

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM  
REDE NACIONAL – PROFMAT**

**PROPOSTAS PARA O ENSINO DE NÚMEROS  
COMPLEXOS NO ENSINO MÉDIO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**FABIANA GERUSA LEINDEKER DA SILVA**

**Santa Maria, RS, Brasil**

**2014**

# **PROPOSTAS PARA O ENSINO DE NÚMEROS COMPLEXOS NO ENSINO MÉDIO**

**Fabiana Gerusa Leindeker da Silva**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Área de Concentração: Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática.**

**Orientador: Prof. D.r Charles R. P. Szinvelski**

**Santa Maria, RS, Brasil**

**2014**

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Silva, Fabiana Geresa Leindeker da  
Propostas para o ensino de números complexos no  
Ensino Médio / Fabiana Geresa Leindeker da Silva.-2014.  
61 p.; 30cm

Orientador: Charles R. P. Szinvelski  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa  
Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de  
Pós-Graduação em Matemática, RS, 2014

1. Geometria 2. Números Complexos 3. Forma Polar 4.  
Rotações 5. Estratégias de Ensino I. Szinvelski, Charles  
R. P. II. Título.

**Universidade Federal de Santa Maria  
Centro de Ciências Naturais e Exatas  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT**


A Comissão Examinadora, abaixo assinada,  
aprova a Dissertação de Mestrado

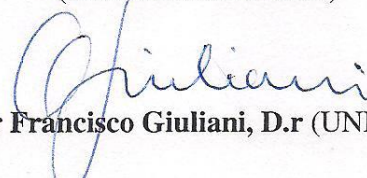
**PROPOSTAS PARA O ENSINO DE NÚMEROS COMPLEXOS NO  
ENSINO MÉDIO**

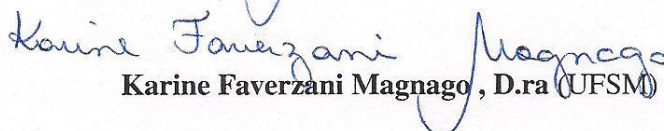
elaborada por  
**Fabiana Gerusa Leindeker da Silva**

como requisito parcial para obtenção do grau de  
**Mestre em Matemática**

**COMISSÃO EXAMINADORA:**

  
**Charles R. P. Szinvelski, D.r (UFSM)**  
(Presidente/Orientador)

  
**Osmar Francisco Giuliani, D.r (UNIPAMPA)**

  
**Karine Faverzani Magnago, D.ra (UFSM)**

Santa Maria, 29 de agosto de 2014.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador Charles Szinvelski por todos ensinamentos, pela dedicação e tempo disponibilizado, pela sábia condução deste trabalho, sua contribuição foi fundamental.

Agradeço à Universidade Federal de Santa Maria e aos professores do curso, em especial à Professora Lidiane Buligon e à coordenadora Carmen Matias, pela atenção e disponibilidade.

À minha mãe Neli, meu infinito agradecimento pelo carinho a cada conversa, fazendo-me acreditar que tudo daria certo.

Agradeço também às minhas filhas pelo incentivo e por compreenderem minha ausência durante todos os momentos do curso.

Agradeço a todos os meus colegas pelos momentos de convivência, estudos em grupo, em especial à Leila Pagliarini e Raphael d'Acampora, pela amizade, pelo carinho e pelas palavras de incentivo.

*“Cada pessoa que passa em nossa vida, passa sozinha, é porque cada pessoa é única e nenhuma substitui a outra! Cada pessoa que passa em nossa vida passa sozinha e não nos deixa só porque deixa um pouco de si e leva um pouquinho de nós. Essa é a mais bela responsabilidade da vida e a prova de que as pessoas não se encontram por acaso.” (Charles Chaplin)*

...

– *Gato Cheshire ... quer fazer o favor de me dizer qual é o caminho que eu devo tomar?*

– *Isso depende muito do lugar para onde você quer ir, disse o gato.*

– *Não me interessa muito para onde ... – disse Alice.*

– *Não tem importância então o caminho que você tomar – disse o gato.*

– *... contando que eu chegue a algum lugar, acrescentou Alice como uma explicação.*

– *Ah, disso pode ter certeza – disse o gato – desde que caminhe bastante.*

Lewis Carrol - Alice no país das maravilhas.

# RESUMO

Dissertação de Mestrado

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Universidade Federal de Santa Maria

## PROPOSTAS PARA O ENSINO DE NÚMEROS COMPLEXOS NO ENSINO MÉDIO

AUTORA: FABIANA GERUSA LEINDEKER DA SILVA

ORIENTADOR: CHARLES R. P. SZINVELSKI

Local e Data da Defesa: Santa Maria, 29 de agosto de 2014.

Neste trabalho são exploradas as propriedades geométricas dos números complexos. Apresenta-se uma breve contextualização histórica, formalizam-se conceitos, perpassando pela apresentação da sua forma algébrica até sua forma polar e suas decorrências geométricas. Por meio deste viés geométrico, examina-se com detalhe as operações de rotação, contração e dilatação no plano que o produto de complexos proporciona. Como consequência, exibe-se uma demonstração alternativa do Teorema de Napoleão, usando, de maneira imediata, o produto de números complexos. Além disso, são apresentadas propostas alternativas de trabalho que exploram a interpretação de problemas da geometria analítica experimentando a eficiência da utilização das propriedades de rotação decorrentes da multiplicação de números complexos. Estas propostas estão direcionadas ao professor de matemática do 3º ano do Ensino Médio com o objetivo de ampliação das formas de apresentação e tratamento de números complexos em suas estratégias para o ensino deste tópico.

**Palavras-chave:** Geometria. Números Complexos. Forma Polar. Rotações. Estratégias de Ensino.

# ABSTRACT

Master Course Dissertation  
Professional Masters in National Network – PROFMAT  
Universidade Federal de Santa Maria

## PROPOSALS FOR TEACHING COMPLEX NUMBERS IN SECONDARY SCHOOL

AUTHOR: FABIANA GERUSA LEINDEKER DA SILVA

ADVISOR: CHARLES R. P. SZINVELSKI

Location and Date of Defense: Santa Maria, August 29, 2014.

This work explored the geometric properties of complex numbers. It presents a brief historical contextualization, formalize the concepts, passing through the presentation of its algebraic form to its polar form and its geometric derivations. By means of this geometric bias is examined in detail the operations of rotation, contraction and dilatation in the plane proportioned by the product of complex. As a consequence, we present an alternative proof of Napoleon's Theorem, using immediately the product of complex numbers. Furthermore, are presented alternative proposals of work exploiting the interpretation of the analytic geometry problems experiencing efficient use of the properties of rotation resulting from the multiplication of complex numbers. These proposals are directed to mathematics teachers in the 3rd year of high school with the goal of expanding the forms from presentation and treatment of complex numbers in their strategies for teaching this topic.

**Keywords:** Geometry. Complex Number. Rotation. Polar Form. Teaching Strategies.



## LISTA DE FIGURAS

1.1	Plano Complexo . . . . .	17
1.2	Representação geométrica de soma e de conceitos algébricos dos números complexos . . . . .	18
1.3	Forma polar do número complexo $z$ . . . . .	19
2.4	Representação geométrica do produto $z_1 \cdot z_2$ . . . . .	23
2.5	Representação geométrica do produto $z_1 \cdot z_2$ . . . . .	24
2.6	Potências de $z = \text{cis } \theta$ . . . . .	25
2.7	Representação geométrica das potências de $z = \rho \text{cis } \theta$ . . . . .	26
2.8	Representação geométrica dos polígonos de 9 e 17 lados sendo os vértices as imagens das raízes das respectivas equações $w^9 = \rho \text{cis } \theta$ e $w^{17} = \rho \text{cis } \theta$ . . . . .	27
2.9	Representação geométrica dos polígonos de 7 e 5 lados sendo os vértices as imagens das raízes das respectivas equações $w^7 = \text{cis } \theta$ e $w^5 = 1$ . . . . .	27
2.10	Multiplicações sucessivas de um número complexo unitário por $\text{cis } \frac{\pi}{3}$ . . . . .	28
2.11	Triângulos equiláteros construídos sob os lados do triângulo $ABC$ e seus respectivos baricentros . . . . .	30
2.12	$\mathbf{CG}_a = \frac{\sqrt{3}}{3} \mathbf{CB} \text{cis } \frac{\pi}{6}$ . . . . .	31
2.13	$\mathbf{G}_a \mathbf{G}_c = \mathbf{G}_a \mathbf{G}_b \text{cis } \frac{\pi}{3}$ . $\Delta G_a G_b G_c$ é equilátero . . . . .	31
2.14	Avaliação 1 - 2012/2 Geometria 1 . . . . .	32
2.15	Paralelogramo $ABCD$ no Plano conforme escolha do Sistema Cartesiano. $\mathbf{AC} = \mathbf{AB} + \mathbf{AD}$ . . . . .	32
2.16	Rotação seguida de contração para encontrar os centros dos quadrados construídos sobre os lados do paralelogramo . . . . .	33
2.17	Figuras relativas a demonstração do Teorema 3 . . . . .	34
3.18	Figuras relativas aos itens b, c e d da Proposta 1 . . . . .	36
3.19	$\mathbf{AC}_1 = \mathbf{AB} \text{cis } \frac{\pi}{3}$ . . . . .	37
3.20	$\mathbf{AD}_1 = \mathbf{AB} \text{cis } \frac{\pi}{2}$ . . . . .	38
3.21	Representação geométrica das rotações aplicadas na Proposta 3 . . . . .	40
3.22	Representação geométrica da soma e produto de vetores aplicados na Proposta 3 . . . . .	42
3.23	Rotações de $\frac{\pi}{2}$ aplicadas aos vetores $\mathbf{M}_3 \mathbf{M}_4$ e $\mathbf{M}_2 \mathbf{M}_3$ . . . . .	43
3.24	Instruções do mapa para encontrar o tesouro enterrado na ilha . . . . .	44
3.25	Sistema de coordenadas escolhido convenientemente na ilha do tesouro . . . . .	44
3.26	Encontro das duas primeiras marcas do Mapa do Tesouro . . . . .	45
3.27	$T = \frac{M_1 + M_2}{2}$ . Encontrando o Tesouro . . . . .	46
3.28	Posição do ponto $Q$ não altera a posição do ponto $T$ . . . . .	46
5.29	Figura 4.3 - Fonte: ROQUE, 2012, p. 215 . . . . .	55

# SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>9</b>
<b>1 APRESENTAÇÃO E CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA-CIENTÍFICA-DIDÁTICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS</b>	<b>11</b>
1.1 Números Complexos . . . . .	14
1.1.1 Definição de Números Complexos . . . . .	14
1.1.2 O Plano de Argand-Gauss . . . . .	16
1.1.3 Forma Polar de um Número Complexo . . . . .	18
1.2 Números Complexos e seu ensino . . . . .	20
<b>2 REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DAS OPERAÇÕES DE MULTIPLICAÇÃO, POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS E ALGUMAS APLICAÇÕES</b>	<b>22</b>
2.1 Multiplicação no Plano Complexo . . . . .	22
2.2 Potenciação e Radiciação no Plano Complexo . . . . .	25
2.3 Rotação de vetores no plano através do produto de números complexos . . . . .	28
2.4 Aplicação de Rotação para a demonstração de dois Resultados da Geometria . . . . .	29
2.4.1 Teorema de Napoleão - Demonstração Alternativa Via Rotações no Plano	29
2.4.2 O Problema do Quadrado . . . . .	32
<b>3 PROPOSTAS DE ATIVIDADES NO ENSINO DOS NÚMEROS COMPLEXOS</b>	<b>35</b>
3.1 PROPOSTA 1 - Representando o Produto de Complexos no Plano . . . . .	35
3.2 PROPOSTA 2 - Construindo Triângulos Equiláteros e Quadrados a partir de um segmento dado . . . . .	37
3.3 PROPOSTA 3 - Verificação de um caso particular do Teorema de Napoleão . . . . .	39
3.4 PROPOSTA 4 - Verificação de um caso particular do Problema do Quadrado . . . . .	40
3.5 PROPOSTA 5 - Mapa do tesouro. É possível encontrar o tesouro? . . . . .	43
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>47</b>
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>48</b>
<b>ANEXO A</b>	<b>50</b>
<b>ANEXO B</b>	<b>52</b>
<b>APÊNDICE A</b>	<b>55</b>
<b>APÊNDICE B</b>	<b>57</b>
<b>APÊNDICE C</b>	<b>61</b>

## INTRODUÇÃO

Os números complexos, tal como sua apresentação é feita hoje no Ensino Médio, costuma resultar em uma difícil compreensão aos nossos estudantes, precisamente pela falta de aplicabilidade de sua representação geométrica e ausência de conexão com outros conteúdos matemáticos.

Uma breve contextualização histórica sobre a origem dos números complexos pode mostrar que seu desenvolvimento não foi linear nem simples e que os matemáticos levaram muito tempo para compreender sua importância e até mesmo de admití-los como verdadeiros números. Além disso, proporciona uma justificativa evidenciando o quão apropriada é a representação geométrica dos números complexos.

Esse exercício histórico daria aos estudantes uma oportunidade de questionar e compreender melhor processos sociais, econômicos e culturais passados e contemporâneos e, além disso, auxiliaria a construir uma visão das Ciências da Natureza associada a outras dimensões da vida humana (PCNEM, 2000, p.18).

Nos PCNEM destacam-se a importância de estabelecer conexões entre os conteúdos matemáticos e aplicações dos conhecimentos a situações diversas. Por outro lado, ao aludir o conteúdo de números complexos, os PCN+ (2002, p. 122) contradizem esta conexão, afirmando que “esse tema isolado da resolução de equações perde seu sentido para os que não continuarão seus estudos na área”. Neste sentido, pretende-se com este trabalho, verificar o papel que exercem os números complexos e a eficiência da representação geométrica da operação de multiplicação entre complexos em conexão ao estudo de rotações no plano.

Os números complexos evidenciam o processo de evolução e tomada de corpo da teoria matemática e também permitem a percepção da forma pela qual se dá o processo construção e consolidação dessas teorias (objeto de pesquisa da História da Matemática). Neste tocante, evidenciam-se desde conflitos de ordem pessoais a fatos intrigantes e desafiadores a respeito da teoria a ser desenvolvida e que podem ser sintetizadas na necessidade de ampliação do conceito de conjuntos numéricos ao estabelecimento do Teorema Fundamental da Álgebra. Não obstante, os números complexos, através de sua representação polar, constituem uma ferramenta mais do que adequada para o tratamento de problemas de Geometria e assim ampliando o ferramental de Geometria Analítica. Ainda, pode-se encontrar as mais variadas aplicações de números complexos em Física, Engenharia Elétrica, Fractais, Arte e Aerodinâmica (Caon, 2013).

O objetivo desse trabalho é expor que a operação de multiplicação de números complexos é uma ferramenta descomplicada e de grande utilidade na resolução de problemas que envolvem

rotações no plano. Podendo ser empregada em sala de aula até mesmo para demonstrações de importantes resultados da Geometria como por exemplo o Teorema de Napoleão (Hahn, 1994).

A estrutura, formatação e apresentação seguem as normas da MDT (2012) e utiliza-se de *softwares* de editoração  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  para a confecção deste trabalho, que está dividido em três capítulos mais as considerações finais; No primeiro capítulo, é apresentada uma breve contextualização histórica dos números complexos, onde é salientado que a necessidade de completar algebricamente o corpo dos reais surgiu em meio à resolução de equações cúbicas, mesmo que raízes de números negativos tenham aparecido muito antes na história da Matemática, na resolução de equações quadráticas, ao que apenas se concluía não haver solução. Ainda, apresenta-se uma resumida revisão teórica sobre o corpo dos complexos culminando no isomorfismo entre o corpo dos números complexos e o plano. Fato que dará sentido geométrico a representação de números complexos no Plano de Argand-Gauss. Conceitos, fórmulas e interpretações associadas a forma polar, conjugado, módulo e soma são apresentados neste capítulo, assim como a exposição de algumas observações quanto ao ensino de números complexos.

No segundo capítulo são exibidas com detalhes as representações geométricas das operações de multiplicação, potenciação e radiciação de números complexos na sua forma trigonométrica, realçando seu adequado uso na resolução de problemas que envolvem rotações no plano. Na última seção são feitas aplicações ao se demonstrar dois resultados da Geometria, o Teorema de Napoleão e um resultado análogo para paralelogramos, fazendo uso destas operações de rotação.

No terceiro e último capítulo deste trabalho, foram elaboradas propostas de ensino de números complexos, proporcionando subsídios para análise do conteúdo e possíveis aplicações em sala de aula pelo professor, enfatizando as operações de rotação e conseqüentemente, destacando, a importância da representação geométrica e sua imediata aplicação na resolução de problemas de natureza geométrica, ampliando as alternativas de apresentação e justificação do estudo dos números complexos.

# 1 APRESENTAÇÃO E CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA-CIENTÍFICA-DIDÁTICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Em sua gênese, a Matemática é estabelecida como uma ferramenta auxiliar no processo civilizatório. Suas características principais, padronização e linguagem, forneceram, e fornecem, avanços significativos em vários setores da atividade humana incluindo sua própria constituição como ciência.

A história da Matemática fornece vários exemplos desse desenvolvimento dialético simplista mencionado acima, como ilustração o estabelecimento da Geometria, que transpassa pelos períodos babilônico, egípcio e helênico, caracterizando a evolução do saber geométrico, com início destacadamente aplicado na distribuição de terras no entorno dos rios Nilo e Eufrates até formatação teórico-dedutiva dos Elementos de Euclides.

Segundo Roque (2012, p. 06), “desde tempos muito antigos, povos como os babilônicos já sabiam resolver equações de segundo grau”; e reafirmado em Boyer (2012) que para os povos Babilônicos eram comuns os problemas de encontrar dois números, dados seu produto e ou sua soma ou sua diferença, ou seja, problemas equivalentes a resolver uma equação quadrática.

Ocasionalmente, quando essas equações levavam a radicais negativos em seu processo de resolução, os matemáticos concluíam, simplesmente, que não havia solução para o problema. De acordo com Milies (2004), em 275 d.C. aparece, na história da matemática, um primeiro exemplo desta atitude, quando Diofanto<sup>1</sup> em sua obra *Arithmetica*, considera o seguinte problema:

*Um triângulo retângulo tem área igual a 7 e seu perímetro é de 12 unidades. Encontre o comprimento dos seus lados.*

Encontrar os catetos deste triângulo é equivalente a resolver a equação do segundo grau  $24x^2 - 172x + 336 = 0$ , cujas raízes são:

$$x = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{12}.$$

Ainda, segundo Milies (2004), Diofanto observa que o problema teria solução se  $\left(\frac{172}{2}\right)^2 \geq 24 \times 336$ , não havendo, portanto, necessidade alguma de introduzir sentido para o radical negativo encontrado na solução.

---

<sup>1</sup>Diofanto é considerado o pai da álgebra no sentido de ter sido o primeiro a empregar notações simbólicas para expressões algébricas, apesar de suas notações serem bem diferentes das empregadas hoje.

Quando e por que se deu, então, o surgimento dos números complexos se, ao encontrar raízes de números negativos, concluía-se que o problema originalmente proposto não tinha solução. Carmo (2005, p. 150) afirma que os “números complexos surgem no século XVI quando os conceitos de números negativos e irracionais ainda não estavam esclarecidos” e conforme Milies (2004), pode-se afirmar que a necessidade de trabalhar com números complexos foi imposta pelas equações do terceiro grau. Deste modo, observa-se que estes números não surgiram para que as equações do segundo grau tivessem sempre raízes como sugere PCN+(2002, p. 71) ao escever que “Os números complexos devem ser apresentados como uma histórica necessidade de ampliação do conjunto de soluções de uma equação, tomando-se, para isso, uma equação bem simples, a saber,  $x^2 + 1 = 0$ ”.

De acordo com Pinto (2009), em 1545, Girolano Cardano (1501-1576), em seu livro *Ars Magna*, resolve o problema de dividir um segmento de comprimento 10 em duas partes cujo produto seja 40. Na linguagem de hoje, Cardano procurava um número  $x$  tal que  $x(10 - x) = 40$ . Assim, resolvendo a equação quadrática que representa o problema pelo método de completar o quadrado, obtem-se:

$$\begin{aligned}x^2 - 10x + 40 &= 0 \\(x - 5)^2 - 25 + 40 &= 0 \\(x - 5)^2 &= -15 \\x - 5 &= \pm \sqrt{-15} \\x &= 5 \pm \sqrt{-15}.\end{aligned}$$

Mesmo a solução exibindo raiz quadrada de número negativo, Cardano, ainda sob grande influência dos métodos gregos, principalmente os encontrados nos Elementos de Euclides, apresenta uma tentativa de justificar geometricamente tal resultado como pode ser visto no apêndice A. Embora tendo dado a justificativa geométrica, Cardano rende-se a pragmaticidade de admitir uma solução desse formato e conforme Carmo (2005) informa “Como diz Cardano, “Deixando de lado toda a tortura mental envolvida, multiplica  $(5 + \sqrt{-15})$  por  $(5 - \sqrt{-15})$ . O produto é  $25 - (-15) = 40$  (...)” Assim progride a sutileza aritmética cujo objetivo, como afirmado, é tão refinado quanto inútil”.

Desse modo, Cardano propõe a questão da existência de raízes quadradas de números negativos, ao que chamava de *quantidades sofisticadas*.

Neste livro, conforme Pinto (2009), Cardano também exhibe publicamente um método que recebeu de Del Ferro e Tartaglia para obter as soluções de equações do terceiro grau da forma  $x^3 + px + q = 0$ , indicando assim uma nova etapa no campo da Matemática. Além disso, ele demonstra que a fórmula era válida e encontra um método para que todo o tipo de equação do terceiro grau pudesse ser reduzida a uma forma mais simples de tal modo que fosse sempre possível usar a fórmula de Del Ferro e Tartaglia. Esta fórmula é conhecida até hoje como

fórmula de Cardano, por ter sido ele quem a divulgou.

Neste contexto, tais quantidades sofisticadas formataram as primeiras ideias no que acarretaria no Teorema Fundamental da Álgebra. No Universo dos Complexos  $\mathbb{C}$ , qualquer equação quadrática,  $ax^2 + bx + c = 0$ , possui sempre duas raízes. Mas o que dizer de equações polinomiais com grau maior que 2? Hahn (1994) nos informa que Gauss, em 1799 em sua tese de doutorado, ao demonstrar um importante resultado da Álgebra, solidifica a utilidade dos números complexos.

**Teorema 1** (Teorema Fundamental da Álgebra). *As raízes de qualquer equação polinomial*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$$

*com coeficientes  $a_i$  reais (ou complexos), são complexos. Isto é, existem  $n$  números complexos  $z_1, z_2, \dots, z_n$  (não necessariamente distintos) tal que*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = a_n(x - z_1)(x - z_2)\dots(x - z_n).$$

*Em particular, isso mostra que uma equação polinomial de grau  $n$  tem, contando repetições, exatamente  $n$  raízes em  $\mathbb{C}$ .*

Este Teorema não revela nenhuma dica de como encontrar as raízes de uma equação polinomial. Ele garante a existência de  $n$  raízes para uma equação polinomial de grau  $n$ , desde que o conjunto Universo seja os complexos, em outras palavras, o corpo  $\mathbb{C}$  é algebricamente fechado. Não cabe neste trabalho a demonstração deste teorema, queremos apenas destacar a grande utilidade dos números complexos para a Matemática.

Ainda conforme Pinto (2009) é provável que a ideia de representar os complexos geometricamente tenha ocorrido a Gauss nos seus estudos do teorema acima, tendo apresentado, ao longo do tempo, três novas demonstrações. Outros matemáticos também trabalharam sobre o problema, sendo que Wessel e Argand, aparentemente, foram os primeiros a compreender os complexos como pontos (ou vetores) no plano, porém

Foi Gauss que outorgou aos complexos o “direito de cidadania”, não só explorando a identificação do conjunto dos números complexos com o plano, mas principalmente usando os complexos para obter diversos resultados sobre Geometria plana e sobre os números reais, e até sobre os números inteiros. Foi com a ajuda dos complexos que Gauss decidiu quais eram os polígonos regulares construtíveis com régua e compasso, ou que números inteiros podiam ser escritos como soma de dois quadrados. Foi utilizando o plano complexo que Gauss deu sua demonstração geométrica de que todo polinômio de coeficientes reais pode ser decomposto em fatores de grau máximo dois o que equivale ao Teorema Fundamental da Álgebra (CARNEIRO, 2004, p.5).

Em harmonia com o que já foi exposto e com o objetivo de enriquecer este trabalho encontra-se no Apêndice B a dedução da fórmula que Cardano publicou, sendo esta bastante simples e apropriada para o uso em sala de aula.

## 1.1 Números Complexos

Nesta seção o conjunto dos números complexos é descrito com suas propriedades algébricas e geométricas afim de dar o suporte necessário para o tratamento de problemas de geometria analítica, em particular, problemas que envolvem rotações no plano.

### 1.1.1 Definição de Número Complexo

Os números complexos apresentam-se na forma  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) e denominam-se *parte real* e *parte imaginária* de  $z$ , os respectivos valores  $\Re(z) = a$  e  $\Im(z) = b$ . O símbolo  $i$  representa a expressão matemática  $\sqrt{-1}$ .<sup>2</sup>

Ao agrupamento de todos os números  $z$  descritos acima, denomina-se o *Conjunto dos Número Complexos* e denotado por  $\mathbb{C} = \{z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}\}$ . A igualdade de números complexos é decorrente da igualdade de números reais, mais especificamente, da igualdade das respectivas partes reais e imaginárias de  $z$ . A saber, dados  $z_1 = a_1 + b_1i$ ,  $z_2 = a_2 + b_2i \in \mathbb{C}$ , então  $z_1 = z_2$ , se e somente se,  $a_1 = a_2$  e  $b_1 = b_2$ .

Em  $\mathbb{C}$ , definem-se duas operações, mais precisamente dados  $z_1 = a_1 + b_1i$ ,  $z_2 = a_2 + b_2i \in \mathbb{C}$ :

“+” soma -  $z_1 + z_2 = (a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \in \mathbb{C}$  ;

“.” multiplicação -  $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i \in \mathbb{C}$ .

Uma vez definidas as duas operações, as propriedades algébricas abaixo são válidas para quaisquer números complexos  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  (verificação no Anexo A):

- i. **Comutatividade:**  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$  e  $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ ;
- ii. **Associatividade:**  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$  e  $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ ;
- iii. **Distributividade:**  $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ ;
- iv. **Elemento neutro aditivo e multiplicativo:** Existem e são únicos os números complexos  $z_0 = 0 + 0i = 0$  e  $z_1 = 1 + 0i = 1$  satisfazendo às condições para qualquer número complexo  $z$ ,  $z + z_0 = z$  e  $z \cdot z_1 = z$ , respectivamente;
- v. **Elemento Oposto e Inverso:** A todo complexo  $z$  corresponde um único número complexo  $(-z)$  denominado *oposto*, e se  $z \neq 0 + 0i$ , existe um único número complexo  $z^{-1} = \frac{1}{z}$  denominado *inverso*, tais que  $z + (-z) = 0$  e  $z \cdot z^{-1} = z \cdot \left(\frac{1}{z}\right) = 1$ , respectivamente. Desta forma, dado  $z = a + bi$ , então o oposto de  $z$  é  $-z = -a - bi$  e, sendo  $z \neq 0 + 0i$ , o inverso de  $z$  é  $\frac{1}{z} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$ .

<sup>2</sup>Euler usou o símbolo  $i$  para  $\sqrt{-1}$ , quase no final de sua vida, em 1777, conforme BOYER (2012, p. 304). Desde então esta é a notação padrão para o uso matemático.



Assim, estabelecido  $\mathbb{C}$ , as operações fechadas de soma e multiplicação em  $\mathbb{C}$  e a validade das propriedades acima estabelece-se a definição de *corpo complexo* e será denotado como  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ .

Neste ponto, cabe a observação de que todo número real é um número complexo, isto é,  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  e assim,  $\forall x \in \mathbb{R}$  pode ser reescrito na forma  $x = x + 0i \in \mathbb{C}$ . E de forma precisa, quase “preciosista”, ao definir a aplicação

$$\begin{aligned}\phi &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ x &\rightarrow \phi(x) = x + 0i\end{aligned}$$

estabelece-se que o corpo dos números reais é um subcorpo dos complexos, uma vez que esta aplicação define um *isomorfismo* (ver definição em Hygino (2003)), entre  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  e  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ , com soma e multiplicação usuais em  $\mathbb{R}$ , como demonstra-se abaixo.

Dado  $\phi$ , definido acima, tem-se:

- i. injetividade – Suponha que  $\phi(x_1) = \phi(x_2)$ ,  $\phi(x_1), \phi(x_2) \in Im(\phi) \subset \mathbb{C}$ , logo  $(x_1 + 0i) = (x_2 + 0i)$  é equivalente a  $x_1 = x_2$ , provando a injetividade de  $\phi$ ;
- ii. sobrejetividade – é imediata;
- iii.  $\phi$  preserva as operações nos respectivos corpos:

$$\begin{aligned}\phi(a + b) &= (a + b) + 0i = (a + 0i) + (b + 0i) = \phi(a) + \phi(b); \\ \phi(ab) &= (ab) + 0i = (a + 0i) \cdot (b + 0i) = \phi(a) \cdot \phi(b).\end{aligned}$$

A primeira distinção entre  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  e  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ , isto é o Corpo  $\mathbb{C}$  não preservar uma propriedade do Corpo  $\mathbb{R}$ , é que  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  não é um corpo ordenado<sup>3</sup>, e assim, em  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ , não comporta uma relação de ordem, como ilustra o contraexemplo que segue:

– dado  $i \in \mathbb{C}$ , sabe-se que  $i \neq 0$ , então  $-i > 0$  ou  $i > 0$ . Assumindo que  $-i > 0$  então  $(-i) \cdot (-i) > 0$ , um absurdo, pois  $-1 < 0$ . Se  $i > 0$ , então  $i \cdot i > 0$ , da mesma forma gera  $-1 > 0$ , um absurdo.

O corpo  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  não é ordenado, mas sobre o conjunto dos números complexos podem ser definidas relações de ordem tais como *Ordem Lexicográfica (à Direita)* e *Ordem Modular*. Um estudo sobre estas ordens no conjunto dos números complexos pode ser encontrado em Bastos (2012).

<sup>3</sup>Em  $\mathbb{R}$  existe o subconjunto  $\mathbb{R}_+^*$  tal que para todo  $a \in \mathbb{R}$  ocorre uma, e só uma, das seguintes relações:

$$\begin{aligned}a \in \mathbb{R}_+^* &\implies a > 0 \\ &a = 0 \\ -a \in \mathbb{R}_+^* &\implies a < 0\end{aligned}$$

Além disso, para todo  $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ , ou seja, para todo  $a > 0, b > 0$  temos  $a + b \in \mathbb{R}_+^*$  e  $a \cdot b \in \mathbb{R}_+^*$ , em outras palavras,  $a + b > 0$  e  $a \cdot b > 0$ . Esta propriedade dos *Corpos Ordenados* é chamada de *Tricotomia*.

Para finalizar esta seção de apresentação algébrica dos números complexos, estabelece-se notações e conceitos que serão utilizados no transcorrer do trabalho.

**Definição 1.** *Conjugado* – Dado o número complexo  $z$ , o seu conjugado será também um complexo denotado por  $\bar{z}$ , tal que  $\Re(\bar{z}) = \Re(z)$  e  $\Im(\bar{z}) = -\Im(z)$ .

Deste modo se  $z = a + bi$ , então  $\bar{z} = a - bi$ . Note que, a partir da definição de conjugado, as partes reais e imaginárias de um número complexo, são representadas respectivamente por  $\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$  e  $\Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ .

Uma propriedade importante decorrente desta definição, e do número imaginário  $i$ , é observada no processo de obtenção de soluções da equação quadrática  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ), quando  $b^2 - 4ac = -(4ac - b^2) < 0$ , as soluções associadas são  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$ ; isto é, a ocorrência de uma raiz complexa automaticamente incorre em uma segunda raiz complexa conjugada para equações polinomiais com coeficientes reais.

**Definição 2.** *Módulo* – O módulo de um número complexo  $z$ , que será denotado por  $|z|$ , é um número real não negativo igual a raiz quadrada da soma do quadrado de  $\Re(z)$  com o quadrado de  $\Im(z)$ . Ou seja, dado o complexo  $z = a + bi$ , então

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}.$$

E associam-se as seguintes propriedades a essas definições.

**Proposição 1.** (*Propriedades de conjugado e módulo.*) Para todo  $z, w \in \mathbb{C}$  tem-se

$$(1.1) \quad |z \cdot w| = |z| \cdot |w|;$$

$$(1.2) \quad \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}, \forall w \neq 0;$$

$$(1.3) \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2;$$

$$(1.4) \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w};$$

$$(1.5) \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w};$$

$$(1.6) \quad \overline{\left( \frac{z}{w} \right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}, \forall w \neq 0;$$

$$(1.7) \quad |\bar{z}| = |z|.$$

### 1.1.2 O Plano de Argand-Gauss

Assim como os números reais são representados na linha real, com ordem crescente da esquerda para a direita, representa-se no Plano Cartesiano, determinado pelos eixos  $\vec{Ox}$  e  $\vec{Oy}$ ,

os números complexos, com duas componentes ordenadas, suas partes real e imaginária. Ao relacionar o Corpo  $\mathbb{C}$  e o Plano Cartesiano<sup>4</sup> fica implícito o *isomorfismo entre  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{R}^2$* , que é detalhado no Anexo B.

O ponto  $P = (a, b)$  é a imagem do número complexo  $z = a + bi$ , onde o eixo  $\vec{Ox}$  é denominado Eixo Real, pois contém todos os números reais ( $\Im(z) = 0$ ) e o eixo  $\vec{Oy}$ , Eixo Imaginário, visto que são números complexos do tipo *imaginário puro*, isto é, não tem nenhuma parte real ( $\Re(z) = 0$ ).

**Definição 3.** *Afixo* – Afixo é o número complexo que representa algebricamente um ponto  $P$  do plano. Isto é, dado  $P = (a, b)$ , o afixo de  $P$  é o número complexo  $z = a + bi$ , além disso  $P$  é chamado imagem do número complexo  $z$ . Na figura 1.1 representa-se o ponto  $P = (a, b)$  no plano complexo, cujo afixo é o número complexo  $z = a + bi$ .

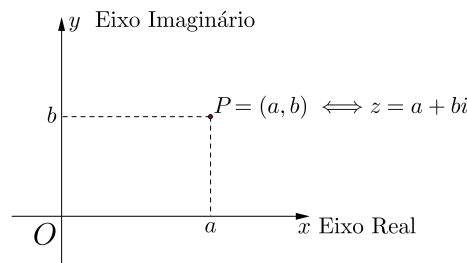


Figura 1.1: Plano Complexo

Uma vez estabelecido o isomorfismo de  $\mathbb{C}$  e o plano, e se utilizando do isomorfismo do plano com o  $\mathbb{R}^2$ , chega-se a um segundo ponto de guinada na história dos números complexos e decorrente do importantíssimo avanço no desenvolvimento da Matemática: a Geometria Analítica.

Por assim dizer, a Geometria Analítica é apresentada em *La Géométrie*, terceiro anexo do trabalho de DESCARTES - *Discurso sobre o Método para raciocinar bem e procurar a verdade nas ciências*. Conforme Boyer (2012), a intenção de Descartes era ilustrar matematicamente as considerações filosóficas do seu trabalho. Com isso, ele construiu as bases da Geometria Analítica utilizando o sistema de coordenadas de um ponto com o objetivo de representar planos, retas, curvas e círculos através de equações matemáticas. Além disso,

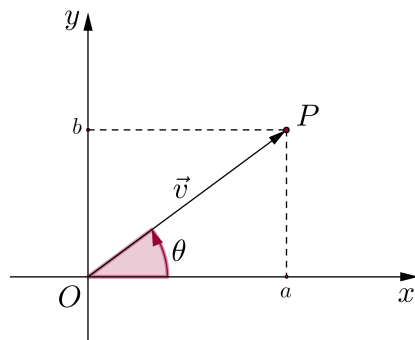
...ele rompeu com a tradição grega, pois em vez de considerar  $x^2$  e  $x^3$ , por exemplo, como uma área e um volume, ele também os interpretava como segmentos. Isso lhe permitiu abandonar o princípio de homogeneidade, ao menos explicitamente, e, ainda assim, preservar o significado geométrico. (...) É claro que Descartes substituía a homogeneidade formal por homogeneidade em pensamento, o que tornou sua álgebra geométrica mais flexível - de fato, tão flexível que hoje lemos  $xx$  como “ $x$  ao quadrado” sem jamais enxergar mentalmente um quadrado (BOYER, 2012 p. 238).

Apesar de Descartes não usar o plano com eixos ortogonais como fazemos hoje, é em sua homenagem a denominação de eixos cartesianos. Descartes foi o primeiro a propor unir a álgebra e a geometria em *A Geometria* seu único trabalho matemático.

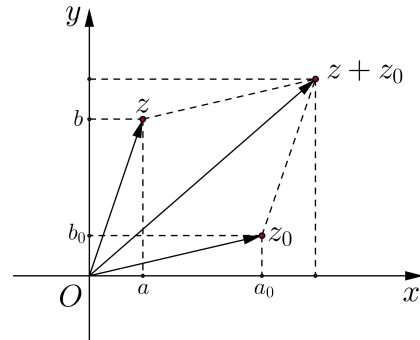
<sup>4</sup>Ao fazer uso do Plano Cartesiano para representar os números complexos, este é chamado de *Plano Complexo* ou *Diagrama de Argand* em homenagem ao Matemático suíço Jean Robert Argand (1768-1822).

Por vezes é útil pensar em  $z = a + bi$  como um vetor (segmento orientado) de origem em  $O = (0, 0)$  e extremidade em  $P = (a, b)$ , isto é,  $z$  pode ser representado pelo vetor  $\vec{v} = \vec{Oz}$  (Figura 1.2(a)).

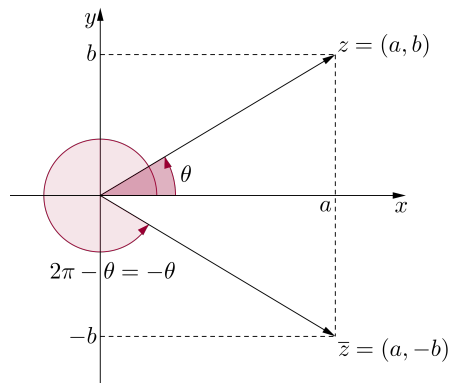
Desta forma as operações de soma e produto em  $\mathbb{C}$  podem ser representadas geometricamente por operações de translação, reflexão, contração, dilatação e rotação no plano.



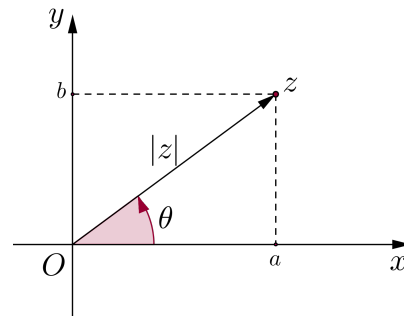
(a) Número Complexo – Ponto – Vetor



(b) Soma de números complexos como soma de vetores em  $\mathbb{R}^2$



(c) Conjugado de um número complexo como a reflexão em relação ao eixo-real



(d) Módulo de um número complexo como a norma de um vetor em  $\mathbb{R}^2$

Figura 1.2: Representação geométrica de soma e de conceitos algébricos dos números complexos

Na figura 1.2 ilustram-se, respectivamente, as manifestações geométricas das propriedades algébricas de soma, conjugado e módulo de um número complexo.

Considerações sobre a operação de multiplicação em  $\mathbb{C}$  será destinado um capítulo próprio, pois servirá de aporte a toda proposta de estudo e atividades desenvolvida na dissertação.

### 1.1.3 Forma Polar de um Número Complexo

Até o momento tem-se que um número complexo  $z = a + bi$  pode ser representado geometricamente por um ponto  $P = (a, b)$  que evidencia suas coordenadas cartesianas, isto é, a abscissa é a parte real  $a$  e a ordenada, a parte imaginária  $b$ . É de grande utilidade representar  $z$  por coordenadas polares onde os elementos geométricos do vetor  $\vec{Oz}$  são destacados, isto é, seu comprimento (módulo) e o argumento de  $z$  (ângulo formado entre o vetor e o eixo  $\vec{Ox}$ ).

A forma polar, também chamada de forma trigonométrica, é de grande relevância neste trabalho devido a sua utilidade ao simplificar a multiplicação e, como seguimento, a potenciação e a radiciação de números complexos. Sendo esta última um mecanismo importante no encontro das raízes da unidade e conseqüentemente para a construção de polígonos regulares.

Além disso, esta ferramenta é a base para a representação geométrica da multiplicação e conseqüentemente, potenciação e radiciação de complexos e com isso favorece as rotações no plano complexo sendo este o enfoque das atividades propostas aqui.

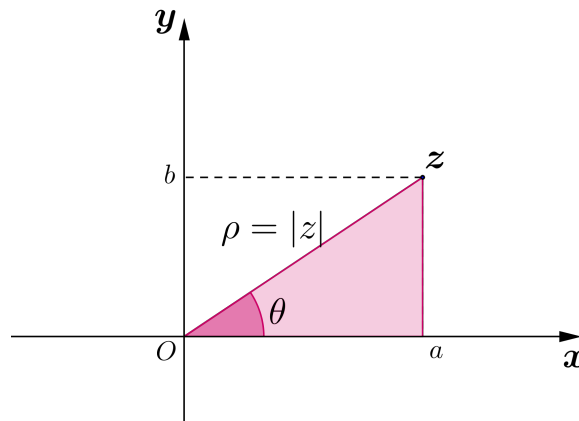


Figura 1.3: Forma polar do número complexo  $z$

Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se a relação entre os lados do triângulo retângulo sombreado como ilustra a figura 1.3, formado pelas partes real e imaginária de  $z$  e seu módulo, confirmando a definição de módulo dada previamente, isto é  $|z|^2 = a^2 + b^2 \implies |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Dado  $z = a + bi \neq 0$ , seja  $|z| = \rho > 0$ , e  $\theta$ , definido como argumento do número complexo  $z$  e indicado por  $\arg(z)$ , o ângulo positivo entre o eixo  $\vec{Ox}$  e o vetor  $\vec{Oz}$ , isto é,  $\theta = \widehat{xOz}$ .

Pelas Razões Trigonômicas seguem que  $\frac{a}{\rho} = \cos \theta \implies a = \rho \cos \theta$  e  $\frac{b}{\rho} = \sin \theta \implies b = \rho \sin \theta$ , e assim, pode-se escrever a forma polar do número complexo  $z = a + bi$ :

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta), \quad (1.1)$$

com  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

Observe que, para  $k$  inteiro pode-se escrever a seguinte expressão mais geral para  $z$ , que em muitos casos torna-se mais conveniente:

$$z = \rho[\cos(\theta + 2k\pi) + i \sin(\theta + 2k\pi)].$$

## 1.2 Números Complexos e seu ensino

Nos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática é comum os números complexos serem vistos como assunto básico. Já para os alunos da Educação Básica, no Ensino Médio, causam estranheza.

Os números complexos ocupam uma posição muito singular no ensino da Matemática. Não merecem grande atenção nos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática, por serem considerados como “assunto elementar” de nível médio. Já no Ensino Médio, são evitados, sendo taxados de estranhos, de compreensão difícil e, sobretudo, inúteis (CARNEIRO, 2004, p. 1).

Evidencia-se o mesmo pensamento que Cardano tinha, há quase 500 anos, quando não havia a representação geométrica dada por Gauss a esses números. De fato, a histórica descoberta dos números complexos é ausente do seu significado geométrico e talvez esse seja o fator considerado para que em seu ensino as abordagens sigam esse padrão. Porém, visto que estes números só foram realmente reconhecidos após ter uma representação geométrica, há mais de 200 anos, parece relevante utilizar-se da representação geométrica e suas aplicações.

Em geral, os complexos são apresentados no terceiro ano do Ensino Médio, quando também é estudada a Geometria Analítica. Tais conteúdos não são relacionados durante o processo de ensino-aprendizagem, isto é, os números complexos não são estudados como ferramentas para resolver problemas em geometria analítica. Além disso, quando o professor define  $i = \sqrt{-1}$  e ainda “esclarece” com a frase: “onde  $i$  é a unidade imaginária”, faz com que os alunos fiquem convictos de que tais números só existem na imaginação e não possuem serventia no mundo real, como pode ser visto pelo texto a seguir:

Este é um outro ponto desta definição que tende a desconcertar o iniciante. Durante anos, convencemos e fomos convencidos de que o quadrado de um número não pode ser negativo, e agora “cai do céu” um novo número cujo quadrado é  $-1$ . E se alguém pensa que está delirando, nós professores garantimos que sim, pois é um número “imaginário”! Como podemos querer, depois disto, que o principiante ache que os números complexos são úteis na Matemática e na Física, ou pelo menos, ache que eles existem? Nada mais natural que o aluno pense que os complexos foram inventados apenas para resolver exercícios sobre números complexos (CARNEIRO, 2004, p. 3).

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio não fornecem muitas orientações quanto ao ensino de números complexos. Consta apenas a motivação de introduzir estes números com enfoque histórico de que eles nasceram da necessidade de encontrar soluções para equações quadráticas, sugerindo que isto seja feito a partir da equação  $x^2 + 1 = 0$ , mesmo estando evidente a real motivação para a criação de tais números na história da Matemática, através do livro *Ars Magna* de Cardano, conforme exposto nas seções anteriores.

Quando, no ensino de números complexos, estes entes são incorporados como pontos do plano ou vetores, que se somam através da composição de translações, e que se multiplicam através da composição de rotações e dilatações, faz com que os iniciantes compreendam que não há nada de “imaginário” nestes números. Desta forma, pode-se beneficiar da grande revolução

iniciada por Wessel<sup>5</sup>, Argand<sup>6</sup> e Gauss, conforme Carneiro (2004), compreendendo os complexos como pontos ou vetores no plano.

No próximo capítulo será apresentada com detalhe a representação geométrica das operações de multiplicação e radiciação de números complexos no plano e conseqüentemente a representação da potenciação. Tais operações podem ser trabalhadas em *software* de geometria dinâmica, tal como o *Geogebra*. O *Geogebra* é um programa de uso livre onde podem ser desenvolvidas atividades que permitem as operações com números complexos, a verificação do cálculo do produto entre números complexos de modo algébrico e geométrico.

---

<sup>5</sup>Agrimensor norueguês.

<sup>6</sup>Matemático suíço.

## 2 REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DAS OPERAÇÕES DE MULTIPLICAÇÃO, POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS E ALGUMAS APLICAÇÕES

Neste capítulo elabora-se em detalhe as ferramentas e técnicas usuais para a representação geométrica do produto entre complexos. Com isso é feita uma base sólida para a aplicação destes resultados nas propostas de trabalho que são apresentadas no próximo capítulo.

### 2.1 Multiplicação no Plano Complexo

Dados dois números complexos em sua forma polar (Equação 1.1),  $z_1 = \rho_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$  e  $z_2 = \rho_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$ , uma expressão na forma trigonométrica, para o produto  $z_1 \cdot z_2$  é encontrada usando as Fórmulas de adição de arcos, dadas por:

$$\begin{cases} \cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen}(a \pm b) = \cos a \operatorname{sen} b \pm \cos b \operatorname{sen} a \end{cases} \quad (2.2)$$

Desta forma, o produto pode ser escrito conforme segue

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \cdot \rho_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) \\ &= \rho_1 \cdot \rho_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + i \cos \theta_2 \operatorname{sen} \theta_1 + i^2 \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) \\ &= \rho_1 \rho_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + (\cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + \cos \theta_2 \operatorname{sen} \theta_1) i], \end{aligned}$$

ou simplesmente, usando as Fórmulas de adição de arcos (Equação 2.2)

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]. \quad (2.3)$$

Portanto, ao multiplicar dois complexos  $z_1$  e  $z_2$  encontra-se um complexo com módulo igual ao produto dos módulos de  $z_1$  e  $z_2$  e argumento igual a soma dos argumentos dos complexos originais.

Adota-se a notação  $\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta) = \operatorname{cis}(\theta)$ , para efeitos de simplificação de escrita.

Desta forma, sendo  $|z_1| = \rho_1$  e  $|z_2| = \rho_2$ , então  $z_1 = \rho_1 \cdot \operatorname{cis} \theta_1$  e  $z_2 = \rho_2 \cdot \operatorname{cis} \theta_2$ , substituindo na equação 2.3, segue que

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2), \quad (2.4)$$



e os resultados da multiplicação de complexos, sob a ótica geométrica, é descrito conforme casos abaixo (utilizando-se como parâmetro de distinção de casos os valores dos módulos de  $z_1$  e  $z_2$ ).

- $|z_1| = |z_2| = 1 \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = \text{cis}(\theta_1 + \theta_2)$ .

Na interpretação geométrica deste resultado observa-se que  $z_1$  e  $z_2$  estão sob a Circunferência de centro  $O = (0,0)$  e raio unitário,  $r = 1$ , e o produto entre eles também possui módulo igual a 1 e  $\arg(z) = \theta_1 + \theta_2$ , ou seja,  $z_1 \cdot z_2$  está sob a circunferência de raio unitário, e o seu argumento é a soma dos argumentos de  $z_1$  e  $z_2$  (Figura 2.4(a)).

- $|z_1| = 1$  e  $|z_2| = \rho \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = \rho \cdot \text{cis}(\theta_1 + \theta_2)$ .

Este é um resultado muito importante, pois observa-se que ao multiplicar um complexo  $z$  qualquer por  $\text{cis} \theta$ , o complexo obtido é uma rotação de  $z$  em um ângulo  $\theta$  (Figura 2.4(b)).

Um caso particular ocorre quando  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$  e portanto  $z_1 = \text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$ . Assim, ao multiplicar qualquer complexo  $z = \rho \text{cis} \theta$  por  $i$  seu módulo não se altera, isto é,  $|z \cdot i| = |z|$  e  $\arg(z \cdot i) = \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ . Geometricamente o resultado será a rotação de  $z$  em  $\frac{\pi}{2}$ . Este resultado está ilustrado na (Figura 2.4(c)).

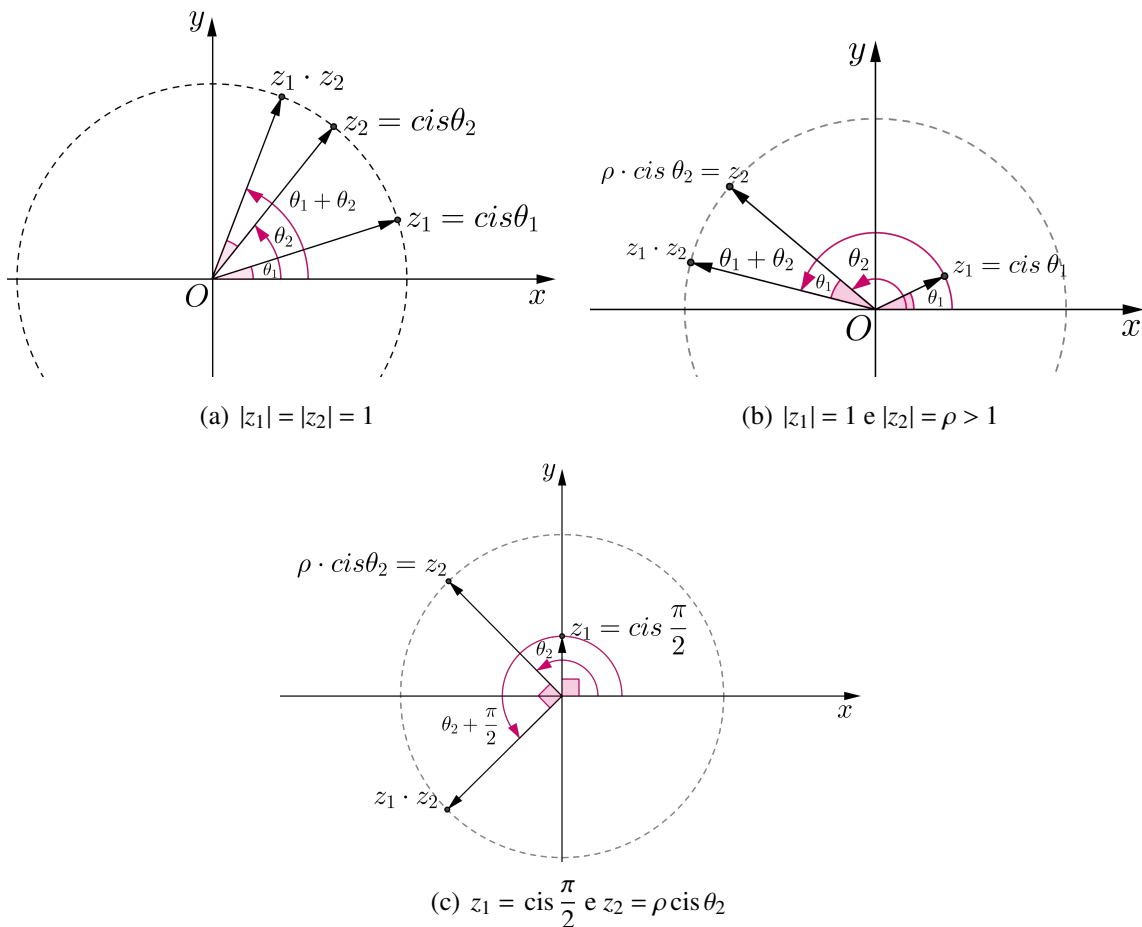


Figura 2.4: Representação geométrica do produto  $z_1 \cdot z_2$

- $0 < |z_1| < |z_2| < 1$ .

Considera-se a hipótese de  $|z_1| < |z_2|$  e multiplica-se toda inequação por  $|z_1|$ , tem-se  $0 < |z_1||z_2| < |z_1| < |z_2| < 1$ . Neste caso, uma contração tanto de  $z_1$  como de  $z_2$ , visto que o módulo do produto  $z_1 z_2$  é menor que qualquer um dos vetores originais. (Figura 2.5(a)).

- $0 < |z_1| < 1 < |z_2|$ .

Multiplica-se, neste caso, toda a inequação por  $|z_1|$  e depois por  $|z_2|$ , obtendo:

$$0 < |z_1|^2 < |z_1| < |z_1||z_2| \text{ e } 0 < |z_1||z_2| < |z_2| < |z_2|^2. \tag{2.5}$$

Da equação 2.5, resulta que  $0 < |z_1| < |z_1||z_2| < |z_2|$ , assim há uma contração de  $z_2$  e uma dilatação de  $z_1$ . (Figura 2.5(b)).

- $1 < |z_1| < |z_2|$ .

Procedendo como acima, as seguintes desigualdades são encontradas:

$$|z_1| < |z_1|^2 < |z_1||z_2| \text{ e } |z_2| < |z_1||z_2| < |z_2|^2. \tag{2.6}$$

Pelas desigualdades da equação 2.6, conclui-se que  $1 < |z_1| < |z_2| < |z_1||z_2|$  e portanto, uma dilatação de  $z_1$  e de  $z_2$ . (Figura 2.5(c)).

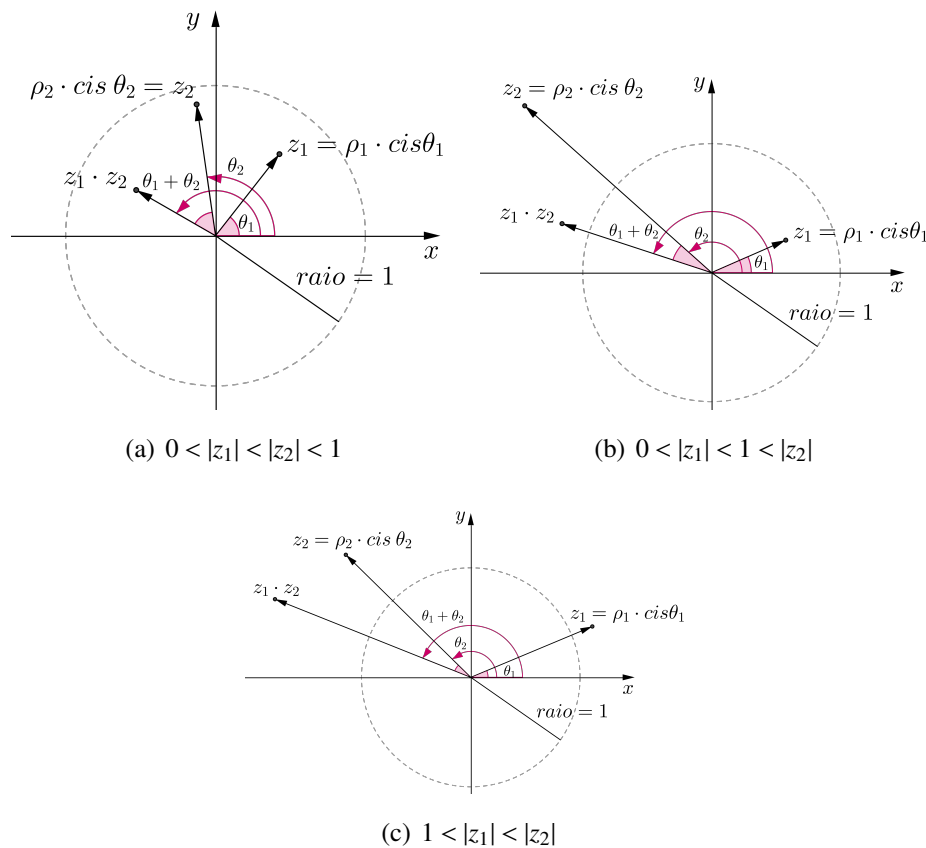


Figura 2.5: Representação geométrica do produto  $z_1 \cdot z_2$

## 2.2 Potenciação e Radiciação no Plano Complexo

Calcular a potência  $n$ -ésima de um número complexo  $z$ , é trabalhoso se  $z$  for escrito na sua forma algébrica, pois seria necessário desenvolver o segundo membro da equação  $z^n = (a + bi)^n$  usando binômio de Newton e ainda responder o que é  $i^n$ . Porém, ao considerar a forma polar dada pela equação 2.4 do complexo  $z$  e utilizando a equação 2.4  $n$  vezes, obtém-se uma expressão conhecida sob o nome de *Fórmula de Moivre* (Carmo, 2005), uma consequência imediata do produto de complexos, que é:

$$z^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta). \quad (2.7)$$

A Fórmula de Moivre é válida para  $n \in \mathbb{Z}$ .

Para  $n = 0$  ou  $n = 1$  é imediata a verificação da fórmula. Para  $n > 0$  a demonstração segue por indução sobre  $n$ :

Assume-se como hipótese que para  $n = k$ , vale a igualdade  $z^k = \rho^k \operatorname{cis}(k\theta)$ .

Se  $n = k + 1$ , então  $z^{k+1} = z^k \cdot z = [\rho^k \cdot \operatorname{cis}(k\theta)] \cdot [\rho \cdot \operatorname{cis}\theta]$ , então pela equação 2.4

$$z^{k+1} = \rho^{k+1} \operatorname{cis}[(k+1)\theta].$$

Portanto vale para todo  $n$  positivo.

Para  $n < 0$ , segue que  $-n > 0$ , tem-se portanto que:

$$z^n = \frac{1}{z^{-n}} = \frac{1}{\rho^{-n}(\cos(-n\theta) + i \operatorname{sen}(-n\theta))} = \rho^n [\cos(-n\theta) - i \operatorname{sen}(-n\theta)].$$

Segue do fato de a função cosseno ser par e a função seno ser ímpar, que  $\cos(-n\theta) = \cos(n\theta)$  e  $\operatorname{sen}(-n\theta) = -\operatorname{sen}(n\theta)$ , assim  $z^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ , para  $n < 0$ .

Utilizando a Fórmula de Moivre (Equação 2.7), observa-se que sempre que o número complexo for unitário, isto é, quando  $|z| = 1$ , geometricamente  $z^n$  equivale a dar  $n$  rotações sucessivas de ângulo igual ao argumento de  $z$ , sem sair da circunferência unitária (Figura 2.6).

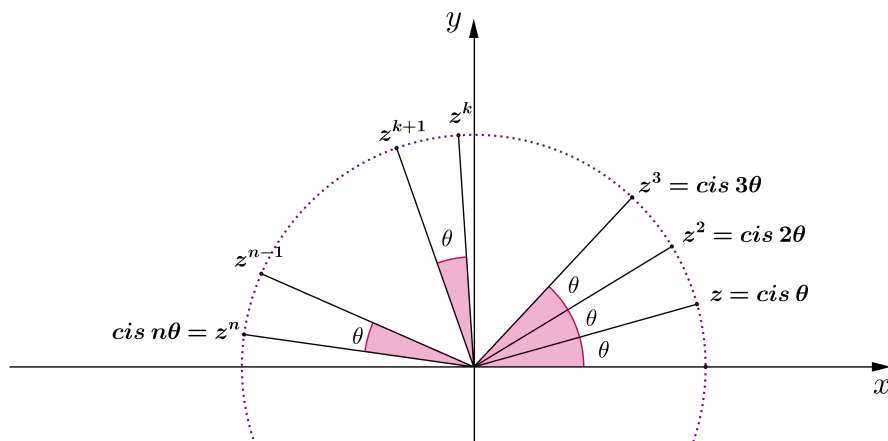


Figura 2.6: Potências de  $z = \operatorname{cis} \theta$

Já as potências de um número complexo  $z$  de módulo diferente de 1, esboçam um comportamento em espiral (Figura 2.7(a) e 2.7(b)).

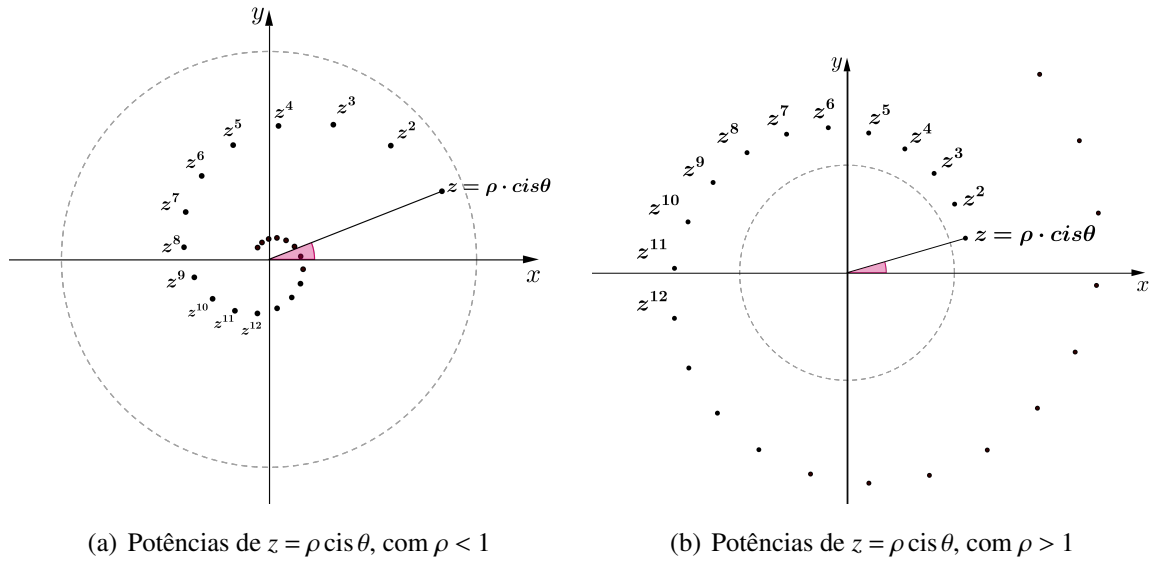


Figura 2.7: Representação geométrica das potências de  $z = \rho \operatorname{cis} \theta$

O problema de extrair raízes  $n$ -ésimas de  $z$  é equivalente a resolver a equação

$$w^n = z \quad (2.8)$$

conhecidos  $n$  e  $z$ .

Seja  $z = \rho \operatorname{cis} \theta$  e  $w = \rho_w \operatorname{cis} \theta_w$ , tem-se  $\rho_w$  e  $\theta_w$  as incógnitas. Com a substituição das formas polares de  $z$  e  $w$  na equação 2.8 obtém-se

$$(\rho_w)^n \operatorname{cis}(n\theta_w) = \rho \operatorname{cis} \theta.$$

Consequentemente, considerando os ângulos em radianos

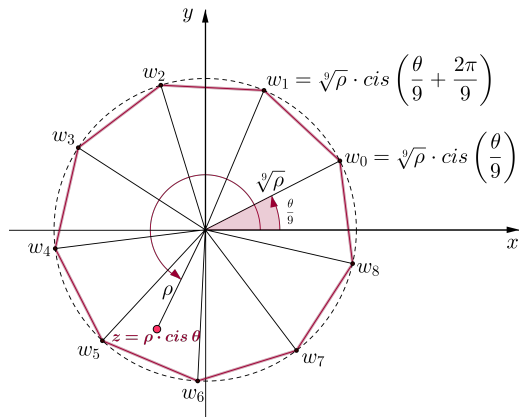
$$\begin{cases} (\rho_w)^n = \rho \\ n\theta_w = \theta + 2k\pi \end{cases},$$

onde  $k$  é inteiro qualquer. Visto que os módulos são números positivos,  $\rho_w = \sqrt[n]{\rho}$  e  $\theta_w = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ .

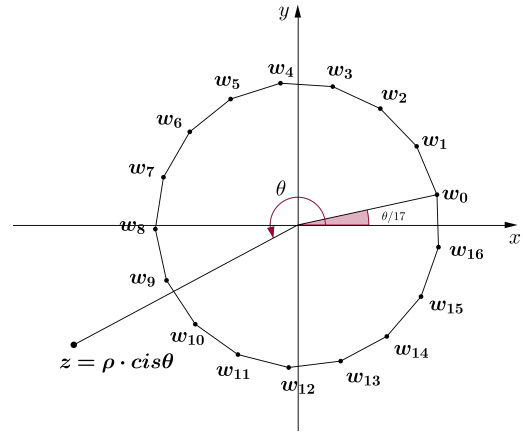
Portanto, reafirmando o *Teorema Fundamental da Álgebra*, e evidenciando a importância de incluir todas as determinações do argumento de  $z$ , existem exatamente  $n$  soluções distintas da equação 2.8, sempre que  $z \neq 0$  e ainda,  $w_k$  é uma raiz  $n$ -ésima de  $z = \rho \operatorname{cis} \theta$ , se e somente se,  $w_k$  tem módulo  $\sqrt[n]{\rho}$  e argumento,  $\frac{\theta + 2k\pi}{n}$ , ou seja,  $w_k$  é da forma

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right). \quad (2.9)$$

Geometricamente, dado  $z = \rho \operatorname{cis} \theta$ , as  $n$  raízes  $w_k$  (Equação 2.9), com  $k$  inteiro e  $0 \leq k \leq n - 1$ , da equação  $w^n = z$ , são os  $n$  afijos dos pontos que são os vértices de um polígono regular de  $n$  lados inscrito na circunferência de centro  $O = (0, 0)$  e raio  $\sqrt[n]{\rho}$ . Exemplos deste fato são mostrados nas figuras 2.8(a) e 2.8(b).



(a) Raízes da equação  $w^9 = \rho \operatorname{cis} \theta$ , onde  $\rho < 1$



(b) Raízes da equação  $w^{17} = \rho \operatorname{cis} \theta$ , onde  $\rho > 1$

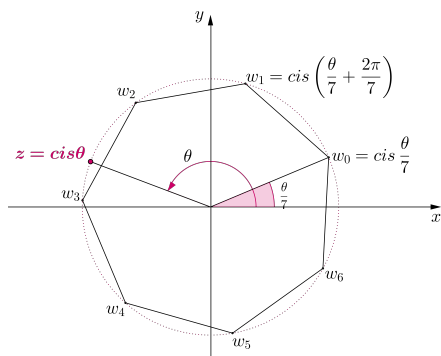
Figura 2.8: Representação geométrica dos polígonos de 9 e 17 lados sendo os vértices as imagens das raízes das respectivas equações  $w^9 = \rho \operatorname{cis} \theta$  e  $w^{17} = \rho \operatorname{cis} \theta$

Em particular, as raízes  $n$ -ésimas de um complexo unitário,  $z = \operatorname{cis}(\theta + 2k\pi)$  serão os afijos de pontos sob a circunferência de centro em  $O = (0, 0)$  e raio 1 (Figura 2.9(a)).

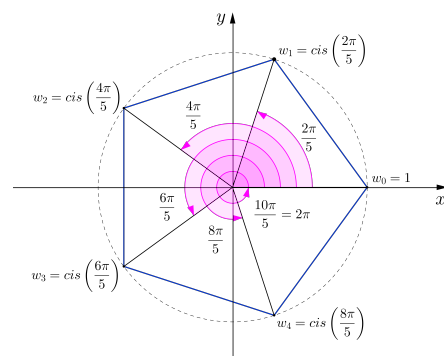
Como consequência, pode-se encontrar as *Raízes  $n$ -ésimas da Unidade*, isto é, as soluções da equação  $\sqrt[n]{\operatorname{cis}(2k\pi)} = w$  ou simplesmente  $w^n = 1$ .

É fácil ver que uma das raízes será  $w_0 = 1$ , e portanto, um dos vértices do polígono de  $n$  lados será o ponto  $P_0 = (1, 0)$ . Os demais serão os pontos imagens dos complexos dados pela equação 2.9 (ver a ilustração deste fato na figura 2.9(b)). Uma referência para estes resultados pode ser encontrada em Churchill (1980).

No Apêndice C mostra-se que o conjunto das raízes  $n$ -ésimas da unidade formam um grupo cíclico abeliano.



(a) Raízes da equação  $w^7 = \operatorname{cis} \theta$



(b) Raízes quintas da unidade,  $w^5 = 1$

Figura 2.9: Representação geométrica dos polígonos de 7 e 5 lados sendo os vértices as imagens das raízes das respectivas equações  $w^7 = \operatorname{cis} \theta$  e  $w^5 = 1$

### 2.3 Rotação de vetores no plano através do produto de números complexos

A operação de multiplicação de complexos na forma trigonométrica ou polar se mostrará uma ferramenta apropriada para o estudo de rotações no plano.

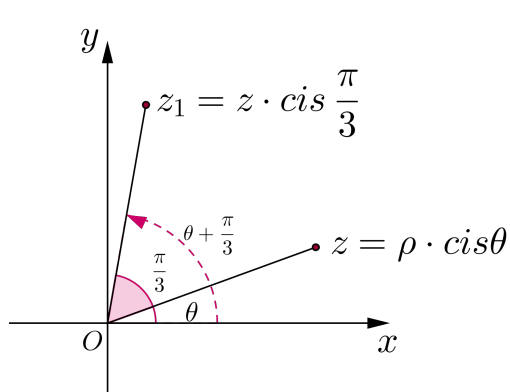
Dado um número complexo  $z = \rho \operatorname{cis} \theta$ , quando multiplicado por um complexo unitário,  $\operatorname{cis} \alpha$ , o resultado será a rotação de  $z$  de um ângulo  $\alpha$  em torno da sua origem.

Como exemplo, para se rotacionar em  $\frac{\pi}{3}$  o complexo  $z = \rho \operatorname{cis} \theta$ , em torno da origem, basta multiplicá-lo por  $\operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$  (Figura 2.10(a)), como segue:

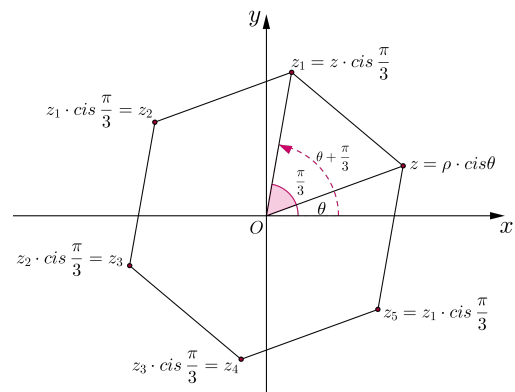
$$z_1 = z \cdot \operatorname{cis} \frac{\pi}{3} = (\rho \operatorname{cis} \theta) \operatorname{cis} \frac{\pi}{3} = \rho \operatorname{cis} \left( \theta + \frac{\pi}{3} \right).$$

Ao realizar 6 multiplicações sucessivas, dos complexos encontrados por  $\operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$  encontra-se 6 afixos dos vértices de um hexágono (Figura 2.10(b)), pois os módulos dos complexos encontrados são todos iguais ao módulo de  $z$  e ainda o último complexo é igual ao complexo original, isto é,  $z \left( \operatorname{cis} \frac{\pi}{3} \right)^6 = z$ . Como se verifica abaixo:

$$z_0 = z, z_1 = z \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}, z_2 = z \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}, z_3 = z \operatorname{cis} \pi, z_4 = z \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}, z_5 = z \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3} \text{ e } z_6 = z \operatorname{cis} 2\pi = z.$$



(a) Rotação de  $\mathbf{Oz}$  em  $\frac{\pi}{3}$



(b) Hexágono gerado a partir de rotações de  $\mathbf{Oz}$  de  $\frac{\pi}{3}$  em torno da sua origem

Figura 2.10: Multiplicações sucessivas de um número complexo unitário por  $\operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$

No caso acima, o vetor rotacionado tem origem em  $O = (0, 0)$ , porém através do produto de números complexos pode-se rotacionar vetores que não possuem a mesma origem do Plano de Argand. Com isso é possível resolver problemas de Geometria Analítica que envolvem rotações no plano.

Dado qualquer vetor  $\overrightarrow{AB}$  é possível rotacioná-lo de um ângulo  $\alpha$  em torno da sua origem, isto é, o vetor obtido pela rotação, também terá origem em A. Seja  $\overrightarrow{AC}$  o vetor resultante da

rotação em  $\alpha$  de  $\overrightarrow{AB}$  em torno de  $A$ . Segue que

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \operatorname{cis} \alpha \Leftrightarrow (C - A) = (B - A) \operatorname{cis} \alpha. \quad (2.10)$$

Sejam  $z_a$ ,  $z_b$  e  $z_c$  os afixos dos respectivos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Substituindo na equação 2.10, vem que

$$z_c = z_a + (z_b - z_a) \operatorname{cis} \alpha, \quad (2.11)$$

como única incógnita o complexo  $z_c$ .

## 2.4 Aplicação de Rotação para a demonstração de dois Resultados da Geometria

Nesta seção serão apresentadas as demonstrações de dois resultados da Geometria fazendo uso do que já foi exposto sobre o produto de números complexos para rotacionar vetores no plano. Tais demonstrações geralmente são estabelecidas pela geometria euclidiana<sup>7</sup>, ou em outros casos, com números complexos na sua forma algébrica<sup>8</sup>, sem o uso de rotações.

### 2.4.1 Teorema de Napoleão - Demonstração Alternativa Via Rotações no Plano

Nesta seção é apresentado o Teorema de Napoleão, com este nome por ser atribuída sua autoria a *Napoleão Bonaparte*<sup>9</sup>. Uma demonstração alternativa deste teorema é feita empregando a rotação de vetores no plano através da multiplicação de números complexos.

**Teorema 2** (Teorema de Napoleão). *Sobre os lados de um triângulo qualquer, constroem-se triângulos equiláteros exteriores, então os baricentros desses três triângulos equiláteros são vértices de um triângulo também equilátero.*

Seja  $ABC$  um triângulo qualquer, adota-se um sistema de coordenadas cartesianas, tais que o vértice  $A$  coincida com a origem e o vértice  $B$  esteja sob o eixo  $Ox$ . Além disso, define-se, sem perda de generalidade, a seguinte unidade de medida:  $\overline{AB} = 1$ . Seja  $z = a + bi$ , o afixo do vértice  $C$ , onde  $a$  e  $b$  são números reais.

<sup>7</sup>Uma demonstração via Geometria Sintética pode ser encontrada em Freitas (2013).

<sup>8</sup>Uma demonstração via números complexos pode ser encontrada em Hahn (1994).

<sup>9</sup>Líder Político e Militar da Revolução Francesa, que segundo historiadores era muito interessado pela matemática em especial a geometria, conforme Freitas (2013).

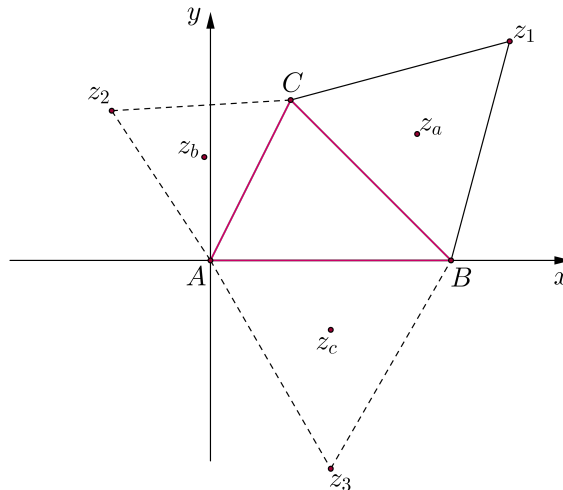


Figura 2.11: Triângulos equiláteros construídos sob os lados do triângulo  $ABC$  e seus respectivos baricentros

Os complexos  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  são os afixos dos vértices dos triângulos equiláteros construídos sob os lados do triângulo  $ABC$  e  $z_a$ ,  $z_b$  e  $z_c$  são os afixos para os respectivos baricentros  $G_a$ ,  $G_b$  e  $G_c$  desses triângulos como ilustrado na figura 2.11. Sejam  $w_a$ ,  $w_b$  e  $w_c$  os afixos dos respectivos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Assim escreve-se as relações entre os pontos e seus respectivos afixos:  $A = (0,0) \Leftrightarrow w_a = 0 + 0i$ ,  $B = (1,0) \Leftrightarrow w_b = 1 + 0i$  e  $C = (a,b) \Leftrightarrow c = a + bi$  e entre os vetores e complexos conforme equação 2.11:  $\overrightarrow{CB} = w_b - w_c = (1-a) - bi$ ,  $\overrightarrow{AC} = w_c - w_a = a + bi$  e  $\overrightarrow{BA} = w_a - w_b = -1 + 0i$ , que serão usados na demonstração. Tal demonstração consiste em encontrar os baricentros  $G_a$ ,  $G_b$  e  $G_c$  e a seguir atestar que estes são vértices de um triângulo equilátero.

Para encontrar o baricentro  $z_a$  do triângulo equilátero construído sob o lado  $BC$  do triângulo  $ABC$ , emprega-se as propriedades do triângulo equilátero onde se verifica que o ângulo formado entre  $\overrightarrow{CB}$  e  $\overrightarrow{CG_a}$  mede  $\frac{\pi}{6}$  e ainda,  $|\overrightarrow{CG_a}| = \frac{2}{3}h$ , onde  $h$  é a altura do triângulo equilátero, isto é,  $h = \frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{CB}|$ .

Desta forma, ao rotacionar em  $\frac{\pi}{6}$  o vetor  $\overrightarrow{CB}$  e após, multiplicar por  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , encontra-se o vetor  $\overrightarrow{CG_a}$  (Figura 2.12),

$$\overrightarrow{CG_a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \overrightarrow{CB} \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}.$$

Substituindo os afixos dos respectivos pontos conforme equação 2.11, tem-se que:

$$z_a = (a + bi) + \frac{\sqrt{3}}{3} [(1-a) - bi] \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \left( \frac{3 + 3a + b\sqrt{3}}{6} \right) + \left( \frac{3b + (1-a)\sqrt{3}}{6} \right) i.$$



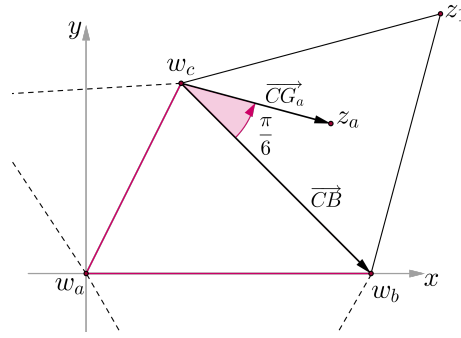


Figura 2.12:  $\mathbf{CG}_a = \frac{\sqrt{3}}{3} \mathbf{CB} \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}$

Procedendo de modo análogo encontra-se para  $z_b$  e  $z_c$ :

$$z_b = \left( \frac{3a - b\sqrt{3}}{6} \right) + \left( \frac{3b + a\sqrt{3}}{6} \right) i \quad \text{e} \quad z_c = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} i.$$

Encontrados os afixos dos pontos que são baricentros dos triângulos equiláteros construídos, resta a confirmação de que o triângulo  $G_a G_b G_c$  é equilátero. Para isto, basta verificar que ao rotacionar de  $\frac{\pi}{3}$  o vetor  $\overrightarrow{G_a G_b}$  em torno de sua origem, obtém-se  $\overrightarrow{G_a G_c}$  (Figura 2.12).

Seja  $X$  o ponto encontrado após a rotação de  $\frac{\pi}{3}$  do vetor  $\overrightarrow{G_a G_b}$  em torno de sua origem, então

$$\overrightarrow{G_a X} = \overrightarrow{G_a G_b} \left( \operatorname{cis} \frac{\pi}{3} \right). \quad (2.12)$$

Sendo  $z_x$  o afixo do ponto  $X$  e substituindo na equação 2.12 os afixos dos respectivos pontos de acordo com a equação 2.11, vem que

$$z_x = \left( \frac{3 + 3a + b\sqrt{3}}{6} + \frac{3b + (1-a)\sqrt{3}}{6} i \right) + \left( -\frac{3a + b\sqrt{3}}{6} + \frac{a\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 3b}{6} i \right),$$

portanto  $z_x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} i$  o que implica em  $X = G_c$ . Logo verifica-se que  $G_b G_a G_c$  é equilátero (Figura 2.13).

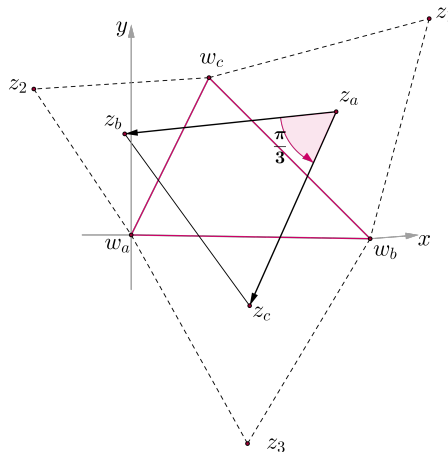


Figura 2.13:  $\mathbf{G}_a \mathbf{G}_c = \mathbf{G}_a \mathbf{G}_b \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$ .  $\Delta G_a G_b G_c$  é equilátero

### 2.4.2 O Problema do Quadrado

O resultado geométrico a seguir, enunciado em forma de teorema, foi retirado de uma questão de prova (AV1-MA13) aplicada aos alunos, no ano 2012, no Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT (Figura 2.14).

Questão 2. (pontuação: 2)

Quadrados foram construídos sobre os lados de um paralelogramo como mostra a figura abaixo. Mostre que os centros desses quatro quadrados são vértices de outro quadrado.

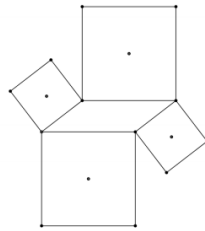


Figura 2.14: Avaliação 1 - 2012/2 Geometria 1

**Teorema 3.** *Sobre os lados de um paralelogramo qualquer, constroem-se quadrados exteriores, então os centros dos quatro quadrados construídos são vértices de um quadrado.*

Tome-se um sistema de coordenadas cartesianas tal que o vértice  $A$  do paralelogramo coincida com a origem e o vértice  $B$  esteja sob o eixo  $Ox$ . Além disso, sem perda de generalidade, escolhe-se como unidade de medida:  $\overline{AB} = 1$ . Seja  $z = a + bi$  o afixo do vértice  $D$ , o vértice  $C$  fica determinado pela propriedade da soma de números complexos, isto é  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = 1 + z = (a + 1) + bi$ . Além disso os afixos de  $A$  e  $B$ , por construção, são respectivamente  $z_a = 0$  e  $z_b = 1$ . (Figura 2.15).

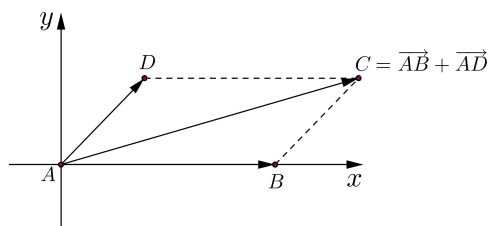


Figura 2.15: Paralelogramo  $ABCD$  no Plano conforme escolha do Sistema Cartesiano.  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

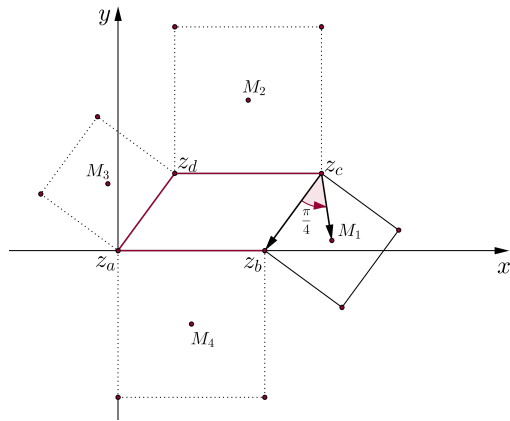
Seja  $M_1$  o centro do quadrado construído sob o lado  $\overline{BC}$  e seu afixo dado por  $z_1$ . Pelas propriedades do quadrado, seu centro é o ponto médio da diagonal, isto é,  $|\overrightarrow{CM_1}| = \frac{\sqrt{2}}{2}|\overline{BC}|$ , além disso  $\widehat{BCM_1} = \frac{\pi}{4}$  (Figura 2.16(a)). Com isso  $M_1$  é tal que  $\overrightarrow{CM_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{CB} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$ .

Substituindo os respectivos afixos, conforme equação 2.11, encontra-se  $M_1$ :

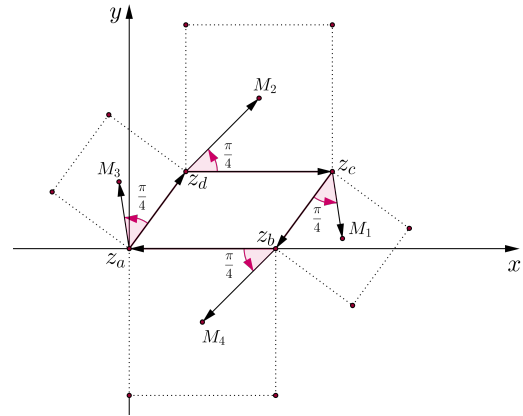
$$z_1 = (a + 1 + bi) + (-a - bi) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right) \Leftrightarrow z_1 = \left( \frac{a+b+2}{2} \right) + \left( \frac{b-a}{2} \right) i \Leftrightarrow M_1 = \left( \frac{a+b+2}{2}, \frac{b-a}{2} \right).$$

Procedendo de maneira análoga para encontrar  $M_2$ ,  $M_3$  e  $M_4$  (Figura 2.16(b)), tem-se as seguintes equações e respectivas soluções:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DM_2} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{DC} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \Rightarrow M_2 = \left( \frac{2a+1}{2}, \frac{2b+1}{2} \right), \\ \overrightarrow{AM_3} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AD} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \Rightarrow M_3 = \left( \frac{a-b}{2}, \frac{a+b}{2} \right) \text{ e} \\ \overrightarrow{BM_4} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{BA} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \Rightarrow M_4 = \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right).\end{aligned}\tag{2.13}$$



$$(a) \quad \overrightarrow{CM_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{CB} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$$



(b)  $M_2, M_3, M_4$  encontrados conforme equação 2.13

Figura 2.16: Rotação seguida de contração para encontrar os centros dos quadrados construídos sobre os lados do paralelogramo

A prova de que  $M_1 M_2 M_3 M_4$  são vértices de um quadrado (Figura 2.17(c)) segue das rotações em  $\frac{\pi}{2}$  de  $\overrightarrow{M_3 M_4}$  e de  $\overrightarrow{M_4 M_1}$ , em torno das suas respectivas origens, resultarem respectivamente em  $\overrightarrow{M_3 M_2}$  e  $\overrightarrow{M_4 M_3}$ , pois assim conclui-se que  $|\overrightarrow{M_2 M_3}| = |\overrightarrow{M_3 M_4}| = |\overrightarrow{M_4 M_1}|$ , além de dois ângulos consecutivos de  $\frac{\pi}{2}$ .

Rotação em  $\frac{\pi}{2}$  de  $\overrightarrow{M_3 M_4}$  em torno da sua origem (Figura 2.17(a)):

$$\overrightarrow{M_3 M_4} \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} = (z_4 - z_3)i = \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right) - \left( \frac{a-b}{2} + \frac{a+b}{2}i \right) \right] i = M_2 - M_3 = \overrightarrow{M_3 M_2}.$$

Rotação em  $\frac{\pi}{2}$  de  $\overrightarrow{M_4 M_1}$  em torno da origem (Figura 2.17(b)):

$$\overrightarrow{M_4 M_1} \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} = (z_1 - z_4)i = \left[ \left( \frac{a+b+2}{2} + \frac{b-a}{2}i \right) - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right) \right] i = M_3 - M_4 = \overrightarrow{M_4 M_3}.$$

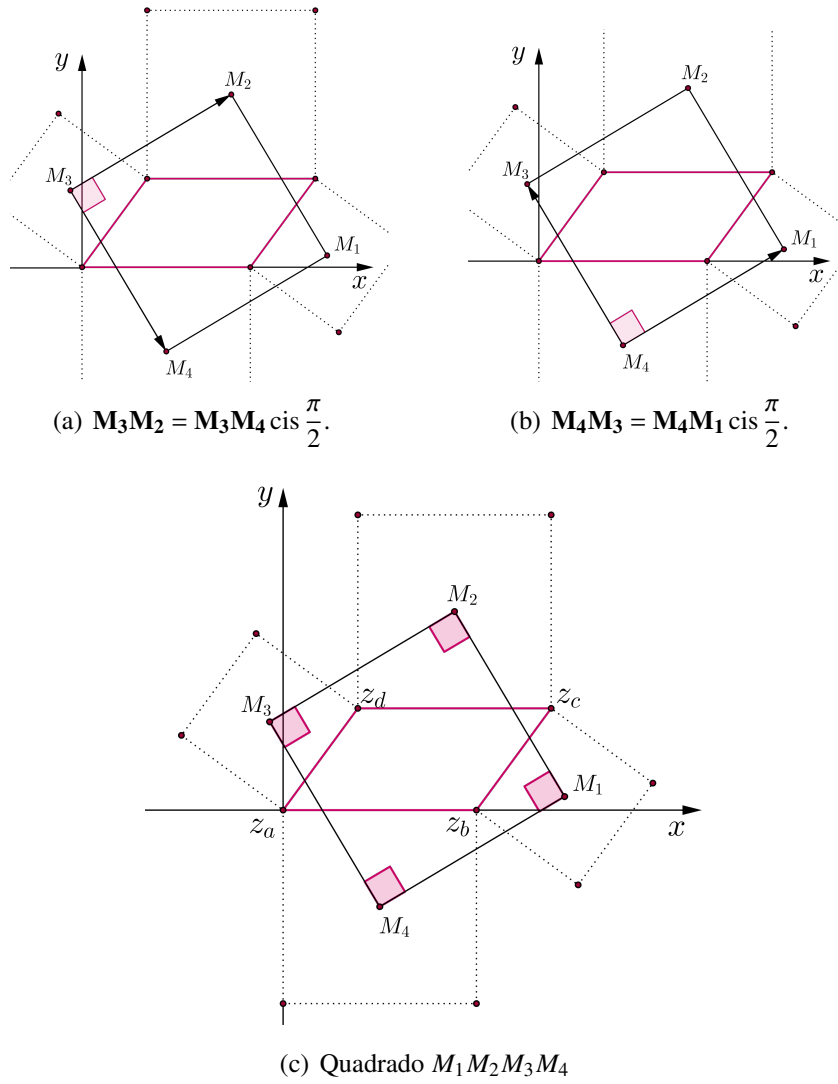


Figura 2.17: Figuras relativas a demonstração do Teorema 3

## 3 PROPOSTAS DE ATIVIDADES NO ENSINO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

As propostas apresentadas neste capítulo direcionam-se ao professor de matemática do 3º ano do Ensino Médio e tem por objetivo ampliar as formas de abordagem no ensino do tópico de números complexos enfatizando sua representação geométrica e as conexões com a geometria analítica .

Para tanto, foram abordados quatro problemas de geometria e expostas suas soluções usando números complexos, de modo distinto ao que é feito hoje em dia. Habitualmente tais problemas são resolvidos através das equações da geometria analítica. A quarta proposta, por exemplo, trata do célebre problema de encontrar um tesouro perdido, sendo que já foi

várias vezes apresentado para alunos de licenciatura ou em cursos de formação continuada para professores. Não somente não ocorre aos cursistas usar complexos para resolver este problema, como os mesmos ficam extremamente surpreendidos em saber que números complexos tenham alguma aplicação “real” (CARNEIRO, 2004, p.9).

Adotar a abordagem geométrica no ensino de números complexos não significa excluir sua álgebra, consiste em dar significado aos números complexos, mostrar sua eficiência na solução de problemas de rotação no plano, uma ferramenta eficaz no campo da geometria.

### 3.1 PROPOSTA 1 - Representando o Produto de Complexos no Plano

**3.1.1 Dados os números complexos  $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  e  $z_2 = 2 + 2i$  faça os seguintes passos:**

- a. Calcule o número complexo  $z_3$ , tal que  $z_3 = z_1 \cdot z_2$ ;
- b. Marque no plano complexo os pontos  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ , respectivas imagens dos números complexos  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$ ;
- c. Represente no plano complexo os vetores  $\overrightarrow{OP_1}$ ,  $\overrightarrow{OP_2}$  e  $\overrightarrow{OP_3}$ ;
- d. Usando um transferidor, verifique os argumentos dos números complexos  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  representados no plano e o ângulo formado entre os vetores  $\overrightarrow{OP_2}$  e  $\overrightarrow{OP_3}$ ;
- e. Escreva os números complexos  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  na sua forma polar e observe que o argumento de  $z_3$  é igual a soma dos argumentos de  $z_1$  e  $z_2$ ;

**Solução:**

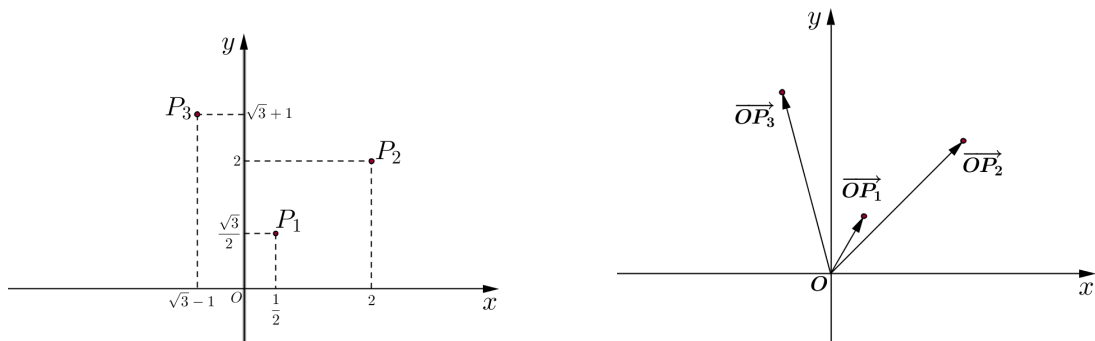
a. Encontro de  $z_3$ , produto entre  $z_1$  e  $z_2$ :

$$z_1 \cdot z_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot (2 + 2i) = (1 - \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})i.$$

b. Representação dos números complexos  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  como pontos do plano (Figura 3.18(a));

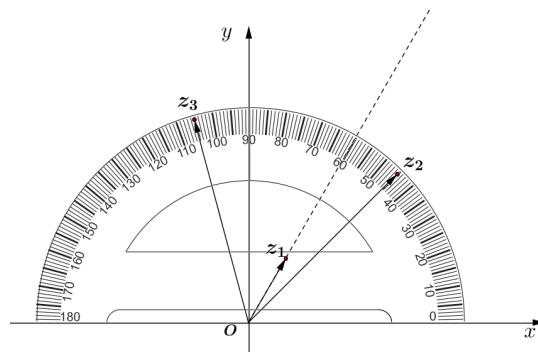
c. Representação dos números complexos  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  como vetores no plano (Figura 3.18(b));

d. Obtenção da amplitude dos argumentos de  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  com uso do transferidor (Figura 3.18(c)):



(a) Pontos  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  representados no plano complexo

(b) Vetores  $\overrightarrow{OP_1}$ ,  $\overrightarrow{OP_2}$  e  $\overrightarrow{OP_3}$  representados no plano



(c) Uso do transferidor para medir os argumentos de números complexos representados no plano

Figura 3.18: Figuras relativas aos itens b, c e d da Proposta 1

e. Para encontrar a forma polar, é necessário encontrar os respectivos módulos e argumentos de  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$ .

$$|z_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1, |z_2| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \text{ e } |z_3| = \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2 + (1 + \sqrt{3})^2} = 2\sqrt{2}.$$

Sejam  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$  os argumentos dos respectivos complexos  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$ . Tais argumentos são tais que  $\cos \theta_1 = \frac{1}{2}$  e  $\sin \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $\cos \theta_2 = \frac{2}{2\sqrt{2}}$  e  $\sin \theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$ ;  $\cos \theta_3 = \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\right)$  e

$$\sin \theta_3 = \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right), \text{ portanto } \theta_1 = \frac{\pi}{3}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{4} \text{ e } \theta_3 = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}.$$

Portanto usando a notação adotada neste trabalho,  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  são escritos na forma polar como  $z_1 = \text{cis } \frac{\pi}{3}$ ,  $z_2 = 2\sqrt{2} \text{ cis } \frac{\pi}{4}$  e  $z_3 = z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2} \text{ cis } \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$ .

### 3.2 PROPOSTA 2 - Construindo Triângulos Equiláteros e Quadrados a partir de um segmento dado

#### 3.2.1 Determinar o vértice $C$ do triângulo equilátero $ABC$ , onde são dados os vértices

$A = (-1, 2)$  e  $B = (1, -1)$ .

Para esse problema existem duas soluções  $C_1$  e  $C_2$ . (Figura 3.19). Consideram-se os vetores  $\overrightarrow{AC_1}$  e  $\overrightarrow{AB}$ , e pelas propriedades de triângulo equilátero, encontra-se  $C_1$ , rotacionando  $\overrightarrow{AB}$  em  $\frac{\pi}{3}$ , em torno de sua origem, ou seja,  $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$ .

Com a origem do sistema de coordenadas em  $O = (0, 0)$ , tem-se

$$\overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OA} = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right).$$

ou simplesmente, substituindo  $z_a, z_b$  e  $z_1$  os afixo dos respectivos vértices  $A, B$  e  $C_1$ , conforme equação 2.11:

$$z_1 = z_a + (z_b - z_a) \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

o que resulta em

$$z_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1+2\sqrt{3}}{2}i.$$

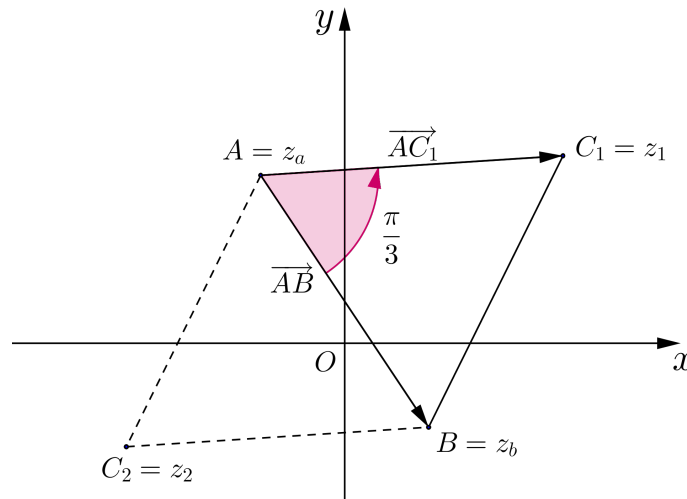


Figura 3.19:  $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$

Procede-se de modo análogo para encontrar o vértice  $C_2$ .

Obviamente, assim como todos os problemas em matemática, esta não é a única maneira de encontrar  $C_1$ .  $C_1$  poderia ser encontrado ao rotacionar em  $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$  o vetor  $\overrightarrow{BA}$  encontrando assim o vetor  $\overrightarrow{BC_1}$ .

Um outro método para resolver o problema, habitualmente o ensinado, via geometria analítica, consiste em encontrar a intersecção entre a circunferência com centro em  $A$  ou  $B$  com raio igual a distância entre os pontos dados e a reta mediatriz do segmento  $\overline{AB}$ . Porém,

para resolver através deste procedimento é necessário igualar as equações da circunferência e da reta tornando-o muito mais trabalhoso.

### 3.2.2 Determinar os vértices $C$ e $D$ do quadrado $ABCD$ , considerando os mesmos pontos $A$ e $B$ da proposta anterior.

Semelhante ao problema anterior, este também possui duas soluções  $C_1$  e  $D_1$  ou  $C_2$  e  $D_2$ . (Figura 3.20). Sejam  $z_a, z_b, z_c$  e  $z_d$  os afixos dos respectivos pontos  $A, B, C_1$  e  $D_1$ , pode-se escrever as seguintes relações que serão usadas adiante:

$$\begin{cases} A = (-1, 2) \Leftrightarrow z_a = -1 + 2i \\ B = (1, -1) \Leftrightarrow z_b = 1 - i \\ \overrightarrow{AB} = z_b - z_a = 2 - 3i \\ \overrightarrow{BA} = z_a - z_b = -2 + 3i \end{cases}$$

Pelas propriedades do quadrado,  $D_1$  é encontrado rotacionando em  $\frac{\pi}{2}$  o vetor  $\overrightarrow{AB}$  em torno de sua origem, isto é

$$\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{AB} \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}. \quad (3.14)$$

Substituindo na equação 3.14 os afixos conforme equação 2.11 obtém-se

$$z_d = z_a + (z_b - z_a)i \Rightarrow z_d = 2 + 4i.$$

Portanto a imagem de  $z_d$  é o vértice  $D_1 = (2, 4)$  do quadrado.

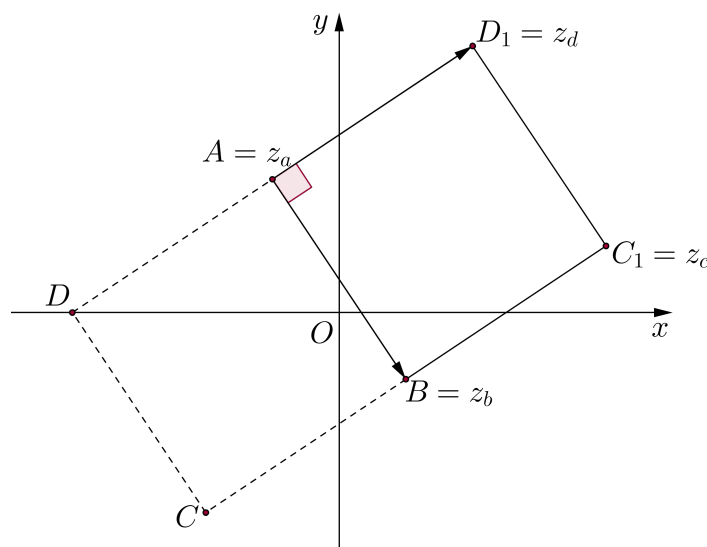


Figura 3.20:  $\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{AB} \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$

Para encontrar  $C_1$  procede-se de maneira análoga, tendo bem mais possibilidades, pois agora são conhecidos três dos quatro vértices do quadrado. Abaixo estão algumas das possíveis



equações que podem ser usadas para encontrar  $C_1$ :

$$\begin{cases} \overrightarrow{D_1C_1} = \overrightarrow{DA} \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow z_c = z_d + (z_a - z_d) \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}, \\ \overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BA} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow z_c = z_b + (z_a - z_b) \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \text{ e } . \\ \overrightarrow{AC} = \sqrt{2} \overrightarrow{AB} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow z_c = z_a + \sqrt{2}(z_b - z_a) \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

A última equação decorre do fato de o ponto  $C_1$  estar na mesma direção da diagonal do quadrado e das propriedades do quadrado, onde  $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2} |\overrightarrow{AB}|$ .

### 3.3 PROPOSTA 3 - Verificação de um caso particular do Teorema de Napoleão

**3.3.1 Determine os baricentros  $G_1$ ,  $G_2$  e  $G_3$ , dos triângulos equiláteros construídos externamente sob os lados do triângulo  $ABC$ , sendo dados os seus vértices  $A = (0, 0)$ ,  $B = (6, 0)$  e  $C = (2, 4)$ , a seguir verifique que o triângulo  $G_1G_2G_3$  é equilátero.**

Para encontrar o baricentro  $G_1$ , pode-se proceder da seguinte forma: encontrar primeiramente, conforme Proposta (3.2.1), o vértice  $D$  do triângulo equilátero  $BCD$  construído sob o lado  $BC$  em seguida, usa-se um resultado conhecido da Geometria Analítica para encontrar o baricentro  $G_1 = \frac{B+C+D}{3}$ . Porém, pelas propriedades do triângulo equilátero, verifica-se que o ângulo formado entre  $\overrightarrow{CB}$  e  $\overrightarrow{CG_1}$  mede  $\frac{\pi}{6}$  e ainda,  $|\overrightarrow{CG_1}| = \frac{2}{3}h$ , onde  $h$  é a altura do triângulo equilátero, isto é,  $h = \frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{CB}|$ . Desta forma, para encontrar  $\overrightarrow{CG_1}$  basta rotacionar em  $\frac{\pi}{6}$  o vetor  $\overrightarrow{CB}$  (Figura 3.21(a)), em seguida multiplicar por  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , isto é,

$$\overrightarrow{CG_1} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \overrightarrow{CB} \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}. \quad (3.15)$$

Sejam  $z_1$ ,  $z_c$  e  $z_b$  os afixos associados respectivamente a  $G_1$ ,  $C$  e  $B$ , tem-se substituindo na equação 3.15 de acordo com a equação 2.11:

$$z_1 = z_c + \frac{\sqrt{3}}{3}(z_b - z_c) \left( \operatorname{cis} \frac{\pi}{6} \right) \Rightarrow z_1 = \left( 4 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) + \left( 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) i.$$

Portanto o baricentro do triângulo  $BCD$  é  $G_1 = \left( 4 + \frac{2\sqrt{3}}{3}, 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \right)$ , ou seja, a imagem de  $z_1$ .

Analogamente, encontram-se os baricentros  $G_2$  e  $G_3$ :

$$G_2 = \left( 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}, 2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \text{ e } G_3 = (3, -\sqrt{3})$$

Para a segunda parte do problema, verificar que o triângulo  $G_1G_2G_3$  é equilátero, pode ser realizada conferindo que  $|G_2 - G_1| = |G_3 - G_2| = |G_1 - G_3|$ , ou que dois ângulos internos medem

$\frac{\pi}{3}$ , ou ainda que o ângulo entre dois lados congruentes mede  $\frac{\pi}{3}$ . A última opção, dispensa muitos cálculos, sendo suficiente realizar apenas uma rotação de  $\frac{\pi}{3}$  (Figura 3.21(b)).

O triângulo  $G_1G_2G_3$  é equilátero pois  $|\overrightarrow{G_1G_2}| = |\overrightarrow{G_1G_3}|$  e  $\widehat{G_2G_1G_3} = \frac{\pi}{3}$ .

Com efeito, ao rotacionar em  $\frac{\pi}{3}$  o vetor  $\overrightarrow{G_1G_2}$  obtém-se um vetor de mesmo módulo  $\overrightarrow{G_1X}$ , tal que

$$\overrightarrow{G_1X} = \overrightarrow{G_1G_2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}.$$

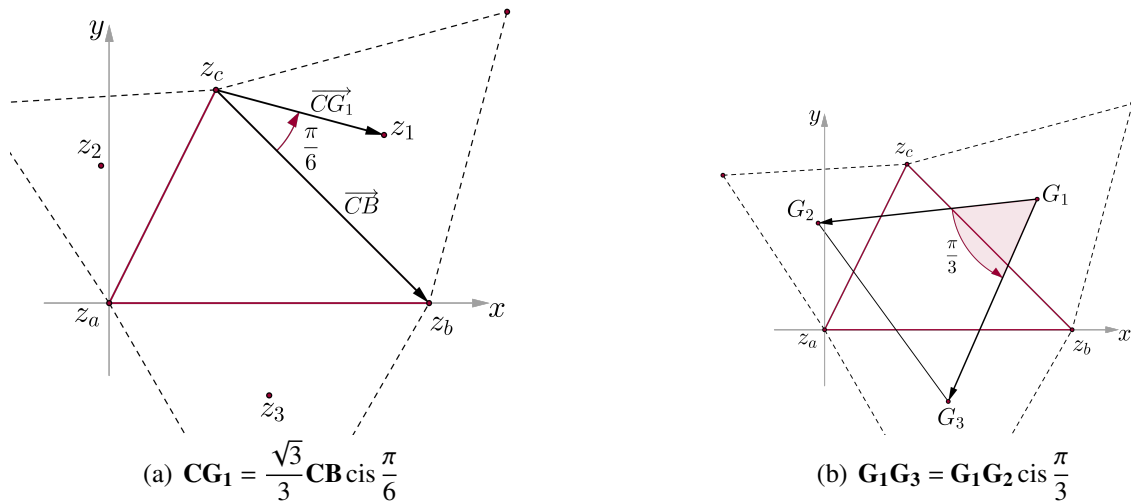


Figura 3.21: Representação geométrica das rotações aplicadas na Proposta 3

Sejam  $z_1, z_2$  e  $z_x$  os afixos correspondentes respectivamente aos pontos  $G_1, G_2$  e  $X$ , tem-se pela equação 2.11 que

$$z_x = z_1 + (z_2 - z_1) \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 3 - \sqrt{3}i,$$

ou seja,  $X = (3, -\sqrt{3}) = G_3$ .

Pode-se, ao final desta proposta, levantar a questão com os alunos se este resultado se repetirá sempre para qualquer triângulo  $ABC$  dado. Após discussões sobre o assunto, lembrar os iniciantes que para afirmar que um resultado na matemática sempre será válido, deve-se fazer a demonstração do mesmo.

Este resultado é um caso particular do Teorema de Napoleão apresentado na seção 2.4.1, e demonstrado usando as rotações via produto de números complexos, podendo sem dificuldade, ser apresentado aos alunos como forma de enriquecimento do saber matemático.

### 3.4 PROPOSTA 4 - Verificação de um caso particular do Problema do Quadrado

#### 3.4.1 Determinar os centros $M_1, M_2, M_3$ e $M_4$ dos quadrados construídos externamente sob os lados do paralelogramo $ABCD$ , sendo dados os pontos $A = (0,0)$ , $B = (6,0)$ e

$C = (8, 4)$ . **Verificar que  $M_1M_2M_3M_4$  é um quadrado.**

Primeiramente, pelas propriedades de paralelogramo e da soma de vetores, encontra-se o vértice desconhecido  $D$  (Figura 3.22(a)). Sendo  $z_a, z_b, z_c$  e  $z_d$  os afixos dos respectivos vértices  $A, B, C$  e  $D$  do paralelogramo, tem-se que

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow z_d = z_b + (z_a - z_b) + (z_c - z_b) \Leftrightarrow z_d = 2 + 4i,$$

ou seja,  $D = (2, 4)$ .

Tal problema pode ser resolvido encontrando um dos vértices desconhecidos do quadrado e em seguida o ponto médio da diagonal por este vértice. Porém, de uma maneira mais “econômica”, encontra-se o centro do quadrado usando as propriedades geométricas desta figura.

Seja  $M_1$  o centro do quadrado construído sob o lado  $\overline{BC}$  do paralelogramo e recordando das propriedades do quadrado relevantes neste momento, pode-se escrever que  $|\overrightarrow{CM_1}| = \frac{\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{CB}|$ , além disso  $M_1$  está na mesma direção de sua diagonal, isto é,  $\widehat{BCM_1} = \frac{\pi}{4}$  (Figura 3.22(b)). Este problema trata de rotações e pode ser resolvido utilizando o produto de complexos a partir da seguinte equação 3.16:

$$\overrightarrow{CM_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{CB} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}. \quad (3.16)$$

Assim, fazendo uma operação de rotação em  $\frac{\pi}{4}$  de  $\overrightarrow{CB}$  em torno da sua origem, e uma contração de  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , encontra-se  $M_1$ .

Denotando-se por  $z_1$  o afixo relativo ao centro  $M_1$ , e substituindo os respectivos afixos dos pontos em questão na equação 3.16, segue que

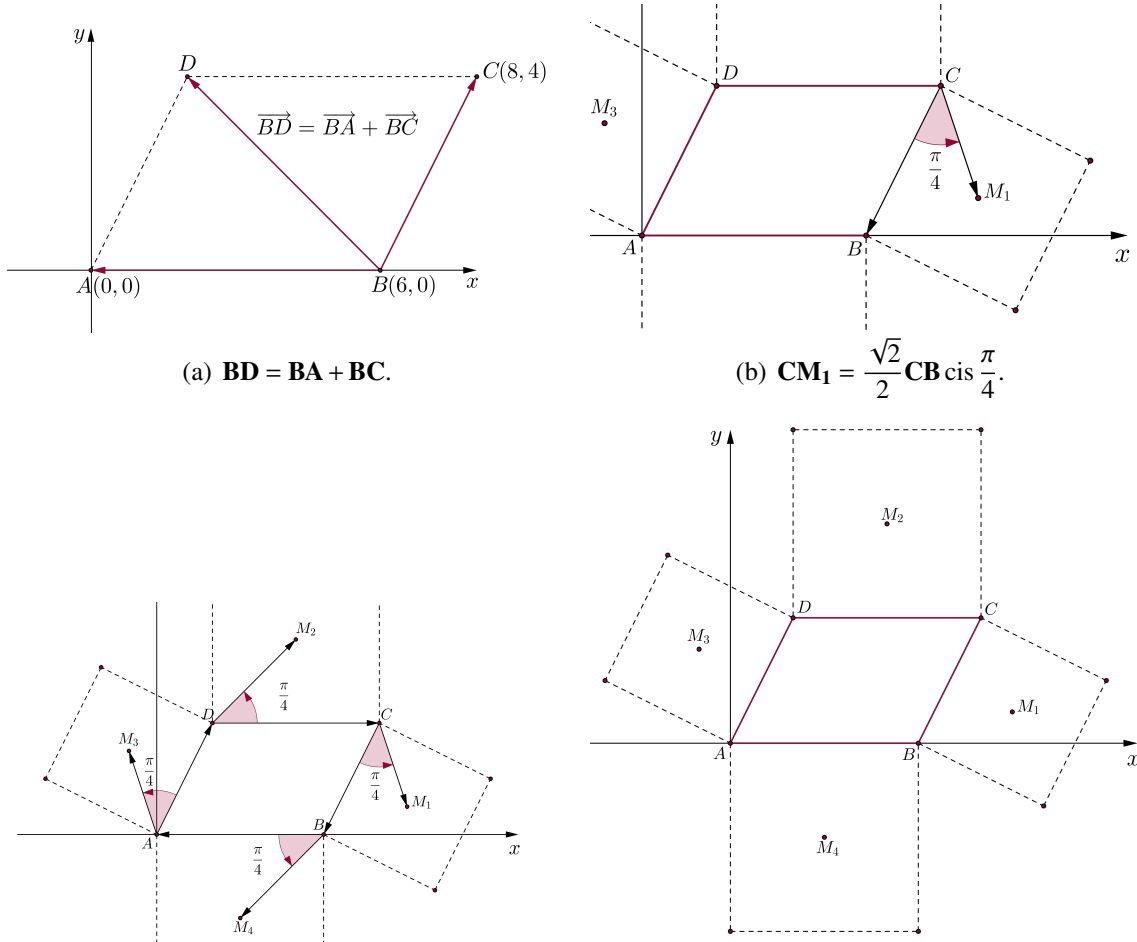
$$z_1 = z_c + \frac{\sqrt{2}}{2}(z_b - z_c) \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow z_1 = 9 + i.$$

Portanto,  $M_1 = (9, 1)$ .

Procedendo analogamente, encontram-se os vértices  $M_2, M_3$  e  $M_4$  (Figura 3.22(c)):

$$z_2 = 5 + 7i \Rightarrow M_2 = (5, 7) \quad , \quad z_3 = -1 + 3i \Rightarrow M_3 = (-1, 3) \quad \text{e} \quad z_4 = 3 - 3i \Rightarrow M_4 = (3, -3).$$

Para verificar que  $M_1M_2M_3M_4$  é um quadrado (Figura 3.22(d)), é suficiente dois ângulos consecutivos retos e que os lados que formam esses ângulos sejam congruentes.



(c) Rotações para encontrar os centros  $M_1, M_2, M_3$  e (d) Centros dos quadrados construídos sob os lados do paralelogramo  $ABCD$ .

Figura 3.22: Representação geométrica da soma e produto de vetores aplicados na Proposta 3

Seja  $X$  o ponto encontrado ao rotacionar em  $\frac{\pi}{2}$  o vetor  $\overrightarrow{M_3M_4}$  em torno de sua origem (Figura 3.23(a)). Por construção  $|\overrightarrow{M_3M_4}| = |\overrightarrow{M_3X}|$  e  $\widehat{M_4M_3X} = \frac{\pi}{2}$ . Seja  $z_x$  o afixo de  $X$ , segue que

$$\overrightarrow{M_3X} = \overrightarrow{M_3M_4} \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow z_x = z_3 + (z_4 - z_3)i = 5 + 7i,$$

e assim  $X = (5, 7)$ .

Portanto,  $z_x = z_2$ , isto é  $X = M_2$ .

Analogamente, seja  $Y$  o ponto encontrado ao rotacionar em  $\frac{\pi}{2}$  o vetor  $\overrightarrow{M_2M_3}$  em torno de sua origem (Figura 3.23(b)). Se  $Y = M_1$  então pode-se concluir que  $M_1M_2M_3M_4$  é um quadrado, pois  $|\overrightarrow{M_1M_2}| = |\overrightarrow{M_2M_3}| = |\overrightarrow{M_3M_4}|$  e  $\widehat{M_1M_2M_3} = \widehat{M_2M_3M_4} = \frac{\pi}{2}$ .

Com efeito, seja  $z_y$  o afixo de  $Y$ , segue que

$$\overrightarrow{M_2Y} = \overrightarrow{M_2M_3} \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow z_y = z_2 + (z_3 - z_2)i = 9 + i,$$

e assim  $Y = (9, 1) = M_1$ .

Logo  $M_1M_2M_3M_4$  é um quadrado (Figura 3.23(c)).

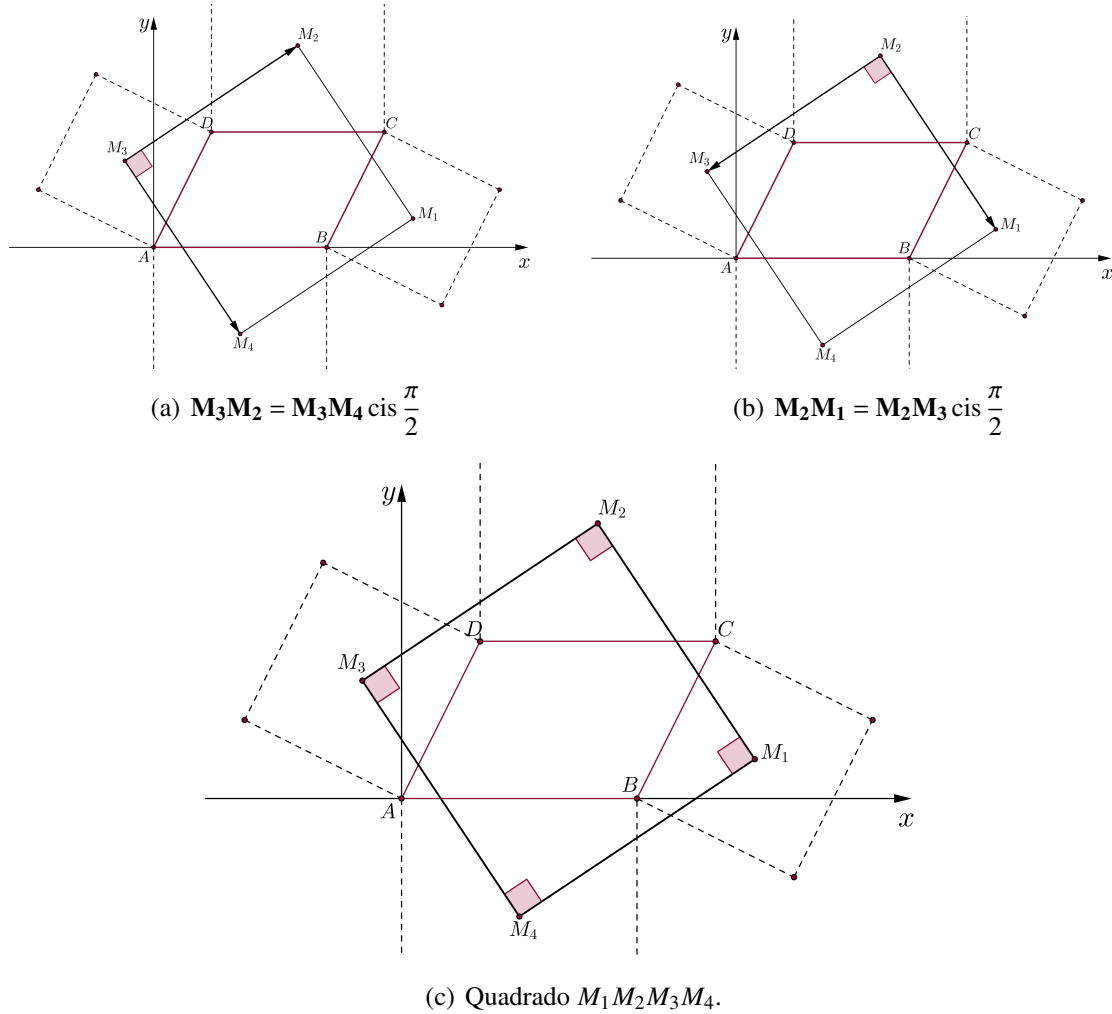


Figura 3.23: Rotações de  $\frac{\pi}{2}$  aplicadas aos vetores  $\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4$  e  $\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3$

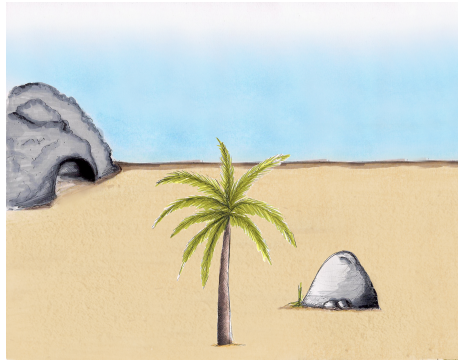
Este é um problema particular para um resultado da geometria. O enunciado e sua demonstração via rotação de vetores através do produto de números complexos é abordada na Seção 2.4.2.

### 3.5 PROPOSTA 5 - Mapa do tesouro. É possível encontrar o tesouro?

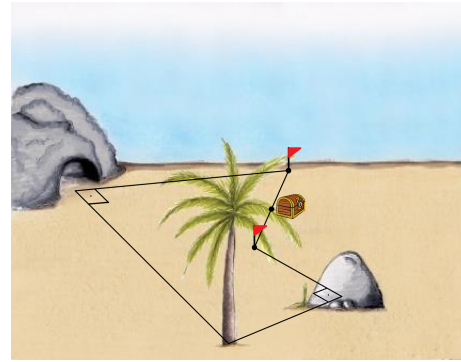
Um antigo mapa dava instruções para localizar um tesouro enterrado em certa ilha (Figura 3.24(a))...

“Ande da palmeira até a entrada da caverna. Lá chegando, vire  $90^\circ$  à direita e caminhe o mesmo número de passos. No fim desse trajeto, coloque uma marca e retorne à palmeira. Agora, caminhe em direção à pedra. Lá chegando, vire  $90^\circ$  à esquerda e caminhe o mesmo número de passos que foram dados da palmeira à pedra. Coloque uma marca no fim desse trajeto. O tesouro está no ponto médio dessas marcas (Figura 3.24(b))”.

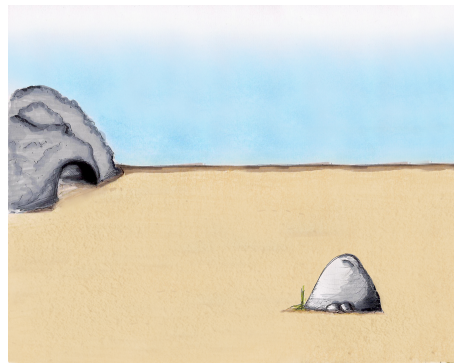
Quando chegamos à ilha, a palmeira não existia mais (Figura 3.24(c)). Como fazer para achar o tesouro?



(a) Ilha do Tesouro



(b) Passos para encontrar o tesouro escondido



(c) Ilha do tesouro escondido sem a palmeira

Figura 3.24: Instruções do mapa para encontrar o tesouro enterrado na ilha

Primeiramente, observa-se que este problema trata de rotações no plano, portanto pode-se encontrar o tesouro usando a multiplicação de complexos. Para isso, escolhe-se um sistema de coordenadas  $xOy$  (Figura 3.25), de modo que o ponto onde está a entrada da caverna, coincida com a origem  $O = (0,0)$  e o ponto onde está a pedra coincida com o eixo  $Ox$ , isto é,  $P = (x,0)$ . Toma-se um ponto  $Q = (a,b)$  qualquer da ilha para a palmeira e seguem-se as instruções do mapa lembrando que, ao virar  $90^\circ$  para a direita equivale a multiplicar por  $\text{cis } \frac{\pi}{2} = i$  e o giro de  $90^\circ$  para esquerda equivale a multiplicar por  $\text{cis } \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$ .

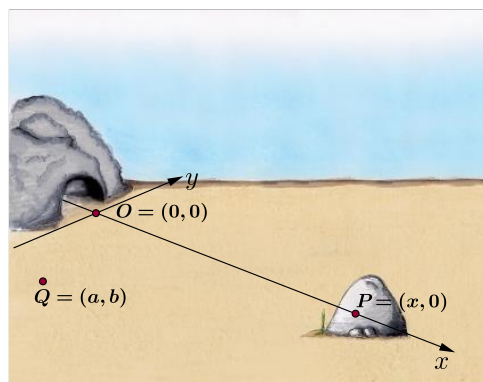


Figura 3.25: Sistema de coordenadas escolhido convenientemente na ilha do tesouro

**Passo 1** – Figura 3.26(a) – O primeiro passo consiste em andar da palmeira, ponto  $Q$ , até a entrada da caverna, ponto  $O$ , girar  $90^\circ$  à direita, caminhar o mesmo número de passos e marcar o lugar encontrado. Chamando de  $M_1$  esta primeira marca,  $\overrightarrow{OM_1}$  é obtido ao girar em  $\frac{\pi}{2}$  o vetor  $\overrightarrow{OQ}$ , pois  $|\overrightarrow{OM_1}| = |\overrightarrow{OQ}|$ . Seja  $z_1$  o afixo de  $M_1$ ,

$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OQ} \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \Rightarrow z_1 = (a + bi)i \Rightarrow z_1 = -b + ai,$$

então  $M_1 = (-b, a)$ .

**Passo 2** – Figura 3.26(b) – Para o segundo passo, partindo novamente da Palmeira, ponto  $Q$ , deve-se andar até a pedra, ponto  $P$ , girar  $90^\circ$  a esquerda, caminhar o mesmo número de passos e marcar o lugar encontrado. Chamando-se de  $M_2$  a segunda marca, obtém-se o vetor  $\overrightarrow{PM_2}$  girando em  $\frac{\pi}{2}$  o vetor  $\overrightarrow{PQ}$  em torno da sua origem no sentido horário. A equação que traduz esta passagem, com  $z_2$  o afixo de  $M_2$ , é

$$\overrightarrow{PM_2} = \overrightarrow{PQ} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow z_2 = x + 0i + (a - x + bi)(-i) \Rightarrow z_2 = (x + b) + (x - a)i,$$

então  $M_2 = (x + b, x - a)$ .

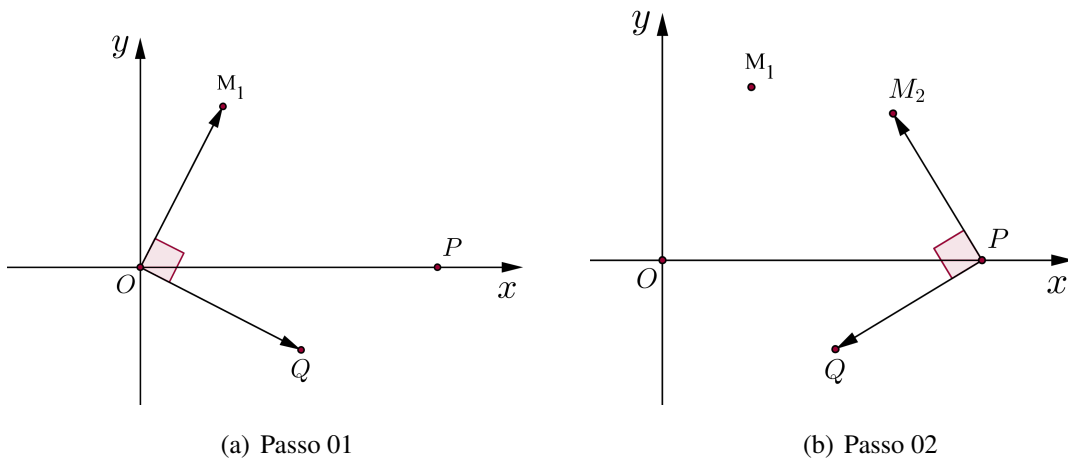


Figura 3.26: Encontro das duas primeiras marcas do Mapa do Tesouro

O último passo equivale a encontrar o ponto  $T$ , médio entre  $M_1$  e  $M_2$ , onde está o tesouro. (Figura 3.27). Chamando de  $z_t$  o afixo de  $T$ , tem-se que

$$z_t = \frac{M_1 + M_2}{2} \Rightarrow z_t = \frac{(-b + ai) + (x + b) + (x - a)i}{2} \Rightarrow z_t = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}i.$$

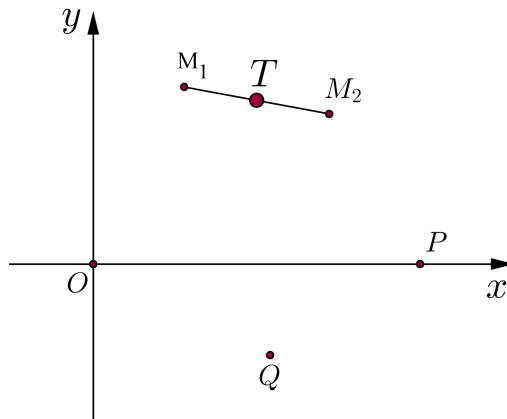


Figura 3.27:  $T = \frac{M_1 + M_2}{2}$ . Encontrando o Tesouro

Portanto  $T = \left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right)$ . Observa-se que as coordenadas de  $T$  não dependem das coordenadas de  $Q$ . Portanto pode-se concluir que a posição do tesouro não depende da posição da palmeira que já não existia mais na ilha.

A figura 3.28 mostra várias posições para a palmeira, ponto  $Q$ , sendo que o local do tesouro, ponto  $T$  permanece inalterado. Este fato pode ser explorado com os alunos, em uma aula em laboratório, usando *software* de geometria dinâmica, por exemplo o *GeoGebra*, para construir o problema e sua solução, movimentando o ponto  $Q$  conjecturando que a posição deste não altera a posição do ponto  $T$  onde está o tesouro.

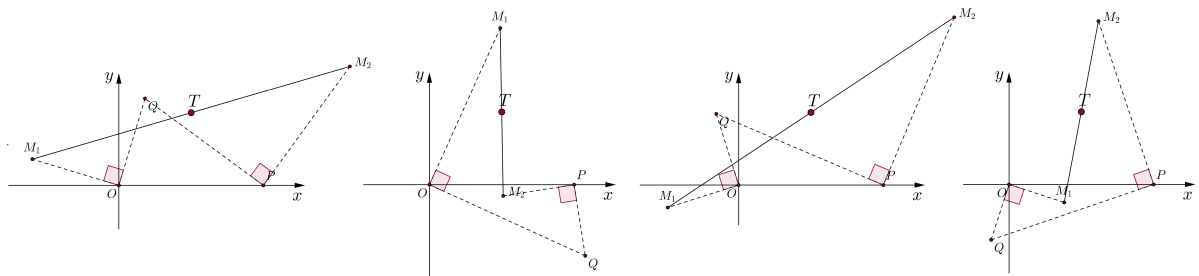


Figura 3.28: Posição do ponto  $Q$  não altera a posição do ponto  $T$

O problema desta proposta foi retirado do livro Trigonometria números complexos. Incentiva-se aos professores trabalhar problemas com esse perfil de teor investigativo que promove a busca da solução.

Recomenda-se que após encontrada a solução em sala de aula, seja feita uma aula prática na área livre da escola, marcando dois pontos, para a entrada da caverna e para a pedra, deixando os alunos seguirem as dicas do mapa e escolhendo qualquer ponto de partida, medindo com fita métrica seus passos, para então encontrar o local do tesouro escondido. Além disso, é proveitoso que o professor indague seus alunos sobre qual o melhor ponto a escolher para ser a palmeira, pois já que não depende desta escolha para encontrar o tesouro, pode-se encontrá-lo com menor número de passos.



## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Somente após 300 anos da descoberta dos números complexos, estes foram dotados de significado geométrico e assim, estabelecida sua cidadania plena. No desenvolvimento deste trabalho, verificou-se que este fato evidencia-se até hoje na forma de ensinar este conteúdo, pois nem mesmo as orientações curriculares para o Ensino Médio abordam as potencialidades das aplicações, quando os complexos são vistos na sua forma geométrica.

Portanto, cabe aos professores da Educação Básica, ao tratar deste conteúdo, abordar sua história, comentar sobre as suas aplicações em outras áreas do conhecimento e principalmente revelar aos alunos a versatilidade da representação geométrica do produto dos números complexos e as suas correlações de multiplicação complexa e rotações no plano no ensino médio deve ser incentivada.

Além disso, a utilização de *softwares* de geometria dinâmica podem facilitar a visualização e proporcionar uma maior interação dos alunos de Ensino Médio, que acostumados a resolver problemas que envolvem rotações, em geometria analítica, por meio de equações de circunferências e retas, julgarão de extrema relevância aprender que o produto de números complexos torna-se um facilitador desta tarefa.

Dessa forma, o ensino dos números complexos no Ensino Médio deve ser incentivado, pois além de estabelecer conexões com a geometria analítica conservando um importante mecanismo para operações de rotações no plano, é também um instrumento significativo na compreensão dos processos de construção dos saberes matemáticos, dando sentido a sua existência.

## REFERÊNCIAS

ARAGONA, J. e OLIVEIRA, O.R.B. **MAT 5714-FUNÇÕES ANALÍTICAS**. Rio de Janeiro: IME, 2014. Disponível em <<http://www.ime.usp.br/oliveira/ComplexosCap1.pdf>>. Último acesso em 15 ago. 2014.

ÁVILA, G. **Variáveis complexas e aplicações, 3a Edição**. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

BASTOS, R. e COSTA, E.A. **Colocando ordem nos Complexos**. Colloquium Exactarum, Volume 4, Número 1, 2012. Disponível em: <<http://revistas.unoeste.br/revistas/ojs/index.php/ce/article/viewArticle/662>>. Último acesso em 05 set. 2014.

BOYER, C.B. and PÉREZ, M.M. **Historia da Matemática**. São Paulo: Blucher, 2012.

CAMARGO, M.V.P e VRIESMAN, T.C. **A Evolução dos Números Complexos: História e Aplicações**. Paraná, 2012. Disponível em: <<http://tcconline.utp.br/wp-content/uploads//2012/08/A-EVOLUCAO-DOS-NUMEROS-COMPLEXOS-HISTORIA-E-APLICACOES.pdf>>. Último acesso em 15 ago. 2014.

CAON, F. **Números Complexos: inter-relação entre conteúdos e aplicações**. Ponta Grossa: UEPG/Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2013.

CARMO, M.P., MORGADO, A.C. e WAGNER, E. **Trigonometria e Números Complexos, 3a Edição**. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

CARNEIRO, J.P. **A Geometria e o Ensino dos Números Complexos**. Recife: VIII ENEM, 2004.

CHURCHILL, R.V. **Variáveis Complexas e suas Aplicações**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1980.

FREITAS, V.P. **ALGUNS TEOREMAS CLÁSSICOS DA GEOMETRIA SINTÉTICA E APLICAÇÕES**. Manaus: UFAM/Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2013.

HAHN, Liang-shin. **Complex numbers and geometry**. Cambridge University Press, 1994.

- HYGINO, H.D. e IEZZI, G. **Álgebra moderna, 4a Edição reform.** São Paulo: Atual, 2003.
- LIMA, E.L., CARVALHO, P.C.P., WAGNER, E e MORGADO, A.C. **A Matemática do Ensino Médio - volume 3.** Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- LOPES, A.C.M., CABRAL, V.P.G. e ALVES, F.J.C. **Números complexos na vida real: Uma abordagem sobre o ensino e algumas aplicações.** Pará: VII Encontro Paranaense de Educação Matemática. Pará, 2011.
- MILIES, C.P. **A Emergência dos Números Complexos.** São Paulo, 1993. RPM. n<sup>o</sup>. 24.
- MILIES, C.P. **Breve história da Álgebra abstrata.** II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática (www.bienasbm.ufba.br/M18.pdf), 2004.
- MORGADO, A.C. **Números Complexos - I e II.** PAPMEM - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2002. Vídeo no formato wmv disponível em <<http://videoimpa.br/index.php?page=janeiro-de-2002>>. Último acesso em 12 abr. 2014.
- PCNEM. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.** Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, 2000. Disponível em <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. Último acesso em 15 ago. 2014.
- PCNs+. **Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.** Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, 2002. Disponível em <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. Último acesso em 15 ago. 2014.
- PINTO, U.J. **A História dos números complexos: das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand.** Rio de Janeiro: UFRJ/Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2009.
- ROQUE, T. e CARVALHO, J.B.P. **Tópicos de História da Matemática.** Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- ROQUE, T. **História da Matemática Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
- UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA. **ESTRUTURA E APRESENTAÇÃO DE MONOGRAFIAS, DISSERTAÇÕES E TESES: MDT.** Santa Maria: Editora UFSM, 2012. Disponível em: > <http://coral.ufsm.br/prpgp/images/fomularios-diversos/mdt-2012.pdf> >. Último acesso em 15 ago. 2014.

## ANEXO A – CORPO ALGÉBRICO $\mathbb{C}$

A adição e a multiplicação com números complexos é exatamente como se espera.

- Adição:  $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- Multiplicação:  $(a + bi) \cdot (c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

### Demonstração das Propriedades de Corpo para números complexos

Dados  $z_1 = a_1 + b_1i$ ,  $z_2 = a_2 + b_2i$  e  $z_3 = a_3 + b_3i$  tem-se:

**Comutativa adição:**  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ .

**Comutativa multiplicação:**  $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ .

**Elemento Neutro Aditivo  $0 + 0i$ :**  $z_1 + (0 + 0i) = z_1$ .

**Elemento Neutro Multiplicativo  $1 + 0i$ :**  $z_1 \cdot (1 + 0i) = z_1$ .

A demonstração das propriedades comutativa e elemento neutro da adição e da multiplicação seguem trivialmente da definição destas operações em  $\mathbb{C}$ , as demais seguem abaixo.

**Associativa adição:**  $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ .

$$\begin{aligned}z_1 + (z_2 + z_3) &= (a_1 + b_1i) + [(a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)i] = [a_1 + (a_2 + a_3)] + [b_1 + (b_2 + b_3)]i \\ &= [(a_1 + a_2) + a_3] + [(b_1 + b_2) + b_3]i = [(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)]i + (a_3 + b_3i) \\ &= (z_1 + z_2) + z_3\end{aligned}$$

**Associativa Multiplicação:**  $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$ .

$$\begin{aligned}z_1(z_2z_3) &= (a_1 + b_1i)[(a_2a_3 - b_2b_3) + (a_2b_3 + b_2a_3)i] \\ &= [a_1(a_2a_3 - b_2b_3) - b_1(a_2b_3 + b_2a_3)] + [a_1(a_2b_3 + b_2a_3) + b_1(a_2a_3 - b_2b_3)]i \\ &= [a_1(a_2a_3 - b_2b_3) - b_1(a_2b_3 + b_2a_3)] + [a_1(a_2b_3 + b_2a_3) + b_1(a_2a_3 - b_2b_3)]i \\ &= [(a_1a_2 - b_1b_2)a_3 - (a_1b_2 + b_1a_2)b_3] + (a_1a_2 - b_1b_2)b_3 + (a_1b_2 + b_1a_2)a_3i \\ &= (z_1z_2)z_3\end{aligned}$$

**Distributiva relativamente a adição:**  $z_1((z_2 + z_3)) = z_1z_2 + z_1z_3$ .

$$\begin{aligned} z_1(z_2 + z_3) &= (a_1 + b_1i)[(a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)i] \\ &= [a_1(a_2 + a_3) - b_1(b_2 + b_3)] + [a_1(b_2 + b_3) + b_1(a_2 + a_3)]i \\ &= [(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i] + [(a_1a_3 - b_1b_3) + (a_1b_3 + b_1a_3)i] \\ &= z_1z_2 + z_1z_3 \end{aligned}$$

**Elemento Oposto:** Para todo  $z \in \mathbb{C}$ , existe um único  $(-z) \in \mathbb{C}$ , tal que  $z + (-z) = 0 + 0i$ . A demonstração do elemento oposto aditivo segue trivialmente da definição da operação de adição em  $\mathbb{C}$ .

**Elemento Inverso.:** Dado um número complexo  $z = a + bi \neq 0$ , existe  $z' = a' + b'i \in \mathbb{C}$ , tal que,  $z \cdot z' = 1 + 0i$ .

Para verificar a existência do inverso, resolve-se o sistema linear real nas variáveis  $a'$  e  $b'$ ,

$$aa' - bb' = 1 \quad , \quad ba' + ab' = 0.$$

Este sistema possui determinante  $a^2 + b^2 \neq 0$  e portanto, solução única dada por:

$$a' = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad , \quad b' = -\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Deste modo,  $z' = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$  é o inverso de  $z$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

## ANEXO B – ISOMORFISMO ENTRE $\mathbb{C}$ E O PLANO $\mathbb{R}^2$

A “estranheza” dos números complexos começa a ser dissipada quando se estabelece uma identidade geométrica para a sua representação. Essa identificação é posto pelo isomorfismo  $\varphi$ ,

$$\begin{aligned}\varphi: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto \varphi(x, y) = x + iy.\end{aligned}$$

Já demonstrado anteriormente que  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  é um corpo (o conceito de corpo pode ser encontrado em Hygino (2003)); sabe-se também que  $\mathbb{R}^2$  é um espaço vetorial com definição de soma e multiplicação por escalar real usuais, entretanto para completar a verificação do isomorfismo acima, precisa-se definir uma multiplicação adequada entre elementos de  $\mathbb{R}^2$ .

Para isto utiliza-se da definição de multiplicação dos complexos, e sua versão para o  $\mathbb{R}^2$  é da forma

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad), \text{ para } (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$$

Com a multiplicação, assim definida em  $\mathbb{R}^2$ , cumprem-se as propriedades

- **Associativa:**  $(a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)] = [(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f)$ ;

$$\begin{aligned}(a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)] &= (a, b) \cdot (ce - df, cf + de) \\ &= (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df)) \\ &= (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf) \\ &= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e) \\ &= (ac - bd, ad + bc) \cdot (e, f) = [(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f).\end{aligned}$$

- **Comutativa:**  $(a, b) \cdot (c, d) = (c, d) \cdot (a, b)$
- **Existência de Neutro:**  $(a, b) \cdot (1, 0) = (a, b)$  ;

A verificação das propriedades comutativa e a existência do elemento neutro seguem trivialmente da definição da multiplicação em  $\mathbb{R}^2$ .

- **Existência de Inverso:**  $\forall (a, b) \neq (0, 0)$ , existe  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $(a, b) \cdot (u, v) = (1, 0)$ ; Para a verificação da existência do inverso, pela definição da multiplicação, resolve-se o sis-

tema linear para  $u$  e  $v$  reais:

$$au - bv = 1, bu + av = 0.$$

O determinante da matriz associada a este sistema é  $a^2 + b^2 \neq 0$  e a solução do sistema é única, dada por:

$$u = \frac{a}{a^2 + b^2}, v = -\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

- **Distributiva:**  $(a, b) \cdot [(c, d) + (e, f)] = (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f).$

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot [(c, d) + (e, f)] &= (a, b) \cdot (c + e, d + f) \\ &= (a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)) \\ &= ((ac - bd) + (ae - bf), (ad + bc) + (af + be)) \\ &= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) \\ &= (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f). \end{aligned}$$

Unidas as propriedades do espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$ , com soma usual, tem-se que  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  é um corpo.

Para verificar a afirmação inicial, de que  $\varphi$  é um isomorfismo, deve-se provar que  $\varphi$  é um homomorfismo entre os corpos  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  e  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  e que este homomorfismo é bijetor.

De fato, para ser um homomorfismo, deve-se ter

- i.  $\varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v}), \forall \mathbf{u} = (a, b), \mathbf{v} = (c, d) \in \mathbb{R}^2;$

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \varphi(a + c, b + d) = (a + c) + (b + d)i \\ &= (a + bi) + (c + di) = \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

- ii.  $\varphi(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) \cdot \varphi(\mathbf{v}), \forall \mathbf{u} = (a, b), \mathbf{v} = (c, d) \in \mathbb{R}^2;$

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &= \varphi(ac - bd, ad + bc) = (ac - bd) + (ad + bc)i \\ &= (a + bi) \cdot (c + di) = \varphi(\mathbf{u}) \cdot \varphi(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

- iii.  $\varphi(\mathbf{1}) = 1, \mathbf{1} = (1, 0) \in \mathbb{R}^2;$

A demonstração deste item decorre trivialmente da definição de  $\varphi$

O homomorfismo apresentado identifica pares ordenados do  $\mathbb{R}^2$  com os números complexos, em particular tem-se

$$\varphi(0, 0) = 0, \varphi(1, 0) = 1 \text{ e } \varphi(0, 1) = i.$$

Assim,  $i$  sob o enfoque do homomorfismo definido, herda a estrutura de resolução da equação algébrica  $X^2 + \mathbf{1} = \mathbf{0}$  em  $\mathbb{R}^2$  e ao verificar a bijetividade do homomorfismo, agrega-se a representatividade geométrica ao corpo  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ .<sup>10</sup>

A sobrejetividade é imediata, e tem-se que  $\varphi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{C}$ , e a injetividade é verificada ao considerar  $u = (x, y)$  e  $u' = (x', y')$  tais que  $\varphi(u) = \varphi(u') \Leftrightarrow (x - x')^2 = i^2(y - y')^2 \Leftrightarrow x = x'$  e  $y = y'$ .

---

<sup>10</sup>Este resultado permitiria definir de maneira independente, ao já feito, os números complexos; uma vez que, este corpo dá sentido a equação algébrica:  $X^2 + \mathbf{1} = \mathbf{0}$ , para  $\mathbf{1} = (1, 0)$ ,  $\mathbf{0} = (0, 0)$ , como se verifica.

$$X^2 + \mathbf{1} = \mathbf{0} \xrightarrow{X=(0,1)} (0,1) \cdot (0,1) + (1,0) = (0,0) \implies (-1,0) + (1,0) = (0,0) \implies (0,0) = (0,0)$$



## APÊNDICE A – SOLUÇÃO GEOMÉTRICA PARA A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO $x^2 - 10x + 40 = 0$

O problema original desta equação é dividir 10 em duas partes tal que o produto destas seja 40. Ao completar quadrado, encontram-se as soluções da equação que representa este problema e são  $x = 5 \pm \sqrt{-15}$ .

Estas soluções apresentam radical de número negativo, porém ao somá-las e ao multiplicá-las, encontra-se o que se espera, ou seja:

$$(5 + \sqrt{-15}) + (5 - \sqrt{-15}) = 10 \text{ e } (5 + \sqrt{-15}) \cdot (5 - \sqrt{-15}) = 40.$$

No texto abaixo, as notações usadas para as operações de mais e menos são designadas por  $p$  (de *plus*, “mais” em latim),  $m$  (de *minus*, “menos” em latim), a raiz designada por  $R$  (de *radix*) e ainda a igualdade *quad est* (de *quod est*, “que é” em latim).

Além disso, a solução devia ser justificada geometricamente e Cardano apresenta uma tentativa interessante para suprir a ausência de uma representação geométrica natural para esta situação. Segundo as proposições de Euclides, a equação de que tratamos aqui exigiria a construção de um quadrado de área  $m15$ . Dividindo-se o segmento  $AB$  de comprimento 10 em dois segmentos iguais e desiguais, queremos encontrar o ponto  $D$  que resolve o problema, como na proposição *II-5* dos *Elementos de Euclides*. Para isto, seria necessário retirar do quadrado  $CEFB$  (Veja a Figura 4.3 (5.29)), de área 25, um quadrado de área 40 (igual ao produto  $AD$  por  $DB$ ). Sendo assim, o quadrado em  $CD$  deveria ter área  $m15$  (ROQUE, 2012, p.214).

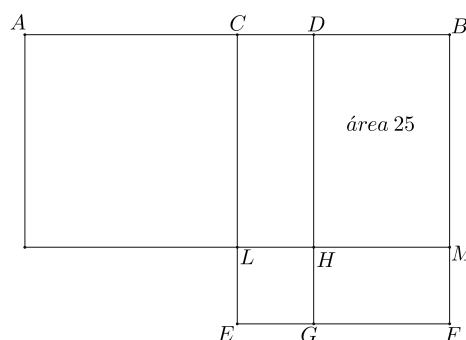


Figura 5.29: Figura 4.3 - Fonte: ROQUE, 2012, p. 215

A solução desejada é  $AC + CD$  e  $AC - CD$  que eram registradas como “ $5 p R m 15$ ” e “ $5 m R m 15$ ”.

Fazendo o produto desses resultados, obtem-se “*25 mm 15 quad est 40*”. Logo, Cardano afirma que pode-se realizar com essas quantidades “sofisticadas” operações do tipo  $(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 25 - (-15) = 40$ .

## APÊNDICE B – Dedução da Fórmula de Resolução da Equação do Terceiro Grau

Cardano publicou a fórmula de resolução para equações cúbicas em seu livro *Ars Magna*(1545), porém não se deve a ele a descoberta desta fórmula. De acordo com PINTO (2009) Scipione Del Ferro (1465-1526) resolveu a cúbica  $x^3 + px = q$ , sendo  $p$  e  $q$  positivos, porém não publicou seus resultados, contando apenas para um grupo de amigos, entre eles Antônio Maria Fior. Este, de posse deste resultado, desafiou publicamente Tartaglia.

Na disputa entre Fior e Tartaglia, o objetivo era a solução de vários problemas que um deveria propor ao outro. Fior apresentou a Tartaglia, 30 problemas que eram solucionados pelo caso particular da cúbica, cujo método de solução já era conhecido por ele.(PINTO, 2009, p.13).

Tartaglia já sabia encontrar a solução de qualquer equação cúbica da forma  $x^3 + px = q$ , pois já havia estudado esse tipo de equação quando um amigo enviou dois problemas. Conforme PINTO (2009) “Tartaglia é declarado vencedor, já que, além de resolver todos os problemas propostos por Fior, não teve seus problemas propostos resolvidos pelo oponente”.

Cardano, após implorar a solução das cúbicas, obtém de Tartaglia tal fórmula e a publica, mas como deduziram esta fórmula tão desejada na época?

### Dedução da fórmula de resolução da equação do terceiro Grau.

A ideia foi bastante simples, sendo  $x$  uma das raízes de uma equação do terceiro grau do tipo

$$x^3 + px + q = 0, \quad (5.17)$$

então  $x$  pode ser escrito como a soma de duas parcelas  $u$  e  $v$ , isto é  $x = u + v$ . Substituindo na equação 5.17, tem-se:

$$\begin{aligned} (u + v)^3 + p(u + v) + q &= 0 \\ u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q &= 0 \\ u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q &= 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

A ideia é perceber que seria muito bom se  $(3uv + p) = 0$ , pois assim a equação 5.18 seria satisfeita desde que  $u^3 + v^3 = -q$ . Portanto, encontrando  $u$  e  $v$  que satisfizessem as condições acima,  $x = u + v$ , seria a solução da equação 5.17.

Reescrevendo a condição  $(3uv + p) = 0 \Leftrightarrow uv = -\frac{p}{3} \Leftrightarrow u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$ , é necessário então resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} u^3v^3 = -\frac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}.$$

Dessa forma, determinar  $u^3$  e  $v^3$  é equivalente ao problema de determinar dois números, conhecendo seu produto e sua soma e as soluções para esse tipo de problema, já era conhecida pelos matemáticos da época, pois se reduz a encontrar as raízes da seguinte equação quadrática

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0,$$

onde  $t = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$  e portanto

$$\begin{cases} u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \end{cases}.$$

E assim,

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Foi essa a fórmula publicada por Cardano para encontrar uma raiz da equação do terceiro grau.

O leitor pode, neste momento, se perguntar se qualquer equação do terceiro grau, pode ser resolvida usando a fórmula deduzida acima. A seguir mostra-se que sim, pois qualquer equação do terceiro grau,  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , pode ser escrita da forma  $x^3 + px + q = 0$ , sem o termo do segundo grau.

### Redução de qualquer equação cúbica para o caso particular $x^3 + px + q = 0$

Para qualquer equação cúbica  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  para torná-la mais simples, faz-se a seguinte mudança de incógnita, substituindo  $x$  por  $t + h$ :

$$\begin{aligned} a(t+h)^3 + b(t+h)^2 + c(t+h) + d &= 0 \\ at^3 + (b+3ah)t^2 + (c+2bh+3ah^2)t + d+ch+ah^3+bh^2 &= 0 \\ t^3 + \frac{b+3ah}{a}t^2 + \frac{c+2bh+3ah^2}{a}t + \frac{d+ch+ah^3+bh^2}{a} &= 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

Fazendo o coeficiente de  $t^2 = 0$ , tem-se  $h = -\frac{b}{3a}$ . Assim a equação 5.19 pode ser escrita da seguinte forma

$$t^3 + pt + q = 0,$$

onde

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} \text{ e}$$

$$q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}.$$

Toda a equação do terceiro grau pode portanto, ser escrita no forma  $x^3 + px + q = 0$ , logo a fórmula publicada por Cardano resolve qualquer equação cúbica, bastando para isso, reescrevê-la na forma proposta.

Cardano tinha um discípulo, o Matemático italiano Rafael Bombelli, que muito contribuiu para o estudo dos números complexos ou "quantidades sofisticadas" como eram chamados. Por volta de 1560 ele aborda em sua obra *L'Algebra* os números imaginários, reconhecendo a existência de raízes negativas ao considerar a equação  $x^3 = 15x + 4$ , quando para resolvê-la aplica a fórmula de Cardano chegando na seguinte expressão para uma solução:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Porém, como já comentado anteriormente, no contexto do século XVI, número negativo não era tratado como se fosse um verdadeiro número, não tinha alcançado sua cidadania plena dentro da matemática, como operar então com a raiz quadrada de um número negativo.

É natural pensar que qualquer matemático da época pudesse começar a questionar se a fórmula publicada por Cardano resolveria verdadeiramente qualquer equação do terceiro grau. Entretanto, Bombelli não desistiu e, na forma de versos enunciou regras operatórias, que também são válidas para os números reais, para a multiplicação do que chamamos hoje de unidade imaginária, evidenciando estar à frente de seus antecessores pela sua capacidade de abstração algébrica. PINTO (2009) transcreve os versos que Bombelli escreveu em *L'Algebra* na página 133, e indica as traduções para *più*, *meno*, *meno di meno* e *più di meno* como sendo, respectivamente, 1, -1,  $-\sqrt{-1}$  e  $+\sqrt{-1}$ . Dessa forma, seguem os versos com suas respectivas traduções:

$$\text{Più via più di meno, fà più di meno } (+1) \cdot (+\sqrt{-1}) = (+\sqrt{-1})$$

$$\text{Meno via più di meno, fà meno di meno } (-1) \cdot (+\sqrt{-1}) = -(\sqrt{-1})$$

$$\text{Più via meno di meno, fà meno di meno } (+1) \cdot (-\sqrt{-1}) = (-\sqrt{-1})$$

$$\text{Meno via meno di meno, fà più di meno } (-1) \cdot (-\sqrt{-1}) = (+\sqrt{-1})$$

Più di meno via più di meno, fà meno  $(+\sqrt{-1}) \cdot (+\sqrt{-1}) = (-1)$

Più di meno via meno de meno, fà più  $(+\sqrt{-1}) \cdot (-\sqrt{-1}) = (+1)$

Meno di meno via più di meno, fà più  $(-\sqrt{-1}) \cdot (+\sqrt{-1}) = (+1)$

Meno di meno via meno di meno, fà meno  $(-\sqrt{-1}) \cdot (-\sqrt{-1}) = (-1)$

Provavelmente Bombelli percebeu a simetria na expressão encontrada para a raiz da equação, e fazendo manipulações algébricas, operando com as raízes de números negativos através das regras versadas por ele, concluiu que  $(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121}$ , e analogamente percebeu que  $(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - \sqrt{-121}$ .

Deste modo, Bombelli ao usar este método, obteve uma das raízes reais da equação, pois as partes imaginárias se cancelavam. Mesmo assim foi inevitável o seu encontro com os números complexos.

$$x = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-1})^3} \Rightarrow x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} \Rightarrow x = 4$$

Ao analisar a fórmula de Cardano, percebe-se que nos casos em que  $\frac{q^2}{4} < -\frac{p^3}{27}$  é indispensável o uso de números complexos, tornando-os assim, números legítimos na Matemática.

Apartir de então, os matemáticos, apesar de terem sempre uma certa desconfiança quanto a estes números, começaram a operar com as raízes de números negativos, aos quais chamavam de números imaginários por não existir uma representação, estavam apenas na imaginação.

Por vezes, ao usar o "princípio da permanência das formas" (Princípio de aplicar a novos objetos algébricos as regras usuais do cálculo de números já conhecidos), levou os Matemáticos da antiguidade a enganos. Euler (1707 - 1783) chegou a afirmar que  $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} = \sqrt{(-2) \cdot (-2)} = \sqrt{4} = 2$  por analogia a regra para números reais  $\sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ .

Um problema fundamental na história dos números complexos trata de encontrar as raízes de uma equação cúbica, quando esta equação é irredutível, isto é, as três raízes são reais. Nestes casos, ao utilizar a fórmula de Cardano, aparecem "números ilegítimos" (raiz quadrada de número negativo) para chegar a resultados "legítimos" (números reais).

Foi apenas no século XVIII que os números complexos passam a ser reconhecidos como verdadeiros números através da interpretação geométrica proposta por Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), e no século XIX, com os trabalhos de Wallis, Wessel, Buée e Argand, os números complexos alcançam sua plena aceitação no Mundo da Matemática.

## APÊNDICE C – Grupo das raízes $n$ -ésimas da unidade

Seja  $S$  o conjunto das raízes  $n$ -ésimas da unidade, isto é,  $S = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = \text{cis} \frac{2k\pi}{n} \right\}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$  com  $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$ . Observe que os elementos do conjunto  $S$  possuem módulo unitário e diferem apenas pelo seu argumento.

O conjunto  $S$  com a multiplicação usual em  $\mathbb{C}$ , estabelece uma estrutura  $(S, \cdot)$  de grupo abeliano, pois são válidas as propriedades:

- i. Associativa –  $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$
- ii. Existência de um elemento neutro  $z_0$  –  $\forall z = \text{cis} \frac{2k\pi}{n} \in S$  tem-se que  $z_0 \cdot z = z \cdot z_0 = z$
- iii. Existência do elemento inverso –  $\forall z = \text{cis} \frac{2k\pi}{n} \in S$ , com  $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  existe  $z^{-1} = \text{cis} \frac{2j\pi}{n} \in S$ , com  $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  tal que  $z \cdot z^{-1} = z_0$ .
- iv. Comutativa –  $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \forall z_i \in S$

As propriedades enunciadas são demonstradas abaixo.

A demonstração dos itens [i.] e [iv.] seguem trivialmente da definição da multiplicação entre complexos unitários na forma polar, isto é, pela associatividade e comutatividade da soma dos argumentos dos números complexos, em particular, dos elementos do conjunto  $S$ .

**Elemento Neutro**  
 $z_0 \cdot z = \text{cis} \frac{2k_0\pi}{n} \cdot \text{cis} \frac{2k\pi}{n} = \text{cis} \frac{2(k_0+k)\pi}{n} = \text{cis} \frac{2k\pi}{n} \Leftrightarrow k_0+k=k \Leftrightarrow k_0=0$ , assim o elemento neutro de  $S$  é  $z_0 = (1, 0)$ .

**Elemento Inverso**  
 $z \cdot z^{-1} = z_0 \Leftrightarrow \frac{2(k+j)\pi}{n} = 2\pi$  ou  $\frac{2(k+j)\pi}{n} = 0 \Leftrightarrow \frac{k+j}{n} = 1$  ou  $\frac{k+j}{n} = 0 \Leftrightarrow k+j=n$  ou  $k+j=0$ , onde  $k, j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ , desta forma, se  $k=0$ , então  $j=0$  e  $z = z^{-1} = z_0$ . Se  $1 \leq k \leq n-1$ , basta tomar  $j = n-k$ .