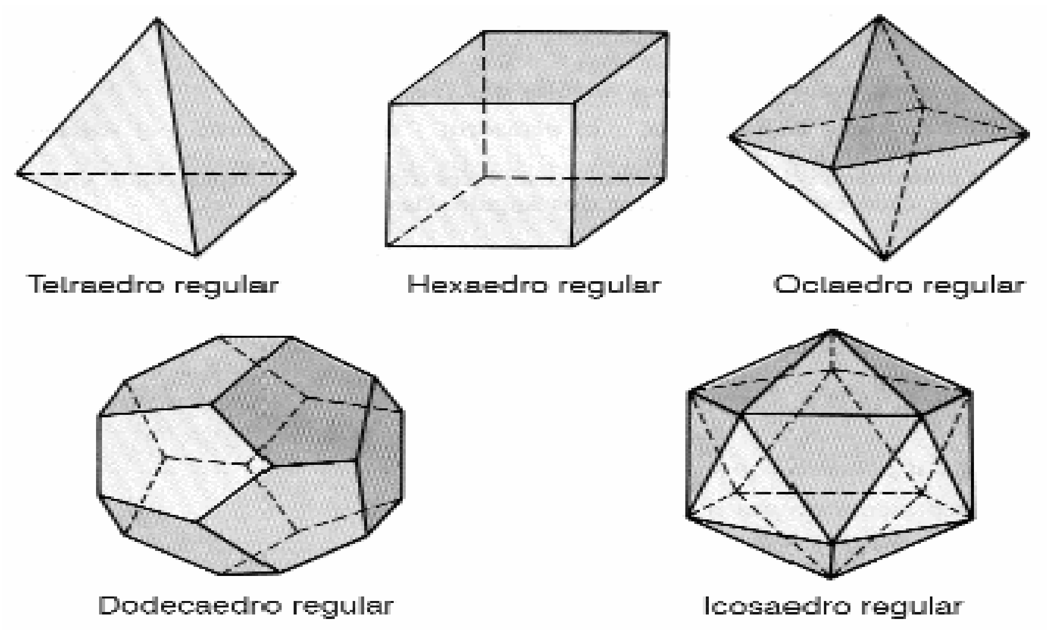


Figura 7 - Poliedros Regulares

Na apresentação dos poliedros regulares, não encontramos dificuldade na contagem do número de vértices, faces e arestas nos três primeiros poliedros, cujo número de faces é menor. Já nos dois seguintes, surgem as primeiras dificuldades em relação a essa contagem. A partir deles, definimos o conceito de Diagonal de um poliedro. Novamente partimos do conceito de Diagonal de um polígono, generalizando o cálculo dessas diagonais, para finalmente mostrar que para um número menor de faces podemos usar o processo de contagem, sabendo apenas a definição de diagonal. Para um número maior de faces pensaremos em uma outra solução.

Lembrando que em toda geometria espacial, a visualização e a interpretação geométrica é o nosso maior objetivo. Logo o aluno deve entender que essas dificuldades fazem parte do processo de ensino e aprendizagem para o melhor desenvolvimento do conteúdo proposto

Ensiná-los a desenhar estruturas como o Dodecaedro Regular e o Icosaedro Regular, mostrar a planificação e a visão 3D desses sólidos, usando softwares como o ***Poly,*** e utilizar o aplicativo ***Icross***, para que os estudantes possam fazer secções de formas espaciais no próprio aparelho celular, faz com que o educando desperte um interesse maior pela geometria, usando a praticidade e instrumentos próximos de sua realidade.

É de suma importância dentro deste assunto, a inserção dos tópicos: Poliedros de Arquimedes e Poliedros Conjugados. No primeiro caso, o truncamento dos poliedros regulares, nos remetem as diversas formas que aparecem no nosso cotidiano e atividades propostas como montagem de peças de design em moldes arquitetônicos são bastante absorvidas pelos alunos. No segundo caso, a importância da visualização dos próprios poliedros inscritos por conta da conjugação, também é válida em atividades, como a construção usando canudos de refrigerante e barbantes ou qualquer outro tipo de material concreto.

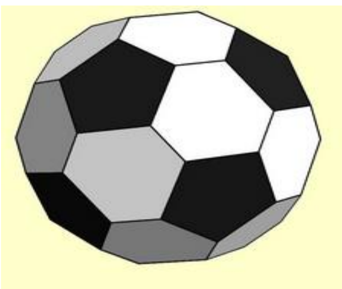


Figura 8 - Icosaedro de Arquimedes

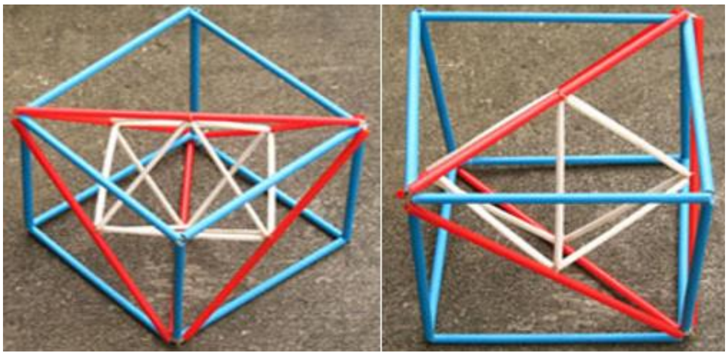


Figura 9 - Poliedros Conjugados feitos com canudos

A soma dos ângulos das faces de um poliedro é feita calculando a soma dos ângulos internos de cada polígono que se apresenta em suas faces ou usando a relação:

$S_f = 360°.(V - 2)$, onde S_f é a soma dos ângulos das faces e V é o número de vértices do poliedro.

Definimos como diagonal de um poliedro, todo segmento que reta que une dois vértices não situados numa mesma face.

Para este tipo de cálculo, fazemos a combinação do número de arestas tomados dois a dois para encontrar todas as possíveis ligações entre dois vértices do poliedro e em seguida excluímos os segmentos que representam ligações entre vértices da mesma face (arestas e as diagonais das faces).

$\mathrm{D} = \mathrm{C}_{\mathrm{v},2} - \mathrm{A} - \sum \mathrm{D}_{\mathrm{f}}$, onde A é o número de arestas e $\sum D_f$ é o somatório das diagonais das faces.

Figura 10 - Diagonais de um cubo

É de suma importância a associação com exemplos combinatórios, tais como: comissões de duas pessoas que podemos formar ou variados tipos de duplas que podem ser formadas com os alunos da própria sala, para diferenciar problemas associados a combinações simples e princípio multiplicativo, que é um dos grandes dilemas no ensino de álgebra no segundo ano do ensino médio.

2.3.2 PRISMAS

Prisma convexo limitado ou prisma convexo definido ou prisma convexo é a reunião da parte do prisma convexo ilimitado, compreendida entre os planos de duas secções paralelas e distintas, com essas secções (DOLCE, O. & POMPEO, J. N 2005, pág 139).

- Elementos:

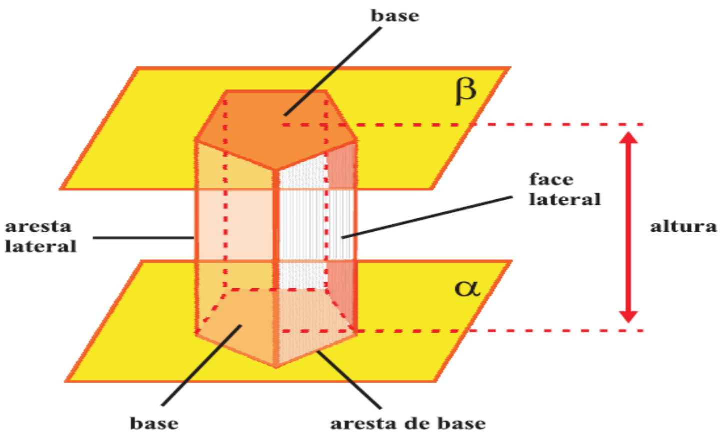


Figura 11 - Elementos de um prisma

Os prismas são classificados de acordo com os polígonos das bases.

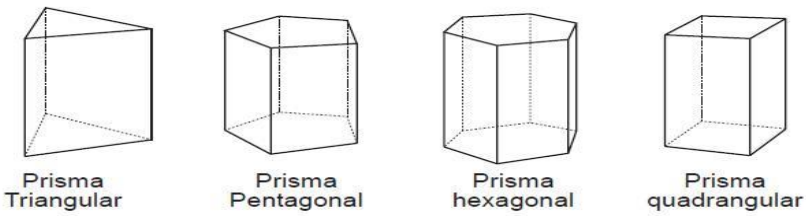


Figura 12 - Diversos tipos de prismas

- Prisma reto é aquele cujas arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Num prisma reto as faces laterais são retângulos.

- Prisma regular: É o prisma reto cujas bases são polígonos regulares

- Relações para os prismas regulares:

$Volume = A_{base}\ .\ h$, onde h é a altura do prisma.

$Área_{total} = 2. A_{base} + A_{lateral}$, onde a área lateral é a soma das áreas dos retângulos das faces laterais.

- Prismas especiais

✓ Paralelepípedo Retângulo: É um prisma cujas faces são retângulos.

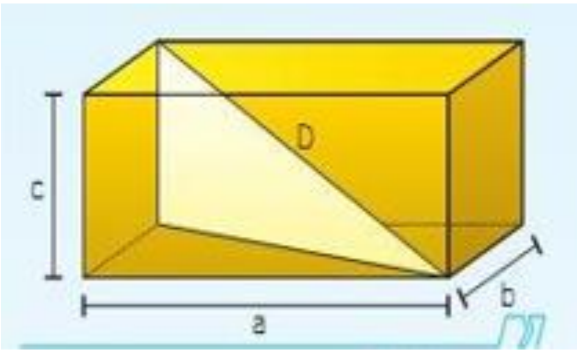


Figura 13 - Paralelepípedo retângulo e sua diagonal

$Área_{total} = 2. ab + 2. bc + 2. ac$, representados pelas áreas de todas as faces retangulares.

$Volume = A_{base}\ .\ h = a. b. c$, que é o produto de suas dimensões.

$Diagonal = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, desenvolvida pelo teorema de Pitágoras aplicado no triângulo retângulo destacado na figura 13.

- ✓ Cubo: É um prisma cujas faces são quadradas e idênticas.

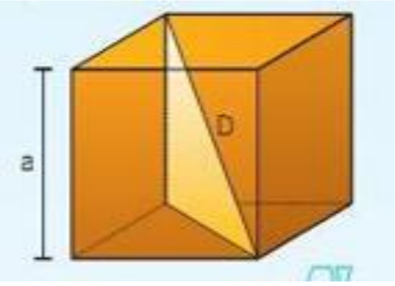


Figura 14 - Cubo ou Hexaedro regular e sua diagonal

$Área_{total} = 6.a^2$, representados pela área de todos os quadrados das faces.

$Volume = A_{base} \; . \; altura = a.a.a = a^3$.

$Diagonal = a.\sqrt{3}$, cujo cálculo é desenvolvido pelo teorema de Pitágoras aplicado no triângulo retângulo destacado na figura 14.

2.3.3 CILINDROS CIRCULARES RETOS

Cilindro é a reunião da parte do cilindro circular ilimitado, compreendida entre os planos de suas secções circulares paralelas e distintas em relação a essas secções (DOLCE, O. & POMPEO, J. N 2005, pág 217).

- Elementos:

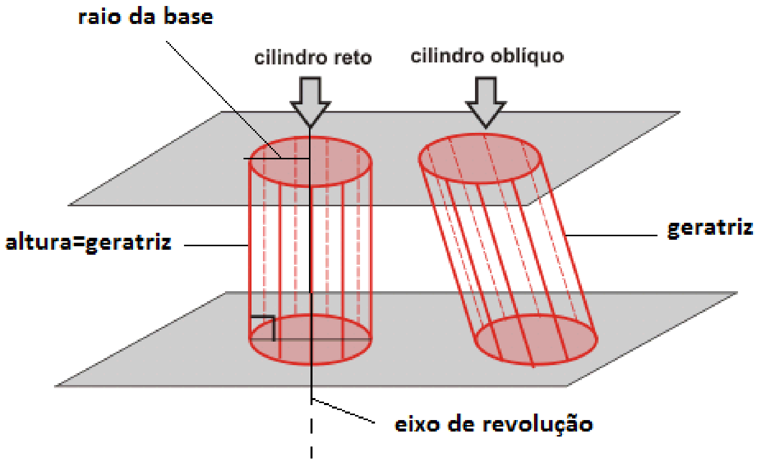


Figura 15 - Elementos de um cilindro circular reto e cilindro oblíquo

- Relações para os cilindros circulares retos:

$Volume = A_{base} \,.altura = \pi.r^2.h$, onde R é raio da base do cilindro e h a altura.

O princípio é o mesmo dos prismas (“prisma arredondado”), já que ambos possuem duas bases paralelas e iguais, possuindo divisões homogêneas com a mesma quantidade de cubos em todas as camadas. Isso pode ser facilmente observado nas secções transversais do cilindro.

$Área_{total} = 2.A_{base} + A_{lateral} = 2.\pi.r^2 + 2.\pi.r.h$, onde a área lateral é obtida através de um processo interessante que é a planificação do cilindro circular reto, transformando-o num retângulo de base igual ao comprimento (perímetro) da circunferência da base do cilindro e altura igual a altura do cilindro, conforme mostra a figura a abaixo:

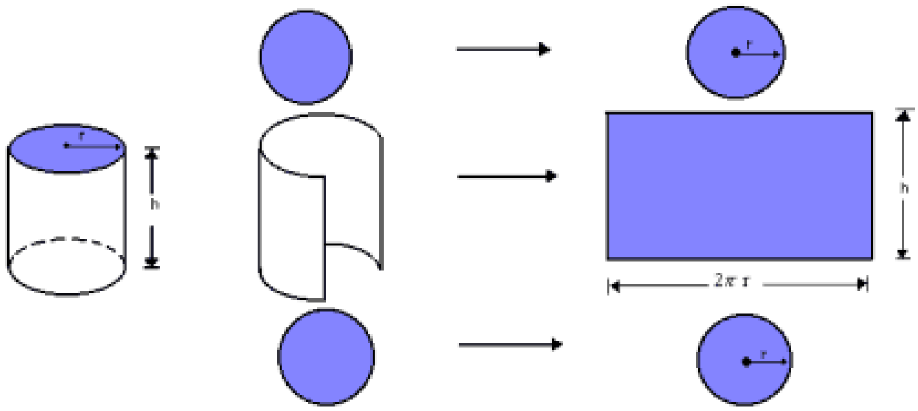


Figura 16 - Planificação do cilindro circular reto

2.3.4 PIRÂMIDES

Pirâmide convexa limitada ou pirâmide convexa definida ou pirâmide convexa é a parte da pirâmide ilimitada que contém o vértice quando se divide essa pirâmide pelo plano de uma secção, reunida com essa secção (DOLCE, O. & POMPEO, J. N 2005, pág 186).

- Pirâmide regular:

A sua base é um polígono regular e a projeção do vértice sobre a base, é um ponto localizado no centro do polígono da base, fazendo com que as arestas laterais tenham o mesmo comprimento e as faces laterais sejam triângulos isósceles idênticos.

- Elementos de uma pirâmide regular:

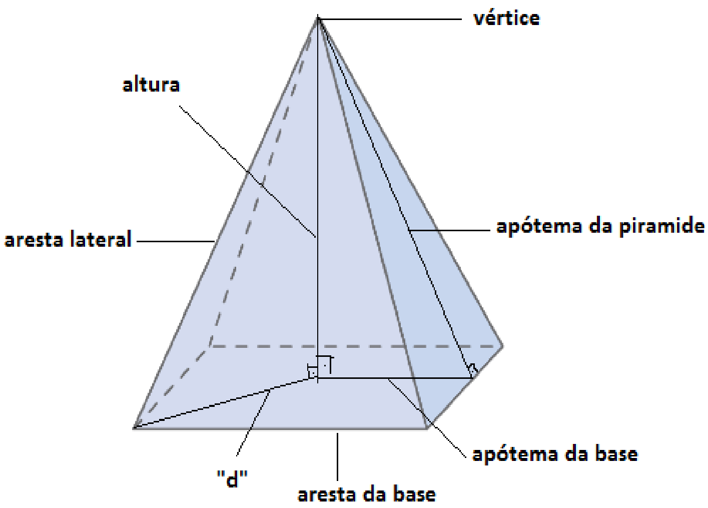


Figura 17 - Elementos de uma pirâmide regular

Em relação a esses elementos assinalados na figura a acima, o apótema da pirâmide regular é a altura de um triângulo da face lateral em relação ao lado correspondente a aresta da base da pirâmide, e o apótema da base, é a distância do centro do polígono da base até o lado desse polígono (aresta da base).

Os apótemas de polígonos regulares podem ser calculados de diversas maneiras, inclusive, evitando ao máximo o uso de fórmulas "prontas" para tais cálculos. Apenas utilizando a diagonal do quadrado, a altura do triângulo equilátero e a divisão do hexágono regular em seis triângulos equiláteros, é possível mostrar os apótemas dos principais polígonos regulares utilizados no ensino médio: Triângulo equilátero, Quadrado e Hexágono Regular.

O elemento na figura 17 denominado "d", é a distância do centro do polígono da base ao vértice desse polígono que pode ser descrito como raio da circunferência circunscrita ao polígono da base, e pode ser calculada usando os mesmos artifícios utilizados no cálculo dos apótemas.

Percebemos também, três triângulos retângulos que aparecem no interior da figura 17, hachurados em vermelho, laranja e verde na figura abaixo:

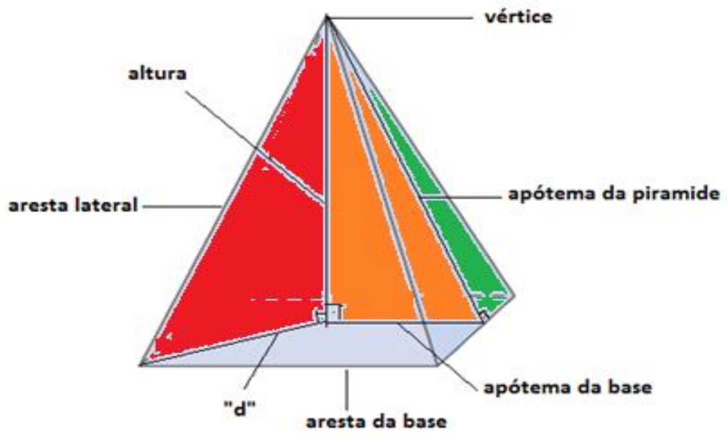


Figura 18 - Aplicações do teorema de pitágoras na pirâmide regular

Pelo teorema de Pitágoras, chegamos a algumas relações que aparecem não só na pirâmide de base quadrangular mas em todas as pirâmides regulares. São elas:

$$(altura)^2 + d^2 = (aresta\ lateral)^2$$

$$(apótema\ da\ base)^2 + (altura)^2 = (apótema\ da\ pirâmide)^2$$

$$(apótema\ da\ pirâmide)^2 + [\frac{aresta\ da\ base}{2}]^2 = (aresta\ lateral)^2$$

As pirâmides são classificadas de acordo com o polígono da base, onde as bases podem ser quaisquer polígonos regulares.

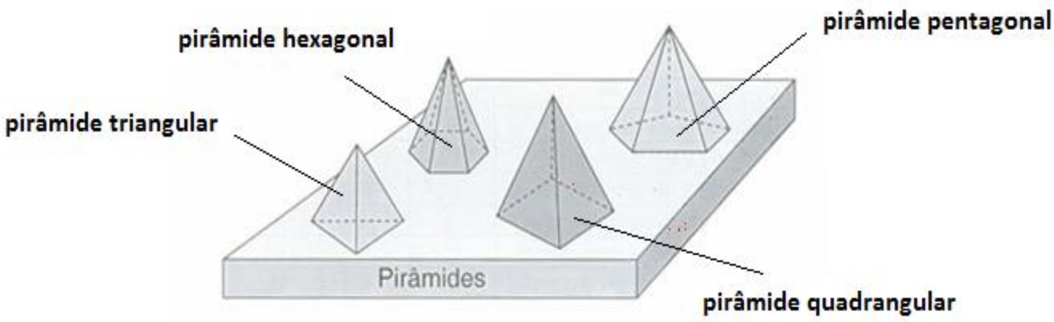


Figura 19 - Diferentes tipos de pirâmides

- Relações para pirâmides regulares:

$Volume = \frac{A_{base}\ x\ altura}{3}$. Fundamentados no Princípio de Cavalieri (Ver referência 13, pág 165), comparamos um prisma e uma pirâmide de mesma base e mesma altura e verificamos que o volume do prisma é três vezes maior que o volume da pirâmide.

$Área_{total} = A_{base} + A_{lateral}$. A área da base depende do polígono da base e a área lateral é metade do produto da aresta da base da pirâmide pelo apótema da pirâmide (área do triângulo), multiplicado ainda, pela quantidade de faces laterais (quantidade de lados da base).

Assim como o cubo (hexaedro regular) é um sólido de grande importância, outros dois poliedros regulares são bastante utilizados no decorrer do ensino de geometria espacial. São eles: o tetraedro regular, que pode ser classificado como uma pirâmide triangular regular e o octaedro regular que pode ser seccionado em duas pirâmides quadrangulares regulares.

- Tetraedro Regular:

Um poliedro regular que possui quatro faces triangulares (equiláteras) e iguais.

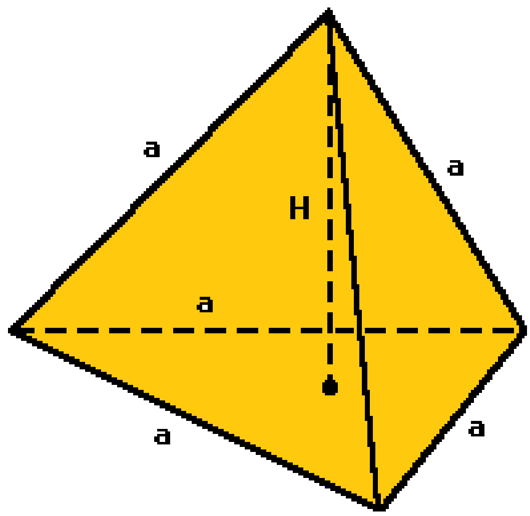


Figura 20 - Tetraedro regular

$Área_{total} = a^2.\sqrt{3}$, obtido pela soma das áreas de todos os triângulos equiláteros das faces.

$Volume = \frac{a^3.\sqrt{2}}{12}$, obtido pela terça parte do produto da área da base (triângulo equilátero de lado a) pela altura (obtida pela aplicação do teorema de Pitágoras assinalado pela cor laranja na figura 18).

- Octaedro Regular:

Um poliedro regular que possui oito faces triangulares(equiláteras) e iguais.

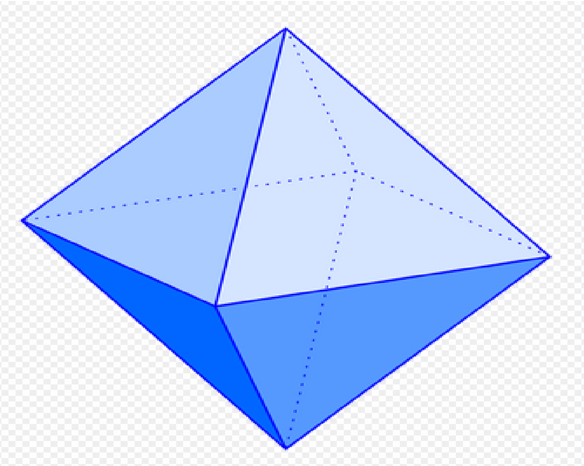


Figura 21 - Octaedro regular

$Área_{total} = 2.a^2.\sqrt{3}$, obtida pela soma das áreas dos oito triângulos equiláteros das faces, com lado **a.**

$Volume = \frac{a^3.\sqrt{2}}{3}$, obtido pela soma dos volumes das pirâmides quadrangulares oriundas da secção do octaedro, onde a altura das pirâmides, é metade da diagonal do octaedro$\left(\frac{a.\sqrt{2}}{2}\right)$.

2.3.5 CONES CIRCULARES RETOS

Chama-se cone circular ou cone à reunião dos segmentos de reta com uma extremidade em um ponto fixo chamado vértice e a outra nos pontos do círculo.

- Elementos de um cone circular reto:

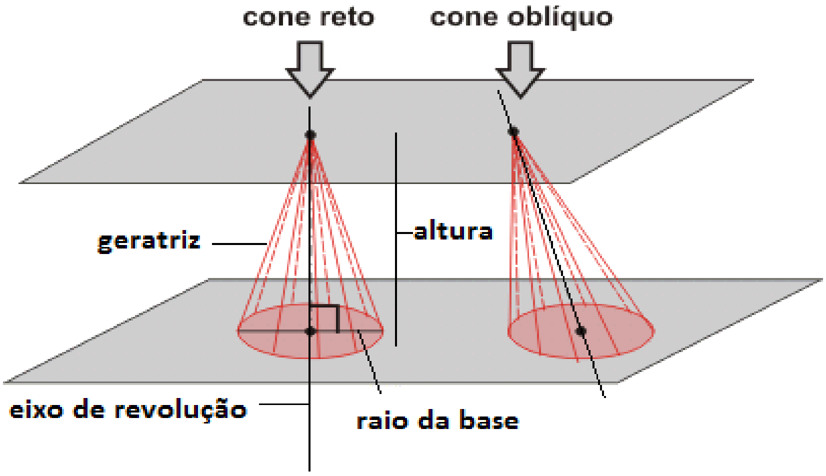


Figura 22 - Elementos do cone circular reto e cone oblíquo

- Relações nos Cones Circulares Retos:

A relação no cone reto mostrada a seguir é chamada de relação fundamental, pois relaciona os principais elementos do cone: altura, raio da base e geratriz.

$Raio\ da\ base^2 + altura\ ^2 = geratriz^2$, decorrente aplicação do teorema de Pitágoras visualizado na figura 21.

$Volume = \frac{A_{base}\ .\ altura}{3} = \frac{\pi.r^2.h}{3}$, onde r é raio da base e h a altura do cone. Fundamentados novamente no Princípio de Cavalieri, comparamos um cilindro circular reto e um cone circular reto, ambos com a mesma base e a mesma altura e verificamos que o volume do cilindro é três vezes maior que o volume do cone.

$Área_{total} = A_{base} + A_{lateral=}2.\pi.r^2 + \pi.r.g.$ Diferente das pirâmides, onde temos a variação dos polígonos das bases, o cone circular reto possui sua base sendo um círculo e a sua lateral também fixa, sendo planificada em um setor circular de ângulo central $\propto$ e raio igual a geratriz desse cone, conforme mostra a figura abaixo:

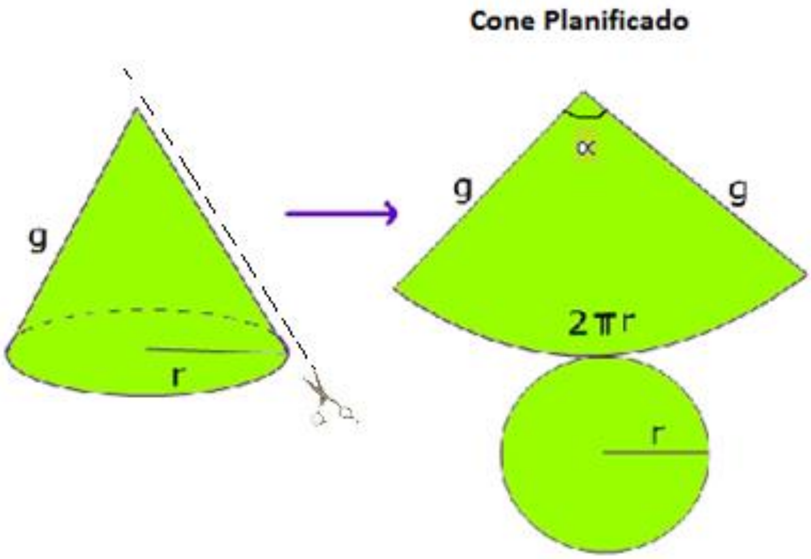


Figura 23 - Planificação do cone circular reto

A demonstração da área lateral do cone, dada por $\pi.r.g$, pode ser vista na referência 13, pág 238, com uma explicação detalhada, com a proporcionalidade entre comprimentos de arcos e áreas limitadas por esses comprimentos.

Muitos problemas de vestibulares e até mesmo de aplicações, estão relacionados a área lateral do cone, trabalhando com os elementos do "cone fechado" e com os elementos do "cone aberto" (planificação). Nesta parte temos uma dificuldade maior de associação por parte dos alunos, pois não é tão simples entender que o setor circular da planificação é parte ou fração de um círculo que não é o mesmo círculo da base do "cone fechado".

2.3.6 SÓLIDOS SEMELHANTES

São sólidos que possuem formas geométricas iguais e medidas proporcionais. Particularmente, daremos um enfoque para as pirâmides e os cones, que através de secções transversais, obtemos os troncos de pirâmides e troncos de cones, que muitas das vezes são vistos como formas espaciais de grande dificuldade.

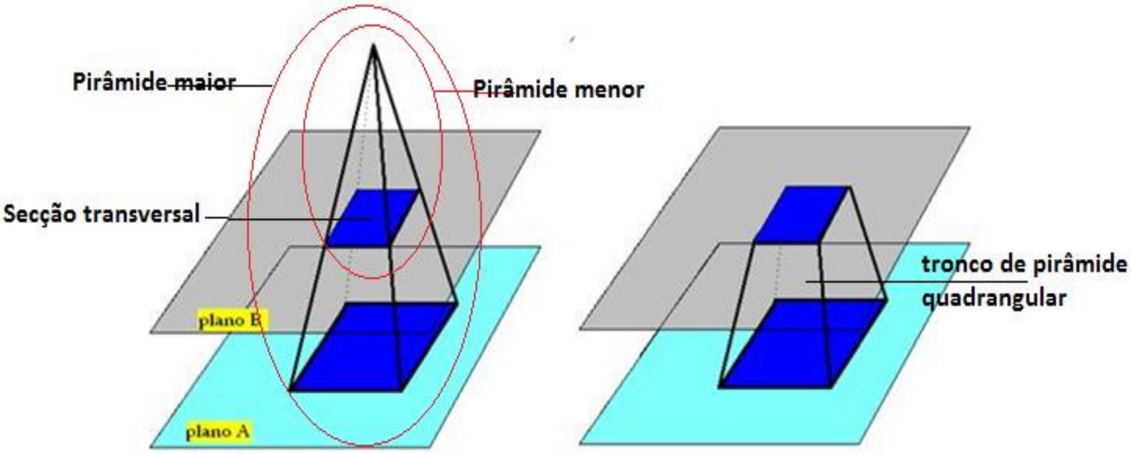


Figura 24 - Pirâmide quadrangular e tronco de pirâmide quadrangular

Todas as medidas da pirâmide menor são proporcionais as da pirâmide maior: aresta da base, altura, aresta lateral, apótema da base e apótema da pirâmide.

$$\frac{\boldsymbol{aresta\ da\ base}}{\boldsymbol{Aresta\ da\ base}} = \frac{\boldsymbol{aresta\ lateral}}{\boldsymbol{Aresta\ lateral}} = \frac{\boldsymbol{ap\acute{o}tema\ da\ base}}{\boldsymbol{Ap\acute{o}tema\ da\ base}} = \frac{\boldsymbol{ap\acute{o}tema\ da\ pir\hat{a}mide}}{\boldsymbol{Ap\acute{o}tema\ da\ pir\hat{a}mide}} = \frac{\boldsymbol{altura}}{\boldsymbol{Altura}} = \boldsymbol{k},$$

onde k é a constante de proporcionalidade ou razão de semelhança.

Já a razão entre as áreas de sólidos semelhantes é o quadrado da razão de semelhança e a razão entre volumes de sólidos semelhantes é o cubo da razão de semelhança.

$$\left(\frac{altura}{Altura}\right)^2 = \frac{\acute{a}rea}{\acute{A}rea} \qquad \text{e} \qquad \left(\frac{altura}{Altura}\right)^3 = \frac{volume}{Volume}$$

A percepção da proporcionalidade é válida se mostrada com alguns exemplos de como a semelhança funciona com os sólidos.

Na pirâmide seccionada por um plano paralelo a base, mostrada abaixo, temos a razão de semelhança de 1:2, pois a altura da pirâmide menor é metade de altura da pirâmide maior.

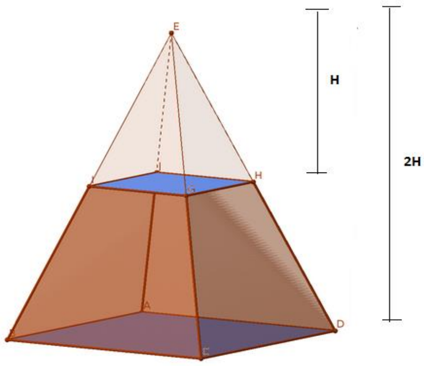


Figura 25 - Pirâmide quadrangular regular seccionada na proporção de 1:2

Se a razão de semelhança é de 1:2, a razão entre as áreas é de 1:4 e a razão entre volumes é de 1:8. Sendo assim, temos a seguinte conclusão:

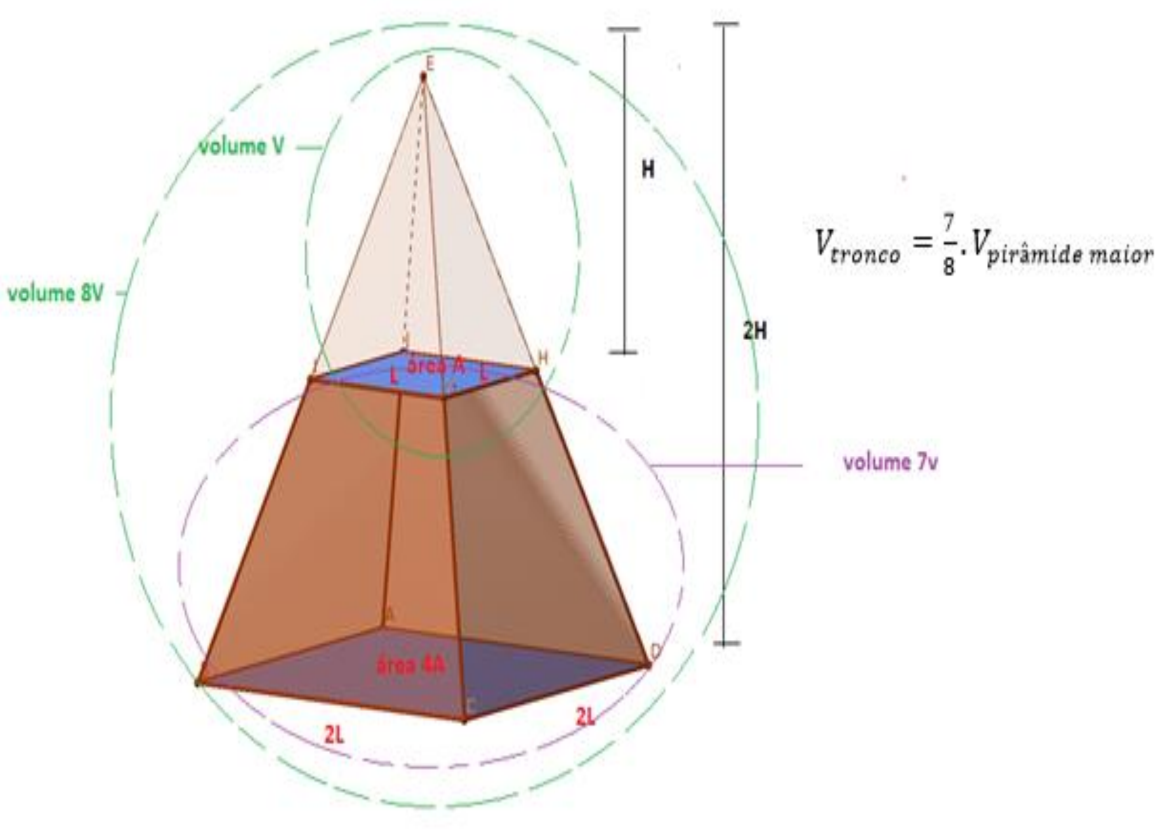


Figura 26 - Razão entre áreas e volumes na pirâmide quadrangular

Essas proporções não aparecem apenas nas pirâmides. Nos cones circulares retos seccionados por uma secção transversal, também temos todas as suas principais medidas aumentando em uma mesma proporção. O enfoque maior para conclusão da pesquisa final, é dado nas pirâmides, cones e troncos, porém, temos outras formas espaciais semelhantes que respeitam as mesmas relações de áreas e volumes mostradas acima, como os cubos, as esferas.

A seguir, a secção transversal de um cone, dividimos o cone maior em duas partes, onde o cone menor é semelhante ao maior e obtemos um tronco de cone.

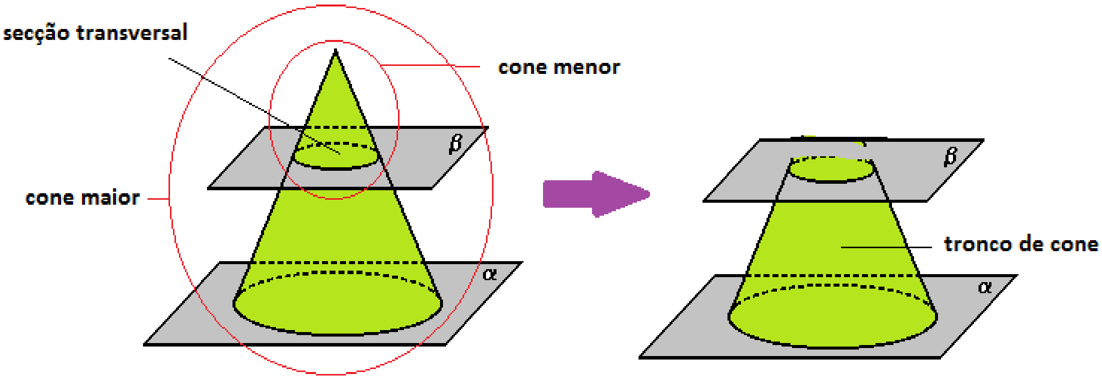


Figura 27 - Cone circular reto e tronco de cone circular reto

$\dfrac{\boldsymbol{raio\ da\ base}}{\boldsymbol{Raio\ da\ base}} = \dfrac{\boldsymbol{geratriz}}{\boldsymbol{Geratriz}} = \dfrac{\boldsymbol{altura}}{\boldsymbol{Altura}} = \boldsymbol{k}$, onde k é a constante de proporcionalidade ou razão de semelhança.

Temos também: $\left(\dfrac{\boldsymbol{altura}}{\boldsymbol{Altura}}\right)^{\mathbf{2}} = \dfrac{\boldsymbol{área}}{\boldsymbol{Área}}$ e $\left(\dfrac{\boldsymbol{altura}}{\boldsymbol{Altura}}\right)^{\mathbf{3}} = \dfrac{\boldsymbol{volume}}{\boldsymbol{Volume}}$

Um outro exemplo interessante é o cone seccionado paralelamente a base, na razão de 1:3.

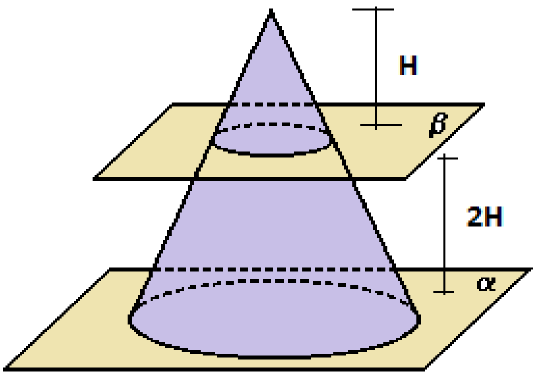


Figura 28 - Cone circular reto seccionado na proporção de 1:3

A razão de semelhança é de 1:3, pois a altura do cone menor é três vezes menor do que a altura do cone maior. Sendo assim, a área aumentará na proporção de 1:9 e o volume aumentará na proporção de 1:27.

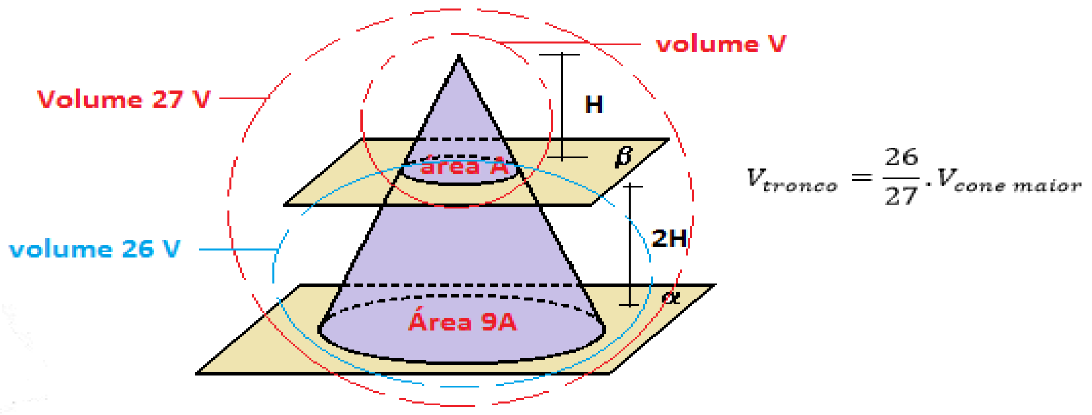


Figura 29 - Razão entre áreas e volumes no cone circular reto

Com isso, verificamos que não temos a necessidade de fórmulas específicas para cálculo de áreas ou volumes de sólidos semelhantes. Basta utilizarmos o conceito de proporcionalidade para adquirir tais resultados.

2.3.7 ESFERAS

É o lugar geométrico dos pontos no espaço, equidistantes de um ponto fixo chamado centro.

- Elementos:

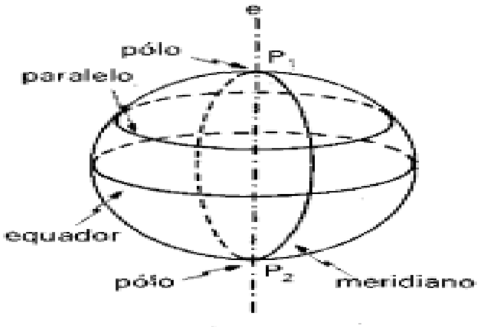


Figura 30 - Elementos da esfera

- Relações na esfera:

Ao seccionarmos uma esfera por um plano que está a uma distância d do seu centro, sua secção limita uma circunferência de raio r, conforme indica a figura abaixo:

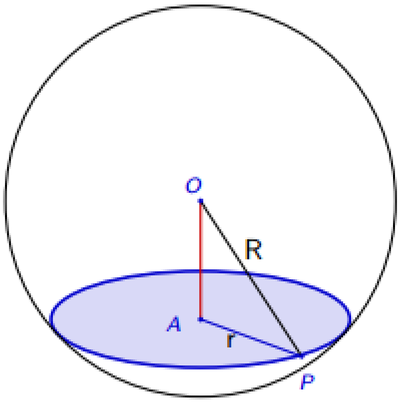


Figura 31 - Relação entre o raio da esfera e o raio de sua secção

Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos a seguinte relação: $\boldsymbol{d^2 + r^2 = R^2}$**,** onde R é o raio da esfera.

$Volume = \frac{4.\pi.R^3}{3}$, onde R é o raio da esfera. Essa expressão pode ser mostrada utilizando mais uma vez o Princípio de Cavalieri, comparando uma "Anticlépsidra" e uma esfera.
A anticlépsidra é o sólido limitado por um cilindro equilátero e uma ampulheta (dois cones invertidos) inscrita nesse cilindro. Ao compararmos as áreas de secções transversais de uma esfera de diâmetro 2.R e uma anticlépsidra de altura 2.R, verificamos que essas áreas são iguais. Sendo assim, o volume da esfera é equivalente ao volume desta anticlépsidra. Para maior detalhamento deste assunto, podemos consultar a referência 13, pág 253.

$Área\ da\ superfície = 4.\pi.R^2$. Essa expressão pode ser mostrada dividindo a superfície da esfera em infinitas partes. Ao unirmos o centro da esfera as extremidades dessas "partes", obtemos infinitas "pirâmides". O somatório dos volumes de todas as "pirâmides" é equivalente ao volume da esfera, quando essa divisão é feita em infinitos (tende ao infinito) pedaços. Ao utilizarmos essa igualdade de volumes, concluímos que a área da esfera pode ser escrita da forma apresentada acima (DOLCE,O. & POMPEO, J. N 2005, pág 263).

3 A PROPOSTA METODOLÓGICA

A falta de uma visualização mais concreta e a aplicabilidade das fórmulas e formas estudadas, tornam o assunto Geometria Espacial desinteressante e mais difícil, uma vez que muitos alunos não conseguiam ter a chamada “visão espacial” necessária para resolução de problemas.

Sendo assim, a otimização de embalagens utilizadas no cotidiano dos alunos, seria uma maneira de trazer os estudantes para um universo próximo e o desenvolvimento do projeto das embalagens preencheria inúmeras lacunas deixadas na construção do raciocínio geométrico.

O trabalho de campo foi dividido em etapas da seguinte maneira:

- Apresentação de uma Problematização:

É possível a modificação da forma de uma embalagem original, de um determinado produto, sem alterar ou com mínima alteração do seu volume, melhorando ou corrigindo alguma funcionalidade da embalagem?

- Metodologia:

- Orientar aos alunos que discutam embalagens de produtos que sejam utilizados no dia a dia.

- Reconhecimento do problema e formação de hipóteses.

- Discussão entre as diversas formas das embalagens, destacando seus aspectos geométricos e investigando o motivo que os levaram a sua escolha.

-Identificar as formas geométricas que apareceram e destacar algumas de suas características.

- Explorar curiosidades e mostrar a importância da escolha conveniente de uma forma para nova embalagem.

- Refletir sobre o formato das embalagens, pois, muitas vezes, está vinculado a diversos fatores como empilhamento, custo, distribuição, transporte, marketing, entre outros.

- Instrumentalização:

- Dividir os alunos em grupos de até 5 pessoas, e orientá-los a discutir sobre as embalagens (instrumentos) que possam ser modificadas por eles, de forma que cada grupo apresente variadas formas geométricas;

- Informar as etapas do trabalho e os instrumentos avaliativos, valorizando essas etapas e deixando evidente o objetivo da apresentação do produto final: Escolher UM ÚNICO produto, modificando sua forma geométrica, se possível, mantendo o seu volume. Construir um protótipo da nova embalagem com material de sua preferência, elaborar e produzir uma propaganda que defenda essas modificações junto ao "mercado consumidor".

- Pesquisa:

- Indicar aos alunos que pesquisem sobre o produto, analisando os aspectos geométricos de sua embalagem tais como forma, dimensões, volume, capacidade, material utilizado, etc.

- Propor também, que os alunos pesquisem sobre a empresa que fabrica o produto e se é ela que produz as próprias embalagens.

- Destacar ainda, que os alunos observem se as escolhas da forma geométrica e do material usados na confecção da embalagem são convenientes para algum propósito e também, os aspectos que levaram o desenvolvedor do projeto da embalagem a fazer essas escolhas.

- Apresentação de soluções:

- Os alunos devem apresentar preferencialmente, no power point, os slides do projeto de modificação da embalagem, mostrando os cálculos utilizados na demonstração das áreas e volumes das embalagens antiga e modificada para a turma.

- Os grupos devem, se possível, o protótipo dessa nova embalagem criado pelo grupo, e uma pequena propaganda, podendo ser em forma de comercial (vídeo), folhetim e até mesmo em áudio.

- Os grupos devem se apresentar durante a semana "Matemática é vida" e na semana de Ciência, Cultura e Cidadania, promovida para toda a escola com intuito de mostrar a aplicabilidade dos conceitos aprendidos durante o ano letivo.

- Avaliação:

No estudo em casa, que deve ser resolvido e entregue pelos alunos, serão propostos exercícios que trabalham o cálculo de áreas e volumes de embalagens e discussões entre diversos tipos de sólidos e suas proporções.

Nos testes e provas devem ser utilizadas questões recentes de vestibulares que trabalham o custo da produção de embalagens, desperdício de volume no transporte de embalagens e outros problemas relacionados a materiais concretos.

Durante o desenvolvimento do projeto, serão propostas atividades com os grupos que visam o exercício dos temas apresentados e as dificuldades encontradas na montagem dos projetos desenvolvidos por todos os grupos.

4 APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Os alunos apresentaram diversos projetos de embalagens reformuladas. Dentre eles, podem ser mencionados: a alteração na embalagem do leite condensado, do achocolatado, do leite em caixa, da caixa de pizza, entre outros.

4.1 PROJETO 1

Figura 32 - Embalagem antiga e protótipo da nova embalagem do projeto 1

A embalagem do leite condensado originalmente consiste em um “cilindro”, caso ela seja “esticada”, sendo modificada para um prisma octogonal.

A justificativa para tal modificação foi a atual embalagem de Leite Moça possuir um formato diferenciado, porém gerando grande dificuldade por parte do consumidor na hora de retirar o conteúdo da mesma.

A embalagem, além de pouco prática para abertura, pode propiciar pequenos acidentes com as partes pontiagudas do metal que ficam em evidência.

Figura 33 - Tampa da nova embalagem e processo de abertura da embalagem antiga

A tampa da nova embalagem possui um ‘**tag**’, onde a abertura **independe** do uso de abridores e cortantes.

Além de **prática**, a embalagem é mais **segura**, devido ao achatamento das pontas, impedindo pequenos incidentes.

A nova embalagem também é **ecológica**, pois reduz em **9%** o uso de materiais na fabricação da mesma.

O cálculo envolvendo as áreas teve como resultado, com relação a embalagem original e a nova, respectivamente: 281,59 cm^2 e 260,84 cm^2. Essa variação permitiu a conclusão por conta dos integrantes do grupo que a nova embalagem reduz a quantidade de material utilizado para a sua fabricação e isso se torna uma grande vantagem para o custo da fabricação da mesma.

A associação para efeitos do cálculo de áreas foi a de um “cilindro”.

Embalagem atual

Área Total = Área Lateral + 2 x Área do Círculo

$$= 2\,\pi\,r\,h + 2\,\pi\,r^2$$

$$= 2 \times 3{,}14 \times 3{,}8 \times 8 + 2 \times 3{,}14 \times (3{,}8)^2$$

$$= 190{,}912 + 90{,}6832$$

$$= 281{,}5952\ cm^2$$

Figura 34 - Cálculo de áreas da embalagem antiga do projeto 1

Já para a nova embalagem, os cálculos foram muito mais precisos devido a sua nova forma:

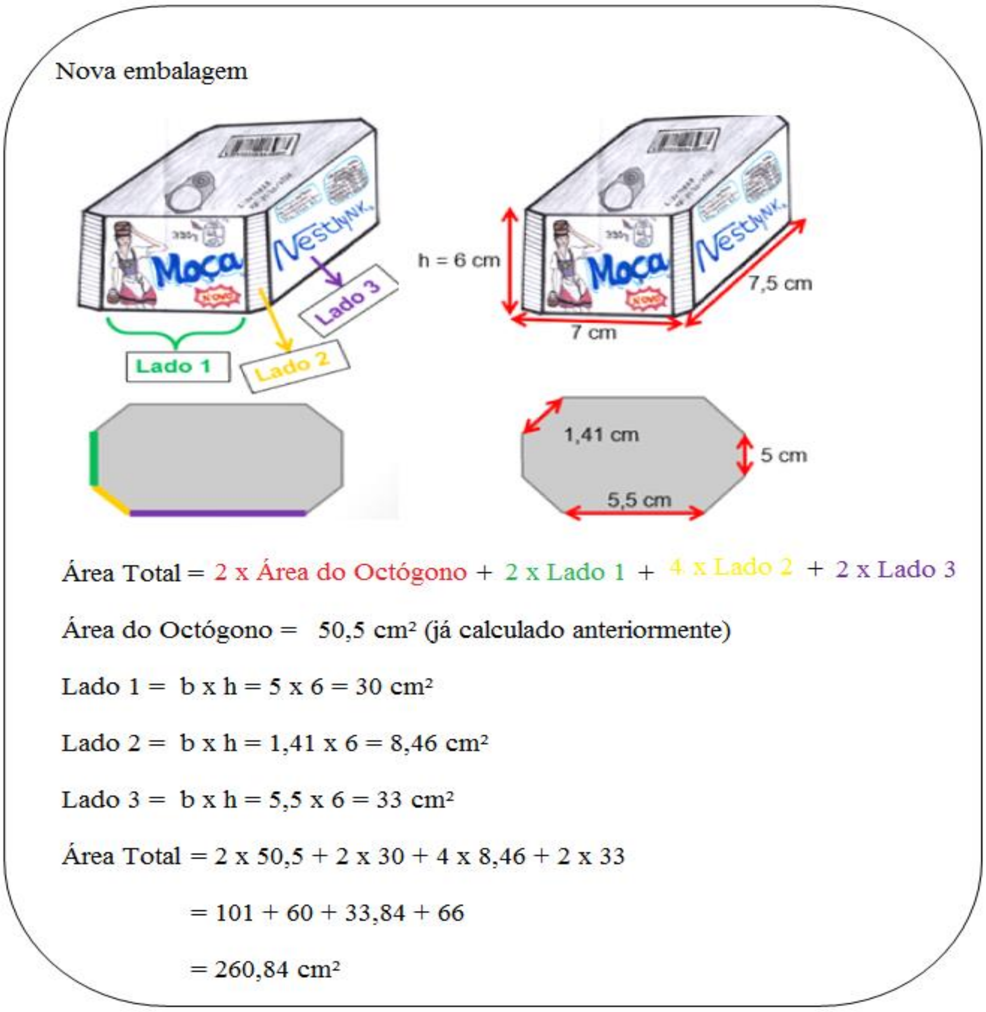


Figura 35 - Cálculo de áreas da nova embalagem do projeto 1

Para o cálculo dos volumes, na embalagem antiga foi utilizado, o Princípio de Arquimedes, só que dessa vez o procedimento foi gravado para que o trabalho fosse apresentado com maior consistência.

"Através de um recipiente medidor, colocamos água até um determinado nível (500ml). A seguir, colocamos a latinha e verificamos um novo volume (800ml). Com isso, subtraímos o valor com a latinha do valor sem a latinha, obtendo o volume da mesma: 300 mililitros."

https://www.youtube.com/watch?feature=player_embedded&v=NfvfGRSdcAU&hd=1

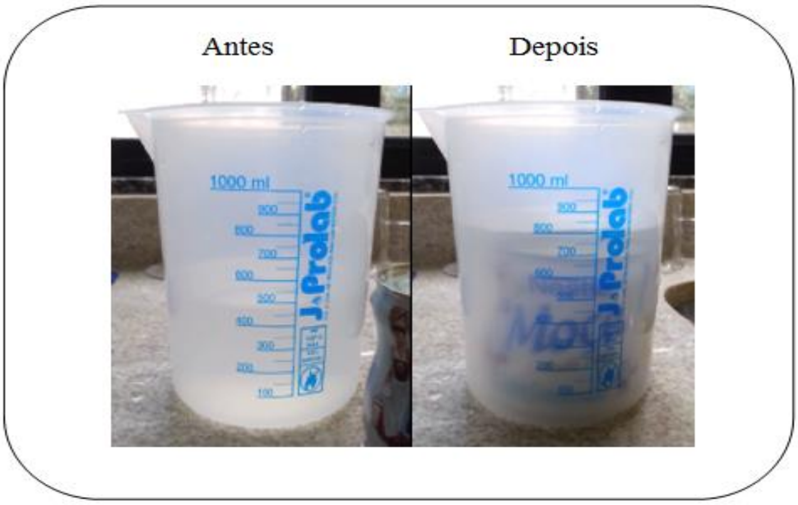


Figura 36 - Experimento de volumes da embalagem antiga do projeto 1

O processo de cálculo do volume da nova embalagem foi diferenciado, pois se tratava de uma nova embalagem em forma de prisma octogonal, visto que o octógono não é uma figura rotineira na vida dos estudantes, porém com grande cobrança nos vestibulares do Rio de Janeiro, o que tornou a apresentação e discussão proveitosa e eficiente.

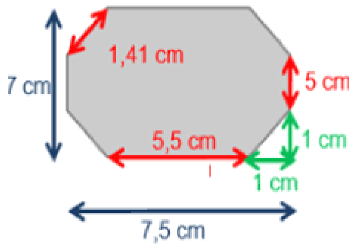
Nova embalagem

Área do Octógono = b x h – 4 x Área do Triângulo

= 7 x 7,5 - 4 x 1/2

= 52,5 - 2

= 50,5 cm²



Volume do Prisma = Área do Octógono x Altura do Prisma

= 50,5 x 6

= 303 cm³ ou 303 mililitros

Figura 37 - Cálculo de volume da nova embalagem do projeto 1

O cálculo da área do octógono foi feito por exclusão da área do retângulo pelas “pontas” que são os triângulos retângulos.

A conclusão do grupo foi a redução significativa no custo de fabricação da embalagem e o mantimento da quantidade (houve uma diferença insignificante do volume obtido, que era o objetivo inicial do projeto). Foi mostrado ainda, o conhecimento da parte percentual, onde a redução da área total da embalagem implica diretamente no custo de sua fabricação.

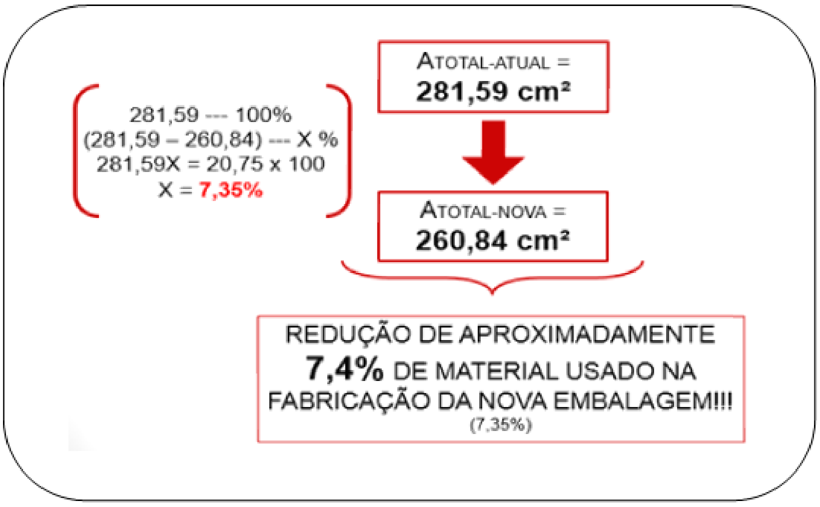


Figura 38 - Cálculo de variação percentual das áreas das embalagens do projeto 1

Apesar da criatividade do projeto, e da apresentação minuciosa de áreas e volumes, demonstrando o conhecimento dos assuntos trabalhados em aula, o projeto mostra valores que não fazem sentido, pois, ao analisarmos um prisma e um cilindro, ambos com o mesmo volume, o cilindro terá sua área total MENOR que o prisma, como mostraremos no projeto 7, das embalagens cilíndricas. Sendo assim, concluímos que as dimensões apresentadas pelo grupo, estão superdimensionadas, o que pode levar o leitor a tirar conclusões equivocadas.

4.2 PROJETO 2

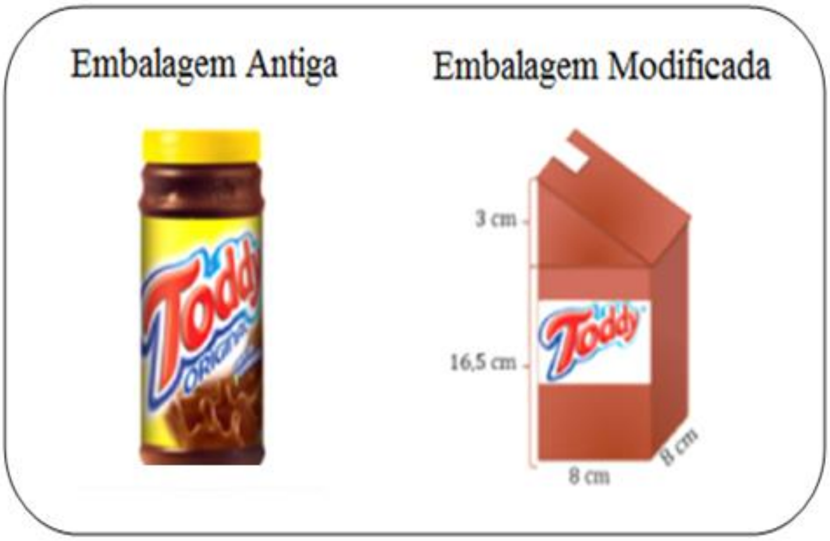


Figura 39 - Embalagem antiga e protótipo da nova embalagem do projeto 2

O projeto voltado para a embalagem do achocolatado resultou na alteração do formato da embalagem de um cilindro, diferente do usual, para a embalagem de um paralelepípedo associado à metade de um outro paralelepípedo.

A justificativa para tal modificação foi a seguinte:

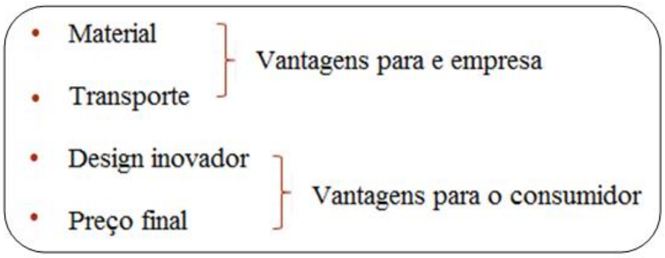


Figura 40 - Vantagens erelacionadas a nova embalagem do projeto 2

Inicialmente os alunos utilizaram a teoria de Arquimedes para medir o volume da embalagem antiga, pois justificaram que as “deformações” da embalagem fariam com que não fosse possível o cálculo de volume. Obtiveram como resultado 1150 ml de volume.

O processo foi realizado no laboratório da escola, onde foi colocado dentro de uma vasilha com água o produto antigo, e verificou-se o volume que foi deslocado, que é equivalente ao volume da embalagem cheia.

Incentivando a pesquisa, de forma que eles encontrassem uma outra maneira de calcular o volume desse sólido “deformado”, a solução apresentada foi a seguinte:

Primeiramente, enchemos a embalagem antiga com achocolatado até uma altura de 18cm e em seguida, calculamos o volume do cilindro obtido apenas na parte cheia da embalagem:

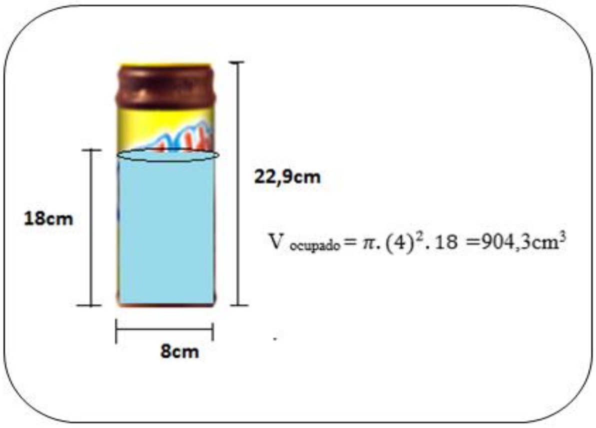


Figura 41- Experimento e cálculo de volume da embalagem antiga do projeto 2

Ao virarmos o recipiente de cabeça para baixo, temos a seguinte situação:

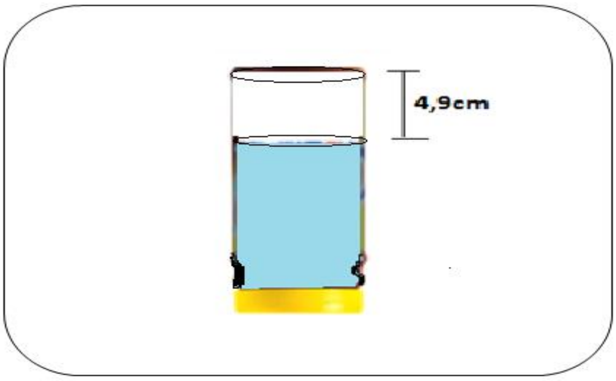


Figura 42 - Embalagem de toddy invertida

Medimos o a altura do cilindro vazio, cujo resultado foi 4,9cm, e em seguida calculamos o volume da parte vazia:

$$V_{vazio} = \pi.(4)^2.4{,}9 = 246{,}1\ cm^3$$

Sabemos que o volume vazio antes deve ser igual ao volume vazio depois, sendo assim:

$V_{total} = V_{ocupado} + V_{vazio} = 904{,}3cm^3 + 246{,}1cm^3 = 1150{,}4cm^3$.

Na sequência, determinaram o volume da nova embalagem através das fórmulas de volume de um paralelepípedo maior, adicionado a uma metade de um paralelepípedo menor, cujo resultado final foi um novo volume de 1152cm³.

- Paralelepípedo de base quadrada com a aresta valendo 8 cm e a altura 16,5 cm:

$$V = \text{Área da base} \cdot \text{Altura}$$

$$V = 8 \cdot 8 \cdot 16{,}5 = 1056\ \text{cm}^3$$

- Paralelepípedo de base quadrada 8 cm e altura 3 cm dividido em dois:

$$V = \frac{8 \cdot 8 \cdot 3}{2} = 96\ \text{cm}^3$$

- Soma dos volumes: $1056 + 96 = 1152\ \text{cm}^3$
- Logo, o novo volume terá 2 cm³ a mais de modo que esses 2 cm façam com que o produto tenha menos pressão e menos risco de explodir.

Figura 43 - Cálculo de volumes da nova embalagem do projeto 2

Os estudos e cálculos realizados inicialmente pelos alunos, permitiram a conclusão de que a nova embalagem teria um aumento de 2 cm^3, os quais diminuiriam a pressão do produto e, consequentemente, o risco de explosão.

A seguir temos o novo modelo de encaixe, que reduziria espaços entre as embalagens durante seu transporte:

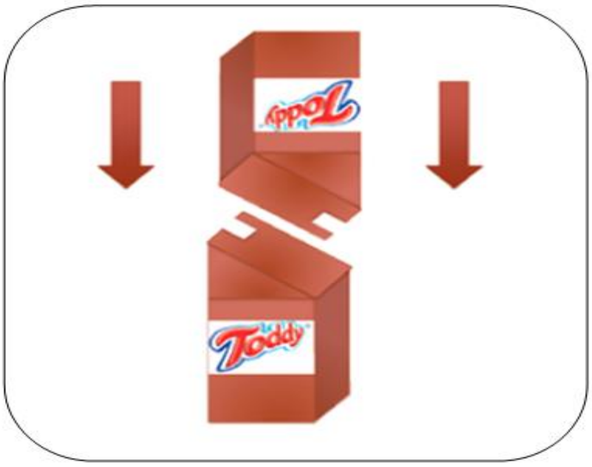


Figura 44 - Modelo de encaixe da nova embalagem do projeto 2

O grupo mostrou através de um desenho, como eram transportadas as embalagens antigas:

Figura 45 - Simulação do transporte das antigas embalagens do projeto 2

Concluímos que para transportarmos 27 latas de toddy, foi necessário, uma caixa com a base quadrada de lado igual a três vezes o diâmetro e a altura da caixa igual a três vezes a altura da lata de toddy antiga.

Então, o grupo mostrou através da figura 46, o modelo de transporte da nova embalagem:

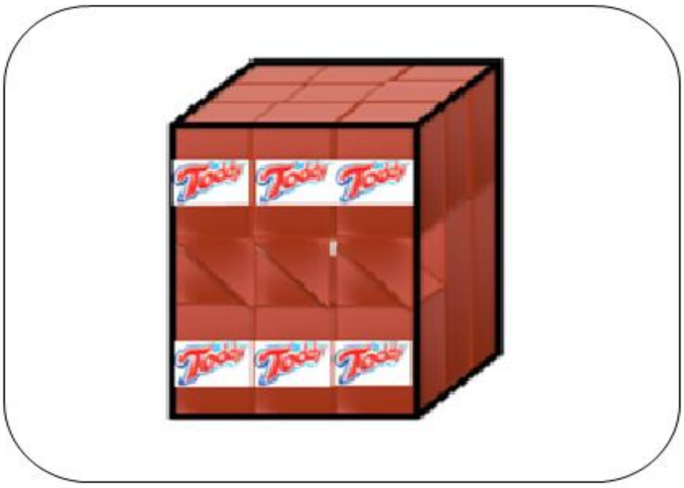


Figura 46 - Simulação do transporte das novas embalagens do projeto .

O novo modelo permite visualizar através da figura 46, que conseguimos transportar 18 embalagens numa caixa cuja base é quadrada de lado igual ao triplo do lado do quadrado da nova embalagem, e altura é a soma das "alturas" maior e menor do novo modelo.

As vantagens apresentadas pelos alunos, foi a facilidade de despejar o produto sem o uso de colher, em função da inclinação da embalagem e do furo que ela apresenta na ponta e a otimização do transporte, tendo em vista que ela ocupa espaços que a embalagem anterior não permitia.

4.3 PROJETO 3

Figura 47 - Embalagem antiga e Embalagem nova do projeto 3

A embalagem de pizza original consiste em prisma octogonal regular, sendo modificada para uma nova embalagem em forma de cilindro. A alteração proposta diminui a área total, reduzindo portanto, a quantidade de material necessário para a sua produção e, consequentemente, os custos da empresa.

Soma-se a isso o fato de que a nova embalagem poderia ser utilizada como suporte durante o consumo da pizza, pois ela se poderá ser desmontada com o mesmo formato dos pedaços conforme esses fossem sendo retirados. Logo não há necessidade do uso de pratos. Com isso, economiza-se a água que seria utilizada para lavar os pratos, causando um impacto positivo no meio ambiente.

Assim como no projeto 2, os cálculos de áreas de volumes foram bastante interessantes, visto que o grupo utilizou conceitos adquiridos na série anterior (1ª ano do Ensino Médio) como a "lei dos cossenos", mostrando também a aplicabilidade de um conceito que parecia ser específico apenas para matemáticos e quebrando o tabu de que, tais conteúdos, não são utilizados "nas nossas vidas", como os próprios estudantes comentam inúmeras vezes.

A seguir, é mostrado o cálculo de áreas de volumes da embalagem antiga:

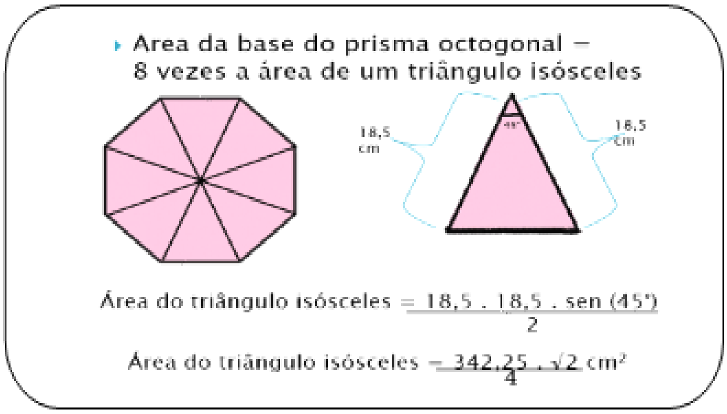


Figura 48 - Cálculo de áreas da embalagem antiga do projeto 3

Para o cálculo da área do octógono foi feita a divisão em oito triângulos isósceles, e durante a apresentação do trabalho foram utilizados termos específicos utilizados durante as aulas, como "área do triângulo especial". Isso mostra que o grupo utilizou ao máximo os conceitos desenvolvidos em sala de aula.

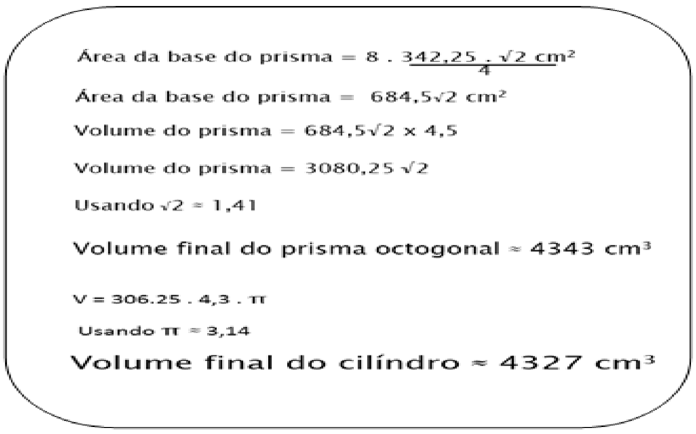
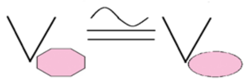


Figura 49 - Cálculo de áreas e volumes das embalagens do projeto 3

Nota-se que a diferença entre os volumes é de 16 ml, o que corresponde a menos de $\frac{1}{4}$ do volume de um copo de água usual, logo esta alteração não possui grande importância.



O grupo observou que a mudança da forma da embalagem da pizza, de um prisma octogonal para um cilindro, diminui a área da base, reduzindo também a quantidade de material necessário e consequentemente os custos da empresa. Para se descobrir a quantidade de papelão que seria economizada, foi feita a comparação entre as áreas totais das duas embalagens.

Área do Prisma Octogonal = 2(área da base + área lateral)

Área da Base = 972 cm²

Área lateral = 8 x área de um retângulo (base x altura)

Área lateral = 8 . 4,5 . 14

Área lateral = 504 cm²

Lei dos Cossenos:

$x^2 = 18,5^2 + 18,5^2 - 2 . 18,5 . 18,5 . \cos(45°)$

Área total do prisma = 2(972 + 504)

Área Total do Prisma = 2952 cm²

Figura 50 - Cálculo de áreas da embalagem antiga do projeto 3

Área do cilindro = 2(área da base + área lateral)

Área da base = πr^2

Área da base = $3,14 . 17,5^2$

Área da base = 961,62 cm²

Área lateral = $2 \pi r h$

Área lateral = 2 . 3,14 . 17,5 . 4,5

Área lateral = 494,55 cm²

Área total = 2(961,62 + 494,55)

Área Total do Cilíndro = 2912 cm²

Figura 51 - Cálculo de áreas da emblagem modificada do projeto 3

A conclusão chegada pelo grupo é que houve uma diferença de 40cm² na área total da nova embalagem, fazendo com que o custo de fabricação seja menor.

Supondo que uma pizzaria produza 200 pizzas por dia, com esse novo modelo de embalagem, ela vai utilizar 8.000 cm² à menos de papelão, caso esse seja o material utilizado na sua fabricação.

Em relação ao volume, a diferença foi de apenas 16cm³, o que para os autores do projeto é um valor pouco significativo comparado aos benefícios da nova embalagem.

4.4 PROJETO 4

Figura 52 - Embalagem antiga do projeto 4

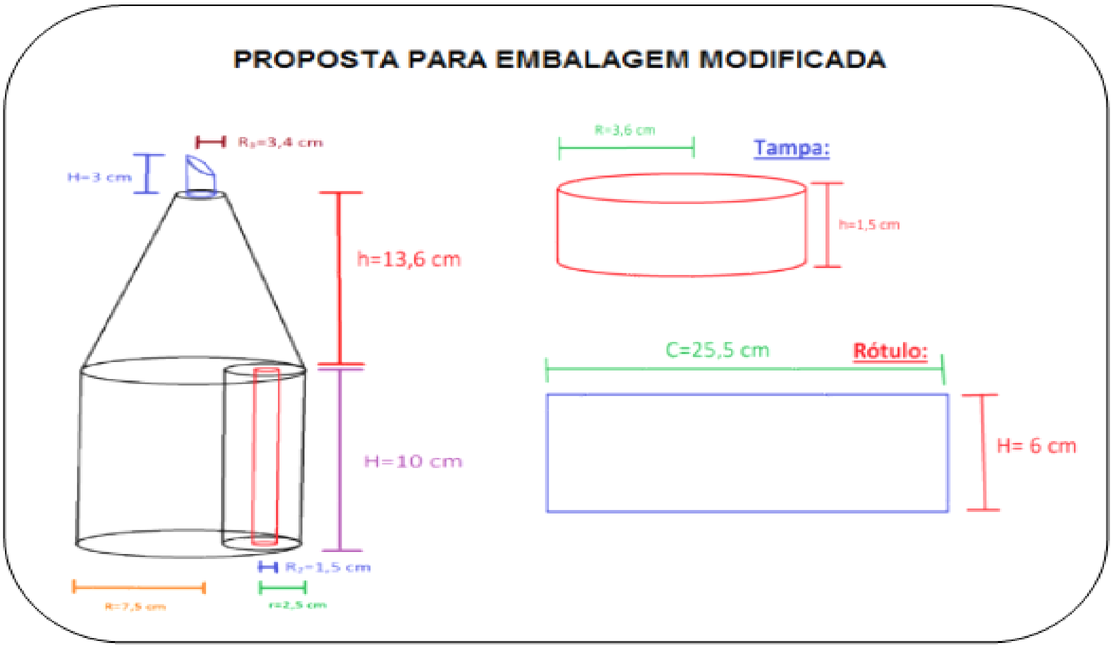


Figura 53 - Proposta de nova embalagem do projeto 4

O Projeto 4, diferente dos demais, não apresentou o protótipo da nova embalagem, com a justificativa aceitável, de um projeto mais ousado, com forma diferenciada e de difícil construção manual segundo os alunos.

Outro fator que deve ser destacado, é que a proposta inicial de se manter o volume da embalagem anterior, não foi mantida. Mesmo assim, achei de grande validade a discussão do projeto em sala, pois os cálculos apresentados mostram fatores que não foram mostrados nos projetos anteriores, como o cálculo para determinação das medidas necessárias para que tenhamos um determinado volume previamente estipulado. Um raciocínio feito “ao contrário”, pois na maioria das vezes, temos as medidas pré-determinadas para calcularmos as áreas e volumes.

Outra observação importante nos cálculos apresentados, foi a utilização da proporcionalidade e da planificação do cilindro, que são assuntos cobrados nos principais modelos de vestibulares do país.

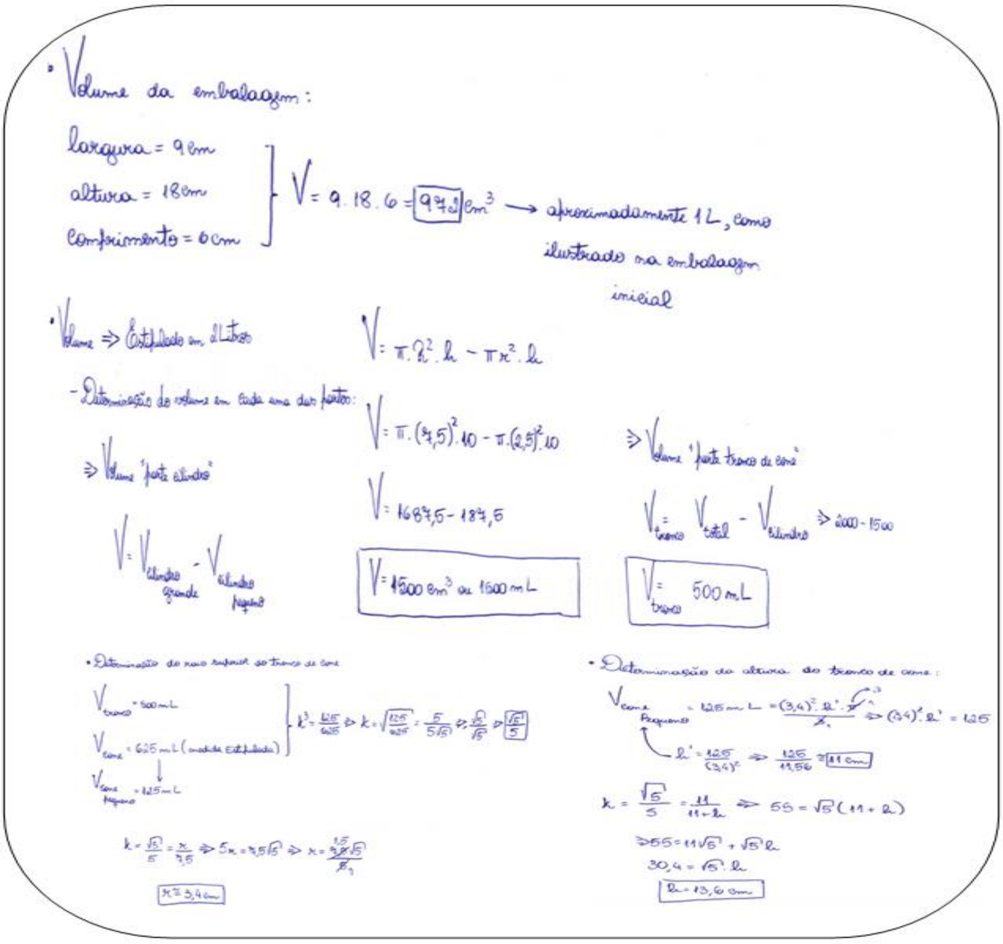


Figura 54 - Cálculo de volumes e dimensões da embalagem do projeto 4

4.5 PROJETO 5

Neste projeto, os alunos tiveram a ideia de criar um brinquedo denominado **Rocket Power Juice**.

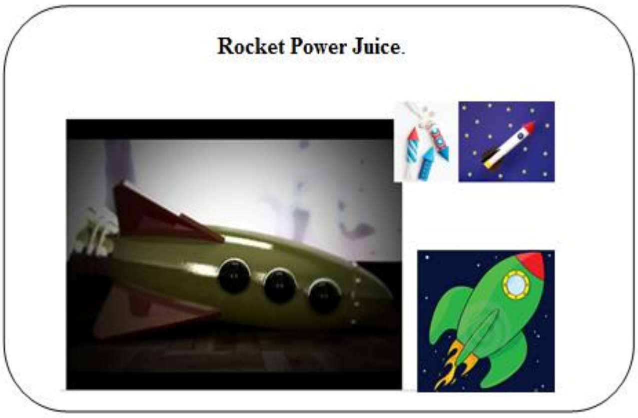


Figura 55 - Brinquedo utilizado como modelo para modificação

O projeto a princípio não se enquadrou dentro do padrão proposto pela orientação metodológica, mas a criação do protótipo mostrou a utilização dos conceitos de troncos de cone e de cilindros, que enriqueceram a discussão desses determinados conteúdos e a apresentação do trabalho mostrou que podemos dentro da geometria espacial, tentar fugir dos famosos formulários, utilizando apenas alguns conceitos já pré-definidos ainda no ensino fundamental, como a semelhança de triângulos.

Figura 56 -Protótipo do novo brinquedo do projeto 5

As medidas estipuladas pelos alunos no projeto foram as seguintes:

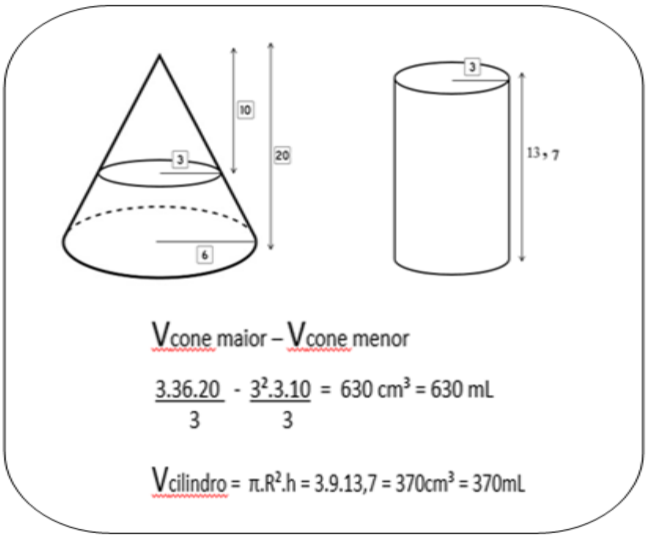


Figura 57 - Cálculo de volumes do novo brinquedo do projeto 5

Durante a apresentação das medidas, nota-se a ideia da formação do tronco de cone a partir da secção transversal de um cone maior. Tal observação foi introduzida pelos próprios alunos, com o conceito de sólidos semelhantes, que é de grande importância no ensino de geometria e na construção do raciocínio do aluno.

O grupo foi questionado pelos colegas de turma, sobre a existência da parte superior do brinquedo, na qual interagimos sobre qual seria o melhor formato a utilizar. Concluímos que o ideal seria uma semiesfera, onde o raio seria igual ao raio cilindro. O cálculo de volume da semiesfera, e o volume total do sólido, que seria a soma dos volumes dos três sólidos, não foi apresentado pelo grupo.

Apesar do bom debate sobre cálculos de volumes e discussão sobre os sólidos semelhantes, ficamos na ausência das melhorias materiais e a falta do cálculo de áreas das formas acima, o que nos trouxe o questionamento sobre uma exploração mais consistente, caso fosse registrado também a proporcionalidade no cálculo das áreas de troncos, que ainda não tivera nenhum registro nas demais apresentações.

4.6 PROJETO 6

Este projeto foi utilizado como modelo para mostrarmos onde encontramos erros mais comuns utilizados pelos alunos. A ideia do projeto era de modificar uma caixa de sabão em pó OMO e transformá-la numa embalagem plástica, cilíndrica. A justificativa era de que as embalagens de papelão normalmente molham e rasgam como maior facilidade e também, o mesmo argumento do grupo que trabalhou a embalagem do TODDY, cuja justificativa era a concentração de quantidade nos cantos da embalagem, fazendo com que exista sempre o desperdício do sabão que fica no fundo.

Figura 58 - Embalagem antiga e protótipo da nova embalagem do projeto 6

Os cálculos apresentados na apresentação foram simples, por se tratarem de formas espaciais simples, que são o paralelepípedo retângulo e o cilindro circular reto.

Para calcularmos o volume da embalagem original do produto, verificamos o comprimento, a largura e a altura. A caixa inicial tinha 24cm de comprimento, 8cm de largura e 15,3 cm de altura. Sendo assim, seu volume era calculado da seguinte maneira:

$$V_{\text{embalagem antiga}} = 24 \times 8 \times 15{,}3 = 2937{,}6 \text{ cm}^3.$$

Para calcularmos o volume da nova embalagem, temos também uma forma simples que é o cilindro circular reto de raio da base 5,25cm e altura 30cm.

$$V_{\text{embalagem nova}} = 3{,}14 \times 5{,}25^2 \times 30 = 2596{,}4 \text{ cm}^3.$$

O primeiro questionamento, foi a grande diferença de volume, que poderia ter sido evitada se o grupo não tivesse “chutado” um valor para altura dessa nova embalagem.

Discutimos então, qual seria o valor ideal de altura, para que eles mantivessem o volume anterior, visto que as formas espaciais eram simples de serem manipuladas.

Encontrando um valor ideal para a altura, temos a seguinte solução:

$$3{,}14 \times 5{,}25^2 \times h = 2937{,}6 \text{ cm}^3$$

Sendo assim, o valor da nova altura deveria ser de aproximadamente 34cm.

Se tivéssemos que encontrar um valor apropriado para o raio, teríamos a seguinte expressão:

$$3{,}14 \times R^2 \times 15 = 2937{,}6 \text{ cm}^3$$

Sendo assim, o valor do novo raio, deveria ser de aproximadamente 7,9cm.

A imagem a seguir, foi capturada do trabalho de apresentação, para que pudéssemos tirar conclusões necessárias para o entendimento do erro ocorrido no processo.

Figura 59 -Simulação de transporte da embalagem antiga do projeto 6

Figura 60 - Simulação do transporte da nova embalagem do projeto 6

A divisão dos volumes só pode ser efetuada quando tratamos apenas da quantidade existente em cada embalagem e não do material concreto. Para este, levamos em consideração a posição a ser colocada e a própria forma física da embalagem, que na maioria das vezes deixa pequenos “espaços” vazios. No caso da caixa de sabão, suas dimensões deveriam ter os mesmos divisores comuns das dimensões da caixa de transporte para não existir tais espaços.

4.7 PROJETO 7

Ao entrar para Escola Parque no ano de 2012, fui apresentado a alguns projetos pedagógicos fantásticos, entre eles, o projeto “SABER MAIS”, que tem por objetivo transcender os currículos escolares, aprofundá-los e despertar o interesse científico nas diversas áreas do conhecimento. É um projeto extracurricular e opcional para os alunos do ensino médio e que normalmente consegue englobar mais de 70% dos alunos da escola.

Voltado para a área de Matemática, a escola oferece cursos como Educação Financeira, com estudos sobre macroeconomia, finanças e mercado de capitais e o curso de Cálculo Diferencial Integral, com os estudos dos limites, derivadas, integrais, equações diferenciais e as suas respectivas aplicações na física e na geometria.

Aproveitando o momento em que tínhamos um grupo de alunos do 2° ano do ensino médio inscritos na turma de Cálculo, desenvolvemos uma extensão fantástica do projeto das embalagens, que visava utilizar os conceitos aprendidos durante as aulas de cálculo para mostrarmos para os demais grupos, uma outra visão matemática dentro do processo de redução de custos na produção das embalagens.

O projeto consiste em, dado um volume fixo de uma embalagem cilíndrica, verificarmos diversos valores de raio e altura para essa embalagem, e através do estudo das derivadas, mostrar quais seriam os valores ideais dessa embalagem para que ela tivesse a menor área total possível, fazendo assim, com que o custo de sua fabricação fosse mínimo

Primeiramente, desenvolvemos uma tabela com os valores de volumes fixos e raios variados de 1cm a 5cm e de acordo com os conhecimentos sobre os volumes dos cilindros, completamos essa tabela com os valores da altura e da área total desses cilindros.

Volume(ml)	Raio da base(cm)	Altura(cm)	Área Total(cm²)
300,0	1,0	95,5	606,3
300,0	1,5	42,5	414,1
300,0	2,0	23,9	325,1
300,0	2,5	15,3	279,1
300,0	3,0	10,6	256,4
300,0	3,5	7,8	248,2
300,0	4,0	6,0	250,4
300,0	4,5	4,7	260,3
300,0	5,0	3,8	276,9

Figura 61 - Tabela de resultados para uma lata cilíndrica de volume 300ml

Desenvolvemos mais duas novas tabelas, novamente com volume previamente estipulado e raios variados:

Volume(ml)	Raio da base(cm)	Altura(cm)	Área Total(cm²)
500,0	1,0	159,2	1006,2
500,0	1,5	70,8	680,8
500,0	2,0	39,8	525,0
500,0	2,5	25,5	439,1
500,0	3,0	17,7	389,8
500,0	3,5	13,0	362,5
500,0	4,0	10,0	350,4
500,0	4,5	7,9	349,3
500,0	5,0	6,4	356,7
500,0	5,5	5,3	371,7
500,0	6,0	4,4	392,6

Figura 62 -Tabela de resultados para uma lata cilíndrica de volume 500ml

Volume(ml)	Raio da base(cm)	Altura(cm)	Área Total(cm²)
1000,0	1,0	318,5	2006,3
1000,0	1,5	141,5	1347,4
1000,0	2,0	79,6	1025,0
1000,0	2,5	51,0	839,2
1000,0	3,0	35,4	723,1
1000,0	3,5	26,0	648,2
1000,0	4,0	19,9	600,4
1000,0	4,5	15,7	571,4
1000,0	5,0	12,7	556,7
1000,0	5,5	10,5	553,3
1000,0	6,0	8,8	559,2
1000,0	6,5	7,5	572,7
1000,0	7,0	6,5	593,0
1000,0	7,5	5,7	619,8
1000,0	8,0	5,0	651,6

Figura 63 - Tabela de resultados para uma lata cilíndrica de volume 1000ml

As conclusões primárias obtidas nesta etapa do processo, foram:

- "*A altura diminuía conforme se aumentava o raio*";

- "*A área diminuía conforme se aumentava o raio, até um determinado momento. Depois essa área voltava a aumentar novamente*".

Em seguida, tentando transportá-los para o real, pensamos nos valores da tabela e nos possíveis cilindros na sua forma concreta:

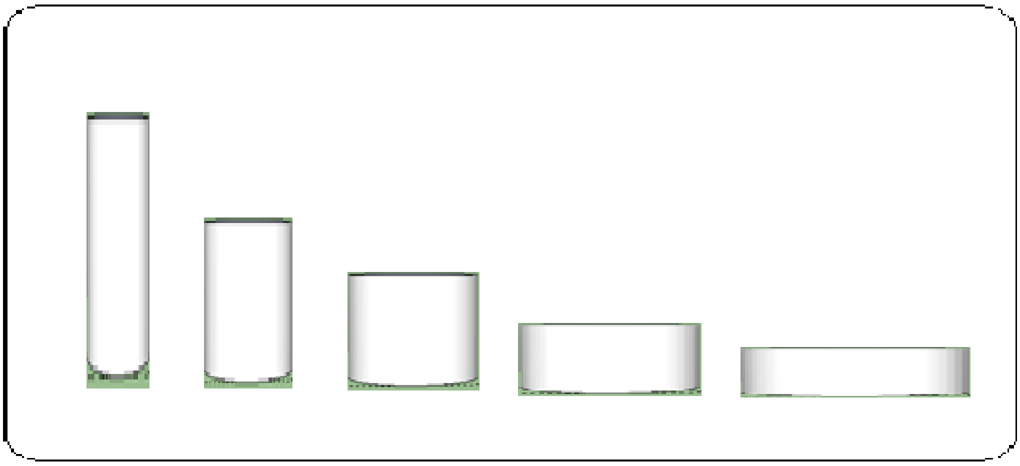


Figura 64 - Cilindros com raios e alturas variados

As conclusões primárias desta etapa foram:

- "*Os cilindros finos são maiores e os cilindros largos são menores*";

- "*Os cilindros mais quadradinhos são os que tem a menor área*".

Antes de entrarmos no cálculo diferencial integral, pensamos como seria o gráfico que relacionava a área com o raio desses cilindros observados na tabela, e a conclusão foi a seguinte:

- "*O gráfico é decrescente até um determinado momento e depois ele passa a ser crescente*."

Partindo dessa última conclusão, montaremos os gráficos das funções que relacionam as áreas dos cilindros de volumes 300ml, 500ml e 1000ml em função dos seus respectivos raios, com o auxílio do ***geogebra***.

Inicia-se o processo colocando a altura em função do raio:

$$300 = \pi\ r^2\, h$$

$$h = \frac{300}{\pi\ r^2}$$

Substituindo o h encontrado na expressão da área total do cilindro, temos:

$$A_{total} = 2\,\pi\ r^2 + 2\,\pi\, h$$

$$A_{total} = 2\,\pi\ r^2 + 2\,\pi\ \frac{300}{\pi\ r^2}$$

$A_{total\,1}(r) = 2\,\pi\ r^2 + \frac{600}{r^2}$, $A_{total\,2}(r) = 2\,\pi\ r^2 + \frac{1000}{r^2}$, e $A_{total\,3}(r) = 2\,\pi\ r^2 + \frac{2000}{r^2}$

Para obtenção do gráfico, colocamos numa escala menor, para que a visualização do gráfico ficasse nítida, pois com os dados reais, o gráfico não ficava visível.

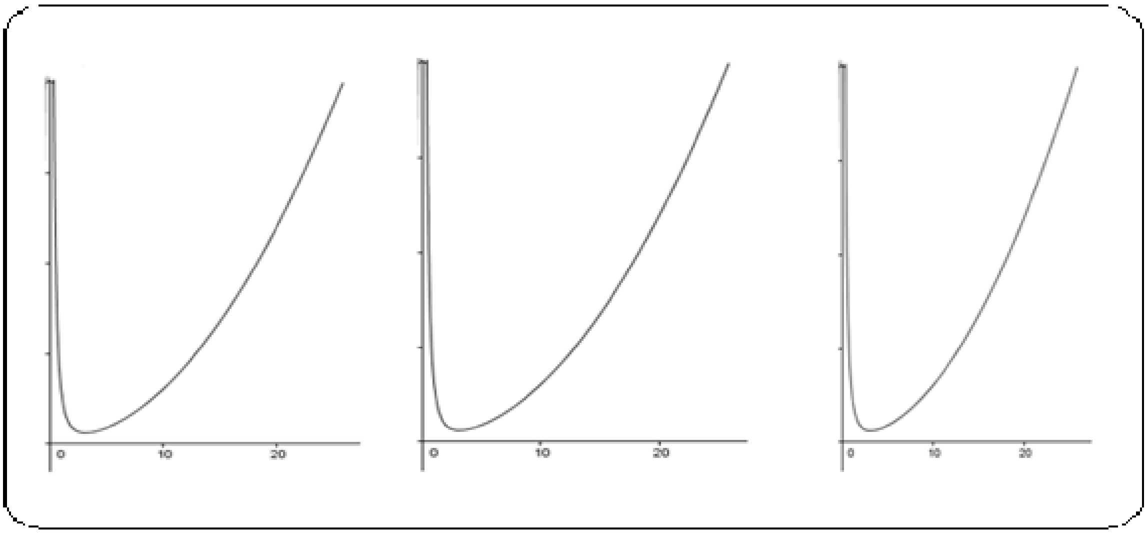


Figura 65 -Gráficos de áreas em função do raio das três embalagens com volumes fixos

Utilizando agora os conceitos utilizados nas aplicações das derivadas o grupo chegou a abstração do problema proposto da seguinte forma:

Tomaremos com referência as variáveis:

v = volume do cilindro

A = área total

r = raio da base

h = altura do cilindro

Dados:

I $v = \pi r^2 h$

II $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

Pela equação do volume, temos:

$$v = h\pi r^2$$

$$h = \frac{v}{\pi r^2}$$

Substituindo *h* em II:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r \,.\, \frac{v}{\pi r^2}$$

$$A = 2\pi r^2 + \frac{2v}{r}$$

Para encontrar o valor mínimo para a área, devemos derivar *A* em função de *r*, tomando *v* como constante, pois os estudos dos sinais da derivada primeira, nos fornece os intervalos de crescimento e decrescimento da função área, e a raiz dessa derivada, o ponto crítico que estamos procurando, pois nele, a função troca de comportamento em relação ao crescimento. Sendo assim:

$$\frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{2v}{r^2}$$

Igualando a derivada a 0 para encontrar o valor crítico da função área:

$$4\pi r - \frac{2v}{r^2} = 0$$

$$4\pi r = \frac{2v}{r^2}$$

$$\frac{4r}{2} = \frac{v}{\pi r^2}$$

$$2r = \frac{v}{\pi r^2}$$

Concluímos que o raio de um cilindro com área total mínima, deve ser dado por: $r = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$.

Temos também que segundo a equação I:

$$h = \frac{v}{\pi r^2}$$

Portanto, substituindo $v/\pi r^2$, temos que:

$$2r = h$$

Nota-se que a relação acima é a propriedade determinante de um cilindro equilátero, ou seja, aquele cujo diâmetro da base é igual à altura e a sua secção meridiana é um quadrado. Portanto, reiterando o objetivo expresso no início desta seção, conclui-se que um cilindro equilátero é o melhor modelo possível para a construção de uma embalagem cilíndrica.

Nas tabelas acima, para encontrarmos o valor do raio que obteria a área total mínima, teríamos que usar a relação $r = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$, substituindo os valores de volumes previamente estipulados.

Portanto:

Para o volume de 300ml, temos que o raio deve ser de 3,6cm para que o cilindro tenha área total mínima;

Para o volume de 500ml, temos que o raio deve ser de 4,3cm para que o cilindro tenha área total mínima;

Para o volume de 1000ml, temos que o raio deve ser de 5,4cm para que o cilindro tenha área total mínima.

Com a ida até os supermercados, o grupo concluiu que muitas empresas "já pensaram nisso antes", pois várias embalagens, como a do Pó Royal, a do Sustagem, a do leite condensado e algumas mais, apresentam a forma de cilindro equilátero. Pensamos que, as empresas que não utilizam esses artifícios, poderiam pensar na proposta de modificação, levando em consideração APENAS, o custo de fabricação das suas embalagens.

4.8 PROJETO 8

Neste trabalho, tivemos a mudança de um tipo de embalagem do produto Nutella. A justificativa é a falta de praticidade da embalagem antiga e os benefícios que a nova embalagem pode trazer, utilizando a mesma quantidade.

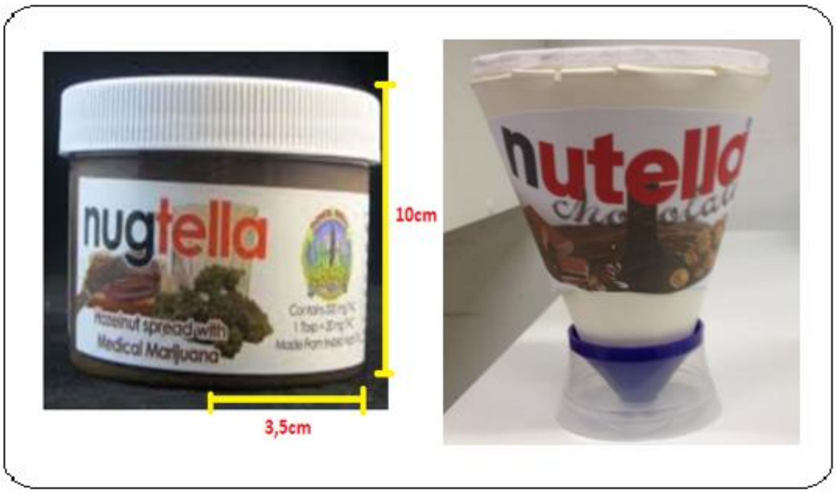


Figura 66 - Embalagem antiga e protótipo da nova embalagem do projeto 6

Para a nova embalagem seria utilizado um material composto de 75% plástico e 25% alumínio, como da pasta de dente, podendo assim reciclar e utilizar novamente, e sendo também mais maleável e fácil de manusear, evitando desperdício que existia na embalagem antiga. Ela também seria mais, higiênica por causa do modelo de tampa utilizado.

Ao contrário da antiga embalagem, onde a tampa era de rosca, o produto apresentado é mais prático, pois abre e fecha com facilidade, e assim consegue-se maior aproveitamento no consumo.

O cálculo de volume dessa embalagem antiga é dado por:

$$Volume_{total} = \pi r^2 h \ldots 3{,}14 \text{ x } 3{,}5^2 \text{ x } 10 \cong 385cm^3$$

As medidas da nova embalagem foram obtidas através de um programa eficaz para uma produção, mas não efetivo para sala de aula. O programa ***Webcalc,*** calcula volumes de troncos de cones, dados os valores dos raios e da altura do tronco. Sendo assim, o grupo atribuiu valores para R próximos do que tínhamos antes, sabendo que teriam que aumentar o raio superior e diminuir o raio inferior, para que o volume ficasse mais próximo de $385cm^3$.

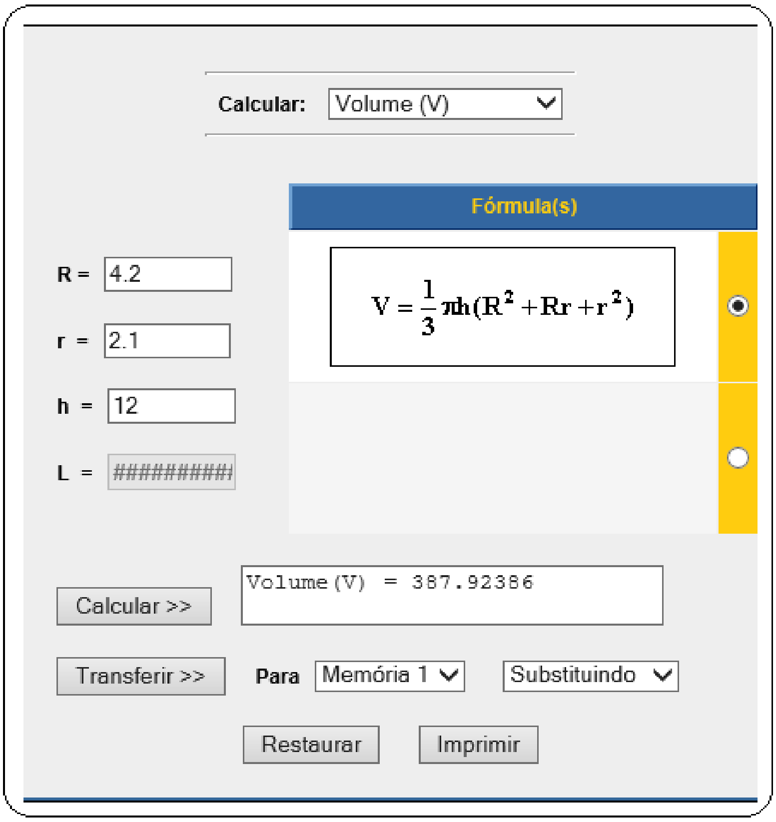


Figura 67 - Simulação de valores e cálculo do volume tronco pelo programa webcalc

Descobertas quais deveriam ser as medidas, o que restou ao grupo, foi mostrar matematicamente como podemos chegar ao 385cm^3, usando as medidas dos raios e a da altura que o programa nos mostrou.

A razão entre os raios nos mostra que a razão de semelhança entre os cones maior e menor (prolongando as geratrizes do tronco) é de 1:2. Sendo assim a proporção entre os volumes de 1:8 e o volume do tronco é 7/8 do volume do cone maior.

Por semelhança, a altura do cone maior seria 24cm.

$$V_{cone\ maior} = \frac{\pi.(4,2)^2.24}{3} = 443,11\text{cm}^3$$

$$V_{tronco} = \frac{7}{8}.443,11 = 387,72\text{ cm}^3,$$

Temos uma pequena diferença, por conta da aproximação de π.

Para o cálculo de áreas, temos:

Área antiga = 3,14. (3,5)^2 + 2. 3,14 .3,5.10 = 258,26cm^2 (contando com a base e sem a tampa)

Área da embalagem nova = Área da base superior do tronco + Área lateral do tronco.

O programa ***webcalc*** utilizado pelos alunos, também calculou a área lateral do tronco, mas, pedi que mostrassem novamente como o programa chegou a tal resultado.

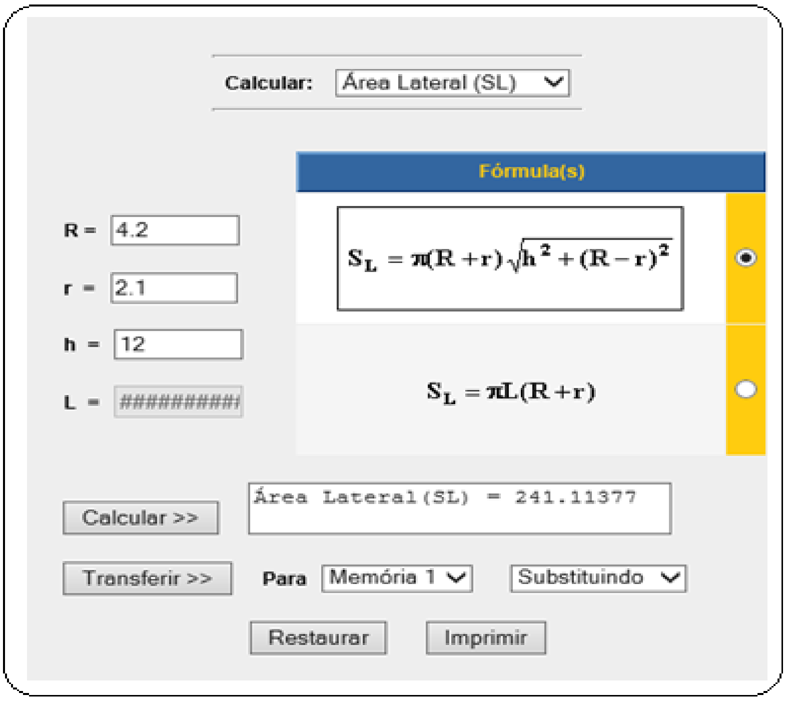


Figura 68 - Simulação de valores e cálculo da área lateral do tronco pelo programa webcalc

$A\ lateral_{cone\ grande} = \pi\ .R.G,$

temos: $H^2+R^2=G^2$,

assim, $24^2+(4,2)^2=G^2$

Conclusão: G= 24, 36cm e $A\ lateral_{cone\ grande} = 3{,}14\ .4{,}2.24{,}36 = 321{,}25$cm^2.

Novamente, a razão entre os raios nos mostra que a razão de semelhança entre os cones maior e menor (prolongando as geratrizes do tronco) é de 1:2. Sendo assim a proporção entre as áreas é de 1:4 e a área lateral do tronco é 3/4 da área lateral do cone maior.

$A\ lateral_{tronco} = \frac{3}{4}.321{,}25 \cong 241cm^2$

Temos uma pequena diferença, por conta da aproximação de π.

A área total da nova embalagem então, ficou: $241+55{,}4\cong 296$cm^2, contando com a base superior e sem a base inferior (tampa).

O aumento de área acarreta no aumento do custo de produção da embalagem. Sendo assim, a empresa deve averiguar se as vantagens da nova embalagem compensam essa diferença em relação ao aumento no custo da produção da mesma.

A conclusão chegada na apresentação do grupo, trouxe à tona a discussão obtida no projeto 5, que deixou a desejar na parte dos cálculos relacionados aos troncos e diferentemente do projeto anterior, foi um dos mais completos, onde podemos explorar ao máximo o conceito de proporcionalidade de áreas e volumes e todos os elementos envolvidos no tronco de cone.

O protótipo apresentado pelo grupo foi muito bem elaborado, pois durante a criação da superfície lateral e do rótulo com a forma de trapézio circular, tivemos uma ótima discussão sobre planificação das formas espaciais e sobre as partes do círculo, como setores circulares, coroas circulares e trapézios circulares. Regiões estas, que novamente podemos trabalhar utilizando as diferenças das áreas e evitar o uso de formulários.

Figura 69 -Imagem capturada da apresentação do grupo do projeto 8

4.9 PROPAGANDAS

Uma das determinações do projeto, foi a criação de uma pequena propaganda para o produto que estava sendo criado, podendo ser em forma de comercial (vídeo), folhetim ou até mesmo em áudio.

Alguns outros modelos de propagandas utilizados atualmente, como o Outdoor e o Busdoor, foram os que surpreenderam, pois foi de inteira criatividade dos grupos, sem qualquer tipo de intervenção. Neste momento, tivemos uma parte descontraída nas apresentações dos vídeos, pois até mesmo aqueles alunos que não tiveram tanta motivação ou participação ativa na parte dos cálculos, se engajaram nas produções. Foi um momento que reforçou a criatividade, a união dos grupos e também de grande importância para o desfecho do projeto.

A seguir, temos algumas imagens extraídas dessas propagandas e os links de alguns vídeos que foram gravados

- Propaganda do Projeto 1

Figura 70 - Folhetim de propaganda do projeto 1

- Propaganda do Projeto 2:

Figura 71 - Imagem capturada do vídeo da propaganda do projeto 2

link do vídeo:

<http://www.youtube.com/watch?v=pmYF1rSxaWw&feature=youtu.be>

- Propaganda do Projeto 3

Figura 72 - Imagem capturada do vídeo da propaganda do projeto 3

link do vídeo:

< http://www.youtube.com/watch?v=Xl7kW5JdoYI&feature=youtu.be>

- Propaganda do Projeto 8

Figura 73 - Cartaz publicitário da propaganda do projeto

4.10 AVALIAÇÕES

Foram feitos dois tipos de avaliação: O primeiro modelo avaliou os projetos apresentados pelos grupos, onde os critérios estabelecidos foram criados de acordo com metodologia proposta, com cinco competências avaliadas em níveis de qualificação e o outro processo avaliativo, foi feita em três atividades exercidas em épocas diferentes, para que pudéssemos ter um resultado suficiente para conclusões a respeito do processo de aprendizagem.

A seguir, temos os critérios de avaliação qualitativa do projeto, divulgado antes do seu disparador:

escola PARQUE

GRUPO: ______________________________ TURMA:________ ANO:_______

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO–PROJETO DE MODIFICAÇÃO DAS EMBALAGENS

COMP.		NÍVEIS	Pontos
I	Apresentação das embalagens antiga e criação do protótipo da nova	1. Apresentação precária. 2. Apresentação regular , com falhas graves em relação ao padrão estabelecido. 3. Apresentação razoável, com pontuais desvios do padrão estabelecido. 4. Muito boa apresentação, com raros desvios do padrão estabelecido. 5.Perfeita apresentação dos materiais concretos, sem nenhum desvio do padrão estabelecido.	40 pontos 80 pontos 120 pontos 160 pontos 200 pontos ________
II	Cálculos de áreas referentes as embalagens antiga e ao novo modelo de embalagem	1. Desenvolvimento precário de cálculos com graves falhas nos conceitos de áreas. 2.Desenvolvimento regular do cálculo de áreas , com falhas estruturais em relação aos conceitos. 3. Desenvolvimento razoável do cálculo , com pontuais erros conceituais em relação ao cálculos das áreas. 4. Muito bom desenvolvimento dos cálculos das duas embalagens, com raros erros de cálculos das áreas. 5. Excelente desenvolvimento dos cálculos das duas embalagens, demonstrando domínio total do conteúdo relacionado ao cálculos de áreas.	40 pontos 80 pontos 120 pontos 160 pontos 200 pontos ______
III	Cálculos de volumes referentes as embalagens antiga e ao novo modelo de embalagem	1. Desenvolvimento precário de cálculos com graves falhas nos conceitos de volumes. 2.Desenvolvimento regular do cálculo de volumes , com falhas estruturais em relação aos conceitos. 3. Desenvolvimento razoável do cálculo , com pontuais erros conceituais em relação ao cálculos das volumes. 4. Muito bom desenvolvimento dos cálculos das duas embalagens, com raros erros de cálculos das volumes. 5. Excelente desenvolvimento dos cálculos das duas embalagens, demonstrando domínio total do conteúdo relacionado ao cálculos de volumes.	40 pontos 80 pontos 120 pontos 160 pontos 200 pontos ________
IV	Criatividade e utilidade prática do projeto e divulgação através da propaganda.	1. Ausência de utilidade prática do projeto e falta de uma divulgação conveniente do produto. 2.Utilidade prática e divulgação regular ou com pouca viabilidade. 3. Criatividade e utilidade razoável , com problemas pontuais . 4. Muito bom desenvolvimento , projeto criativo e com uma boa propaganda de divulgação 5. Excelente utilidade prática do projeto , demonstrando criatividade e engajamento na criação e divulgação.	40 pontos 80 pontos 120 pontos 160 pontos 200 pontos ________
V	Apresentação escrita e apresentação expositiva do projeto.	1. Ausência ou insuficiência de informações na apresentação escrita ou expositiva 2.Apresentação regular na parte escrita ou expositiva, demonstrando pouco conhecimento em relação ao projeto apresentado ou falta de padrão estabelecido. 3. Razoável apresentação escrita e expositiva do projeto, com poucas falhas estruturais em relação aos conceitos. 4. Muito boa apresentação e desenvolvimento expositivo , demonstrando bom domínio dos conceitos e do assunto apresentado. 5. Excelente apresentação escrita e expositiva, demonstrando total conhecimento das competências estabelecidas	40 pontos 80 pontos 120 pontos 160 pontos 200 pontos ________

Comentários do corretor:

1

O segundo modelo avaliativo, com cada turma dividida em 5 grupos, foi a proposta da realização de exercícios de acordo com as problemáticas apresentadas pelos grupos durantes as fases de realização do projeto das embalagens. Este processo foi dividido em três atividades:

- **Atividade 1**: Exercícios feitos em sala com os mesmos grupos do projeto das embalagens durante os meses de agosto e setembro, em datas que não eram divulgadas;
- **Atividade 2**: Exercícios desenvolvidos nos testes e provas do 3° e 4° bimestres*;*
- **Atividade 3**: Exercícios feitos em sala com os mesmos grupos do projeto das embalagens durante o mês de novembro, em datas que não eram divulgadas.

Os objetivos das atividades relacionadas ao projeto foram baseados na competência de área 2 da matriz de referência do ENEM, cuja proposta é utilizar o conhecimento geométrico para realizar leitura e representação da realidade e agir sobre ela.

Dentre os objetivos trabalhados temos:

– **Interpretar** a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional;
– **Identificar** características de figuras planas ou espaciais;
– **Efetuar** cálculos de áreas e volumes das principais figuras planas e espaciais;
– **Utilizar** a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano;
– **Resolver** situação-problema que envolva conhecimentos geométricos do espaço e forma;
– **Utilizar** conhecimentos geométricos do espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Em anexo segue as atividades, citadas acima, propostas aos alunos durante o período de avaliação do projeto.

Os resultados destas atividades, mostraram que em todas as turmas, tivemos uma melhora significativa no rendimento dos alunos, tanto nas atividades em sala quanto nas avaliações formais, comprovando e fortalecendo a ideia da construção do raciocínio matemático através do material concreto, levando a uma abstração que dificilmente conseguimos apenas com a formalidade dos conteúdos. Mesmo aqueles grupos menos envolvidos, até os grupos mais engajados no projeto, quando foram apresentados a esses resultados (eles não sabiam que estavam sendo analisados) ficaram surpresos. Divulgamos a fonte das questões, cuja maioria era o Exame Nacional do Ensino Médio.

Os grupos que no ano seguinte, se apresentariam como pretendentes as vagas em Universidades Federais que utilizam o Exame Nacional do Ensino Médio como processo seletivo, ficaram bastante entusiasmados e motivados com os resultados. Observamos também, um rendimento acima dos demais, na turma 2003 e verificando com os colegas os possíveis motivos, inclusive com os próprios alunos da turma, visto que, em termos de notas, a turma 2001 sempre obtivera os melhores índices. A conclusão obtida, foi que o envolvimento dessa turma no projeto foi maior em vários aspectos, desde as "brigas", das atividades propostas, até as realizações das propagandas. Do primeiro ao último dia de projeto, o número de alunos por grupo, no desenvolvimento e no debate das atividades, era maior e também mais "acalorado" segundo os próprios integrantes da turma.

4.11 ESTATÍSTICAS DO APROVEITAMENTO DAS ATIVIDADES

O gráfico a seguir, mostra a evolução no percentual de acertos nas três atividades propostas aos alunos da turma 1 durante todo o projeto.

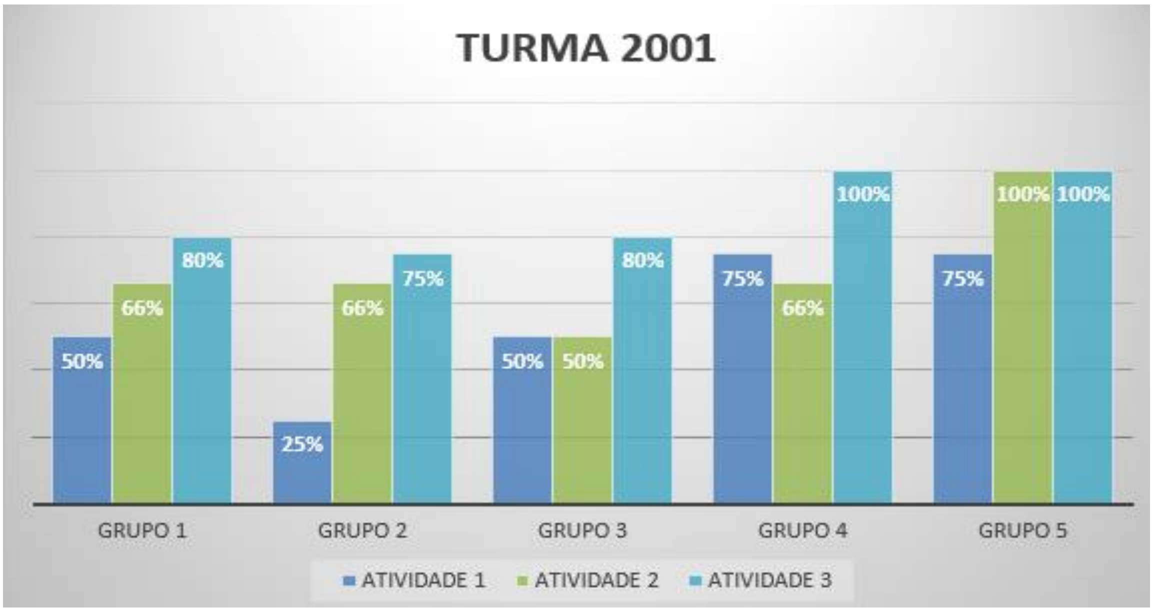


Figura 74 - Percentual de acertos por atividades de cada grupo da turma 2001

Nota-se que em praticamente todos os grupos, tivemos uma evolução na quantidade de acertos das atividades, bem como um alto percentual de acertos na última atividade.

O gráfico a seguir, mostra a evolução no percentual de acertos nas três atividades propostas aos alunos da turma 2002 durante todo o projeto.

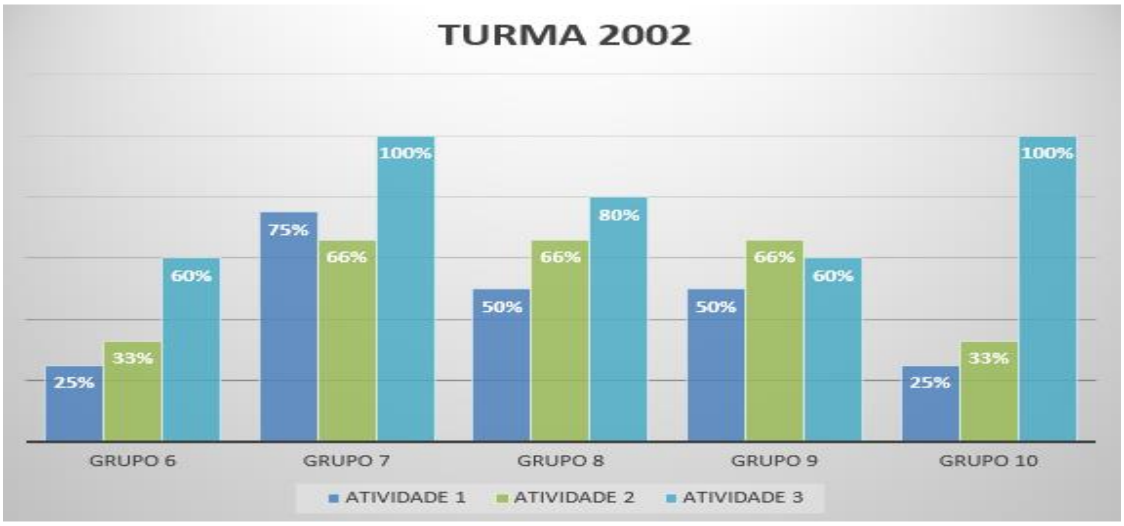


Figura 75 - Percentual de acertos por atividades de cada grupo da turma 2002

Assim como na turma 2001, tivemos uma evolução considerável no percentual de acertos das três atividades propostas e também um aproveitamento bem acima da média na última atividade, correspondente ao desfecho do projeto.

O gráfico a seguir, mostra a evolução no percentual de acertos nas três atividades propostas aos alunos da turma 2003 durante todo o projeto.

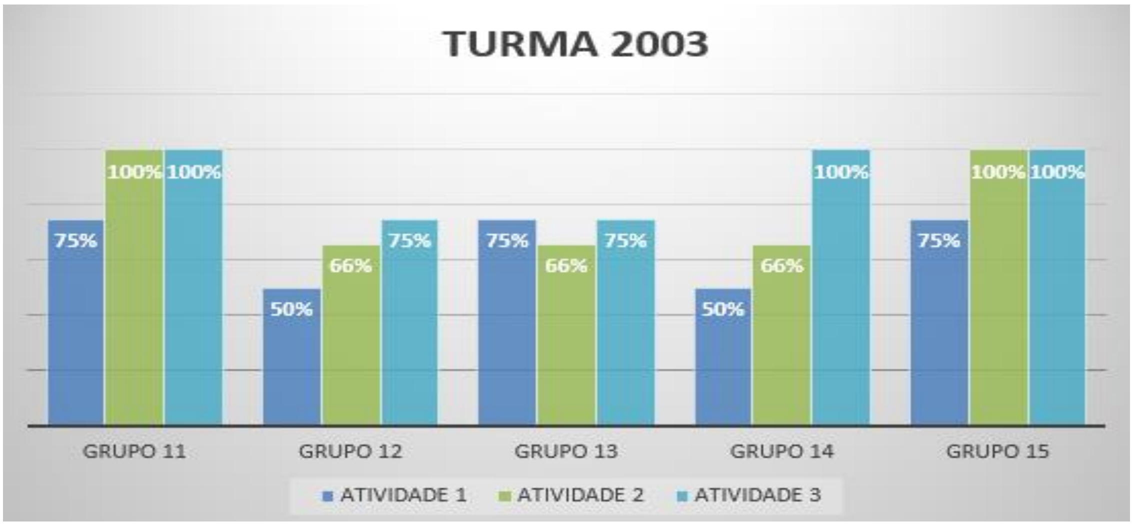


Figura 76 - Percentual de acertos por atividades de cada grupo da turma 2003

A análise do gráfico da turma 2003 mostra o mesmo comportamento das turmas anteriores. Apenas um dos grupos não teve uma evolução gradativa dos resultados das atividades.

A seguir, temos uma análise percentual de grupos que tiveram aumento gradativo nas atividades propostas e também dos grupos que alternaram os desempenhos.

Figura 77 - Gráfico percentual geral em relação evolução e alternância de desempenho

A seguir, temos um comparativo de médias de **apenas uma** das turmas (com menor quantitativo de médias gerais) para mostrar a evolução individual dos alunos durante o ano, mostrando que por diversos motivos, grande parte da turma teve uma evolução significativa nos resultados.

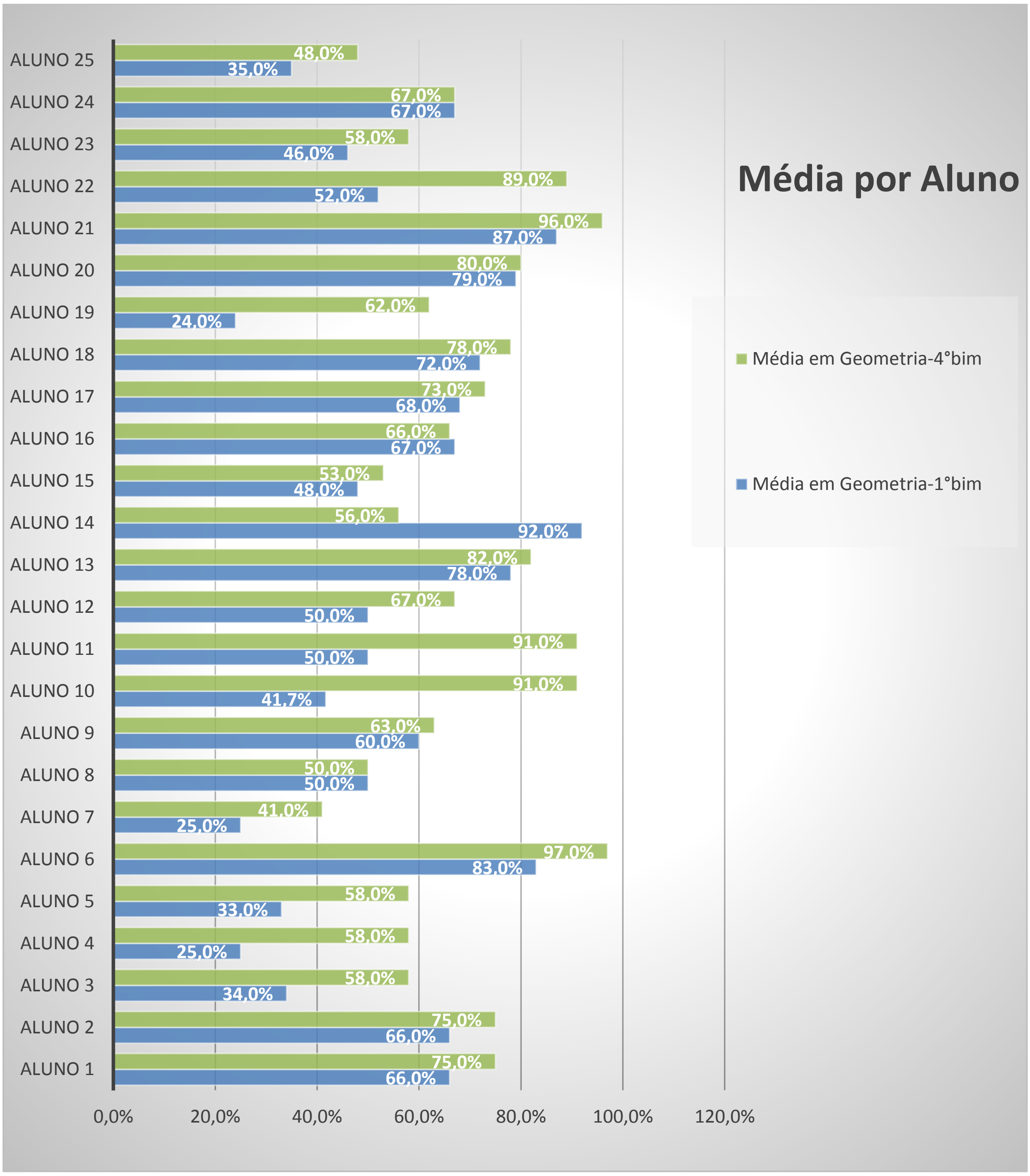


Figura 78 - Gráfico de desempenho individual da turma 2003

O principal motivo da evolução, citado pelos próprios alunos, foi a praticidade e descoberta da geometria pelas “próprias mãos”, fazendo com que, o que estava sendo calculado no papel, viesse a ter alguma utilidade prática ou razão para estar sendo calculado.

5 CONCLUSÃO

Em grande parte das instituições, o ensino da Geometria parece ficou esquecido das séries iniciais do Ensino Fundamental e até mesmo na grade curricular do Ensino Superior. Hoje, na grade curricular da Licenciatura em Matemática, temos poucas disciplinas associadas ao Ensino de Geometria. Na própria Arquitetura, temos um número ínfimo de disciplinas voltados para essa área. Podemos citar diversos fatores, dentre eles: a má formação de alguns professores (que o Mestrado Profissional em Ensino de Matemática veio a tentar solucionar grande parte do problema), o desconhecimento da matéria, a má organização das estratégias de ensino e a organização dos conteúdos na maioria dos livros didáticos, que deixam esta matéria reservada para os últimos capítulos. O problema é mais frequente nas séries do Ensino Fundamental, gerando, portanto, uma defasagem no ensino da Geometria Plana, que aumenta com a entrada dos alunos no Ensino Médio; onde se inicia o estudo da Geometria em terceira dimensão, cujo pré-requisito necessário é a Geometria Plana. Nesta fase o problema torna-se acumulativo. Portanto é necessária, a implementação de uma metodologia diferenciada de ensino, que possibilite aos educandos compreenderem as duas geometrias de uma forma natural e instigante, que estimule a curiosidade e gere a motivação para a aprendizagem de novos conteúdos.

A concepção construtivista deu o suporte teórico para o desenvolvimento deste trabalho, que tem como principal objetivo o ensino da Geometria Espacial, propiciando que o educando construa seu próprio conhecimento. Com a criação e manipulação dos objetos em terceira dimensão os alunos descobriram os conceitos de forma significativa, respeitando o tempo de aprendizagem de cada um.

A abordagem histórica do tema exposto, amplia os horizontes e permite que os leitores percebam que a Matemática, principalmente a Geometria, não foi criada, mas sim descoberta e decodificada pela sua linguagem e, pelo homem, propiciando a quebra do mito de que a Matemática é inalcançável e distante da realidade. A Matemática é uma das principais linguagens utilizada para o crescimento tecnológico e social.

O desenvolvimento do trabalho de campo confirmou as hipóteses deste trabalho: o uso de uma metodologia diferenciada para o ensino, propiciou o reconhecimento das embalagens como sólidos geométricos e seus elementos, cálculo da área, explorando a Geometria plana, e o cálculo de volume, explorando a Geometria Espacial.

A participação ativa dos estudantes nas atividades propostas e a busca pelo conhecimento mostrou para toda a equipe de matemática o quão importante é uma atividade como essa.

Os resultados sugerem que é possível o ensino da Geometria de forma prática, sem comprometer a qualidade do ensino e dos conteúdos abordados, quebrando um outro paradigma quando tratamos de projetos, que é a questão do cumprimento do planejamento. A gama variada de grupos, fez com que surgissem variados tipos de embalagem, explorando os diversos tipos de situações problema encontrados na manipulação e necessidade de resolução desses problemas, para o desenvolvimento do produto que eles próprios tiveram a ideia da criação.

Através da análise dos resultados, concluímos que, a metodologia abordada, para o ensino do tema, gerou o resultado esperado, pois os alunos ficaram comprometidos com o trabalho e focados nas atividades propostas, não havendo dispersão. Conseguimos também, uma evolução significativa dos rendimentos qualitativos e quantitativos.

A relação professor x aluno, também foi um ponto positivo do projeto. A confiança, a procura do saber, a troca e a admiração mútua, ficaram evidenciadas durante todo o ano. Nós professores, passamos a entender e nos aproximar mais do universo dos nossos alunos, que por sua vez, passam a perceber que podem contar com o professor em qualquer problemática relacionada a disciplina que possa aparecer.

Muitos alunos apresentaram dificuldades em Geometria, e na maioria dos relatos, esse problema parece ser resultante da ausência de visão geométrica e associação do concreto com o abstrato. Portanto, ao acompanhar esses grupos de alunos na série seguinte, percebe-se a facilidade e o desenvolver dos conteúdos de uma forma surpreendente. Os professores, nas escolas de modo geral, representam figuras de três dimensões, em desenhos nos quadros, em segunda dimensão, o que empobrece o aprendizado, uma vez que os alunos precisam desenvolver a visão espacial, e não sejam obrigados a decorar fórmulas e reproduzir exercícios modelos.

Observa-se uma grande mudança, quando o educando tem o contato direto com os sólidos geométricos, e percebe-se com clareza as dimensões e a verdadeira noção do espaço, que os quadros interativos não são capazes de trazer. Essa conclusão se tornou evidente no decorrer do trabalho de campo, e foi reforçada com alguns depoimentos de alunos após a realização do projeto, onde trazemos para dentro da pesquisa o nosso objeto da pesquisa, que é o aluno e daremos "voz" a esse aluno:

"(...) exercitamos não só as habilidades manuais e o trabalho em equipe, mas também tivemos que estudar os conhecimentos adquiridos nas aulas expositivas para podermos aplicá-los. Dessa forma, o projeto - que exigiu que os aprendizados obtidos em sala de aula fossem, de fato, colocados em prática - sugeriu um trabalho que contribui para o desenvolvimento cognitivo e intelectual de cada um, estimulando o raciocínio lógico e garantindo um pleno entendimento do tema tratado.*"*

Aluno do 2° ano do Ensino Médio- Ano de 2013.

"(...) O desenvolvimento de uma nova embalagem não só necessitou do estudo aprofundado dos conceitos matemáticos da geometria espacial. Vivenciamos a lógica do mercado. Como usuários, distinguimos bem boas embalagens das ineficientes, mas como alunos de matemática tivemos que pensar uma maneira de melhorá-la também. O trabalho nos envolveu, pois a Geometria deixou de ser só contas e conceitos, e a colocamos em prática, nos aproximando muito mais da matéria."

Aluno do 2° ano do Ensino Médio – Ano 2013

Finalmente, sugere-se, então, que o ensino das Geometria Plana e Espacial seja sempre problematizado e que os professores utilizem materiais concretos, permitindo a interação para construção do conhecimento, iniciado na experimentação e em seguida, formalizado pelos professores. Sugere-se também, que os docentes divulguem práticas interessantes e funcionais sobre o ensino de geometria, utilizando as novas mídias como forma de propagação e troca de conhecimento, para que possamos num futuro não muito distante, envolver nossos alunos de modo satisfatório e possamos trabalhar em harmonia e com o aproveitamento cada vez mais satisfatório.

6 REFERÊNCIAS

[1] AZAMBUJA, F. Z. **Demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos**. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, nº 3, p. 15-17, 1983.

[2] AZENHA, M. G. **Construtivismo de Piaget a Emília Ferreiro.** 5ed. São Paulo: Ática,1997.

[3] BARBOSA, P. M. (2003). **O Estudo da Geometria**. *Revista Benjamin Constant*. 25 ed.Rio de Janeiro.

[4] BARROS, C. S. G. **Psicologia e Construtivismo.** São Paulo: Ática, 1996.

[5] BECKER, F..**O que é Construtivismo?** Disponível em: <http://livrosdamara.pbworks.com/f/oquee_construtivismo.pdf>. Acesso em:27.maio.2011.

[6] BORTOLOSSI, H. J. **Os Sólidos Platônicos**. 2009a. Disponível em: <http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.html>.

Acesso em: 10 jan. 2013.

[7] BOYER, C. **História da Matemática**. trad. Elza Gomide, São Paulo, Edgard Blücher, 1974.

[8] BRASIL, L. A. S. **Aplicações da Teoria de Piaget ao Ensino da Matemática.** Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1977.

[9] CAVALCANTI, Pedro & CHAGAS, Carmo. **História da embalagem no Brasil**. São Paulo: Griffo,2006.

[10] CAMINHA, A. **Geometria**. SBM,2013 (coleção Profmat)

[11] CHESKIN, Louis. **Por que se compra: a pesquisa motivacional e sua aplicação**. São Paulo: Pioneira, 1964.

[12] CUNHA, M. A. V. **Didática Fundamentada na Teoria de Piaget** – A Nova Metodologia que Veio Revolucionar o ensino. 2ed. Rio de Janeiro: Forense Rio, 1973.

[13] DOLCE, O. & POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar.** Geometria espacial, posição e métrica. 6ed. São Paulo: Atual, 2005.

[14] ENDLER, D. **A história da embalagem**. Disponível em: <http://www.topdaembalagem> Acesso em 13/11/2012.

[15] FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia: Saberes necessários à prática educativa.** São Paulo: Paz e Terra, 1996.

[16] GUIMARÃES, M. **Indisciplina na escola: alternativas teóricas e práticas**. In: São Paulo: Sms,1996.

[17] KALEFF, Ana Maria M.R. **Vendo e entendendo poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos**. Niterói: EdUFF,2003.

[18] KOTLER, Philip. **Administração de marketing**. 10. ed. São Paulo: Prentice-Hall, 2000.

[19] LIMA, Elon Lages. **Medida e Forma em Geometria** – Comprimento, Área, Volume e Semelhança. Rio de Janeiro: SBM.

[20] LORENZATO, S. **Por que não ensinar geometria?** A educação matemática em revista, Ano III, n. 4, 1º semestre, Blumenau: SBEM, 1995.

[21] MACHADO, A. **Geometria Descritiva.** 26ª ed. São Paulo: Projeto Editores Associados, 1986. p. 306

[22] MESTRINER, F. **Design de embalagem.** Curso avançado. 2. ed. São Paulo: Prentice-Hall, 2005.

[23] MOURA Reinaldo A. & BANZATO, José M. **Embalagem, unitização e conteinerização**. 4. ed. São Paulo: IMAM, 2003.

[24] PAIVA, M. **Matemática 2.** São Paulo: Moderna. 1999.

[25] SERAGINI, Lincoln. **Mesa Redonda sobre Design**. Revista da ESPM, São Paulo, v.12, n.04, p.104-119, julho/agosto 2005.

7 FONTES DAS IMAGENS

[1] http://viagemmundo.com.br/8-curiosidades-sobre-as-piramides-antes-de-viajar-ao-egito/, acesso em 12 de agosto de 2013

[2] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/20/Dihedral_angle.png, acesso em 18 de agosto de 2013

[3] http://seddemas.blogspot.com.br/2010/12/triedros.html , acesso em 18 de agosto de 2013

[4]http://www.obichinhodosaber.com/2010/03/11/matematica-5%C2%BA-i-solidos-geometricos-2-poliedros-e-nao-poliedros/ ,acesso em 19 de agosto de 2013

[5] http://pt.slideshare.net/antoniocarlosluguetti/geometria-mtrica-espacial ,acesso em 21 de agosto de 2013

[6] http://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/Manhas/Modulo3PolidrosEuler.html ,acesso em 23 de agosto de 2013

[7] http://claudiomir1.xpg.uol.com.br/pp/pregulares.html ,acesso em 23 de agosto de 2013.

[8] http://www.mat.uc.pt/~emsa/Actividades.html ,acesso em 24 de agosto de 2013.

[9] http://www.uff.br/cdme/poliedros_platao_dual/aluno05.html ,acesso em 24 de agosto de 2013.

[10] http://www.megacalculo.com/#!frmulas/cjtq , acesso em 30 de setembro de 2013.

[11] http://defrentecomamatematica.blogspot.com.br/2012/10/geometria-espacial.html ,acesso em 1 de outubro de 2013.

[12] http://matematicajw.blogspot.com.br/p/blog-page_7.html ,acesso em 5 de outubro de 2013.

[13] http://www.megacalculo.com/#!frmulas/cjtq ,acesso em 8 de outubro de 2013.

[14] http://www.megacalculo.com/#!frmulas/cjtq ,acesso em 8 de outubro de 2013.

[15] http://alfaconnection.net/pag_avsm/geo1401.htm ,acesso em 10 de janeiro de 2014.

[16] http://www.somatematica.com.br/emedio/espacial/espacial16.php ,acesso em 10 de janeiro de 2014.

[17] http://matematicadegraca.com.br/exercicios-de-geometria-espacial/exercicios-sobre-piramides ,acesso em 10 de janeiro de 2014.

[18] http://matematicadegraca.com.br/exercicios-de-geometria-espacial/exercicios-sobre-piramides acesso em 10 de janeiro de 2014.

[19]http://www.pead.faced.ufrgs.br/sites/publico/eixo4/matematica/espaco_forma/figuras_tridimensionais/figuras_tridimensionais.htm ,acesso em 10 de janeiro de 2014.

[20] http://diadematematica.com/vestibular/conteudo/GE_PIR.htm ,acesso em 10 de janeiro de 2014.

[21]http://es.wikipedia.org/wiki/Pir%C3%A1mide_cuadrada#mediaviewer/File:Euclid_Octahedron_3.svg acesso em 11 de janeiro de 2014.

[22] http://alfaconnection.net/pag_avsm/geo1501.htm acesso em 11 de janeiro de 2014.

[23] http://www.brasilescola.com/matematica/calculo-area-cone.htm acesso em 13 de janeiro de 2014.

[24] http://www.aulafacil.com/matematicas-volumenes/curso/Lecc-12.htm ,acesso em 2 de Abril de 2014.

[25] https://aulaemvideo1.files.wordpress.com/2011/10/pirc3a2mide.png ,acesso em 3 de Abril de 2014.

[26] https://aulaemvideo1.files.wordpress.com/2011/10/pirc3a2mide.png ,acesso em 3 de Abril de 2014.

[27] http://diadematematica.com/vestibular/conteudo/GE_TRON.htm ,acesso em 10 de Junho de 2014.

[28] http://diadematematica.com/vestibular/conteudo/GE_TRON.htm ,acesso em 11 de junho de 2014.

[29] http://diadematematica.com/vestibular/conteudo/GE_TRON.htm ,acesso em 11 de junho de 2014.

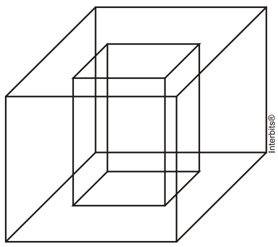
[30] http://www.brasilescola.com/matematica/esfera.htm ,acesso em 13 de junho de 2014.

[31] http://moodle.profmat-sbm.org.br/MA13/2014/unidade18-2.pdf acesso em 20 de novembro de 2014.

ANEXO

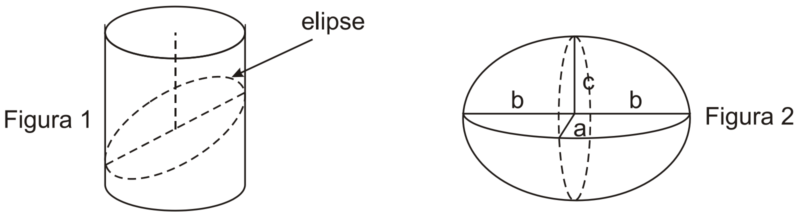
- Atividade 1:

1- Um porta-lápis de madeira foi construído no formato cúbico, seguindo o modelo ilustrado a seguir. O cubo de dentro e vazio. A aresta do cubo maior mede 12 cm e a do cubo menor, que e interno, mede 8 cm.



O volume de madeira utilizado na confecção desse objeto foi de?

2-Uma elipse é uma seção plana de um cilindro circular reto, em que o plano que intersecta o cilindro é oblíquo ao eixo do cilindro (Figura 1). É possível construir um sólido de nome elipsoide que, quando seccionado por três planos perpendiculares entre si, mostram elipses de diferentes semieixos a, b e c, como na Figura 2. O volume de um elipsoide de semieixos a, b e c é dado por $V = \frac{4}{3}\pi abc$.



Considere que um agricultor produz melancias, cujo formato é aproximadamente um elipsoide, e ele deseja embalar e exportar suas melancias em caixas na forma de um paralelepípedo retângulo. Para melhor acondicioná-las, o agricultor preencherá o espaço vazio da caixa com material amortecedor de impactos (palha de arroz/serragem/bolinhas de isopor).

Suponha que sejam *a*, *b* e *c*, em cm, as medidas dos semieixos do elipsoide que modela as melancias, e que sejam 2*a*, 2*b* e 2*c*, respectivamente, as medidas das arestas da caixa.

Nessas condições, qual é o volume de material amortecedor necessário em cada caixa?

3- Um artista plástico construiu, com certa quantidade de massa modeladora, um cilindro circular reto cujo diâmetro da base mede 24 cm e cuja altura mede 15 cm. Antes que a massa secasse, ele resolveu transformar aquele cilindro em uma esfera.

Volume da esfera: $V_{esfera} = \frac{4\pi r^3}{3}$

Analisando as características das figuras geométricas envolvidas, calcule o raio R da esfera assim construída.

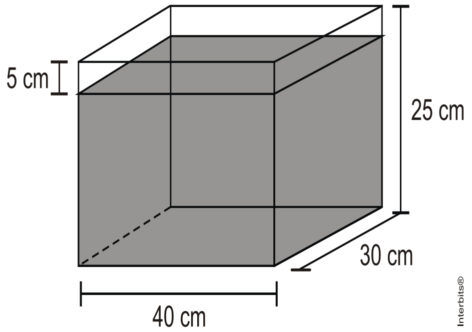
4- Uma empresa que fabrica esferas de aço, de 6 cm de raio, utiliza caixas de madeira, na forma de um cubo, para transportá-las.

Sabendo que a capacidade da caixa é de 13.824 cm^3, então calcule o número máximo de esferas que podem ser transportadas em uma caixa.

- Atividade 2:

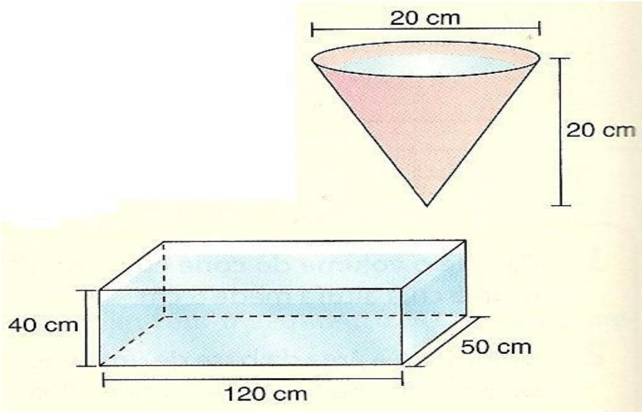
1- Considere um caminhão que tenha uma carroceria na forma de um paralelepípedo retângulo, cujas dimensões internas são 5,1 m de comprimento, 2,1 m de largura e 2,1 m de altura. Suponha que esse caminhão foi contratado para transportar 240 caixas na forma de cubo com 1 m de aresta cada uma e que essas caixas podem ser empilhadas para o transporte. Qual é o número mínimo de viagens necessárias para realizar esse transporte?

2- Alguns objetos, durante a sua fabricação, necessitam passar por um processo de resfriamento. Para que isso ocorra, uma fábrica utiliza um tanque de resfriamento, como mostrado na figura.



O que aconteceria com o nível da água se colocássemos no tanque um objeto cujo volume fosse de 2 400 cm^3?

3- Fernando utiliza um recipiente, em forma de um cone circular reto, para encher com água um aquário em forma de um paralelepípedo retângulo. As dimensões do cone são: 20 cm de diâmetro de base e 20 cm de altura e as do aquário são: 120 cm, 50 cm e 40 cm, conforme as ilustrações.



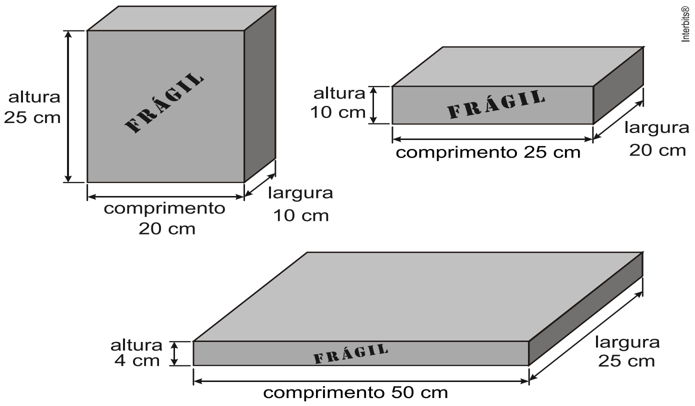
Cada vez que Fernando enche o recipiente na torneira do jardim, ele derrama 10% de seu conteúdo no caminho e despeja o restante no aquário.

Estando o aquário inicialmente vazio, qual é o número mínimo de vezes que Fernando deverá encher o recipiente na torneira para que a água despejada no aquário atinja 1/5 de sua capacidade?

Dados : $V_{paralelepípedo} = a.b.c \;\; e \;\; V_{cone} = \frac{\pi.r^2.h}{3}$ e $\pi = 3$

- Atividade 3

1- Uma empresa de cerâmica utiliza três tipos de caixas para embalar seus produtos, conforme mostram as figuras



Essa empresa fornece seus produtos para grandes cidades, que, por sua vez, proíbem o tráfego de caminhões de grande porte em suas áreas centrais. Para garantir a entrega nessas regiões, o proprietário da empresa decidiu adquirir caminhões com caçambas menores.

A tabela apresenta as dimensões de cinco tipos de caçambas encontradas no mercado pelo proprietário.

tipo de caçamba	comprimento (m)	largura (m)	altura (m)
I	3,5	2,5	1,2
II	3,5	2,0	1,0
III	3,0	2,2	1,0
IV	3,0	2,0	1,5
V	3,0	2,0	1,0

Sabe-se que:

- a empresa transporta somente um tipo de caixa por entrega.
- a empresa deverá adquirir somente um tipo de caçamba.
- a caçamba adquirida deverá transportar qualquer tipo de caixa.
- as caixas, ao serem acomodadas, deverão ter seus “comprimento, largura e altura” coincidindo com os mesmos sentidos dos “comprimento, largura e altura” da caçamba.

• para cada entrega, o volume da caçamba deverá estar totalmente ocupado pelo tipo de caixa transportado.

Atendendo a essas condições, o proprietário optou pela compra de caminhões com caçamba do tipo:

Ⓐ I

Ⓑ II

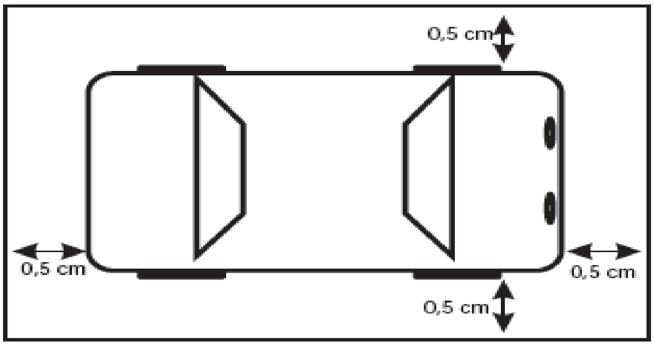
Ⓒ III

Ⓓ IV

Ⓔ V

2- Um jornaleiro irá receber 21 revistas. Cada uma terá um carrinho na escala de 1:43 do tamanho real acompanhando-a em caixinha à parte. Os carrinhos são embalados com folga de 0,5 cm nas laterais, como indicado na figura. Assim, o jornaleiro reservou três prateleiras com 95 cm de comprimento por 7 cm de largura, onde as caixas serão acomodadas de forma a caberem inteiramente dentro de cada prateleira.

Além disso, sabe-se que os carrinhos são cópias dos modelos reais que possuem 387 cm de comprimento por 172 cm de largura.



Quantos carrinhos, no máximo, cabem em cada uma das prateleiras?

Ⓐ 2

Ⓑ 3

Ⓒ 7

Ⓓ 9

Ⓔ 10

3- Uma prefeitura possui modelos de lixeira de forma cilíndrica, sem tampa, com raio medindo 10 cm e altura de 50 cm. Para fazer uma compra adicional, solicita à empresa fabricante um orçamento de novas lixeiras, com a mesma forma e outras dimensões. A prefeitura só irá adquirir as novas lixeiras se a capacidade de cada uma for no mínimo dez vezes maior que o modelo atual e seu custo unitário não ultrapassar R$ 20,00.

O custo de cada lixeira é proporcional à sua área total e o preço do material utilizado na sua fabricação é de R$ 0,20 para cada 100 cm^2.

A empresa apresenta um orçamento discriminando o custo unitário e as dimensões, com o raio sendo o triplo do anterior e a altura aumentada em 10 cm. (Aproxime π para 3.) O orçamento dessa empresa é rejeitado pela prefeitura, pois:

A) o custo de cada lixeira ficou em R$ 21,60.

B) o custo de cada lixeira ficou em R$ 27,00.

C) o custo de cada lixeira ficou em R$ 32,40.

D) a capacidade de cada lixeira ficou 3 vezes maior.

E) a capacidade de cada lixeira ficou 9 vezes maior.

4- Célia é uma confeiteira renomada na pequena cidade onde mora. Herdou de sua avó uma receita de brigadeiro que faz o maior sucesso. Os ingredientes da receita enchem sempre uma panela, de forma cilíndrica, com40 cm de altura e 30 cm de diâmetro. Para inovar e atrair mais clientes, em vez de vender os brigadeiros na forma de “bolinhas”, Célia tem feito brigadeiros em forma de cones. Para isso, utiliza forminhas cônicas de 5 cm de altura e raio da base de 1,5 cm. A cada receita produzida, a quantidade de cones de brigadeiro que Célia consegue obter é

Dados: $\left(V_{cilindro} = \pi R^2 h \text{ e } V_{cone} = \dfrac{\pi R^2 h}{3} \right)$

A) 600 unidades

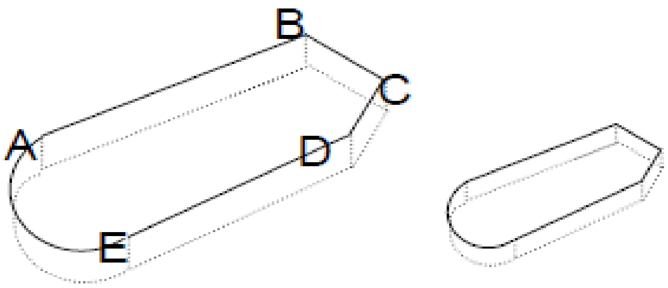
B) 800 unidades

C) 2400 unidades

D) 3200 unidades

E) 9600 unidades

5- Certo hotel tem duas piscinas, sendo uma com 1,20 m de profundidade, e uma infantil com profundidade de 40 cm. Os formatos das duas são idênticos e dados na figura seguinte. A borda AB mede o triplo da borda correspondente na piscina menor.



O fundo da piscina maior tem o formato da figura ABCDE e o fundo da piscina menor é uma figura semelhante a essa figura ABCDE. Então a capacidade da piscina maior é

- Ⓐ 1,2 vezes a capacidade da piscina menor.
- Ⓑ 3 vezes a capacidade da piscina menor.
- Ⓒ 3,6 vezes a capacidade da piscina menor.
- Ⓓ 9 vezes a capacidade da piscina menor.
- Ⓔ 27 vezes a capacidade da piscina menor