UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

UMA ABORDAGEM PARA O PROBLEMA DO MAPA DO TESOURO APLICADO AO ENSINO DA GEOMETRIA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Gustavo Rosas Rodrigues

Santa Maria, RS, Brasil
2014

UMA ABORDAGEM PARA O PROBLEMA DO MAPA DO TESOURO APLICADO AO ENSINO DA GEOMETRIA

Gustavo Rosas Rodrigues

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Orientadora: Professora Dra. Lidiane Buligon
Coorientadora: Professora Dra. Carmen Mathias

Santa Maria, RS, Brasil
2014
Universidade Federal de Santa Maria

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática
da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Rosas Rodrigues, Gustavo
UMA ABORDAGEM PARA O PROBLEMA DO MAPA DO TESOURO APLICADO AO ENSINO DA GEOMETRIA / Gustavo Rosas Rodrigues.-2014.
64 p.; 30cm

Orientadora: Lidiane Buligon
Coorientadora: Carmen Vieira Mathias
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2014

1. Matemática 2. Geometria Plana 3. GeoGebra 4. Tecnologias 5. Problema do Mapa do Tesouro I. Buligon, Lidiane II. Vieira Mathias, Carmen III. Título.

Centro de Ciências Naturais e Exatas
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

A comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

UMA ABORDAGEM PARA O PROBLEMA DO MAPA DO TESOURO APLICADO AO ENSINO DA GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO

elaborada por
Gustavo Rosas Rodrigues

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA

Lidiane Buligon, Dra. (UFSM)
(Orientadora/presidente)

Carmen Vieira Mathias, Dra. (UFSM)
(Coorientadora)

Rosane Rossato Binotto, Dra. (UFFS)

Charles Rogério Paveglio Szinvelski, Dr. (UFSM)

Santa Maria, 29 de agosto de 2014.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, fonte da vida.

Agradeço aos meus pais, que nunca mediram esforços pra me ajudar a realizar meus sonhos, mesmo que os meus sonhos não fossem os sonhos deles;

À Makely Ferreira, pelo amor e companheirismo de sempre;

À Patricia Rosas Rodrigues, minha irmã;

À Vivianne Goulart, que me ensinou a ser professor, incentivando-me a estudar e dando-me sempre grandes conselhos;

À Sociedade Brasileira de Matemática que, no intuito de melhorar a educação básica no Brasil, viabilizou a implementação do Profmat.

À minha orientadora, Lidiane Buligon, e à minha coorientadora Carmen Vieira Mathias, que acreditaram na ideia e apoiaram meu trabalho mesmo diante das dificuldades.

Aos estudantes que passaram pelas salas que ministrei aula, pois eles despertaram em mim a vontade de aprender mais e mais.

“É parte fundamental do aprendizado
o desejo de aprender.”
Gustavo Rodrigues

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa De Pós-Graduação Em Matemática Em Rede Nacional - PROFMAT

UMA ABORDAGEM PARA O PROBLEMA DO MAPA DO TESOURO APLICADO AO ENSINO DA GEOMETRIA MO ENSINO MÉDIO

AUTOR: GUSTAVO ROSAS RODRIGUES
ORIENTADORA: LIDIANE BULIGON.
Data e Local da Defesa: Santa Maria, 29 de agosto de 2014.

Este trabalho busca disponibilizar aos professores do Ensino Médio um instrumento pedagógico que auxilie na introdução de conceitos geométricos. A proposta pretende estabelecer relações entre conteúdos de sala de aula, outrora meramente teóricos, com uma situação prática, através da adaptação do problema do Mapa do Tesouro para uma realidade aproximada dos estudantes da escola em que o trabalho foi aplicado. Além disso, foi utilizado o software GeoGebra, para motivar, através do uso de tecnologias, os questionamentos e a criatividade dos estudantes. Concluímos que, a partir de uma estratégia desafiadora, o aprendizado ganhou significado e importância para os alunos envolvidos.

Palavras-chave: Matemática; Geometria Plana; GeoGebra; Tecnologias; Problema do Mapa do Tesouro.

RESUMEN

Disertación de Maestría
Programa de Posgrado en Matemática En Red Nacional – PROFMAT

UN ABORDAJE PARA EL PROBLEMA DEL MAPA DEL TESORO APLICADO A LA ENSEÑANZA DE GEOMETRÍA EM LA SECUNDARIA

AUTOR: Gustavo Rosas Rodrigues
ORIENTADORA: Lidiane Buligon
Fecha y Lugar de la Defensa: Santa Maria, 29 de agosto de 2014.

Este trabajo trata de proporcionar a los maestros de secundaria una herramienta pedagógica para ayudar en la introducción de los conceptos geométricos. La propuesta busca establecer relaciones entre contenidos del aula, antaño simplemente teóricos, con una situación práctica, adaptando el problema del Mapa del Tesoro a una realidad aproximada de los estudiantes de la escuela en la que se aplicó la obra. Además, el software GeoGebra se utilizó para motivar a través del uso de las tecnologías, las preguntas y la creatividad de los alumnos. Llegamos a la conclusión de que, a partir de una estrategia de desafío, aprendizaje obtenido significado y, desde allí, se convirtió en importante para los estudiantes involucrados.

Palabras clave: Matemática, Geometría, GeoGebra, problema del Mapa del Tesoro, Números Complejos.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

LISTA DE ANEXOS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Geometria é um dos ramos da Matemática que atende às necessidades práticas mais antigas da humanidade tais como: medição de terras, construção de moradias, de estradas e meios de transporte, etc. Para suprir essas necessidades, foi fundamental o conhecimento das figuras geométricas e de suas propriedades. O tempo passou e a Geometria continuou fazendo parte da solução dos problemas atuais.

Na busca por uma organização dos conhecimentos já adquiridos, foi criada uma maneira de sistematizar o que já havia sido estudado. É quando surge a necessidade de se empregar uma estrutura oriunda da Filosofia. Aparecem então os axiomas, os postulados e as demonstrações usando a retórica e a lógica. Com isso, dois tipos de matemáticos ganham destaque: os que analisam a Geometria sob um prisma teórico e formalista; e os que associam a Geometria a outros campos da ciência, especialmente a Física e as Engenharias. Com o passar dos anos, foram sendo criadas novas aplicações para o estudo da Geometria. Além disso, estudos sobre novas geometrias foram desenvolvidos e, com isso, esse ramo da Matemática foi ganhando cada vez mais importância. No ensino superior, é relevante a ênfase que se dá ao estudo da Geometria. O próprio PROFMAT é um exemplo disso, pois oferece disciplinas que propiciam ao mestrando um aprofundamento nos quesitos tangentes à Geometria.

Porém, num caminho inverso, o ensino de Geometria na educação básica no Brasil tem ficado cada vez mais em segundo plano. Trabalhos referentes ao desenvolvimento do ensino da Geometria no Brasil, realizados por Pavanello (1993), Passos (2000) e Pereira (2001), apresentam a existência desse abandono. Os mesmos autores afirmam que, muitas vezes, devido ao despreparo do professor, o trabalho com Geometria é desenvolvido de forma completamente desconectada da realidade dos estudantes. Isso torna o estudo enfadonho, desinteressante e acaba desestimulando os jovens.

Além disso, a formalização, ora excessiva, ora inexistente, acaba por tornar-se mais um obstáculo no processo de aprendizagem. E essas falhas são graves, pois atrapalham o amadurecimento do estudante, uma vez que não propicia que o mesmo desenvolva o principal ingrediente do raciocínio lógico: a ideia.

No entanto, ensinar Matemática não é tarefa fácil, em particular no Ensino Médio. Segundo Lima (2003), essa etapa tem por objetivo aprofundar conhecimentos básicos adquiridos no ensino fundamental tais como: conjuntos numéricos, construção de gráficos, estudo de funções, de figuras e de formas geométricas, entre outros. No Ensino Médio, portanto, os estudantes precisam desenvolver o raciocínio na busca por soluções de problemas com um maior nível de dificuldade em relação aos níveis de estudo anteriores. Por isso, o ensino de Matemática no Ensino Médio precisa partir de situações em que o estudante sinta-se motivado a buscar uma solução. Assim, o discente dará sentido aos conteúdos, vendo objetivos claros no raciocínio que lhe é exigido.

Para isso, o professor deve propor situações desafiadoras que propiciem ao estudante generalizar, abstrair, analisar e interpretar. Cabe ao docente levar o estudante a correlacionar ideias matemáticas com outras áreas do conhecimento. Além disso, as atividades propostas devem ter um caráter formativo e auxiliar na construção do pensamento matemático e do raciocínio lógico-dedutivo.

Para conseguirmos atingir com mais facilidade nossos objetivos enquanto educadores, é preciso uma aproximação dos conteúdos à realidade dos estudantes. Não apenas no que diz respeito a contextualizações, mas também à forma como vamos apresentar-lhes as informações. Com isso, torna-se importante a utilização de novas tecnologias em sala de aula. Sendo assim, o ensino da Geometria nos dá a possibilidade de trabalhar com diversos softwares. Atualmente, um dos aplicativos mais difundidos no meio escolar é o GeoGebra, um programa de Geometria dinâmica. Além de ser gratuito, pode ser usado em todos os níveis de ensino.

Com esse foco, nessa dissertação foi realizada a proposta e aplicação de uma abordagem que pretendeu diminuir a distância entre as teorias de sala de aula e a prática. Para tanto, apresentamos uma sugestão que tenta tornar a Geometria algo tangível e, ao mesmo tempo, desafiador aos estudantes.

Nesse sentido, foi proposta uma adaptação de uma versão do clássico problema do Mapa do Tesouro (Barbeau, 1989). A resolução de um problema prático, fora da sala de aula, é vista como de fundamental importância para o desenvolvimento de habilidades e competências que não seriam contempladas caso o estudo dos conteúdos utilizados na solução ficassem restritos à sala de aula. Acreditamos que, através da adaptação do problema, a Matemática será utilizada como ferramenta para atingir um objetivo (localizar o tesouro) e que isso é salutar ao aprendizado, além de mostrar aos jovens que o conhecimento é algo concreto e próximo de sua realidade.

O problema original relatado por Barbeau (1989) apresenta instruções para a descoberta de um tesouro enterrado em uma ilha. A dificuldade está no fato de ser desconhecido o ponto de partida para essa descoberta. A partir dessa ideia, de não ser conhecido o ponto inicial da busca, propõe-se adaptar o problema original à realidade dos estudantes da escola em que o trabalho foi realizado. Inicialmente, os estudantes receberam instruções e foram desafiados a procurarem a localização do tesouro. Depois de realizada a busca, o presente trabalho apresentou três maneiras de resolver o problema. A primeira através do uso do GeoGebra, a segunda por Geometria Analítica e, por fim, uma abordagem utilizando Números Complexos, este com uma dedicação especial, dando ênfase a alguns pontos, em geral, pouco abordados nas escolas de Ensino Médio, tais como a história e sua relação com as operações com vetores.

Essa dissertação traz, em seu primeiro capítulo, um resgate histórico da Geometria, destacando algumas aplicações que tornavam seu uso algo presente no cotidiano de antigas civilizações. Também apresentamos fatos da biografia de Fermat e de Descartes, considerados precursores da Geometria das Coordenadas. Apresentamos também alguns conceitos e pré-requisitos que são necessários para a realização das atividades propostas. Um relato histórico dos Números Complexos fez-se necessário, por não ser um assunto costumeiramente tratado no Ensino Médio. Em seguida, apresentamos a versão original do problema do Mapa do Tesouro e sua adaptação para o trabalho desenvolvido. O capítulo seguinte trata do desenvolvimento do trabalho. Em cada atividade, descreveremos a maneira que acreditamos ideal e que deve ser conduzida pelo professor. Sugerimos questionamentos, apontamentos e observações para que o professor consiga obter o melhor resultado possível em cada um dos momentos. Depois dessa idealização da atividade, apresentaremos os relatos. Neste espaço, vamos relatar os encontros e as práticas, destacando pontos altos e baixos de cada ação e fazendo comparações entre o ideal (ou seja, o que havia sido planejado) e o que realmente aconteceu (depois da realização da atividade). O capítulo final apresenta as conclusões relativas às atividades aplicadas e ao trabalho como um todo.

1 REFERENCIAIS TEÓRICOS

Esta seção visa a abordar sucintamente alguns conceitos de Geometria que serão utilizados na aplicação do trabalho. Aqui também será apresentado um relato sobre a origem da Geometria e a ligação desta com a Geometria Analítica. Além disso, traz uma retomada histórica sobre os Números Complexos, algo pouco trabalhado no Ensino Médio.

1.1 Geometria

Quando pensamos em determinar as origens da Geometria (do grego *medir a terra*), deparamo-nos com problemas do cotidiano humano tais como: partilhar terras férteis às margens dos rios (cálculo de áreas), construir moradias, analisar e tentar prever os movimentos dos astros. Essas são apenas algumas atividades humanas que dependem da Geometria. Babilônios e egípcios usavam uma Geometria essencialmente métrica, ou seja, eles estavam mais preocupados em medir comprimentos, áreas e volumes. Segundo Roque (2012), pouco se sabe sobre de que forma esses povos tomaram conhecimento das propriedades geométricas das figuras planas e de sólidos geométricos. Quando pensamos em propor uma atividade com a finalidade de aplicar conhecimentos de Geometria Euclidiana construídos em sala, partimos do princípio de que os conceitos são de domínio do estudante. Nessa seção, não pretendemos apresentar um curso de Geometria, tampouco ensinar conceitos. A intenção é alertar para os pré-requisitos necessários, sem os quais os estudantes poderão não tirar o melhor proveito da proposta. Para que possa acompanhar as explicações do professor e, por conseguinte, tirar proveito das atividades propostas, o discente deve compreender os seguintes conceitos geométricos: noções e proposições primitivas (ponto, reta, plano); segmento de reta; ponto médio; distância entre dois pontos; perpendicularidade; rotação; ângulos e Números Complexos.

Segundo Boyer (2010), antigas civilizações, especificamente os egípcios e os babilônios, deixaram documentos que atestam um conhecimento aprofundado do assunto. Essa documentação está relacionada, geralmente, à astrologia. A forma da Geometria, tal como conhecemos atualmente, começou a ser moldada na Grécia. Gregos que antecederam grandes nomes como Euclides, Arquimedes e Apolônio são pouco citados na história. Conhece-se, basicamente, o fragmento de um trabalho de Hipócrates que se refere a Tales de Mileto como o introdutor da Geometria na Grécia.

Ainda de acordo com Boyer (2010), Pitágoras de Samos deu nome a um dos mais importantes teoremas sobre o triângulo retângulo. O fato inaugurou um novo conceito de demonstração matemática. Porém, enquanto a escola pitagórica constituía uma espécie de seita filosófica, que envolvia em mistério seus conhecimentos, os “Elementos” de Euclides (Figura 1) representam a introdução de um método consistente que contribui há mais de vinte séculos para o progresso das ciências.

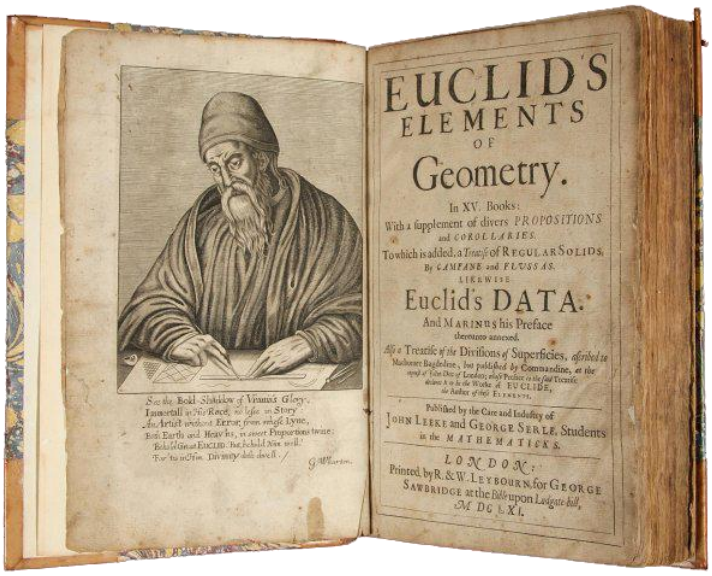


Figura 1 – “Elementos”, de Euclides

Segundo Reis (1996), trata-se do modelo axiomático que parte dos conceitos e proposições admitidos sem demonstração, denominados postulados ou axiomas para a construção, de maneira lógica, de todo o restante. Basicamente, são necessários três conceitos fundamentais (o ponto, a reta e o círculo) e cinco postulados:

i. podemos traçar uma linha reta de qualquer ponto para qualquer ponto;

ii. podemos prolongar uma reta infinita, continuamente, em uma linha reta;

iii. podemos traçar um círculo, tendo qualquer ponto como centro, com raio igual a qualquer reta traçada a partir do centro;

iv. todos os ângulos retos são iguais entre si;

v. dados uma linha reta e qualquer ponto fora dela, podemos traçar, por esse ponto, uma reta, e apenas uma, paralela à primeira.

Tais postulados servem de base para todo o estudo da Geometria Euclidiana. Apesar disso, não se pode ignorar a existência de geometrias não-euclidianas. Essas são baseadas em postulados distintos dos de Euclides, mais especificamente o 5º postulado.

1.2 Geometria Analítica

A Geometria Analítica, também conhecida como Geometria das Coordenadas, foi sofrendo adaptações ao longo do tempo e agregou uma importante ferramenta para resolver problemas geométricos: a álgebra. De maneira recíproca, a Geometria Analítica fornece uma interpretação geométrica para questões algébricas. Essa troca torna-se um instrumento extremamente valioso quando trabalhada simultaneamente.

Segundo Roque (2012), foram os gregos que deram à Geometria o caráter de ciência dedutiva. A descoberta foi algo brilhante. Mesmo assim, faltava operacionalidade à Geometria grega. E isto só iria ser conseguido mediante a Álgebra considerada como princípio unificador. Os gregos, porém, não eram muito bons em Álgebra. Mais do que isso, somente no século XVII a Álgebra estaria razoavelmente aparelhada para uma fusão criativa com a Geometria.

Ocorre, porém, que o fato de haver condições para uma descoberta não exclui o toque de genialidade de alguém. E, no caso da Geometria Analítica , fruto dessa fusão, o mérito não foi de uma só pessoa. Dois franceses, Pierre de Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650) são os responsáveis por esse grande avanço científico. Curiosamente, nenhum deles era matemático profissional, ambos eram graduados em Direito. Fermat era movido basicamente por seu grande amor à Matemática. Já Descartes tinha razões filosóficas para dedicar-se a ela. Fermat e Descartes não trabalharam juntos: a Geometria Analítica é um dos muitos casos, em ciência, de descobertas simultâneas e independentes.

Mota (2010) relata que as contribuições de Fermat à Geometria Analítica encontram-se em um pequeno texto intitulado *Introdução aos Lugares Planos e Sólidos*, datado de 1636. O material só foi publicado em 1679, 14 anos após a morte do autor, juntamente com sua obra completa. Isso ocorreu porque Fermat sempre foi bastante modesto. Ele era totalmente contrário à ideia de publicar seus trabalhos. Essa é, muito provavelmente, a causa que faz com que, em partes, Descartes seja comumente mais lembrado como o criador da Geometria Analítica.

A Geometria Analítica de Descartes foi divulgada em 1637. A ideia surgiu no pequeno texto chamado *A Geometria*, um dos três apêndices do *Discurso do Método*, obra considerada o marco inicial da filosofia moderna. Nela, em resumo, Descartes defende o método matemático como modelo para a aquisição de conhecimentos em todos os campos.

A Geometria Analítica, atualmente, pouco se assemelha às contribuições deixadas por Fermat e Descartes. Inclusive sua marca atual mais característica, um par de eixos ortogonais, não era usada por nenhum deles. Mais ainda: ambos sabiam, cada um a seu modo, que a ideia central era associar equações a curvas e superfícies. Neste particular, Fermat foi mais feliz. Descartes superou Fermat na notação algébrica.

Durante a realização deste trabalho, adotamos o sistema de coordenadas cartesianas, que consiste num par de eixos perpendiculares e orientados denominados *OX* e *OY* contidos num plano, com a mesma origem *O*. Recorremos às coordenadas cartesianas com o intuito de resolver problemas de Geometria, unindo os fatos iniciais da Geometria Analítica aos resultados básicos da Geometria Euclidiana.

1.3 Números Complexos

Nesta seção, partindo das ideias de Iezzi (1977) e Roque (2012), apresentamos alguns resultados e definições sobre os Números Complexos que serão importantes na resolução do problema proposto. O principal objetivo desta seção será a utilização dos Números Complexos para rotacionar um vetor segundo um ângulo de 90º.

1.3 Resgate histórico

Iezzi (2005) traz um texto de Hygino Domingues que embasa o resgate histórico. Consta, no referido material, que o primeiro matemático a operar com Números Complexos (ao invés de simplesmente rejeitá-los, como acontecia até então) foi Girolamo Cardano (1501 – 1576). Resolvendo o problema de dividir o número 10 em duas partes cujo produto é 40, provou que $5+\sqrt{-15}$ e $5-\sqrt{-15}$, são raízes de $x^2 + 40 = 10x$. Mas Cardano não conseguiu aprofundar seus estudos, especialmente quando surgiram as equações do terceiro grau. Quem tirou a Matemática desse impasse foi o bolonhês R. Bombelli (1530 – 1579), notável diletante da Matemática. Mas Bombelli não apenas avançou significativamente no estudo das equações do terceiro grau. Ele foi além. Em sua Álgebra (1572) aparece, pela primeira vez, uma teoria dos Números Complexos razoavelmente bem estruturada.

Contudo, os Números Complexos seguiram mantendo uma certa aura de mistério até a virada do século XVIII para o século XIX. Foi quando Caspar Wessel (1745 – 1818), Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855) e Jean-Robert Argand (1786 – 1822) descobriram, independentemente, que esses números admitem uma representação geométrica. Enquanto Gauss imaginava essa representação por meio dos pontos de um plano, Wessel e Argand usavam segmentos de reta orientados ou vetores coplanares. As duas representações podem ser observadas na Figura 2.

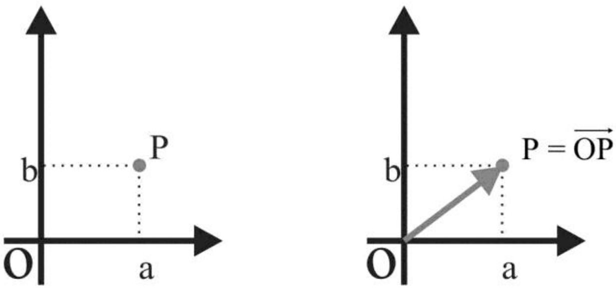


Figura 2 – Representações de Gauss (à esquerda) e de Wessel e Argand (à direita)

Na verdade, Wessel e Argand, que eram dois amadores da Matemática, escreveram trabalhos específicos a respeito com enfoques muito parecidos (o primeiro a publicar foi Wessel, no ano de 1799); Gauss, como em outras vezes, apenas deixou bem claro conhecer as ideias subjacentes ao assunto, inclusive utilizando-as. Todos, contudo, perceberam que, mais do que representar pontos ou vetores, os Números Complexos poderiam ser utilizados para operar algebricamente com os vetores. Em outras palavras, podemos dizer que os Números Complexos constituem-se na álgebra dos vetores de um plano.

2 O PROBLEMA MOTIVADOR

Em consonância com a proposta político-pedagógica do Colégio Marista São Luís, onde foi aplicada a experiência, nosso objetivo foi relacionar a teoria estudada em sala de aula, com uma atividade prática, realizada ao ar livre. O tesouro procurado pelos estudantes diz respeito a uma das virtudes difundidas pelos Irmãos Maristas, fundadores da Instituição de Ensino: a simplicidade.

Ao final da caça ao tesouro, os estudantes encontravam, simbolicamente, as vestimentas dos religiosos antigos. A partir desse símbolo, uma atividade foi planejada para fechar a caça ao tesouro e, ao mesmo tempo, reavivar a mística do hábito.

A proposta foi aplicada com um grupo de 10 estudantes, integrantes de um clube de Matemática intitulado “Monitoria de Matemática do Colégio Marista São Luís”, conforme a Figura 3.

Figura 3 – Grupo de monitores com o professor

Este grupo é formado por estudantes das três séries do Ensino Médio. Semanalmente, os estudantes reúnem-se, sob a orientação do professor, para realizar atividades matemáticas complementares (listas de exercícios, jogos, etc). A maioria das dinâmicas aplicadas pelo professor em suas aulas, antes é aplicada com os estudantes desse grupo. Assim, quando a aplicação é feita com as turmas, os integrantes do grupo tornam-se monitores e auxiliam o professor. Os relatos do presente trabalho dizem respeito apenas às atividades realizadas com os monitores.

2.1 O problema do Mapa do Tesouro

A primeira referência ao problema foi encontrada em Barbeau (1989). A seguir, apresentaremos uma tradução do problema:

Um tesouro foi enterrado em uma ilha, e foi feito um mapa de sua localização. As instruções contidas no mapa dizem que, ao desembarcar na ilha, avistam-se imediatamente dois grandes carvalhos, e também uma palmeira, conforme apresentado na Figura 4.

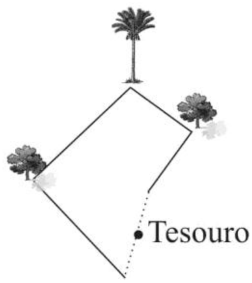


Figura 4 – Representação do Mapa do Tesouro

O tesouro está enterrado em um ponto que pode ser encontrado da forma escrita abaixo:

1) Partindo da palmeira, caminha-se até o carvalho A contando os passos.

2) Chegando ao carvalho, deve-se girar para a direita 90º e caminhar o mesmo número de passos e, aonde chegar, deve-se fazer uma marca.

3) Voltando novamente à palmeira, caminha-se até o carvalho B contando os passos; gira-se à esquerda 90º e caminha-se o mesmo número de passos, fazendo-se uma marca nesta posição.

4) O tesouro está enterrado exatamente na reta que liga as duas marcas e à mesma distância das duas marcas. A Figura 5 apresenta uma sistematização do mapa.

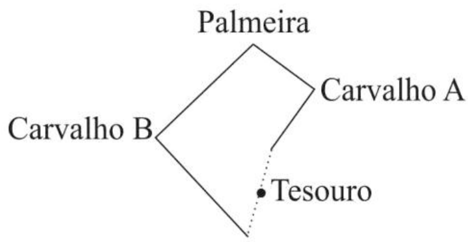


Figura 5 – Mapa sistematizado

Consta em Barbeau (1989), que depois de muito tempo, exploradores encontraram o mapa e decidiram ir à ilha resgatar o tesouro. Ao chegarem à ilha, tiveram uma desagradável surpresa. Os carvalhos ainda estavam lá, mas a palmeira havia desaparecido. Os exploradores não desanimaram e, depois de pensar um pouco, tiveram uma ótima ideia para resolver o problema de modo bastante prático.

Essa história foi relatada aos estudantes, de modo a motivá-los para que respondessem à seguinte questão:

Como os exploradores fizeram para encontrar o lugar onde o tesouro estava enterrado e recuperá-lo mesmo sem a palmeira?

2.2 O problema adaptado

A escola que concebeu a presente experiência situa-se no interior do estado do Rio Grande do Sul e completou 110 anos de atividades em 2013. Esse colégio é de caráter confessional e é mantido por uma rede educacional católica. Nesse contexto, muitas atividades alusivas à data estão sendo realizadas desde o ano passado. Uma delas foi, em dezembro de 2013, o lançamento de um livro comemorativo, contando a história do colégio e ressaltando sua importância para a comunidade local e regional. Para relacionar o aniversário da instituição, o lançamento do livro, os ideais do colégio e a Matemática, foi proposta a seguinte adaptação ao problema original:

Quando os primeiros irmãos maristas chegaram a Santa Cruz do Sul, um tesouro foi enterrado no campo de futebol do Parque Marista São Luís. Os irmãos confeccionaram um mapa de sua localização. O mapa foi encontrado durante as pesquisas realizadas para a produção do livro comemorativo ao 110° aniversário da escola.

Nele estão as instruções com a localização do tesouro. Tais instruções dizem que, ao chegar ao campo de futebol, avistam-se imediatamente as duas goleiras e também uma palmeira. O tesouro está enterrado em um ponto que pode ser encontrado da forma descrita abaixo:

"Partindo da palmeira, caminhe até a primeira trave da goleira a sua esquerda, contando os passos. Chegando lá, gire para a direita 90º e caminhe o mesmo número de passos. Aonde chegar, faça uma marca. Voltando novamente à palmeira, ande até a primeira trave da goleira a sua direita contando os passos. Chegando lá, gire à esquerda 90º e caminhe o mesmo número de passos e faça uma marca nesta posição. O tesouro está enterrado exatamente na reta que liga as duas marcas e à mesma distância das duas marcas."

A seguir, apresentaremos as atividades propostas. Os relatos que serão expostos dizem respeito às impressões do professor diante do trabalho. Além disso, algumas atividades trazem também a expectativa do docente. Cabe ressaltar a importância de contextualizar toda e qualquer atividade. E quando falamos em contextualizar, referimo-nos ao sentido mais amplo possível da expressão. Sugerimos que a contextualização contemple a história do conteúdo, aplicações e que tenha relação com o cotidiano do estudante e do local onde o trabalho será aplicado. Dessa maneira, as atividades farão sentido ao grupo de estudantes que vai realizá-las.

3 ATIVIDADES E RELATOS

3.1 Atividade 1 – Primeiro contato com o GeoGebra

3.1.1 Relato

Os imprevistos são constantes no cotidiano de um professor da educação básica. A primeira atividade, descrita nesse trabalho como Atividade 2, estava prevista para a tarde do dia 6 de maio. A ideia ao marcar nessa data foi aproveitar a passagem do Dia da Matemática. Devido ao mau tempo, a atividade precisou ser adiada. É importante salientar que, diante da impossibilidade de ser realizada a saída, pudemos utilizar o laboratório de informática, o que acabou não atrapalhando o andamento do trabalho.

O grupo foi levado ao laboratório de informática para começar uma introdução sobre o GeoGebra. Inicialmente, os estudantes tiveram um período de aula para que pudessem manipular o software livremente. Em seguida, no segundo período de aula, foi distribuída uma apostila, conforme Anexo A, que explica algumas ferramentas do programa. Nos dois períodos desse dia, os estudantes tiveram um primeiro contato com o GeoGebra. No final do encontro, foi explicado que a atividade proposta exigiria o uso do programa e foi solicitado que todos instalassem o aplicativo em seus computadores pessoais.

Destacamos a facilidade com a qual os estudantes iniciaram os trabalhos com o GeoGebra. Isso é mais um indicativo de que o software é, sim, uma ferramenta viável para o ensino da Matemática no Ensino Médio. A Figura 6 mostra o laboratório de informática do colégio e a turma com a qual o trabalho foi aplicado.

Figura 6 – Primeiro contato com o aplicativo

3.2Atividade 2

O objetivo dessa atividade é obter uma estratégia para determinar um ponto no plano. Ao final da aplicação, os estudantes serão desafiados a criarem um esquema, conforme a Figura 7.

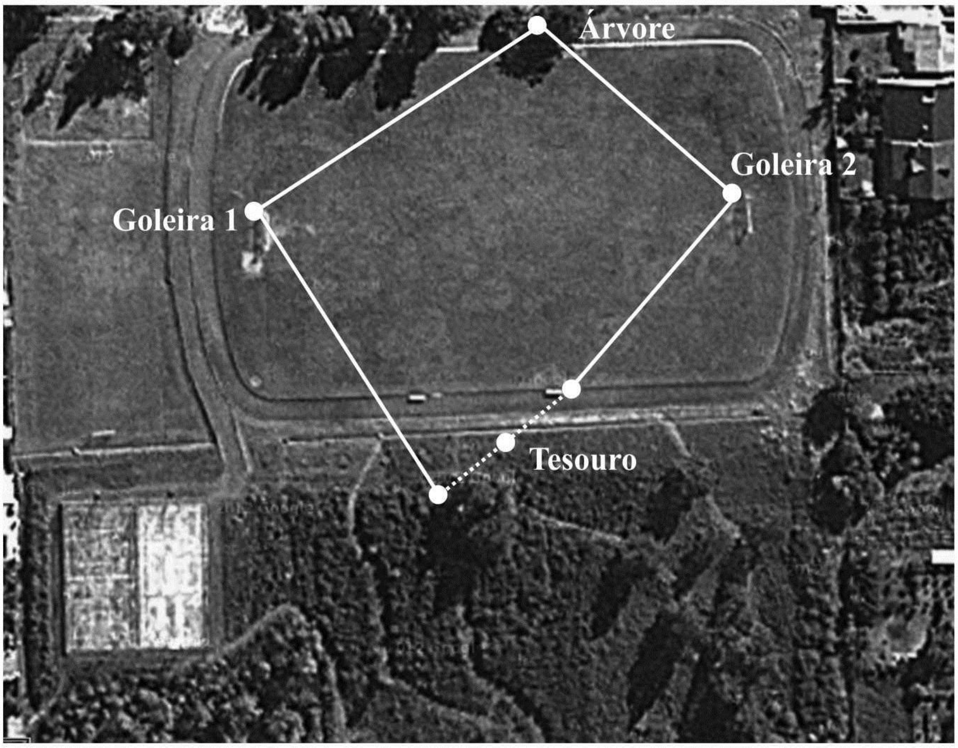


Figura 7 – Sistematização proposta (Foto: Google)

Trabalhando em grupo, os estudantes deverão elaborar uma estratégia para encontrar um ponto pré-determinado a partir de um ponto de referência desconhecido. Os conteúdos desenvolvidos via essa atividade são:

i. Ponto médio

ii. Distância entre dois pontos

iii. Perpendicularidade

iv. Rotação

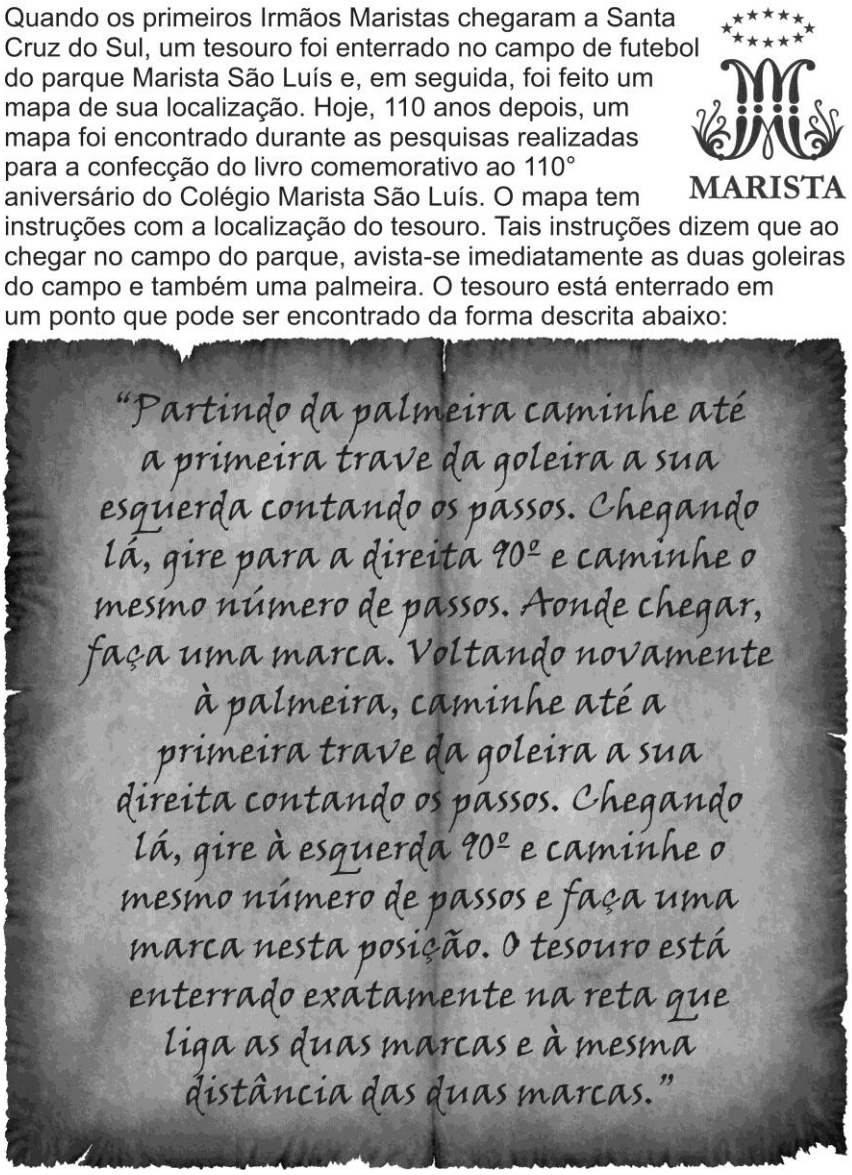
Para que os estudantes consigam realizar essa atividade, o único pré-requisito necessário será o senso de localização e locomoção.

A duração da atividade é de três aulas (150 minutos). Para que a execução da aplicação se dê de forma satisfatória, serão necessários os seguintes recursos:

i. Xerox das orientações (representando o Mapa do Tesouro)

ii. Transporte da turma até o Parque São Luís, local da atividade

Chegando ao Parque, o professor deve dividir a turma em trios. Cada trio receberá uma cópia das orientações para a localização do tesouro. Simbolizando um mapa, as instruções da Figura 8 nortearão a atividade.


Quando os primeiros Irmãos Maristas chegaram a Santa Cruz do Sul, um tesouro foi enterrado no campo de futebol do parque Marista São Luís e, em seguida, foi feito um mapa de sua localização. Hoje, 110 anos depois, um mapa foi encontrado durante as pesquisas realizadas para a confecção do livro comemorativo ao 110° aniversário do Colégio Marista São Luís. O mapa tem instruções com a localização do tesouro. Tais instruções dizem que ao chegar no campo do parque, avista-se imediatamente as duas goleiras do campo e também uma palmeira. O tesouro está enterrado em um ponto que pode ser encontrado da forma descrita abaixo:

MARISTA

"Partindo da palmeira caminhe até a primeira trave da goleira a sua esquerda contando os passos. Chegando lá, gire para a direita 90º e caminhe o mesmo número de passos. Aonde chegar, faça uma marca. Voltando novamente à palmeira, caminhe até a primeira trave da goleira a sua direita contando os passos. Chegando lá, gire à esquerda 90º e caminhe o mesmo número de passos e faça uma marca nesta posição. O tesouro está enterrado exatamente na reta que liga as duas marcas e à mesma distância das duas marcas."

Figura 8 – Instruções para a caça ao tesouro

Enquanto um dos trios faz a busca, os outros devem ficar na sede social. O professor deverá acompanhar cada grupo que estiver na caça ao tesouro. Para aumentar a motivação, cada grupo deve ter até 20 minutos para achar o tesouro.

Durante a procura, o professor deverá questionar sobre a existência da palmeira (ponto inicial da procura), fazendo com que os estudantes percebam que não existe mais tal referência. A partir daí, os grupos devem buscar uma solução para o problema, sempre com a mediação do professor, que vai persuadir o grupo a escolher um ponto de partida qualquer.

Para que a atividade forneça ainda mais subsídios para a discussão final, o professor deve induzir os grupos para que iniciem sua busca pelo tesouro de pontos de referência diferentes.

Depois que todos os grupos já tiverem terminado a sua caça ao tesouro, um representante de cada trio (ou dupla) vai explicar para o restante da turma qual foi a estratégia utilizada para achar o local onde o tesouro está enterrado. Durante as explicações dos estudantes, o professor deve destacar o ponto inicial que cada grupo escolheu. Deve ter ênfase, nesse momento da atividade, o fato de o tesouro não ter sido trocado de lugar durante a busca. A intenção é que os estudantes percebam que, mesmo desconhecendo o ponto inicial, será possível encontrar a raridade. Para fechar a atividade, cada grupo vai comparar a sua solução com a apresentada pelos demais grupos.

Uma observação que achamos pertinente é que, durante todo o desenrolar da atividade, o professor deve fomentar discussões matemáticas, incentivar a troca de ideias, valorizar as "ideias erradas", sempre tentando mostrar aos grupos onde está o erro e como corrigi-lo. Enfim, o docente deve atuar fortemente no sentido de conduzir os grupos e de garantir que os estudantes atinjam o objetivo que não é apenas encontrar o tesouro, mas pensar e conjecturar acerca do problema. Destaca-se também a importância dos registros, tanto por parte do professor como por parte dos estudantes. Os grupos devem anotar o ponto de partida, o número de passos que deram até cada goleira e o número de passos das marcas até o tesouro.

3.2.1 Relato da atividade 2

A atividade, de um modo geral, transcorreu de maneira muito tranquila. A primeira dificuldade dos trios foi identificar a palmeira (ponto inicial), o que está ilustrado na Figura 9.

Figura 9 – A dificuldade em identificar a palmeira

Alguns procuraram uma palmeira grande. Outros procuraram uma palmeira mais antiga. Um dos grupos percebeu um tronco de árvore cortado. Como era uma árvore aparentemente mais antiga, esse grupo escolheu aquele como sendo seu ponto de partida, conforme Figura 10.

Figura 10 – Grupo associou o tronco cortado ao ponto inicial

Alguns trios se subdividiram para que as chances aumentassem. Depois de discutirem sobre qual ponto inicial tomar, decidiram escolher três pontos de partida diferentes. Foi permitida a mudança na regra para que eles ficassem curiosos sobre o fato de todos chegarem ao mesmo local.

Como a caça ao tesouro foi feita de forma independente, sem que um trio acompanhasse os outros, usamos folhas de caderno com os nomes dos integrantes para marcar o local final que cada trio chegou após seguir as instruções recebidas.

Quando todos os trios terminaram a caçada, os estudantes foram para o campo e ficaram no ponto que determinaram como sendo o local em que o tesouro havia sido escondido. Diferente do esperado, nem todos ficaram na mesma posição. Na verdade, apenas dois estudantes de um dos trios que se subdividiu acharam o mesmo lugar. Todos os demais trios acharam locais diferentes. A diferença foi pequena, mas houve, como pode ser percebido na Figura 11.

Figura 11 – Os pontos achados pelos estudantes

Durante a discussão final, os estudantes que acharam o mesmo ponto final encabeçaram a discussão tentando convencer os demais colegas de que o ponto inicial era indiferente. Nesse momento, foi necessária a intervenção do professor para dizer-lhes que realmente não importava o ponto escolhido para iniciar a busca. Ao compreenderem a explicação do professor, a discussão passou a ser por que houve desencontro entre os destinos de cada trio. Os estudantes quiseram saber quais motivos os levaram a lugares diferentes. E eles mesmos elencaram algumas possíveis causas para o desencontro:

- dificuldade de andar em linha reta;

- o fato de um trio ter escolhido uma palmeira que ficava abaixo do nível do campo (portanto, precisou percorrer uma subida até chegar à trave) e isso deu diferença no número de passos dados após a rotação de 90º;

- dificuldade de determinar o ângulo de 90º;

- o fato de um estudante ter contado os passos até a goleira da direita e outro estudante ter contado os passos até a goleira da esquerda;

É interessante observar que, quando o professor disse que o ponto de partida não iria interferir na chegada ao destino correto, todos os estudantes acreditaram. Houve, sim, um questionamento vindo deles, mas os estudantes acreditaram no professor, sem nenhuma prova matemática do fato. No momento da discussão, o professor foi bastante enfático ao dizer que eles não poderiam ter se convencido com tanta facilidade. Chamamos a atenção deles para o fato de que, na Matemática, precisamos provar os fatos e não apenas acreditar neles. Destacamos aqui a importância fundamental de provar para os estudantes que o ponto inicial é indiferente, e esse é um dos objetivos da próxima atividade.

3.3Atividade 3

O objetivo dessa atividade é obter, através do aplicativo GeoGebra, uma ilustração da situação vivenciada na Atividade 2. A partir daí, utilizaremos o fato de o GeoGebra ser um aplicativo dinâmico, para que os estudantes percebam que a árvore inicial não importa para determinarmos o local onde está enterrado o tesouro.

Nessa atividade, serão desenvolvidos os seguintes conteúdos:

i. Ponto médio

ii. Rotação

Para a realização da atividade, além de dominarem o GeoGebra, os estudantes deverão ter os pré-requisitos abaixo:

i. Noções e proposições primitivas (ponto, reta, plano)

ii. Segmento de reta

iii. Ângulos

iv. Perpendicularidade

v. Domínio do GeoGebra

A atividade tem duração prevista de duas aulas (100 minutos) e será realizada no laboratório de informática, com a necessidade de ter instalado o GeoGebra nas máquinas do laboratório que serão utilizadas pelos estudantes.

Chegando ao laboratório, os estudantes sentarão individualmente. Depois de retomada a primeira atividade, o professor deve relembrar que cada grupo partiu de uma das árvores e, mesmo assim, todos acharam o tesouro. O professor vai recordar também que o tesouro sempre esteve no mesmo lugar e que as goleiras também permaneceram imóveis. Esses comentários tendem a chamar a atenção dos estudantes para o fato de que existem pontos fixos e pontos móveis na situação.

Alguns questionamentos que podem guiar esse momento inicial:

- O tesouro foi trocado de lugar de um grupo para outro? (Chamando a atenção para o tesouro, que ficou fixo.)

- Depois de escolhida a árvore, qual a primeira ação a ser feita? (Chamando a atenção para as goleiras, que permaneceram fixas.)

- A árvore inicial é importante para que se ache o tesouro? (Chamando a atenção para o ponto de partida, que mudou de um grupo para outro.)

- Por que a árvore inicial não interfere na descoberta do tesouro? (Essa é a pergunta final. Dependendo do andamento da atividade, uma sugestão para quem quiser aplicá-la é que se pode deixar essa pergunta para depois que os estudantes realizarem a atividade no GeoGebra.)

Os estudantes terão um tempo livre para analisar a situação e tentar reproduzi-la no computador. Isto é fundamental para que o estudante analise a atividade inicial e tente relacioná-la com o ambiente virtual. A atividade é individual, mas é importante incentivar a discussão entre os colegas.

O professor precisa estar preparado para alguns questionamentos relacionados às unidades de medidas, pois os estudantes terão os dados da atividade anterior anotados e poderão utilizá-los nessa etapa (é importante não dizer aos educandos que devem utilizar as anotações, pois essa ideia deve partir deles, os quais precisam sentir a necessidade de registrar as atividades). Caso surja essa pergunta, esta deve ser levada para o grande grupo e deve ser destacado pelo docente que foi a partir de uma necessidade como essa que surgiu a unidade de medida padrão. Mas é importante ressaltar também que, no nosso caso, as medidas variam de grupo para grupo (os passos são, em geral, diferentes de pessoa para pessoa) e que não irão interferir na resolução do problema. Isso já pode ser uma dica para que os estudantes percebam aonde queremos chegar.

Antes de apresentar a solução esperada que irá acontecer na próxima atividade, o professor deve reapresentar o problema e dar mais um tempo para que os estudantes analisem a situação. Este é o momento de passar nos computadores de cada um e analisar o que estão produzindo. Deve-se solicitar a eles que lhe expliquem a sua estratégia. O docente vai avaliar as construções, mas ainda não deverá corrigi-las. Depois de ouvir todos, deve convidar algum deles para apresentar sua solução ao grande grupo. O educador deve pedir para que a turma avalie a solução do colega. Fazer isso com o maior número possível de estratégias vai ser importante para que a turma perceba que, embora todos os grupos tenham feito a mesma atividade, cada um pode ter percebido a situação de uma maneira diferente. Essa troca vai enriquecer a atividade e alguns estudantes vão instrumentalizar os outros. Depois disso, é importante dar mais um tempo para quem ainda não conseguiu completar a tarefa antes de considerar a ação terminada. A solução esperada será apresentada na próxima atividade.

3.3.1 Relato da atividade 3

Como ocorre com algumas atividades em que um professor planeja, essa não transcorreu totalmente dentro do esperado. Quando a sequência de atividades foi pensada, esse era o momento preparado para que se percebesse que era indiferente a escolha do ponto inicial. Na prática, isso não aconteceu. Na realidade, os estudantes foram alertados na atividade anterior de que o ponto inicial não interferia no ponto final. Esse fato foi interessante, pois alguns questionamentos sugeridos para o professor ficaram sem sentido, porém surgiram, por parte dos estudantes, comentários interessantes:

- “devemos começar a atividade marcando o tesouro no GeoGebra?”

- “podemos colocar o ponto inicial na origem?”

- “podemos colocar o tesouro na origem?”

De alguma maneira, já podíamos perceber que os estudantes estavam fazendo a relação da situação real com o GeoGebra. Isso está ilustrado na Figura 12.

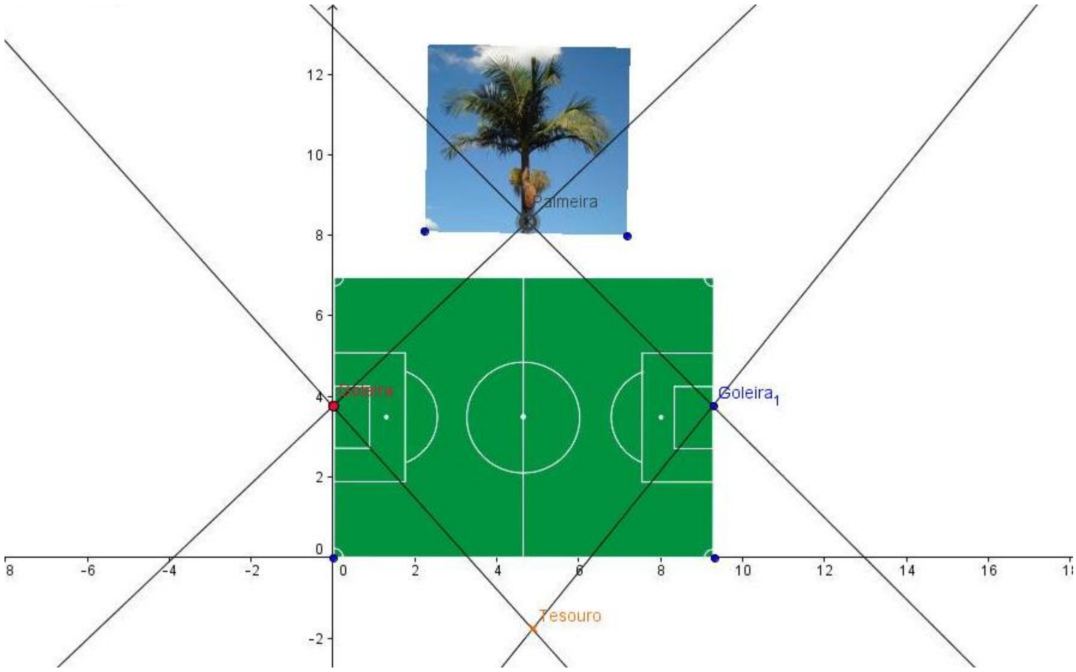


Figura 12 – Situação retratada por um dos estudantes

Os estudantes sentaram individualmente, mas logo pediram para que os trios fossem retomados. Eles quiseram utilizar o mapa e as anotações da atividade anterior. Mesmo sentados em trios, o professor exigiu que cada estudante criasse sua própria representação no GeoGebra, pois o objetivo era fazer com os educandos tivessem contato com o aplicativo e que conseguissem relacionar os conteúdos da atividade com a prática. Surgiram diversas sugestões de solução. Poucos quiseram dividir sua solução com o grupo, acreditamos que seja pelo medo de ter feito algo errado. O objetivo da atividade foi atingido, uma vez que os discentes conseguiram retratar, no aplicativo, a situação vivenciada.

3.4 Atividade 4

Depois de percebermos que a árvore inicial não interfere na localização do tesouro, vamos partir para a resolução matemática propriamente dita. Resolveremos o problema de três maneiras:

1) Utilizando o GeoGebra

2) Utilizando Geometria Analítica;

3) Utilizando Números Complexos.

Neste último caso, usamos o conceito de que multiplicar um número complexo pelo número *i*, a unidade imaginária, é o mesmo que girar 90°.

O professor vai apresentar três soluções possíveis para o problema. Serão trabalhados os conteúdos a seguir:

i. Ponto médio

ii. Distância entre dois pontos

iii. Perpendicularidade

iv. Rotação

v. Ponto médio

Como pré-requisitos da atividade, temos:

i. Noções e proposições primitivas (ponto, reta, plano)

ii. Segmento de reta

iii. Ângulos

iv. Domínio do GeoGebra

v. Números Complexos (rotação de 90°)

A atividade será desenvolvida em dois períodos (100 minutos) em uma sala equipada com lousa digital para que todos possam acompanhar a solução proposta pelo professor no GeoGebra. A aula será dividida em três momentos distintos, um para cada solução.

Inicialmente, vamos construir uma solução geométrica para o problema. Aproveitando o dinamismo do aplicativo GeoGebra, vamos mostrar aos estudantes que o ponto inicial realmente não interfere na posição final (tesouro). Em seguida, apresentaremos uma solução analítica para que fique provado que o ponto inicial é irrelevante para a resolução do problema (para que o tesouro seja encontrado).

3.4.1 Reproduzindo a situação no GeoGebra

Passo 01 – Inicialmente, com a opção “Malha” desativada no GeoGebra e com a janela de álgebra fechada, marcamos o ponto de partida da nossa busca (ponto A). Cabe destacar o fato de a localização do ponto A não interferir, pois cada grupo partiu de um local distinto. É importante relacionar os pontos (entes matemáticos abstratos) com as localizações geográficas dos objetos (árvore inicial, goleiras, tesouro). A Figura 13 ilustra a situação.

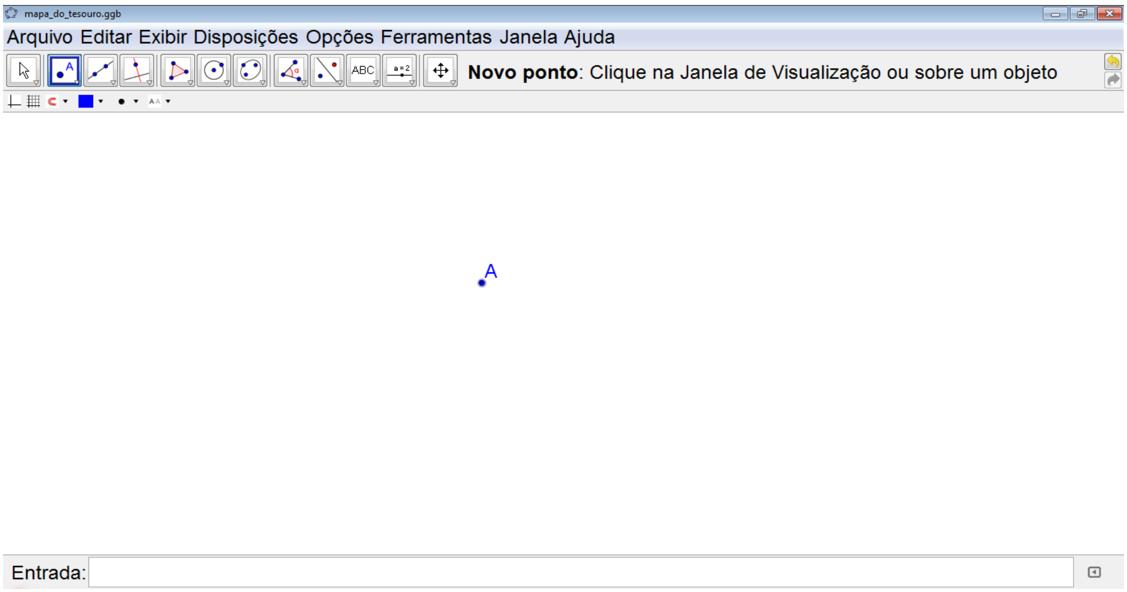


Figura 13 – Ilustração do Passo 01

Passo 02 – Marcamos a localização da primeira trave da goleira da esquerda (ponto B). A Figura 14 ilustra a situação.

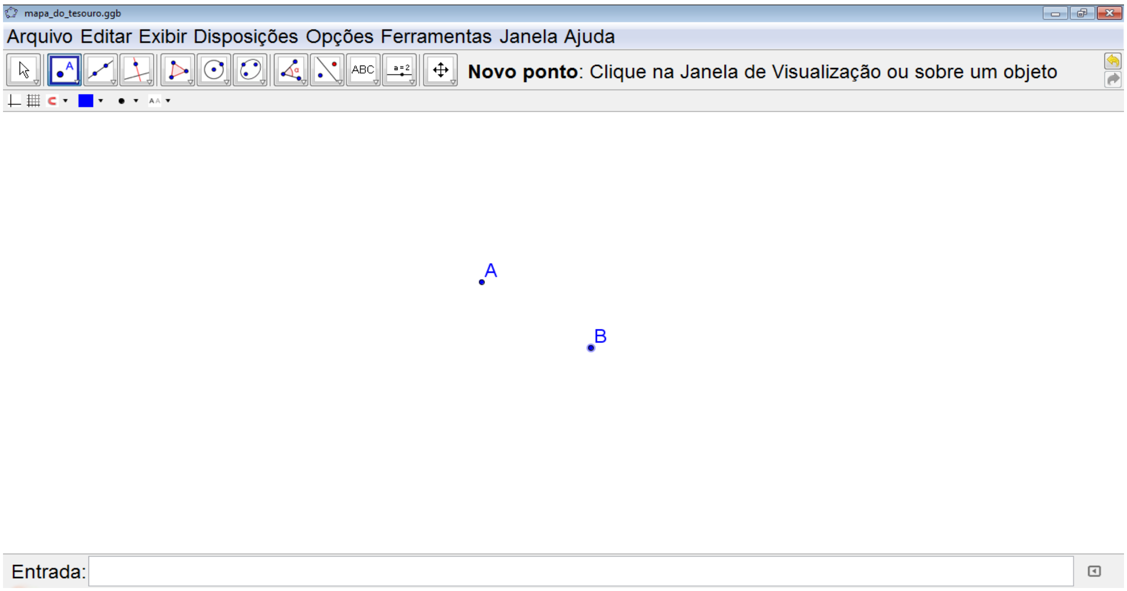


Figura 14 – Ilustração do Passo 02

Passo 03 – Para traçarmos uma perpendicular, devemos traçar antes o segmento AB. A Figura 15 ilustra a situação.

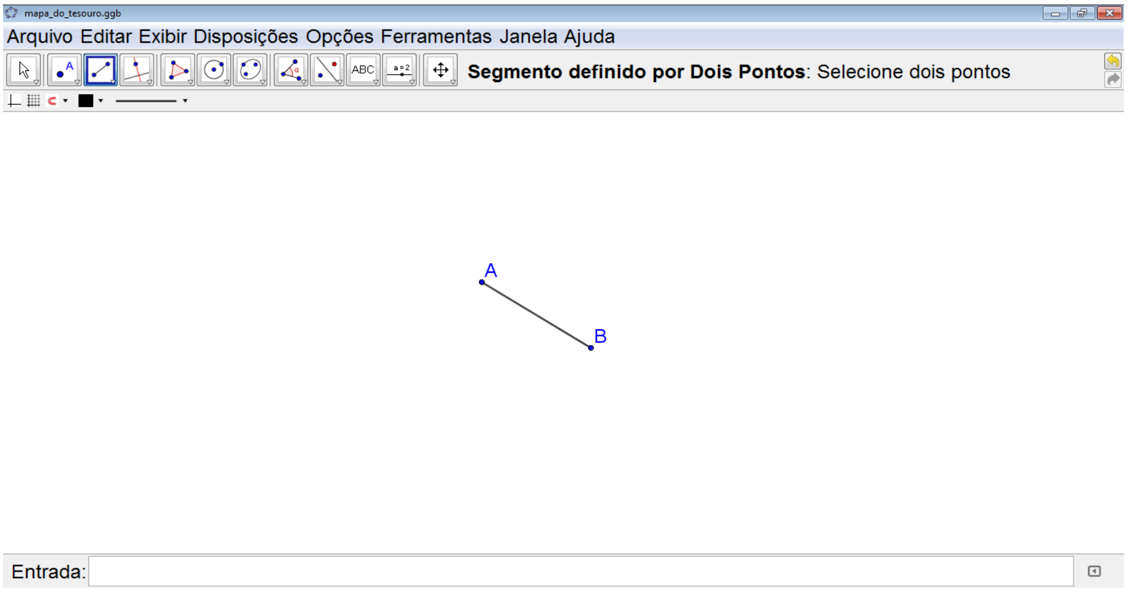


Figura 15 – Ilustração do Passo 03

Passo 04 – Traçamos, por B, uma perpendicular ao segmento AB. (Recordemos que a instrução do mapa mandou girar 90°. Vale lembrar que uma reta é um conjunto infinito de pontos, por isso ela não tem começo nem fim). A Figura 16 ilustra a situação.

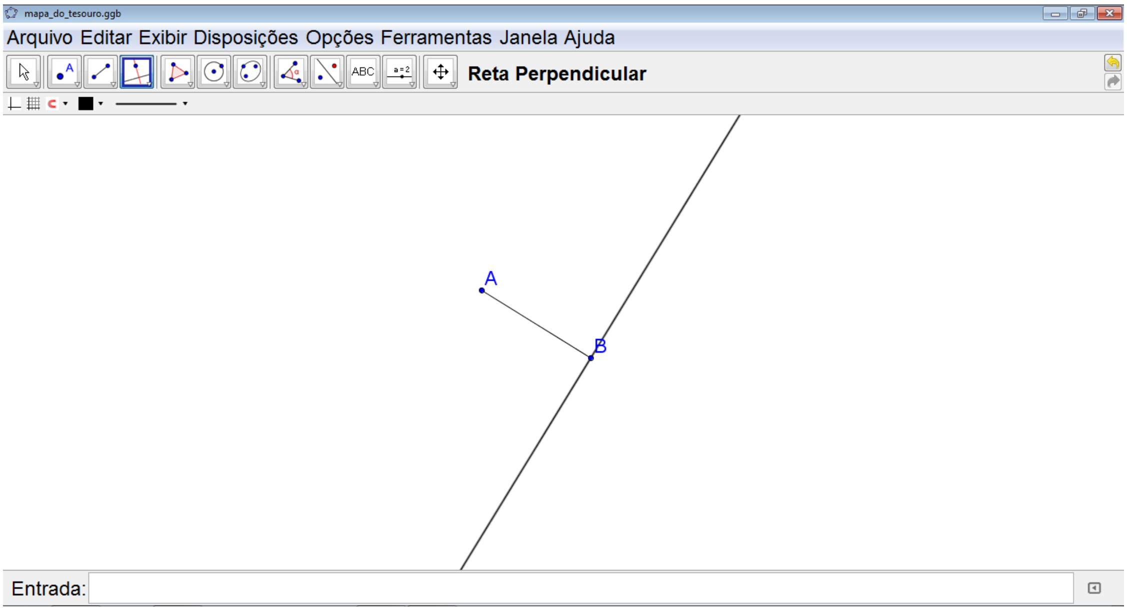


Figura 16 – Ilustração do Passo 04

Passo 05 – É preciso traçar a circunferência com centro em B e raio AB. (Cabe destacar que a circunferência é o lugar geométrico dos pontos equidistantes a um ponto dado. Utilizamos a circunferência porque devemos, segundo o mapa, fazer uma marca na perpendicular que tenha a mesma distância de A até B). A Figura 17 ilustra a situação.

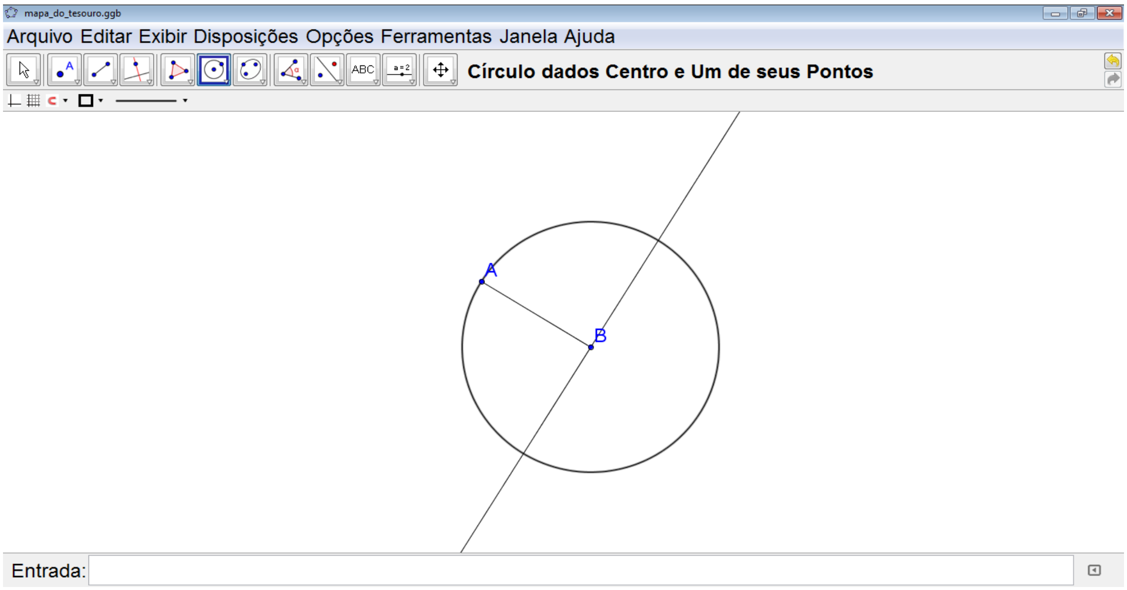


Figura 17 – Ilustração do Passo 05

Passo 06 – Marcamos os pontos de intersecção da reta perpendicular com a circunferência. (Destacamos os dois pontos e questionamos qual deles devemos utilizar.

Lembramos aos educandos que as instruções do mapa mandaram girar à direita e caminhar o mesmo número de passos). A Figura 18 ilustra a situação.

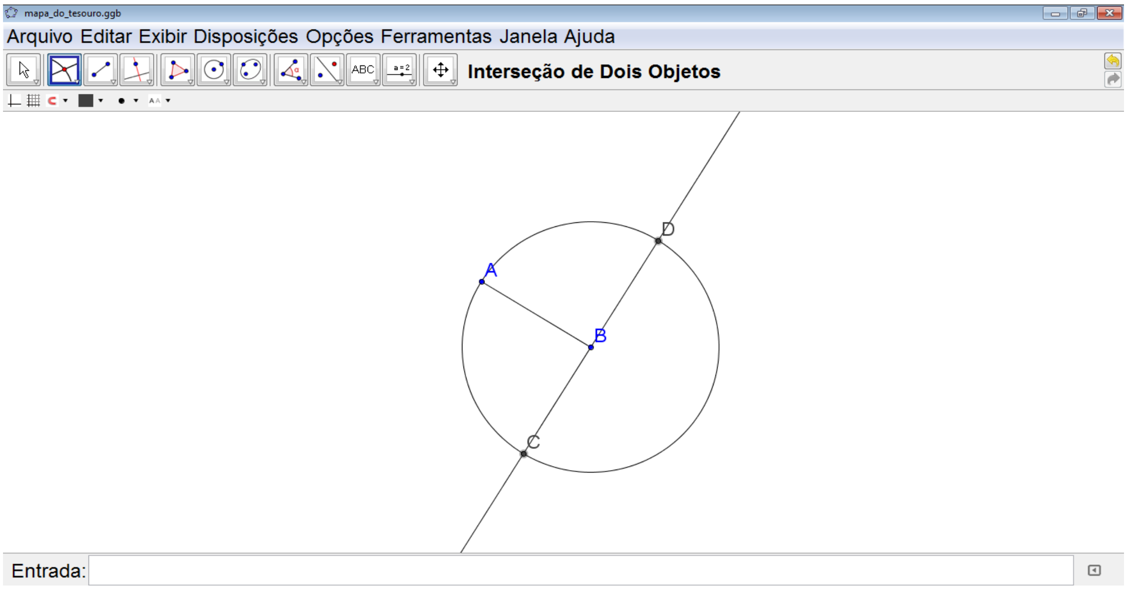


Figura 18 – Ilustração do Passo 06

Passo 07 – Marcamos a localização da primeira trave da goleira da esquerda (ponto E). A Figura 19 ilustra a situação.

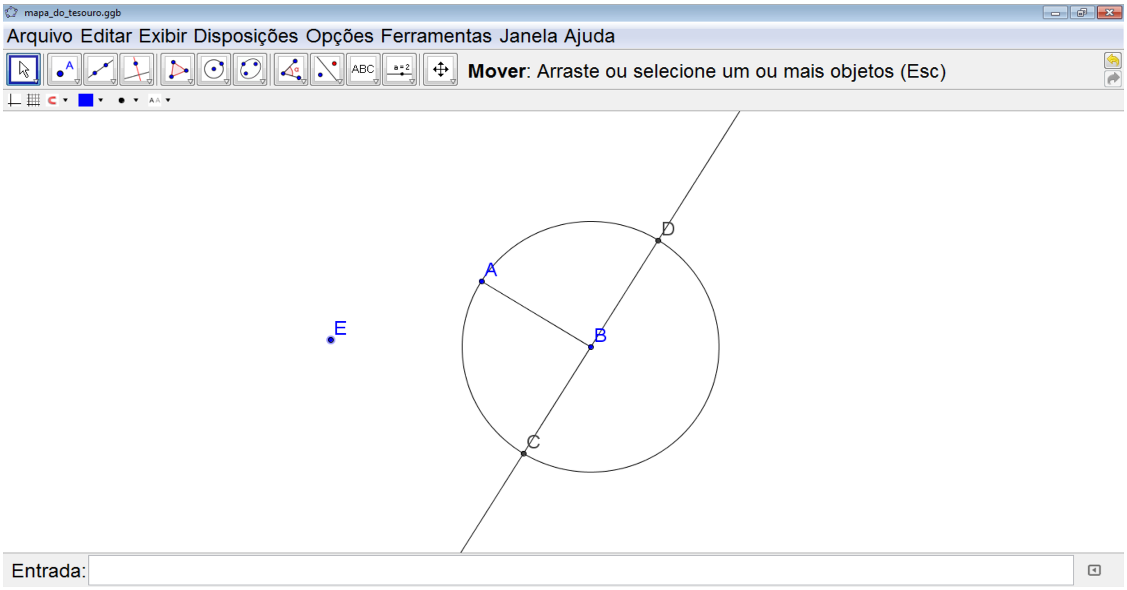


Figura 19 – Ilustração do Passo 07

Passo 08 – Para traçarmos uma perpendicular, devemos traçar antes o segmento AE. A Figura 20 ilustra a situação.

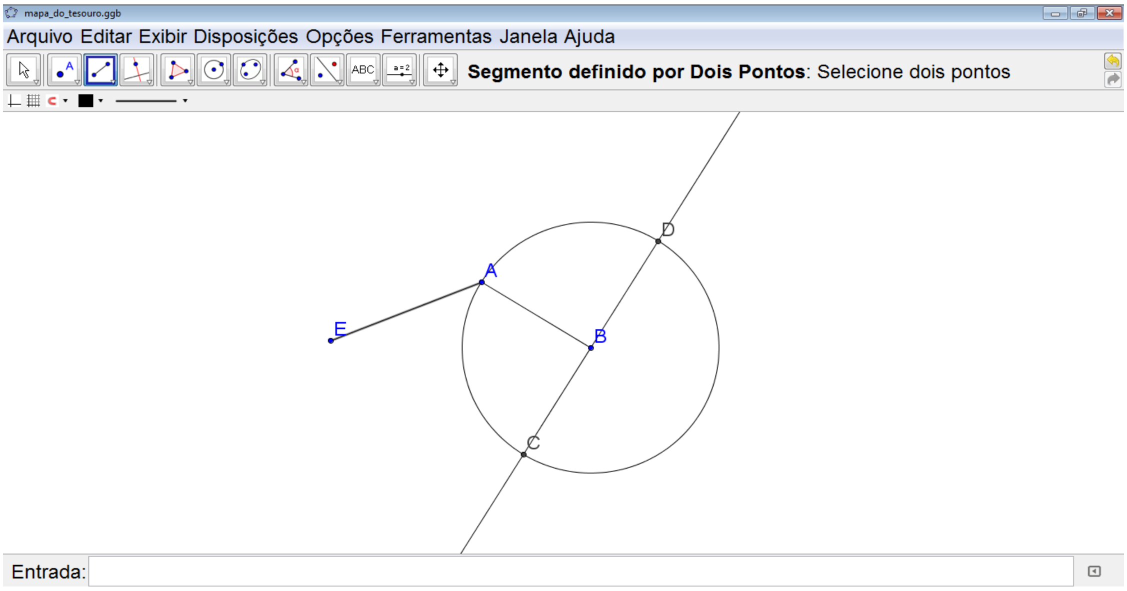


Figura 20 – Ilustração do Passo 08

Passo 09 – Traçamos, por E, uma perpendicular ao segmento AE. (Pois as instruções do mapa mandam girar 90°. Lembremo-nos de que uma reta é um conjunto infinito de pontos, por isso ela não tem começo nem fim). A Figura 21 ilustra a situação.

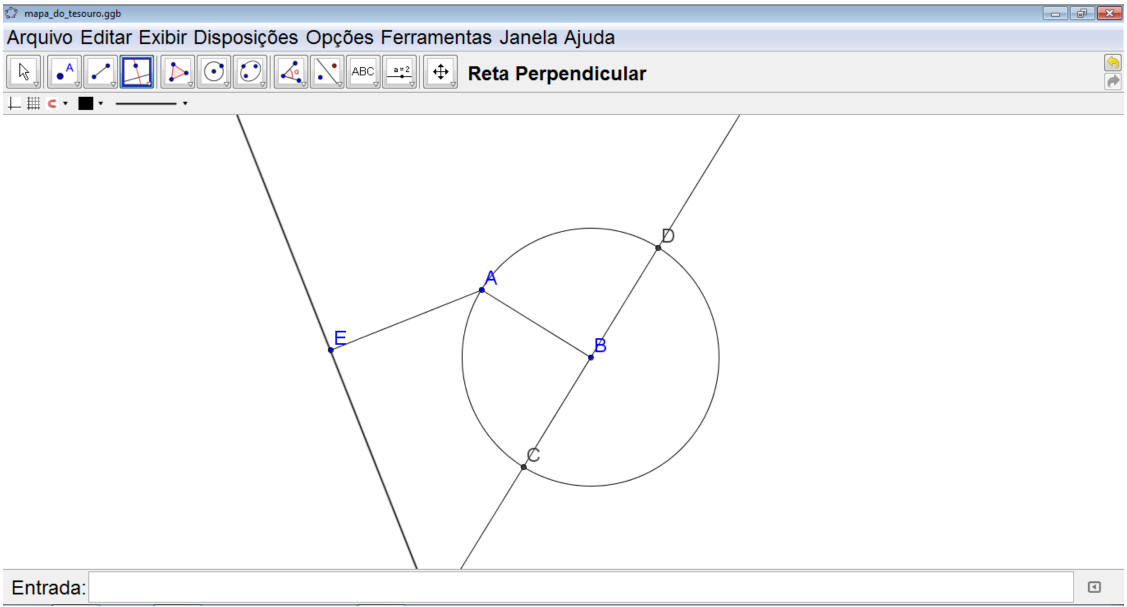


Figura 21 – Ilustração do Passo 09

Passo 10 – Traçamos a circunferência com centro em E e raio AE. (Destacamos novamente que a circunferência é o lugar geométrico dos pontos equidistantes a um ponto dado. Utilizamos a circunferência porque devemos, segundo o mapa, fazer uma marca na perpendicular que tenha a mesma distância de E que o A). A Figura 22 ilustra a situação.

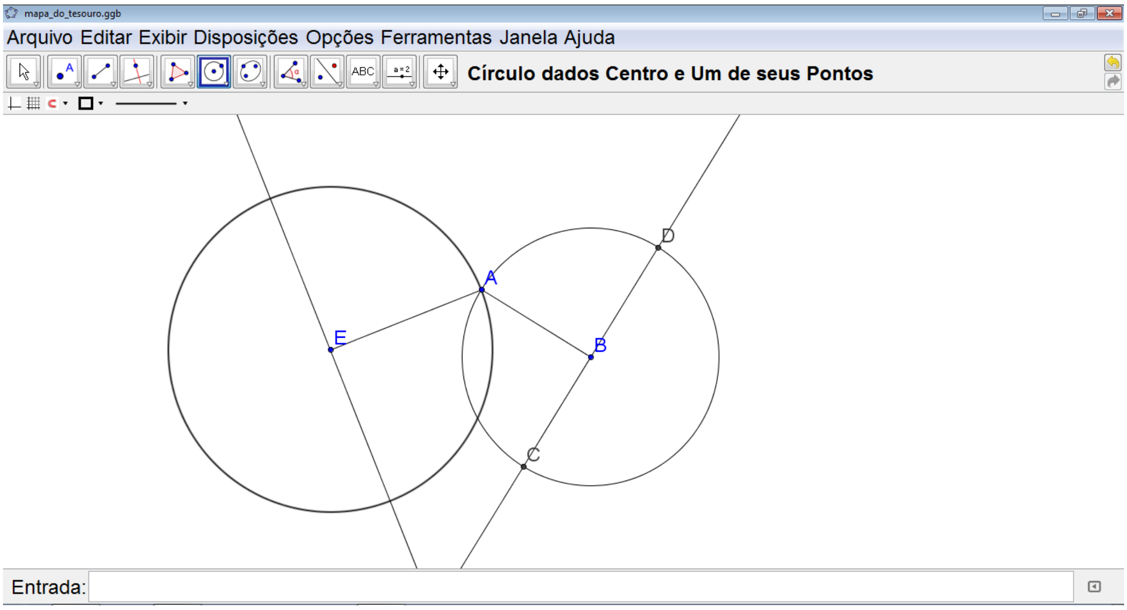


Figura 22 – Ilustração do Passo 10

Passo 11 – Marcamos os pontos de intersecção da reta perpendicular com a circunferência. (Questionamos qual dos dois pontos devemos utilizar. É preciso lembrar que o mapa mandou girar à esquerda e caminhar o mesmo número de passos). A Figura 23 ilustra a situação.

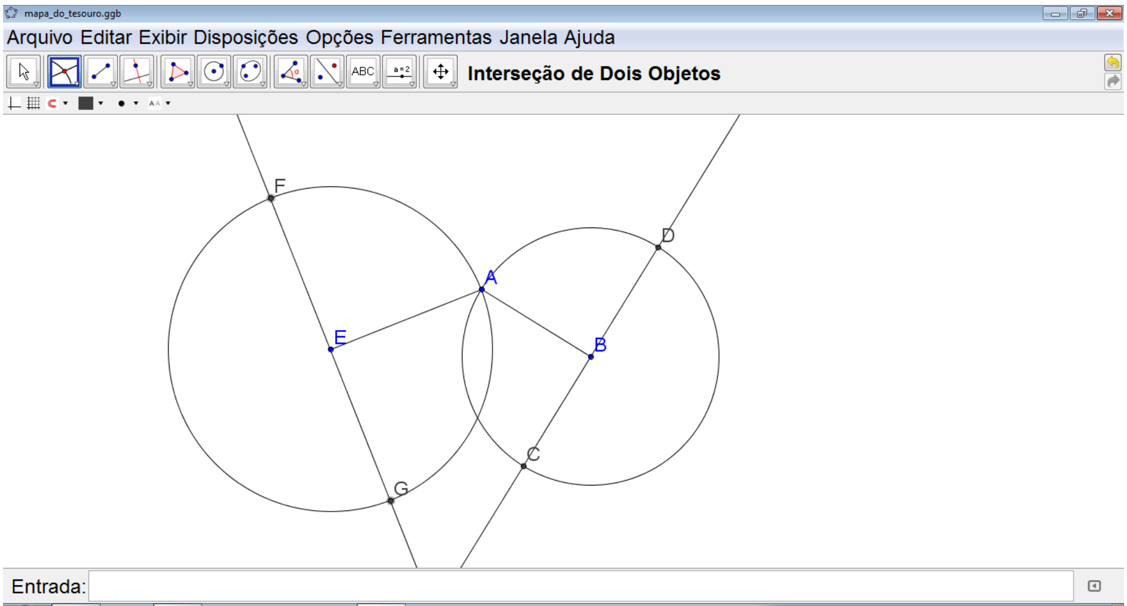


Figura 23 – Ilustração do Passo 11

Passo 12 – O mapa trouxe a seguinte informação: "O tesouro está enterrado exatamente na reta que liga as duas marcas..." Vamos traçar a reta que liga os pontos C e G. A Figura 24 ilustra a situação.

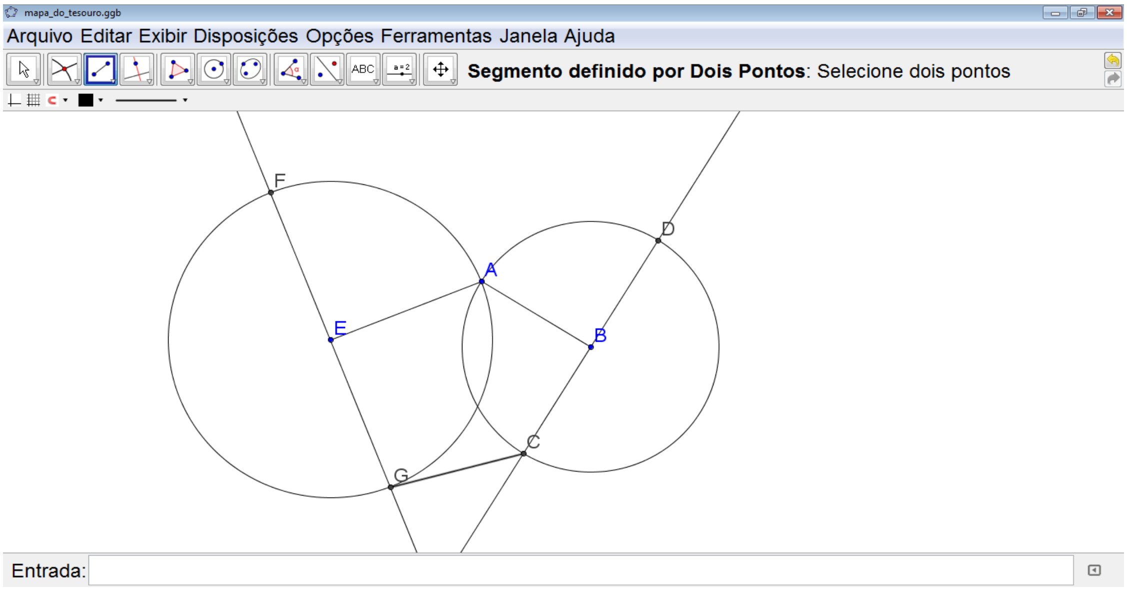


Figura 24 – Ilustração do Passo 12

Passo 13 – Segundo a instrução do mapa que diz: "...e à mesma distância das duas marcas", marcamos o ponto médio entre G e C, denotado por H. A Figura 25 ilustra a situação.

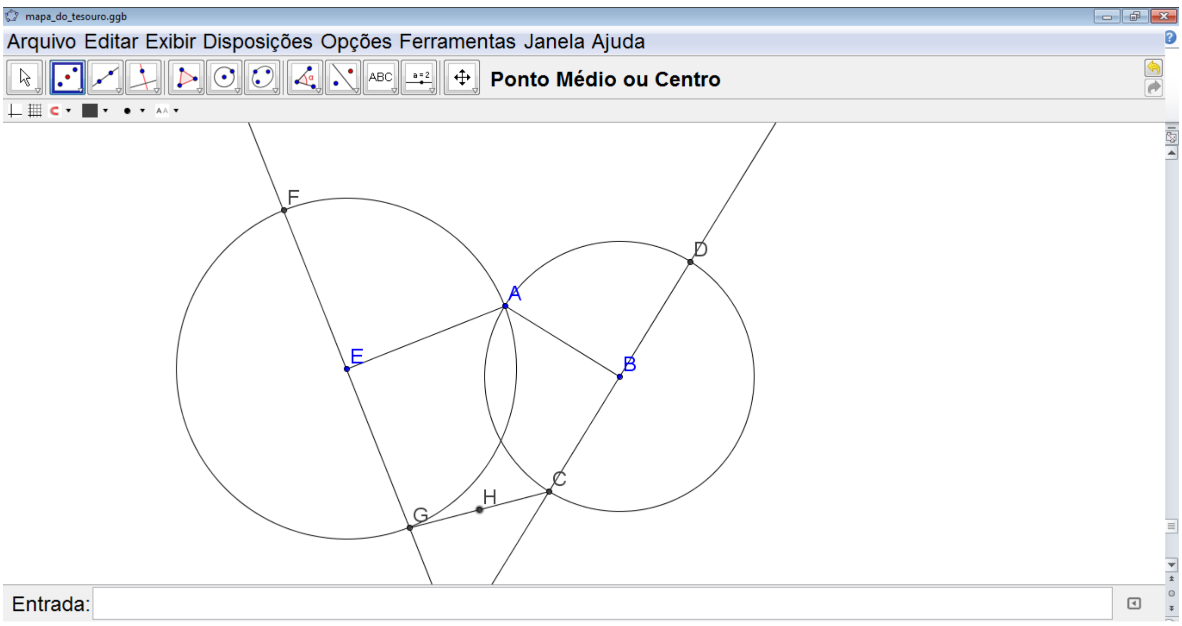


Figura 25 – Ilustração do Passo 13

Passo 14 – Para facilitar a visualização, podemos ocultar o traçado de apoio. A Figura 26 ilustra a situação.

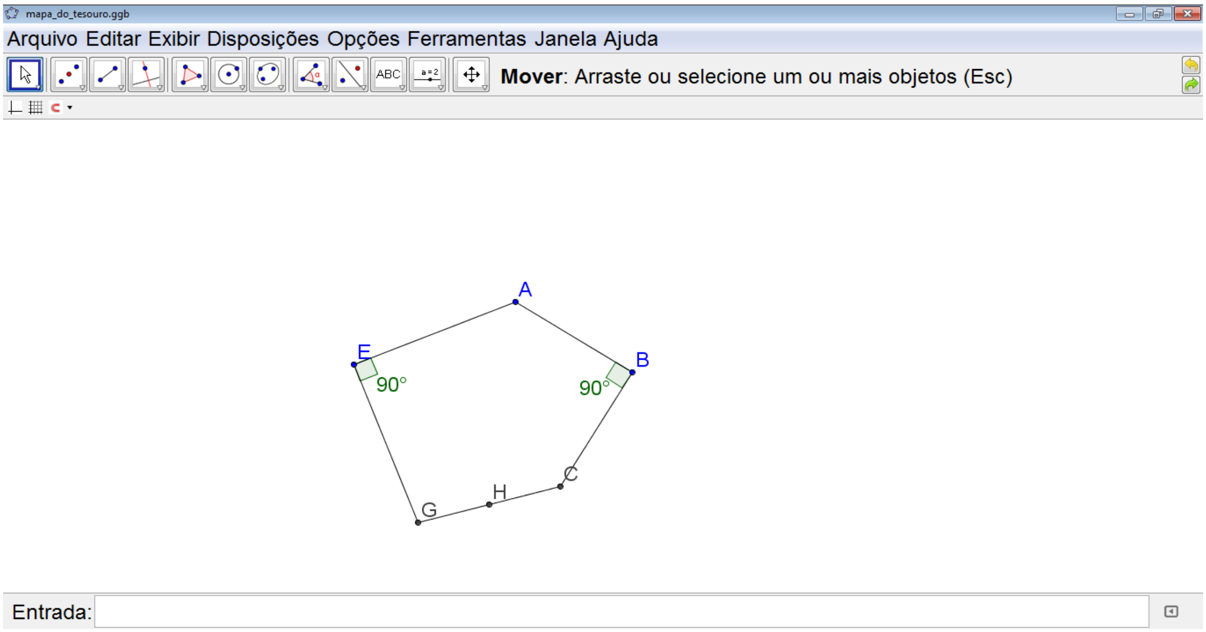


Figura 26 – Ilustração do Passo 14

3.4.2 Relato da Atividade 3.4

Quando a situação foi reproduzida no GeoGebra pelo professor, os estudantes ficaram bastante curiosos. A discussão foi ampla. Todos queriam saber o porquê de o docente ter elegido aquela sequência de pontos para marcar. Voltou à pauta a curiosidade com relação a qual ponto deve ser marcado primeiro. O interessante é que, depois das discussões, eles entenderam que a situação apresenta 3 pontos fixos (as duas goleiras e o tesouro) e um ponto móvel (o ponto inicial). Um dos momentos mais interessantes foi quando os próprios estudantes concluíram que o sistema cartesiano era “algo muito relativo”, pois poderíamos ter escolhido outros eixos de referência e outra origem. Eles perceberam que podemos representar uma mesma situação de inúmeras maneiras, dependendo da escolha de cada um.

Por ser o GeoGebra um software dinâmico, o professor pôde movimentar o ponto inicial (ponto A) sem que o tesouro mudasse de lugar. Essa manipulação, mudando o ponto inicial de lugar, sem que o ponto final (ponto H) se alterasse, foi fundamental para “convencer” os estudantes de que todos deveriam ter chegado ao mesmo local, independente de onde começassem a busca ao tesouro. Esse foi, desde o início, o grande objetivo do trabalho. Até então, os estudantes já sabiam que o ponto de partida não interferiria na chegada, mas ainda não haviam sido convencidos disso.

Depois da construção feita, comentamos que até agora nada havia sido provado. Havíamos construído uma conjectura. Precisávamos, portanto, de um método matemático rigoroso para que nossa conjectura fosse comprovada. Retomamos o comentário feito por um estudante sobre o plano cartesiano ser "algo muito relativo". A partir daí, introduzimos a ideia da Geometria Analítica e aproveitamos para inserir a solução seguinte.

3.5.2 Resolvendo o problema utilizando Geometria Analítica

01 – Inicialmente, analisamos a Figura 27, uma foto aérea do local que retrata a situação-problema.

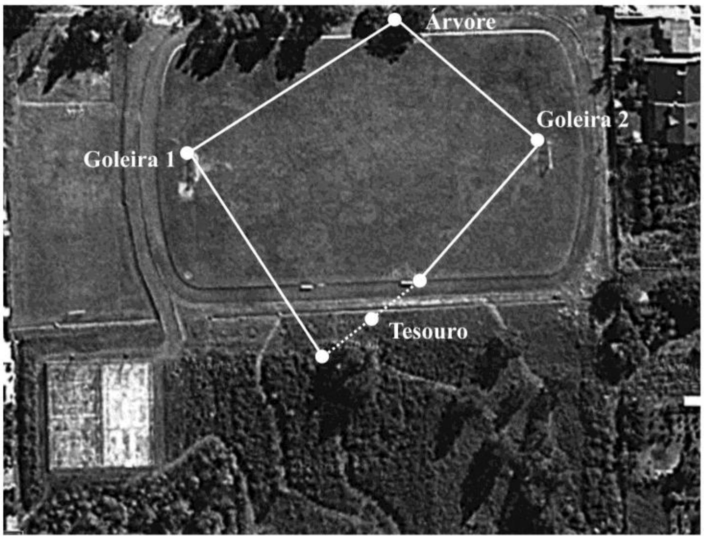


Figura 27 – Foto aérea do local (Foto: Google)

02 – Trazendo presentes os conceitos de Geometria Analítica já estudados, vamos enquadrar a situação acima no sistema cartesiano. O professor deve promover a discussão de onde colocar os eixos para que a Geometria Analítica seja uma aliada na resolução. Também é preciso construir com os estudantes a ideia de que a melhor maneira é definirmos o eixo horizontal como sendo a reta que une as duas goleiras, conforme a Figura 28, com a origem na Goleira 1.

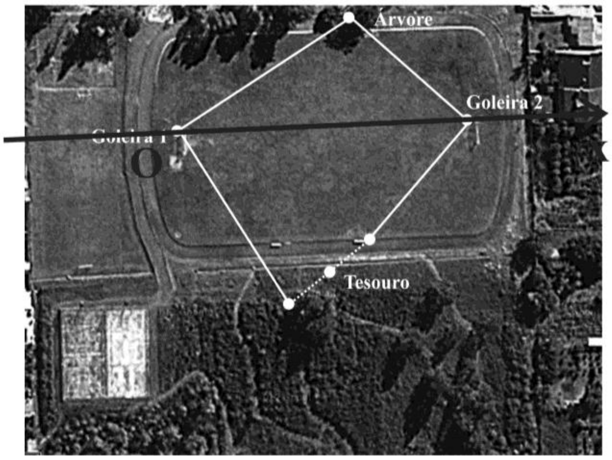


Figura 28 – O eixo horizontal

03 – Por definição, os eixos do sistema cartesiano são ortogonais. Assim, podemos traçar o eixo vertical em O, conforme Figura 29.

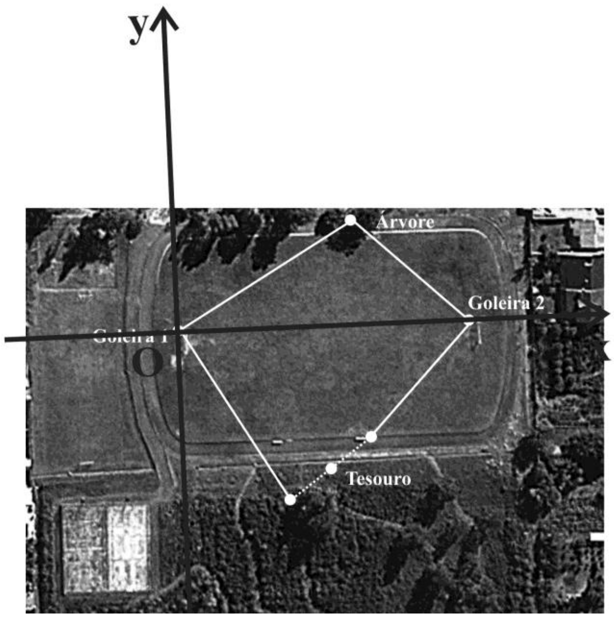


Figura 29 – O eixo vertical

04 – Com isso, temos a seguinte situação, retratada na Figura 30:

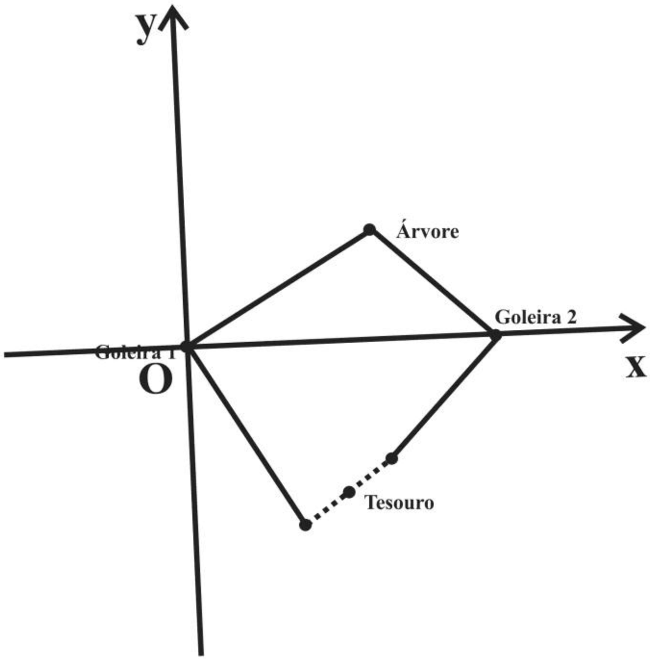


Figura 30 – A representação no sistema cartesiano

05 – Vamos agora, conforme a Figura 31, determinar as coordenadas de cada um dos pontos do esquema acima, relacionando os entes matemáticos com os respectivos pontos reais que representam:

Origem – Goleira 1

Ponto A – Goleira 2

Ponto B – Ponto de partida (árvore inicial)

Ponto C – Marca cuja distância até A é igual à medida de AB

Ponto D – Marca cuja distância até O é igual à medida de OB

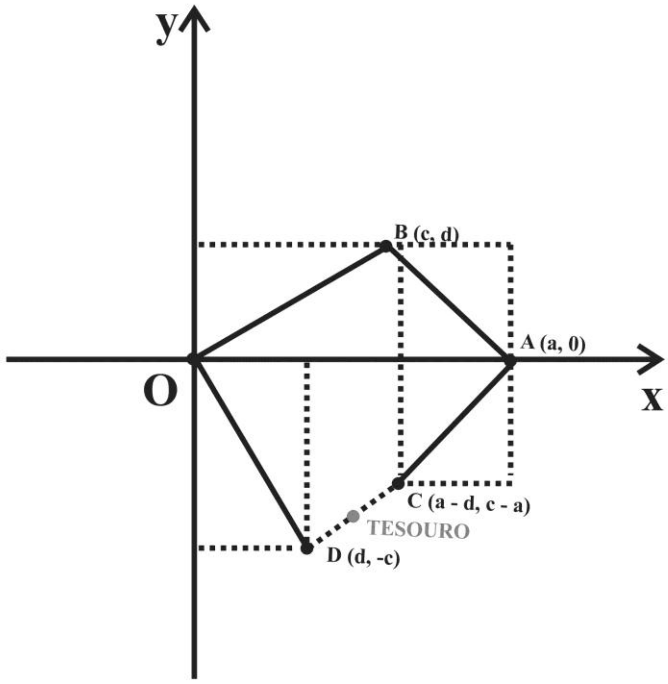


Figura 31 – As coordenadas dos pontos

06 – Usando a definição de ponto médio, vamos calcular as coordenadas do ponto que representa o Tesouro:

$$T = \left(\frac{(a-d+d)}{2}, \frac{(c-a-c)}{2} \right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{-a}{2} \right)$$

O tesouro está enterrado em um ponto cujas coordenadas dependem exclusivamente de *a*, que é a distância entre as goleiras. Assim, quaisquer que sejam as coordenadas (*c, d*) do ponto B, o ponto T não mudará de lugar.

3.5.3 Relato da Atividade

Quando apresentamos a primeira imagem da situação (Figura 27 – a foto aérea do local com a representação da situação), questionamos onde seria o melhor ponto para escolhermos como referência, como origem. Alguns disseram que deveria ser escolhida a palmeira, mas logo a própria turma percebeu que não seria uma boa escolha, pois cada trio havia escolhido um local diferente como início. Além disso, nossa ideia era mostrar que o local de indicação da palmeira era indiferente. Logo, seria inviável usarmos um ponto que é indiferente como sendo nossa referência, pois era um ponto que mudava de grupo para grupo. Para ser nossa referência, segundo conclusão do grupo, deveríamos escolher um ponto fixo.

Como a turma era composta por estudantes das três séries do Ensino Médio, a discussão foi muito rica, pois quem estava no 3° ano conseguiu contribuir um pouco mais. Ao mesmo tempo, os estudantes do primeiro ano e do segundo ano tiveram um primeiro contato, bastante intuitivo, com a Geometria Analítica. A parte mais delicada dessa explicação foi chegar às coordenadas dos pontos C e D. Foi um dos momentos em que os estudantes tiveram bastante dificuldade. Depois de muita discussão, conseguimos chegar às coordenadas procuradas. Calcular o ponto médio foi simples.

3.5.4 Utilizando Números Complexos

O professor deve associar os pontos da situação real com Números Complexos representados no plano de "Argand-Gauss" (ver Figura 32) e a trajetória percorrida pelos estudantes a vetores, uma boa oportunidade para retomar soma e subtração de vetores e ainda associá-las a uma interpretação geométrica.

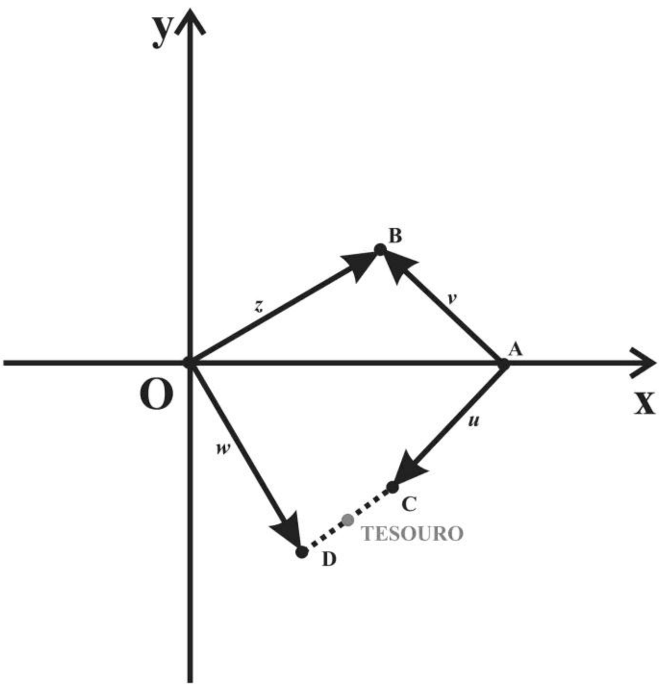


Figura 32 – Situação ilustrada em um plano de Argand-Gauss

Pretendemos determinar o número complexo associado ao ponto onde está o tesouro. Como já sabemos que ele é o ponto médio entre C e D, temos a necessidade de determinarmos os Números Complexos associados aos pontos C e D. Aqui aparece uma situação concreta na qual se faz necessária a multiplicação de Números Complexos. Retomando a ideia de rotação, cuja multiplicação de um vetor pela unidade imaginária i faz com que ele sofra uma rotação de 90° (ou de –90° caso seja multiplicado por $-i$), podemos relacionar as coordenadas dos pontos B e D e dos pontos B e C. Vamos generalizar o ponto B(a, b) e o ponto A (c, 0), de acordo com a Figura 33.

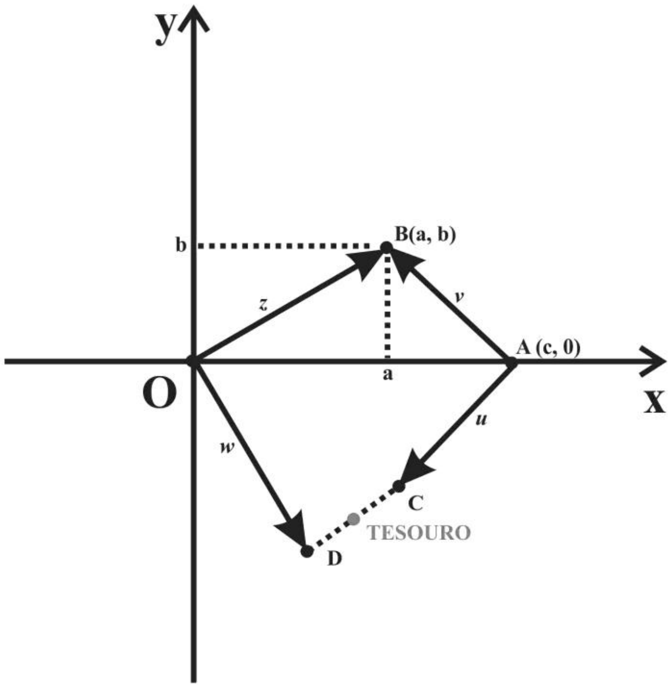


Figura 33 – As coordenadas

A partir de B, temos $z = a + bi$

O vetor w é obtido rotacionando o vetor z em – 90º, ou seja, multiplicando o vetor z por $-i$.

$w = z.(-i)$

$w = (a + bi).(-i)$

$w = b - ai$

Logo, o ponto D está associado ao complexo $w = b - ai$ e, consequentemente, ao ponto $(b, -a)$, conforme a Figura 34.

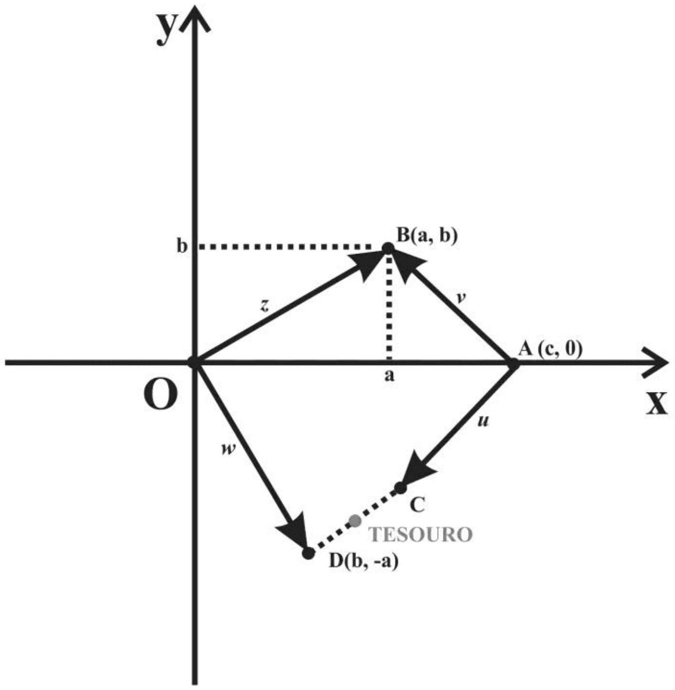


Figura 34 – As coordenadas do ponto D

Agora, vamos determinar o complexo C, representado pelo vetor *u*. Para isso, precisamos primeiro determinar o vetor $v = B - A$ e, em seguida, multiplicá-lo por *i*.

Determinando o vetor $v = B - A$

$v = (a + bi) - (c + 0i)$

$v = (a - c) + bi$

Conhecendo o vetor *v*, basta rotacioná-lo 90° (multiplicá-lo por *i*) e obteremos o vetor *u*.

$u = v.i$

$u = [(a - c) + bi].i$

$u = -b + (a - c)i$

Como o vetor $u = C - A$, temos:

$-b + (a - c)i = C - (c + 0i)$

$C = (c - b) + (a - c)i$

Com isso, obtemos as coordenadas de C e D, conforme a Figura 35.

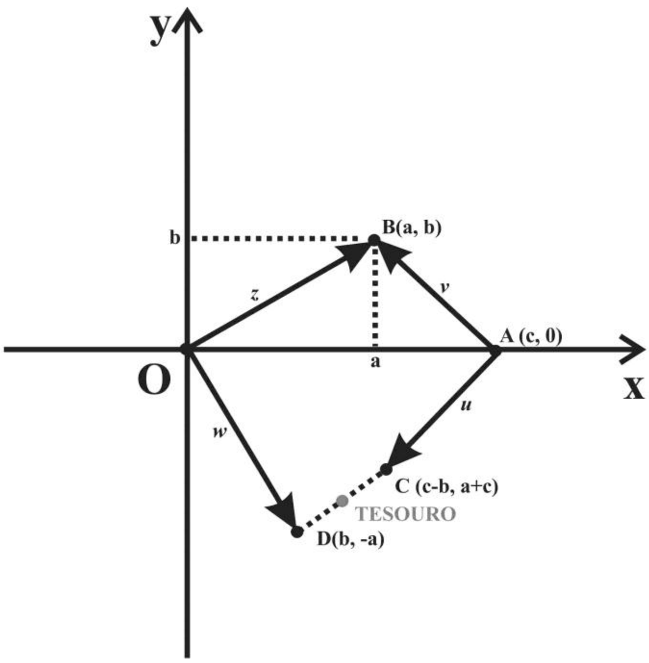


Figura 35 – As coordenadas do ponto C

A partir das coordenadas de *C = (c –b, a –c)* e de *D = (b, –a)*, podemos calcular as coordenadas do ponto onde está enterrado o tesouro através do ponto médio entre C e D.

$$\text{Tesouro} = \left(\frac{c-b+b}{2}, \frac{a-c-a}{2}\right) = \left(\frac{c}{2}, \frac{-c}{2}\right)$$

3.5.5 Relato da Atividade 3.5.4

Essa parte da atividade, relacionada à aplicação dos Números Complexos, foi a mais complicada. Apenas os estudantes do 3° ano do Ensino Médio conheciam o assunto. Mesmo assim, havia pouco conhecimento sobre vetores e operações com vetores. Decidimos dar um embasamento para o grupo antes de partir para a solução propriamente dita (conforme ANEXO A). Foi difícil justificar aos estudantes a ligação entre o plano cartesiano e o plano de Argand-Gauss; como eles pouco sabiam sobre vetores, rotacionar um vetor também foi trabalhoso.

Numa próxima aplicação, seria necessário trabalhar mais profundamente os conceitos exigidos para compreensão dessa atividade. Além disso, possivelmente não apresentaríamos esse desafio aos estudantes do 1° ano e do 2° ano do Ensino Médio. Foi o único momento, em todo o trabalho, que não houve uma discussão entre estudantes e professor. Os estudantes tiveram muitas dúvidas e pouco acrescentaram. Talvez pelo fato de que essa aplicação (rotação) não seja um assunto abordado em sala de aula. A única vantagem vista pelos estudantes foi visualizar as coordenadas do ponto D (em relação ao ponto B). Realmente, essa solução ficou longe da compreensão da turma.

3.5.6 Atividade 5 – Encerramento

Essa atividade foi planejada com o objetivo de entregar aos estudantes, de maneira simbólica, o tesouro que os irmãos maristas enterraram no campo de futebol do Parque Marista São Luís. Essa atividade será aplicada apenas futuramente, quando o trabalho for realizado nas turmas regulares. Quando a atividade for aplicada, a intenção é de retornar ao campo e, aí sim, ser descoberto o tesouro. Ilustrado por um hábito, igual aos que eram usados pelos irmãos maristas há 110 anos.O tesouro representa a simplicidade dos cristãos e a disposição de sempre servir ao próximo (ver Figura 36).

Figura 36 – O hábito usado pelos irmãos maristas há 110 anos

Sob responsabilidade do setor de Pastoral do Colégio Marista São Luís, os estudantes participaram de um momento de formação espiritual onde conheceram um pouco da mística do hábito marista. O encontro durou cerca de 50 minutos e, a partir da leitura de um trecho do livro “Vida de José Bento Marcelino Champagnat”, os estudantes conheceram o sentido do uso do hábito pelos antigos irmãos maristas. Esse momento justificou-se, especialmente, pelo seu papel no que diz respeito à contextualização do presente trabalho. Essa preocupação, de tentar reunir em uma mesma prática pedagógica muitos elementos que estão presentes no cotidiano dos estudantes e do local onde a proposta será aplicada, garante uma contextualização mais eficaz.

CONCLUSÃO

Essa dissertação, ao ser proposta, tinha como principal objetivo apresentar uma atividade que auxiliasse o professor para diminuir a distância entre os conceitos teóricos trabalhados em sala de aula e a prática. A escolha da Geometria deu-se pela nossa preocupação com a maneira como, de um modo geral, ela costuma ser trabalhada. Ao adaptar à realidade dos estudantes um problema já conhecido no meio acadêmico (o problema do Mapa do Tesouro), o desafio foi dar significado aos conhecimentos adquiridos ao longo da história escolar de cada um. Com isso, o trabalho se tornaria algo significativo para os jovens.

Depois da motivação inicial, na qual apresentamos a proposta e o cronograma, partimos para a realização do trabalho. A saída do colégio, as aulas em diferentes ambientes, o uso do computador como instrumento pedagógico, a interação entre estudantes de várias séries e as constantes discussões em torno das atividades criaram um envolvimento muito grande dos estudantes com a atividade. Ficou claro que se fazem necessárias práticas inovadoras no ensino da Geometria, uma vez que simples conceituações, muitas vezes desconexas e sem sentido útil para o estudante, atrapalham o seu amadurecimento. O desafio faz com que o jovem desenvolva o principal ingrediente do raciocínio lógico: a ideia.

Na atividade, percebemos que os estudantes sentiram-se desafiados. A vontade de descobrir o local exato do tesouro fez com que os conhecimentos matemáticos fossem importantes para eles naquele momento. Sendo assim, passou a fazer sentido ter ciência de conceitos outrora puramente abstratos como, por exemplo, perpendicularidade e ponto médio. Experimentar os conceitos e, de certa forma, vivenciá-los, tornou o conhecimento significativo, como percebemos nesse momento do trabalho. A motivação (a localização do tesouro) gerou no estudante o principal elemento para o aprendizado: a vontade de aprender.

Por se tratar de uma geração acostumada com o manuseio de novas tecnologias, retratar a situação real em um ambiente virtual foi uma prática que se mostrou bastante útil. Diversas foram as contribuições dos estudantes, como percebemos no relato da atividade. Para a maioria deles, este foi o primeiro contato com o GeoGebra e o aplicativo foi bastante explorado. Porém, percebemos a necessidade de trabalhar de mais aprofundada alguns conceitos geométricos, especialmente quando se trata dos Lugares Geométricos relacionados à parte dinâmica do programa. Sem conhecer, por exemplo, a definição formal de circunferência, poucos estudantes pensaram nessa saída para representar no GeoGebra dois pontos que estavam à mesma distância de um ponto dado (o ponto inicial e o ponto marcado após caminharem o mesmo número de passos em relação à trave).

Quando a atividade foi para a sala de aula e o professor passou a ser o centro do conhecimento, numa dinâmica muito semelhante à encontrada na grande maioria das salas de aula da educação básica no Brasil, foi necessária uma atenção especial para não desmotivar os estudantes. A estratégia escolhida foi promover discussões para utilizar as ideias dos estudantes. Mais uma vez, a necessidade do embasamento teórico ficou evidente, uma vez que os estudantes com menos bagagem matemática participaram menos das discussões.

Concebido como uma sugestão de proposta pedagógica prática para professores de Matemática do Ensino Médio, o presente trabalho passa a fazer sentido no instante em que um colega professor utiliza as ideias aqui sugeridas fazendo adaptações à realidade do local onde o trabalho será aplicado. O educador que fizer uso desta proposta deve ser capaz de relacionar a prática com a teoria, sempre partindo das observações e apontamentos feitos pelos educandos. O professor é o responsável por analisar os resultados obtidos e, a partir deles, conduzir a atividade. Nesse sentido, é fundamental que o educador tenha domínio total dos conteúdos com os quais está trabalhando.

Uma formação coesa é preponderante se quisermos pensar em uma educação básica de qualidade. Só assim, com muita bagagem matemática, o professor conseguirá propor situações desafiadoras que propiciem ao estudante generalizar, abstrair, analisar e interpretar, ou seja, aprender Matemática.

REFERÊNCIAS

BARBEAU, E.J. **Polynomials**. Springer-Verlag, 1989.

BATISTA, J. **Vida de José Bento Marcelino Champagnat.** Edição do bicentenário, Perisse Freres, imprimeurs-libraires, 1989.

BAUMGART, J. **Tópicos de História da Matemática – Álgebra.** Atual, 1994.

BOYER, C.B. **História da Matemática.** São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

CARNEIRO, J.P.Q. **Resolução de equações algébricas.** Rio de Janeiro: Univ. Santa Úrsula, 1998.

CARNEIRO, J.P.Q. **Los números complejos en la isla del tesoro.** III Congresso Iberoamericano de Educación Matemática, 1998.

DILLENBURG, S. **110 anos do Colégio Marista São Luís.** Porto Alegre: CMC, 2013.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar.** Vol. 6. Atual Editora, 2005.

LIMA, E. L. **Matemática e Ensino** 2ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2003. (Coleção do Professor de Matemática, CPM16, v. 1).

LIMA, E; CARVALHO, P; WAGNER, E; MORGADO, A. **A Matemática do ensino médio – volume 3**. 6ed – Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MOTTA, E. **Aplicações dos Números Complexos à Geometria.** Eureka!, no 6. Disponível em <http://www.rpm.org.br/conheca/47/1/ilha.htm> Acesso em 15 mar. 2014.

MOTA, W. **Pierre de Fermat.** Paragominas: (Dissertação de Mestrado), Universidade do Estado do Pará, Paragominas, 2010.

NÓBRIGA, J.C; LA, L.C. **Aprendendo Matemática com o GeoGebra.** São Paulo: Editora Exato, 2010.

PASSOS, C. L. B. **Representações, Interpretações e Prática Pedagógica: A Geometria na Sala de Aula.** Campinas: FE/UNICAMP. (Tese de Doutorado), 2000.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências.** Revista Zetetiké. Campinas: UNICAMP, Ano 1, n. 1, 1993.

PEREIRA, M. R. O. **A Geometria escolar: uma análise dos estudos sobre o abandono de seu ensino.** São Paulo: (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

REIS, I. **Fundamentos da Matemática.** Editora Moderna, 1996.

ROQUE, T; CARVALHO, J.B.P. **Tópicos de história da Matemática.** Rio de Janeiro: SBM 2012.

SÁ, I.P. **Primeiros Passos Com o Software Livre – GeoGebra.** Centro Universitário da Serra dos Órgãos, 2010.

UNIVERSIDADE DE LISBOA. **O quinto postulado de Euclides.** Lisboa, 2014. Disponível em <http://www.educ.fc.ul.pt>. Acesso em: 16 ago. 2014.

XAVIER, C; BARRETO, BENIGNO. **Matemática: participação e contexto.** Ensino Médio. São Paulo: FTD, 2008.

ANEXO

Anexo A – Números Complexos

Forma algébrica dos Números Complexos

$z = a + bi$, onde $a,b \in \Re;$ e $i = \sqrt{-1}$ é denominada unidade imaginária.

Na expressão acima, "*a*" é chamado de parte real e "*b*" é denominado parte imaginária do número complexo *z*.

Exemplos:

1) $3 + 2i$

2) $7 – 6i$

3) $2i$ (como a parte real é igual a zero ($0 + 2i$) , chamamos este de número imaginário puro)

4) 8 (como a parte imaginária é igual a zero ($8 + 0i$), chamamos este de número real)

Outra maneira de representar um número complexo

Além da forma algébrica, um número complexo $z = a + bi$ pode ser representado através de um par ordenado (a, b), onde a 1ª coordenada representa a parte real e a 2ª representa a parte imaginária.

1) $3 + 2i = (3, 2)$

2) $7 – 6i = (7, – 6)$

3) $2i = (0, 2)$

4) $8 = (8, 0)$

Associando um número complexo a um ponto do plano

Quando tratamos de Geometria Analítica, já estamos acostumados a fixar um sistema de coordenadas e a associar um determinado par ordenado (a, b) a um ponto P do plano, conforme a Figura 37.

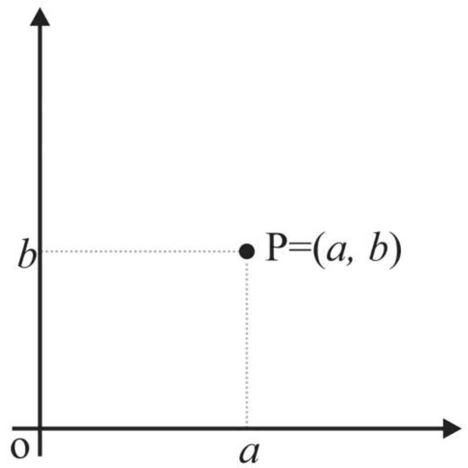


Figura 37 – Um ponto no plano

Analogamente, também podemos associar cada número complexo a um determinado ponto do plano, tal como está representado na Figura 38.

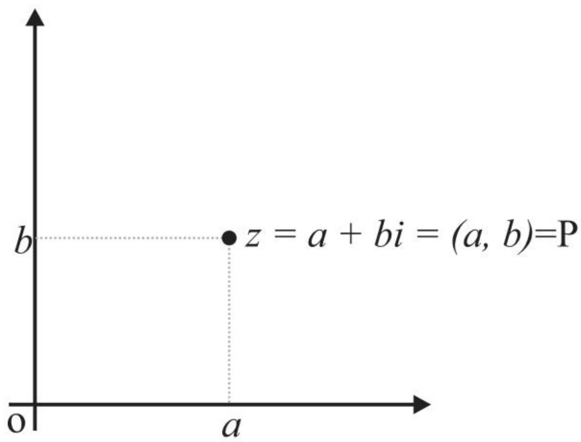


Figura 38 – Número complexo associado a um ponto do plano

Na Figura 38, o plano é denominado "plano complexo" ou "plano de Argand-Gauss". Comparado ao sistema cartesiano, o eixo x é chamado de "eixo real" e y é o "eixo imaginário". O ponto P é chamado de imagem do número complexo z e o número z é denominado afixo do ponto P.

1.3.5 Associando um número complexo a um vetor

Podemos associar um ponto P a um vetor que vai da origem ao ponto P, conforme ilustra a Figura 39.

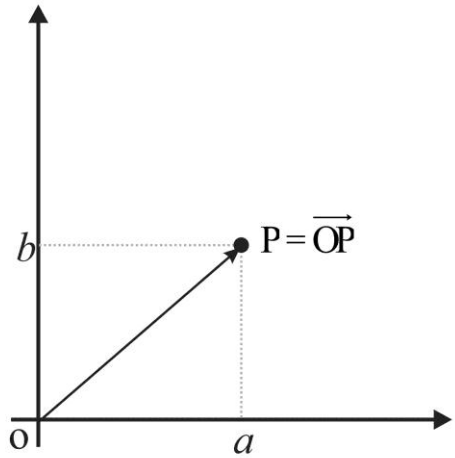


Figura 39 – Vetor $\overrightarrow{OP}$

Portanto, também podemos associar um número complexo $z = a + bi$ a um vetor que sai da origem e vai até o ponto P = (a, b), de acordo com a Figura 40.

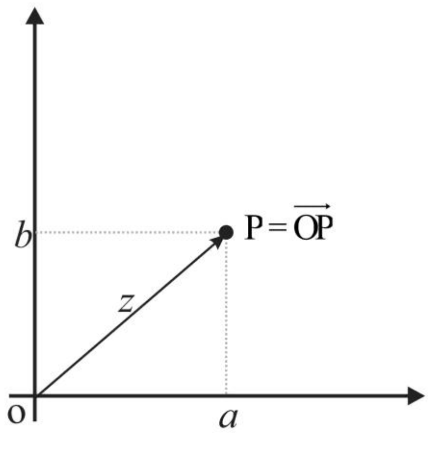


Figura 40 – Número complexo associado ao vetor $\overrightarrow{OP}$

O mais importante, para nosso trabalho, é que consigamos olhar para um número complexo e associá-lo a um par ordenado ou a um ponto do plano complexo ou ainda a um vetor. Com isso, as operações de adição e subtração entre Números Complexos podem ser vistas como operações entre vetores.

Interpretação geométrica da multiplicação pela unidade imaginária *i*

Na interpretação geométrica, a unidade imaginária i pode ser vista como o ponto do plano P = (0, 1); o número i^2 passa a ser percebido como Q = (–1, 0); o número i^3passa a ser visto como R = (0, –1); e o número i^4 é associado ao ponto S = (1, 0). A Figura 41 ilustra os pontos P, Q, R e S.

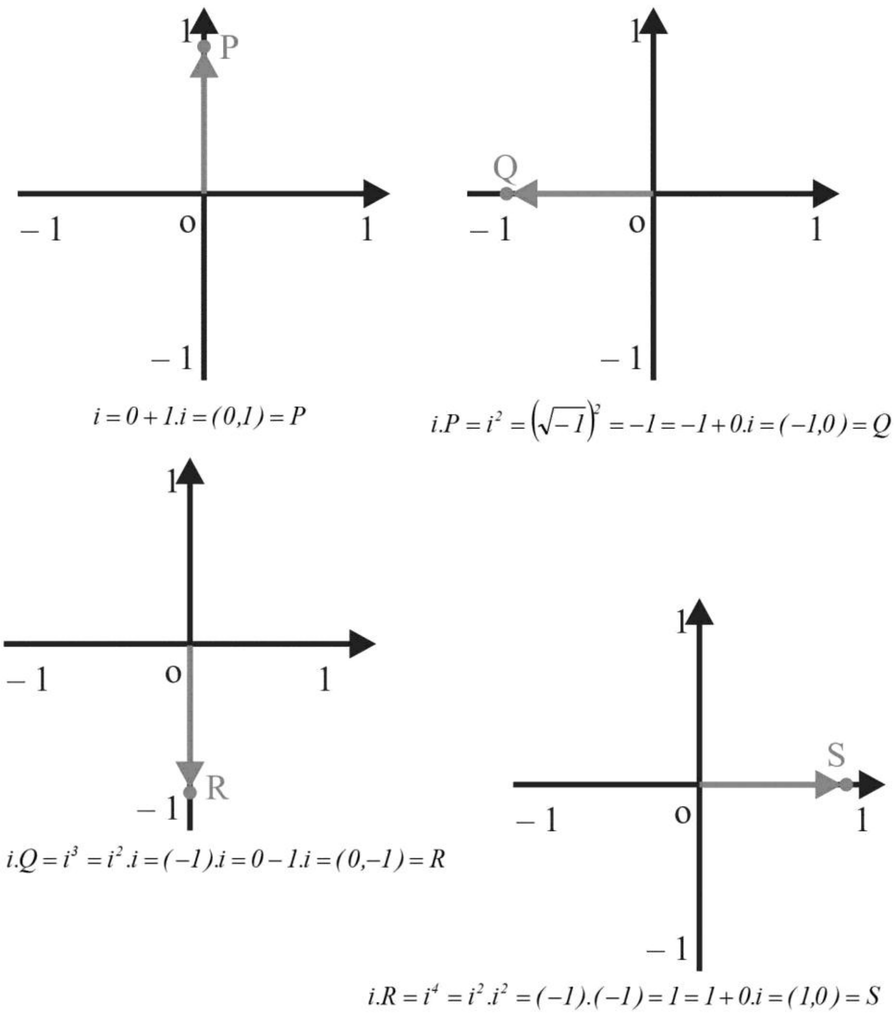
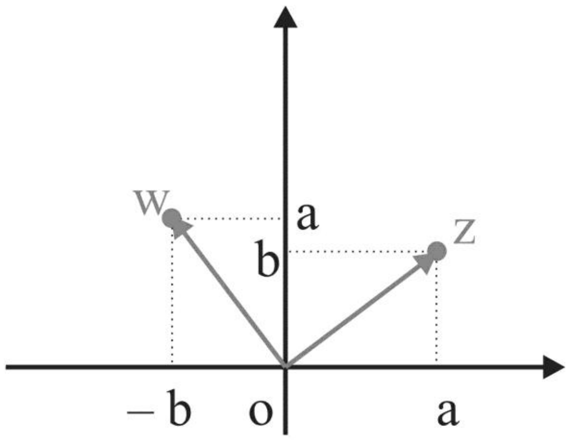


Figura 41 – Ilustração da multiplicação pela unidade imaginária *i*

É importante perceber que cada vez que multiplicamos um dos pontos pela unidade imaginária i, ele acaba sofrendo uma rotação de 90º em torno da origem do plano. E este fato é verdadeiro para qualquer número complexo. Para ajudar na compreensão, observe a Figura 42.



$$z = a + bi = (a, b)$$
$$i.z = i.(a + bi) = a.i + b.i^2$$
$$= a.i + b.(-1) = ai - b$$
$$= -b + ai = (-b, a) = w$$

Figura 42 – Rotação de 90º do número complexo *z*

Constata-se que, ao multiplicar um número complexo qualquer $z = a + bi$ por i, ele sofre uma rotação de exatamente 90º em torno da origem.