UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

CLAUDIO IAVORSKI

ANAMORFOSE: UMA ARTE NO ENSINO DE MATEMÁTICA E SUA APLICAÇÃO EM ATIVIDADES INTERDISCIPLINARES

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2014

CLAUDIO IAVORSKI

ANAMORFOSE: UMA ARTE NO ENSINO DE MATEMÁTICA E SUA APLICAÇÃO EM ATIVIDADES INTERDISCIPLINARES

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de "Mestre em Matemática".

Orientadora: Olga Harumi Saito

CURITIBA

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

I11a Iavorski, Claudio

Anamorfose: uma arte no ensino de matemática e sua aplicação em atividades interdisciplinares / Claudio Iavorski. – 2014.

79 f.: il.; 30 cm

Orientadora: Olga Harumi Saito.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Curitiba, 2014.

Bibliografia: f. 67-69.

1. Perspectiva. 2. Coordenadas polares. 3. Projeção. 4. Matemática - ensino. 5. Matemática – Dissertações. I. Saito, Olga Harumi, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD (22. ed.) 510

Biblioteca Central da UTFPR, Campus Curitiba

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Câmpus Curitiba

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Título da Dissertação No. 20

"Anamorfose: uma arte no ensino de matemática e sua aplicação em atividades interdisciplinares"

por

Claudio Iavorski

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba, às 15h do dia 21 de novembro de 2014. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Profa. Olga Harumi Saito, Dra.
(Presidente - UTFPR/Curitiba)

Prof. Vitor José Petry, Dr.
(UFFS)

Prof. Mateus Bernardes, Dr.
(UTFPR/Curitiba)

Visto da coordenação:

Prof. Ronie Peterson Dario, Dr.
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

AGRADECIMENTOS

- Aos meus pais, Maria Elena Iavorski e Aleixo Iavorski, que torcem, incentivam e rezam, me apoiando em cada obstáculo e comemorando cada conquista.
- Ao meu irmão, Alessandro Iavorski, que foi um grande companheiro nessa jornada.
- Aos colegas da Turma 2012 que foram responsáveis por tornar as aulas mais descontraídas, assumindo, algumas vezes, o papel de professores nos corredores da Universidade ou nas redes sociais esclarecendo várias dúvidas nos momentos das atividades extra-classe. Agradeço principalmente ao Marlon Mülhbauer e ao Márcio Dominicali Rigoti.
- Aos professores que contribuíram com a nossa formação, possibilitando o aprimoramento de nosso conhecimento de forma clara e objetiva, sendo acessíveis, responsáveis e fundamentais para o entendimento dos conteúdos apresentados.
- À minha orientadora, Olga Harumi Saito, que se mostrou muito prestativa e atenciosa em todos os momentos que precisei de sua ajuda, se tornando assim, figura indispensável para a conclusão desse trabalho.
- À todos os amigos que tiveram alguma participação, de forma direta ou indireta na elaboração deste trabalho.
- À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela recomendação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.
- À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.

RESUMO

IAVORSKI, Claudio. ANAMORFOSE: UMA ARTE NO ENSINO DE MATEMÁTICA E SUA APLICAÇÃO EM ATIVIDADES INTERDISCIPLINARES. 87 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2014.

Este trabalho apresenta o software livre Anamorph Me! e a técnica da anamorfose, também conhecida como "Matemática do Disfarce". A anamorfose combina matemática e arte e possibilita desenvolver conteúdos matemáticos como coordenadas polares, vetores, projeção e trigonometria. São apresentadas atividades para motivar o estudante a aprender matemática sob a perspectiva da anamorfose, associando-a a diferentes áreas da ciência através de problemas aplicados.

Palavras-chave: anamorfose, projeção, coordenadas polares, reflexão, ensino de matemática.

ABSTRACT

IAVORSKI, Claudio. ANAMORPHOSIS: AN ART IN TEACHING MATHEMATICS AND ITS APPLICATION IN INTERDISCIPLINARY ACTIVITIES. 87 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2014.

This work introduces the open source Anamorph Me! and the technique of anamorphosis, also known as “Mathematics of Disguise”. Anamorphosis combines math and art and allows developing mathematical subjects as polar coordinates, vectors, projection and trigonometry. We present activities to motivate students to learn mathematics from the perspective of anamorphosis, linking it to different areas of science through applied problems.

Keywords: anamorphosis, projection, polar coordinates, reflection, mathematics teaching.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Um dos grandes obstáculos enfrentados pelo professor de Matemática é ensinar os conteúdos de maneira a atrair e cativar o aluno pois, muitas vezes, na visão desse, são conhecimentos de pouca utilidade e com carência de outros atrativos. Provocando uma certa antipatia pela disciplina.

A desmotivação dos alunos pelas aulas de Matemática é, frequentemente, resultado da forma como são incentivados a se comportarem: como máquinas de calcular, repetindo procedimentos apresentados como se fossem perfeitos e inquestionáveis, não tendo oportunidade para que atuem como cidadãos pensantes capazes de melhorar, construir ou reconstruir processos matemáticos.

Em outras disciplinas, como Arte, há maior flexibilidade nesse sentido e é comum ver o oposto: alunos participantes, com opinião e criatividade, porque mesmo essa disciplina tendo seu lado teórico, assim como a Matemática, em muitos momentos ela permite ao aluno expor sua opinião e ter certa liberdade para desenvolver o seu trabalho.

Com base nesta preocupação, a anamorfose pode ser uma ferramenta para aproximar o aluno dos conteúdos da Matemática através da Arte. Com muito a ser explorado, a anamorfose permite permear por outras disciplinas como Física, Geografia, Biologia, Arte e História pois existem vários elementos matemáticos abordados na construção de uma figura anamórfica que são estudados no desenvolvimento de conteúdos de outras áreas.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), referente a evolução de modelos matemáticos e a pluralidade de modelos geométricos, tem-se:

> "Fruto da criação e invenção humanas, a Matemática não evoluiu de forma linear e logicamente organizada. Desenvolveu-se com movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas. Freqüentemente um conhecimento foi amplamente utilizado na ciência ou na tecnologia antes de ser incorporado a um dos sistemas lógicos formais do corpo da Matemática. Exemplos desse fato podem ser encontrados no surgimento dos números negativos, irracionais e imaginários. Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a geometria euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico." (SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL, 1998a)

Mesmo sabendo que a geometria tem a sua importância na formação do aluno, ela não é devidamente explorada em sala de aula, com pouco destaque nas aulas de Matemática e, muitas vezes, confunde-se seu ensino com o ensino de Sistemas de Medidas (comprimento, área e volume), destaque apontado pelos PCNs:

> "Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. Também é fato que as questões geométricas costumam despertar o interesse dos adolescentes e jovens de modo natural e espontâneo." (SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL, 1998a)

O estudo de conteúdos de geometria possibilita ainda explorar interessantes aspectos históricos uma vez que a geometria é um dos ramos mais antigos da Matemática, desenvolvido em função de necessidades humanas (GUERATO, 2008). Além disso, a geometria é um campo fértil para elaborar situações-problema que favorecem o desenvolvimento da capacidade para argumentar e elaborar demonstrações. Como campo de problemas, o estudo do espaço e das formas envolve três objetos de naturezas diferentes:

- o espaço físico, ou seja, o domínio das materializações;
- a geometria, concebida como modelização desse espaço físico, o domínio das figuras geométricas;
- o(s) sistema(s) de representação plana das figuras espaciais, o domínio das representações gráficas.

Vale lembrar que o tema geometria engloba também as geometrias não-euclidianas. Porém, essa geometria é pouco trabalhada pela maior parte dos professores de Matemática do Ensino Básico. São vários os motivos que fazem com que os professores não desenvolvam esse tema, seja a priorização de outros ou a falta de domínio do assunto.

Para se ter ideia, uma "pesquisa foi realizada em sites de diversas Instituições de Ensino Superior brasileiras, a fim de verificar o estado da arte do ensino das geometrias não-euclidianas nos Cursos de Licenciatura em Matemática. De 43 instituições pesquisadas, somente 5 abordavam conceitos de geometria não-euclidianas nas suas matrizes curriculares" (BARRETO; TAVARES, 2010), o que confirma a pouca importância dada a tal assunto, até mesmo à nível superior. E que acarreta na má formação do professor para lecionar tal assunto.

Segundo as Diretrizes Curriculares da Educação Básica da Secretaria de Educação do Paraná, o Conteúdo Estruturante Geometrias, no Ensino Fundamental, tem o espaço como referência, de modo que o aluno consiga analisá-lo e perceber seus objetos para, então, representá-lo. Neste nível de ensino, o aluno deve compreender os conceitos da geometria plana, da geometria espacial, da geometria analítica e noções de geometrias não-euclidianas.

Em relação a geometrias não-euclidianas, a necessidade de trabalhar esses temas é apresentada nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná (DCEs):

> "O Conteúdo Estruturante Geometrias, no Ensino Fundamental, tem o espaço como referência, de modo que o aluno consiga analisá-lo e perceber seus objetos para, então, representá-lo. Neste nível de ensino, o aluno deve compreender: [...]
> • noções de geometrias não-euclidianas: geometria projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte); geometria topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados) e noção de geometria dos fractais." (SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO DO PARANÁ, 2008).

Ao abordar o tema anamorfose no Ensino Básico uma relevante vantagem é o grande potencial de interdisciplinaridade, permitindo que o aluno não tenha as disciplinas isoladamente, ao contrário disso, que "haja momentos em que as questões relativas aos temas sejam explicitamente trabalhadas e conteúdos de campos e origens diferentes sejam colocados na perspectiva de respondê-las" (SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL, 1998b).

A Figura 1 apresenta um diagrama mostrando as possibilidades de associar a Matemática com as outras áreas, como em Física no tema ótica geométrica, em História na contextualização da história da anamorfose, em Educação Artística para falar sobre luz, sombra e perspectiva cônica, em Geografia nos estudos e representação de mapas, entre outros.

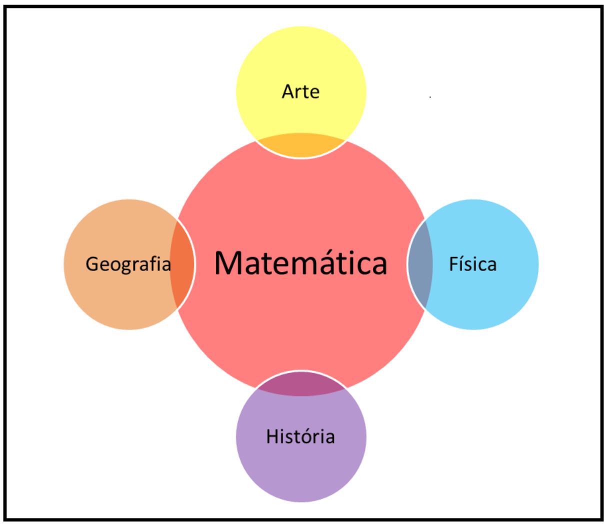


Figura 1: Diagrama representando a relação da Matemática com outras disciplinas.

Nas mesmas diretrizes, ainda cita-se na abordagem teórico-metodológica, que nos conteúdos básicos do Ensino Fundamental sugerem-se encaminhamentos metodológicos que sirvam de aporte teórico para as abordagens dos conteúdos propostos nesse nível de ensino, e que é importante a utilização de recursos didáticos-pedagógicos e tecnológicos como instrumentos de aprendizagem. Na Tabela 1 é apresentado o conteúdo estruturante e objetivos de geometrias para o 6º ano.

Conteúdo Estruturante	**Conteúdos específicos**	**Objetivos**
Geometrias	• Geometria Plana; • Geometria Espacial.	• Reconheça e represente ponto, reta, plano, semi-reta e segmento de reta; • Conceitue e classifique polígonos; • Identifique corpos redondos; • Identifique e relacione os elementos geométricos que envolvem o cálculo de área e perímetro de diferentes figuras planas; • Diferencie círculo e circunferência, identificando seus elementos; • Reconheça os sólidos geométricos em sua forma planificada e seus elementos.

Tabela 1: Conteúdo estruturante e objetivos de Geometrias do 6º ano, (SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO, 2008).

No Ensino Médio, deve-se garantir ao aluno o aprofundamento dos conceitos da geometria plana e espacial em um nível maior de abstração. Nesse nível de ensino, os alunos realizam análises dos elementos que estruturam a geometria euclidiana, através da representação algébrica, ou seja, a geometria analítica plana.

Também, no Ensino Médio, aprofundam-se os estudos das noções de geometrias não-euclidianas ao abordar a geometria dos fractais, geometria projetiva, geometria hiperbólica e elíptica, Tabela 2, conduzindo o aluno a refletir e observar o senso estético presente nessas entidades geométricas, estendendo para as suas propriedades, através da “regularidade harmoniosa nas suas próprias irregularidades” (BARBOSA, 2002).

A abordagem dos Conteúdos Básicos de Matemática nesta fase, deverá ser feita articuladamente, contemplando os conteúdos ministrados no Ensino Fundamental e também através da intercomunicação dos Conteúdos Estruturantes. As tendências metodológicas apontadas nas

Diretrizes Curriculares de Matemática sugerem encaminhamentos metodológicos e servem de aporte teórico para as abordagens dos conteúdos propostos neste nível de ensino, visando desenvolver os conhecimentos matemáticos a partir do processo dialético que possa intervir como instrumento eficaz na aprendizagem das propriedades e relações matemáticas, bem como as diferentes representações e conversões através da linguagem e operações simbólicas, formais e técnicas.

É importante a utilização de recursos didático-pedagógicos e tecnológicos como instrumentos de aprendizagem. Os procedimentos e estratégias a serem desenvolvidas pelo professor objetivam garantir ao aluno o avanço em estudos posteriores, na aplicação dos conhecimentos matemáticos em atividades tecnológicas, cotidianas, das ciências e da própria ciência matemática. Em relação às abordagens, destacam-se a análise e interpretação crítica para resolução de problemas, não somente pertinentes à ciência matemática, como nas demais ciências que, em determinados momentos, fazem uso da Matemática.

Conteúdo Estruturante	**Conteúdos específicos**	**Objetivos**
Geometrias	• Geometria Plana; • Geometria Espacial; • Geometria Analítica; • Geometrias não-euclidianas.	• Amplie e aprofunde os conhecimentos de Geometrias Plana e Espacial; • Determine posições e medidas de elementos geométricos através da Geometria Analítica; • Perceba a necessidade das geometrias não-euclidianas para a compreensão de conceitos geométricos, quando analisados em planos diferentes do plano de Euclides; • Compreenda a necessidade das geometrias não-euclidianas para o avanço das teorias científicas; • Articule ideias geométricas em planos de curvatura nula, positiva ou negativa; • Conheça os conceitos básicos da geometria elíptica, hiperbólica e fractal (geometria da superfície esférica).

Tabela 2: Conteúdo estruturante e objetivos de Geometrias no Ensino Médio, (SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO, 2008).

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 OBJETIVO GERAL

O principal objetivo deste trabalho é, por meio da interdisciplinaridade, buscar fazer uso de uma ferramenta que motiva o aluno no aprendizado matemático, a técnica de anamorfose.

1.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Destacam-se como objetivos específicos:

- apresentar ao leitor a técnica de anamorfose em seus aspectos históricos, artísticos e, principalmente, em seu aspecto matemático;
- explorar a abrangência desse tema em diversos assuntos matemáticos, assim como nos vários níveis da educação básica;
- estabelecer relações entre o cotidiano do aluno e a anamorfose, levantando questionamentos entre como as coisas são vistas (interpretadas) e como elas realmente são, além de anamorfismos presentes no cotidiano;
- desenvolver a capacidade de observar diferenças ou semelhança da forma dos objetos e as associações;
- trabalhar com o tema, permeando por outras disciplinas que se mostram necessárias para melhor compreensão e enriquecimento do assunto.

1.2 METODOLOGIA E ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Para atingir os objetivos propostos, é feita uma investigação teórica que refere-se a um levantamento da história da anamorfose ao longo do tempo e aplicação desse conhecimento à Matemática e a outras áreas.

Estudo de um software livre, o Anamorph Me!, a ser utilizado na confecção de material para uma oficina com os alunos e outras atividades.

É aplicado um questionário aos alunos e também realiza-se uma oficina após apresentação da ferramenta anamorfose.

A presente dissertação encontra-se estruturada em cinco capítulos. No primeiro capítulo apresenta-se a necessidade deste estudo, com as preocupações e motivações que levaram à elaboração deste material, os objetivos a atingir e a metodologia utilizada.

No Capítulo 2 é apresentada a técnica da anamorfose, sua contribuição na história da Arte e da Matemática e uma breve descrição dos tipos de anamorfose.

No Capítulo 3 apresenta-se a Matemática envolvida na construção de alguns tipos de anamorfose.

No Capítulo 4 é desenvolvida uma oficina com o emprego da anamorfose do tipo cilíndrica além de uma lista de exercícios multidisciplinares e uma breve descrição do software Anamorph Me!.

No Capítulo 5, tece-se as considerações finais e, ainda é possível verificar em anexo, o questionário aplicado aos alunos (Anexo A).

2 ANAMORFOSE

Neste capítulo é apresentada a história desta curiosa arte, a anamorfose, os principais personagens que constribuíra para a sua evolução e a classificação de acordo com algumas características.

2.1 O QUE É ANAMORFOSE?

Escrever o significado da palavra anamorfose não é uma tarefa fácil. Isso porque o termo é aplicado em diversas áreas, algumas vezes com diferentes significados sendo que em geral, a anamorfose pode ser entendida como a técnica artística utilizada para deformar uma imagem de tal forma que o observador seja levado a vê-la sem a deformação a partir de um certo ponto de vista ou ainda, por espelhos especiais que reconstituem a imagem. Essa técnica encanta não só pelo fato da reconstrução da imagem de um ponto único, mas também porque isso pode gerar ilusões de ótica, efeitos tridimensionais, esconder informações intencionalmente e gerar dupla interpretação da imagem conforme a posição do observador.

O termo deriva do grego $\alpha\nu\alpha\mu o\rho\phi\omega\sigma\iota\varsigma$ (anamórphosis) e tem como siginificado "reformação, retorno da forma, reiteração da forma, reversão da forma, formar de novo" (WIKIPEDIA, 2014a). Alguns autores diferem a palavra anamorfose de anamorfismo, considerando que a primeira é a técnica para se criar o anamorfismo e este é considerado o resultado, a arte em si.

O significado dado pelo Dicionário Priberam da Língua Portuguesa para anamorfose é: "representação ou imagem que parece deformada ou confusa e que se apresenta mais regular ou mais perceptível em determinado ângulo ou posição ou ainda através de lente ou espelho não plano" (PRIBERAM, 2014). Além de significados mais abrangentes e generalizados existem outros mais específicos, conforme a área que o termo é usado, como os apresentados no dicionário Novíssimo Aulete:

> "**1** *Ópt.* Fenômeno óptico pelo qual a dimensão vertical da imagem de um objeto aparece com grau de ampliação diferente do da dimensão longitudinal ou transversal.

> **3** *Mat.* Substituição de escalas métricas por funcionais para simplificar o gráfico resultante.
>
> **5** *Art. Pl.* Técnica artística que confere à obra pictórica ou gráfica, ou parte dela, formas distorcidas, cuja configuração real só é visível quando olhada por um certo ângulo ou por meio de uma lente ou de um espelho cônico ou convexo." (GEIGER, 2011)

Essa técnica surgiu no século XV para a pintura de murais e é utilizada até os dias de hoje com aplicações em áreas como: matemática, ótica, artes visuais, biologia, geologia, cartografia. Suas aplicações vão desde exemplos mais simples como sinalizações horizontais de trânsito até outros mais complexos como a teoria da evolução das espécies, uma vez que a palavra também traz o sentido de transformação.

A Figura 2 mostra exemplos de anamorfismos presentes no dia-a-dia como as placas de marketing de um estádio de futebol ou as sinalizações de trânsitos pintadas no asfalto.

(a) (b)

Figura 2: Exemplos de anamorfismos no cotidiano: (a) placas de marketing no futebol, (YOUTUBE, 2014) e (b) sinalizações horizontais de trânsito, (SOROCABA.COM, 2014).

2.2 A ANAMORFOSE ATRAVÉS DOS TEMPOS

O interesse do homem em registrar o mundo a sua volta ou imagens que eram apenas fruto de sua imaginação, através da pintura, vem desde os tempos pré-históricos. Da pré-história até o período que antecedeu o Renascimento, as pinturas em sua maioria, não apresentavam perspectiva ótica, não havendo proporção e nem noção de profundidade. A Figura 3 ilustra um quadro onde o castelo, os guerreiros e os barcos são vistos num mesmo plano. Nele, os barcos que estão mais distantes, próximos da linha do horizonte, assim como os que estão situados no primeiro plano possuem o mesmo tamanho e o castelo, que está em tamanho visivelmente desproporcional, está situado numa ilha representada por um círculo.

Figura 3: Pintura do século XII sem perspectiva ótica. (WIKIPEDIA, 2014b)

Porém, não se pode dizer que as pinturas datadas antes do século XV, de forma geral, eram desprovidas de qualquer perspectiva. Desde o período Magdaleniano, 15.000 anos a.C., as imagens pintadas nas paredes das cavernas já tinham traços que davam a sensação de profundidade, como efeitos de sombra e luzes ou reduzindo os objetos para indicar que estavam mais distantes, Figura 4. Mesmo na Grécia e Roma antigas, muitas das obras apresentavam efeitos de perspectiva, porém ainda não condizente com as leis da perspectiva, que surgiram tempos depois, com o início do Renascimento.

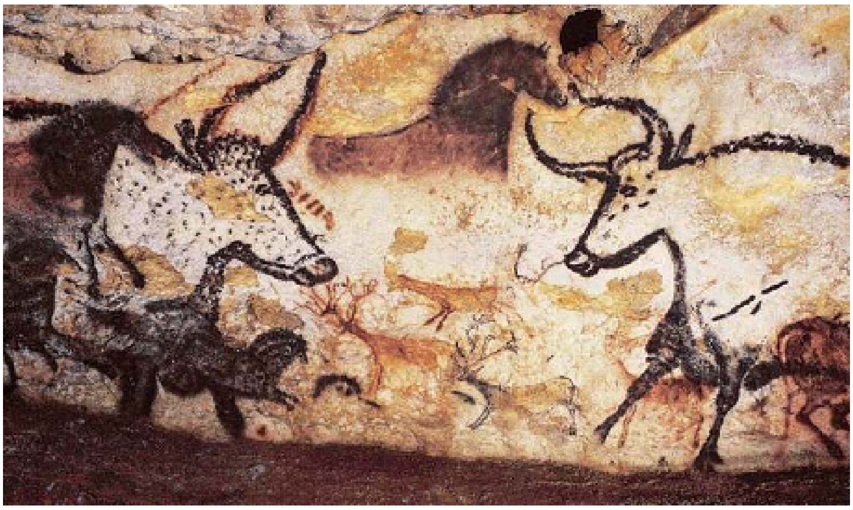


Figura 4: Pintura do período Magdaleniano. (WIKIPEDIA, 2014c)

O Renascimento trouxe grandes mudanças na organização da civilização europeia e na maneira do homem interpretar o mundo a sua volta. Entre as mudanças provocadas pela visão renascentista está a evolução nas técnicas de pinturas com a formulação das leis da perspectiva.

Em 1436, o humanista, escritor, pintor, teórico da pintura e arquiteto florentino Leon Battista Alberti (1404-1472) concluiu um trabalho intitulado *De Pictura*, impresso somente em 1540. Nele tem-se a primeira formulação clara do princípio da perspectiva central e o conceito de pirâmide visual onde o olho do pintor é o topo. Segundo Alberti o pintor deve "representar as superfícies de várias formas numa única superfície" e dando uma definição a perspectiva diz que: "A pintura será uma secção da pirâmide visual em uma determinada distância". Algo curioso nessa obra é que não há nenhuma figura mas sim, explicações bem detalhadas das construções.

Outro trabalho de grande destaque nessa época foi o livro *De Prospectiva Pingendi*, de Piero della Francesca. Escrito entre 1470 e 1485, foi o primeiro tratado dedicado a perspectiva e apesar de poucos exemplares terem circulado, seu impacto foi considerável. Embora seja um livro destinado a pintores, a linguagem é essencialmente geométrica. Como destaques dessa obra pode-se citar que Piero desenvolveu um processo mais prático que Alberti na construção de imagens, além do conceito de que a *"deteriorização"* de uma variável (redução relativa na sua projeção) é inversamente proporcional à distância ao olho. Outro destaque é que essa obra trazia pela primeira vez o conceito de anamorfose, explicada segundo a perspectiva.

Outro personagem importante na fundamentação e aplicabilidade da perspectiva foi Albrecht Dürer (1471-1528). Em um tratado escrito em 1525, ensina vários métodos que permitem reproduzir fielmente as formas mais complexas. Uma de suas contribuições à perspectiva foi a invenção do perspectógrafo. Nele o artista deve olhar apenas com um olho a partir de um ponto fixo em direção a uma janela quadriculada. Atrás da janela está o objeto a ser pintado. Para facilitar mais o processo, o pintor desenha numa folha quadriculada como a janela, podendo dar atenção quadrado por quadrado, sem se preocupar com a imagem como um todo, Figura 5.

Figura 5: Obra de Albrecht Dürer: utilização de um perspectógrafo. (THUILLIER, 1994)

Com sua difusão, as leis da perspectiva ganhavam destaque e se tornavam presentes em obras não só na Itália, mas em toda a Europa. Um artista que teve grande destaque nessa época foi Leonardo di Ser Piero da Vinci (1452-1519). Algumas de suas obras como *"Mona Lisa"*, *"A Última Ceia"* e o *"Homem Vitruviano"* foram imortalizadas e atualmente são conhecidas pelo mundo todo. Além de seu interesse pela pintura, da Vinci também demonstrava bastante interesse em anatomia, fisiologia, história natural, medicina, ótica, acústica, astronomia, botânica, geologia, geografia, física, cartografia, estudo da atmosfera, na questão do vôo e construção de máquinas voadoras, estudo do movimento, matemática, balística, hidráulica, poesia, entre outras áreas. É considerado por alguns, o maior gênio da história, graças a sua multiplicidade de talentos e sua criatividade incomparável (THUILLIER, 1994). Outro crédito dado a da Vinci é o de criador da primeira figura anamórfica oblíqua, Figura 6. (MEDEIROS; FLORES, 2011)

É importante dizer que antes de da Vinci, na China já eram criadas figuras deformadas que se reconstituiam refletidas em espelhos cilíndricos, similares a anamorfose catóptrica cilíndrica que só seria criada na Europa séculos depois. Mas isso não tira de Leonardo o mérito de criador do primeiro anamorfismo oblíquo.

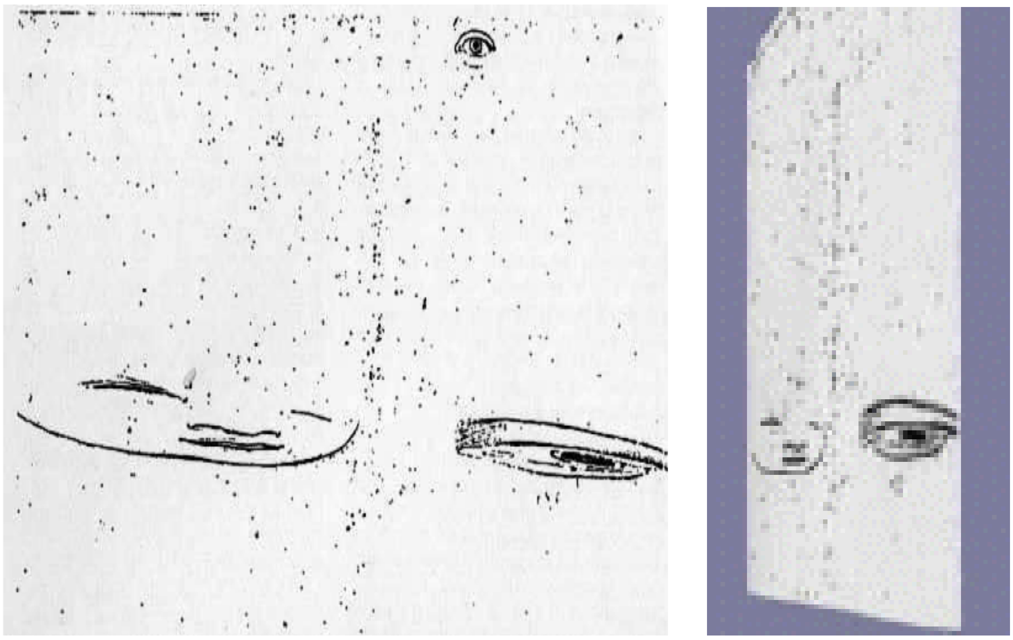


Figura 6: Olho e rosto retratados anamorficamente por Leonardo da Vinci: (a) visto de frente e (b) visto da posição sugerida. (ARTILLO et al., 2014)

Com a divulgação da nova técnica, outros artistas aderiram a criação de figuras deformadas como Erhard Schön (1491-1592), principalmente com imagens religiosas e sátiras sociais. (THE BRITISH MUSEUM, 2014).

Quando se fala em anamorfose, é impossível não citar a obra "Os Embaixadores" de Hans Holbein (1497-1543). Essa obra ganhou destaque, porque enquanto os anamorfismos daquela época se preocupavam muito mais em camuflar a imagem anamórfica através de vários traços, essa deixava-a explícita em meio a uma imagem nítida e de qualidade. Outra obra com tamanha qualidade só foi possível ser verificado muitos anos depois, estando a obra de Holbein muito a frente de seu tempo.

Holbein retrata dois jovens com cargos importantes, Jean de Dinteville e Georges de Selve, embaixador e bispo da igreja católica, respectivamente. Atrás deles, há uma mesa com diversos objetos representando as grandes descobertas e a sabedoria da Europa renascentista, entre elas um manual prático de aritmética aberto na página de divisão.

Além das imagens diretamente visíveis, existe uma que está disfarçada ao centro, uma mancha marrom na altura dos pés dos dois jovens, Figura 7 (a). É a imagem de um crânio deformada anamorficamente, que só pode ser vista reconstituída se o observador estiver numa posição específica, Figura 7 (b).

(a) (b)

Figura 7: Obra de Hans Holbein: (a) vista de frente, (ZEKZANDER, 2014) e (b) vista em uma posição oblíqua e dando ênfase ao crânio. (PINTURA QUE FALA, 2014)

Os significados para os itens dispostos nessa obra são diversos. Por exemplo, para a presença do crânio anamórfico, há quem defenda que ele está ali para lembrar que mesmo homens jovens e importantes, cercados de grandes descobertas, irão morrer algum dia. Já outros defendem que aquilo não passa de uma espécie de assinatura do autor (de origem alemã), onde seu sobrenome (Holbein) é comparado a um "osso oco"(em alemão "hohle bein"). Trocadilhos desse tipo eram muito comuns naquela época.

O matemático francês Jean Louis Niceron (1613-1646) foi quem, em 1638, publicou uma das mais importantes obras sobre anamorfose, *"A curiosa perspectiva"*. Tal trabalho tratava de temas como perspectiva e ótica geométrica, mas principalmente anamorfose. Parte de seu trabalho é dirigido ao problema de estabelecer perspectiva em superfícies curvas ou irregulares (abóbadas e nichos por exemplo), determinando as deformações de superfície necessárias para trazer uma imagem em perspectiva, quando vista de determinado ponto. Ele mostrou por exemplo, como construir na superfície interior de um cone uma imagem distorcida, para que ela apareça na proporção adequada quando vista da base do cone (SONS, 2008).

Durante os séculos XVIII e XIX a anamorfose foi perdendo destaque, caindo muitas vezes no esquecimento. Mas a partir do século XX até os dias de hoje essa técnica foi ganhando espaço novamente: o que antes era aplicado basicamente na pintura de murais, atualmente está presente em outras áreas como marketing e arquitetura.

Na utilização da anamorfose como ferramenta para o marketing, o artista Julian Beever é considerado um fenômeno. Sua técnica consiste em pintar anamorfismos oblíquos em calçadas de grandes cidades pelo mundo utilizando apenas giz. Essas imagens carregam mensagens de conscientização, humor ou propagandas, chamando a atenção do público que passa pela rua pois, se vistas do ponto certo, parecem reais e tridimensionais.

Na Figura 8 (a) tem-se essa ilusão, dando a impressão de que o homem está sobre o globo e na Figura 8 (b), vendo a imagem de outro ângulo, percebe-se que ela está totalmente deformada.

(a)

(b)

Figura 8: Imagem pintada com giz por Julian Beever: (a) vista da perspectiva proposta e (b) vista de outra perspectiva qualquer. (SAMPAIO, 2014)

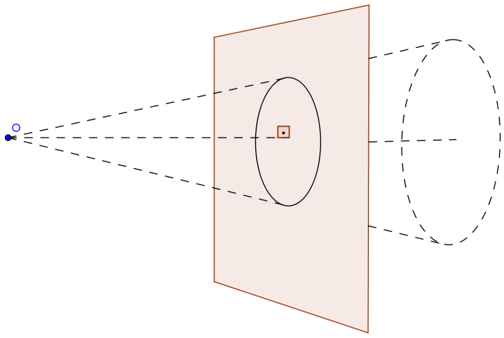
Também, na arte anamórfica, com a evolução do cinema, a tela foi sendo redimensionada tomando forma mais alongada. Essas novas dimensões não ficaram proporcionais ao filme e a filmadora teve que ser adaptada, sendo munida com uma lente anamórfica, que deforma a imagem captada (WIKIPEDIA, 2014d).

2.3 TIPOS DE ANAMORFOSE

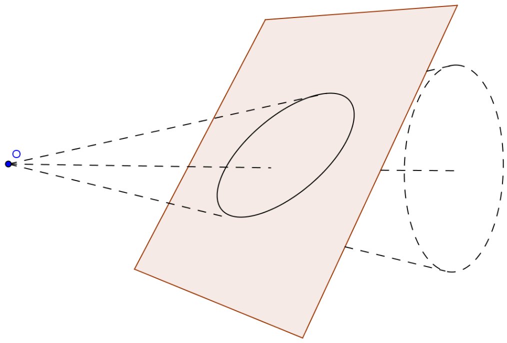
Ao longo da história, a criação de anamorfoses foi se tornando mais sofisticada e houve uma evolução nas formas e aplicações, mas tradicionalmente predominam dois tipos: oblíquas e catóptricas.

2.3.1 ANAMORFOSE OBLÍQUA

A anamorfose oblíqua é aquela que usa a perspectiva para criar as imagens em superfícies oblíquas em relação ao eixo do cone visual do observador. Quando a imagem está em um plano perpendicular ao eixo do cone visual, é vista sem deformação, Figura 9 (a). E quando não está em um plano perpendicular, é vista deformada, Figura 9 (b).



(a)



(b)

Figura 9: Anamorfose do círculo: (a) o plano é perpendicular ao eixo do cone visual e (b) o plano é oblíquo em relação ao eixo do cone visual.

2.3.2 ANAMORFOSE CATÓPTRICA

Na anamorfose catóptrica, a imagem só poderá ser vista normalmente se for utilizado um objeto para refletí-la adequadamente. Normalmente é utilizado um espelho cilíndrico, cônico ou piramidal, mas pode ser um outro tipo de sólido refletivo.

Na Figura 10 vê-se um exemplo de anamorfose catóptrica utilizando um cilindro, também conhecido como anamorfose catóptrica cilíndrica.

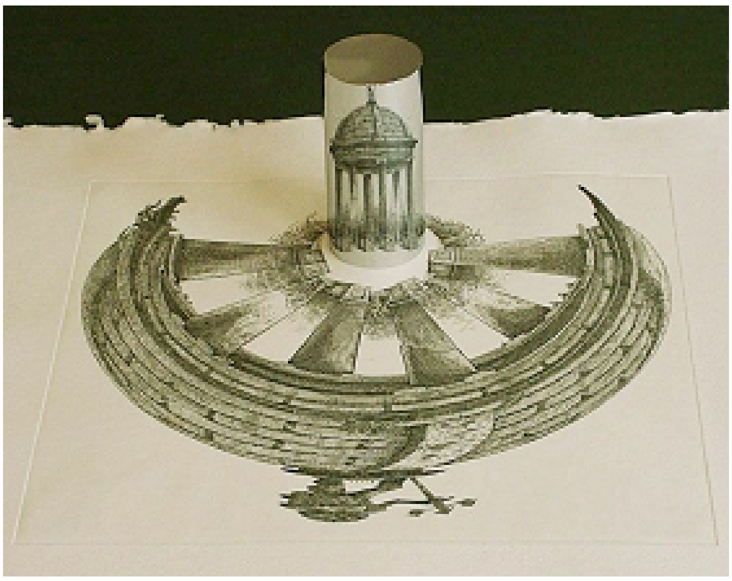


Figura 10: Anamorfose em espelho cilíndrico. (AMUSING PLANET, 2014)

Da mesma forma pode ser vista na Figura 11 a imagem refletida em um cone, é importante observar que o ângulo (ponto de vista) é fundamental para que identifique o objeto a ser representado no cone (imagem real). Tal anamorfose é conhecida por catóptrica cônica.

(a) (b)

Figura 11: Anamorfose com espelho cônico: (a) visto de um ponto de vista qualquer e (b) visto do ponto de vista correto. (KENT, 2013)

Na anamorfose catóptrica piramidal, como o nome já sugere, o processo se dá através da reflexão em um conjunto de espelhos planos dispostos em forma de pirâmide, a técnica se assemelha a anamorfose cônica, pois coloca-se a base da pirâmide num plano onde esta ficará rodeada pela figura que será refletida; o observador fica num ponto pertencente ao prolongamento do eixo da pirâmide, fazendo com que a imagem refletida aparente estar pintada interiormente na base da pirâmide, Figura 12.

(a) (b)

Figura 12: Anamorfose com espelho piramidal: (a) visto de uma posição qualquer e (b) visto da posição correta. (PETTERSSON, 2014)

É comum que sejam usadas pirâmides com bases regulares, porém isso não é uma limitação. O principal diferencial dessa anamorfose para as outras já mencionadas é que a figura pintada fica disposta de forma seccionada, conforme o número de lados da base. Na Figura 13 tem-se um exemplo onde a base da pirâmide é quadrada e é possível ver que a imagem original precisou ser dividida em quatro partes triangulares, as quais ficam dispostas separadamente no papel para que seja possível recriar a imagem no espelho.

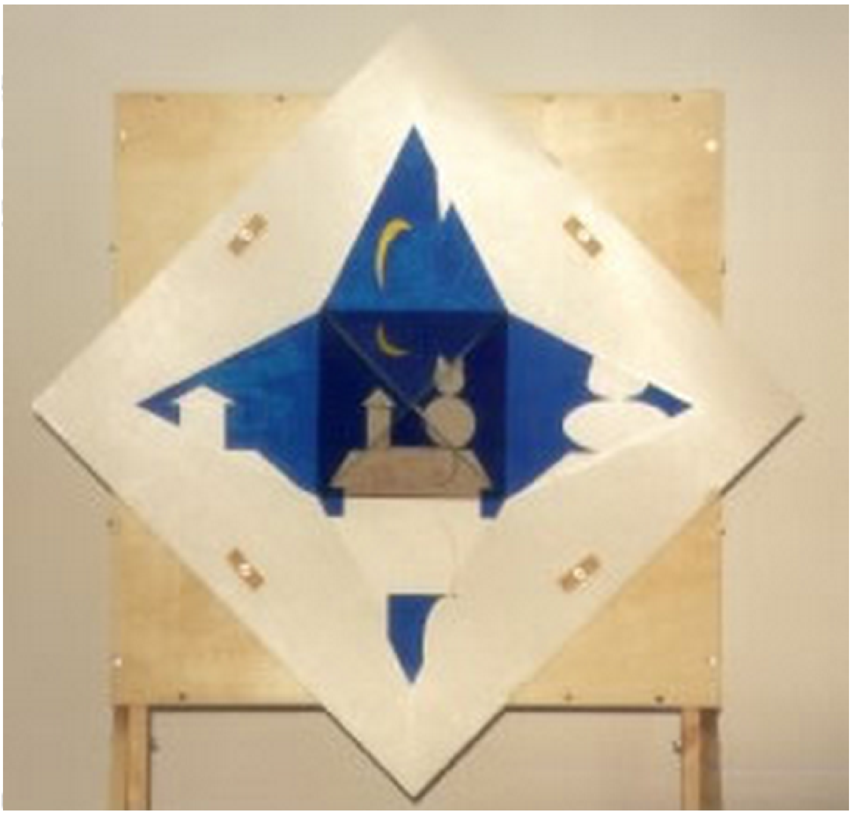
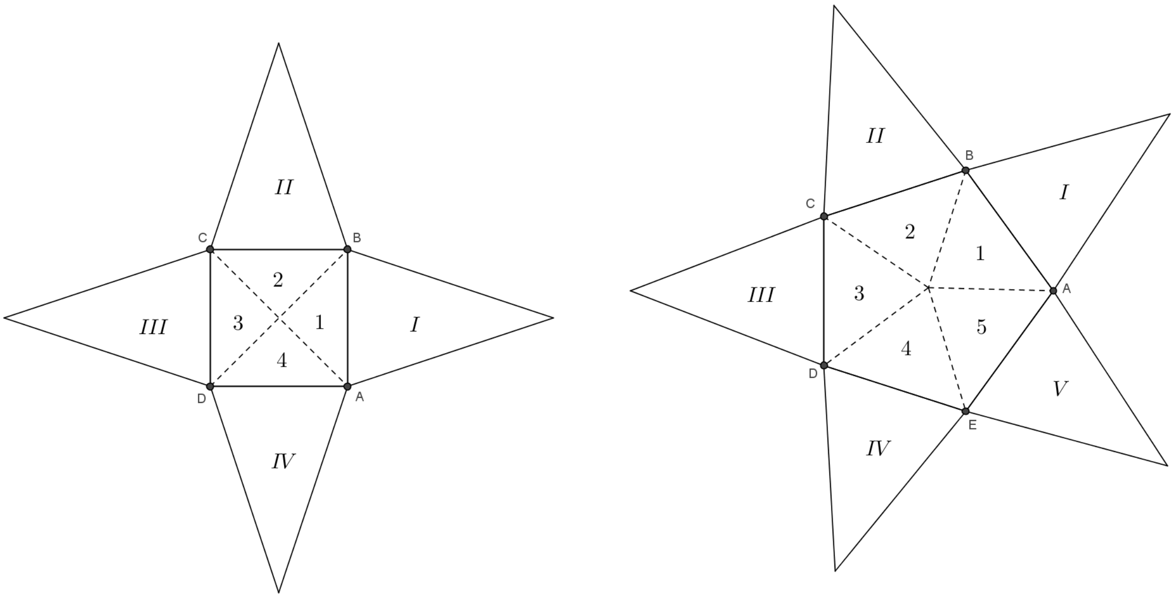


Figura 13: Exemplo de anamorfose piramidal de base quadrada. (AECHIVIOMACMAT, 2014)

De forma geral, ao planejar a disposição da imagem final em um anamorfismo piramidal, se a pirâmide tem base com n lados, a imagem precisará ser dividida em n partes e pintadas separadamente. Essas partes serão definidas pela projeção ortogonal das faces laterais da pirâmide sobre a base. Na Figura 14 é possível ver como fica a separação. Para cada caso, o espaço reservado para a imagem final é o polígono $ABCD$ e $ABCED$ respectivamente. Assim, a imagem que aparece na região 1, é reflexo da região I, a imagem da região 2 é reflexo da região II e assim sucessivamente.



(a) (b)

Figura 14: Esquema representativo da distribuição e secção da imagem em uma anamorfose piramidal: (a) base quadrada e (b) base pentagonal.

3 MATEMÁTICA E ANAMORFOSE

Algumas técnicas para a criação de uma anamorfose derivam de um planejamento matemático apoiado pela ótica geométrica. Assim, neste capítulo trata-se de apresentar a ótica geométrica, o comportamento da luz em uma anamorfose e com isso, o entendimento da imagem pelo observador, justificando sua reconstituição.

3.1 UM POUCO DE PERSPECTIVA E GEOMETRIA PROJETIVA

Para entender o funcionamento de uma anamorfose, é preciso conhecer alguns elementos da perspectiva e ter uma ideia introdutória de geometria projetiva.

3.1.1 SISTEMA DE PROJEÇÃO

Quando se faz um desenho, seja ele representando uma realidade ou não, geralmente provém de um objeto tridimensional representado em um plano. Para cada ponto do objeto tridimensional há uma correspondência, sendo ela biunívoca, relacionando ponto-a-ponto o objeto tridimensional com sua imagem no plano. A este procedimento dá-se o nome de Sistema de Projeção, Figura 15, onde estão presentes os seguintes elementos:

- o observador ou o centro de projeção;
- o objeto;
- a projeção;
- o plano de projeção;
- e a reta projetante.

Figura 15: Elementos no Sistema de Projeção.

As retas que têm como ponto comum o observador, passando pelos pontos a serem projetados (objetos) e intersectando o plano de projeção são chamadas de projetantes. De acordo com a posição ocupada pelo observador (a uma distância finita ou no infinito), os sistemas de projeção se classificam em: sistema de projeção cônico ou sistema de projeção cilíndrico.

- **Sistema de Projeção Cônico:** tem como característica o centro de projeção a uma distância finita do objeto e as retas projetantes convergindo num ponto, formando uma figura similar a um cone. Nesse sistema, é proporcionada a perspectiva real ou exata, ou seja, reproduz exatamente a realidade, estando o observador a uma distância finita do objeto, Figura 16.

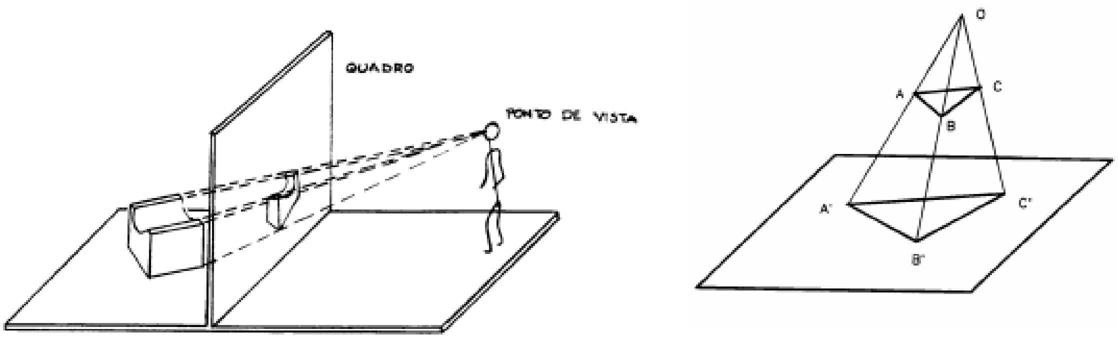
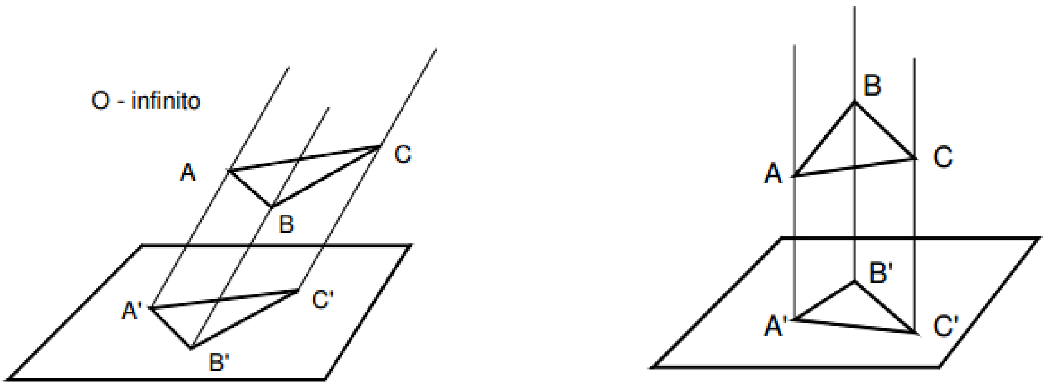


Figura 16: Modelo de Sistema de Projeção Cônico. (VELASCO, 2006)

- **Sistema de Projeção Cilíndrico:** sua característica é ter o observador no infinito, consequentemente, as retas projetantes são paralelas entre si. Dependendo da posição do observador, ainda é classificada em oblíqua ou ortogonal, Figura 17.



(a) (b)

Figura 17: Modelos de Sistema de Projeção Cilíndrico: (a) oblíquo e (b) ortogonal. (VELASCO, 2006)

3.1.2 PROJETANDO UM OLHAR NA PERSPECTIVA

Enquanto a geometria euclidiana estuda os objetos como eles realmente são, a geometria projetiva, além disso, dá enfase a como esses objetos são vistos. É comum haver diferença entre como se enxerga um objeto e como ele realmente é. Exemplo disso são os trilhos de um trem que, pela geometria euclidiana são paralelos, mas aparentam estar cada vez mais próximos entre si à medida que se distanciam do observador. Outro exemplo é o canto de uma sala, o qual é formado por três ângulos retos que, no entanto, são vistos como três ângulos que totalizam um giro completo (360º). De forma geral, comprimento, ângulo, paralelismo e forma podem ser distorcidos quando olha-se um objeto (WYLIE, 1970). Essa deformação que o objeto sofre ao ser observado de diferentes pontos pode ser entendido com o auxílio da geometria analítica.

Um exemplo disso é quando se quer pintar (projetar) um objeto que está num plano horizontal em um quadro que está num plano de projeção vertical. Para isso, pode-se apresentar um modelo matemático que relaciona cada ponto objeto P a sua projeção P'.

Considere o semi-plano π_o, tal que $\pi_o : z = 0,\ y \leq 0$. Considere também o semi-plano π_i, tal que $\pi_i : y = 0,\ z \geq 0$. π_0 será denominado "semi-plano objeto" e é onde estará o objeto que será projetado no "semi-plano imagem" (π_i) segundo a perspectiva de um observador no ponto $O = (0, y_o, z_o)$, com $y_o > 0$ e $z_o > 0$. A projeção de cada ponto ocorre da seguinte forma: dado um ponto $P \in \pi_o$, sua respectiva projeção em π_i será o ponto P', tal que $\overleftrightarrow{OP} \cap \pi_i = P'$, Figura 18.

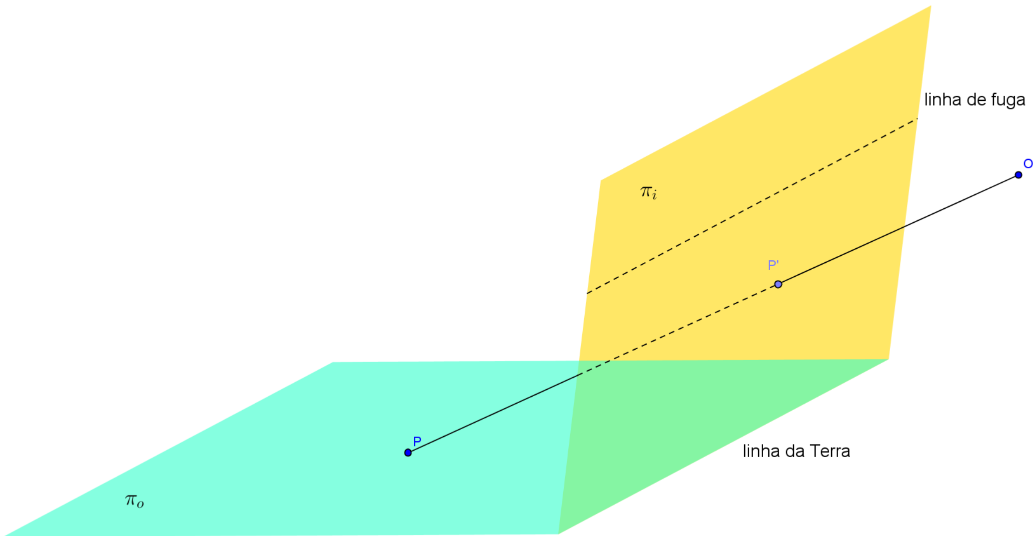


Figura 18: Observador em O vê o objeto em P sendo projetado na posição P'.

Vale destacar dois elementos da perspectiva: a "linha da terra" e a "linha de fuga". A linha da terra é a reta $\pi_o \cap \pi_i$, onde todo ponto objeto P terá como projeção o ponto P', tal que $P = P'$. A linha de fuga é a reta contida em π_i com $z = z_o$, onde seus pontos não são projeção de nenhum ponto em π_o.

O objetivo será, dado a posição do observador O e dado qualquer ponto P, encontrar sua imagem P'. Sendo assim, tome $P = (x_p, y_p, 0)$ e $O = (0, y_o, z_o)$, a equação da reta $\overleftrightarrow{OP}$ é dada por:

$$\overleftrightarrow{OP}: \frac{x-0}{x_p-0} = \frac{y-y_o}{y_p-y_o} = \frac{z-z_o}{0-z_o}.$$

Eliminando os zeros:

$$\overleftrightarrow{OP}: \frac{x}{x_p} = \frac{y-y_o}{y_p-y_o} = \frac{z-z_o}{-z_o}. \tag{1}$$

Tem-se que P' será o ponto de $\overleftrightarrow{OP}$ com $y=0$, pois $P' = \overleftrightarrow{OP} \cap \pi_i$. Assim, igualando y a zero em (1):

$$\begin{aligned} P': \frac{x}{x_p} &= \frac{-y_o}{y_p-y_o} = \frac{z-z_o}{-z_o}, \\ P': \frac{x}{x_p} &= \frac{y_o}{y_o-y_p} = \frac{z_o-z}{z_o}. \end{aligned} \tag{2}$$

Utilizando a primeira igualdade de (2), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x_p} &= \frac{y_o}{y_o-y_p}, \\ x &= \frac{x_p y_o}{y_o-y_p}. \end{aligned}$$

E utilizando a segunda igualdade de (2), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{y_o}{y_o-y_p} &= \frac{z_o-z}{z_o}, \\ z &= \frac{y_o z_o}{y_p-y_o} + z_o, \\ z &= \frac{y_p z_o}{y_p-y_o}. \end{aligned}$$

Portanto, cada ponto $P=(x_p,y_p,0)$ em π_o, terá sua imagem P' em π_i, tal que:

$$P' = \left(\frac{x_p y_o}{y_o-y_p}, 0, \frac{y_p z_o}{y_p-y_o} \right). \tag{3}$$

A partir daí, alguns resultados interessantes da perspectiva podem ser verificados.

Exemplo: Considere a família de semi-retas paralelas $r: x = k,\ z = 0$, com $y \leq 0$ e $k \in \mathbb{R}$ vistas por um observador em $O = (0,5,4)$. Assim substituindo esses valores em (3), a imagem de r será:

$$r' : x' = \frac{-5k}{y_p - 5}, y' = 0, z' = \frac{2y_p}{y_p - 5}.$$

A projeção r', com k variando de -5 a 5 com incremento de $0,5$, Figura 19, mostra que a projeção dessas semi-retas paralelas é dada por segmentos concorrentes. Em geral, toda família de semi-retas paralelas, concorrentes a linha da terra, terão como projeção segmentos concorrentes que tendem a se interceptar num ponto da linha de fuga (ponto de fuga). É interessante que à medida que a semi-reta tende ao infinito, sua projeção vai tendem ao ponto de fuga, Figura 19.

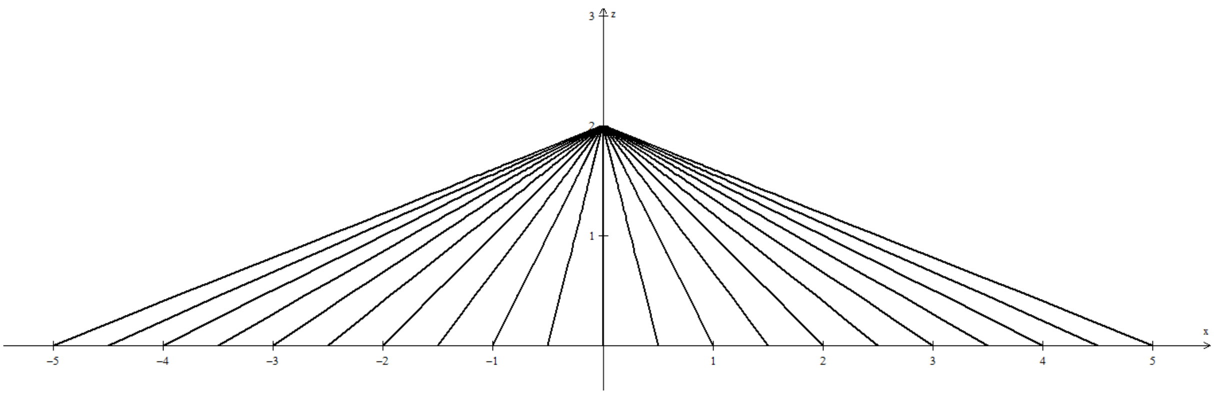


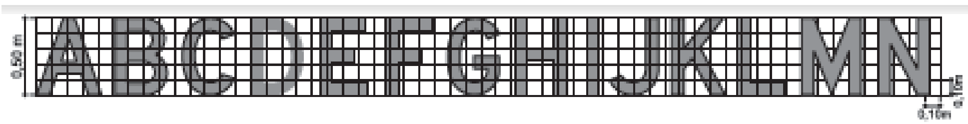
Figura 19: Gráfico de r', com k variando de -5 a 5 com incremento de $0,5$.

3.1.3 CONSTRUÇÃO DE UMA ANAMORFOSE OBLÍQUA

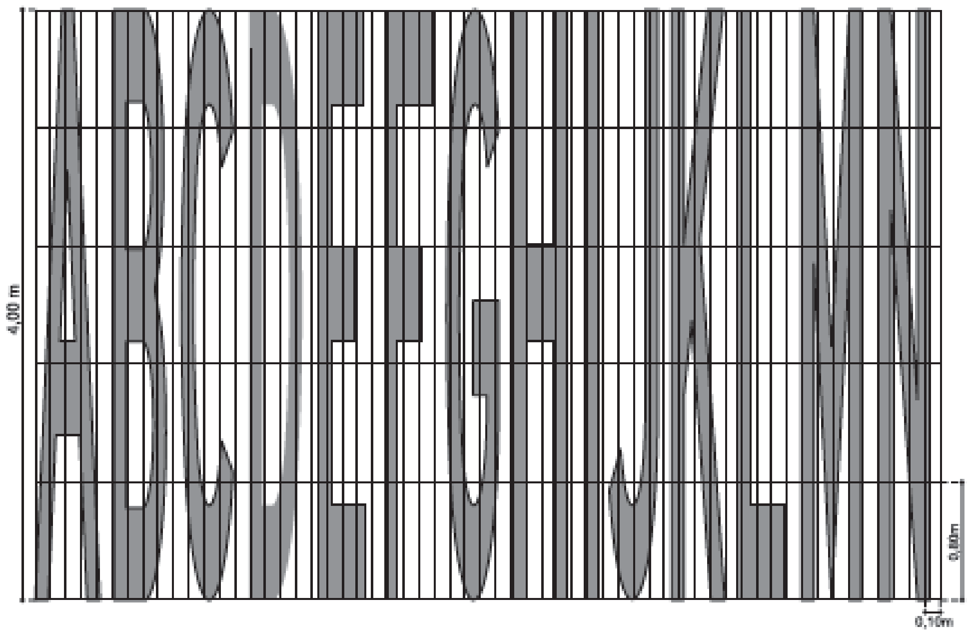
A anamorfose oblíqua é muito presente em nosso cotidiano, como exemplo tem-se as sinalizações de trânsito horizontais, que são as mensagens pintadas no próprio asfalto com o objetivo de, além de canalizar e orientar o fluxo, complementar os sinais verticais de regulamentação. É comum as pessoas perceberem e se perguntarem o porquê das letras, setas e símbolos estarem desproporcionais, alongados verticalmente.

Tal procedimento se justifica uma vez que o grande empecilho ao usar o solo como espaço para sinalizações, é que ele está num plano oblíquo em relação a visão do motorista, o qual só poderia ler com maior clareza a mensagem quando já estivesse muito próximo dela. Por isso, as mensagens sofrem essa deformação anamórfica linear vertical, de forma que, quanto mais alongada for a mensagem, o motorista poderá ter uma leitura satisfatória de uma distância maior.

Em relação as medidas, existem certos padrões de legalidade. Segundo o Manual Brasileiro de Sinalização de Trânsito (CONSELHO NACIONAL DE TRÂNSITO, 2007), as legendas (mensagem escritas) devem ter altura, em vias urbanas, de $1,60m$ onde a velocidade permitida é menor do que $80km/h$ e $2,40m$ onde a velocidade é maior do que $80km/h$. Já em vias rurais as alturas são de $2,40m$ e $4,00m$ para velocidades menores do que $80km/h$ e maiores do que $80km/h$ respectivamente. E essas são criadas a partir de um modelo com altura de $50cm$, onde as letras não estão deformadas. Como exemplo, a Figura 20 (a) mostra o modelo de letras para legenda sem deformações, cada quadrado mede $10cm \times 10cm$. Já na Figura 20 (b), é dado o modelo de letras para ser pintado em vias rurais com velocidade permitida acima de $80km/h$. Cada retângulo mede $10cm \times 80cm$.



(a)



(b)

Figura 20: Modelo para letras de legendas de sinalizações de trânsito horizontais: (a) sem deformação e (b) com deformação para ser pintado em vias rurais. (CONSELHO NACIONAL DE TRÂNSITO, 2007)

Exemplo: Considere um motorista dirigindo seu veículo em via rural, onde a velocidade permitida seja superior a $80km/h$, Figura 21. Para esse caso, segundo a regulamentação de trânsito, as letras devem ter altura de $4m\,(|AC| = 4m)$. Supondo que nesse modelo de carro os olhos do motorista ficam a uma altura de $1,6m$ ($|VE| = 1,6m$) em relação ao solo. Considerando também que o motorista está olhando para frente (com o eixo do cone visual em posição horizontal) e que a superfície da estrada naquele trecho é plana e horizontal. O objetivo deste exemplo é descobrir a qual distância o motorista pode ler a mensagem.

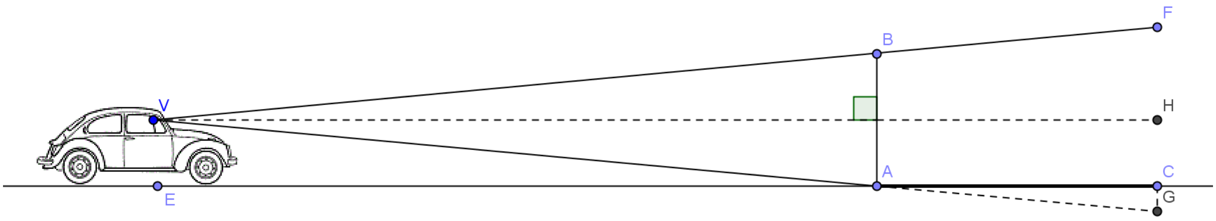


Figura 21: Representação da situação problema. Adaptado de (BLOGSPOT, 2014)

A pintura no chão terá sua projeção do segmento AB, pois a projeção deve ser perpendicular ao eixo do cone visual. Assim os extremos da projeção serão os pontos A e C', onde a mensagem terá sua leitura facilitada quando a projeção tiver as medidas originais (50cm de altura), Figura 22.

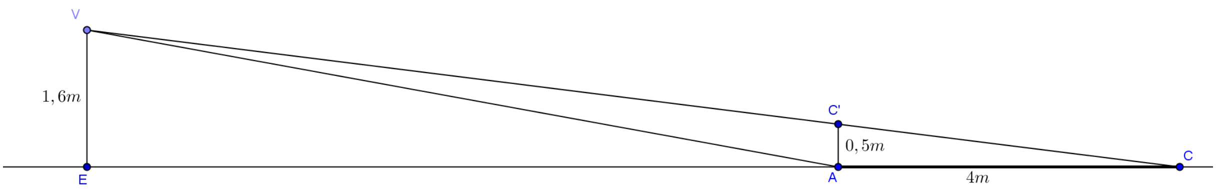


Figura 22: Esquema representativo da situação problema.

A distância ideal para que o motorista leia a mensagem é $|EA| = x$. Note que os triângulos CVE e $CC'A$ são semelhantes e a distância $|EA|$ pode ser calculada pela relação:

$$
\begin{aligned}
\frac{1,6}{x+4} &= \frac{0,5}{4}, \\
0,5.x+2 &= 6,4, \\
0,5.x &= 4,4, \\
x &= \frac{4,4}{0,5}, \\
x &= 8,8.
\end{aligned}
$$

Logo, a distância ideal para que o motorista leia a mensagem é a $|EA| = 8,8m$. Vale destacar que conforme a situação, a altura do ponto de vista ou irregularidades na pista por exemplo podem provocar variações no resultado.

3.2 CONSTRUÇÃO DE UMA ANAMORFOSE CÔNICA

A anamorfose cônica é aquela que ocorre pela reflexão do objeto em um cone espelhado, com o observador a certa distância, sobre o vértice do cone. A deformação deixa a figura irreconhecível mas, analisando a matemática envolvida, descobre-se a sua simplicidade.

3.2.1 PROPAGAÇÃO DA LUZ E A ÓTICA GEOMÉTRICA

A luz propaga-se por meio de ondas de comprimento relativamente pequeno, cerca de $500nm$ ou $5 \times 10^{-7}m$, por isso "sob algumas circunstâncias, as ondas se comportam como se viajassem em linha reta, sendo bloqueadas por barreiras e projetando sombras bem definidas" (HALLIDAY; RESNICK, 1991). Por isso, para situações que não envolvam medidas muito pequenas, pode-se considerar como se a luz propagasse em linha reta. A ótica geométrica baseia-se nesse modelo aproximado da propagação da luz.

Quando a luz transita de um meio para outro, geralmente ocorrem dois fenômenos: a reflexão e a refração, sendo para esse trabalho, revelante apenas o primeiro fenômeno. Quando a luz reflete, tem-se dois raios que intersectam-se no ponto de incidência I: o raio de incidência e o raio de reflexão. Estes por sua vez, formam os ângulos de incidência (definido pelo raio de incidência e a normal à superfície em I) e de reflexão (definido pelo raio de reflexão e a normal à superfície em I), Figura 23.

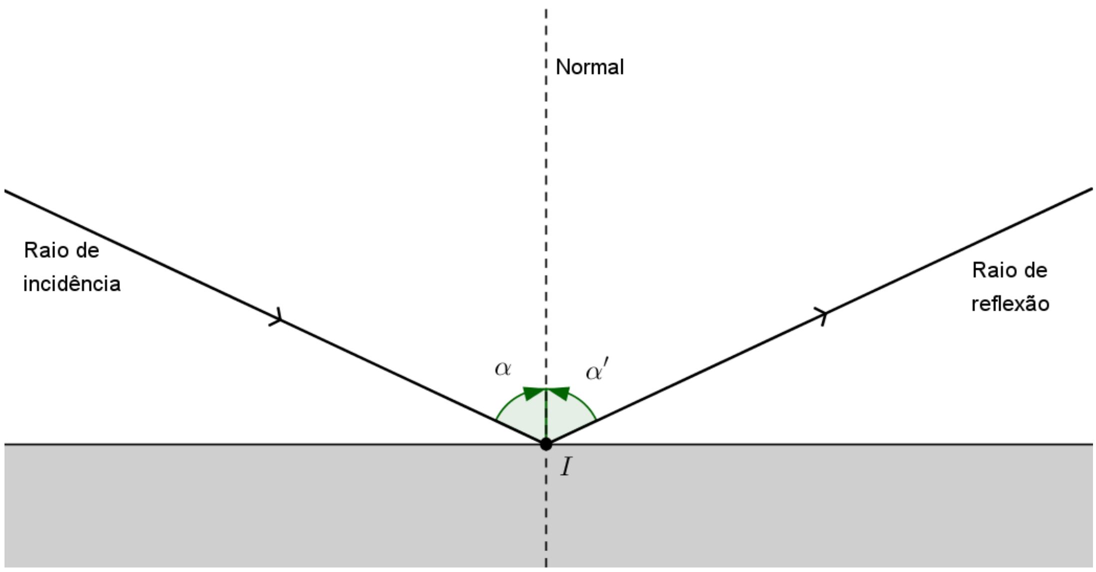


Figura 23: Esquema representativo da reflexão da luz.

Seja o plano de incidência definido pelo raio de incidência e a reta normal a superfície refletora em relação ao ponto de incidência. A reflexão da luz é governada pela seguinte Lei,

(HALLIDAY; RESNICK, 1991).

Lei da Reflexão: *O raio de reflexão permanece no plano de incidência e* $\alpha' = \alpha$.

3.2.2 A MATEMÁTICA NA ANAMORFOSE CÔNICA

Para mostrar os conceitos matemáticos envolvidos na anamorfose cônica, considera-se, por exemplo, o observador no infinito ou seja, os raios refletidos que chegam ao observador são paralelos entre si e também, paralelos ao eixo do cone como ilustra a Figura 24. Note que, por exemplo os pontos A, B, C e D, têm como imagem os pontos A', B', C' e D', respectivamente.

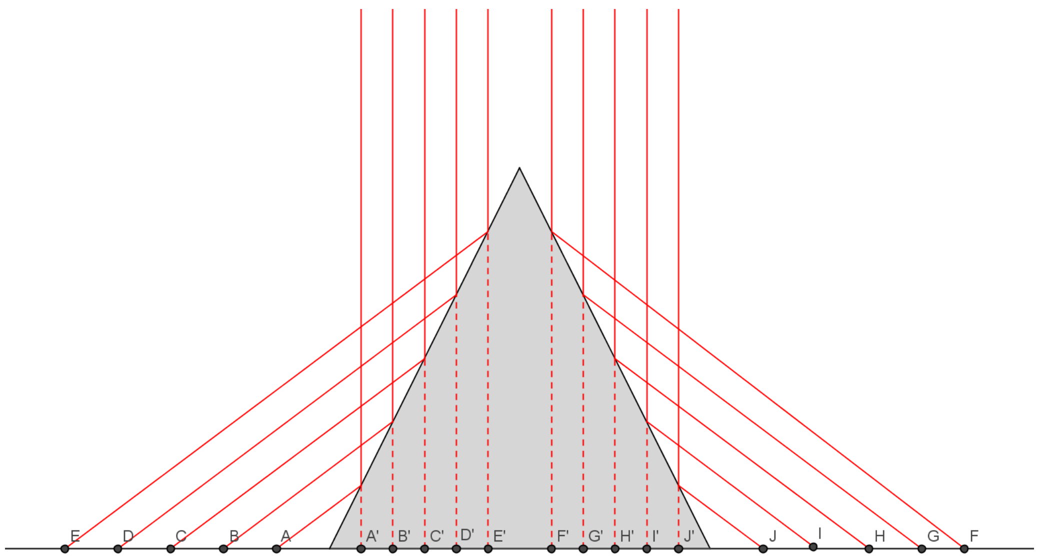


Figura 24: Reflexão da luz e formação da imagem na anamorfose cônica, com o observador no infinito.

Partindo desse modelo, o objetivo é, dado o raio b e a altura h do cone, encontrar uma equação que relacione cada ponto $P' = (r', \theta')$ da imagem formada na base do cone com um ponto $P = (r, \theta)$ do objeto. Como o raio de incidência, raio de reflexão e reta normal estão contidos no plano de incidência, tem-se que $\theta = \theta'$

Para relacionar r e r', secciona-se o cone como apresentado na Figura 25, obtendo o triângulo $\triangle ABC$. O observador vê a imagem P' através do raio de reflexão $\overleftrightarrow{DI}$, paralelo ao eixo do cone, sendo I o ponto de incidência e consequentemente $\overleftrightarrow{IP}$ o raio de incidência, Figura 25.

Considerando α a medida da bissetriz do ângulo $\angle BAC$ tem-se que:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{b}{h}, \\ \alpha &= \tan^{-1}\left(\frac{b}{h}\right). \end{aligned}$$

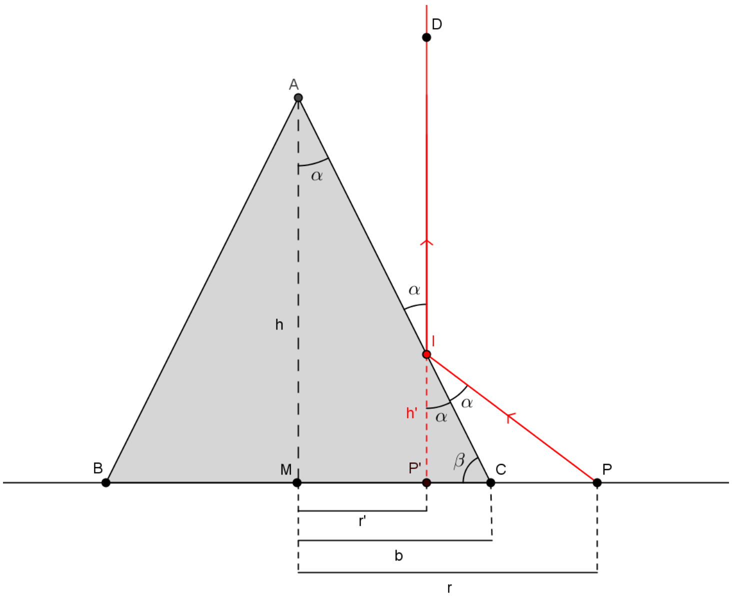


Figura 25: Reflexão de raio de luz no espelho cônico e relação entre os elementos envolvidos.

Observa-se que $\overleftrightarrow{AM} \parallel \overleftrightarrow{DP'}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ é transversal a ambas, logo $\angle MAC$ e $\angle P'IC$ são ângulos colaterais e sendo assim, $\angle MAC \equiv \angle P'IC = \alpha$. Note também que $\angle DIA$ é o ângulo oposto pelo vértice de $\angle P'IC$, logo $\angle DIA = \alpha$.

Tem-se também que $\angle DIA \equiv \angle CIP$, pelo fato de que, pela Lei da Reflexão, ângulos de incidência e de reflexão são congruentes.

Pelo triângulo $\triangle IP'C$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{b-r'}{h'}, \\ h' &= \tan^{-1}(\alpha).(b-r'). \end{aligned} \tag{4}$$

Considerando x a medida do segmento $P'P$, pelo triângulo $\triangle IP'P$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \tan(2.\alpha) &= \frac{x}{h'}, \\ x &= h'.\tan(2.\alpha). \end{aligned}$$

Como resultado já conhecido, a tangente da soma de arcos é dada por:

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a).\tan(b)},$$

então:

$$x = \frac{2.\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}h'. \tag{5}$$

Substituindo (4) em (5), obtém-se:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2.\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.\tan^{-1}(\alpha).(b-r'), \\ x &= \frac{2.(b-r')}{1-\tan^2(\alpha)}. \end{aligned} \tag{6}$$

Sabe-se que $r = r' + x$ assim, substituindo o resultado de (6) tem-se:

$$r = r' + 2.\frac{b-r'}{1-\tan^2(\alpha)}. \tag{7}$$

De (7), conclui-se que cada ponto $P' = (r', \theta)$ (exceto o ponto $(0, \theta)$, que não terá ponto objeto definido) interno a base do cone tem como ponto objeto $P = \left(r' + 2.\frac{b-r'}{1-\tan^2(\alpha)}, \theta\right)$.

E, assim pode-se determinar cada ponto objeto da figura anamórfica.

3.3 CONSTRUÇÃO DE UMA ANAMORFOSE CILÍNDRICA

Na anamorfose cilíndrica utiliza-se um cilindro refletor e nesta sessão é apresentado um modelo matemático com o qual pode-se, a partir do posicionamento de um ponto na imagem final, encontrar seu respectivo ponto a ser representado no plano objeto. O conhecimento prévio que se faz necessário é sobre o vetor projeção e a projeção ortogonal.

3.3.1 O VETOR PROJEÇÃO

O vetor projeção na geometria analítica tem várias aplicações e também será necessário neste trabalho.

Definição 3.1 (Vetor Projeção:). *Sejam os vetores não-nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no $\mathbb{R}^3$. Considere também o ponto A' sobre o pé da perpendicular baixada da extremidade de $\vec{u}$ sobre o vetor $\vec{v}$ ou o seu prolongamento. Se O é a origem comum entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, define-se o vetor projeção de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$, denotado por $Proj_{\vec{v}}\vec{u}$, como sendo o vetor $\overrightarrow{OA'}$, Figura 26.*

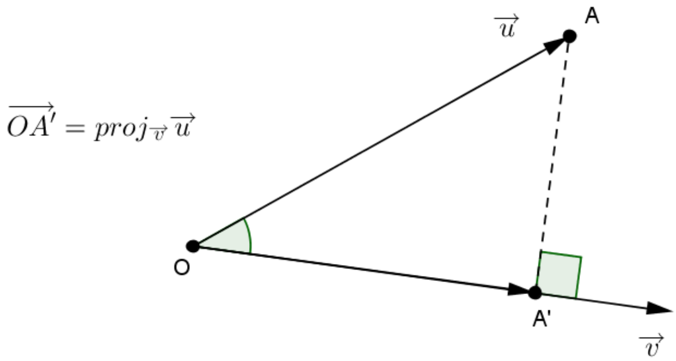


Figura 26: Representação do vetor projeção.

Seguem outras definições e proposições que serão necessárias:

Definição 3.2. *Sendo $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não nulos, o vetor $\overrightarrow{u}$ é dito múltiplo do vetor $\overrightarrow{v}$ se ambos têm mesma direção e, sendo assim, $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Definição 3.3. *O produto interno dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é o número real $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ definido da seguinte maneira:*

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \begin{cases} 0 & , se\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}\ ou\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \\ |\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}|.cos\theta & , se\ \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}, \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}, sendo\ \theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}). \end{cases}$$

Entenda por $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ o menor ângulo não negativo formado pelos vetores.

Da Definição 3.3, tem-se a seguinte proposição:

Proposição 3.4. *O produto escalar de um vetor não nulo por ele mesmo é igual ao quadrado da norma desse vetor, pois pela definição 3.3:*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v}.\overrightarrow{v} &= |\overrightarrow{v}|.|\overrightarrow{v}|.cos0 \\ \overrightarrow{v}.\overrightarrow{v} &= |\overrightarrow{v}|^2 \end{aligned}$$

Proposição 3.5.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0,\ com\ \overrightarrow{v}\ e\ \overrightarrow{v}\ não\ nulos \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$$

Demonstração:

Utilizando a Definição 3.3, tem-se:

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0, \textit{ com } \overrightarrow{v} \textit{ e } \overrightarrow{v} \textit{ não nulos} && \Leftrightarrow \\
&|\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}|.cos\theta = 0 && \Leftrightarrow \\
&cos\theta = 0 && \Leftrightarrow \\
&\theta = \frac{\pi}{2} && \Leftrightarrow \\
&\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}.
\end{aligned}$$

Com as definições e proposições anteriores é possível demonstrar a proposição seguinte:

Proposição 3.6 (Projeção Ortogonal)**.** *A projeção otogonal do vetor $\overrightarrow{u}$ sobre o vetor $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ é dada por:*

$$Proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|^2}\overrightarrow{v}.$$

Demonstração:

A projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{u}$ sobre o vetor $\overrightarrow{v}$, não nulos, é dada pelo vetor $\overrightarrow{OA}$, Figura 26. Note que, pela Definição 3.2, $\overrightarrow{OA}$ é um múltiplo de $\overrightarrow{v}$, assim:

$$Proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA} = \lambda\overrightarrow{v}, \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R} \tag{8}$$

Sendo o vetor $\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{u} - \lambda\overrightarrow{v}$ perpendicular ao vetor $\overrightarrow{v}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
&(\overrightarrow{u} - \lambda\overrightarrow{v}) \perp \overrightarrow{v} && \Rightarrow \\
&(\overrightarrow{u} - \lambda\overrightarrow{v}).\overrightarrow{v} = 0 && \Rightarrow \\
&\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} - \lambda(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v}) = 0
\end{aligned} \tag{9}$$

Aplicando o resultado da Proposição 3.4 e isolando λ na equação (9), tem-se:

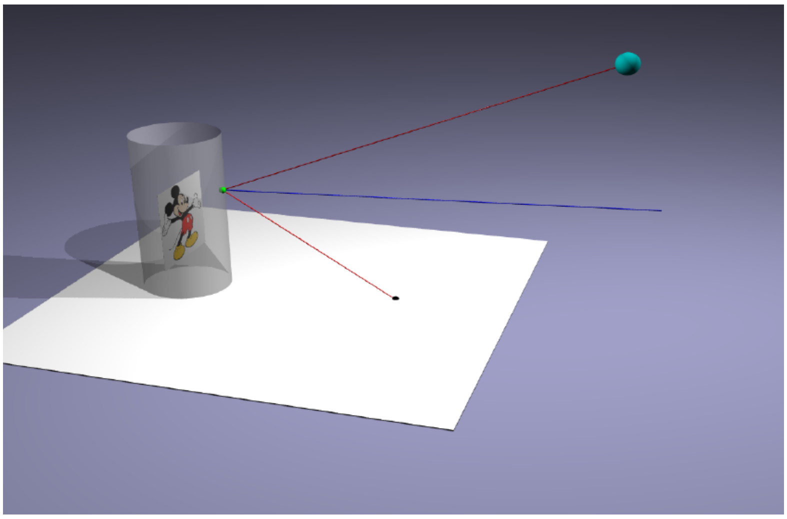
$$\lambda = \frac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|^2}. \tag{10}$$

E, substituindo λ encontrado em (10) na equação (8), tem-se:

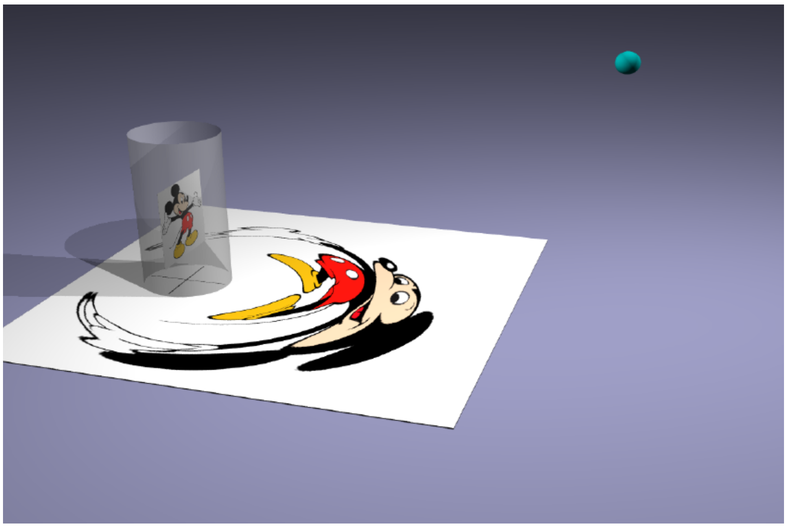
$$Proj_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|^2}\overrightarrow{v}.$$

3.3.2 A MATEMÁTICA NA ANAMORFOSE CILÍNDRICA

A Matemática por trás de uma anamorfose cilíndrica pode ser apresentada partindo da Figura 27 (a), onde a imagem é imaginada dentro do cilindro, pois deseja-se que o observador veja a imagem final do personagem Mickey no cilindro. Assim, por exemplo, para gerar a imagem do olho direito do personagem, deve-se encontrar o ponto de incidência do raio com o espelho, a partir daí identificar a normal ao cilindro pelo ponto de incidência e com isso é possível gerar o raio de incidência, o qual intercepta o plano objeto no ponto referente ao olho do Mickey. Repetindo o processo para os outros pontos a figura deformada pode ser construída, Figura 27 (b), (SPICKLER; BERGNER, 2011).



(a)



(b)

Figura 27: Compreensão de um anamorfismo cilíndrico: (a) planejamento envolvendo observador, objeto, imagem e raios de incidência e reflexão e (b) imagem final deformada. (SPICKLER; BERGNER, 2011)

A Figura 28 representa o esquema da reflexão em um espelho cilíndrico cujo processo é descrito matematicamente. Sem perda de generalidade, fixa-se o plano objeto no plano xy e define-se o cilindro por $\pi : x^2 + y^2 = r^2$.

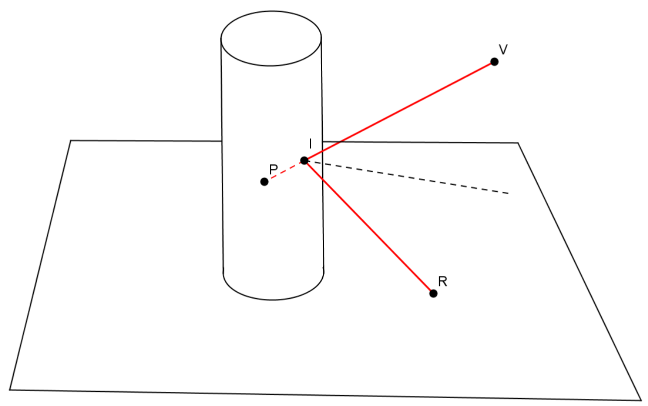


Figura 28: Esquema de representação da reflexão em um espelho cilíndrico.

Considerando $V = (v_x, v_y, v_z)$ o ponto do observador (externo ao cilindro e não pertencente ao plano objeto) e $P = (p_x, p_y, p_z)$ como um ponto da imagem final (interno ao cilindro), o objetivo será encontrar o ponto R, no plano objeto, cujo ponto P é a sua imagem no espelho.

A relação entre R e P é dada pela ótica: o raio de incidência parte de R, incidindo no espelho em I, então reflete, atingindo o observador em V. Porém, o observador interpreta como se o que é visto estivesse atrás do espelho, em P.

Para determinar as coordenadas de I, deve-se definir a reta $\overleftrightarrow{VP}$, então obter $\overleftrightarrow{VP} \cap \pi$ que serão dois pontos. O ponto entre V e P é o ponto procurado (I).

Sendo assim, a equação da reta $\overleftrightarrow{VP}$ é dada por:

$$
\begin{aligned}
\overleftrightarrow{VP} &= P + t(V - P), \quad \text{com} \quad t \in \mathbb{R}, \\
\overleftrightarrow{VP} &= (p_x, p_y, p_z) + t((v_x, v_y, v_z) - (p_x, p_y, p_z)), \\
\overleftrightarrow{VP} &= (p_x + t(v_x - p_x), p_y + t(v_y - p_y), p_z + t(v_z - p_z)). \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Substituindo o resultado de (11) na equação do cilindro ($\overleftrightarrow{VP} \cap \pi$), tem-se:

$$
\begin{aligned}
r^2 &= x^2 + y^2, \\
r^2 &= (p_x + t(v_x - p_x))^2 + (p_y + t(v_y - p_y))^2, \\
r^2 &= p_x^2 + 2tp_x(v_x - p_x) + t^2(v_x - p_x)^2 + p_y^2 + 2tp_y(v_y - p_y) + t^2(v_y - p_y)^2,
\end{aligned}
$$

$$0 = t^2((v_x - p_x)^2 + (v_y - p_y)^2) + t(2(p_x(v_x - p_x) + p_y(v_y - p_y))) + (p_x^2 + p_y^2 - r^2). \quad (12)$$

A equação (12) é de segundo grau, ressaltando que P é interno ao cilindro e V é externo, $\overleftrightarrow{VP}$ é secante ao cilindro e com isso a equação (12) terá duas raízes reais distintas sendo uma referente a intersecção entre V e P, onde $0 < t < 1$ (referente a I) e a outra, intersecção, onde $t < 0$.

Tais raízes podem ser obtidas por:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

com a, b, c sendo os coeficientes da equação (12).

Comparando as duas raízes, tem-se:

$$\begin{aligned} -b &= -b, \\ -b - \sqrt{b^2 - 4ac} &\leq -b + \sqrt{b^2 - 4ac}. \end{aligned}$$

E já que o valor de a em (12) é estritamente positivo pois é a soma de quadrados, tem-se:

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \leq \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Mas, pelo que foi visto anteriormente, uma raíz será negativa e outra positiva e a raíz referente a I será a positiva, logo:

$$t_i = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (13)$$

E com isso, o ponto de incidência I é dado pela equação 11, com $t = t_i$, ou seja:

$$I = (p_x + t_i(v_x - p_x), p_y + t_i(v_y - p_y), p_z + t_i(v_z - p_z)).$$

O que será denotado por:

$$I = (i_x, i_y, i_z).$$

Para o caso particular do cilindro, sabe-se que a normal em I é o prolongamento do raio que passa por I, assim, pode-se estabelecer o vetor normal $\overrightarrow{n}$, com origem em $(0, 0, i_z)$ e extremidade em I, ou seja:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{n} &= (i_x - 0, i_y - 0, i_z - i_z),\\ \overrightarrow{n} &= (i_x, i_y, 0).\end{aligned}$$

Com esses resultados, pode-se esboçar o esquema da Figura 29 (a), onde apresenta-se o vetor $\overrightarrow{v}$ com origem em I e extremidade em V. O objetivo será definir o vetor $\overrightarrow{r}$, simétrico a $\overrightarrow{v}$ em relação a $\overrightarrow{n}$.

Porém, traçando a projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{v}$ em $\overrightarrow{n}$ ($Proj_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{v}$), obtem-se o esquema da Figura 29 (b).

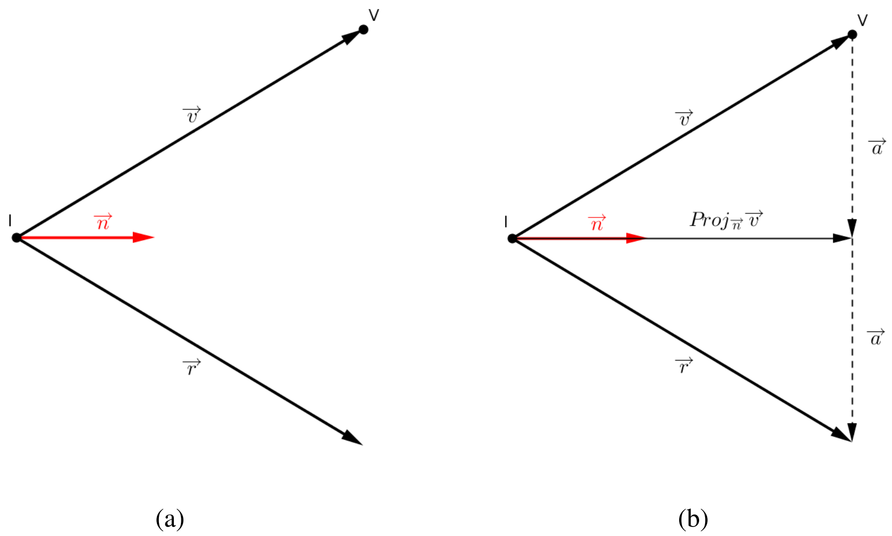


Figura 29: Projeção normal: (a) vetor normal $\overrightarrow{n}$ e (b) projeção ortogonal $Proj_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{v}$.

Note que $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{d} = Proj_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{v}$, ou ainda:

$$\overrightarrow{d} = Proj_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}. \tag{14}$$

Substituindo o resultado da Proposição 3.6 em (14), tem-se:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{d} &= Proj_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v},\\ \overrightarrow{d} &= \frac{\overrightarrow{n}.\overrightarrow{v}}{|n|^2}\overrightarrow{n} - \overrightarrow{v}.\end{aligned} \tag{15}$$

Observando que $\overrightarrow{r}$ pode ser obtido pela soma dos vetores $\overrightarrow{v}$ e $2\overrightarrow{d}$, tem-se:

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{a}. \tag{16}$$

Substituindo o resultado de (15) em (16), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r} &= \overrightarrow{v} + 2\left(\frac{\overrightarrow{n}.\overrightarrow{v}}{|n|^2}\overrightarrow{n} - \overrightarrow{v}\right), \\
\overrightarrow{r} &= \frac{2\overrightarrow{n}.\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{n}|^2}\overrightarrow{n} - \overrightarrow{v}.
\end{aligned}$$

E que será denotado por:

$$\overrightarrow{r} = (r_x, r_y, r_z).$$

Assim, para determinar as coordenadas do ponto R, tem-se que a $\overleftrightarrow{IR}$ é dada por:

$$\begin{aligned}
\overleftrightarrow{IR} &= I + t\overrightarrow{r}, \quad \text{com} \quad t \in \mathbb{R}, \\
\overleftrightarrow{IR} &= (i_x + tr_x, i_y + tr_y, i_z + tr_z).
\end{aligned} \tag{17}$$

Sendo R o ponto de $\overleftrightarrow{IR}$ com $z = 0$. Igualando z a 0, obtém-se:

$$\begin{aligned}
i_z + tr_z &= 0, \\
t &= -\frac{i_z}{r_z}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Substituindo (18) em (17), obtém-se o ponto R:

$$R = \left(i_x - \frac{i_z r_x}{r_z}, i_y - \frac{i_z r_y}{r_z}, 0\right).$$

Logo, pode-se determinar cada ponto da figura anamórfica no plano objeto.

4 OFICINA ANAMÓRFICA E APLICAÇÕES DA ANAMORFOSE NO ENSINO

Neste capítulo apresentam-se atividades realizadas com os alunos em uma oficina de apresentação da técnica da anamorfose. Além de outras atividades que podem ser desenvolvidas com alunos do Ensino Básico em um trabalho interdisciplinar. Por fim, faz-se uma apresentação do uso do software Anamorph Me!.

4.1 A ANAMORFOSE EM UMA OFICINA DE MATEMÁTICA

Como previsto no planejamento anual e sugerido nos livros didáticos, trabalha-se no 6º ano os conceitos de ponto, reta, plano e segmento de reta. Além de conceitos referentes ao posicionamento da reta (inclinada, vertical e horizontal) ou ao posicionamento de uma reta em relação a outra (concorrentes, perpendiculares, paralelas e coincidentes).

No ano de 2013, no Colégio Estadual do Campo Professor Aloísio, Campo Largo, Paraná, foi proposta aos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental uma atividade que, usando a geometria, teria como produto final a construção de uma figura anamórfica. Tal atividade põe em prática os assuntos mencionados, além de dar a noção de coordenadas, plano quadriculado e plano polar, mesmo que de forma sutil.

Inicialmente foram apresentadas aos alunos obras de István Orosz, exemplos de anamorfismos cilíndricos. O primeiro contato gerou certa incompreensão, alguns demoraram para perceber que a imagem era resultado de um reflexo. Mas logo as crianças passaram a interagir tanto com a imagem quanto com o cilindro utilizado para apresentar a técnica, Figura 30.

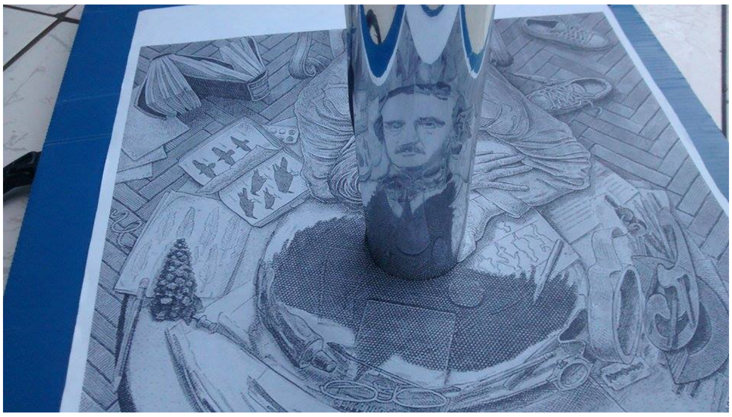
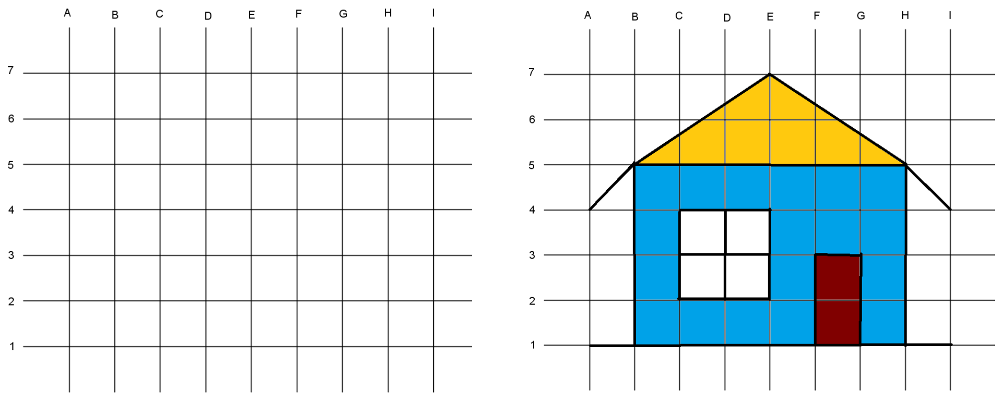


Figura 30: Imagem anamórfica apresentada aos alunos.

Na aula seguinte solicitou-se aos alunos que criassem uma malha quadriculada formada por 9 linhas verticais e 7 linhas horizontais. Essas linhas foram nomeadas da seguinte forma: as horizontais de 1 a 7, de baixo para cima e as verticais de A a I, da esquerda para a direita, Figura 31 (a). Feito isso, comentou-se que cada ponto resultante da interseção de duas linhas (uma horizontal e outra vertical) poderia receber um código para ser identificado por exemplo, o ponto de intersecção das linhas B e 5, será chamado de ponto $B5$. Depois de trabalhado esse conceito de coordenada, cada aluno criou uma figura formada apenas por segmento de reta que tivessem seus extremos nesses pontos como no exemplo da Figura 31 (b).

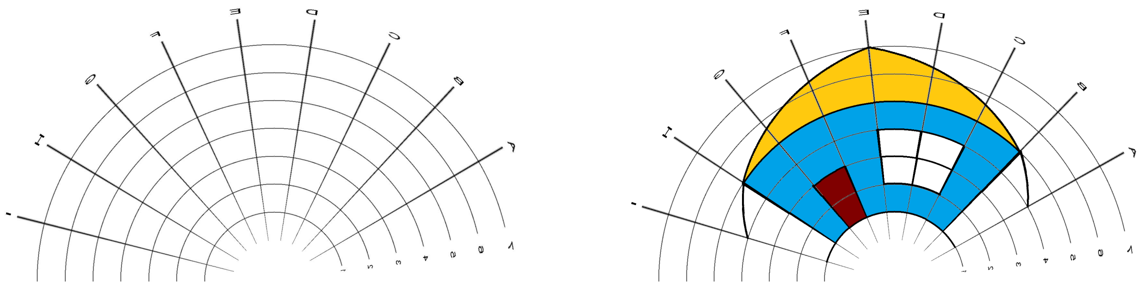


(a) (b)

Figura 31: Material apresentado aos alunos: (a) malha quadriculada e (b) exemplo de desenho.

Na sequência, os alunos fizeram uma lista de todos os segmentos que foram usados para criar os seus desenhos. Por exemplo, para formar o telhado da casa, Figura 31 (b), foram usados os segmentos $A4B5$, $B5E7$, $E7H5$ e $H5I4$. Posteriormente, cada um trocou a sua lista com a de um colega procurando reproduzir a imagem usando só a lista que lhe fora fornecida. No início alguns tiveram dificuldade em compreender o que fora pedido, mas com algumas explicações extras, todos foram capazes de construir o desenho do colega. Com isso, eles observaram que seus desenhos poderiam ser decifrados através dos códigos que eles geram.

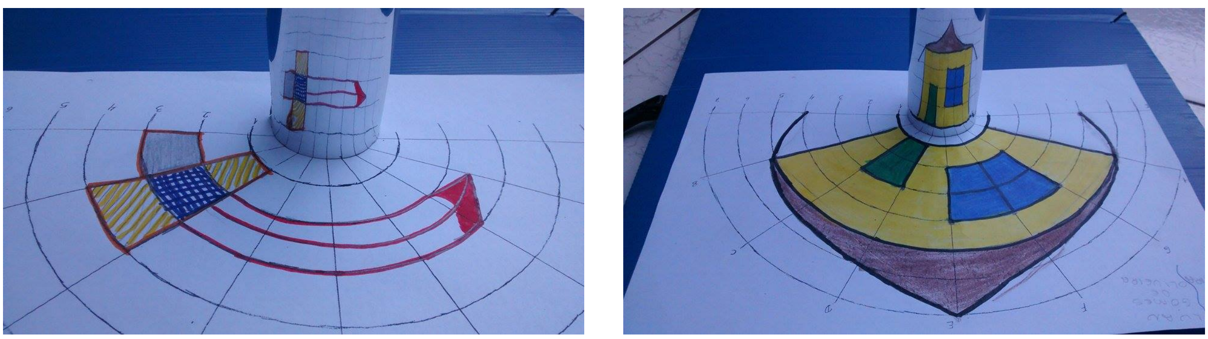
Por fim, apresentou-se uma malha composta por 7 linhas dispostas como arcos de circunferência e 9 linhas radiais, como na Figura 32 (a). Instruiu-se os alunos para que numerassem as semi-circunferências de 1 a 7 da menor para a maior e as linhas radiais com letras de A a I da direita para a esquerda. Com isso, solicitou-se que refizessem seus desenhos, usando a lista de códigos (coordenadas) nessa nova malha respeitando a disposição das linhas como no exemplo da Figura 32 (b).



(a) (b)

Figura 32: Oficina com os alunos: (a) malha radial e (b) exemplo de figura associada.

Além da aplicação dos conceitos de geometria anteriormente estudados, tal atividade rendeu figuras bem criativas e que chamaram a atenção por ser uma novidade para a grande maioria dos alunos e funcionários da colégio, Figura 33 (a) e (b). Alguns alunos até procuraram o professor para obter maiores informações sobre o tema e pedindo dicas para um concurso de desenhos que iria acontecer na escola.



(a) (b)

Figura 33: Anamorfismo cilíndrico construído por alunos do 6º ano: (a) espada samurai e (b) casa.

Como cilindros refletores utilizou-se as tradicionais canecas de alumínio do colégio, que dão um bom resultado além de serem de fácil acesso. Ou ainda pode-se revestir um cano de

PVC com uma película protetora (insulfilm refletor), que tem baixo custo e produz uma imagem de melhor qualidade.

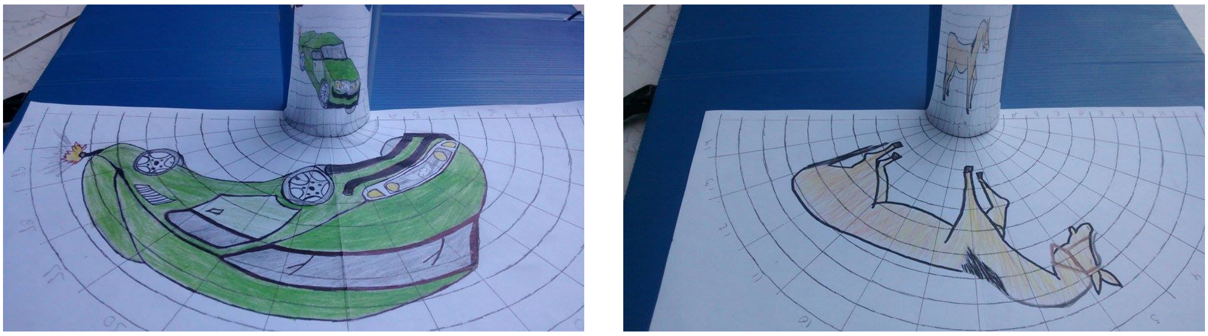
Note que, para as linhas horizontais e verticais tem-se linhas referentes na malha deformada, ficando fácil a reprodução do desenho. Já para as linhas inclinadas, não. Assim, um erro comum entre os alunos foi ao reproduzir essas linhas inclinadas. Veja na Figura 33, por exemplo, que o telhado da casa está um tanto torto. Assim, outro tema que pode ser abordado nesse momento, para sanar essa dificuldade, é a construção de curvas por interpolação, já que as posições de alguns pontos da curva são evidentes (os que passam pelas linhas já existentes).

Essa atividade teve um bom retorno. Assuntos de geometria foram revistos de forma lúdica através de atividades práticas, com boa aceitação, conseguindo a participação total e satisfatória por parte dos alunos.

Tal oficina despertou também a curiosidade dos alunos do 2º ano do Ensino Médio e uma oficina similar foi desenvolvida com eles. Pelo fato de ser aplicada na disciplina de Física e com alunos adolescentes e jovens, foi possível trabalhar conceitos de ótica geométrica e os desenhos apresentados foram mais elaborados. Nessa oficina, diferente da outra, teve uma etapa anterior: a aplicação de um questionário, avaliando o conhecimento e a capacidade de analisar as deformações anamórficas antes de conhecer mais sobre essa técnica, conforme Anexo A.

O objetivo da aplicação do questionário foi, perceber as dificuldades dos alunos em compreender uma anamorfose buscando significados para a deformação, sem conhecer formalmente nada sobre a técnica. Também nesse questionário, esperava-se que os alunos fizessem conexões entre a técnica e um assunto que tinham visto a menos de um mês: a reflexão da luz. Porém, tal ligação foi feita por poucos.

A Figura 34 mostra alguns dos desenhos apresentados pelos alunos e a sua criatividade, com destaque para os detalhes.



(a) (b)

Figura 34: Anamorfismos cilíndricos construídos por alunos do 2º ano: (a) carro e (b) cavalo.

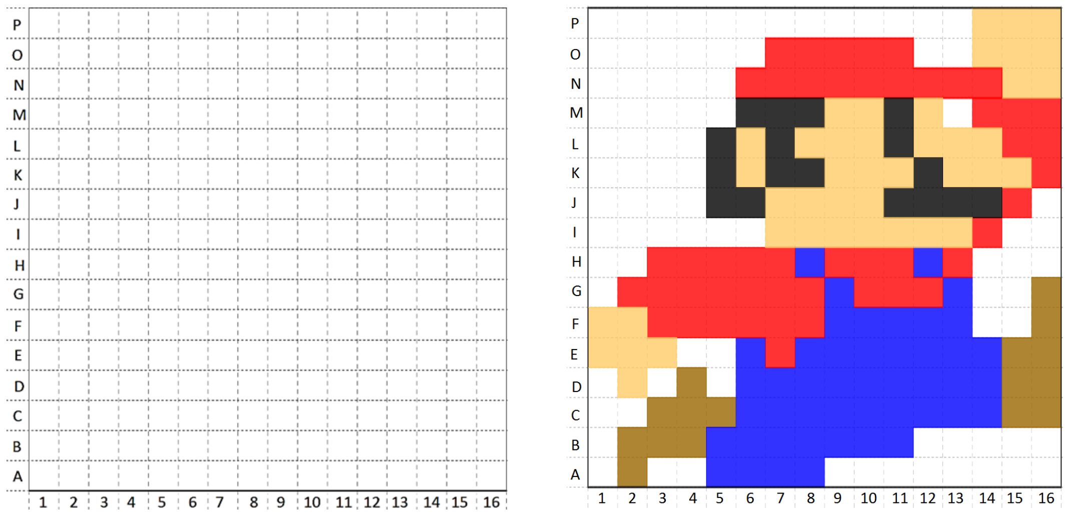
4.2 ATIVIDADES SUGERIDAS

Nesta seção são apresentadas sugestões de atividades para serem reproduzidas ou adaptadas, conforme o interesse do professor em conteúdos da disciplina de Matemática em conjunto com outras disciplinas tendo a anamorfose como elo de ligação.

4.2.1 ATIVIDADE COM MALHAS ORTOGONAIS E NÃO-ORTOGONAIS

Essa atividade tem por objetivo familiarizar o aluno com o plano ortogonal e com o conceito de coordenadas. Além disso, perceber a praticidade ao deformar imagens de um plano ortogonal para outro não ortogonal, usando o quadriculado.

No procedimento constrói-se uma malha quadriculada com tamanho 16×16. Em seguida, nomeia-se as linhas e colunas de quadrados formados. Para facilitar as localizações, sugere-se usar números e letras como na Figura 35 (a). Para a criação da figura, pinta-se o interior de alguns dos quadrados como na Figura 35 (b), que mostra o personagem Mario Bross. Para a confecção da malha e da figura pode-se utilizar os softwares Geogebra e Paintbrush.



(a) (b)

Figura 35: Malha ortogonal: (a) malha quadriculada e (b) imagem associada à malha ortogonal.

Uma outra atividade trata-se de transferir as informações do desenho da malha ortogonal para outros tipos de malhas com o propósito de criar efeitos de ilusão, anamorfoses, ou apenas deformações; as malhas da Figura 36 dão a noção de perspectiva, a deformação de uma anamorfose cilíndrica e a simulação de uma saliência em forma de bolha, respectivamente. A Figura 36 apresenta também a imagem do personagem Mario Bross associada a essas malhas.

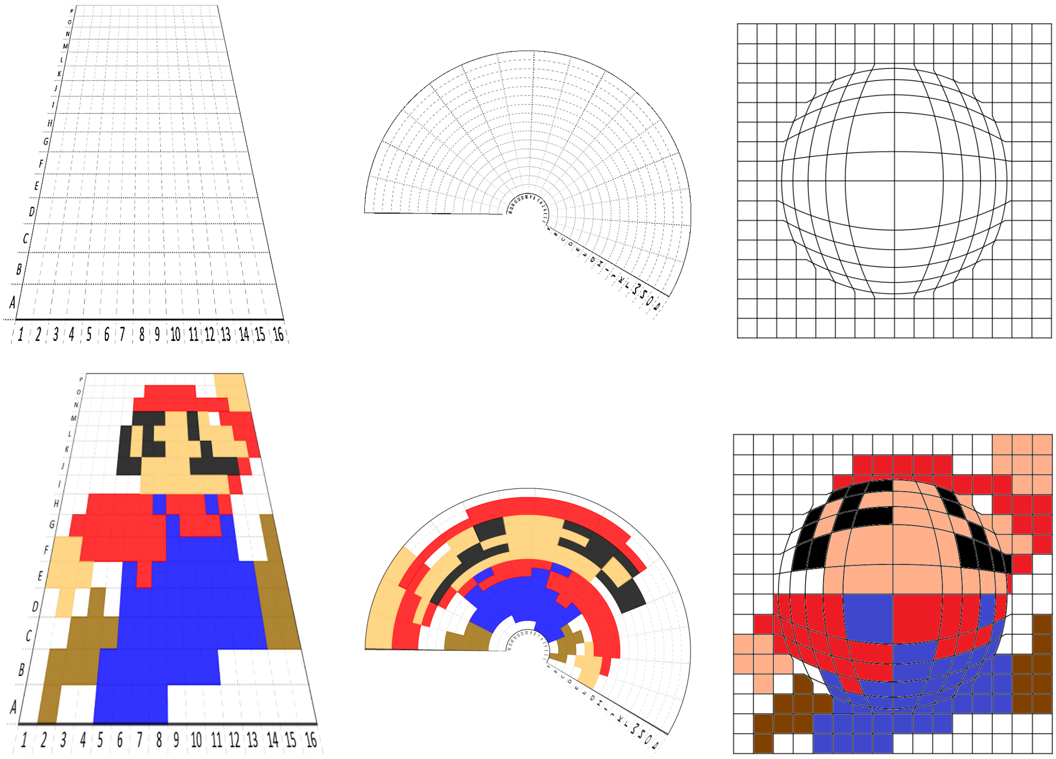


Figura 36: Deformações da malha quadrada e imagem associada.

4.2.2 REFLEXÃO E ANAMORFOSE

Exercícios que envolvem reflexão para determinar a posição dos pontos objetos, imagem ou ângulo de incidência, geralmente são apresentados e resolvidos com o uso da malha quadriculada; apresentando as medidas de forma escrita podendo o desenho ser meramente ilustrativo; ou ainda ser resolvido de forma intuitiva. Seguem três exemplos:

Exemplo 1: João encontra-se na posição O olhando para a superfície refletora de um espelho plano EP. Maria passa atrás de João, percorrendo a reta r conforme a Figura 37.

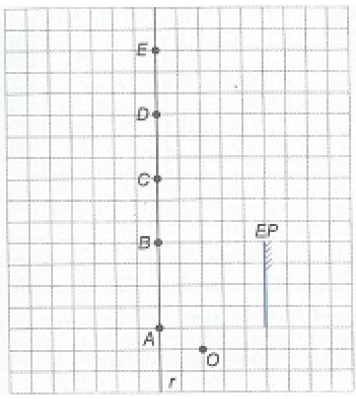


Figura 37: Representação da situação problema envolvendo uma superfície refletora. (TORRES, 2010)

Em quais dos locais indicados (A, B, C, D e E) Maria deve se posicionar para que sua imagem seja vista por João? (TORRES, 2010)

Exemplo 2: Reproduza a imagem em seu caderno da Figura 38, ela representa dois pontos, A e B, que estão diante de um espelho plano E. Determine a distância entre B e a imagem de A. (TORRES, 2010)

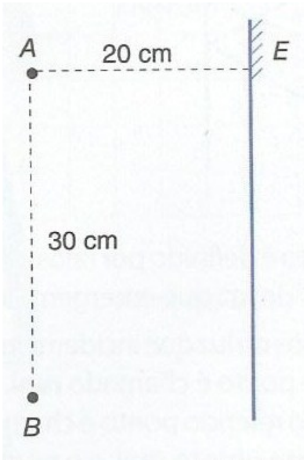


Figura 38: Representação dos pontos A e B diante de um espelho. (TORRES, 2010)

Exemplo 3: (PUC-RJ) Quais dos objetos A, B, C, D e E são vistos pelo observador P ao olhar para o espelho plano esquematizado na Figura 39. (MARISTA, 2014)

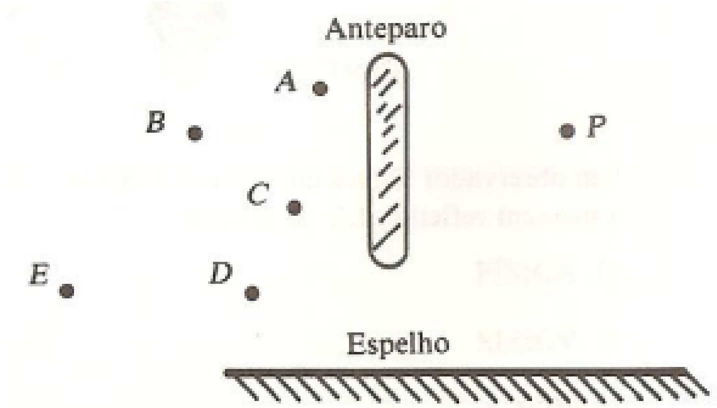


Figura 39: Representação esquematizada de um observador "P" e objetos. (MARISTA, 2014)

Observe que essas três atividades podem ser resolvidas sem uso da régua e compasso. Mas que, se o desenho for em escala (proporcional às medidas reais e não só meramente ilustrativo), estes exemplos podem ser resolvidos com régua e compasso, construindo o ponto imagem, simétrico ao ponto objeto em relação ao espelho, associando ótica e desenho geométrico e utilizando um instrumento esquecido no Ensino Básico: o compasso.

4.2.3 MENSAGEM ESCONDIDA

Esta atividade propõe a deformação de mensagens de forma similar com a que é feita nas sinalizações de trânsito. Como já foi visto, para que as sinalizações de trânsito horizontais possam ser lidas com mais clareza pelo motorista, essas são deformadas linearmente no sentido vertical. Faça o mesmo com duas mensagens quaisquer (à mão ou usando um software) e para aumentar a deformação das mensagens construa uma sobreposta a outra , uma no sentido vertical e a outra no sentido horizontal como no exemplo da Figura 40.

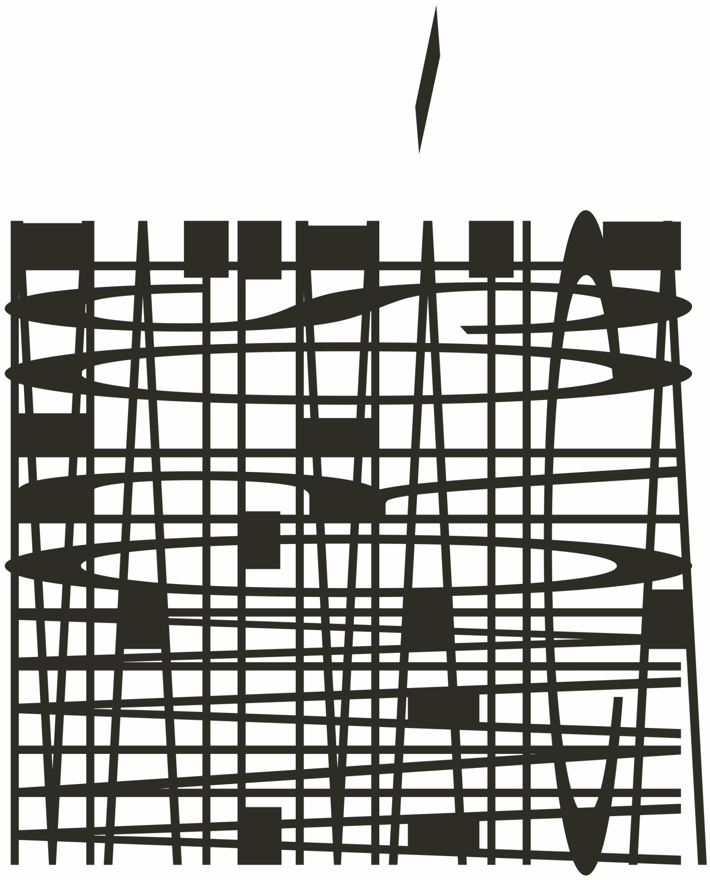


Figura 40: Mensagens sobrepostas.

As mensagens parecem indecifráveis, porém se inclinar a folha no sentido vertical uma mensagem pode ser lida, Figura 41 (a) e inclinando a folha no sentido horizontal, a outra,

Figura41 (b).

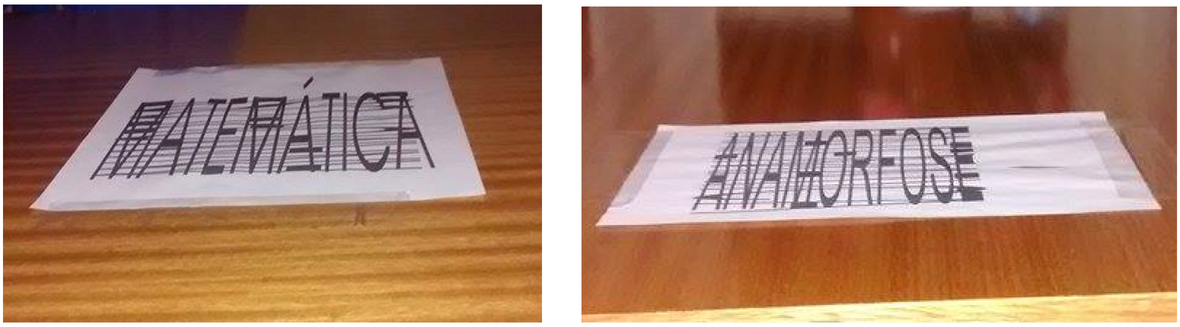


Figura 41: Imagens da Figura 40 vista com a folha inclinada nos sentidos: (a) vertical e (b) horizontal.

Nessa atividade podem ser apresentados assuntos como perspectiva, proporção, uso da malha quadriculada, geometria euclidiana, geometria projetiva, entre outros.

4.2.4 PANTÓGRAFO E ANAMORFOSE

O objetivo dessa atividade é mostrar a possibilidade de construir (com materiais concretos ou através do software de geometria dinâmica, como o Geogebra) um pantógrafo diferente do convencional, o qual é utilizado para construir anamorfismos cônicos, Figura 42.

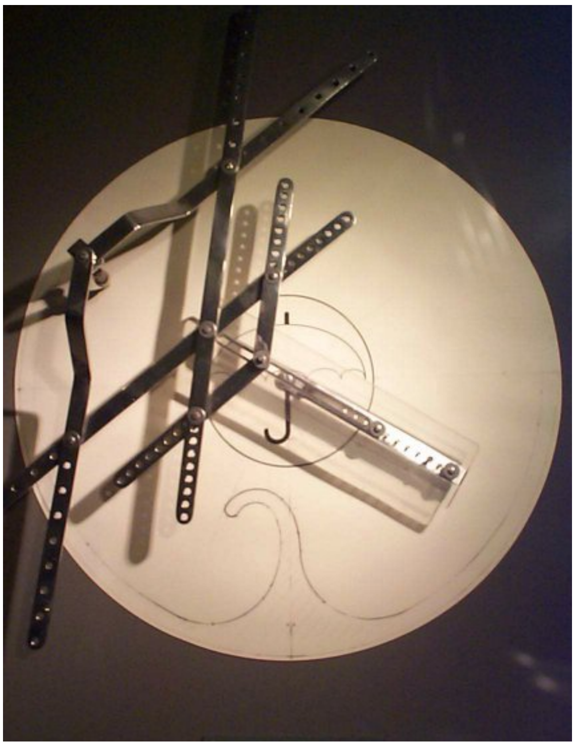


Figura 42: Pantógrafo usado para criar anamorfismos cônicos. (KENT, 2013)

O pantógrafo é uma ferramenta utilizada para transladar, ampliar ou reduzir imagens. Seu funcionamento é prático e sua construção para fins didáticos pois envolve assuntos como: congruência entre triângulos e outros polígonos, razão e proporção de medidas e características do paralelogramo e do losango.

Assim, antes de apresentar ao aluno o pantógrafo para a confecção de anamorfismos, sugere-se que seja trabalhado o pantógrafo tradicional buscando transmitir o conceito matemático envolvido em seu funcionamento, Figura 43.

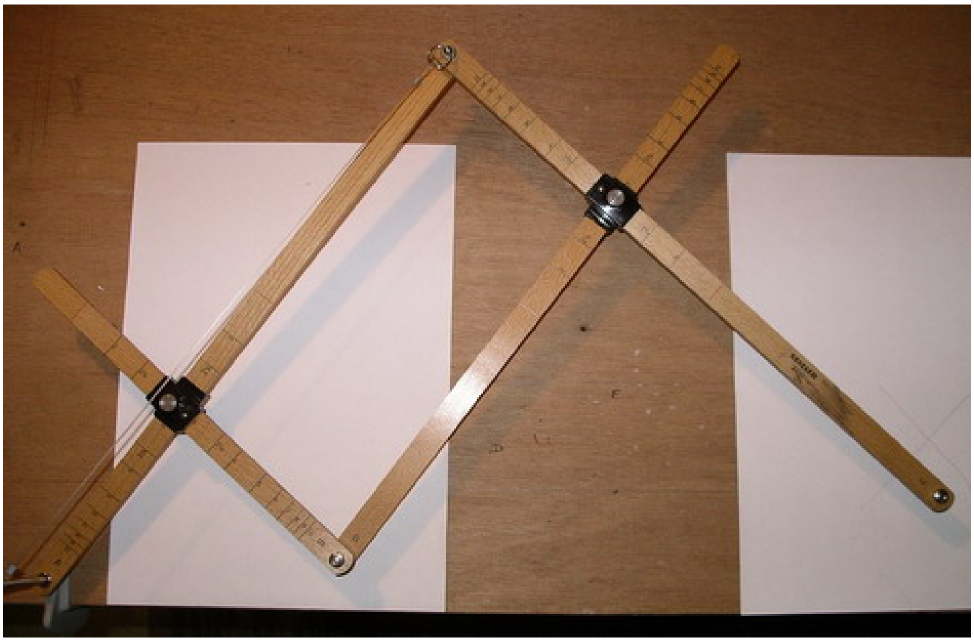


Figura 43: Pantógrafo tradicional, usado para transladar, ampliar ou reduzir imagens. (CASA DAS CIÊNCIAS, 2011)

4.2.5 ANAMORFOSE DE GRÁFICOS

Principalmente usado em estudos físicos e estatísticos, a anamorfose de gráficos consiste, basicamente, em reescrever a função (lei de formação) que define uma curva como uma função linear, ajustando as variáveis envolvidas.

Exemplo 1: Considere a função $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, tal que $y = 2x^2 + 1$ e cujo gráfico está representado na Figura 44.

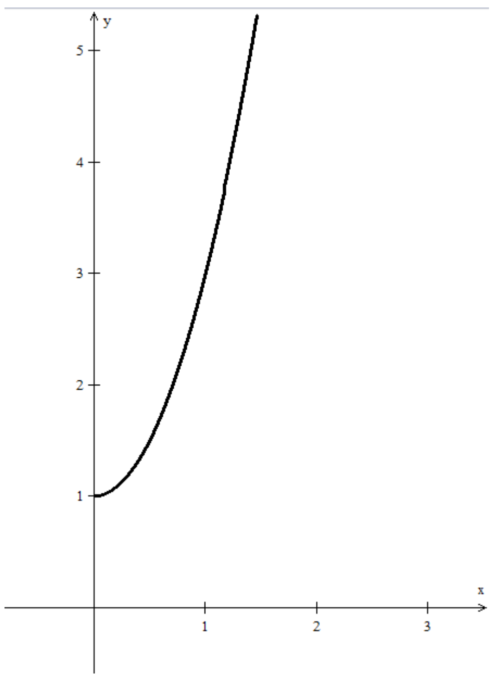


Figura 44: Representação gráfica da função $y = 2x^2 + 1$.

Na anamorfose da função, reescreve-se a função $y = 2x^2 + 1$ na forma $y' = ax' + b$. Considerando $y' = y$, $a = 2$, $x' = x^2$ e $b = 1$, tem-se:

$$y = 2x^2 + 1 \Rightarrow y' = 2x' + 1.$$

Assim, a Figura 45 representa a função $y = 2x^2 + 1$ com escalas x^2 e y.

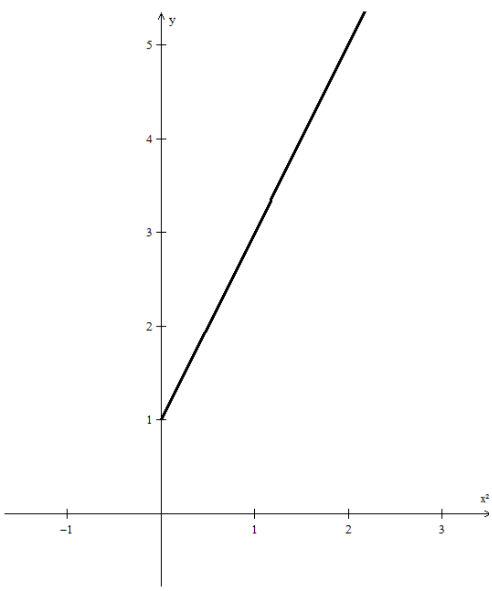


Figura 45: Gráfico da função $y' = 2x' + 1$, anamorfose do gráfico $y = 2x^2 + 1$.

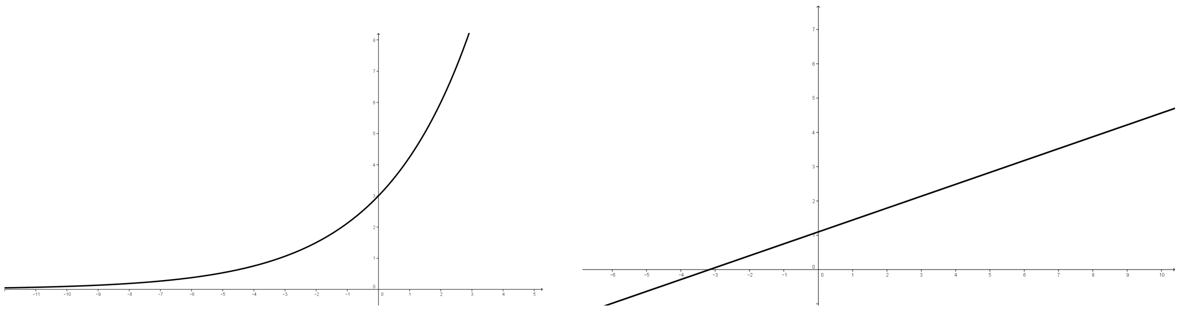
Exemplo 2: Considere a função $y = k.a^{b.x}$. Para linearizar esse tipo de função, é necessário aplicar logaritmo em ambos os membros. Assim:

$$\begin{aligned}
y &= k.a^{b.x}, \\
log(y) &= log(k.a^{b.x}), \\
log(y) &= log(k) + log(a^{b.x}), \\
log(y) &= log(k) + b.x.log(a), \\
log(y) &= (b.log(a)).x + log(k).
\end{aligned}$$

Considerando $y' = log(y)$, tem-se:

$$log(y) = (b.log(a)).x + log(k) \Rightarrow y' = (b.log(a)).x + log(k).$$

E a função terá sua anamorfose com escalas x e $log(y)$ como representa o caso da Figura 46 (a) e (b), com $k = 3$, $a = 2$ e $b = \dfrac{1}{2}$.



(a) (b)

Figura 46: Gráficos das funções (a) $y = 3.2^{\frac{1}{2}x}$ **e (b) sua anamorfose** $y' = \left(\frac{1}{2}log(2)\right)x + log(3)$ **com** $y' = log(y)$**.**

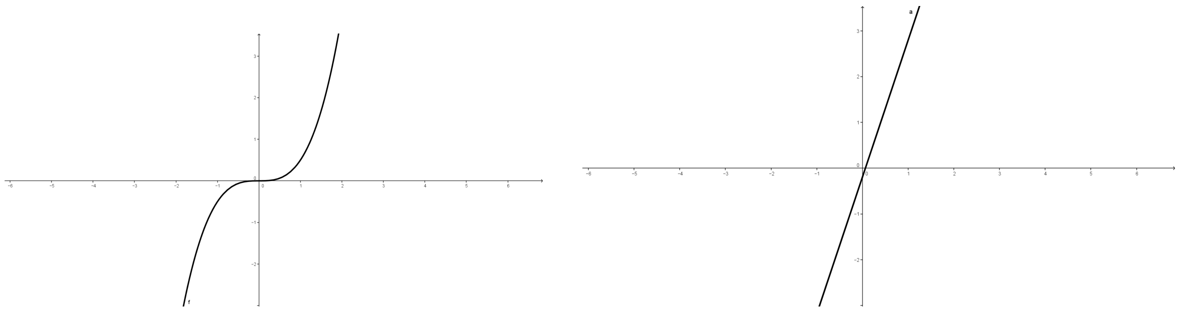
Exemplo 3: A anamorfose de gráficos cuja lei de formação é do tipo $y = k.x^a$ pode ser feita aplicando também logaritmo em ambos os membros, tornando o procedimento análogo ao Exemplo 2.

$$\begin{aligned}
y &= k.x^a, \\
log(y) &= log(k.x^a), \\
log(y) &= log(k) + log(x^a), \\
log(y) &= log(k) + a.log(x), \\
log(y) &= a.log(x) + log(k).
\end{aligned}$$

Considerando $y' = log(y)$ e $x' = log(x)$, obtém-se:

$$log(y) = a.log(x) + log(k) \Rightarrow y' = a.x' + log(k).$$

Nesse caso também foi obtido o gráfico de uma reta alterando as escalas dos eixos para $log(x)$ e $log(y)$, como representado no caso da Figura 47 (a) e (b), com $k = \frac{1}{2}$ e $a = 3$.



(a) (b)

Figura 47: Gráficos das funções (a) $y = \frac{1}{2}.x^3$ **e (b) sua anamorfose** $y' = 3.x' + log\left(\frac{1}{2}\right)$ **com** $y' = log(y)$ **e** $x' = log(x)$**.**

4.2.6 ANAMORFOSE E OS MAPAS

A anamorfose também é muito utilizada para representar mapas, seja ele populacional, socioeconômico, político, entre outros. Tais representações podem ser exploradas com o apoio da disciplina de Matemática. Pode-se explorar as deformações, escalas e projeções, assim como a leitura e compreensão de mapas.

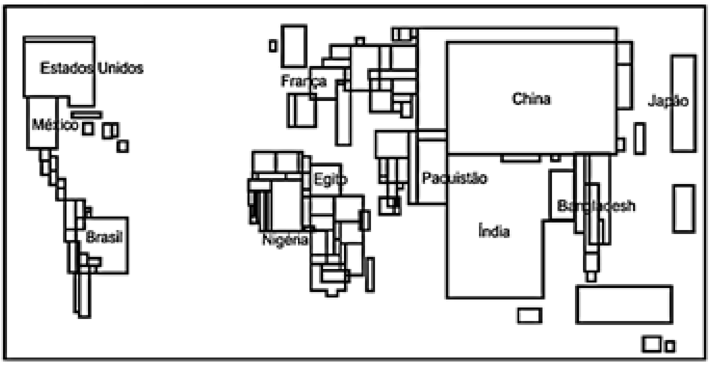
É interessante que os alunos saibam ler corretamente o mapa-mundi por exemplo, onde os continentes e países são representados com grande deformação, não conservando suas proporções ou formas.

Tem-se a seguir algumas sugestões de exercícios que envolvem anamorfose e projeção de mapas.

Exemplo 1: (UESC BA)

Anamorfose é um mapa no qual as superfícies reais sofrem distorções para se tornarem proporcionais a variável que está sendo representada.

Com base nessa informação e nos conhecimentos sobre a população mundial, pode-se afirmar que o mapa anamórfico representa.



01. o números de mulheres ocupando cargos de chefia.

02. a população absoluta mundial.

03. os países mais povoados do mundo.

04. o número de usuários da internet.

05. a densidade demográfica do planeta.

Exemplo 2: (Adaptado de UFU MG)

Abaixo estão colocadas três formas de representação cartográfica em relação à superfície de projeção.

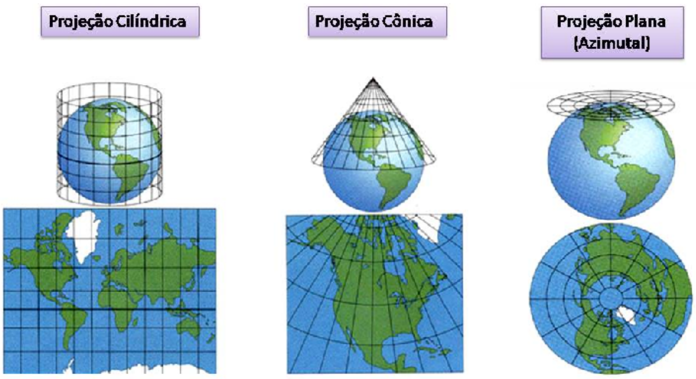


Figura 48: Representação cartográfica do planeta Terra. (BLOGSPOT, 2014)

Sobre as superfícies de projeção apresentadas é **INCORRETO** afirmar:

a) Outro tipo de projeção muito utilizada é projeção cônica, que se refere à projeção do globo em um cone imaginário, cujo eixo é coincidente com o eixo da Terra em relação ao Equador. Esta projeção é utilizada principalmente para a representação das regiões do mundo adjacentes ao polo.

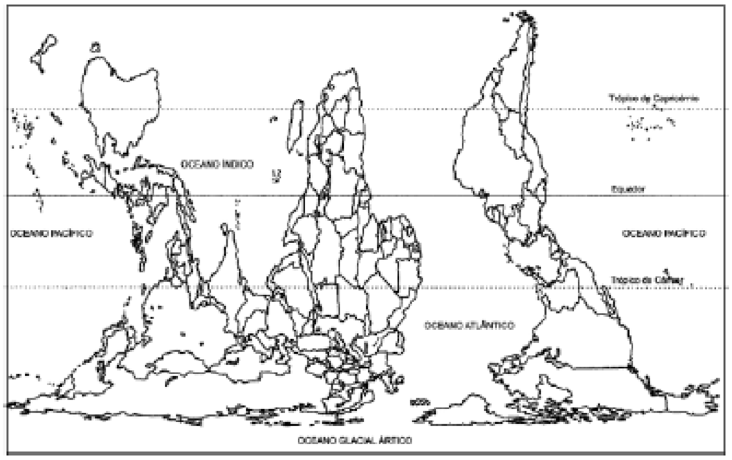
b) As projeções cartográficas fornecem mapas que oferecem diversos tipos de ponto de vista do planeta, sendo que cada projeção distorce o tamanho ou a forma dos continentes.

c) A projeção cilíndrica está baseada na projeção do globo sobre um cilindro imaginário de raio e eixo coincidentes com o raio e o eixo relacionados ao Equador. Neste tipo de projeção, as áreas próximas ao Equador possuem suas formas mostradas com precisão, mas as porções mais próximas dos polos são distorcidas inevitavelmente.

d) Resumidamente, a projeção azimutal consiste na projeção do globo sobre um plano imaginário cujo centro é trespassado pelo eixo da Terra em relação ao Equador. Este tipo de projeção mostra as áreas em suas reais proporções, mas esta técnica acarreta a deformação das verdadeiras formas dos continentes e países.

Exemplo 3: (PUC RS)

Considere o mapa e as afirmativas, referentes à Cartografia.



I. O mapa representa uma projeção cilíndrica e equivalente feita por Peters, privilegiando os países do hemisfério sul, pois os coloca em evidência, com um olhar cartográfico realizado pelo sul.

II. Este mapa, apesar de estar desenhado pelo ponto de vista do hemisfério sul, continua mantendo o Brasil a oeste da África e o Uruguai ao sul do Brasil.

III. Nos cálculos de escalas realizadas sbre o mapa, um centímetro no mapa corresponde à mesma proporção no espaço real, tanto no Brasil como na Groenlândia.

IV. Os paralelos e meridianos mantêm em toda a representação um ângulo de 90, sendo que o meridiano de Greenwich e o paralelo do Equador são deslocados do centro astronômico do mapa.

Está/Estão correta(s) somente a(s) afirmativa(s) a)II.

b) I e III.

c) II e IV.

d) I, II e III.

e) I, III e IV.

4.3 ANAMORPH ME!: UM SOFTWARE PARA CRIAR ANAMORFOSE

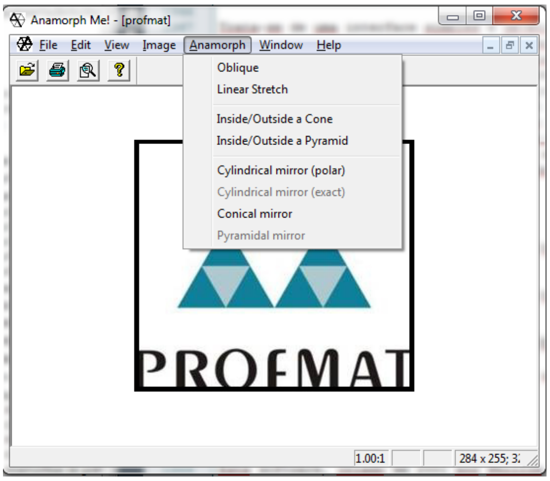
A habilidade de criar anamorfoses de qualidade foi, desde sua criação, um privilégio de poucos. A técnica exige do artista, além da afinidade com a Arte, uma certa afinidade com a Matemática. É preciso um planejamento para que a deformação fique com qualidade suficiente para que a imagem realmente se reconstitua de algum ponto de vista. István Orosz costuma retratar figuras de importância matemática em suas obras mostrando seu gosto por essa área apresentando o passo-a-passo necessário para a criação de suas principais obras. O próprio Leonardo da Vinci que além de pintor, fez importantes trabalhos nas áreas da física e engenharias usando essa técnica (SEMMER, 2013).

Com a ajuda da tecnologia, já é possível driblar algumas dificuldades na produção de uma anamorfose. Com uma câmara fotográfica e um simples editor de imagens é possível criar anamorfismos oblíquos.

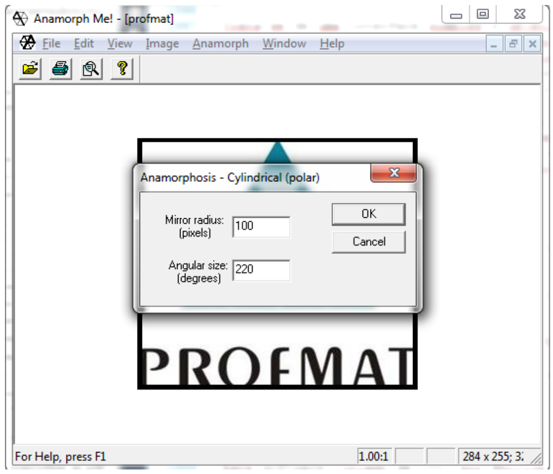
Além das tecnologias que podem ser adaptadas para criar anamorfoses, existe um software livre, compatível para Windows e Linux, criado especialmente com esse propósito, o AnamorphMe![1], que dispensa instalações e traz o necessário para criar anamorfismos, tanto oblíquos quanto catóptricos. Com comandos fáceis e diretos, fornecendo as informações quanto à posição do observador e no caso de uso de espelhos, as informações referentes ao espelho, já obtem-se a anamorfose.

Possui interface simples e prática, que se assemelha a de um editor de imagens, a não ser pelo menu *Anamorph* onde pode-se selecionar uma das opções: *Oblique*, *Linear Stretch*, *Inside/Outside a Cone*, *Inside/Outside a Pyramid*, *Cylindrical Mirror (polar)*, *Conical Mirror*, conforme o interesse. Escolhendo, por exemplo a opção *Cylindrical Mirror (polar)*, é necessário preencher apenas os valores do raio do espelho (em pixels) e do tamanho angular da imagem (em graus), resultando na figura anamórfica desejada conforme as etapas apresentadas na Figura 49 (a), (b) e (c).

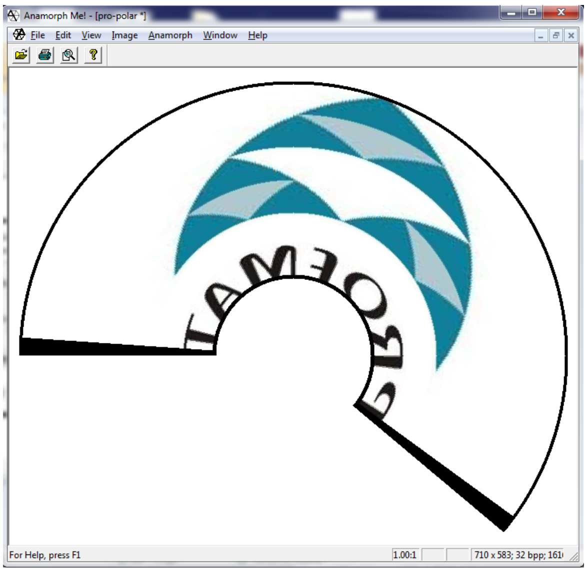
[1]Disponível para download em http://www.anamorphosis.com



(a)



(b)



(c)

Figura 49: Passo-a-passo da criação de um anamorfismo usando o software Anamorph Me!: (a) escolha do tipo, (b) escolha do raio e ângulo e (c) figura anamórfica desejada.

Este software, criado em 2001 por Phillip Kent, tem algumas limitações destacadas pelo autor no arquivo README.txt. Por exemplo, justifica o autor, que por tratar-se de um protótipo é comum que o programa “trave”. Outra limitação notória é o fato de que as opções *Cylindrical Mirror (exact)* e *Pyramidal Mirror* aparecem desativadas e que posteriormente, com a sua atualização, elas passem a serem ativadas. Mesmo com algumas limitações, o software é bastante útil para fins didáticos, construindo exemplos e simulações de anamorfismos de forma rápida e prática.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na disciplina de Matemática, os alunos sentem mais dificuldades em aprender conceitos e propriedades de conteúdos da geometria e há sempre uma preocupação com a forma de ensino, buscando sempre aperfeiçoá-la, visando os melhores resultados possíveis.

O uso da anamorfose contribui com a abstração, desenvolvendo a percepção e visualização espacial, fundamentais para o aprendizado da geometria e outros conteúdos. A apresentação aos alunos das obras de István Orosz entre outros artistas mostrou-se uma via a mais para o ensino de Matemática e a possibilidade de interdisciplinaridade com outras disciplinas.

A construção da anamorfose, que na antiguidade era menos sofisticada, muito trabalhosa e acessível para poucos hoje, com o advento da facilidade de acesso às tecnologias digitais, tem-se tornado uma atividade prazerosa com o uso do software livre como o Anamorph Me!

Além disso é interessante registrar o entusiasmo dos alunos quando conheceram esta técnica e participaram da Oficina de Anamorfose, mostrando a sua curiosidade e a vontade de fazer questionamentos sobre esta arte e sobre a Matemática. E, posteriormente, aplicar a anamorfose e produzir os seus próprios desenhos e conhecer a Matemática que está por trás dos desenhos. Essa possibilidade de utilizarem os conhecimentos que adquiriram durante as aulas em um trabalho que eles criaram lhes despertou interesse e fez com que sentissem mais motivados.

O questionário mostrou como os alunos foram capazes de interpretar anamorfismos, tentando justificar e entender as deformações apresentadas. Porém, a ligação da técnica com os assuntos recentemente vistos em Física deixou a desejar.

Não apenas se limitar ao ensino de conceitos matemático mas também associar a outras áreas do currículo em uma interação interdisciplinar, utilizando a anamorfose como elo entre elas, evidenciando o seu emprego nos diferentes ramos das ciências e a sua importância para fortalecer os conhecimentos matemáticos foi um dos objetivos desse material.

Assim, este trabalho trouxe uma ferramenta, que não é nova, mas desconhecida de muitos da área de Matemática e que pode ser interessante como material de apoio para os professores de Matemática e de outras disciplinas. E, as atividades sugeridas permitem abrir um leque de possibilidades de exploração de conteúdos e conceitos, contribuindo para o ensino.

REFERÊNCIAS

AECHIVIOMACMAT. Anamorphoses catoptriques : pyramide et cône. In: . [s.n.], 2014. Disponível em: <http://archiviomacmat.unimore.it/PAWeb/Sito/Francese/260f.htm>. Acesso em: 10 de setembro de 2014.

AMUSING PLANET. Anamorphic art by istván orosz. In: . [s.n.], 2014. Disponível em: <http://www.amusingplanet.com/2010/04/anamorphic-art-by-istvan-orosz.html>. Acesso em: 18 de outubro de 2014.

ARTILLO, M. et al. **Anamorfosis y Anamorfismos**. 2014.

BARBOSA, R. M. Descobrindo a geometria fractal - para a sala de aula. In: ____. [S.l.]: 1, 2002. p. 144.

BARRETO, M. dos S.; TAVARES, S. Do mito da geometria euclidiana ao ensino das geometrias não euclidianas - a experiência no iffluminense campus campos-centro. In: **X Encontro Nacional de Educação Matemática**. [S.l.: s.n.], 2010.

BLOGSPOT. In: . [s.n.], 2014. Disponível em: <http://fuscagyn.blogspot.com.br/2013/03/fusquinha-pra-colorir-fusca-para-colorir.html>. Acesso em: 03 de novembro de 2014.

BLOGSPOT. In: . [s.n.], 2014. Disponível em: <http://1.bp.blogspot.com/-UuqnUtIby_0/TkAypdMAWLI/AAAAAAAAAvg/a5-kLGRnoRk/s1600/Slide3.JPG>. Acesso em: 30 de outubro de 2014.

CASA DAS CIÊNCIAS. Pantógrafo. In: . [s.n.], 2011. Disponível em: <http://imagem.casadasciencias.org/online/37161590/37161590.php>. Acesso em: 30 de outubro de 2014.

CONSELHO NACIONAL DE TRÂNSITO. **Manual Brasileiro de Sinalização de Trânsito: Sinalização Horizontal**. Brasília: CONTRAN, 2007.

GEIGER, P. **Novíssimo Aulete dicionário contemporâneo da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Lexikon, 2011.

GUERATO, E. T. **Dificuldades e possibilidades no ensino da geometria na EJA**. 79 f. Monografia (Especialização) — Centro Federação de Educação Tecnológica de São Paulo, São Paulo, 2008.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. **Fundamentos de Física 4: ótica e física moderna**. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 1991.

KENT, P. ”sténopé - the representation of space”, cité des sciences et de l'industrie, paris. In: . [s.n.], 2013. Disponível em: <http://www.anamorphosis.com/stenope.html>. Acesso em: 18 de outubro de 2014.

MARISTA. Colégio marista. In: . [s.n.], 2014. Disponível em: <http://colegiomarista.org.br/rosario/arq/arquivo/revis%C3%A3o%20poligrafos%208%20e%209%20e%2010gabarito.pdf>. Acesso em: 15 de julho de 2014.

MEDEIROS, L. S. de; FLORES, C. R. O efeito anamorfose e a educação matemática: primeiros apontamentos. 2011.

PETTERSSON, K. In: . [s.n.], 2014. Disponível em: <http://www.kurtpettersson.se/hans/index.htm>. Acesso em: 18 de outubro de 2014.

PINTURA QUE FALA. In: . [s.n.], 2014. Disponível em: <http://pinturaquefala.blogspot.com.br/2013/07/anamorfose-hans-holbein-os-embaixadores-ilusao-de-otica-motorista-carro-morte.html>. Acesso em: 21 outubro de 2014.

PRIBERAM. In: . [s.n.], 2014. Disponível em: <http://www.priberam.pt/DLPO/ANAMORFOSE>. Acesso em: 15 de março de 2014.

SAMPAIO, C. M. Ciênciamão. In: . [s.n.], 2014. Disponível em: <http://www.cienciamao.usp.br/tudo/exibir.php?midia=amm&cod=_espelhocilindricoeimagemanamorfica>. Acesso em: 17 de junho de 2014.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 03 de junho de 2014.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos: apresentação dos temas transversais**. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ttransversais.pdf>. Acesso em: 13 de junho de 2014.

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO. In: . [s.n.], 2008. Disponível em: <http://www.nre.seed.pr.gov.br/pitanga/arquivos/File/Matematica.pdf>. Acesso em: 29 de novembro de 2014.

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO DO PARANÁ. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica**. Paraná: SEED, 2008. Disponível em: <http://www.educadores.diadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf>. Acesso em: 03 de junho de 2014.

SEMMER, S. **Ensino de Geometrias Não-euclidianas Usando Arte e Matemática**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Ponta Grossa, 2013.

SONS, C. S. **NICERON, JEAN-FRANÇOIS**. 2008. Disponível em: <http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830903157.html>. Acesso em: 22 de outubro de 2014.

SOROCABA.COM. Urbes sinaliza grandes vias da cidade. In: . [s.n.], 2014. Disponível em: <http://www.sorocaba.com.br/noticias/urbes-sinaliza-grandes-vias-da-cidade-2007>. Acesso em: 25 de outubro de 2014.

SPICKLER, D.; BERGNER, J. Cylinder reflections: The mathematics behind the images. In: . [s.n.], 2011. Disponível em: <http://facultyfp.salisbury.edu/despickler/personal/Resources/TechnologyWorkshops/ScienceNight2011/ScienceNightSU.pdf>. Acesso em: 28 de outubro de 2014.

THE BRITISH MUSEUM. In: . [s.n.], 2014. Disponível em: <https://www.britishmuseum.org/explore/highlights/highlight_ objects/pd/e/erhard_ schön,_ picture_ puzzle_o.aspx>. Acesso em: 03 abril de 2014.

THUILLIER, P. **De Arquimedes a Einstein: a face oculta da invenção científica**. Rio de Janeiro: José Zahar Editora, 1994. (Coleção Ciência e Cultura).

TORRES, C. M. A. **Física - Ciência e Tecnologia**. 2. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2010.

VELASCO, A. D. Geometria espacial. In: **Projeto Teia do Saber**. [s.n.], 2006. Disponível em: <http://www.feg.unesp.br/extensao/teia/aulas/AulasModulo03-pdf/SistemasProjecoesArtigo.PDF>. Acesso em: 03 de novembro de 2014.

WIKIPEDIA. In: . [s.n.], 2014. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Anamorfose>. Acesso em: 06 de março de 2014.

WIKIPEDIA. In: . [s.n.], 2014. Disponível em: <http://es.wikipedia.org/wiki/Anamorfosis>. Acesso em: 06 de março de 2014.

WIKIPEDIA. In: . [s.n.], 2014. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Lascaux_painting.jpg>. Acesso em: 09 de março de 2014.

WIKIPEDIA. Cinemascope. In: . [s.n.], 2014. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/CinemaScope>. Acesso em: 29 de novembro de 2014.

WYLIE, C. R. **Introduction to projective geometry**. 1. ed. New York: McGraw-Hill, 1970.

YOUTUBE. In: . [s.n.], 2014. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=nRat_J-8gb8>. Acesso em: 03 de junho de 2014.

ZEKZANDER. In: . [s.n.], 2014. Disponível em: <http://zekzander.blogspot.com.br/2011/08/os-embaixadores-de-hans-holbein-1547.html>. Acesso em: 21 de outubro de 2014.

ANEXO A – QUESTIONÁRIO APLICADO E RESPOSTAS/COMENTÁRIOS DOS ALUNOS

Neste anexo, apresenta-se o questionário que foi aplicado aos alunos para verificar seus conhecimentos sobre a técnica da anamorfose e sua relação com a disciplina de Matemática.

A.1 QUESTÕES APLICADAS AOS ALUNOS

A Figura 50 apresenta as questões que compuseram o questinário aplicado aos alunos do 2º ano do Colégio Estadual do Campo Professor Aloísio, Campo Largo, PR.

Colégio Estadual do Campo Professor Aloísio – EFM

Nome:________________________________ nº:________ data:______________

Questionário – 2º ano A

1) Observe a imagem a seguir. O que você está vendo?

2) Agora coloque o cilindro espelhado sobre a caneca. O que você esta vendo pelo reflexo do cilindro?

3) A imagem abaixo também tem significados diferentes se vista diretamente ou por um espelho cilíndrico. Você consegue definir como será a imagem refletida pelo espelho cilíndrico?

4) Você consegue identificar qual região da figura plana é responsável pela imagem refletida no

cilindro que forma :(circule essas regiões)

a) os olhos?

b) a boca?

c) a barba?

d) o nariz?

e) a gola do paletó? **obs.: Como fez a identificação?**

5) Essas técnicas que vimos são chamadas anamorfismos. Nela se deforma uma imagem, sendo que ela só voltará a sua forma original se vista de certo ponto e/ou por certo espelho. Vamos observar os anamorfismos abaixo:

Com suas palavras explique como a imagem foi deformada (foi esticada verticalmente, horizontalmente…?).

E como foi a deformação dessa imagem?

E essa?

6) Agora comente os itens abaixo:

*Já tinha visto algo parecido que use essa técnica (propagandas em jogos de futebol, pinturas de igreja, sinalizações de trânsito)? Explique.

*Em quais outras disciplinas você acha que essa técnica poderia ser aproveitada de alguma maneira? Por quê?

*Com base nos seus conhecimentos, como você acha que essa transformação acontece? (pode se basear na física, matemática, artes visuais, ideias intuitivas...)

Figura 50: Questionário aplicado aos alunos do 2º ano A do Colégio Estadual do Campo Professor Aloísio.

A.2 RESPOSTAS E COMENTÁRIOS DOS ALUNOS

Os alunos não tinham conhecimento dessa arte e ficaram entusiasmados ao perceber que através da observação é possível relacionar uma figura anamórfica impressa com o objeto formado no cilindro refletivo. A imagem anamórfica foi apresentada em uma folha A3 e o cilindro confeccionado de PVC com uma película refletiva (insulfilm automotivo), Figura 51.

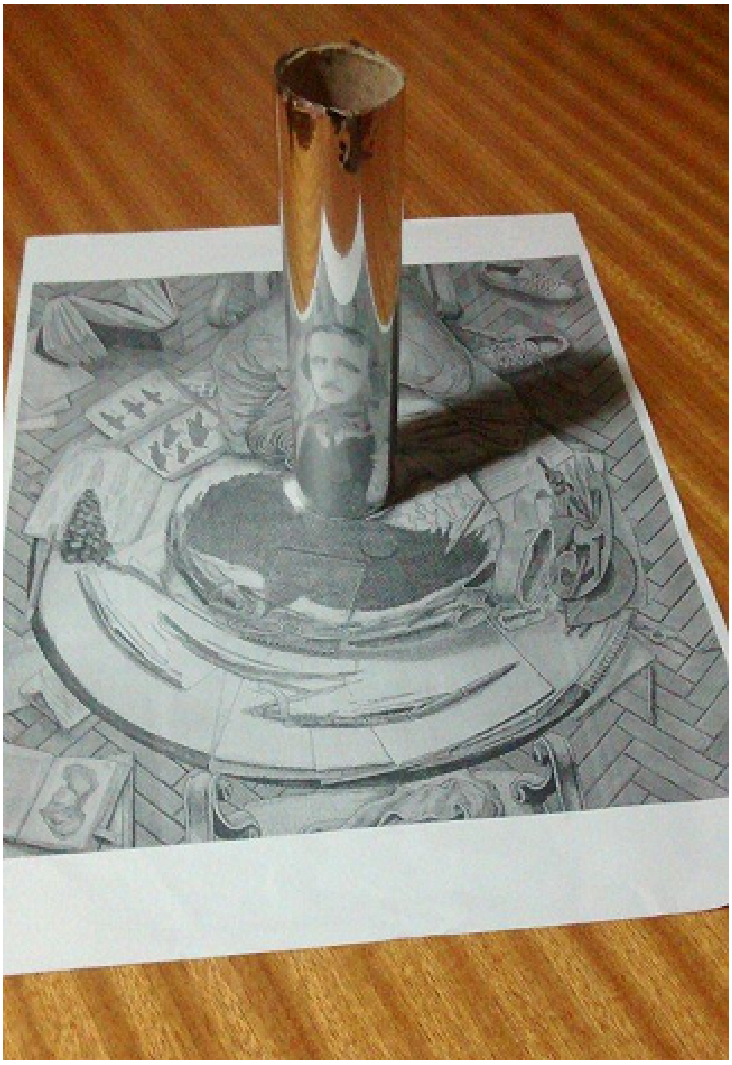


Figura 51: Material utilizado para apresentar a anamorfose aos alunos.

O entusiasmo e a percepção dos alunos puderam ser registrados nas respostas ao questionário aplicado aos 26 alunos de uma turma de 2º ano, sendo algumas destas respostas apresentadas nessa seção.

Pela resposta referente à questão 1, a princípio o aluno descreve exatamente o que está vendo na ilustração apresentada, Figura 52. De forma análoga, descreve o que observa na questão 2, Figura 53, não apresentando maiores dificuldades.

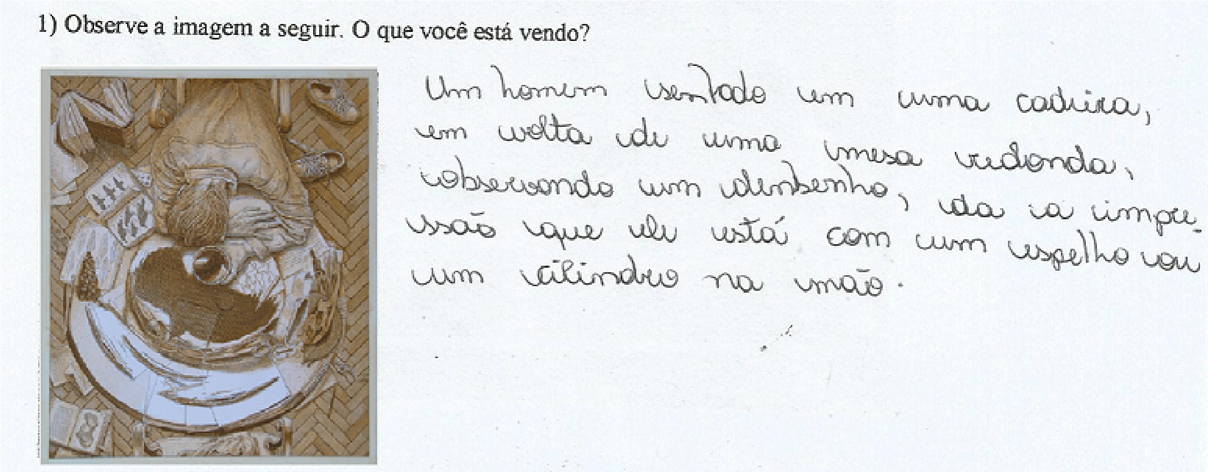


Figura 52: Comentário do aluno em relação à imagem da questão 1.

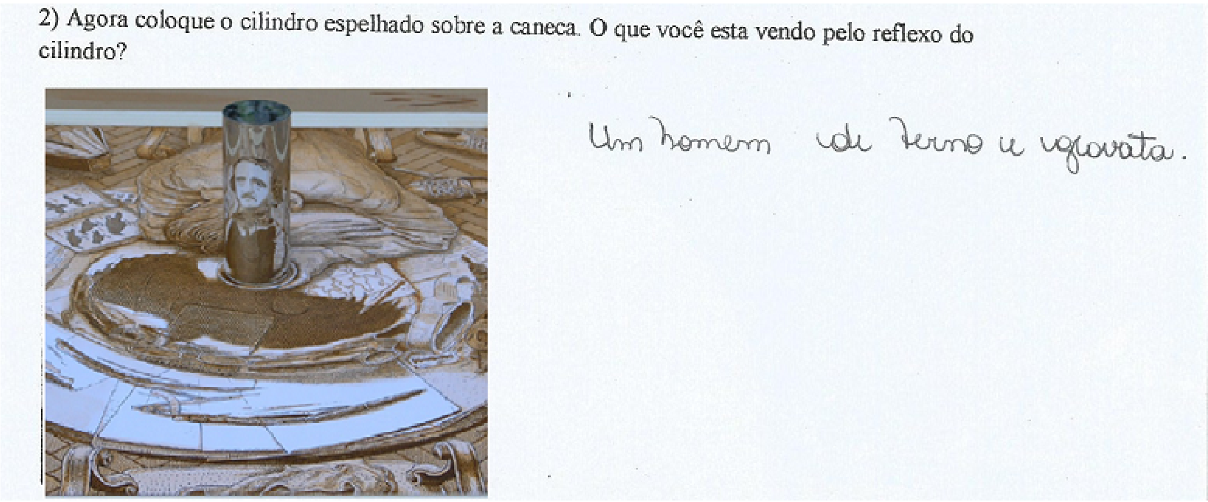
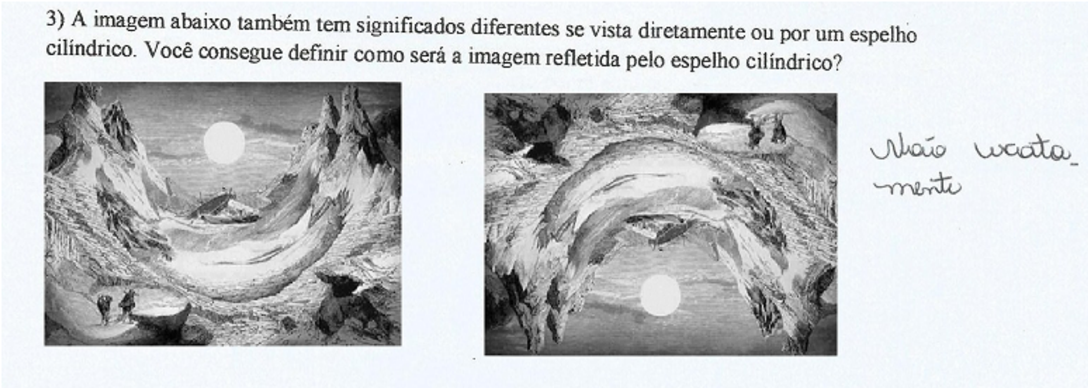
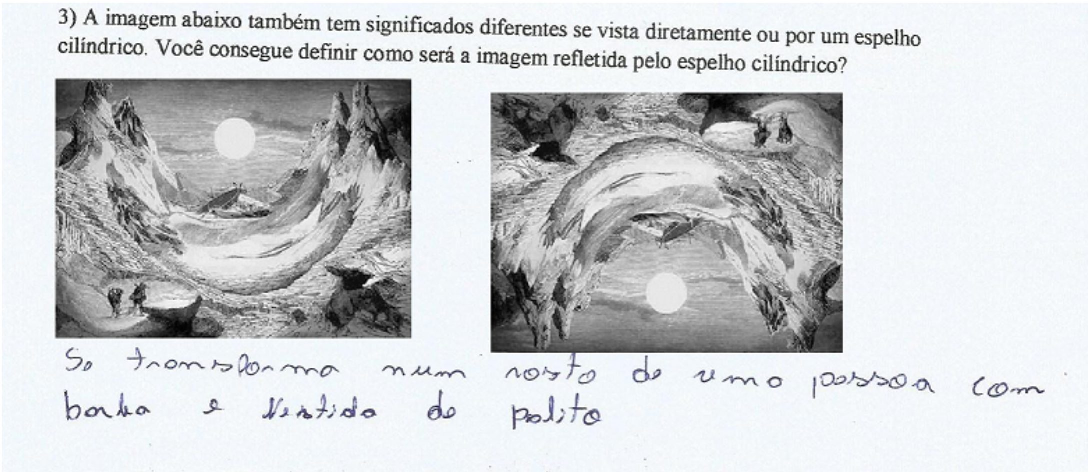


Figura 53: Imagem mostrada de outro ponto de vista na questão 2 e a observação do aluno.

Na questão 3, nem todos os alunos tiveram a percepção de como seria visualizada a figura quando refletida em um cilindro, como pode ser visto na resposta apresentada na Figura 54 (a). Já na Figura 54 (b), a análise de outro aluno possibilitou a descrição da imagem distorcida.



(a)



(b)

Figura 54: Resposta dos alunos em relação à questão 3: (a) sem a percepção em relação a imagem fornecida e (b) com a percepção da imagem refletida no espelho cilíndrico.

Na questão 4, os alunos fizeram a identificação do que foi solicitado sem grandes dificuldades. Os comentários mostrados na Figura 55 mostram isso além da sua criatividade para identificar os elementos.

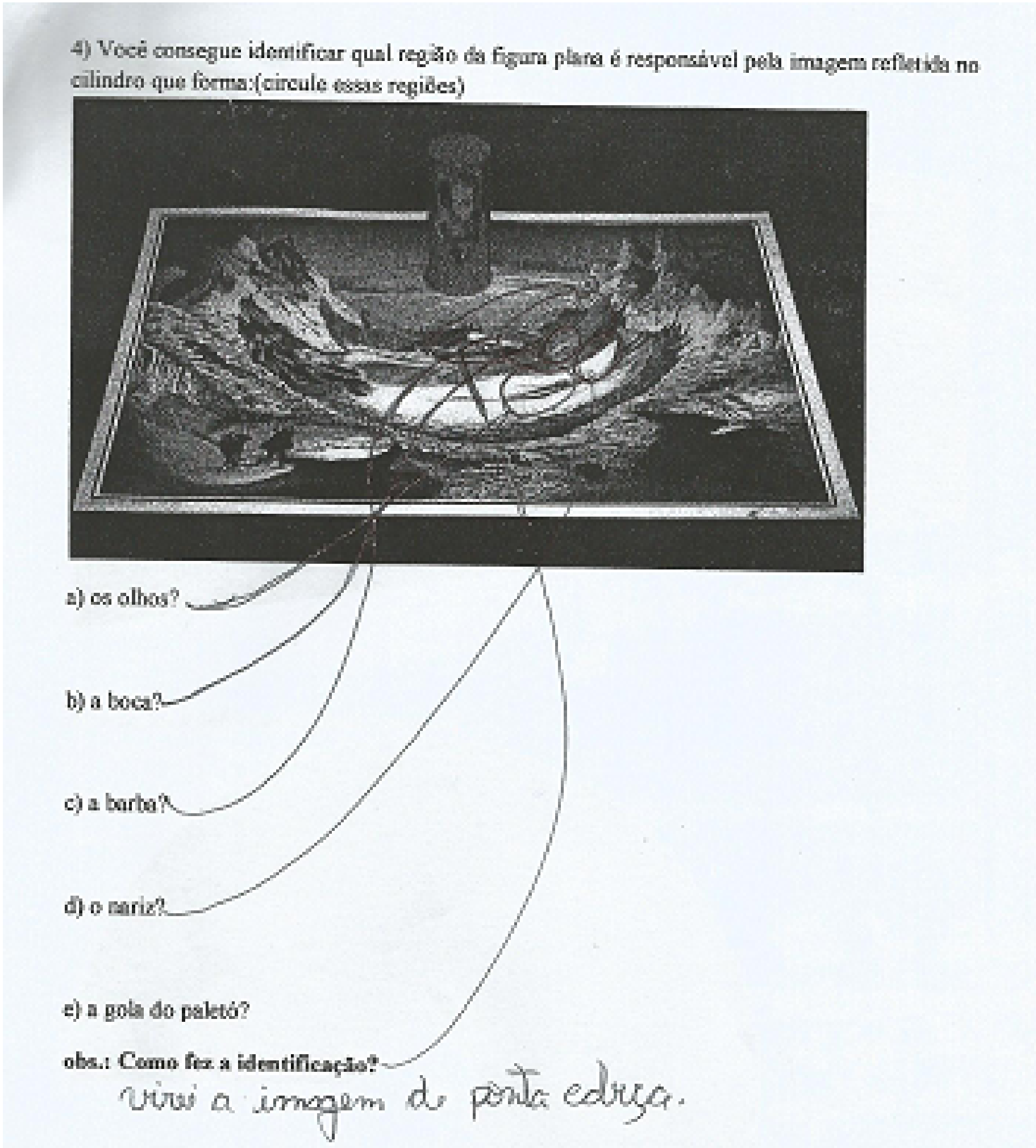


Figura 55: Associação das regiões da figura plana com a figura formada no cilindro.

Ainda, neste questionário puderam visualizar como deformar uma imagem usando outra técnica, descrevendo o procedimento envolvido, Figura 56.

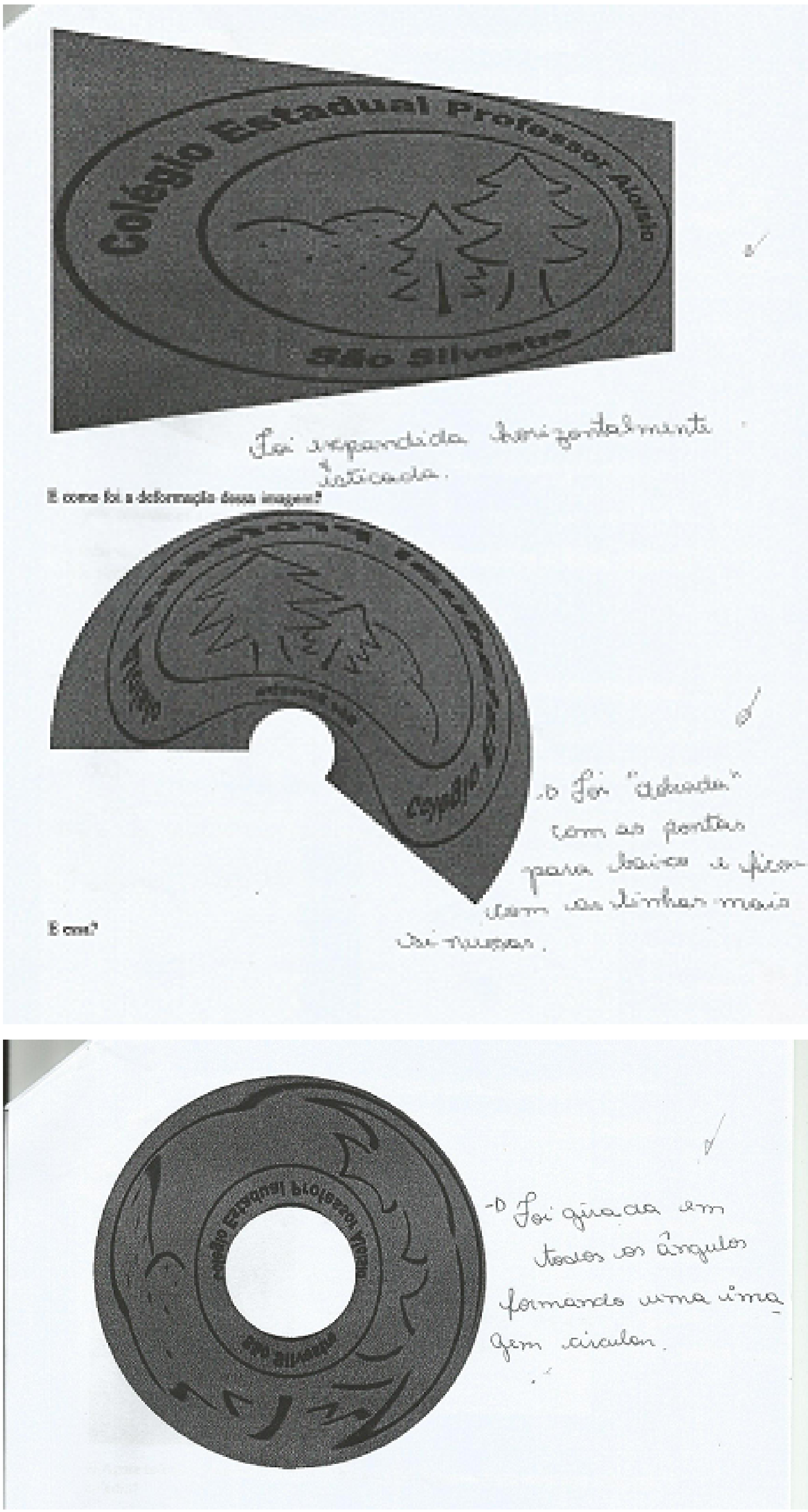
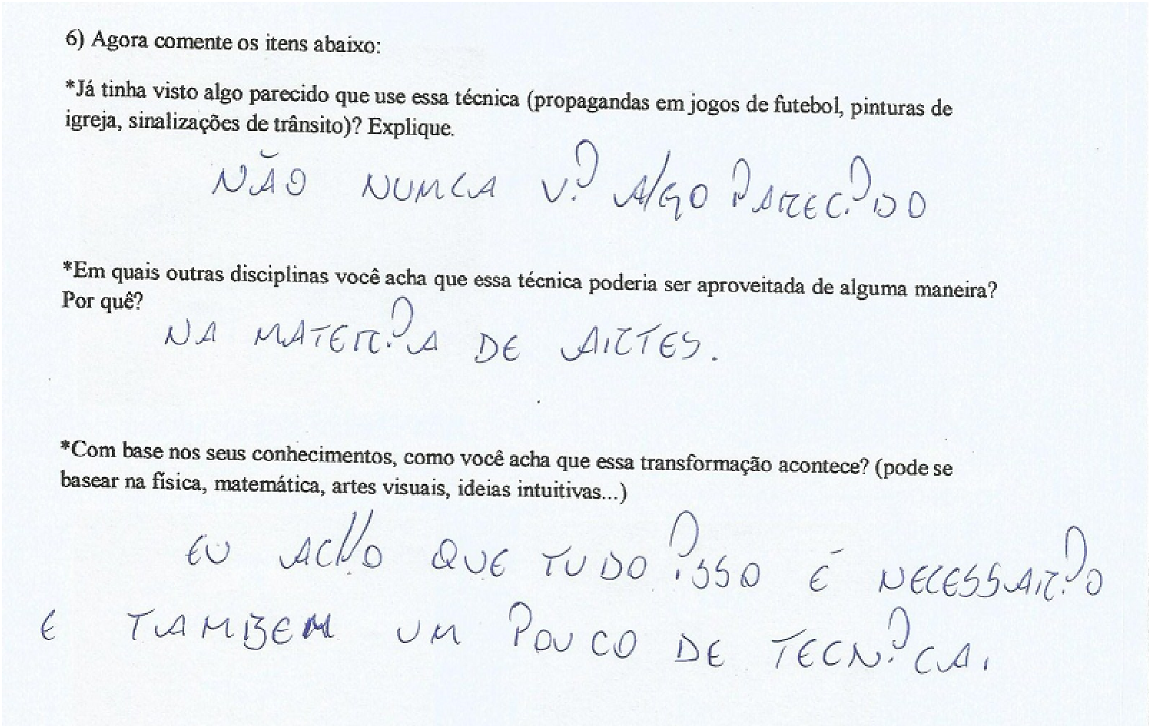


Figura 56: Deformação do símbolo da escola e a descrição do processo de anamorfose aplicado.

Constatando que essa técnica é realmente interessante para os alunos e pode ser utilizada associada à disciplina de Arte tem-se o registro na Figura 57 (a), ou a outras disciplinas como apresentado na Figura 57 (b).



6) Agora comente os itens abaixo:

*Já tinha visto algo parecido que use essa técnica (propagandas em jogos de futebol, pinturas de igreja, sinalizações de trânsito)? Explique.

NÃO NUNCA VI ALGO PARECIDO

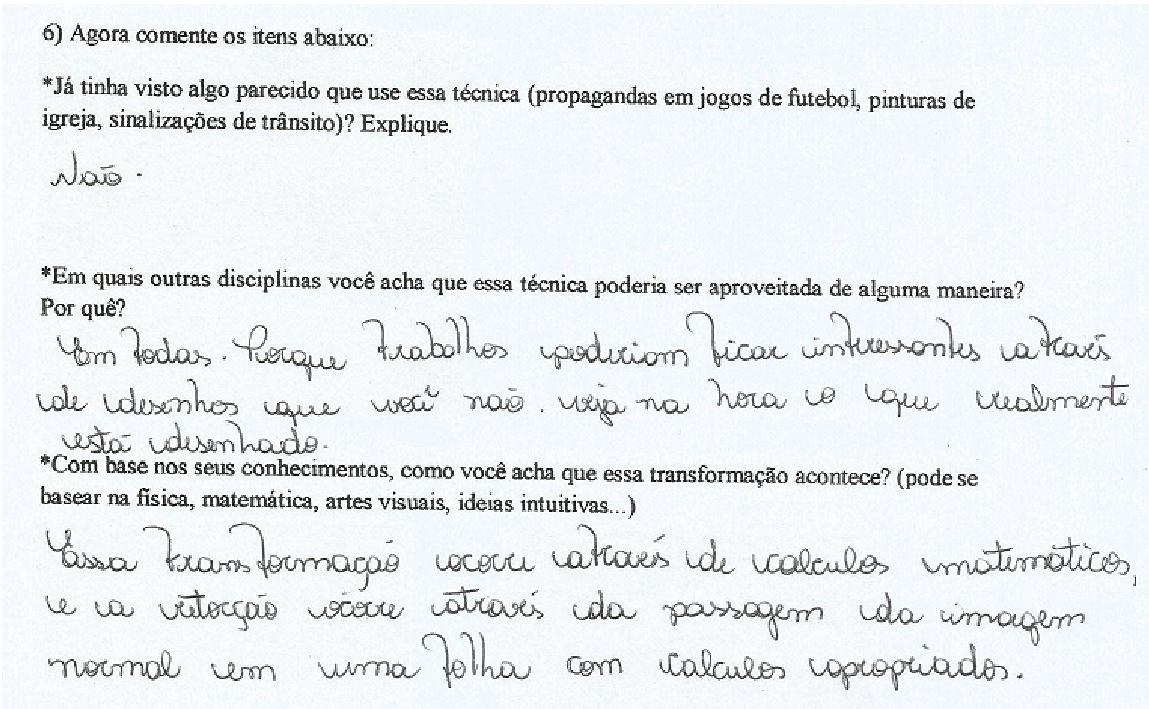
*Em quais outras disciplinas você acha que essa técnica poderia ser aproveitada de alguma maneira? Por quê?

NA MATERIA DE ARTES.

*Com base nos seus conhecimentos, como você acha que essa transformação acontece? (pode se basear na física, matemática, artes visuais, ideias intuitivas...)

EU ACHO QUE TUDO ISSO É NECESSARIO E TAMBEM UM POUCO DE TECNICA.

(a)



6) Agora comente os itens abaixo:

*Já tinha visto algo parecido que use essa técnica (propagandas em jogos de futebol, pinturas de igreja, sinalizações de trânsito)? Explique.

Não.

*Em quais outras disciplinas você acha que essa técnica poderia ser aproveitada de alguma maneira? Por quê?

Em todas. Porque trabalhos poderiam ficar interessantes através de desenhos que você não veja na hora o que realmente está desenhado.

*Com base nos seus conhecimentos, como você acha que essa transformação acontece? (pode se basear na física, matemática, artes visuais, ideias intuitivas...)

Essa transformação ocorre através de calculos matemáticos, e a distorção ocorre através da passagem da imagem normal em uma folha com calculos apropriados.

(b)

Figura 57: Comentários dos alunos sobre a técnica da anamorfose: (a) associando à disciplina de Arte e (b) associando a outras áreas.