UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

ENSINO DE POLINÔMIOS NO ENSINO MÉDIO - UMA NOVA ABORDAGEM

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

André Ricardo Dierings

Santa Maria, RS, Brasil
2014

ENSINO DE POLINÔMIOS NO ENSINO MÉDIO - UMA NOVA ABORDAGEM

André Ricardo Dierings

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da
Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS),
como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Orientadora: Prof.ª Dra. Maria Inês Martins Copetti

Santa Maria, RS, Brasil
2014

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática
da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Dierings, André Ricardo
Ensino de Polinômios no Ensino Médio - Uma nova abordagem / André Ricardo Dierings.-2014.
70 p.; 30cm

Orientadora: Maria Inês Martins Copetti
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2014

1. Ensino de Polinômios 2. Função Polinomial 3. Nova abordagem I. Copetti, Maria Inês Martins II. Título.

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

ENSINO DE POLINÔMIOS NO ENSINO MÉDIO -

UMA NOVA ABORDAGEM

elaborada por
André Ricardo Dierings

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Comissão Examinadora:

Maria Inês Martins Copetti, Dra.
(Presidente/Orientador)

Vilmar Trevisan, Dr. (UFRGS)

Valeria De Fatima Maciel Cardoso Brum, Dra. (UFSM)

Santa Maria, 22 de agosto de 2014.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha esposa Miridiane e ao nosso filho Pedro.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente à minha esposa Miridiane Wayhs pelo incentivo. Sabemos que foi uma caminhada árdua e que sem o amor, paciência, apoio e incentivo da pessoa amada nas horas de crise não teria chegado até aqui.

Aos meus pais, pessoas humildes que não tiveram a oportunidade de frequentar a escola por muito tempo e mesmo assim sempre tiveram clareza que o maior legado que poderiam deixar aos filhos é o estudo.

Ao meu padrinho de batismo Valdir Miguel Klein, pelas orientações no início da minha caminhada.

Aos colegas da turma 2012 pelos momentos de estudo intenso e apoio mútuo.

Ao meu grande mestre, professor Telmo Aloísio Hartmann.

À professora Carmen Vieira Mathias que muito bem coordena o curso de Mestrado Profissional – PROFMAT polo UFSM, pelo profissionalismo e atenção que dispensa a cada mestrando.

À professora Maria Inês Martins Copetti pela orientação do trabalho. Preciso ressaltar e fazer um agradecimento todo especial a esta profissional pela sua atenção, dedicação, apoio, paciência e agilidade em responder cada questionamento.

A todos os professores da UFSM que abraçaram o projeto PROFMAT e nos auxiliaram muito bem nessa caminhada, dos quais sempre recordarei com muito carinho pelos vínculos de amizade estabelecidos.

À Sociedade Brasileira de Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES pela concessão da bolsa de estudos.

À direção do IFRS – Instituto Federal do Rio Grande do Sul – Câmpus Ibirubá pela concessão do horário e incentivo a minha qualificação.

Aos alunos da turma do terceiro ano do Ensino Médio Técnico em Informática que participaram da aplicação das atividades referentes a este trabalho.

Aos colegas de trabalho Raquel Lorensini Alberti e Eduardo Girotto pela amizade e coleguismo, principalmente nas épocas em que precisei me dedicar mais ao mestrado que ao trabalho, deixando-os, muitas vezes, sobrecarregados.

Aos professores da banca pela análise e sugestões referentes a este trabalho.

EPÍGRAFE

“Eu quero desaprender para aprender de novo.

Raspar as tintas com que me pintaram.

Desencaixotar emoções, recuperar os sentidos.”

Rubem Alves

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Universidade Federal de Santa Maria

ENSINO DE POLINÔMIOS NO ENSINO MÉDIO
UMA NOVA ABORDAGEM
AUTOR: ANDRÉ RICARDO DIERINGS
ORIENTADORA: MARIA INÊS MARTINS COPETTI
Data e Local da Defesa: Santa Maria, 22 de agosto de 2014.

O presente trabalho de dissertação tem como objetivo propor uma nova forma de abordagem no ensino de polinômios. Como este assunto é trabalhado no último ano do Ensino Médio, oferecemos uma proposta focada no Ensino Superior, porém de uma forma investigativa e intuitiva sem deixar de dar ênfase às definições e teoremas. No primeiro capítulo faremos um apanhado histórico sobre o estudo dos polinômios destacando os principais fatos e seus estudiosos, bem como sua relevância. No segundo capítulo trataremos sobre a forma que o assunto é abordado atualmente nas escolas e livros de Ensino Médio do Brasil, salientando os aspectos que consideramos importantes que sejam revistos. Uma nova proposta de trabalho de estudo de polinômios é apresentada no terceiro capítulo. Concluímos com o quarto capítulo onde relataremos a aplicação parcial desta proposta em uma turma de terceiro ano técnico em informática do IFRS – Câmpus Ibirubá.

Palavras-chave: 1.Polinômios. 2. Função Polinomial. 3. Equações Polinomiais.

ABSTRACT

Master's Dissertation
Course Professional Master in Mathematics in National Network - PROFMAT
Federal University of Santa Maria

TEACHING OF POLYNOMIALS IN SECONDARY EDUCATION
A NEW APPROACH

AUTHOR : ANDRE RICARDO DIERINGS
GUIDANCE : MARIA INES MARTINS COPETTI
Date and Venue of Defense : Santa Maria , august 22, 2014

This dissertation aims to propose a new approach in teaching polynomials. As this subject is worked in the last year of high school, we offer a proposal focused on higher education, but in an investigative and intuitive way while emphasizing the definitions and theorems. In the first chapter we will make a historical overview about the study of polynomials, highlighting the most important facts and their researchers, as well as their relevance. In the second chapter we will deal with the way the subject is approached in schools and books currently in high school in Brazil, emphasizing the important aspects that we think should be revised. A new proposal for the study of polynomials is presented in the third chapter. We conclude with the fourth chapter where we report the partial application of this proposal in a class of third year of the technical computer course in IFRS - Câmpus Ibirubá.

Keywords: 1.Polynomials. 2. Polynomial Function. 3. Polynomial Equations

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Ao longo dos anos de trabalho em escolas de Ensino Fundamental e médio, tanto públicas quanto privadas, observamos que a maioria dos alunos apresenta grande dificuldade em entender os conceitos, definições, teoremas e aplicações envolvendo polinômios. O mesmo ocorre quando assunto é tratado e aprofundado no Ensino Superior.

A maioria dos livros didáticos de Ensino Médio apresenta o conteúdo de uma forma puramente algébrica que nem sempre possibilita o bom entendimento do tema. Nota-se que em algumas situações ocorre certa distorção quanto à aplicação de certos teoremas e algoritmos. Um bom exemplo disso é o algoritmo de Briot-Ruffini que é apresentado nos livros para dividir polinômios por binômios quando na verdade pode ser utilizado no cálculo de valor numérico, reduzindo significativamente o número de operações a serem realizadas. Além disso, salvo raras exceções, não apresentam nenhuma demonstração de como este dispositivo funciona.

Percebemos, ainda, falta de compreensão do processo de fatoração e de sua relação com as raízes de polinômios. Mais ainda, pouco se discute sobre os gráficos de funções polinomiais.

Observamos também que o próprio ementário da parte de polinômios no Ensino Médio dá pouca importância para o cálculo do valor numérico e à localização de raízes de um polinômio. Tratam o assunto de forma superficial como se fosse algo muito simples.

Revisando a bibliografia, encontramos duas dissertações sobre o tema que gostaríamos de citar. Em CARRASCHI (2014), a solução de equações polinomiais quadráticas, cúbicas e quárticas, por diversos métodos, foi investigada, enquanto que SILVA (2013) apresenta e utiliza recursos computacionais como vídeos e o *software* GeoGebra para o estudo de polinômios no ensino médio. O nosso trabalho tem alguma semelhança com o trabalho de SILVA (2013).

Diante do exposto, pensamos na relevância de aprofundarmos estas questões utilizando ferramentas tecnológicas e alguns resultados teóricos relacionados ao assunto. Não estamos cogitando que o aluno já seja capaz de entender demonstrações com o devido rigor matemático, mas que os resultados sejam apresentados de forma investigativa facilitando a assimilação.

1 FATOS HISTÓRICOS DO DESENVOLVIMENTO DA ÁLGEBRA

Há mais de 1500 a. E. C., o desenvolvimento da álgebra, no sentido de resolução de problemas que futuramente seriam denominados como equações polinomiais, surge quase que de forma natural para os antigos matemáticos. Talvez as evidências mais antigas e famosas disso sejam o Papiro de Ahmes (ou de Rhind) e o Papiro de Moscou, ambos egípcios. Nos mesmos aparecem, de forma discreta, equações de primeiro grau. Acredita-se que o Papiro de Moscou, que contém a fórmula correta para o cálculo do volume de uma pirâmide, seja um pouco mais antigo.

Os matemáticos egípcios e babilônios desenvolveram métodos para encontrar as raízes de polinômios de primeiro e segundo graus e com isso eles conseguiam encontrar, de forma aproximada, as raízes quadradas de números. Tudo isso era exposto de forma muito prática, expresso através de problemas do cotidiano.

Já no século V a. E.C., embora haja controvérsias, atribui-se aos pitagóricos a descoberta de grandezas incomensuráveis. Conta a história que esta descoberta teria criado uma imensa crise na escola pitagórica. Até então os gregos usavam desenhos geométricos à régua e compasso para resolver equações de primeiro, segundo e terceiro graus. Nesta época também surge uma divisão entre a geometria e a aritmética.

As primeiras formas algébricas de resolução de equações de segundo grau aparecem no século III a. E. C. com o matemático Diofanto de Alexandria, quando se introduz a forma de simbolismo algébrico. A aritmética de Diofanto está para a álgebra assim como os elementos de Euclides estão para a Geometria.

Os Axiomas de Euclides contribuíram para que se chegasse à forma de resolução de equações polinomiais de primeiro grau, principalmente os seguintes:

i) Se duas coisas são iguais a uma terceira, então são iguais entre si.

ii) Se iguais somam-se a iguais, os resultados permanecem iguais.

iii) A parte é menor que o todo.

É importante citar o matemático Mohammed ibu-Musa al-Khowarismi que, na idade média, introduziu novos símbolos algébricos melhorando o que foi desenvolvido pelos árabes. Tanto ele, quanto Bháskara, utilizavam praticamente o mesmo método para resolver equações polinomiais de segundo grau do tipo $ax^2 + bx = c$, porém a utilização de símbolos ainda era restrita e o método consistia basicamente em completar quadrados.

> Vimos até aqui que os procedimentos de al-Khowarismi e de Bháskara resolvem o que chamamos hoje de equação de segundo grau. Ainda assim, seria um exagero atribuir-lhes a invenção da fórmula que usamos atualmente. Por quê?
> Os indianos já utilizavam símbolos para as incógnitas e para as operações. O persa al-Khowarismi forneceu algoritmos de resolução justificados por procedimentos geométricos. Os métodos enunciados por Bháskara e al-Khowarismi permitem reduzir uma equação do segundo grau em uma equação do tipo $ax^2 + bx = c$, mas ainda não havia símbolos algébricos para expressar coeficientes genéricos da equação, no caso, os coeficientes a, b e c.Se traduzirmos o método usado por eles na linguagem atual e o aplicarmos a uma equação geral do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, obteremos o equivalente da fórmula para resolução de equações do segundo grau. Isto quer dizer que havia um método geral para resolução de equações de segundo grau, ainda que expresso por palavras. No entanto, não podemos dizer que já existisse uma "fórmula", no sentido que entendemos hoje, uma vez que não se usava nenhum simbolismo para os coeficientes. Isto só será feito por Viète, como veremos ao final deste capítulo (ROQUE, T., 2012, p. 204).

No final do século XV, matemáticos italianos da Universidade da Bolonha desenvolveram métodos para resolver equações de terceiro e quarto graus.

A resolução de equações de terceiro grau do tipo $x^3 + p.x + q = 0$ atribui-se ao matemático Niccoló Fontana Tartaglia, apesar da publicação da fórmula ter sido feita por Gerolamo Cardano na Ars Magna. Porém se faz necessário constar que, segundo Cardano, o professor Scipione Del Ferro já havia desenvolvido o método sem tê-lo publicado. Segue a fórmula para uma das raízes:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Na sequência, Cardano desenvolve um método de resolução de equações polinomiais de quarto grau reduzindo-as a grau três. No ano de 1522, um de seus alunos chamado Lodovico Ferrari resolveu a equação $x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0$, e novamente Cardano publica a solução na Ars Magna. Teoricamente o método era perfeito, pois a solução era obtida apenas com operações algébricas, porém muito trabalhosas.

Ao contrário do que muitos livros de Ensino Médio propõem, os números complexos surgem na resolução de equações de terceiro grau e não nas de segundo. O matemático bolonhês Rafael Bombelli (1526-1572) ao resolver a equação $x^3 = 15x + 4$, pelo método de Tartaglia, chega à solução encontrando um número diferente. É fácil notar que uma solução da equação é 4, porém Bombelli chega à seguinte solução $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Como $x = 4$, o referido matemático conclui que $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ deveriam ser números da forma $m + \sqrt{n}$ e $m - \sqrt{n}$, respectivamente. De fato,

$2+\sqrt{-121}=\left(2+\sqrt{-1}\right)^3$ e $2-\sqrt{-121}=\left(2-\sqrt{-1}\right)^3$ e, portanto, $x=2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4$.

De forma independente, no início do século XVII, Pierre de Fermat e Renè Descartes desenvolveram, quase que simultaneamente, a Geometria Analítica. As descobertas de Fermat foram, principalmente, em Teoria das Probabilidades, Teoria dos Números e estudo das funções. Nesta última área, Fermat contribuiu com métodos para traçar tangentes a curvas e a determinação de máximos e mínimos. Descartes, no entanto, desenvolve um método algébrico, bem mais trabalhoso, para o traçado de tangentes a curvas. Atribui-se a Descartes a denominação de número imaginário para $\sqrt{-1}$, contribuindo com a aceitação das raízes quadradas negativas como solução de equações.

O estudo sobre a localização de raízes reais de polinômios avança muito com os métodos desenvolvidos por Isaac Newton, também no século XVII. Basicamente ele desenvolveu métodos algébricos aproximados para encontrar raízes, um método não algébrico utilizando elementos do cálculo diferencial e um método de pesquisa de raízes.

Muito tempo e energia foram gastos em encontrar fórmulas para determinar raízes de polinômios de grau igual ou superior a cinco.

No final século XVIII, mais precisamente no ano de 1799, Carl Friedrich Gauss, influenciado por Joseph Louis Lagrange, prova o Teorema Fundamental da Álgebra: “Toda equação algébrica $p(x)=0$ de grau $n\geq 1$ admite, ao menos, uma raiz complexa”, em sua tese de doutorado, a qual é considerada a maior tese em matemática de todos os tempos. É importante ressaltar que Jean le Ronald D’Alembert já havia enunciado o teorema anteriormente, porém sua prova apresentava falhas.

Já no século XIX, quinze anos antes do inglês William George Horner, o matemático e médico italiano Paolo Ruffini, prova que não existe uma fórmula para resolver equações de grau 5. Em 1824, baseado em Ruffini, o matemático norueguês Niels Henrik Abel coloca um ponto final na incansável busca por fórmulas resolutivas para equações de grau superior a 4, mostrando que é impossível resolver equações deste tipo por meio de radicais. Mesmo assim, ele continuou na busca por métodos para a resolução de equações de grau geral até sua morte.

Fato é que a busca por métodos continuou durante o desenvolvimento da álgebra. Muitos estudiosos, desenvolveram métodos numéricos (iterativos), entre os quais podemos citar, além dos que já constam no texto, Daniel Bernoulli, Karl Heinrich Graeffe e Jean Batiptiste Joseph Fourier e Évariste Galois.

Uma discussão mais profunda e abrangente sobre o tema pode ser encontrada em BOYER (2012) e ROQUE, T. (2012).

2 ESTUDO DE POLINÔMIOS NO ENSINO MÉDIO DAS ESCOLAS BRASILEIRAS.

Neste capítulo discutiremos o ensino atual de polinômios e função polinomial.

2.1Orientações dos PCNs

De acordo com os PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais), o ensino de matemática é sistematizado basicamente em três eixos: álgebra (números e funções), geometria e medidas e análise de dados. Como o objeto de estudo no nosso caso é o ensino de polinômios, faremos uma breve análise do que o PCN da matemática diz a respeito do eixo álgebra, principalmente no que diz respeito ao estudo de funções.

> O estudo de funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções.
>
> ...
>
> Com relação à álgebra, há ainda o estudo das equações polinomiais e de sistemas lineares. Esses dois conteúdos devem receber um tratamento que enfatize sua importância cultural, isto é, estender os conhecimentos que os alunos possuem sobre a resolução de equações de primeiro e segundo graus sobre a resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas para sistemas lineares 3 por 3, aplicando esse estudo à resolução de problemas simples de outras áreas do conhecimentos. Uma abordagem mais qualitativa e profunda deve ser feita dentro da parte flexível do currículo, como opção específica de cada escola (PCNs, Ensino Médio, pag. 119).

Observa-se que, segundo os parâmetros curriculares nacionais, polinômios, equações polinomiais e função polinomial devem constar na parte flexível do currículo, apesar da sua importância no desenvolvimento de boa parte das ciências. Podemos citar aqui principalmente, os Bacharelados em Engenharias e as licenciaturas de Matemática e de Física.

Chama-nos muito a atenção esta última parte (**esse conteúdo deve constar na parte flexível do currículo**) que sugere que, para os autores dos PCNs, não é fundamental que se estude de forma aprofundada esse conteúdo. Salvo escolas técnicas, que focam seus ementários em determinadas áreas, a maioria das escolas brasileiras trabalha, ou pelo menos deveria trabalhar, na “preparação” de um aluno com condições mínimas de acompanhar um Ensino Superior, qualquer que seja a área. Diante disso, observamos no Ensino Superior alunos com baixíssimo rendimento e altas taxas de reprovação nas disciplinas de cálculo integral e diferencial, matérias obrigatórias nos cursos citados no parágrafo anterior. MOLON (2013), faz uma análise das reprovações nas disciplinas de cálculo integral e diferencial nos cursos da UFSM no período de 2009 a 2012 e verifica que o índice de reprovação chega 58,14%, valor expressivo e preocupante, com o agravante dos dados apontarem um crescimento nas reprovações. Nesse mesmo trabalho, Molon sugere a introdução do cálculo infinitesimal já na educação básica.

2.2 Ementas e livros didáticos

Vivemos em um país onde os professores da educação básica possuem uma sobrecarga de trabalho, sobrando assim pouco tempo para planejamento e atividades de pesquisa. Dessa forma, os livros didáticos, disponíveis nas bibliotecas das escolas e no mercado, acabam sendo as únicas referências para suas aulas e também para a elaboração das ementas dos planos de ensino.

De um modo geral, os livros didáticos disponíveis no mercado, amplamente utilizados no Ensino Médio, pouco diferem na disposição dos conteúdos, tanto que é muito comum encontrarmos exercícios repetidos em livros de autores diferentes. A maioria traz na introdução a ideia de aplicação de polinômios em sólidos geométricos, principalmente paralelepípedos.

Em praticamente todos os livros pesquisados encontramos os seguintes tópicos:

Definição de polinômios;

Grau de polinômio;

Valor numérico de polinômio;

Identidade de polinômios;

Operações com polinômios;

Dispositivo prático de Briott-Ruffini;

Teorema do Resto;

Relações de Girard.

(DANTE, 2010; MARCONDES, 1998; SILVA, C.X. 2009; GIOVANNI, 1992, 2002; SILVA, J.D., 2005; BORRETO FILHO, 2000).

No tópico de operações com polinômios não se dá muita ênfase para a soma e multiplicação de polinômios. Faz-se uma revisão, pois para o aluno no final do terceiro ano, isso já é bem natural. Dedica-se a maior parte do tempo na divisão de polinômios. Em raras obras encontramos o método dos coeficientes a determinar. A demonstração dos métodos não é feita no Ensino Médio, ele é ensinado através de exemplos.

Quanto ao dispositivo de Briot-Ruffini, este dispositivo também não é provado e aparece apenas como um método mais prático para divisão de polinômios por binômios.

Segue o passo a passo, conforme é apresentado aos alunos, para efetuar a aplicação do dispositivo, para a divisão de um polinômio de grau 4 $P(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ por um binômio do tipo $x - \alpha$:

- 1º passo – Dispomos os coeficientes de $p(x)$ e a raiz de $x - \alpha$ conforme segue abaixo.

α	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0

- 2º passo – Repetimos o primeiro coeficiente que passa a ser o primeiro coeficiente q_3 do polinômio quociente. Na sequência multiplicamos q_3 por α e somamos com a_3 e assim obtemos o segundo coeficiente q_2 do quociente. Repetimos o processo para encontrarmos os demais coeficientes. O último termo encontrado será o resto da divisão.

α	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
	q_3	q_2	q_1	q_0	$r(x)$

Encontramos a demonstração do Teorema do Resto em boa parte dos livros didáticos. Por outro lado, não dão ênfase à relação que existe entre o valor numérico e o resto da divisão, principalmente no sentido de tentar diminuir a quantidade de operações para o cálculo do valor numérico. Alguns autores tratam esse resultado como Teorema de D'Alembert e outros fazem apenas a observação de que um polinômio é divisível por um polinômio se, e somente se, o resto da divisão é zero.

Geralmente, em capítulos separados, encontramos referência a equações algébricas enunciando-se o Teorema Fundamental da Álgebra.

A busca pelas raízes geralmente é feita através das relações de Girard ou pela pesquisa das raízes racionais quando as equações possuem coeficientes inteiros.

Talvez pela falta de incentivo do uso de tecnologia não se trabalhe com traçado de gráficos nessa parte do conteúdo. O fato de usar traçado de gráficos, mesmo com apoio de programas computacionais, seria uma ferramenta importante para o desenvolvimento da noção de localização de uma ou mais raízes reais de uma função polinomial.

Cabe salientar que, entre um item e outro, todos os livros contém listas de exercícios para prática e memorização. Encontramos inclusive exercícios extras, geralmente questões de vestibulares, para que o aluno possa aprofundar seus estudos.

3 PROPOSTA DE UMA NOVA ABORDAGEM

Diante do exposto até o momento propomos uma nova abordagem para o estudo de polinômios. Pensamos que seja importante enfatizar as definições e usar recursos tecnológicos, principalmente no traçado de gráficos e cálculo de valor numérico. Procuraremos, assim, desenvolver no aluno o caráter investigativo e intuitivo.

3.1 Polinômio × Função Polinomial.

Geralmente quando iniciamos a desenvolver esse conteúdo no terceiro ano surge a dúvida:

- Será necessário distinguir o que é polinômio e o que é função polinomial?

Segundo Lima (2006) não se faz necessária esta distinção.

> Note que o conceito de polinômio contempla apenas a lista de seus coeficientes e a forma pela qual os somamos e multiplicamos; quando nos referimos à função polinomial, passamos a estar interessados na correspondência entre números complexos estabelecida pelo valor que a função assume em cada ponto. É claro que a todo polinômio corresponde uma única função polinomial; por outro lado, vimos acima que duas funções polinomiais só são iguais quando têm a mesma lista de coeficientes. Em outras palavras, duas funções polinomiais só são iguais quando os polinômios a elas associados são iguais. Assim, a função polinomial também corresponde a um único polinômio. Desse modo, existe uma correspondência biunívoca entre funções polinomiais e polinômios, o que nos permite, sem risco de confusão, nos referirmos indistintamente ao polinômio p ou a função polinomial p. É conveniente muitas vezes nos referirmos a um “polinômio p(x)”, especialmente em situações em que outros polinômios apareçam descritos apenas por sua expressão (LIMA, 2006, p.233).

3.2 Definição

Dados um número $n \epsilon N$ e $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1$ e $a_0 \epsilon C$, denomina-se Função Polinomial, ou simplesmente, Polinômio em C, onde C é e o conjunto dos números complexos, a função $P: C \rightarrow C$, definida por:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

sendo

- $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1$ e $a_0 \epsilon C$ chamados de coeficientes
- $x \in C$ a variável.

Como em anos anteriores já foram estudadas as funções polinomiais de primeiro e segundo graus, mesmo que com o nome de função afim e função quadrática, e ainda as funções trigonométricas, não é difícil para o aluno entender que a cada função polinomial pode-se associar um gráfico traçado no plano cartesiano. Com isso já introduzimos algumas ideias interessantes, tais como, a noção de que para cada valor de x real temos um valor numérico respectivo para a função, a noção de continuidade da função polinomial, intersecção do gráfico com os eixos do sistema, sinal do polinômio, crescimento e decrescimento. Chamamos a atenção para o crescimento e decrescimento, no sentido de visualizar pontos de máximo e de mínimo, bem como para a constatação de que podem existir valores numéricos iguais para valores diferentes de x. Portanto, nos exemplos a seguir, iremos fazer o traçado do gráfico utilizando o programa GeoGebra e faremos as observações mesmo antes de definirmos cada ponto a ser observado. Trabalharemos inicialmente com polinômios que possibilitem a verificação visual desses itens.

Atividade 01:

Em todos os exemplos de polinômios utilize o GeoGebra para desenhar o gráfico e faça as seguintes observações:

- Verifique em quais pontos o gráfico intersecta o eixo das abscissas e o eixo das ordenadas.
- Verifique para quais valores de x a função é crescente ou decrescente.
- Verifique para quais valores de x o sinal do polinômio é positivo e para quais é negativo.

a) $P(x) = x + 2$

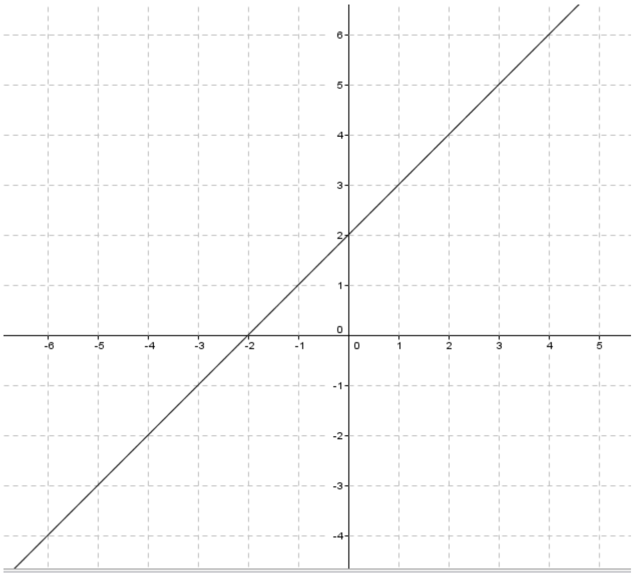


Figura 1- Gráfico referente atividade 01 letra a

b) $P(x) = x^2 - 5x + 6$

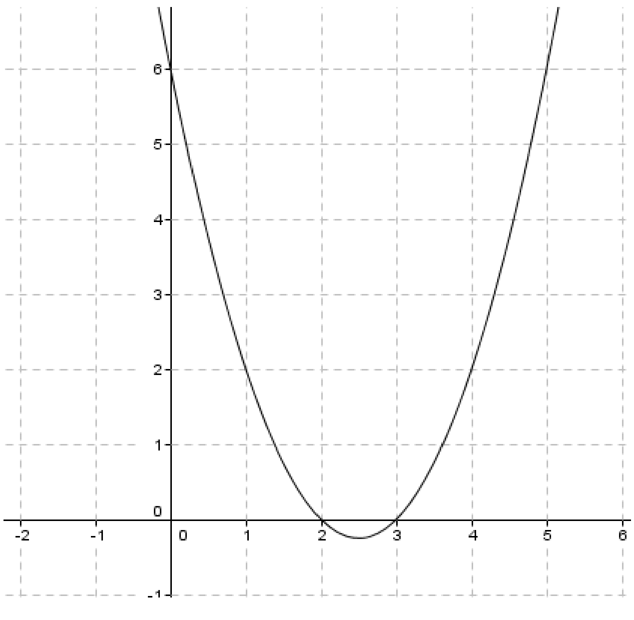


Figura 2 - Gráfico da atividade 01 letra b

c) $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

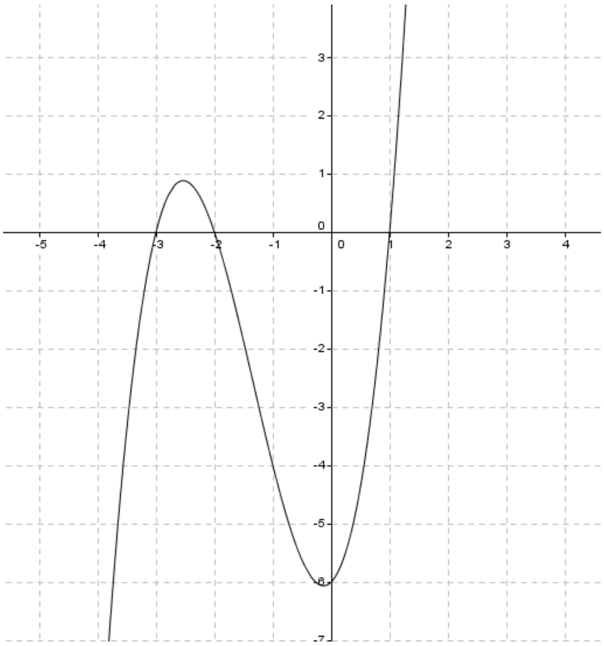


Figura 3 - Gráfico da atividade 01 letra c

d) $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$

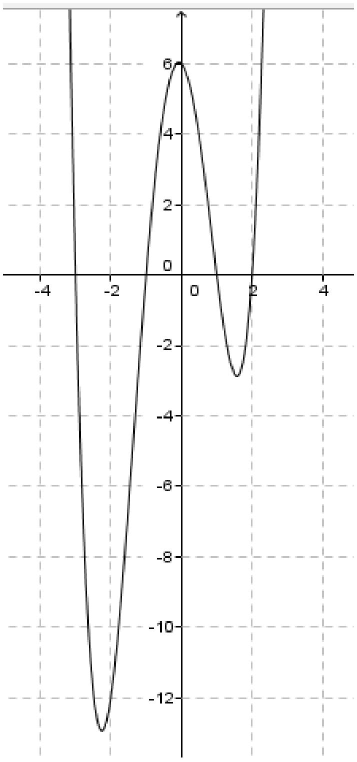


Figura 4 - Gráfico da atividade 01 letra d

e) $P(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12$

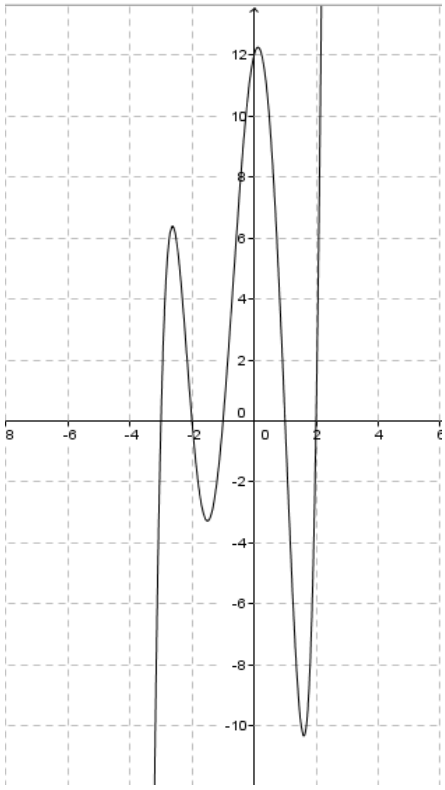


Figura 5 - Gráfico da atividade 01 letra e

Além da observação dos itens citados, incentivamos o aluno a pensar na quantidade de vezes em que o gráfico intersecta o eixo das abscissas e com isso estabelecer uma relação com o grau do polinômio. Outro fato interessante de observar é a quantidade de vezes em que a função passa de crescente para decrescente e vice-versa. Durante essa análise já utilizamos termos, mesmo que ainda não definidos, tais como, raiz de polinômio e ponto de máximo e de mínimo.

3.3 Valor numérico de um polinômio

3.3.1 Definição

Dado um polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$, o valor numérico de $P(x)$ para $x = k, k \epsilon C$, é o número que se obtém substituindo x por k e efetuando as operações indicadas em $P(x)$, ou seja:

$P(k) = a_n k^n + a_{n-1}k^{n-1} + a_{n-2}k^{n-2} + \ldots + a_2k^2 + a_1k + a_0.$

Quando $P(k) = 0$ dizemos que k é uma raiz ou zero do polinômio $P(x)$. Além disso é importante ressaltar que o esboço do gráfico que representa esse polinômio intersecta o eixo das abscissas no ponto (k, 0).

Feitas as definições acima, tanto para valor numérico quanto para a raiz de um polinômio, sugerimos que se volte aos esboços gráficos dos exemplos do item anterior para que se faça a interpretação gráfica do valor numérico e das raízes.

Observamos ainda que a quantidade de operações de soma e multiplicação feitas para o cálculo de $P(k)$, para um polinômio completo de grau n, é n e $\frac{n(n+1)}{2}$, respectivamente (ROQUE, W. L., 2000). Nenhum livro de Ensino Médio que pesquisamos faz referência a esse fato. Claro que, tratando-se de polinômios de graus baixos e coeficientes inteiros, não temos grandes problemas. Mas imaginemos polinômios de graus elevados e coeficientes não inteiros. Mesmo utilizando ferramentas computacionais aumenta muito a possibilidade de erros, bem como o tempo necessário para o cálculo. Desta forma, induzimos o aluno a pensar que possam existir maneiras de diminuir essa quantidade de operações.

Na tabela 1 apresentamos o número de operações necessárias para o cálculo do valor numérico de um polinômio.

Tabela 1 – Número de operações para o cálculo do valor numérico de um polinômio

Grau	Polinômio	Somas	Produtos	Total
0	0	0	0	0
1	$a_1x + a_0$	1	1	2
2	$a_2x^2 + a_1x + a_0$	2	3	5
3	$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$	3	6	9
4	$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$	4	10	14
5	$a^5x_5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$	5	15	20
6	$a_6x^6 + a^5x_5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$	6	21	27

Percebe-se da tabela 1 que o número de somas é igual ao grau do polinômio. Quanto aos produtos verificamos recursivamente o que acontece, conforme segue na tabela 2.

Tabela 2 – Tabela de Recorrência

Grau	Produtos P_i
0	$P_0 = 0$
1	$P_1 = P_0 + 1$
2	$P_2 = P_1 + 2$
3	$P_3 = P_2 + 3$
4	$P_4 = P_3 + 4$
5	$P_5 = P_4 + 5$
⋮	...
n-1	$P_{n-1} = P_{n-2} + (n-1)$
n	$P_n = P_{n-1} + n$

Fazendo uma soma “telescópica”, ou seja, somando membro a membro as equações da tabela 2 temos:

$P_0 + P_1 + P_2 + \ ... + P_{n-1} + P_n = P_0 + 1 + P_1 + 2 + P_2 + 3 + \cdots + P_{n-1} + n.$

Portanto

$P_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$

Esta soma trata-se da soma de uma progressão aritmética de razão 1 cuja soma é $\frac{n(n+1)}{2}$. O total de operações é dado por $n + \frac{n(n+1)}{2}$, ou seja, $\frac{n(n+3)}{2}$.

Atividade 02:

Seja $P(x) = 2x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 10x - 1$. Encontre o valor de $P(2)$.

$P(2) = 2.2^4 - 2.2^3 - 13.2^2 + 10.2 - 1$

$P(2) = 2.2.2.2.2 - 2.2.2.2 + 13.2.2 + 10.2 - 1$

$P(2) = -17$

Note que forma realizados 10 produtos e 4 somas, ou seja, 14 operações.

3.3.2 Método de Briot-Ruffini ou de Horner

Consideremos o polinômio

$P(x) = \ a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ ... + a_1 x + a_0.$

Dividindo P(x) pelo binômio $x - c$ temos $P(x) = (x - c)Q(x) + r$ sendo *Q(x)* o polinômio quociente de grau n-1 e r uma constante que é o resto da operação.

Observe que o resto r é o próprio valor numérico de P(c). Sendo $r = 0$ então $P(c) = 0$, donde concluímos que c é raiz desse polinômio.

Como

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = (x - c)(b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} \ldots + b_2 x + b_1) + r,$$

efetuando o produto indicado no segundo termo obtemos

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \ldots + a_1 x + a_0$$
$$= b_n x^n + \ (b_{n-1} - c b_n) x^{n-1} \ + \cdots + (b_1 - c b_2) x - c b_1 + \ r$$

donde segue que

$a_n = b_n$,

$a_{n-1} = b_{n-1} - c b_n \Rightarrow b_{n-1} = a_{n-1} + c b_n$,

$\vdots$

$a_0 = r - c b_1 \Rightarrow r = a_0 + c b_1$.

Estas mesmas relações podem ser obtidas evidenciando-se n-1 vezes a variável x no polinômio do seguinte modo:

$$P(x) = \ a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$
$$= \big((\ldots(a_n x + a_{n-1})x + \cdots + a_2)x + a_1\big) + a_0.$$

O método de Briot-Ruffini (ROQUE, W. L., 2000) consiste em organizar as relações anteriores de forma esquemática para determinar o valor numérico de um polinômio do seguinte modo:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
c		cb_n	cb_{n-1}	...	cb_2	cb_1
	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	...	b_1	$r = P(c)$

Observe que para encontrar o valor numérico de um polinômio usando este método fazemos *n* somas e *n* multiplicações, o que gera um total de *2n* operações. Note ainda que os coeficientes $b_n, b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_1$ são os coeficientes de *Q(x)* que é, por hipótese, o quociente de *P(x)* por $x - c$.

Atividade 03

Vamos utilizar o dispositivo de Briot-Ruffini para resolver o exemplo anterior:

	2	-2	-13	10	-1
2		4	4	-18	-16
	2	2	-9	-8	-17

Logo, $P(2) = -17$. Com esse método fizemos 4 somas e 4 produtos totalizando 8 operações.

Além de encontrarmos o valor numérico do polinômio encontramos também o quociente e o resto da divisão de *P(x)* por *x-2*, ou seja,

$$2x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 10x - 1 = (x - 2)(2x^3 + 2x^2 - 9x - 8) -17.$$

Gostaríamos de salientar a importância do fato de reduzirmos a quantidade de operações. Se a função polinomial é de grau 100, o total de operações se reduz de 5150 operações para 200 a cada valor calculado. Além disso, normalmente, um sistema computacional é alimentado em base decimal, uma conversão para binário é feita, e o resultado é apresentado em decimal novamente com aproximações sendo efetuadas. Quanto mais operações são realizadas, maiores as chances de ocorrerem diferenças no final do cálculo.

Atividade 04

Inicialmente utilizaremos o GeoGebra e faremos o esboço gráfico do polinômio citado na atividade anterior. Na sequência montaremos uma tabela em uma planilha de cálculo para valores de $-2{,}5 \leq x \leq 2{,}5$ com intervalo de 0,05 usando os dois métodos. Faremos ainda uma coluna para verificar se há discrepância entre os resultados obtidos por cada método.

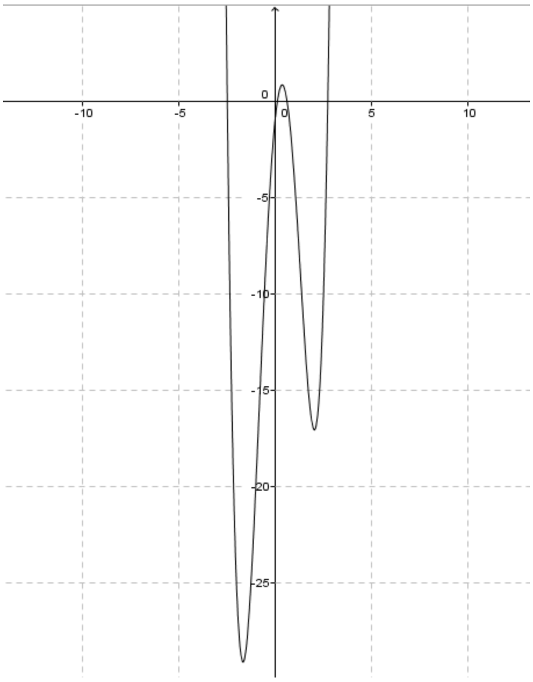


Figura 6 - Gráfico da atividade 04

Tabela 3 - Cálculo do valor numérico do polinômio da atividade 04 por dois métodos

x	Pela Definição	Briott Rufini/Horner	Discrepância
-2,5	2,125	2,125	0
-2,45	-2,0602375	-2,0602375	-7,105E-15
-2,4	-5,8768	-5,8768	0
-2,35	-9,3407375	-9,3407375	0
-2,3	-12,4678	-12,4678	0
-2,25	-15,2734375	-15,2734375	0
-2,2	-17,7728	-17,7728	0
-2,15	-19,9807375	-19,9807375	0
-2,1	-21,9118	-21,9118	0
-2,05	-23,5802375	-23,5802375	0
-2	-25	-25	0
-1,95	-26,1847375	-26,1847375	0

(continua)

-1,9	-27,1478	-27,1478	0
-1,85	-27,9022375	-27,9022375	0
-1,8	-28,4608	-28,4608	0
-1,75	-28,8359375	-28,8359375	0
-1,7	-29,0398	-29,0398	0
-1,65	-29,0842375	-29,0842375	0
-1,6	-28,9808	-28,9808	0
-1,55	-28,7407375	-28,7407375	0
-1,5	-28,375	-28,375	0
-1,45	-27,8942375	-27,8942375	0
-1,4	-27,3088	-27,3088	0
-1,35	-26,6287375	-26,6287375	0
-1,3	-25,8638	-25,8638	0
-1,25	-25,0234375	-25,0234375	0
-1,2	-24,1168	-24,1168	0
-1,15	-23,1527375	-23,1527375	0
-1,1	-22,1398	-22,1398	0
-1,05	-21,0862375	-21,0862375	0
-1	-20	-20	0
-0,95	-18,8887375	-18,8887375	0
-0,9	-17,7598	-17,7598	0
-0,85	-16,6202375	-16,6202375	0
-0,8	-15,4768	-15,4768	0
-0,75	-14,3359375	-14,3359375	0
-0,7	-13,2038	-13,2038	0
-0,65	-12,0862375	-12,0862375	0
-0,6	-10,9888	-10,9888	0
-0,55	-9,9167375	-9,9167375	0
-0,5	-8,875	-8,875	0
-0,45	-7,8682375	-7,8682375	0
-0,4	-6,9008	-6,9008	0
-0,35	-5,9767375	-5,9767375	0
-0,3	-5,0998	-5,0998	0

(continua)

-0,25	-4,2734375	-4,2734375	0
-0,2	-3,5008	-3,5008	0
-0,15	-2,7847375	-2,7847375	0
-0,1	-2,1278	-2,1278	0
-0,05	-1,5322375	-1,5322375	0
0	-1	-1	0
0,05	-0,5327375	-0,5327375	0
0,1	-0,1318	-0,1318	0
0,15	0,2017625	0,2017625	-2,22E-16
0,2	0,4672	0,4672	0
0,25	0,6640625	0,6640625	0
0,3	0,7922	0,7922	0
0,35	0,8517625	0,8517625	0
0,4	0,8432	0,8432	0
0,45	0,7672625	0,7672625	0
0,5	0,625	0,625	0
0,55	0,4177625	0,4177625	6,6613E-16
0,6	0,1472	0,1472	-2,22E-16
0,65	-0,1847375	-0,1847375	0
0,7	-0,5758	-0,5758	-8,882E-16
0,75	-1,0234375	-1,0234375	0
0,8	-1,5248	-1,5248	2,2204E-15
0,85	-2,0767375	-2,0767375	0
0,9	-2,6758	-2,6758	0
0,95	-3,3182375	-3,3182375	0
1	-4	-4	0
1,05	-4,7167375	-4,7167375	0
1,1	-5,4638	-5,4638	0
1,15	-6,2362375	-6,2362375	0
1,2	-7,0288	-7,0288	0
1,25	-7,8359375	-7,8359375	0
1,3	-8,6518	-8,6518	0
1,35	-9,4702375	-9,4702375	0

(conclusão)

1,4	-10,2848	-10,2848	0
1,45	-11,0887375	-11,0887375	0
1,5	-11,875	-11,875	0
1,55	-12,6362375	-12,6362375	0
1,6	-13,3648	-13,3648	0
1,65	-14,0527375	-14,0527375	0
1,7	-14,6918	-14,6918	0
1,75	-15,2734375	-15,2734375	0
1,8	-15,7888	-15,7888	0
1,85	-16,2287375	-16,2287375	0
1,9	-16,5838	-16,5838	0
1,95	-16,8442375	-16,8442375	0
2	-17	-17	0
2,05	-17,0407375	-17,0407375	0
2,1	-16,9558	-16,9558	0
2,15	-16,7342375	-16,7342375	0
2,2	-16,3648	-16,3648	0
2,25	-15,8359375	-15,8359375	0
2,3	-15,1358	-15,1358	0
2,35	-14,2522375	-14,2522375	0
2,4	-13,1728	-13,1728	0
2,45	-11,8847375	-11,8847375	0
2,5	-10,375	-10,375	0
2,55	-8,6302375	-8,6302375	0
2,6	-6,6368	-6,6368	0
2,65	-4,3807375	-4,3807375	0
2,7	-1,8478	-1,8478	-1,243E-14
2,75	0,9765625	0,9765625	0

Observe que há discrepância entre alguns valores numéricos. A tabela 3 apresenta apenas algumas casas decimais, porém quando fizemos o cálculo da diferença foram consideradas todas as casas calculadas. Dessa forma levamos o aluno a entender que mesmo programas computacionais podem apresentar erros, mesmo que pequenos, quando calculam valores que geram números com muitas casas decimais.

Continuando esta atividade, sugerimos a localização e a determinação das raízes desse polinômio. Podemos observar que nem o gráfico nº 06 nem a tabela nº3 nos dá a certeza da localização das raízes. Graficamente podemos observar que são quatro raízes reais. Observando a tabela 3 temos que:

$P(-2{,}45) < 0$ e $P(-2{,}5) > 0$;

$P(0{,}1) < 0$ e $P(0{,}15) > 0$;

$P(0{,}6) > 0$ e $P(0{,}65) < 0$;

$P(2{,}7) < 0$ e $P(2{,}75) > 0$.

Portanto, se k é uma raiz real desse polinômio então $-2{,}5 < k < -2{,}45$ ou $0{,}1 < k < 0{,}15$ ou $0{,}6 < k < 0{,}65$ ou $2{,}7 < k < 2{,}75$.

3.4 Localização das raízes de um polinômio

3.4.1 Teorema do Valor Intermediário

Seja f uma função contínua que assume valores de sinais opostos nos extremos do intervalo $[a, b]$, *isto é,* $f(a).f(b) < 0$. *Então, o intervalo [a, b] conterá no mínimo uma raiz da equação* $f(x) = 0$. *Haverá no mínimo um número* $x_0 \epsilon]a, b[$, *tal que* $f(x_0) = 0$ (RUGGIERO, 1996).

Atividade 05

Utilizando os resultados da tabela 3 aproximaremos o valor de $k \in]-2{,}5; -2{,}45[$ com a aproximação de duas casas decimais na tabela 4.

Tabela 4 – Primeira aproximação

x	P(x)
-2,5	2,125
-2,49	1,258
-2,48	0,406
-2,47	-0,431

Note que, na tabela 4, $k \in]-2{,}48;-2{,}47[$. Na tabela 5 apresentamos uma aproximação de três casas decimais.

Tabela 5 – Segunda aproximação

x	P(x)
-2,48	0,406
-2,479	0,321
-2,478	0,237
-2,477	0,153
-2,476	0,069
-2,475	-0,015

Podemos dizer que $k \cong -2{,}475$.

Prosseguindo sucessivamente chegamos à raiz do polinômio com a aproximação que julgarmos necessária. Como exercício sugerimos que se encontre as demais raízes do polinômio com aproximação de três casas decimais.

3.4.2 Teorema Fundamental da Álgebra

Uma equação algébrica de grau n tem exatamente n raízes, reais ou complexas, desde que cada raiz seja contada levando em consideração sua multiplicidade (BARROS, 1972).

A fim de melhorar a compreensão deste teorema propomos uma atividade de composição de polinômios, ou seja, ao invés de apenas decompor o polinômio, conforme geralmente acontece, solicitamos exatamente o contrário. Isso tornará evidente que os zeros do polinômio coincidem com as raízes dos binômios que compõe o polinômio. Para fins de registro histórico, pensamos que seja importante enfatizar que a demonstração desse teorema foi feito por Gauss.

Atividade 06

Efetue os seguintes produtos de binômios e utilize o GeoGebra para gerar o gráfico do polinômio formado. Na sequência, através do gráfico, localize as raízes desses polinômios.

a) $P(x) = (x-3)(x+1)(x-1)$

Segue que $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

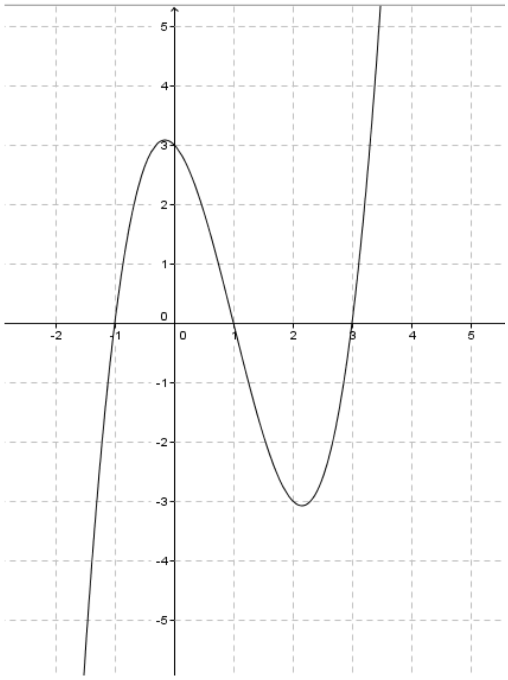


Figura 7 - Gráfico da atividade 06 letra a

Note que as raízes desse polinômio são {-1,1,3}. Cabem aqui alguns questionamentos:

- O que o conjunto das raízes tem a ver com os binômios que compõe o polinômio?
- Foi ao acaso que isso ocorreu?
- E o ponto de intersecção com o eixo das ordenadas?

Gostaríamos de ressaltar a importância destas perguntas, considerando que a experiência nos mostra que a maioria dos nossos estudantes finalistas do Ensino Médio não consegue realizar as associações necessárias para verificar o que nos parece evidente.

Respondendo:

Por definição, k é raiz de polinômio se, e somente se, P(k)=0. Portanto se

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x-3)(x+1)(x-1) = 0$$

e como um produto é igual a zero se, e somente se, pelo menos um dos fatores for igual a zero, podemos concluir que $x - 3 = 0$ ou $x + 1 = 0$ ou $x - 1 = 0$. Daí $x = 3$ ou $x = -1$ ou $x = 1$. Observe ainda que o produto das raízes é -3.

E ainda $P(0) = 0^3 - 3.0^2 - 0 + 3 = 3$, ou seja, o ponto de intersecção do gráfico de um polinômio como o eixo OY sempre terá como ordenada o seu termo independente, em particular, se este for nulo o gráfico passa pela origem do sistema cartesiano.

b) $P(x) = x(x-1)^2(x+1)$

Neste caso $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x$. Com o exercício anterior, antes de gerar o gráfico, já podemos deduzir que as raízes desse polinômio serão {-1,0,1} e o traçado passará pela origem.

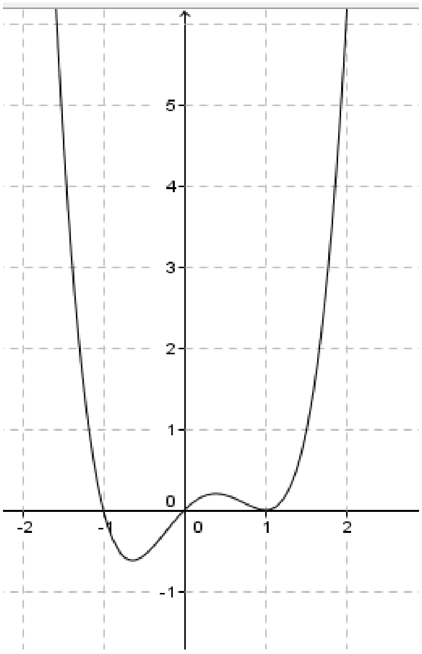


Figura 8 - Gráfico da atividade 06 letra b

Agora temos uma situação nova em que o polinômio é de quarto grau e possui apenas três raízes reais. Reescrevendo temos $P(x) = x(x-1)(x-1)(x+1)$, ou seja, a raiz 1 tem multiplicidade 2. Nesse caso é notável o fato que o Teorema do Valor Intermediário não detecta a raiz 1.

Atividade 07

No intuito de introduzirmos o conceito de raízes complexas propomos a construção do gráfico do polinômio $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. Graficamente, observamos que -1 é uma raiz de $P(x)$.

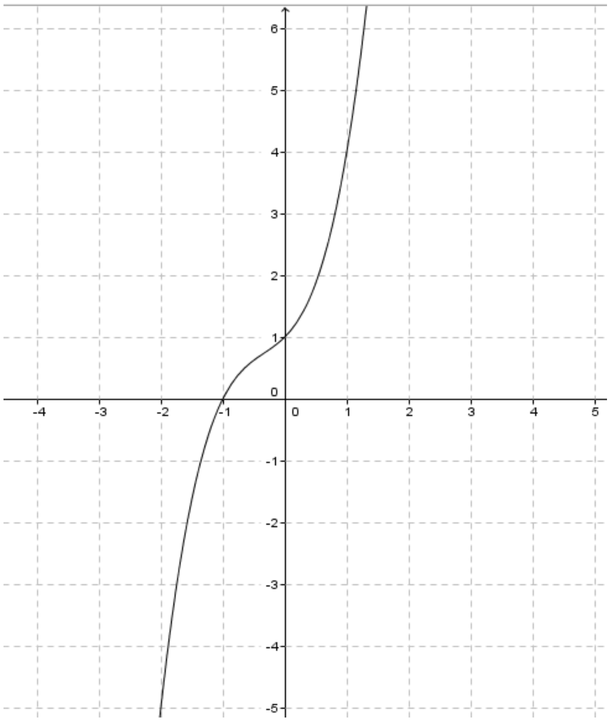


Figura 9 - Gráfico da atividade 07

Nesse caso, a raiz -1 não tem multiplicidade 3 pois $x^3 + x^2 + x + 1 \neq (x + 1)^3$, no entanto é necessário que se atenda ao Teorema Fundamental da Álgebra. De qualquer forma, $x + 1$ é um fator que compõe esse polinômio, portanto localizaremos as demais raízes. Como já sabemos dividir polinômio por binômio, utilizando o algoritmo de Briot-Ruffini vamos decompor *P(x)*.

	1	1	1	1
-1		-1	0	-1
	1	0	1	0

Então temos que $P(x) = (x + 1)(x^2 + 1)$ donde segue $(x + 1)(x^2 + 1) = 0$ se, e somente se, $x + 1 = 0$, cujo resultado já temos, ou $x^2 + 1 = 0$. Resolvendo essa equação temos $x^2 = -1$, isto é, $x = \pm\sqrt{-1}$.

Como a raiz quadrada não está definida para números reais negativos, vamos considerar $\sqrt{-1} = i$ em que i é a unidade imaginária. Diante disso temos nosso polinômio decomposto em fatores lineares $P(x) = (x + 1)(x + i)(x - i)$, cujas raízes são $\{1, -i, i\}$, portanto três raízes, sendo duas complexas.

3.4.3 Raízes Complexas

Sobre as raízes complexas é importante ressaltar que elas sempre aparecem aos pares, ou seja, se $z = a + bi$, *com a real e b real não nulo, é raiz de um polinômio de* ***coeficientes reais****, então o conjugado* $\bar{z} = a - bi$ *também o é.*

Demonstração:

Seja

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

e

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0.$$

Como complexos iguais tem conjugados iguais, segue que

$$\overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = \bar{0}$$

e, pelas propriedades dos complexos, temos

$$\overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = a_n (\bar{z})^n + a_{n-1} (\bar{z})^{n-1} + \cdots + a_n \bar{z} + a_0 = 0 \therefore$$

(RIBEIRO, 2007)

Conforme já foi dito no primeiro capítulo, não existe um método algébrico para encontrar as raízes de um polinômio de grau *n*, porém na necessidade de conhecê-las, vários estudiosos desenvolveram métodos numéricos para calculá-las. Além dos métodos gráficos que já apresentamos e a utilização do Teorema do Valor Intermediário, apresentaremos mais alguns métodos.

A atividade a seguir poderá ser desenvolvida pelo professor e alunos de forma conjunta. O objetivo principal é introduzir a Regra de Sinal de Descartes e a pesquisa de raízes racionais.

Atividade 08

Desenvolva o polinômio $P(x) = (x - 2)(x + 3)$.

Temos:

$P(x) = x^2 - 2x + 3x - 2.3,$

$P(x) = x^2 + (-2 + 3)x - 2.3,$

$P(x) = x^2 + x - 6.$

Façamos as seguintes observações:

- Conforme já vimos, as raízes desse polinômio são 2 e -3. Note que o termo independente {-6} de *P(x)* é composto pelo produto dessas raízes, ou seja, as raízes fazem parte do conjunto de seus divisores.

- O polinômio é composto por dois termos com sinal (+) e um termo com sinal (-), ou seja, a sequência de sinais é + + - havendo apenas uma troca de sinais.
- Temos uma raiz positiva e uma negativa.

a) Desenvolva $P(x) = (2x + 5)(x + 3)$.

Neste caso

$$P(x) = 2x^2 + 5.x + 2.3x + 5.3,$$
$$P(x) = 2x^2 + (5 + 2.3)x + 5.3,$$
$$P(x) = 2x^2 + 11x + 15.$$

Note que:

- As raízes são $-\frac{5}{2}$ e -3 e, nesse caso,-3 é um dos divisores de 15.
- Reescrevendo $P(x) = 2\left(x^2 + \frac{11}{2}x + \frac{15}{2}\right)$, podemos observar melhor a composição do termo independente entre parênteses, isto é, $\frac{15}{2} = \frac{5}{2} \cdot 3 = \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot (-3)$.
- Todos os sinais dos termos são positivos, ou seja, a sequência é + + +, não há troca de sinais.
- Não há raízes positivas.

b) Desenvolva agora $P(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 5)$.

Obtemos:

$$P(x) = [x^2 + (1 - 2)x - 1.2](x + 5),$$
$$P(x) = x^3 + (1 - 2)x^2 - 1.2x + 5x^2 + 5(1 - 2)x - 1.2.5,$$
$$P(x) = x^3 + (1 - 2 + 5)x^2 + [-1.2 + 5(1 - 2)]x - 1.2.5,$$
$$P(x) = x^3 + 4x - 7x - 10.$$

- As raízes são -1, 2 e -5, todas divisores do número -10.
- Existem dois termos de sinal positivo e dois termos de sinal negativo e a sequência dada é + + - -, ou seja, há uma troca de sinais.
- Há uma raiz positiva.

Do exposto até aqui, tiramos importantes conclusões importantes que poderão nos ajudar na hora da busca por raízes racionais de um polinômio, que são:

- Os divisores positivos e negativos do termo independente devem ser testados.
- Uma vez encontrada uma raiz podemos decompor o polinômio em um binômio multiplicado por um polinômio com um grau menor que o original por Briot-Ruffini.

- As trocas de sinais que foram observadas acima são relevantes.

3.4.4 Regra de sinal de Descartes

Dado um polinômio de coeficientes reais, o número de raízes reais positivas, p, não excede o número de variações de sinais dos coeficientes, v. Mais ainda, $v - p = 2k,\ k \epsilon N$ (ARENALES, 2013).

3.4.5 Teorema das Raízes Racionais

Se o número racional $\frac{p}{q}$*, com p e q primos entre si, é raiz de um polinômio de coeficientes inteiros*

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, *com* $a_n \neq 0$ *e* $a_0 \neq 0$, *então p é divisor de* a_0 *e q é divisor de* a_n (DANTE, 2010).

Atividade 09

Utilizando os conceitos e teoremas vistos até o momento, vamos determinar as raízes dos seguintes polinômios:

a) $P(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$

Para determinarmos as raízes vamos resolver a equação

$x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = 0.$

Observe que a sequência de sinais é + + -, ou seja, há uma troca de sinais, portanto existe no máximo uma raiz positiva. Pelo que vimos até aqui, um dos divisores de 9 deve ser candidato à raiz desse polinômio.

Montaremos uma tabela em uma planilha de cálculo e determinaremos o valor numérico de *P(x)* para os divisores positivos de 9.

Tabela 6 – Valor numérico dos divisores de 9.

x	*P(x)*
1	0
3	72
9	1152

Conforme havíamos sugerido, existe uma raiz positiva e é divisor de 9. Sendo 1 uma das raízes então x-1 é um dos fatores que compõe esse polinômio. Aplicando Briot-Ruffini faremos a decomposição.

	1	5	3	-9
1		1	6	9
	1	6	9	0

Portanto, $(x-1)(x^2+6x+9)=0$.

Note que $x^2+6x+9 = (x+3)^2$, logo as raízes do polinômio $P(x)$ são {1,-3} sendo que a raiz -3 é de multiplicidade 2.

b) $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$

Note que,

$$P(-1) = (-1)^4 - (-1)^2 - (-1) - 2 = 1 - 1 + 1 + 1 - 2 = 0$$

e

$$P(2) = 2^4 - 2^3 - 2^2 - 2 - 2 = 16 - 8 - 4 - 2 - 2 = 0$$

Sabendo que -1 e 2 são raízes, temos que x+1 e x-2 são fatores desse polinômio. Na sequência, dividiremos P(x) por x+1 e por x-2 pelo método de Briot-Ruffini.

	1	-1	-1	-1	-2
-1		-1	2	-1	2
	1	-2	1	-2	0
2		2	0	2	
	1	0	1	0	

Portanto

$$P(x) = (x+1)(x-2)(x^2+1).$$

Como as raízes da equação $x^2 + 1 = 0$ são i e $-i$, o conjunto de raízes de P(x) é $\{-2, -1, -i, i\}$.

Pela busca de raízes de uma função polinomial poderíamos ainda desenvolver atividades relacionadas ao Método de Newton entre outros. Não o fizemos nesse trabalho considerando que requer o pré requisito de derivadas, o que, atualmente não é desenvolvido na maioria das escolas de Ensino Básico Brasileiras.

Acreditamos ser importante trabalhar, em paralelo ou após essa proposta, os conteúdos da forma que são propostos pelos livros didáticos.

4 APLICAÇÃO DA PROPOSTA EM TURMA REGULAR DE ENSINO MÉDIO

4.1 Introdução

Durante o ano letivo de 2013, desenvolvemos parcialmente a proposta descrita no capítulo 3 em uma turma de terceiro ano do Ensino Médio Técnico em Informática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – IFRS – Câmpus Ibirubá. A aplicação foi parcial em função da carga horária, três períodos semanais durante um mês apenas, considerando o final do ano letivo e período de provas.

No desenvolvimento das atividades inerentes ao conteúdo utilizamos alguns recursos tecnológicos, tais como o *software* GeoGebra e planilha de cálculo (Excel). Os gráficos foram trabalhados em GeoGebra e não consideramos que fosse necessário que cada aluno o transcrevesse.

4.2 Desenvolvimento das atividades

Começamos os trabalhos do estudo de polinômios pela definição de polinômio e valor numérico e raízes de polinômio, de acordo com o que apresentamos no capítulo anterior. Todos os demais conceitos e teoremas foram introduzidos por alguma atividade conforme segue.

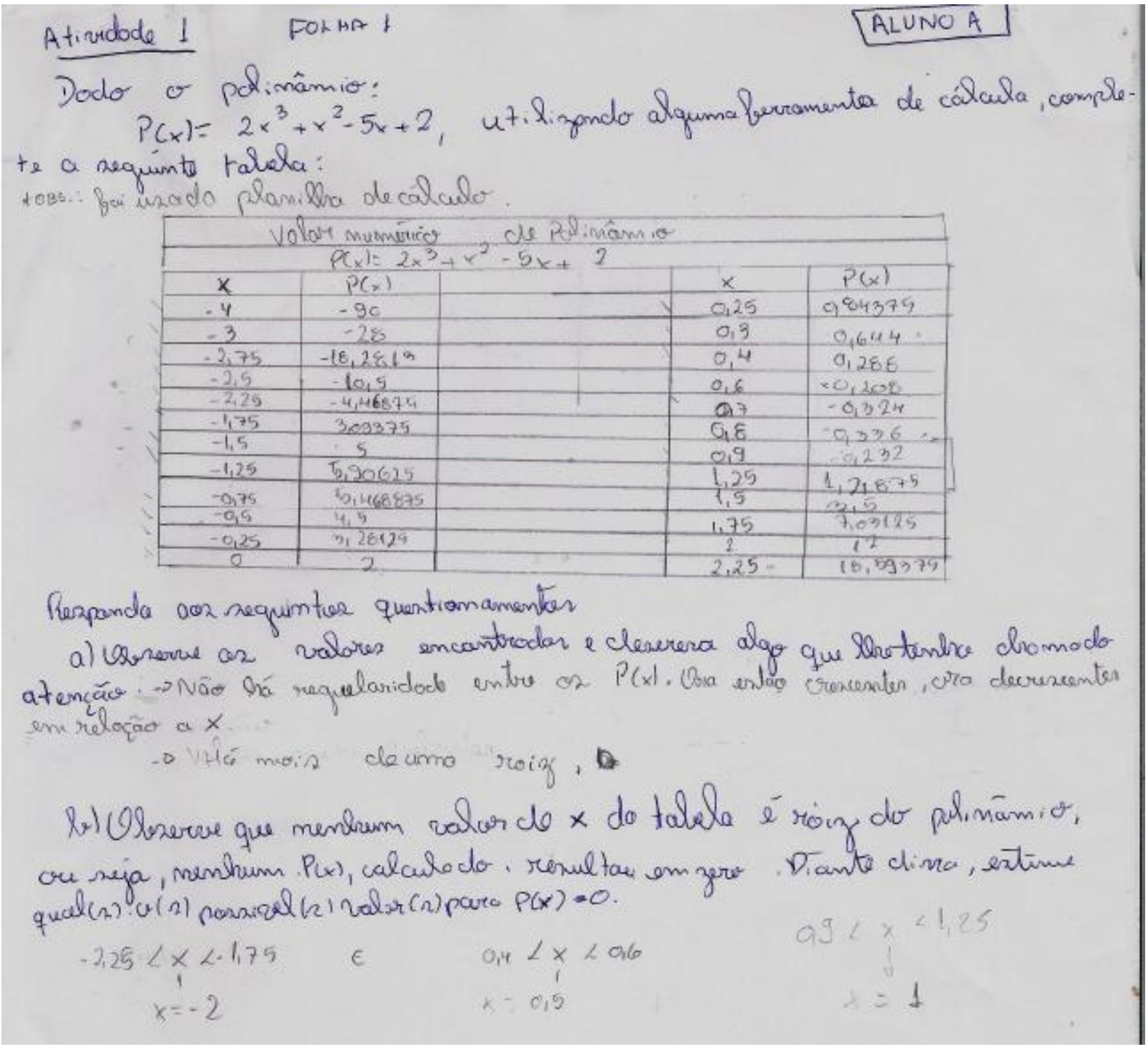
4.2.1 Atividade 01

Com o objetivo de dar uma ideia do comportamento de uma função polinomial, identificação das raízes, crescimento e decrescimento, propomos que se monte uma tabela calculando o valor numérico do polinômio $P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$. Os valores de x foram previamente estabelecidos de modo que se aproximassem dos valores das raízes.

Feita a tabela responda aos seguintes questionamentos:

a) Observe a tabela e descreva o que mais lhe chamou a atenção em relação aos valores encontrados.

b) Observe que nenhum valor de *x* na tabela é raiz do polinômio, ou seja, nenhum *P(x)*, calculado resultou em zero. Diante disso estime, qual(s) o(s) valor(s) de x para o(s) qual(s) *P(x)=0*.



Atividade 1 FOLHA 1 ALUNO A

Dado o polinômio:

$P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$, utilizando alguma ferramenta de cálculo, complete a seguinte tabela:

*OBS.: foi usado planilha de cálculo.

Valor numérico do Polinômio $P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$				
x	P(x)		x	P(x)
-4	-90		0,25	0,84375
-3	-28		0,3	0,644
-2,75	-18,2819		0,4	0,288
-2,5	-10,5		0,6	-0,208
-2,25	-4,46875		0,7	-0,324
-1,75	3,09375		0,8	-0,336
-1,5	5		0,9	-0,232
-1,25	5,90625		1,25	1,21875
-0,75	5,468875		1,5	3,5
-0,5	4,5		1,75	7,03125
-0,25	3,28129		2	12
0	2		2,25	18,59375

Responda aos seguintes questionamentos

a) Observe os valores encontrados e descreva algo que lhe tenha chamado atenção. → Não há regularidade entre os P(x). Ora estão crescentes, ora decrescentes em relação a x.

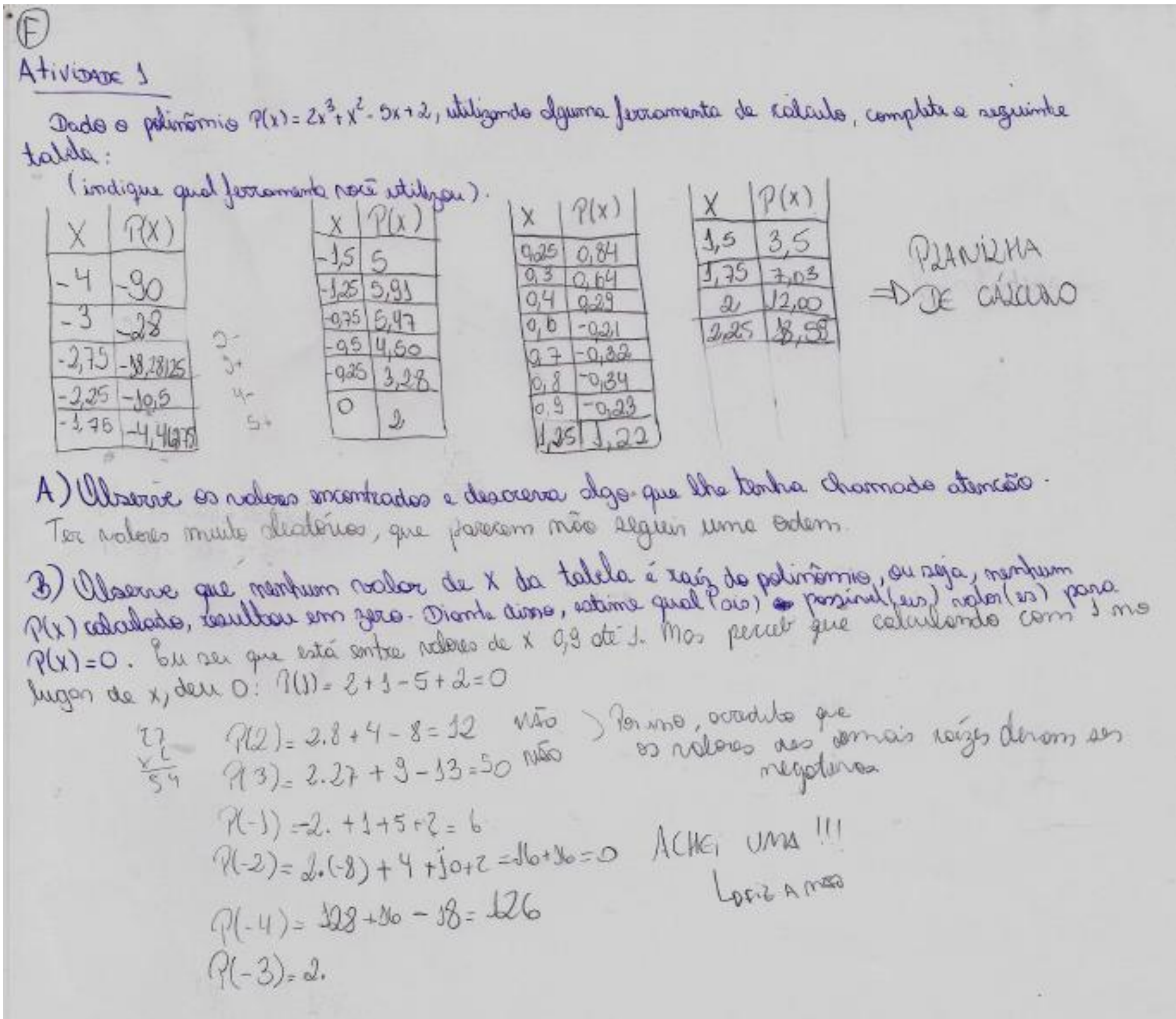
→ Há mais de uma raiz.

b) Observe que nenhum valor de x da tabela é raiz do polinômio, ou seja, nenhum P(x), calculado resultou em zero. Diante disso, estime qual(s) o(s) possível(s) valor(s) para P(x) = 0.

$-2,25 < x < -1,75$ e $0,4 < x < 0,6$ $0,9 < x < 1,25$

$x = -2$ $x = 0,5$ $x = 1$

Figura 10 – Atividade 01 Aluno A



F

Atividade 1

Dado o polinômio $P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$, utilizando alguma ferramenta de cálculo, complete a seguinte tabela:

(indique qual ferramenta você utilizou).

X	P(X)
-4	-90
-3	-28
-2,75	-18,28125
-2,25	-10,5
-1,75	-4,4[illegible]

X	P(X)
-1,5	5
-1,25	5,91
-0,75	5,47
-0,5	4,50
-0,25	3,28
0	2

X	P(X)
0,25	0,84
0,3	0,64
0,4	0,29
0,6	-0,21
0,7	-0,32
0,8	-0,34
0,9	-0,23
1,25	1,22

X	P(X)
1,5	3,5
1,75	7,03
2	12,00
2,25	18,58

PLANILHA
⇒ DE CÁLCULO

A) Observe os valores encontrados e descreva algo que lhe tenha chamado atenção.
Ter valores muito aleatórios, que parecem não seguir uma ordem.

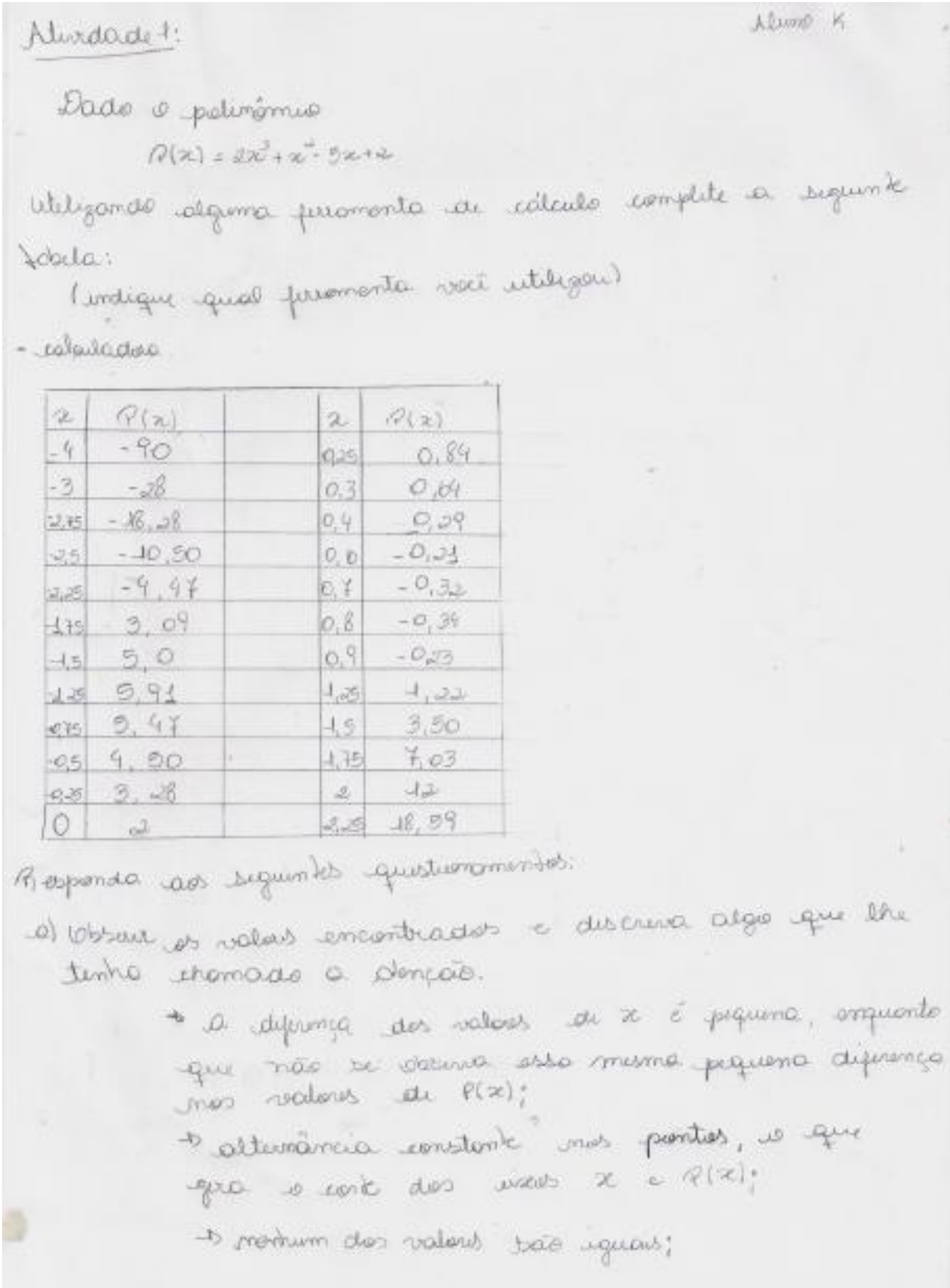
B) Observe que nenhum valor de X da tabela é raiz do polinômio, ou seja, nenhum P(x) calculado, resultou em zero. Diante disso, estime qual(ais) o(s) possível(eis) valor(es) para P(x)=0. Eu sei que está entre valores de x 0,9 até 1. Mas percebi que calculando com 1 no lugar de x, deu 0: $P(1) = 2+1-5+2 = 0$

$P(2) = 2.8+4-8 = 12$ não
$P(3) = 2.27+9-13 = 50$ não

Porém, acredito que os valores das demais raízes devem ser negativos

$P(-1) = -2.+1+5+2 = 6$
$P(-2) = 2.(-8)+4+10+2 = -16+16 = 0$ ACHEI UMA !!!
Lorenzo
$P(-4) = 128+16-18 = 126$
$P(-3) = 2.$

Figura 11 – Atividade 01 Aluno F



Atividade 1: Aluno K

Dado o polinômio

$P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$

Utilizando alguma ferramenta de cálculo complete a seguinte tabela:

(indique qual ferramenta você utilizou)

- calculadora

x	P(x)		x	P(x)
-4	-90		0,25	0,84
-3	-28		0,3	0,64
-2,75	-16,28		0,4	0,29
-2,5	-10,50		0,6	-0,21
-2,25	-4,47		0,7	-0,32
-1,75	3,09		0,8	-0,34
-1,5	5,0		0,9	-0,23
-1,25	5,91		1,25	1,22
-0,75	5,47		1,5	3,50
-0,5	4,50		1,75	7,03
-0,25	3,28		2	12
0	2		2,25	18,59

Responda aos seguintes questionamentos:

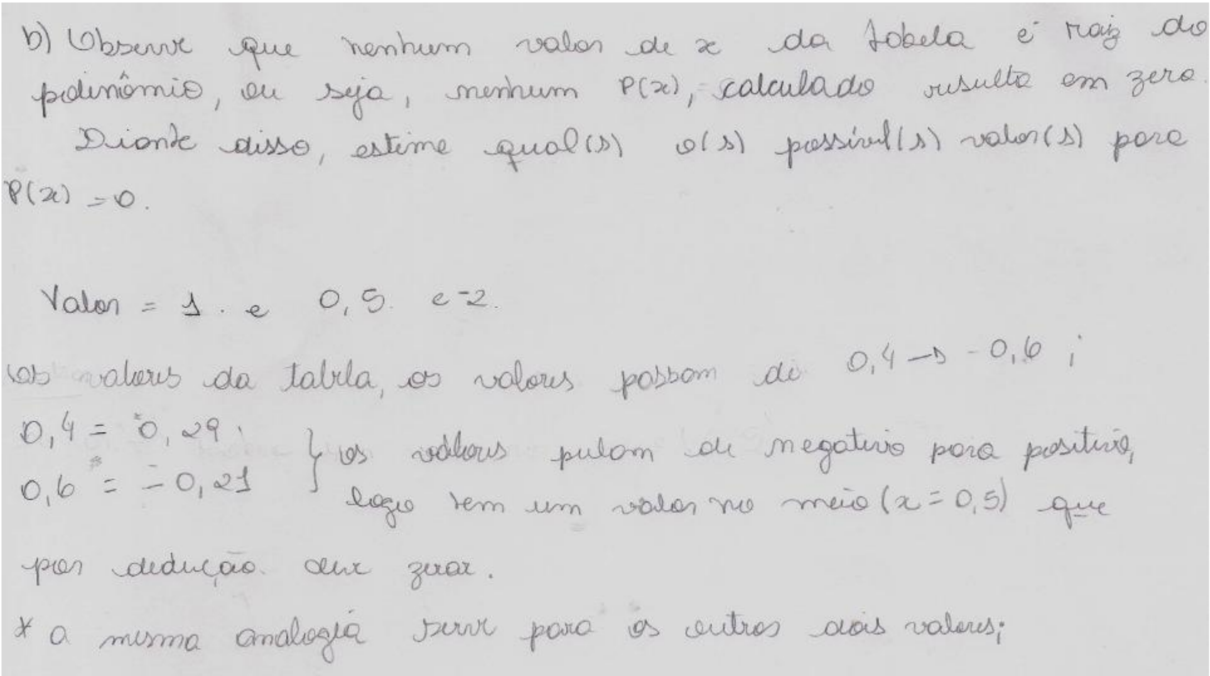
a) Observe os valores encontrados e descreva algo que lhe tenha chamado a atenção.

→ a diferença dos valores de x é pequena, enquanto que não se observa essa mesma pequena diferença nos valores de P(x);

→ alternância constante nos pontos, o que gera o corte dos eixos x e P(x);

→ nenhum dos valores são iguais;

Figura 12 – Atividade 01 Aluno K


b) Observe que nenhum valor de x da tabela é raiz do polinômio, ou seja, nenhum P(x), calculado resulta em zero.
Diante disso, estime qual(s) o(s) possível(s) valor(s) para P(x) = 0.

Valor = 1 . e 0,5. e -2.
os valores da tabela, os valores passam de 0,4 → -0,6 ;
0,4 = 0,29 ;
0,6 = -0,21
} os valores pulam de negativo para positivo, logo tem um valor no meio (x = 0,5) que
por dedução deu zerar.
* a mesma analogia serve para os outros dois valores;

Figura 13 – Continuação da Atividade 01 Aluno K

No final da atividade, além da coleta dos materiais fizemos o esboço do gráfico e o projetamos para fazermos mais algumas observações. No momento aproveitamos para introduzir a noção de limite, fazendo com que o aluno indicasse a tendência do gráfico quando os valores de *x* se aproximavam de um determinado valor ou tendessem ao infinito.

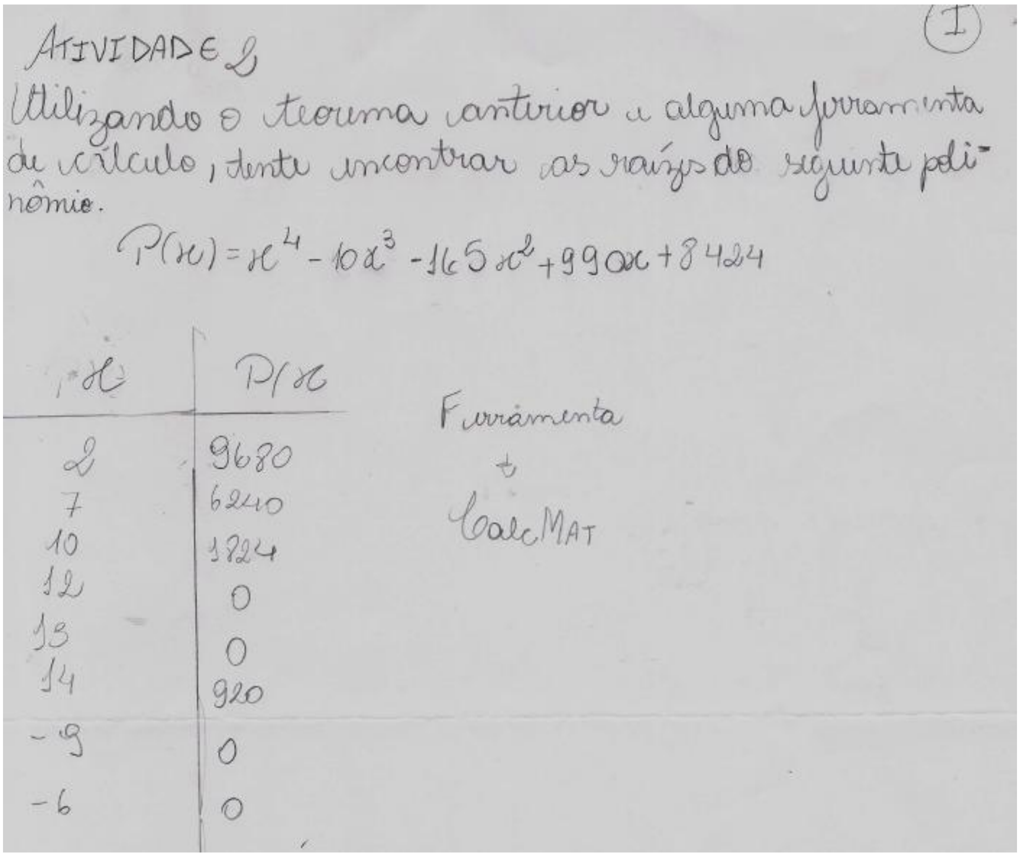
Notamos que vários alunos perceberam a continuidade da função, mesmo que intuitivamente, e com isso deduziram que se temos um determinado P(a) negativo e na sequência um *P(b)* positivo então existe um valor de c, sendo $a < c < b$, tal que *P(c)* = 0. Nesse momento apresentamos a eles o Teorema do Valor Intermediário. Mesmo sem fazer a demonstração o mesmo foi compreendido e assimilado.

Com o entendimento do teorema acima propomos as atividades 02 e 03 para que o aluno encontrasse as raízes de um polinômio. O objetivo principal dessa atividade é que o aluno use “naturalmente” a ideia do método da bisseção.

4.2.2 Atividade 02

Utilizando o Teorema do Valor Intermediário e alguma ferramenta de cálculo, encontre as raízes dos seguinte polinômio

$$P(x) = x^4 - 10x^3 - 165x^2 + 990x + 8424.$$



ATIVIDADE 2 (I)

Utilizando o teorema anterior e alguma ferramenta de cálculo, tente encontrar as raízes do seguinte polinômio.

$P(x) = x^4 - 10x^3 - 165x^2 + 990x + 8424$

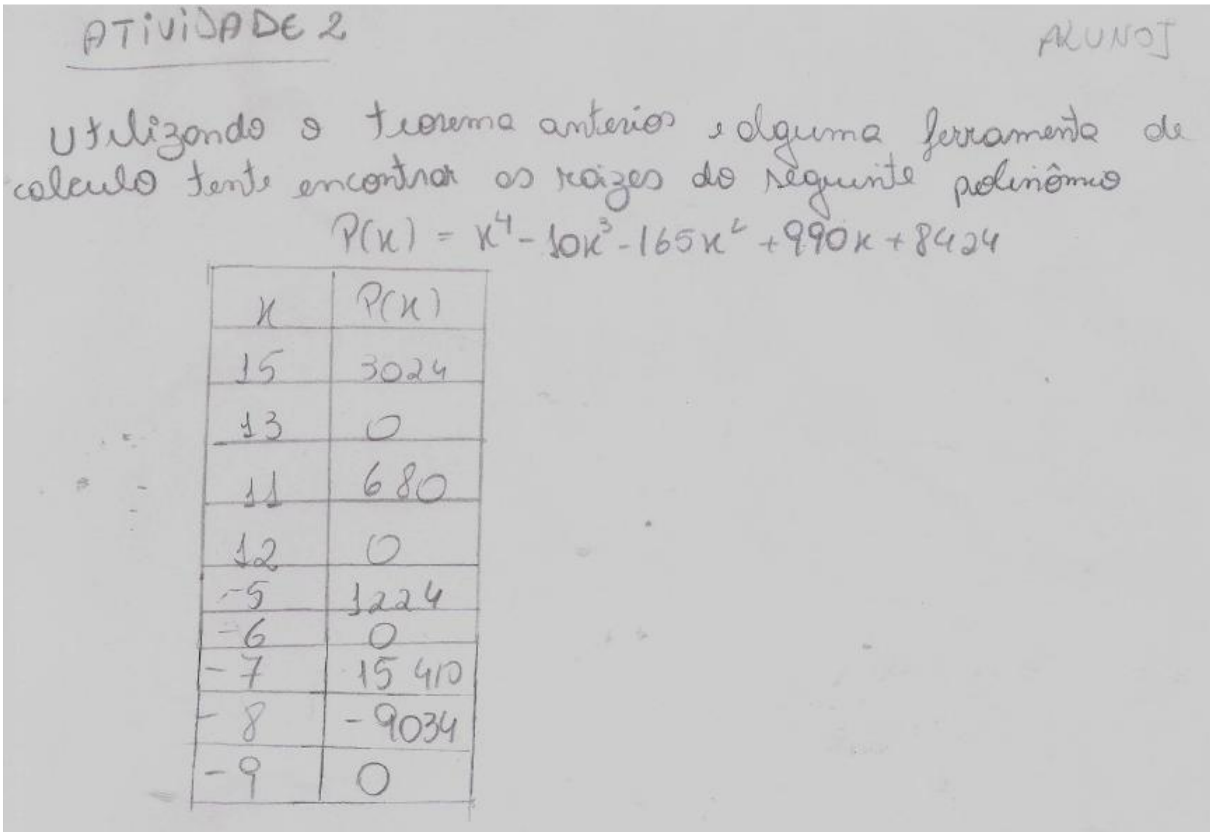
x	P(x)
2	9680
7	6240
10	1824
12	0
13	0
14	920
-9	0
-6	0

Ferramenta

+

CalcMAT

Figura 14 – Atividade 02 Aluno I



ATIVIDADE 2

ALUNO J

Utilizando o teorema anterior e alguma ferramenta de calculo tente encontrar as raizes do seguinte polinômio

$P(x) = x^4 - 10x^3 - 165x^2 + 990x + 8424$

x	P(x)
15	3024
13	0
11	680
12	0
-5	1224
-6	0
-7	15410
-8	-9034
-9	0

Figura 15 – Atividade 02 Aluno J

4.2.3 Atividade 03

Proceda de forma análoga para o polinômio

$$P(x) = x^3 - 7{,}14x^2 - 11{,}6359x + 36{,}048276.$$

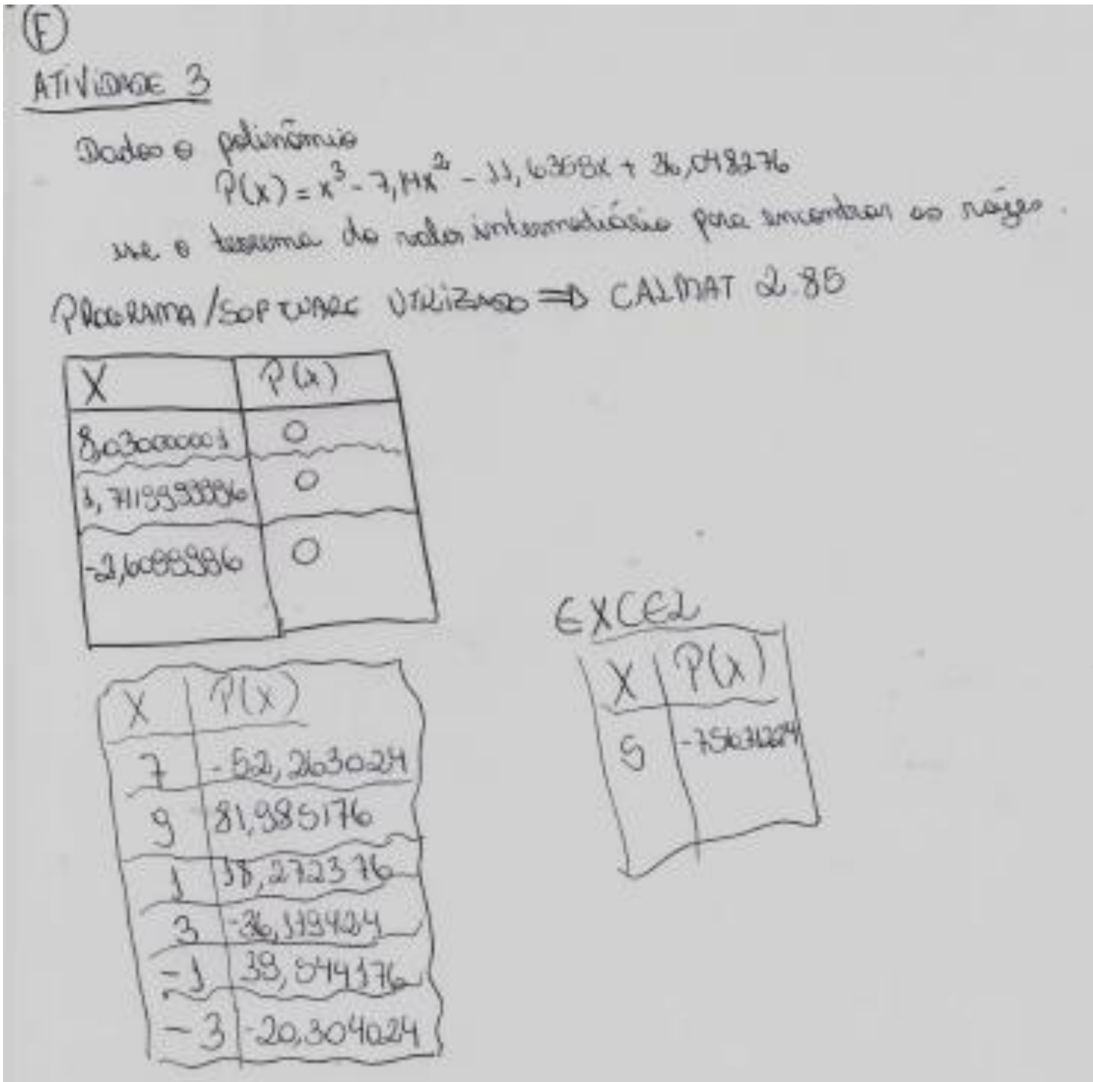
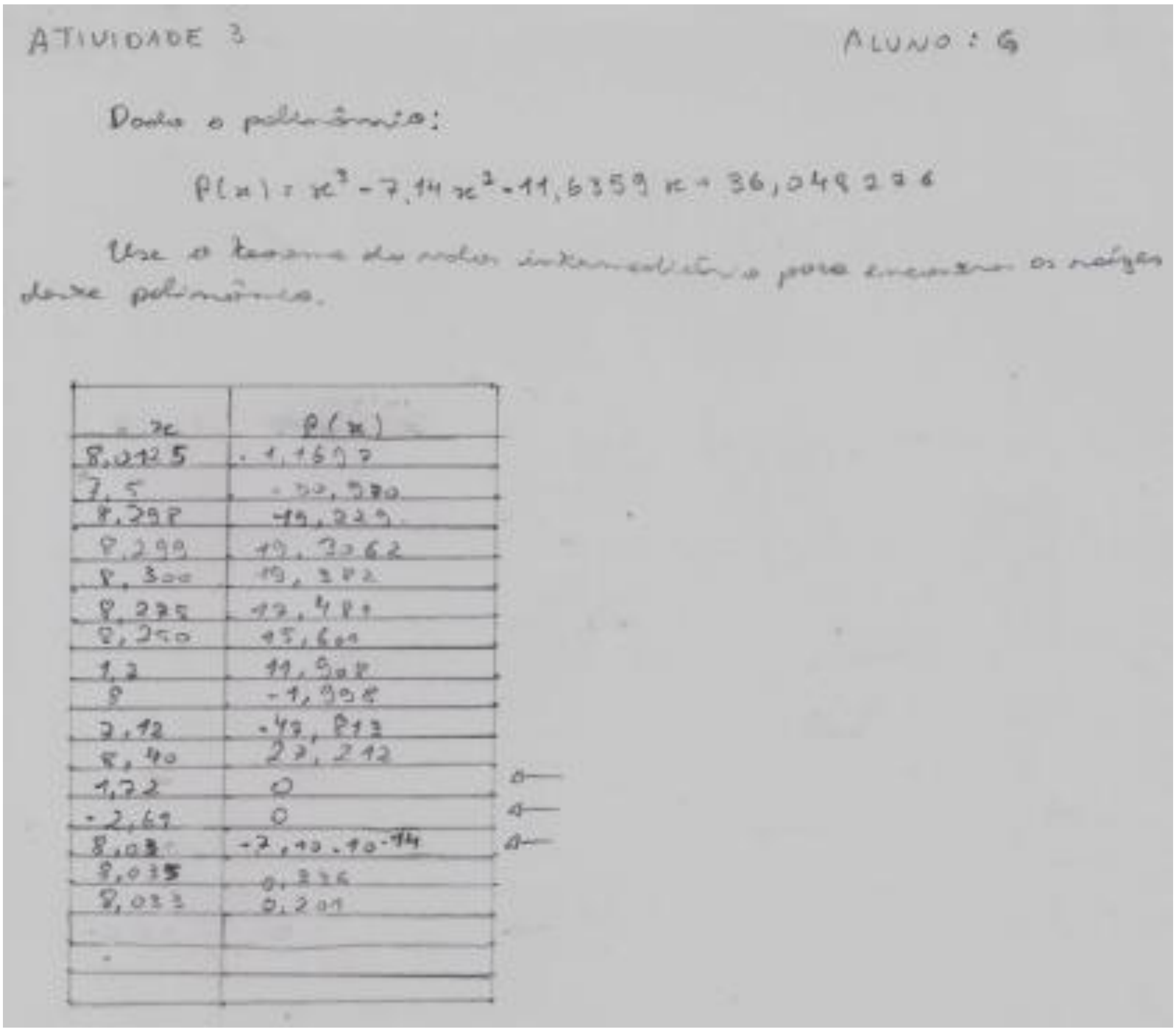


Figura 16 – Atividade 03 Aluno F


ATIVIDADE 3 ALUNO: G

Dado o polinômio:

$p(x) = x^3 - 7{,}14x^2 - 11{,}6359x + 36{,}049226$

Use o teorema do valor intermediário para encontrar as raízes desse polinômio.

x	p(x)
8,0125	-1,1697
7,5	-50,570
8,298	19,229
8,299	19,3062
8,300	19,382
8,275	17,481
8,250	15,601
1,2	11,908
8	-1,998
2,12	-47,813
8,40	27,212
1,72	0
-2,61	0
8,03	$-7{,}10 \cdot 10^{-14}$
8,035	0,336
8,033	0,201

Figura 17 – Atividade 03 Aluno G

Observamos nesta atividade que boa parte dos alunos usou corretamente as ferramentas e o Teorema do Valor Intermediário. Claro que, na medida em que as raízes eram localizadas foi inevitável que comentários surgissem e alguns alunos não fizeram a busca conforme havíamos proposto.

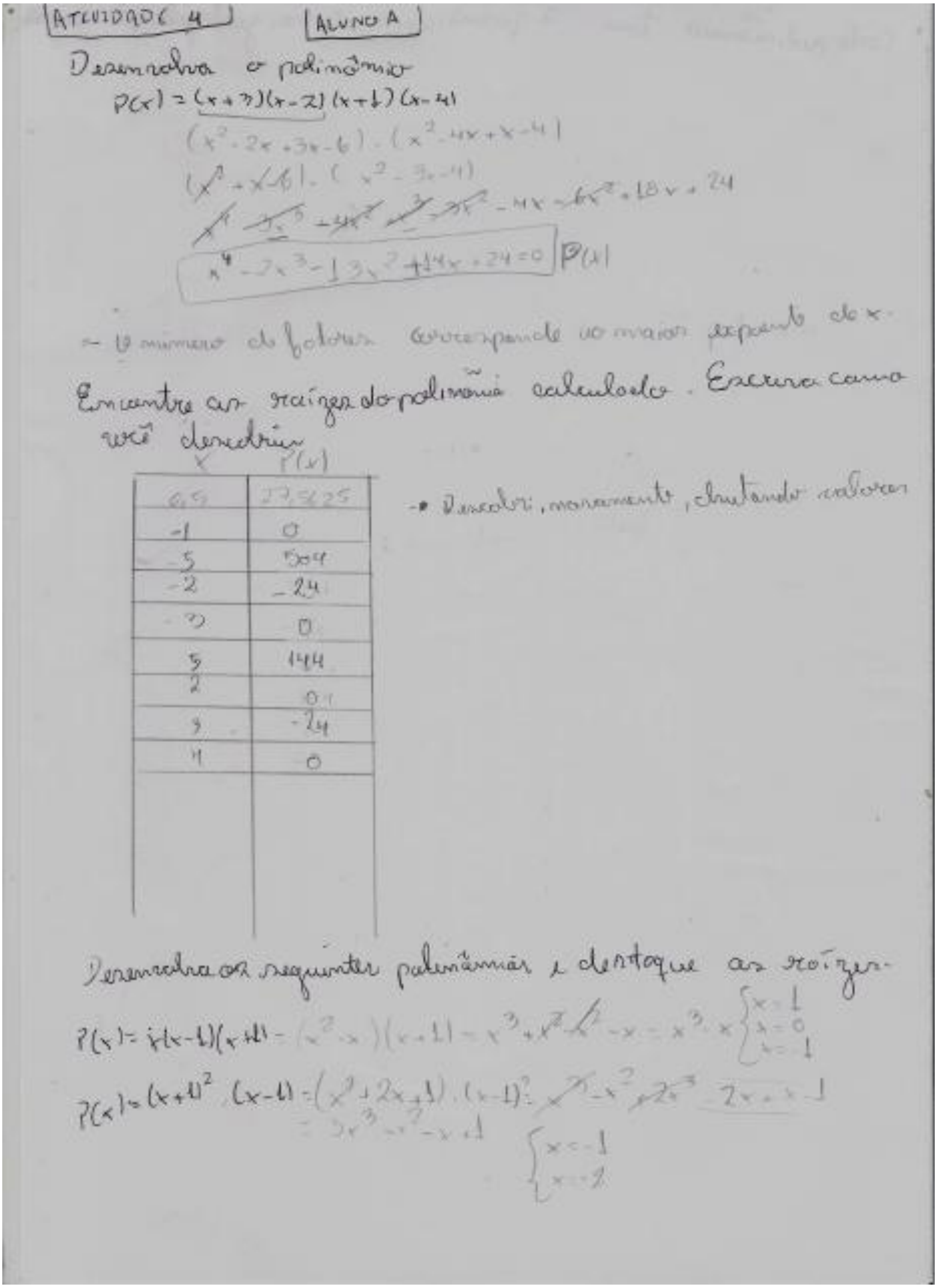
Gostaríamos de relatar um fato interessante ocorrido nesse exercício. As raízes do polinômio em questão são decimais exatos, porém alguns alunos, dependendo da ferramenta utilizada não estavam conseguindo localizar precisamente alguma delas. Chegavam próximo à raiz, porém não ao valor exato. Como a turma que está desenvolvendo esta atividade é de Técnico em Informática, não foi difícil explicar que a quantidade de operações em questão e que o computador opera em base binária e apresenta a resposta novamente em base decimal, o programa utilizado por eles havia chegado num limite de precisão. Nesse momento aproveitamos para provocar a possibilidade de existirem métodos que possam minimizar esses problemas.

Cabe lembrar que o Teorema Fundamental da Álgebra ainda não foi enunciado, por isso orientamos quanto à quantidade de raízes a serem localizadas. Para enunciar tal teorema, propomos uma atividade de composição de polinômio, conforme já foi citado no capítulo anterior. Pensamos ser fundamental esse passo.

4.2.4 Atividade 04

Desenvolva o polinômio $P(x) = (x + 3)(x - 2)(x + 1)(x - 4)$, encontre as raízes e escreva como as localizou.

Essa atividade é interessante, pois mesmo que depois de encontrado as raízes de *P(x)* fica explícito que elas coincidem com as raízes dos binômios que o compõe, observou-se que os alunos não conseguiram estabelecer a relação. Feito esse esclarecimento propomos, nesta mesma atividade o desenvolvimento de mais alguns polinômios conforme segue.



ATIVIDADE 4 | ALUNO A

Desenvolva o polinômio

$P(x) = (x+3)(x-2)(x+1)(x-4)$

$(x^2-2x+3x-6)\cdot(x^2-4x+x-4)$

$(x^2+x-6)\cdot(x^2-3x-4)$

$\cancel{x^4} \cancel{-3x^3} \cancel{-4x^2} \cancel{+x^3} \cancel{-3x^2} -4x -6x^2 +18x +24$

$\boxed{x^4-2x^3-13x^2+14x+24=0}$ P(x)

– O número de fatores corresponde ao maior expoente de x.

Encontre as raízes do polinômio calculado. Escreva como você descobriu

x	P(x)
0,5	27,5625
-1	0
-5	504
-2	-24
-3	0
5	144
2	0
3	-24
4	0

– Descobri, mentalmente, chutando valores

Desenvolva os seguintes polinômios e destaque as raízes.

$P(x) = x(x-1)(x+1) = (x^2-x)(x+1) = x^3+\cancel{x^2}\cancel{-x^2}-x = x^3-x$ $\begin{cases} x=1 \\ x=0 \\ x=-1 \end{cases}$

$P(x) = (x+1)^2\,(x-1) = (x^2+2x+1)\cdot(x-1) = \cancel{x^3}-x^2\cancel{+2x^3}-2x+x-1$

$= 3x^3-x^2-x+1$ $\begin{cases} x=-1 \\ x=-2 \end{cases}$

Figura 18 – Atividade 04 Aluno A

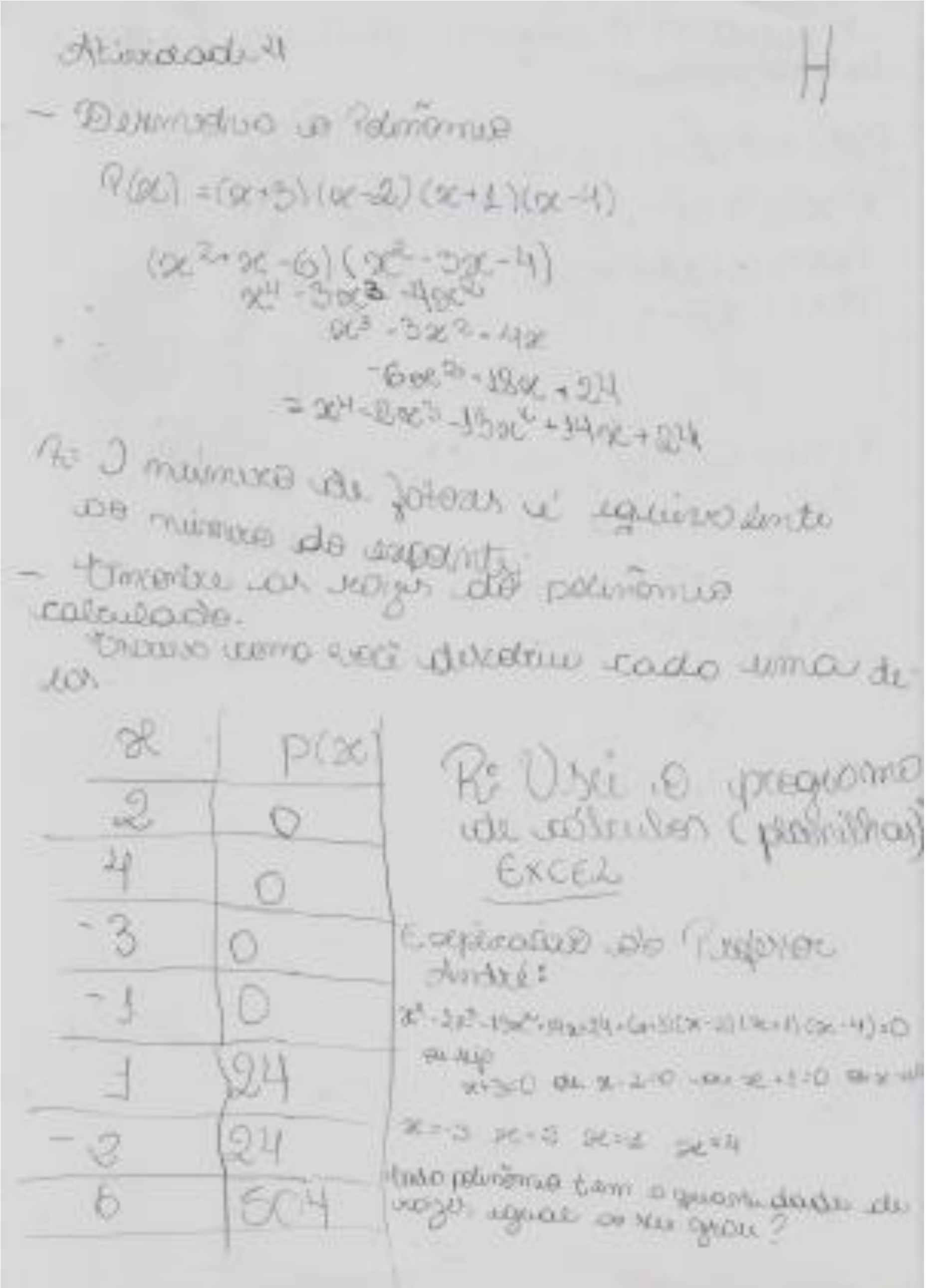
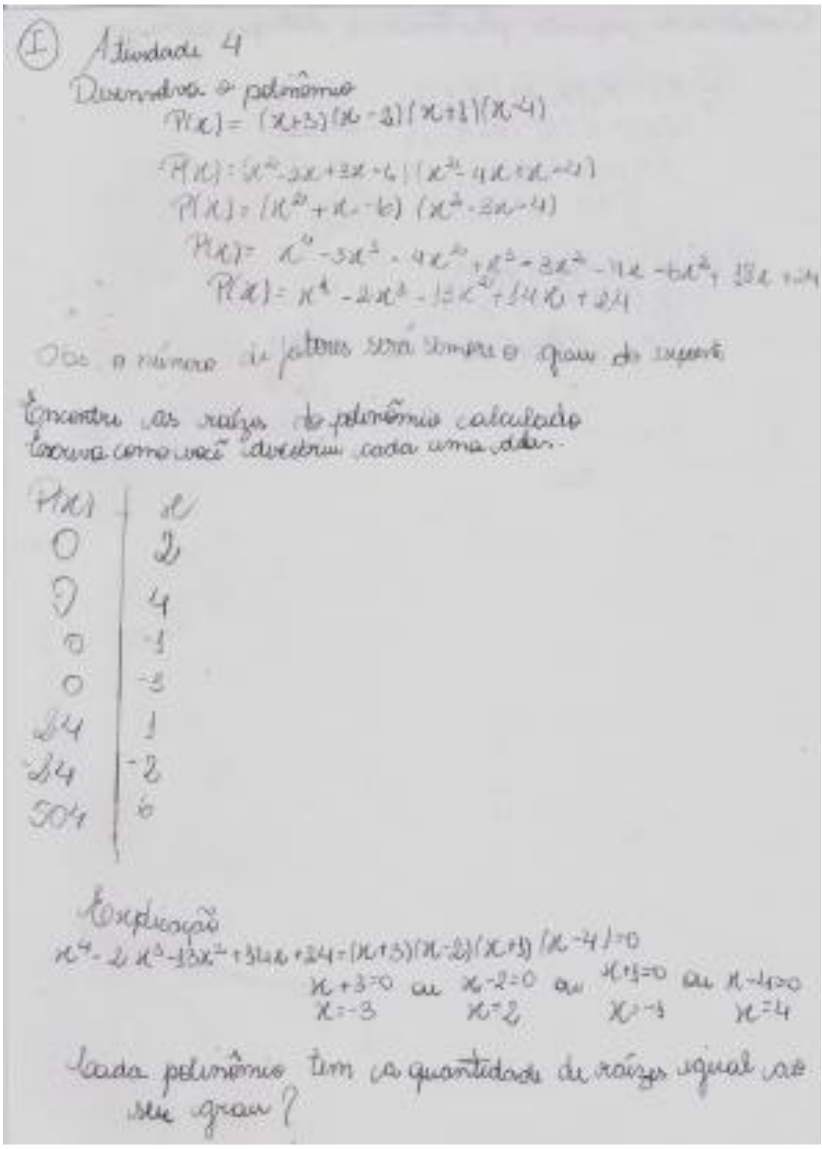


Figura 19 – Atividade 04 Aluno H



Atividade 4

Desenvolva o polinômio

$P(x) = (x+3)(x-2)(x+1)(x-4)$

$P(x) = (x^2-2x+3x-6)(x^2-4x+x-4)$

$P(x) = (x^2+x-6)(x^2-3x-4)$

$P(x) = x^4-3x^3-4x^2+x^3-3x^2-4x-6x^2+18x+24$

$P(x) = x^4-2x^3-13x^2+14x+24$

Obs: o número de fatores será sempre o grau do expoente

Encontre as raízes do polinômio calculado

Escreva como você descobriu cada uma delas.

$P(x)$	x
0	2
0	4
0	-1
0	-3
24	1
24	-2
504	6

Explicação

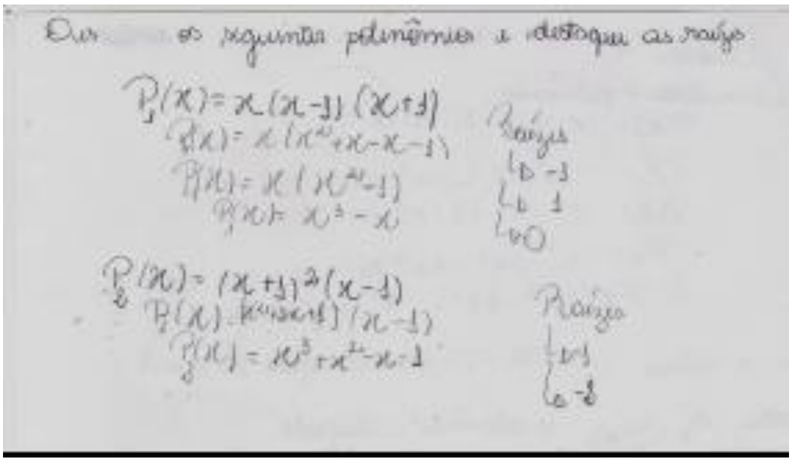
$x^4-2x^3-13x^2+14x+24=(x+3)(x-2)(x+1)(x-4)=0$

$x+3=0$ ou $x-2=0$ ou $x+1=0$ ou $x-4=0$

$x=-3$ $\quad x=2$ $\quad x=-1$ $\quad x=4$

Cada polinômio tem a quantidade de raízes igual ao seu grau?

Figura 20 – Atividade 04 Aluno I



Des[illegible] os seguintes polinômios e destaque as raízes

$P_1(x)=x(x-1)(x+1)$

$P_1(x)=x(x^2+x-x-1)$

$P_1(x)=x(x^2-1)$

$P_1(x)=x^3-x$

Raízes → -1 → 1 → 0

$P_2(x)=(x+1)^2(x-1)$

$P_2(x)=(x^2+2x+1)(x-1)$

$P_2(x)=x^3+x^2-x-1$

Raízes → 1 → -1

Figura 21 – Continuação da Atividade 04 Aluno I

Aproveitamos esse momento para falar sobre multiplicidade de uma raiz e enunciamos o Teorema Fundamental da Álgebra.

4.2.5 Atividade 05

Pedimos aos alunos que, intuitivamente, fizessem a divisão do polinômio a seguir por cada um de seus fatores.

Visto que $P(x) = (x + 3)(x - 2)(x + 1)(x + 4) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$, efetue as seguintes divisões:

a) $P(x): (x + 3)$

b) $P(x): (x - 2)$

c) $P(x): (x + 1)$

d) $P(x): (x + 4)$

Encontre o quociente e o seu grau.

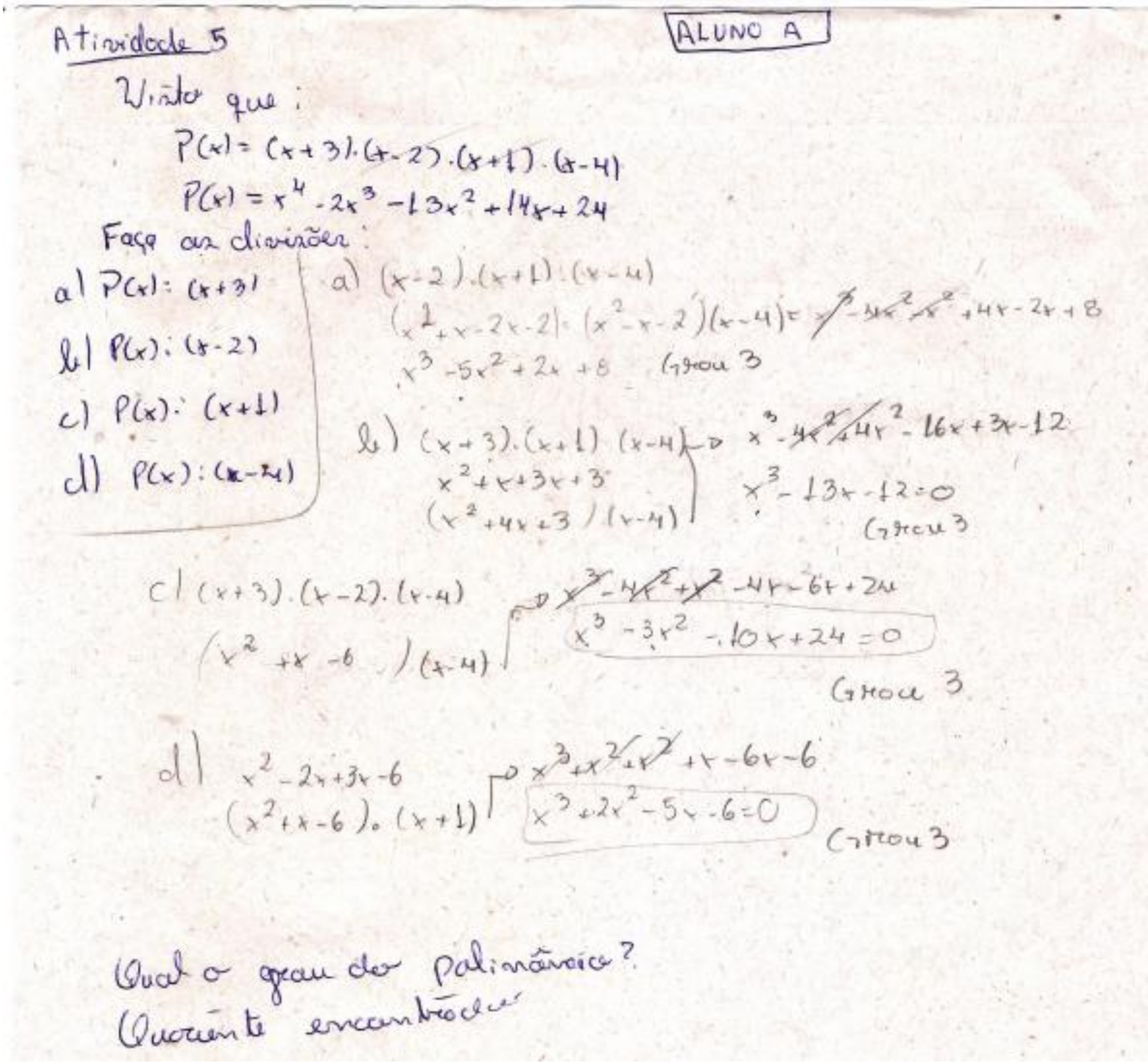
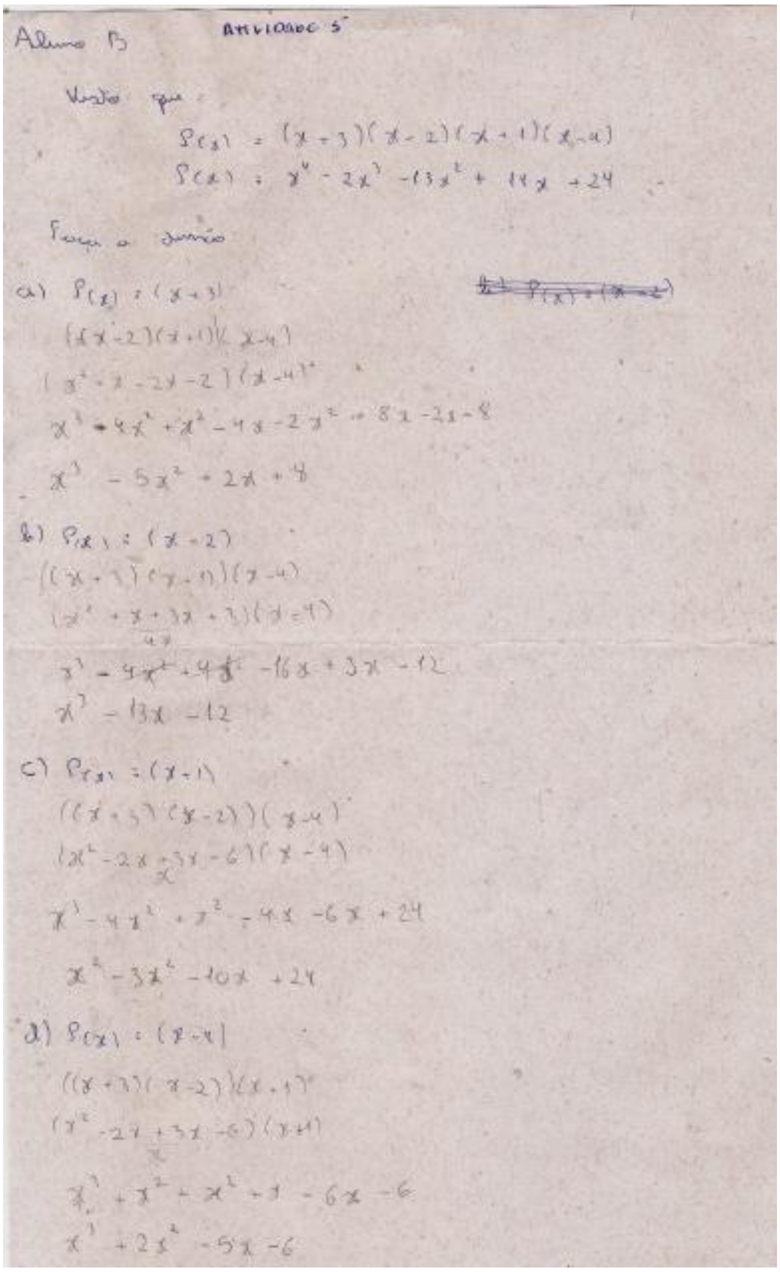


Figura 22 – Atividade 05 Aluno A



Aluno B

Atividade 5

Visto que:

$P(x) = (x+3)(x-2)(x+1)(x-4)$

$P(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$

Faça a divisão

a) $P(x) : (x+3)$ ~~b) $P(x) : (x-2)$~~

$((x-2)(x+1))(x-4)$

$(x^2 + x - 2x - 2)(x-4)$

$x^3 - 4x^2 + x^2 - 4x - 2x^2 + 8x - 2x - 8$

$x^3 - 5x^2 + 2x + 8$

b) $P(x) : (x-2)$

$((x+3)(x+1))(x-4)$

$(x^2 + \underbrace{x + 3x}_{4x} + 3)(x-4)$

$x^3 - 4x^2 + 4x^2 - 16x + 3x - 12$

$x^3 - 13x - 12$

c) $P(x) : (x+1)$

$((x+3)(x-2))(x-4)$

$(x^2 \underbrace{- 2x + 3x}_{x} - 6)(x-4)$

$x^3 - 4x^2 + x^2 - 4x - 6x + 24$

$x^3 - 3x^2 - 10x + 24$

d) $P(x) : (x-4)$

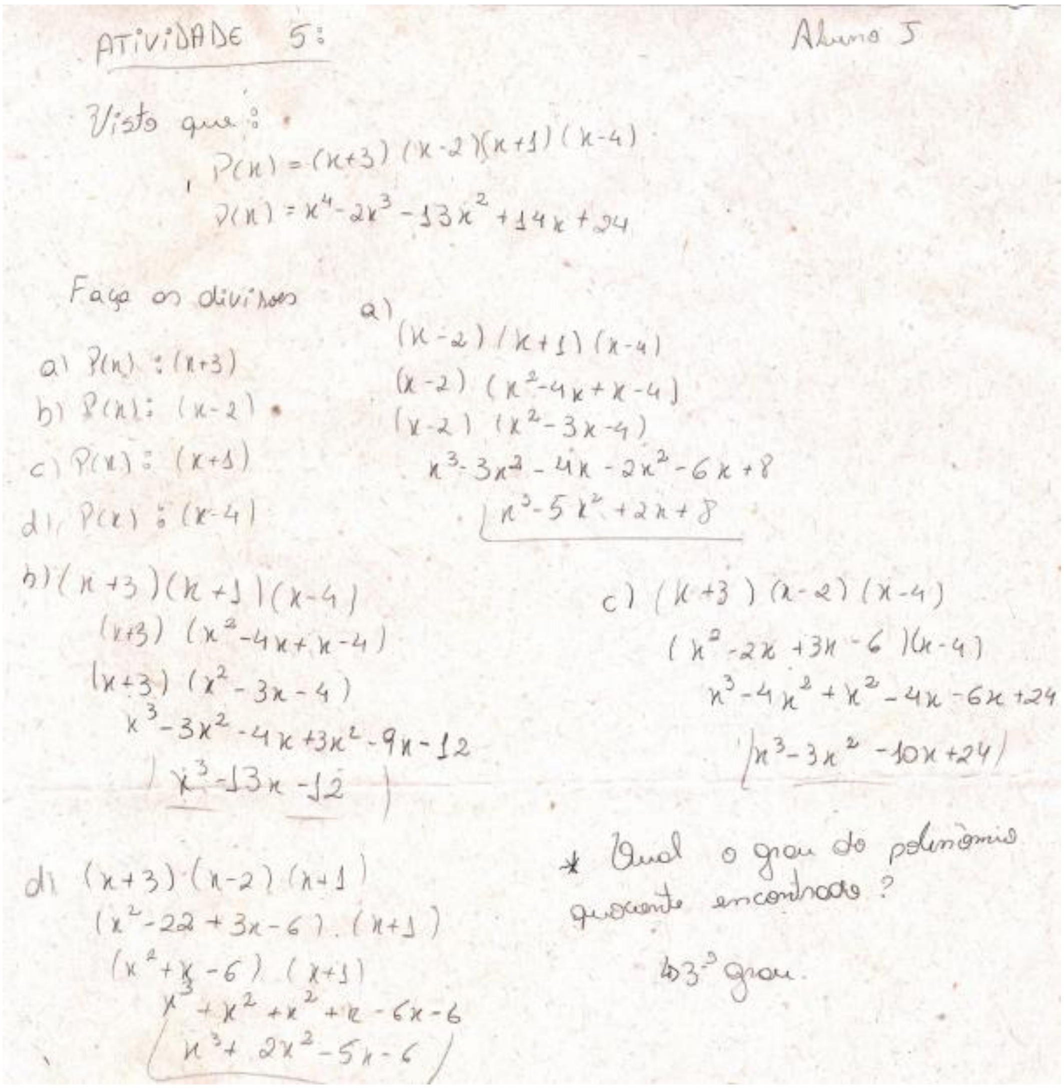
$((x+3)(x-2))(x+1)$

$(x^2 \underbrace{- 2x + 3x}_{x} - 6)(x+1)$

$x^3 + x^2 + x^2 + x - 6x - 6$

$x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

Figura 23 – Atividade 05 Aluno B



ATIVIDADE 5: Aluno J

Visto que:

$P(x) = (x+3)(x-2)(x+1)(x-4)$

$P(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$

Faça as divisões

a) $P(x) : (x+3)$

b) $P(x) : (x-2)$

c) $P(x) : (x+1)$

d) $P(x) : (x-4)$

a) $(x-2)(x+1)(x-4)$

$(x-2)(x^2 - 4x + x - 4)$

$(x-2)(x^2 - 3x - 4)$

$x^3 - 3x^2 - 4x - 2x^2 - 6x + 8$

$x^3 - 5x^2 + 2x + 8$

b) $(x+3)(x+1)(x-4)$

$(x+3)(x^2 - 4x + x - 4)$

$(x+3)(x^2 - 3x - 4)$

$x^3 - 3x^2 - 4x + 3x^2 - 9x - 12$

$x^3 - 13x - 12$

c) $(x+3)(x-2)(x-4)$

$(x^2 - 2x + 3x - 6)(x-4)$

$x^3 - 4x^2 + x^2 - 4x - 6x + 24$

$x^3 - 3x^2 - 10x + 24$

d) $(x+3)(x-2)(x+1)$

$(x^2 - 2x + 3x - 6).(x+1)$

$(x^2 + x - 6)(x+1)$

$x^3 + x^2 + x^2 + x - 6x - 6$

$x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

* Qual o grau do polinômio quociente encontrado?

3^o grau.

Figura 24 – Atividade 05 Aluno J

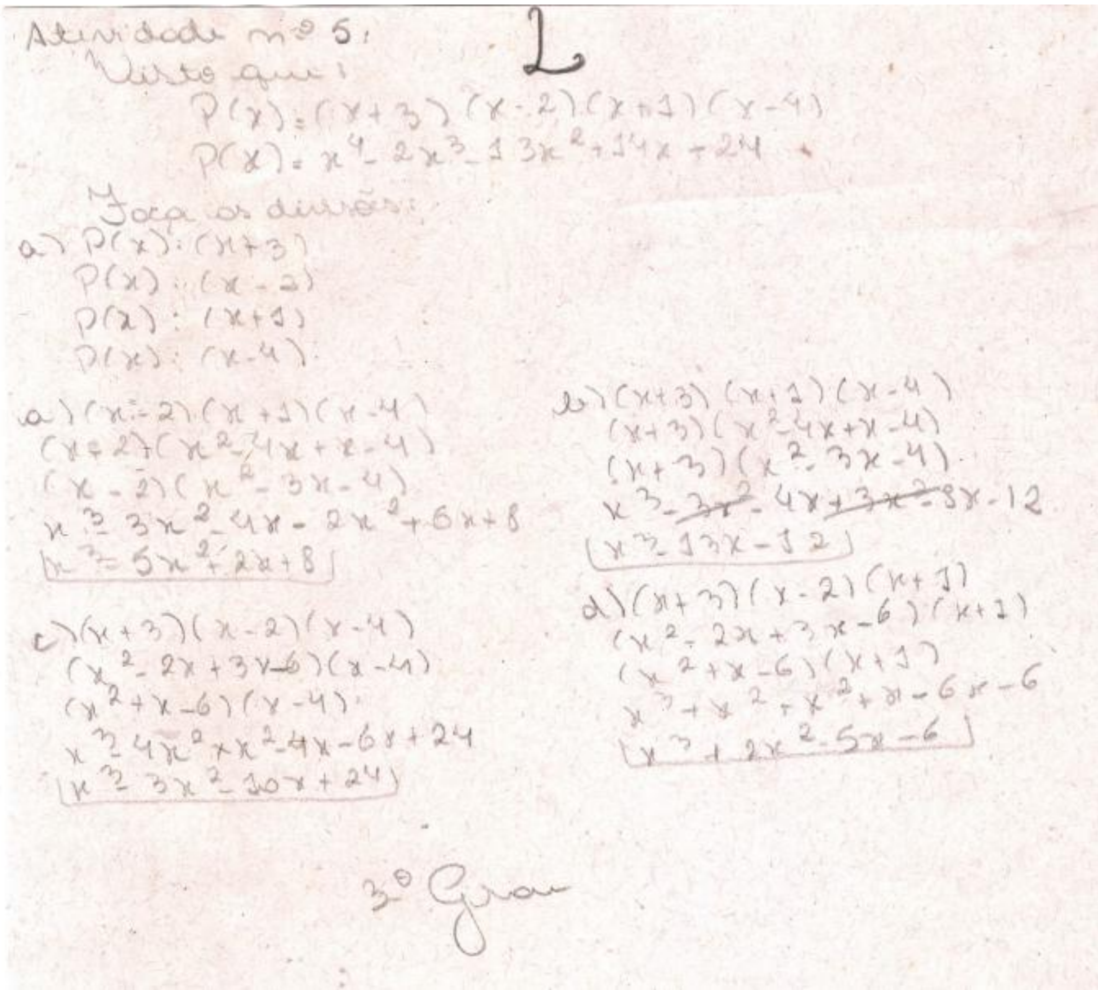


Figura 25 – Atividade 05 Aluno L

Observando o desenvolvimento da Atividade 05, notamos que os alunos, mesmo sem conhecer nenhuma ferramenta de divisão de polinômios, perceberam que bastaria efetuar o produto dos polinômios excluindo o divisor.

Na sequência, propomos a ideia de que poderíamos dividir o polinômio da atividade 5 por outro polinômio que não fosse fator do mesmo, como por exemplo, dividir *P(x)* por *x*+2. Nesse momento demonstramos o Algoritmo de Horner e de Briot-Ruffini. Demos a devida atenção ao fato de encontrarmos o quociente da divisão e que o resto é o valor numérico do polinômio quando a variável é a raiz do divisor. Atentamos para o fato de que o número de operações para encontrarmos o valor numérico reduz consideravelmente.

Como se tratava de uma turma que tinha conhecimento de programação, fizemos os seguinte questionamento:

- Se vocês fossem desenvolver um sistema que tivesse que calcular valores numéricos de um polinômio de grau muito grande, qual método usariam?

Todos foram unânimes em dizer que usariam o método que faria o mesmo cálculo com menos operações.

4.2.6 Atividade 06

Diante do exposto anteriormente, pedimos aos alunos que realizassem a divisão do polinômio da Atividade 05 por x+2 e encontrassem o valor de P(-2).

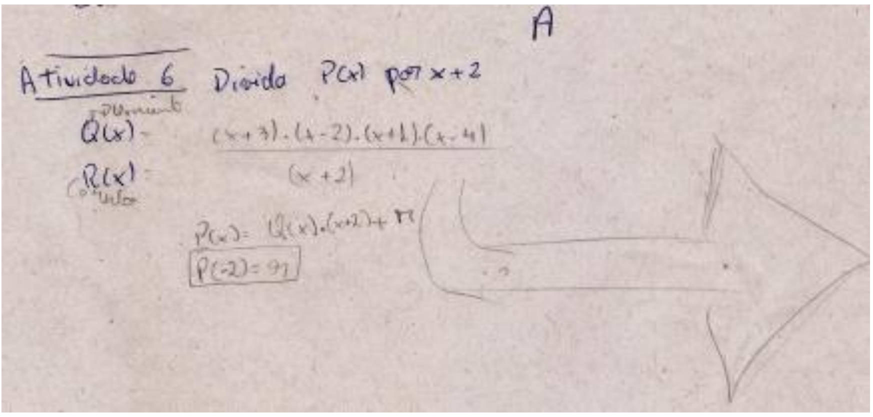


Figura 26 – Atividade 06 Aluno A

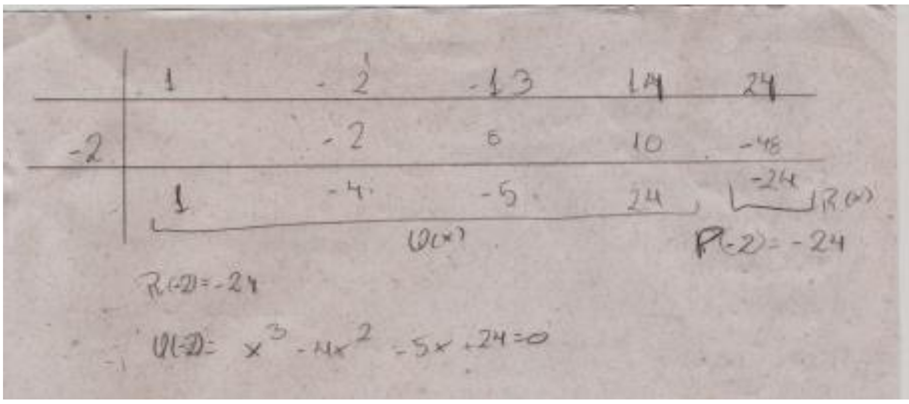


Figura 27 – Continuação da Atividade 06 Aluno A

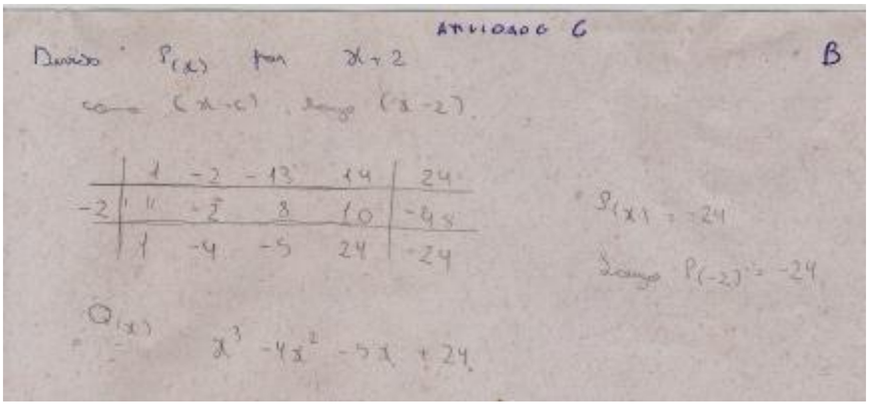


Figura 28 – Atividade 06 Aluno B

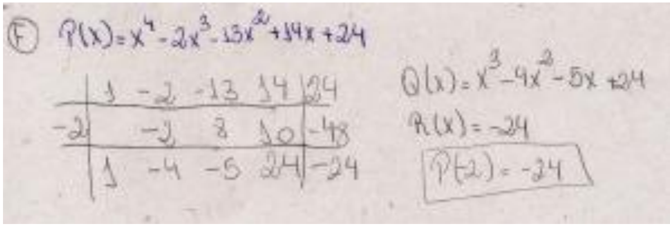


Figura 29 – Continuação da Atividade 06 Aluno F

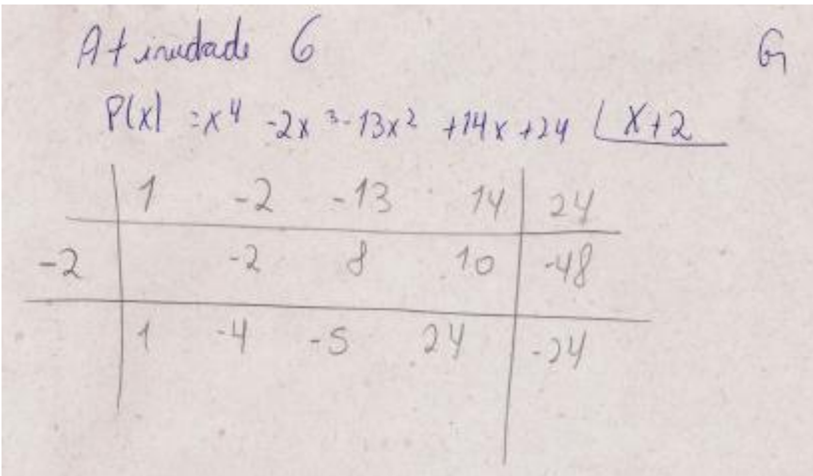


Figura 30 – Atividade 06 Aluno G

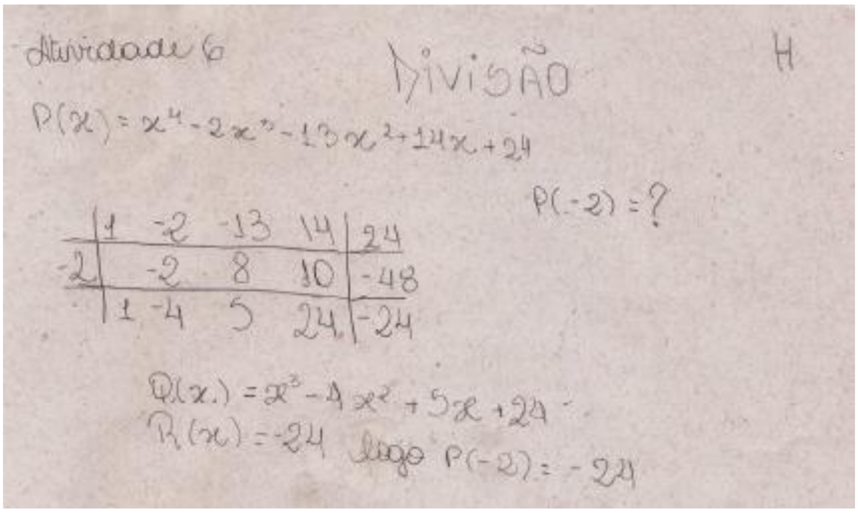


Figura 31 – Atividade 06 Aluno H

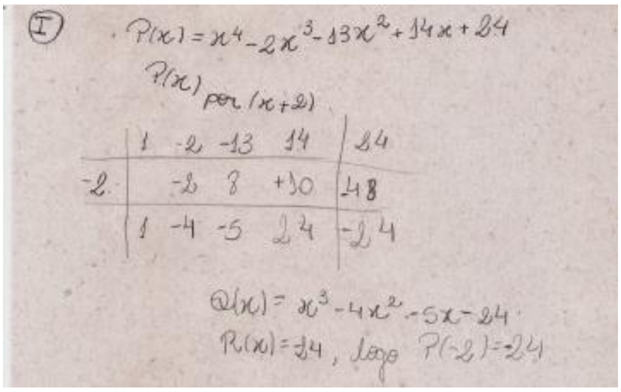


Figura 32 – Atividade 06 Aluno I

Percebemos que, o método que Horner exposto na forma proposta por Briot-Ruffini foi bem assimilado pelos alunos.

4.2.7 Atividade 07

Para a fixação do método propomos a seguinte atividade: dado o polinômio $P(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 3x - 1$, encontre o valor de P(2), P(-2), P(10), P(8), P(500), pelo método de Briot-Ruffini, utilizando calculadora se for necessário.

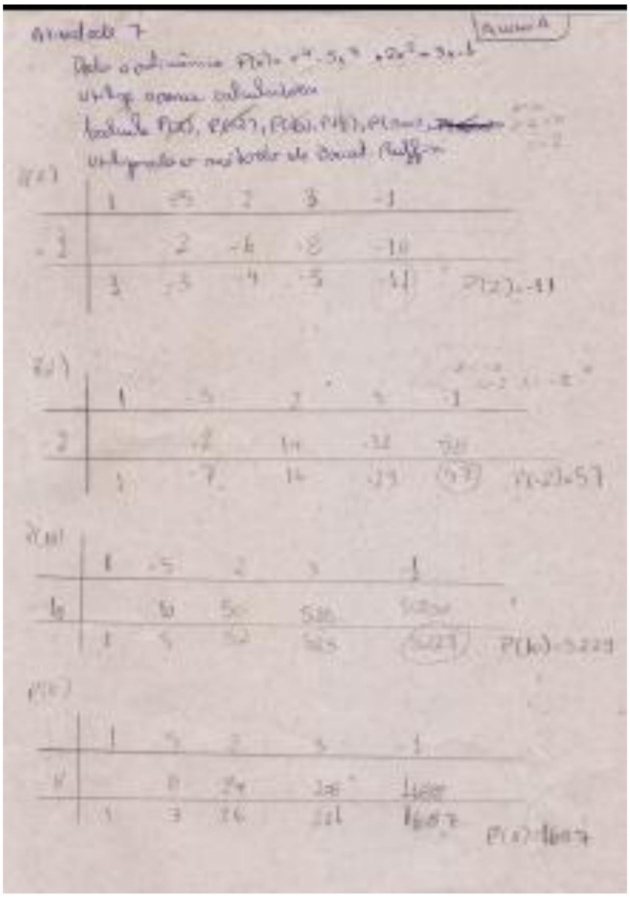


Figura 33 – Atividade 07 Aluno A

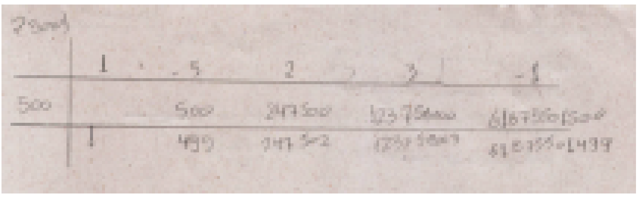


Figura 34 – Continuação da Atividade 07 Aluno A

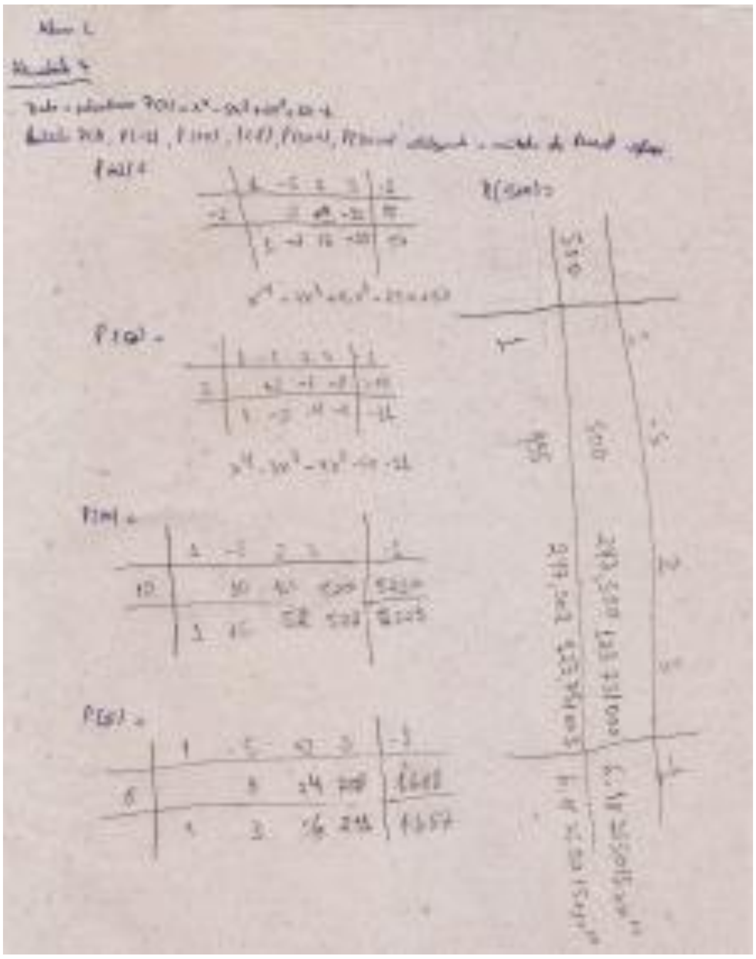


Figura 35 – Atividade 07 Aluno C

Todos os alunos concordaram que esse processo é mais rápido e prático para encontrar o valor numérico de um polinômio. Alguns inclusive fizeram planilhas eletrônicas fazendo com que o *software* fizesse os cálculos pelo método de Horner.

4.2.8 Atividade 08

Em todas as atividades pedimos aos alunos que fizessem o esboço do gráfico no GeoGebra e visualizassem as raízes e chamamos a atenção quanto às concavidades.

Na sequência, demos continuidade aos conteúdos de acordo com a forma tradicional.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No desenvolvimento do nosso trabalho procuramos atender um dos principais objetivos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, que é o de buscar novas formas de ensino de matemática no ensino médio a fim de melhorar os índices de aproveitamento na referida disciplina. Procuramos assim propor de forma prática, intuitiva e com recursos computacionais os conteúdos referentes ao estudo de polinômios nesse nível de ensino.

No momento em que nos propomos a realizar o ensino de polinômios de uma forma diferenciada com a referida turma, tivemos uma grande preocupação quanto ao tempo que demandaria e quanto às questões referentes à preparação para o vestibular dos formandos do Ensino Médio.

Após a aplicação das atividades sugeridas, e seguindo com os exercícios normais do livro bem como questões de vestibular, observamos que os alunos não apresentavam grandes dificuldades em resolvê-las. Também não necessitamos de mais tempo que o habitual para a execução das atividades, o que nos surpreendeu. Diante do que foi trabalhado, com um pouco de leitura complementar, os estudantes apresentaram um melhor entendimento dos teoremas e questões inerentes ao conteúdo, comparados às outras turmas onde trabalhamos da forma tradicional. Cabe salientar que os alunos demonstraram mais interesse no estudo do conteúdo em questão. O fato de estarem participando de uma nova proposta de ensino foi assimilado de forma positiva.

Com esse trabalho, concluímos que a nossa proposta é viável e contribui significativamente com o que já é recomendado atualmente. Tanto é que a mesma atividade já vem sendo aplicada a mais turmas de terceiro ano do Ensino Médio e vem trazendo ótimos resultados. Dessa forma, acreditamos que tenhamos um aluno concluinte do Ensino Médio bem preparado e um graduando muito mais habilitado para prosseguir seus estudos nas ciências exatas e tecnológicas.

Acreditamos que o Ensino Básico precisa ser repensado em todos os seus aspectos, dos quais destacamos o tempo para as atividades, que precisa ser maior, a seleção de conteúdos e sua abordagem.

Sugerimos a leitura dos trabalhos:

- **Uso de ferramentas computacionais no processo de ensino e aprendizado na teoria de polinômios na educação básica** de Magno de Oliveira Silva (2013), dissertação de mestrado do Profmat - UFRJ.
- **Equações polinomiais** de Jonas Eduardo Carraschi (2014), dissertação de mestrado do Profmat – USP.

REFERÊNCIAS

ARENALES, Selma; DAREZZO, Artur**. Cálculo numérico: Aprendizagem com apoio de software**. 1. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

BARRETO FILHO, B.; SILVA, C. X. **Matemática aula por aula.** São Paulo: FTD, 2000.
BARROS, Ivan de Queiroz. **Introdução ao cálculo numérico.** São Paulo: Edgard Blücher, 1972.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 2012.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Linguagens, Códigos e suas Tecnologias.** Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002.

CARRASCHI, Jonas Eduardo. **Equações Polinomiais**. 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática – Profmat) – Universidade de São Paulo.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**. São Paulo: Ática, 2010.

FERNANDES, V. S.; SILVA, J. D.; MABELINI, O. D. **Matemática para o ensino médio.** São Paulo: IBEP, 2005.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JÚNIOR, J. R. **Matemática completa: volume único**. São Paulo: FTD, 2002.

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio**, vol.1e vol.3, 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MOLON, Jaqueline. **Cálculo no ensino médio: uma abordagem possível e necessária com auxílio do sofware GeoGebra**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática - Profmat) – Universidade Federal de Santa Maria.

RIBEIRO, Jackson. **Matemática: ciência e linguagem**. São Paulo: Scipione, 2007.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. de. **Tópicos de história da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

ROQUE, Waldir L. **Introdução ao cálculo numérico: um texto integrado com derive.** São Paulo: Atlas, 2000.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. R.. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2ª Ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1996.

SILVA, Magno de Oliveira. **Uso de ferramentas computacionais no processo de ensino e aprendizado na teoria de polinômios na educação básica**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática - Profmat) – Universidade Federal do Rio de Janeiro.

SANTOS, C. A. M.; GENTIL, N.; GRECO, S. E. **Matemática para o ensino médio.** São Paulo: Editora Ática, 1998.

SANTOS, Vitoriano Ruas de Barros. **Curso de Cálculo Numérico.** Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos S.A., 1982.