Universidade Federal de Juiz de Fora
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Márcio Eduardo Primo

O princípio de Cavalieri para cálculo de volumes no ensino médio: algumas possibilidades

Juiz de Fora

2013

Márcio Eduardo Primo

O princípio de Cavalieri para cálculo de volumes no ensino médio: algumas possibilidades

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), na Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Olímpio Hiroshi Miyagaki

Juiz de Fora

2013

Primo, Márcio Eduardo

O princípio de Cavalieri para cálculo de volumes no ensino médio: algumas possibilidades.

Márcio Eduardo Primo - 2013.

79f. : il.

Orientador: Olímpio Hiroshi Miyagaki

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

1. Volumes. 2. Princípio de Cavalieri. 3. Sólidos. I. Título.

Márcio Eduardo Primo

O princípio de Cavalieri para cálculo de volumes no ensino médio: algumas possibilidades

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, na Universidade Federal de Juiz de Fora.

Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki
(Orientador)
PROFMAT
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

Profa. Dra. Sofia Carolina da Costa Melo
PROFMAT
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

Profa. Dra. Margareth da Silva Alves
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas - UFV

Juiz de Fora, 25 de março de 2013.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a DEUS, pelo dom da vida, por me dar força e saúde na realização dos meus sonhos.

À minha amada esposa, Perla Alessandra, que sempre me apoiou no período de realização deste curso e que me faz ver que o amor é o mais profundo dos sentimentos.

Ao meu querido e lindo filho, Pedro Augusto, que me faz compreender o sentido da vida.

Aos meus pais, João e Creusa, pessoas maravilhosas, que sempre me apoiaram e que são exemplos de vida para mim.

Aos meus irmãos e sobrinhos, os quais amo muito.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFJF, pela paciência, pelo acolhimento e pela dedicação nesses dois anos.

Ao meu orientador, o Professor Doutor Olímpio Hiroshi Miyagaki, ser humano ímpar, humilde, dedicado, paciente e com enorme capacidade. Agradeço pela confiança e pelas sugestões que fizeram parte da construção deste trabalho.

Ao Professor, Doutor Victor Guerassimov, que sempre se dispôs a me ajudar, quando eu ainda era estudante da graduação na UFMG.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos uma sequência de atividades utilizando o Princípio de Cavalieri no cálculo de volumes de sólidos geométricos. Essas atividades são destinadas a alunos do Ensino Médio, partindo do pressuposto que já é do conhecimento desses alunos, o cálculo do volume de um bloco retangular. A partir dessa condição, apresentamos o Princípio de Cavalieri como axioma em atividades que despertam a intuição dos estudantes, para que compreendam e aceitem esse Princípio. Os alunos são levados a participar de forma ativa na dedução das fórmulas para o cálculo do volume dos sólidos tradicionais como: pirâmides, cones, cilindros e esferas. Com o auxílio do software de Geometria Dinâmica *GeoGebra 5.0 JOGL1 Beta 3D*, criamos figuras e animações que facilitam a visualização dos sólidos geométricos, bem como a criação de conjecturas que auxiliam os alunos na dedução das fórmulas. Além desses sólidos que chamamos de tradicionais, apresentamos outros exemplos de aplicação do Princípio de Cavalieri que não são comumente encontrados em livros destinados a esse nível de ensino: o toro, uma esfera com furo cilíndrico. Como última atividade, consideramos o sólido formado na interseção entre dois cilindros de mesmo raio com seus eixos perpendiculares, sendo a altura desses cilindros maior que o diâmetro da base. Esse cálculo de volume é comumente apresentado em livros de Ensino Superior com a utilização do Cálculo Integral mas, nesse trabalho, levamos os alunos a deduzir a fórmula para o cálculo desse volume utilizando o Princípio de Cavalieri.

Palavras-Chave: Volumes; Princípio de Cavalieri; Sólidos.

ABSTRACT

In this work we present a sequence of activities using the Cavalieri's Principle in calculating volumes of geometric solids. These activities are aimed at high school students who know how to calculate the volume of a rectangular block. From this condition, we introduce Cavalieri's Principle as an axiom in activities that awaken students' intuition so that they understand and accept this principle. Students are led to participate actively in the derivation of formulas for calculating the volume of solids as traditional pyramids, cones, cylinders and spheres. With the help of Dynamic Geometry software *GeoGebra 5.0 Beta JOGL1 3D*, we create pictures and animations that will facilitate the visualization of geometric solids as well as the creation of conjectures as assist students in understanding formulas. Besides these solids which will we call traditional, other examples will be presented in order to apply the Cavalieri's Principle which are not commonly found in books aimed at this level of education: the torus, a sphere with a cylindrical bore. As a final activity, we consider the solid formed by the intersection by two cylinders of the same radius with their perpendicular axes, their heights are greater than the cylinder diameter of the base. This volume calculation is commonly presented in College textbooks using the Integral Calculus, but in this work we take students to understand the formula by calculating the volume using the Cavalieri's Principle.
Keywords: Volumes; Cavalieri's Principle; Solids.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Calcular o volume de um sólido geométrico não é uma necessidade recente, através de pesquisas e leituras percebemos que, ao longo do desenvolvimento das sociedades, esse problema apareceu, em muitos casos, por necessidades práticas, em outros pela beleza que a Matemática pode nos proporcionar. Essas necessidades levaram ao desenvolvimento de ideias e métodos para a realização desse tipo de cálculo.

No Ensino Médio apresentamos aos alunos, as fórmulas para o cálculo de volumes de alguns sólidos. Ao longo dos anos ensinando esse conteúdo, percebemos dificuldades que muitos alunos apresentam na visualização desses sólidos e no entendimento das deduções das fórmulas, levando-os à dificuldade em aplicá-las. Os livros didáticos, de maneira geral, apresentam as fórmulas, em textos explicativos, fazendo com que o aluno não participe de forma ativa, na construção desse conhecimento, em seguida, apresentam listas de exercícios para que apliquem as fórmulas ali demonstradas. Pensando em melhorar essa realidade, procuramos realizar esse trabalho e decidimos explorar o Princípio de Cavalieri, haja visto que ele é intuitivo ao ser trabalhado como axioma, além de reduzir os argumentos necessários para a dedução de fórmulas para o cálculo de volumes de alguns sólidos. Destacamos que nossa proposta não se limita aos sólidos que chamamos aqui de tradicionais (prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera), os quais estão presentes nos livros didáticos, destinados a esse nível de ensino. Além desses sólidos procuramos trazer para os alunos situações diferenciadas, para que tenham contato com aplicações variadas do Princípio de Cavalieri. O cálculo de volume está presente em vários contextos do nosso cotidiano, o que nos leva a acreditar que é importante para o aluno do Ensino Médio, entender as deduções de algumas fórmulas, para que possam aplicá-las com mais segurança. Propomos atividades em que os alunos sejam sujeitos ativos na construção desse conhecimento, desenvolvendo assim, o raciocínio espacial e a capacidade de aplicar conceitos da geometria plana.

Sabemos que os materiais concretos são recursos didáticos que auxiliam os alunos na construção do conhecimento. Esse tipo de material está presente em duas atividades propostas, mas para sólidos mais elaborados, a dificuldade na confecção desse material aumenta, por isso procuramos outros recursos que possam contribuir, significativamente, com o desenvolvimento do raciocínio espacial desses alunos. Pensando na dinâmica do mundo moderno, procuramos criar atividades nas quais utilizamos o software de Geometria Dinâmica *GeoGebra 5.0 JOGL1 Beta 3D*, que pode ser baixado gratuitamente na Internet (ver [16]). Esse software nos permite a utilização de vários recursos e, com ele criamos figuras tridimensionais que podem ser rotacionadas, conseguimos atividades que permitem a interação dos alunos e animações que permitem uma melhor visualização dos sólidos. Utilizamos também, o software *Autodesk Inventor Professional 2013 - Versão para Estudante*, que foi baixado de [15]. Com o auxílio dessa poderosa ferramenta elaboramos figuras tridimensionais sob vários ângulos, aplicando cortes para mostrar as seções dos sólidos, podendo assim criar atividades variadas.

Esse trabalho está dividido em 6 capítulos, sendo o primeiro, destinado a comentários sobre a História da Geometria, em especial ao cálculo de volumes. No segundo capítulo apresentamos um pouco sobre a vida de Cavalieri e suas contribuições para o desenvolvimento da Matemática. Ainda nesse capítulo abordamos os seus dois Princípios, um para o cálculo de áreas, e outro que envolve o cálculo de volumes.

Os Princípios de Cavalieri são teoremas, ao pesquisarmos em [11], encontramos uma demonstração do teorema para o cálculo de volumes que apresentamos no capítulo 3, já que o mesmo é objeto desse trabalho. No capítulo 4, fazemos um breve comentário sobre as alternativas que temos para abordar o cálculo de volumes no Ensino Médio e justificamos a escolha pelo Princípio de Cavalieri.

No capítulo 5, apresentamos uma série de atividades. Nas duas atividades iniciais, os alunos irão trabalhar com material concreto. Com essas atividades procuramos levar os alunos a pensar sobre a necessidade de um método de cálculo indireto de volumes e a desenvolver a intuição para que aceitem o Princípio de Cavalieri na forma de axioma. Já nas atividades seguintes, os alunos serão levados a deduzir as fórmulas para o cálculo do volume de pirâmides, cilindros, cones e esferas. Utilizamos para isso, várias figuras e animações tridimensionais (essas animações são arquivos eletrônicos). Em seguida apresentamos três atividades, sendo uma sobre o cálculo do volume de um toro, outra sobre o cálculo do volume de uma esfera com furo cilíndrico e a última atividade sobre o cálculo do volume de um sólido que podemos dizer bem diferente. Esse sólido é obtido pela interseção de dois cilindros de mesmo raio, sendo os seus eixos perpendiculares e que possuem a altura maior que o diâmetro de suas bases.

No último capítulo apresentamos alguns comentários, justificando os objetivos de cada atividade, bem como tempo necessário para realização, dificuldades que podem aparecer, materiais necessários, além de algumas sugestões metodológicas para o desenvolvimento das mesmas.

Por fim, apresentamos nossas conclusões a respeito desse trabalho e as referências bibliográficas utilizadas.

1 UM POUCO DE HISTÓRIA DA GEOMETRIA

Neste capítulo apresentamos alguns tópicos de História da Geometria, abordando principalmente, a geometria espacial. Falamos um pouco sobre sua origem, sobre os egípcios e babilônios e também fazemos alguns comentários a respeito dos Elementos de Euclides. Ao final, fazemos um breve comentário sobre o Cálculo Integral, citamos Arquimedes e Cavalieri, dois matemáticos, que em épocas distintas, colaboraram com ideias que vieram a ajudar no desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral.

1.1 ORIGEM

Afirmações sobre a origem da Geometria são um tanto arriscadas, segundo [5], as primeiras considerações que o homem fez a respeito da Geometria parecem ter origem em simples observações, provenientes da capacidade humana de reconhecer configurações físicas, comparar formas e tamanhos. Nessa linha de raciocínio podemos pensar que muitas concepções geométricas aconteceram de forma natural. É provável que as observações do seu cotidiano, levaram o homem primitivo à concepção de curvas, superfícies, sólidos e propriedades geométricas. Ao pesquisarmos em [1], sobre a origem da geometria, percebemos que as ideias iniciais em geometria, provavelmente começaram bem antes da arte de escrever. Somente nos seis últimos milênios, o homem passou seus registros e pensamentos para a forma de escrita. As informações que temos sobre a pré-história foram obtidas a partir de interpretações dos poucos artefatos que restaram, e do excelente trabalho da moderna antropologia. O homem pré-histórico desenvolveu habilidades geométricas como simetria, relações entre formas e desenhos, provavelmente pelo seu sentimento estético e no prazer pela beleza das formas. Determinar ou demarcar o período em que surgiu a geometria parece algo realmente inatingível, identificar categoricamente uma origem determinada no espaço e no tempo é confundir conjecturas com história (vide [1]).

É comum ouvirmos falar que a geometria teve início às margens do rio Nilo. Aristóteles e Heródoto demarcaram o início dessa área da Matemática como tendo ocorrido no antigo Egito. Para Heródoto a geometria teve início a partir da agrimensura prática, na qual era necessário se fazer novas medidas das terras após as inundações anuais no vale do rio Nilo. Já Aristóteles acreditava que a origem da geometria se deu pela existência de uma classe sacerdotal, no antigo Egito, que dispunha de tempo para o lazer e que apontaram para o estudo da geometria.

Em relação aos babilônios e aos egípcios podemos dizer que praticaram uma geometria essencialmente métrica, calculando comprimentos, áreas e volumes. Muita informação sobre a matemática egípcia vem de documentos denominados Papiros, dentre esses podemos citar o Papiro de Rhind e Papiro de Moscou, este último foi comprado no Egito em 1893. Conforme [1], esse Papiro foi escrito por um escriba desconhecido, da décima segunda dinastia (1890 a.C aproximadamente) e contém 25 exemplos, quase todos da vida prática, sendo que em especial, há um problema que envolve o cálculo do volume de um tronco de pirâmide quadrada, com altura de seis unidades e as arestas das bases superior e inferior medem duas e quatro unidades, respectivamente. Na civilização babilônica os registros eram feitos através de um tipo de estilete em barro mole, depois as tabletas eram secas ao sol ou mesmo em fornos. Conforme [14], os babilônios calculavam volumes de vários sólidos, como cilindros retos, prismas retos com bases triangulares ou retangulares. Esses cálculos eram contextualizados em situações agrícolas, construções civis ou militares.

Na geometria egípcia podemos falar em procedimentos para a realização de cálculos de áreas e volumes. Sabemos que os egípcios calculavam o volume de um paralelepípedo reto e cilindros retos. Segundo [14] , os conhecimentos que podemos dizer que os Egípcios possuíam em relação às pirâmides eram:

- A inclinação dos lados de uma pirâmide.
- O volume do tronco de uma pirâmide.
- O volume de uma pirâmide.

Em [1], o autor fala sobre a questão de que os papiros e as tabletas encontradas apresentam apenas casos específicos e problemas, sem formulações gerais. O autor ainda faz um comentário sobre a ausência de distinções claras entre resultados exatos e aproximados.

1.2 OS ELEMENTOS DE EUCLIDES

Os gregos absorveram bastante conhecimento de outras culturas, sendo influenciados também pelos conhecimentos praticados pelos egípcios e os babilônios. Os primeiros matemáticos gregos praticavam uma geometria baseada em cálculos de medidas, como os povos antigos. Não conseguimos, com base nos documentos que conhecemos, estabelecer a transição entre a Matemática babilônica, egípcia e a grega (ver [14]). Sabemos que com o tempo, os gregos apresentaram desejo pela argumentação, dando início a uma Matemática fundamentada em argumentações convincentes e demonstrações.

Muitas foram as obras escritas pelos gregos, grande parte delas se perdeu no tempo, mas uma em especial, merece destaque pela sua importância ao longo da história da Matemática. Estamos falando sobre *Os Elementos de Euclides*, que foi escrito por volta de 300 a.C. Nessa obra, Euclides expõe de maneira organizada, conhecimentos da matemática elementar praticada e desenvolvida pelos gregos clássicos. O que parece é que com essa obra ele apresentou vários resultados de outros matemáticos, onde possivelmente aparece alguma descoberta própria. As ideias expostas nesse trabalho, influenciaram muitos matemáticos, sendo que após sua publicação vários deles procuraram absorver os conhecimentos ali apresentados e propor novas ideias.

Esse grande trabalho é composto por treze livros ou capítulos. Nele podemos encontrar assuntos como: geometria plana elementar, teoria dos números, os incomensuráveis. A geometria espacial tem especial destaque nos livros XI, XII e XIII. No Livro XII de *Os Elementos*, Euclides apresenta algumas ideias sobre áreas e volumes. Em muitas demonstrações é utilizado o método da exaustão. Nesse livro, é apresentado um estudo sobre pirâmides, cilindros, cones e esferas. Os fatos indicam que Euclides sabia como calcular os volumes de pirâmides, cones e cilindros. Sobre a esfera devemos considerar um teorema que aparece no referido trabalho, o qual diz que os volumes de duas esferas estão entre si como os cubos dos seus diâmetros. Com base nesse teorema somos levados a entender que para Euclides, o Volume da esfera seria dado por $V = c.R^3$, onde c é uma constante e R é o raio da esfera (ver [9]). No trabalho em questão, não há uma conclusão para o valor dessa constante, sendo Arquimedes que viveu de 287 a 212 a.C., o primeiro a atribuir para a constante c o valor $\dfrac{4\pi}{3}$. Arquimedes foi o primeiro a efetuar, com rigor e elegância, o cálculo do volume da esfera e da área de sua superfície, resultados apresentados em seu livro *Superfície e volume do cilindro e da esfera.*

1.3 O MÉTODO ATUAL MAIS GERAL PARA O CÁLCULO DE VOLUMES

A integração de funções elementares é, sem sombra de dúvida, o método mais geral e eficiente usado atualmente para se deduzir fórmulas e calcular volumes de sólidos. A partir de trabalhos realizados por Fermat e Descartes, Newton e Leibniz desenvolveram o Cálculo Integral, na segunda metade século XVII (ver [9]).

Como podemos perceber, a necessidade do ser humano em calcular áreas e volumes é muito antiga. Vimos que em muitas sociedades essa necessidade estava mais ligada à prática e em outras além da prática, havia a satisfação em se deduzir uma fórmula e apresentá-la com argumentações válidas. Dentre as várias ideias desenvolvidas nessa busca pelo formalismo, devemos citar Arquimedes, que com seus métodos infinitesimais, trouxe ideias que foram utilizadas posteriormente por outros matemáticos no desenvolvimento da noção de integral. Também devemos ressaltar que o padre Bonaventura Cavalieri, com seu método dos indivisíveis, influenciou e ajudou com suas ideias, no desenvolvimento posterior desse assunto. Seu trabalho denominado *Geometria dos Indivisíveis*, nos apresenta o princípio para o cálculo de volumes que é explorado nesse trabalho.

Não é nossa pretensão fazer um histórico da criação do Cálculo Diferencial e Integral nesse momento, queremos apenas ressaltar que, abordar áreas e volumes no Ensino Médio, utilizando integrais, como afirma Elon em [9], tem sem dúvida, o mérito da grande variedade de aplicações, além de ser definitiva. Por outro lado, levanta difíceis questões de natureza didática referentes ao grau do rigor nos fundamentos. Devemos considerar também, que o Cálculo Integral não é mais abordado no Ensino Médio, nas escolas brasileiras. Ao pensar no Princípio de Cavalieri podemos trabalhar de maneira mais intuitiva, demonstrar as fórmulas de alguns sólidos e desenvolver no aluno uma visão espacial e competências que posteriormente o ajudarão a aprender os conceitos e aplicações do Cálculo Integral.

2 BONAVENTURA CAVALIERI E ALGUMAS DE SUAS IDEIAS

Nosso trabalho é focado no ensino do cálculo de volumes, utilizando o Princípio de Cavalieri. Apresentamos, neste capítulo, um pouco sobre a vida desse padre e matemático, além dos seus Princípios para áreas e volumes.

2.1 BONAVENTURA CAVALIERI (1598-1647)

Bonaventura Cavalieri nasceu em Milão por volta de 1598. Foi membro de uma ordem religiosa (os Jesuados). No ano de 1616, ele foi para Pisa, onde estudou Filosofia e Teologia. Conheceu o padre Benedito Castelli (1577 -1644) que o apresentou a Galileu (1564-1642), do qual veio a tornar-se discípulo. Em 1629, foi indicado à cadeira de professor em Bolonha. Ocupou esse cargo até sua morte, em 1647, (ver [13], pág. 50 à 54). Podemos dizer que esse intelectual foi um padre e estudioso da Matemática, tendo estudado e publicado vasto material em Matemática pura e aplicada. Dentre os assuntos em que ele trabalhou podemos citar: geometria, trigonometria, astronomia. Ele é considerado como um dos responsáveis pela introdução dos logaritmos na Europa. Conforme [1], em 1632, Cavalieri apresentou seu livro *Directorium universale uranometricum*, onde publicou tabelas de seno, tangentes e secantes, junto com seus logaritmos, até oito casas.

Durante o ano de 1635, Cavalieri apresentou a primeira versão da obra que o deu muito destaque, a famosa *Geometria indivisibilibus continuorum.* Nesse trabalho, ele apresenta seu *método dos indivisíveis.* Em seu livro de Introdução à História da Matemática (ver [6]), o autor Howard Eves, diz que o *método dos indivisíveis* de Cavalieri tem raízes que remontam a Demócrito e Arquimedes, mas cuja motivação direta, talvez, se encontre nas tentativas de Kepler de achar certas áreas e certos volumes.

Segundo [1], o autor diz que na obra dos indivisíveis de Cavalieri, o argumento em que ele se baseia é essencialmente o sugerido por Oresme, Kepler e Galileu, que uma área pode ser pensada como sendo formada de segmentos ou "indivisíveis" e que volume pode ser considerado como composto de áreas que são volumes indivisíveis.

Ao consultarmos [6] sobre a ideia dos indivisíveis, o autor diz que é difícil descobrir o que realmente Cavalieri entendia por indivisível, mas que tudo indica que um indivisível de uma porção plana dada é uma corda dessa porção e, um indivisível de um sólido dado é uma seção desse sólido. Podemos considerar que uma porção plana seja formada de uma infinidade de cordas paralelas e que um sólido seja formado de uma infinidade de seções planas paralelas.

As ideias desenvolvidas por Cavalieri, deram origem a dois princípios, denominados Princípios de Cavalieri, um relativo ao cálculo de áreas e o outro que é muito utilizado para o cálculo de volumes.

2.2 O PRINCÍPIO DE CAVALIERI PARA ÁREAS

Este enunciado foi retirado de [9]:

Sejam A e B figuras planas. Se, para toda reta horizontal r, as interseções $r \bigcap A$ e $r \bigcap B$ são formadas por um número finito de segmentos de reta tais que a soma dos comprimentos dos segmentos em $r \bigcap A$ é igual à soma análoga em $r \bigcap B$, então A e B têm áreas iguais.

Em [11], vemos uma versão para o Princípio de Cavalieri para áreas, onde é considerado que a razão entre os segmentos, não precisa ser necessariamente igual a 1.

Sejam R e S regiões limitadas de um plano, e seja r uma reta desse plano. Suponha que, para toda reta s paralela a r, as interseções de R e S com s sejam vazias ou segmentos tais que a razão entre seus comprimentos é constante. Então a razão entre as áreas R e S é essa mesma constante.

2.3 O PRINCÍPIO DE CAVALIERI PARA VOLUMES

Nesse trabalho, daremos ênfase ao Princípio de Cavalieri para volumes, o qual nos permite apresentar aos alunos do Ensino Médio, de uma maneira mais intuitiva, algumas fórmulas para se calcular volumes de sólidos. A seguir apresentamos uma versão desse princípio.

Considere dois sólidos A e B. Se qualquer plano horizontal secciona A e B segundo *figuras planas, tais que a razão entre suas áreas é uma constante, então a razão entre os volumes V(A) e V(B) é essa constante.* (Veja figura 1)

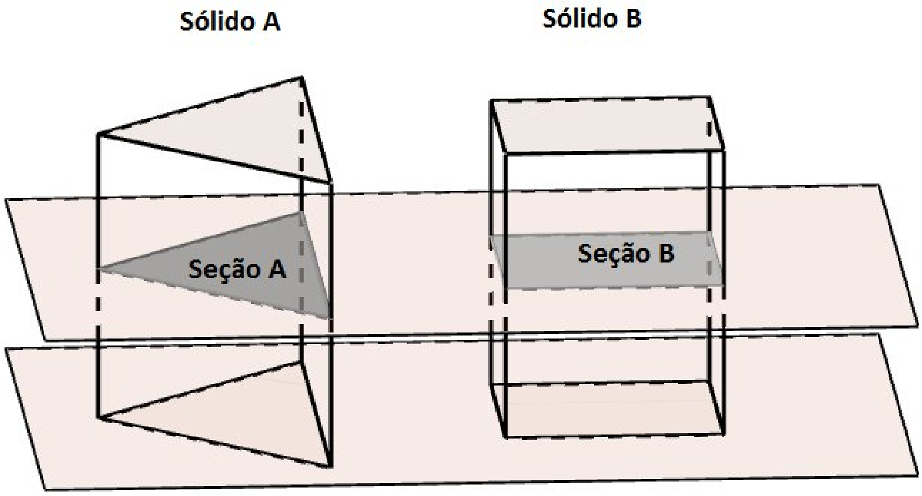

Figura 1: Princípio de Cavalieri

O Princípio de Cavalieri reduz o cálculo de volumes ao cálculo de áreas, para isso, devemos comparar as áreas das seções obtidas nos sólidos por planos paralelos ao plano das suas bases, sendo que esses sólidos deverão ter mesma altura e devem ser considerados apoiados sobre o mesmo plano. Se a razão entre as áreas de seções correspondentes é constante, então a razão entre os volumes dos sólidos considerados é essa mesma constante. Esse fato nos leva a entender que, se as áreas das seções correspondentes são iguais, os sólidos têm o mesmo volume.

3 O PRINCÍPIO DE CAVALIERI PARA VOLUMES É UM TEOREMA

Como vimos anteriormente, em 1635, Bonaventura Francesco Cavalieri divulgou em seu livro *Geometria indivisibilibus continuorum* dois princípios, um referente à áreas de figuras planas e outro relativo ao cálculo de volumes de sólidos geométricos. O Princípio de Cavalieri relacionado ao cálculo de volumes é apresentado aos alunos do Ensino Médio, sob a forma de axioma. Podemos dizer, que esse princípio é intuitivamente aceitável e reduz os argumentos necessários para obtenção das fórmulas de volumes de alguns sólidos. Nesse nível de ensino é satisfatório a sua apresentação na forma de axioma, mas na verdade, tanto o princípio para áreas quanto o para volumes são teoremas, cujas demonstrações fogem do conteúdo ensinado no Ensino Médio. Para demonstrá-los precisamos de ideias desenvolvidas no Cálculo Integral. Na sequência desse texto, apresentaremos e demonstraremos um enunciado na forma de teorema, para o princípio utilizado no cálculo de volumes.

3.1 O PRINCÍPIO DE CAVALIERI PARA VOLUMES COMO TEOREMA

Queremos destacar que, conforme [9], no fundo o Princípio de Cavalieri é um resultado sobre integrais. (Corresponde a afirmar que uma integral múltipla pode ser calculada por meio de repetidas integrais simples). A demonstração desse princípio, segundo [11], constitui em uma aplicação direta da teoria de integração de funções reais. Apresentamos agora, uma versão desse princípio na forma de teorema na qual aparecem as condições de integrabilidade.

O enunciado e a demonstração do teorema de Cavalieri que encontramos a seguir foram retirados de [11]. Em relação a notação, ressaltamos que $a(R)$ indica a área da região R do plano e $v(P)$ indica o volume do sólido P.

Teorema 3.1. Consideremos um sistema de coordenadas cartesianas $Oxyz$, e seja P um sólido finito delimitado por $z = 0$, $z = c > 0$ e por uma quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y = f(x,z)$ e $x = g(y,z)$. Para cada t tal que $0 \leq t \leq c$, seja P_t a interseção de P com o plano $z = t$. Seja Q outro sólido finito delimitado por $z = 0$, $z = c > 0$ e por uma quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y = f(x,z)$ e $x = g(y,z)$. Para cada t tal que $0 \leq t \leq c$, seja Q_t a interseção de Q com o plano $z = t$. Suponhamos que exista $k > 0$ tal que $a(P_t) = k.a(Q_t)$ para todo t. Então $v(P) = k.v(Q)$.

Demonstração. Da teoria de integração de funções reais temos:

$$v(P) = \iiint\limits_{P} dxdydz = \int_0^c [\iint\limits_{P_z} dxdy]dz$$

$$= \int_0^c a(P_z)dz$$

$$= \int_0^c k.a(Q_z)dz$$

$$= k\int_0^c a(Q_z)dz = ... = k.v(Q).$$

O que demonstra o teorema. □

4 O CÁLCULO DE VOLUMES NO ENSINO MÉDIO

Calcular volumes não é uma prática recente. Sabemos que ao longo do desenvolvimento da humanidade, várias propostas foram apresentadas para suprir essa necessidade. Atualmente, vários profissionais precisam desse tipo de conhecimento para o desenvolvimento de suas tarefas.

No Ensino Médio, apresentamos aos alunos, algumas fórmulas que utilizamos para realizar os cálculos dos volumes de alguns sólidos geométricos. Podemos dizer, que o cálculo do volume de um bloco retangular é apresentado de maneira satisfatória, quando desenvolvemos a ideia de compará-lo a um cubo unitário, ou seja, o volume de um bloco retangular é dado pelo número que expressa a quantidade de vezes que esse sólido contém o cubo. As dificuldades começam a aparecer quando necessitamos fazer essa comparação entre um sólido mais irregular e esse cubo. Como comparar um cone com o cubo? E uma esfera? Diante de situações similares a essas, faz-se necessário o aprendizado de métodos de cálculo indireto de volumes. Devemos procurar maneiras e métodos para transmitir esse tipo de conhecimento, sempre observando com qual nível de ensino estamos trabalhando.

Conforme [9], no Ensino Médio, podemos pensar em três alternativas para o desenvolvimento desse conteúdo:

- A apresentação clássica de Euclides, aperfeiçoada por autores modernos como Legendre e Hadamard.
- Utilizar o Cálculo Infinitesimal.
- O Princípio de Cavalieri.

Em relação à primeira alternativa, queremos destacar que para calcular o volume de muitos sólidos, necessitamos de passagem ao limite, ou seja trabalhamos com a ideia de infinito. Segundo [3], Carl Friedrich Gauss queria saber se era realmente essencial o conceito de limite na demonstração da fórmula, para o volume de uma pirâmide. Na verdade, o fato que intrigava Gauss é que para um polígono qualquer, podemos decompô-lo em uma quantidade finita de peças e formar um quadrado, obtendo assim, a área desse polígono. Pensando analogamente em relação a um poliedro qualquer, existem aqueles que podemos decompô-los em outras peças e com essas formar um cubo, calculando o volume do poliedro em questão. O problema é que, para muitos poliedros não conseguimos realizar esse processo utilizando uma quantidade finita de peças. Em 1900 David Hilbert apresentou, no Congresso Internacional de Matemáticos, 23 problemas, sendo o terceiro um problema relacionado ao cálculo de volume de tetraedros. Max Dehn, aluno de David Hilbert, demonstrou que realmente é essencial usar limites para calcular volumes. Para uma leitura interessante, sugerimos [3], onde os autores apresentam uma solução elementar para esse problema.

Devemos lembrar que, na maioria das escolas brasileiras de educação básica, não é ensinado o Cálculo Diferencial, ou seja, não são trabalhados os conceitos e ideias sobre limites, o que dificulta a utilização dessa alternativa em nossa opinião.

Ao pensarmos no Cálculo Integral para o ensino desse conteúdo, concluímos que esse é o método mais geral, o qual apresenta grande variedade de aplicações, além de ser definitivo. Mas nas escolas brasileiras de educação básica já não é ensinado esse conteúdo e além disso, como encontramos em [9], esse tipo de abordagem levanta difíceis questões de natureza didática referentes ao grau de rigor nos fundamentos.

Pensamos então, na terceira possibilidade, a qual exploraremos no decorrer desse trabalho. A abordagem do cálculo de volumes, pelo Princípio de Cavalieri é interessante para o Ensino Médio. Sabemos que esse princípio é um teorema, mas pode ser apresentado na forma de axioma aos alunos nesse nível de ensino. No formato de axioma, acreditamos que seja bem intuitivo e aceitável por parte dos alunos, sendo que sua aplicação é consideravelmente simples e nos permite reduzir os argumentos necessários para a dedução de fórmulas, que expressam o volume de alguns sólidos. Sabemos da limitação em relação a superfícies curvas que esse princípio apresenta, mas acreditamos que para os sólidos, que são ensinados no Ensino Médio temos muitas vantagens em relação às desvantagens. A utilização desse princípio exige conhecimentos elementares da Matemática. Nesse trabalho, propomos atividades diferenciadas que poderão ajudar os alunos a desenvolverem o raciocínio espacial e também a adquirirem competências para que, futuramente, aprendam os métodos que utilizam o Cálculo Integral no cálculo de volumes.

5 ATIVIDADES

Quando decidimos realizar este trabalho, imaginamos fazer algo diferente do que aparece nos livros didáticos e em outros tipos de materiais que trabalham o tema, no Ensino Médio. Queremos dizer que não apresentamos as fórmulas prontas, pensamos em oportunizar para os alunos atividades nas quais eles serão sujeitos ativos na construção do conhecimento. As atividades propostas destinam-se a alunos do Ensino Médio, podendo ser trabalhadas com alunos do 1º, 2º ou 3º ano. Alguns conhecimentos são pré-requisitos para que esses exercícios sejam desenvolvidos. Os alunos deverão ter conhecimento sobre definições e classificação de sólidos como: prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas. Consideramos também, que já tenha sido apresentado a eles o cálculo do volume, de um bloco retangular. Devemos dizer que além disso, os alunos deverão ter alguns conhecimentos de geometria plana, dentre os quais podemos citar: propriedades dos triângulos e classificação, figuras semelhantes, cálculo de área de figuras planas , o teorema de Pitágoras e o teorema de Thales.

O cálculo de volumes de sólidos geométricos, no Ensino Médio é um assunto no qual, de maneira geral, os alunos apresentam dificuldades. A apresentação desse conteúdo, em nossa opinião, deve ser feita por atividades que proporcionem uma dinâmica de visualização dos sólidos. Figuras estáticas realmente não facilitam a visualização e o desenvolvimento do raciocínio espacial dos alunos. Apresentamos propostas de atividades, nas quais recursos computacionais são utilizados para a criação de figuras que podem ser rotacionadas, vistas sob vários ângulos, que ajudam na visualização, por parte dos alunos, além de proporcioná-los situações que permitem criação de conjecturas que ajudam na demonstração das fórmulas. Essas atividades são propostas para que os alunos aprendam sobre o Princípio de Cavalieri e que possam perceber algumas de suas aplicações em situações variadas. Com isso, irão desenvolver o raciocínio espacial, além de aprenderem as fórmulas para o cálculo do volume de alguns sólidos geométricos.

5.1 UTILIZANDO UMA BALANÇA PARA DETERMINAR O VOLUME DE ALGUNS SÓLIDOS

Intuitivamente, sabemos que o volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupada. Como unidade de volume podemos utilizar um cubo unitário, ou seja, um cubo cuja aresta é 1 e que por definição terá o seu volume igual a 1. A partir disso, temos por exemplo que, se a aresta de um cubo é de 1 cm, o seu volume será de 1 cm^3. Podemos então determinar o volume de um sólido fazendo uma comparação entre ele e o cubo unitário. O número que expressa a quantidade de vezes que o sólido contém o cubo nos indica o seu volume. Vocês já sabem como fazer essa comparação quando o sólido que se pretende determinar o volume é um bloco retangular.

Vamos retomar algumas ideias a esse respeito (Veja figura 2).

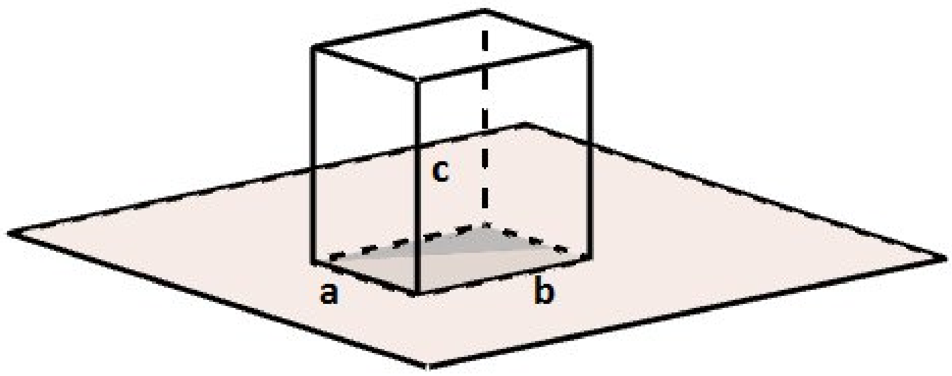

Figura 2: Bloco retangular de dimensões a, b e c

O volume desse sólido é dado pelo produto das suas dimensões, ou seja, seu volume pode ser obtido pela fórmula $V = a.b.c$. Podemos considerar a face de dimensões a e b que está contida no plano horizontal e denominá-la base, a dimensão c será chamada de altura. Na fórmula $V = a.b.c$, temos que $a.b$ representa a área da base (a face que está contida no plano horizontal é um retângulo) e c é a altura, então, podemos dizer que $V =$ *(área da base).(altura)*. Reflitam no seguinte: qualquer face do bloco retangular poderá ser tomada como base.

Com base no que vocês leram, façam a atividade seguinte.

- Entre os corpos de aço que vocês possuem, há um cubo cujo volume é de 1 cm^3, esse será tomado como nossa unidade de volume. Com a régua, meçam as dimensões do bloco retangular e determinem o seu volume. Quantas vezes o cubo cabe nesse bloco?

Sabemos que outros sólidos como a esfera, o cilindro e o cone também possuem volume, mas como saber quantas vezes cada um desses sólidos contém o cubo unitário? A seguir apresentamos algumas atividades que poderão auxiliá-los na elaboração de respostas para essas e outras indagações.

Inicialmente, façam uma pesquisa na internet e/ou em livros de Física, Química e respondam os itens a seguir:

- O que é a densidade de um objeto?
- O que é a massa específica de um material?
- Para corpos maciços essas duas grandezas são numericamente iguais? Justifique.

Nas atividades seguintes apresentamos um método para o cálculo de volumes onde vocês utilizarão vários conceitos que aprenderam até o momento.

a) Com o auxílio de uma balança, meçam a massa do cubo e a massa da esfera, anotem esses valores. Em se tratando de corpos maciços, é fácil perceber que as massas desses dois sólidos são diferentes, mas o que podemos dizer em relação às suas densidades? Justifique.

b) A densidade de um corpo é dada pela razão entre a massa desse corpo e o seu volume. Utilizem as fórmulas que expressam as densidades do cubo e da esfera, e, com os valores que obtiveram no item anterior para as massas desses corpos, determinem o volume da esfera. (Lembrem-se: o volume do cubo é de $1cm^3$)

c) Com base na mesma ideia desenvolvida no item anterior, determinem o volume do cone, do cilindro e do bloco retangular. Em relação ao bloco retangular verifiquem se os resultados obtidos para o seu volume são iguais nos dois métodos.

Com essas atividades, vocês aprenderam a determinar o volume de sólidos maciços através de um processo prático, porém limitado. Para entender melhor, façam algumas reflexões: Esse processo é prático para calcularmos o volume de sólidos muito grandes ou muito pequenos? Imaginem que um engenheiro terá que projetar um reservatório no formato cilíndrico e esse deverá conter uma quantidade x de água. Como esse profissional irá determinar as dimensões desse reservatório?

Podemos pensar também na seguinte questão: como determinar o volume de uma esfera com raio de 5m? Diante dessas e outras situações, devemos pensar em métodos indiretos para o cálculo de volumes. Vocês irão aprender um método bem intuitivo que nos permite responder a questões sobre o cálculo de volumes de alguns sólidos.

5.2 INTRODUZINDO O PRINCÍPIO DE CAVALIERI

5.2.1 Desenvolvendo a Intuição

Nesta atividade, os alunos deverão ser divididos em grupos. Cada grupo receberá três fatias, uma de cada sólido, sendo as três fatias correspondentes, ou seja, fatias obtidas a partir de uma mesma altura em relação a base do sólido ao qual pertencem. Sugerimos que a quantidade de grupos seja determinada pela quantidade de fatias em que os sólidos foram divididos.

Inicialmente, os alunos terão a tarefa de calcular as áreas das seções das fatias que receberam e deverão anotar esses valores. Para as pirâmides A e B, os alunos não terão problemas, já que suas seções são quadradas. Para calcular a área de cada fatia do cone, o professor deverá explicar aos alunos uma maneira de se determinar o raio de um círculo. Ele pode sugerir aos alunos que apoiem as faces das fatias sobre uma folha e que as circulem a lápis; com o auxílio de uma régua e de um compasso, traçarão duas cordas, não paralelas e suas respectivas mediatrizes, conseguindo com isso determinar o centro do círculo e consequentemente o raio e sua área. Esse processo, deverá ser acompanhado pelo professor. É importante que os alunos percebam que o cone e a pirâmide A têm fatias correspondentes com seções de mesma área, e a pirâmide B possui seções com áreas que são o dobro das áreas das seções do cone e da pirâmide A. O professor deverá pedir aos alunos para que juntem as fatias de cada um dos sólidos e façam a montagem dos mesmos, empilhando essas fatias. Eles irão perceber que os três sólidos têm a mesma altura. O professor deverá apresentar no quadro, as anotações feitas pelos alunos e, juntos irão verificar as relações entre as áreas das seções correspondentes. Após esses processos, os alunos irão determinar a massa de cada um dos três sólidos, utilizando a balança. Assim que forem realizadas essas etapas, o professor poderá propor as seguintes questões:

a) Esses sólidos foram fabricados com o mesmo tipo de aço, são maciços, então possuem a mesma densidade. Com base nessa informação e nas massas que vocês encontraram anteriormente, determinem as relações que existem entre os volumes desses três sólidos.

b) A razão entre a área de cada uma das seções de fatias correspondentes do cone e da pirâmide B é a mesma razão entre os seus volumes? E o que podemos dizer em relação ao cone e a pirâmide A?

Após a realização dessa atividade inicial, o professor deverá entregar aos alunos o material que apresentamos a seguir.

Dando prosseguimento à atividade, observem a figura 3:

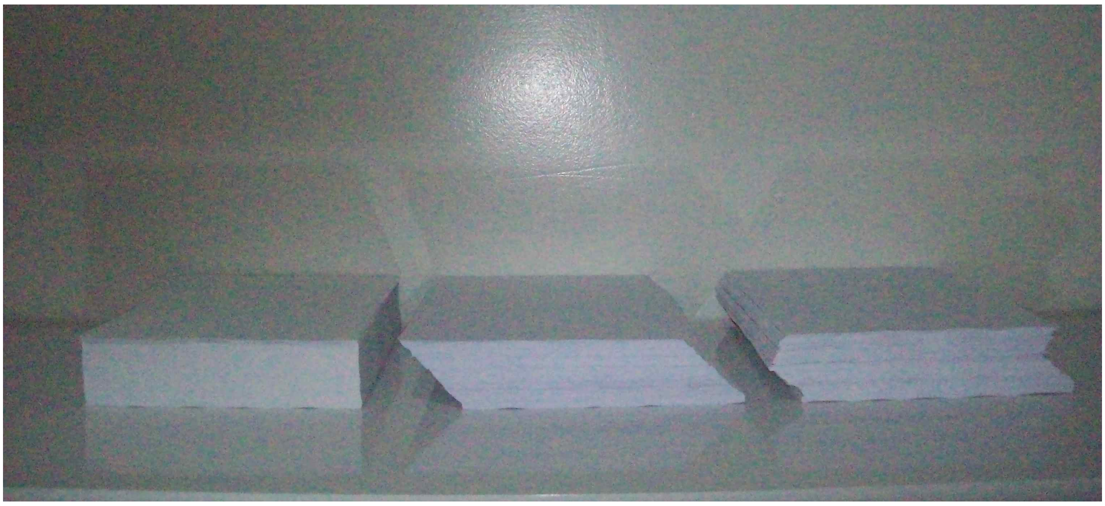

Figura 3: Sólidos formados por folhas empilhadas

Cada um desses três sólidos são formados por 500 folhas empilhadas. Conversem em grupo e respondam:

- Planos paralelos ao plano em que estão apoiados esses sólidos determinam em cada um deles seções que possuem áreas iguais? Justifique.
- Os volumes desses três sólidos são iguais?

Esse exercício e o anterior, nos fornecem noções intuitivas do que denominamos Princípio de Cavalieri. Tanto no exercício com os sólidos de aço, quanto o dos sólidos formados por folhas de papel, consideramos um número finito de fatias, mas devemos destacar que, segundo o Princípio de Cavalieri, os sólidos são compostos por infinitas fatias muito finas e paralelas, sendo a soma dos volumes dessas fatias, o volume do sólido considerado.

Podemos por exemplo, considerar que as folhas de papel são as fatias e que folhas correspondentes têm volumes iguais. Como o volume de cada sólido é obtido pela soma dos volumes dessas folhas, concluímos que esses sólidos têm o mesmo volume.

O Princípio de Cavalieri será o método de cálculo indireto que utilizaremos para demonstrar as fórmulas de volumes de alguns sólidos. Esse Princípio foi apresentado em 1635, em uma obra denominada *Geometria dos Indivisíveis.* O autor dessa obra foi o matemático e padre, Bonaventura Cavalieri (1598-1647). A seguir, apresentamos um enunciado para esse Princípio.

Considere dois sólidos S_1 e S_2. Se qualquer plano horizontal secciona S_1 e S_2 segundo figuras planas tais que a razão entre suas áreas é uma constante, então a razão entre os volumes $V(S_1)$ e $V(S_2)$ é essa constante.

Abra o arquivo PRINCIPIODECAVALIERI.ggb. Arraste o controle deslizante h para cima e para baixo e observe as seções nos sólidos obtidas por planos paralelos. Esses dois sólidos têm mesma altura, caso essas seções correspondentes tenham suas áreas com razão igual a 1, podemos dizer que os volumes desses dois sólidos são iguais.

Intuitivamente, podemos pensar que os dois sólidos foram fatiados em um mesmo número de fatias finíssimas. Considere duas fatias correspondentes; como elas têm mesma área, podemos pensar que seus volumes serão aproximadamente iguais. Quanto mais finas forem as fatias, mais aproximamos da igualdade entre seus volumes. Sabendo que o volume do sólido é obtido pela soma dos volumes de suas fatias, concluiremos que esses sólidos têm volumes iguais. Podemos então, considerar que os sólidos são constituídos por infinitas seções paralelas.

5.2.2 O Volume de Um Prisma Qualquer

Neste exemplo iremos demonstrar a fórmula para o cálculo do volume de um prisma qualquer, utilizando o Princípio de Cavalieri.

Seja P, um prisma de altura h que possui como base um polígono cuja área é A_b, considere que essa base esteja contida em um plano horizontal α. Precisamos encontrar um sólido de volume conhecido, tal que todo plano paralelo a α determina no prisma e nesse sólido seções com áreas iguais. Podemos considerar um bloco retangular de altura h, cuja base é um retângulo com área também igual a A_b. Veja a figura 4 (Apresentamos um caso particular por facilidade na ilustração).

O prisma e o bloco retangular têm bases com áreas iguais a A_b. Um plano horizontal determina no prisma uma seção cuja área é A_p e no bloco retangular a seção obtida tem área A_r. Sabemos que o bloco retangular também é um prisma e que em todo prisma uma seção paralela à base é congruente com essa base. Logo essas seções têm áreas iguais.

$$A_p = A_b = A_r$$

Podemos então dizer que todo plano horizontal determinará nesses dois sólidos seções com áreas iguais, logo, pelo Princípio de Cavalieri afirmaremos que eles têm volumes iguais. Como o volume do bloco retangular é dado pela fórmula $V =$ *(área da base) . (altura)* , concluiremos que o volume de um prisma qualquer também é dado pelo produto da área da sua base pela altura.

$$V_{prisma} = \textit{(área da base).(altura)}$$

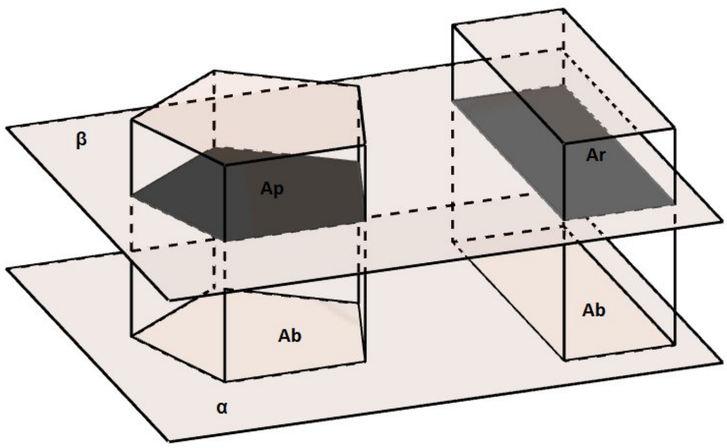

Figura 4: Planos paralelos ao plano horizontal determinam em cada sólido seções correspondentes de mesma área. Esses sólidos têm o mesmo volume

Como vocês puderam perceber nesse exemplo, a aplicação do Princípio de Cavalieri reduz o cálculo de volumes ao cálculo de áreas. Com essas ideias, vocês irão aprender a deduzir as fórmulas de vários sólidos. Daremos sequência com o cálculo do volume de um cilindro.

5.2.3 O Volume de Um Cilindro

Uma outra aplicação do Princípio de Cavalieri é a dedução da fórmula do volume de um cilindro. Para isso considere um cilindro reto cuja base está contida em um plano horizontal, sendo r, o raio dessa base, e h, a altura desse cilindro. Sabe-se que em um cilindro toda seção paralela à sua base é congruente a ela. De maneira semelhante ao que foi desenvolvido anteriormente, no cálculo do volume de um prisma qualquer, deduzam a fórmula do volume de um cilindro reto, utilizando para isso, um bloco retangular ao lado do cilindro, sendo que esse bloco tem a mesma altura que o cilindro e também as áreas das bases são iguais.

Nessa atividade, vocês deduziram a fórmula para o cálculo do volume de um cilindro reto. Conversem com seus colegas e pensem no caso de um cilindro oblíquo. A fórmula para determinar os volumes desses dois tipos de cilindros é a mesma? Justifique.

5.3 CÁLCULO DO VOLUME DE UMA PIRÂMIDE QUALQUER

Inicialmente, consideraremos duas propriedades que valem para qualquer pirâmide e que apresentamos aqui, com um exemplo específico por facilidade na ilustração.

Seja $VABCD$ uma pirâmide com vértice no ponto V e base quadrangular $ABCD$; consideremos h, a altura desse sólido e α o plano que contém sua base. Ao seccionarmos essa pirâmide por um plano β paralelo a α e que dista x do seu vértice , obtemos uma outra seção quadrangular $EFGH$. Veja a figura 5:

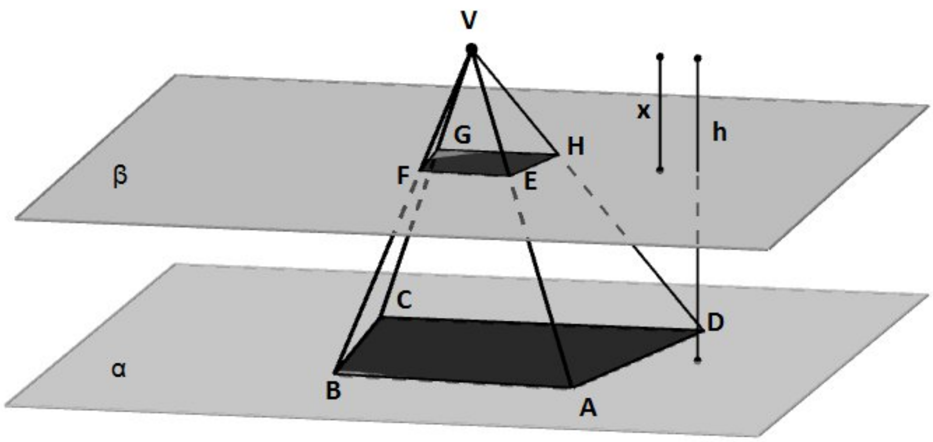

Figura 5: Pirâmide seccionada por um plano paralelo à sua base

Observe que obtemos a pirâmide $VEFGH$. Em relação à essa situação iremos destacar que:

1. Os polígonos $EFGH$ e $ABCD$ são semelhantes e têm razão de semelhança igual a $\frac{x}{h}$.

2. A razão entre as áreas dos polígonos $EFGH$ e $ABCD$ é igual ao quadrado dessa razão de semelhança.

$$\frac{área\ EFGH}{área\ ABCD} = \left(\frac{x}{h}\right)^2$$

Na sequência dessa atividade, utilizaremos essas propriedades para demonstrar alguns fatos importantes em relação às pirâmides.

5.3.1 Duas Pirâmides de Mesma Altura e Que Possuem Bases Com Áreas Iguais, Têm o Mesmo Volume

Abra o arquivo PIRAMIDESMESMOVOLUME.ggb . Nesse arquivo, você encontra duas pirâmides de mesma altura e cujas bases têm áreas iguais. Um plano paralelo ao plano das bases desses dois sólidos determina em cada um deles seções planas com áreas iguais. Arraste o controle deslizante b e observe os valores das áreas indicadas.

a) Utilizando argumentos com base nas propriedades das pirâmides que foram enunciadas anteriormente, mostre o porquê dessas áreas terem valores iguais para todo plano paralelo ao plano das bases dessas pirâmides.

b) O Princípio de Cavalieri nos garante que esses sólidos têm o mesmo volume? Justifique.

c) Nos itens a e b, você verificou um caso específico onde duas pirâmides que têm áreas das bases iguais e mesma altura possuem o mesmo volume, mas na verdade isso é um teorema. Quaisquer duas pirâmides que têm a mesma área da base e a mesma altura possuem o mesmo volume. Converse com seus colegas de turma e construam argumentos que demonstrem esse teorema, depois apresentem para o professor.

5.3.2 O Volume de Uma Pirâmide Triangular é Igual a Um Terço do Produto da Área da Base Pela Sua Altura

Vamos desenvolver algumas ideias a respeito desse teorema.

a) Abra o arquivo PRISMATRIANGULAR.ggb . Nesse arquivo você encontra um prisma reto com bases triangulares ABC e DEF. Utilize a ferramenta *segmento definido por dois pontos* e desenhe os segmentos $\overline{AE}$, $\overline{CE}$ e $\overline{AF}$. Observe que o prisma fica decomposto em três pirâmides: *EABC, ADEF e ACEF.*

b) *Na Janela de Álgebra*, se você clicar sobre a bolinha azul de algum objeto, ele ficará oculto na *Janela de Visualização 3D*. Para uma melhor visualização da pirâmide *ACEF,* oculte as *arestas* $\overline{BE}$, $\overline{DE}$, $\overline{AD}$, $\overline{DF}$, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ (a aresta a $\overline{AB}$, na janela de álgebra é o segmento c e a aresta $\overline{BC}$ está designada pelo segmento a), oculte também os pontos B e D. Utilize a ferramente *Girar Janela de Visualização 3D* e observe essa pirâmide sob vários ângulos. Torne visíveis os objetos que foram ocultados.

c) Oculte a aresta $\overline{CF}$, você irá visualizar com mais facilidade as pirâmides $ADEF$ e $EABC$. Gire o sólido e o observe sob vários ângulos. Tome o triângulo DEF como base da pirâmide $ADEF$ e o triângulo ABC como base da pirâmide $EABC$. Agora, considere a seguinte afirmação: essas pirâmides têm bases com áreas iguais e mesma altura, logo têm o mesmo volume. Justifique.

d) Torne a aresta $\overline{CF}$ novamente visível. Oculte as arestas $\overline{AD}$, $\overline{DF}$, $\overline{DE}$ e o ponto D. Procure visualisar as pirâmides $ACEF$ e $EABC$. Considere como base da pirâmide $ACEF$, o triângulo CEF e para a pirâmide $EABC$ considere o triângulo BCE. Essas duas pirâmides têm o mesmo volume? Justifique.

Você viu nessas atividades resolvidas que o prisma foi decomposto em três pirâmides de volumes iguais, então temos que, o volume de cada pirâmide triangular é igual a um terço do volume do prisma. Como o volume do prisma é dado pela fórmula:

$$V = \text{(área da base) .(altura)}$$

Então, o volume de uma pirâmide triangular será dado por:

$$V_{pirâmide\ triangular} = \frac{(\acute{a}rea\ da\ base).(altura)}{3}$$

5.3.3 O Volume de Qualquer Pirâmide é Igual a Um Terço do Produto da Área da Base Pela sua Altura

$$V_{pirâmide} = \frac{(\acute{a}rea\ da\ base).(altura)}{3}$$

Para demonstrar o fato acima, considere uma pirâmide qualquer que tenha a base com área A_b e altura h. Tome uma pirâmide com base triangular, cuja área da base também é A_b e de mesma altura h. Utilize propriedades das pirâmides que foram apresentadas no decorrer dessa atividade e o Princípio de Cavalieri para concluir que essas pirâmides têm o mesmo volume, deduzindo assim a fórmula para o cálculo do volume de uma pirâmide qualquer.

5.3.4 O Volume de Um Cone

Você sabia que uma pirâmide é um caso particular de cone? Podemos dizer que uma pirâmide é um tipo de cone, que apresenta um polígono convexo como base. O cálculo do volume de um cone é bem simples e similar ao que é feito nas pirâmides. A seguir enunciamos uma propriedade relativa aos cones:

Um cone com raio da base igual a R e vértice V, possui altura H. Considere um plano paralelo à sua base e que dista h do vértice V. Esse plano determina no cone uma seção circular de raio r, tal que a razão entre a área dessa seção e a área da base do cone é igual ao quadrado da razão entre h e H. (Ver figura 6).

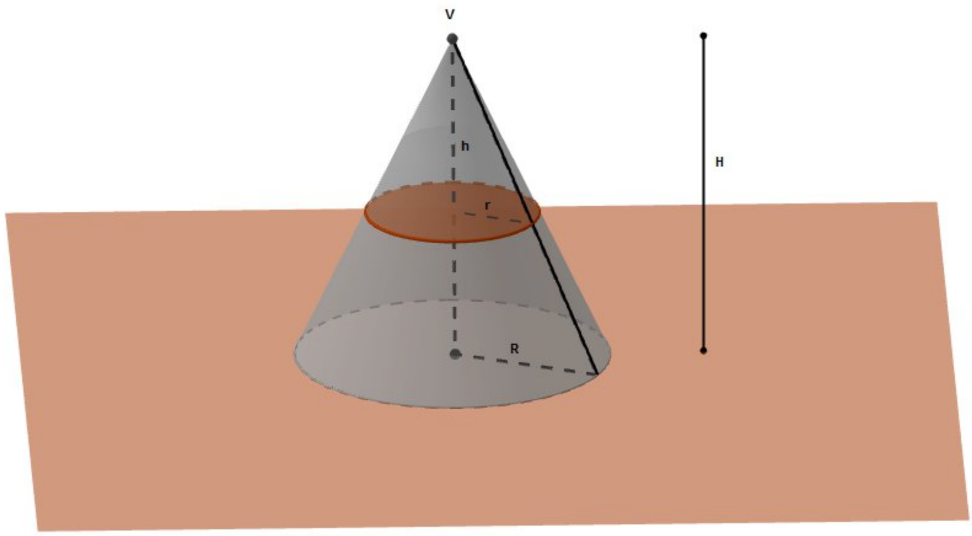

Figura 6: Cone seccionado por um plano paralelo ao plano da sua base

Chamando de A_s a área da seção circular obtida pelo plano e A_b a área da base do cone, podemos escrever:

$$\frac{A_s}{A_b} = \left(\frac{h}{H}\right)^2$$

Com base nessa propriedade, responda os itens a seguir:

- Para encontrar a fórmula que expressa o volume de um cone reto, considere uma pirâmide como sendo o sólido que será comparado ao cone. Escreva um texto explicando as condições necessárias para se aplicar o Princípio de Cavalieri nesse caso, e determine a fórmula que expressa o volume de um cone reto.

- A fórmula para o cálculo do volume de um cone oblíquo é a mesma utilizada para o cálculo do volume de um cone reto? Justifique.

5.4 O VOLUME DA ESFERA

5.4.1 Seções na Esfera

Nesta atividade, você irá aprender a fórmula utilizada para o cálculo do volume de uma esfera. Abra o arquivo ESFERA.ggb. Esse arquivo contém o desenho de uma esfera, de raio R e centro C, apoiada sobre um plano horizontal. Clique duas vezes sobre o *controle deslizante* b, uma janela será aberta, escolha a opção *básico*, selecione *animar* e feche a janela. Observe a animação em 3D e responda os itens a seguir:

- As seções planas obtidas na esfera são que tipo de figura?

- Essas seções têm sempre a mesma área? Podemos dizer que a área de cada uma dessas seções depende da distância em que o plano horizontal se encontra do centro da esfera?

Após essas reflexões, você deverá expressar a área de cada uma dessas seções, em função do raio da esfera e da sua distância ao centro da mesma. Para isso observe a figura 7, onde há uma esfera com centro em C e raio R, apoiada sobre um plano horizontal. Um plano paralelo a esse plano e a uma distância h do centro da esfera, determina neste sólido uma seção circular de raio r.

Considere o triângulo retângulo com catetos h e r, sendo R a sua hipotenusa. Determine o valor de r, em função de R e h, em seguida calcule a área do círculo de raio r (Veja a figura 8).

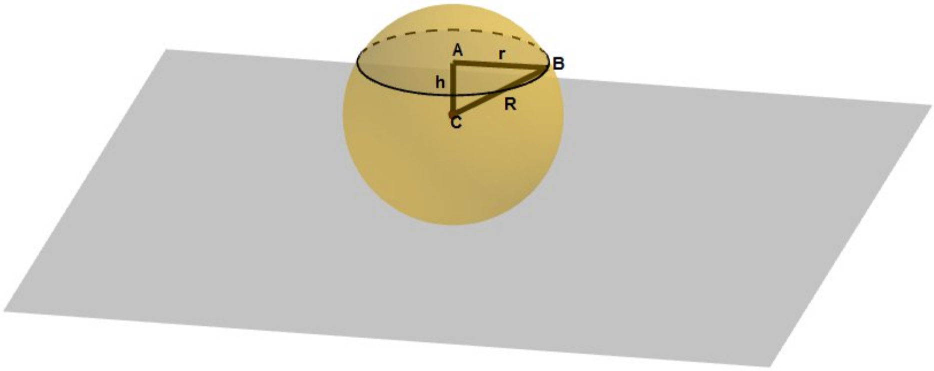

Figura 7: Seção circular obtida por um plano horizontal a uma distância h do centro da esfera

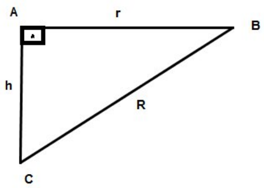

Figura 8: Triângulo retângulo

5.4.2 Aplicando o Princípio de Cavalieri

Para determinar o volume da esfera, você deverá considerar um sólido S, que será obtido da seguinte maneira: de um cilindro equilátero de raio R, retire dois cones que têm os vértices no ponto médio do segmento que liga os centros das bases do cilindro. Os cones terão suas bases nos dois círculos que limitam o cilindro, (veja a figura 9):

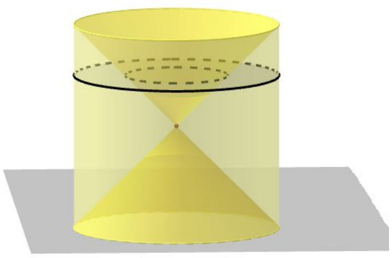

Figura 9: Sólido limitado interiormente por dois cones e, exteriormente pela superfície lateral do cilindro

O volume desse sólido S, que é limitado interiormente pelos dois cones e exteriormente pela superfície lateral do cilindro, é igual ao volume da esfera de raio R. Esse fato será demonstrado pelo Princípio de Cavalieri. Para isso, considere uma esfera de raio R ao lado desse sólido S, ambos apoiados em um plano horizontal. Vamos provar que todo plano paralelo ao plano horizontal determina, na esfera e no sólido S, seções que possuem áreas iguais.

Dando continuidade aos exercícios, abra o arquivo ESFERAECILINDROCOMCONES.ggb, clique duas vezes no controle deslizante b, selecione *básico* e marque *animar*. Observe o tipo de seção que é obtido no sólido S por planos paralelos ao plano horizontal. Como se calcula a área desse tipo de figura? Que figura é obtida quando o plano passa pelo centro do sólido S?

Para aplicar o Princípio de Cavalieri, você deverá expressar a área de cada uma dessas seções obtidas pela interseção dos planos paralelos ao plano horizontal, com o sólido S, em função do raio do cilindro e da distância h da seção, ao centro de S, (veja a figura 10):

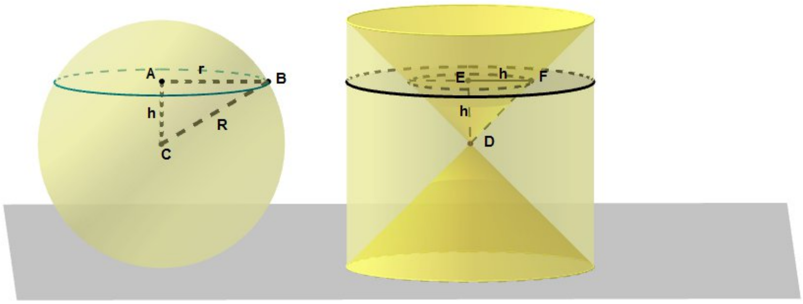

Figura 10: Seções na esfera e no sólido S por um plano horizontal a uma distância h do centro de cada um desses sólidos

Nessa figura, um plano paralelo ao plano horizontal, secciona a esfera e o sólido S, obtendo seções nesses sólidos, a uma distância h dos seus centros. Com base nessa figura, responda os itens seguintes:

a) A esfera e o sólido S estão apoiados em um plano horizontal. Podemos dizer que eles têm a mesma altura? Justifique.

b) A coroa circular obtida no sólido S tem raio maior R e raio menor h. Justifique.

c) Expresse a área dessa coroa circular, em função do raio R do cilindro e da sua distância h, em relação ao centro do sólido S. Para cada plano paralelo ao plano horizontal, a seção obtida na esfera tem área igual à seção obtida no sólido S?

d) Justifique, utilizando o Princípio de Cavelieri, o fato de que esses dois sólidos têm volumes iguais.

e) O volume do sólido S poderá ser calculado da seguinte maneira: calcule o volume do cilindro equilátero de raio R e, desse, retire o volume de dois cones retos que possuem as bases circulares de raio R e alturas também iguais a R. A fórmula que expressa esse volume é também a fórmula para o cálculo do volume da esfera.

5.5 UM CÁLCULO DE VOLUME INTERESSANTE

Você sabe o que é um toro? Nessa atividade você irá conhecer esse sólido e também será levado a deduzir uma fórmula que nos permite calcular o seu volume. Para isso, utilizaremos novamente o Princípio de Cavalieri.

5.5.1 O Toro

Na figura 11 temos um círculo de raio a e um eixo vertical situado a uma distância b do seu centro, sendo $b > a$. Esse eixo está contido no mesmo plano do círculo. Girando o círculo em torno do eixo, obteremos uma figura sólida, a qual denominamos toro .

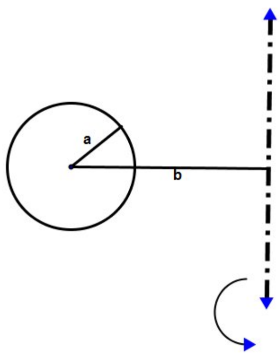

Figura 11: Fazendo a rotação do círculo de raio a em torno desse eixo obtemos um toro

Na figura 12, apresentamos o toro, obtido pelo processo descrito anteriormente.

Agora que já conhece esse sólido, você irá aprender uma fórmula para o cálculo do seu volume.

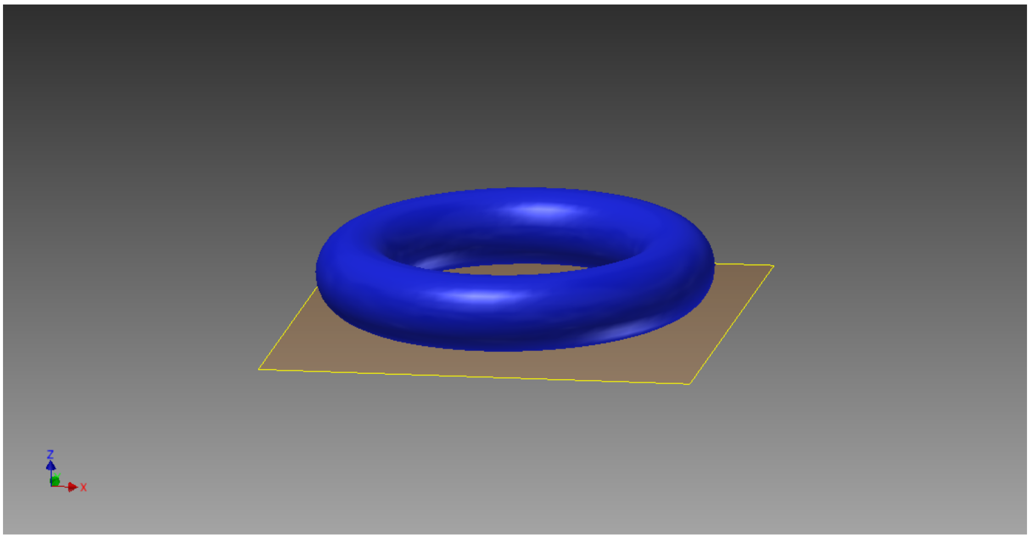

Figura 12: Toro obtido pela rotação do círculo de raio **a** em torno do eixo vertical

5.5.2 Um Sólido Com o Mesmo Volume do Toro

Para calcular o volume desse toro, considere um cilindro reto colocado na horizontal, ao lado desse sólido. Seja a, o raio do cilindro e $2\pi b$, sua altura (ver figura 13). Vamos provar que esses dois sólidos têm o mesmo volume.

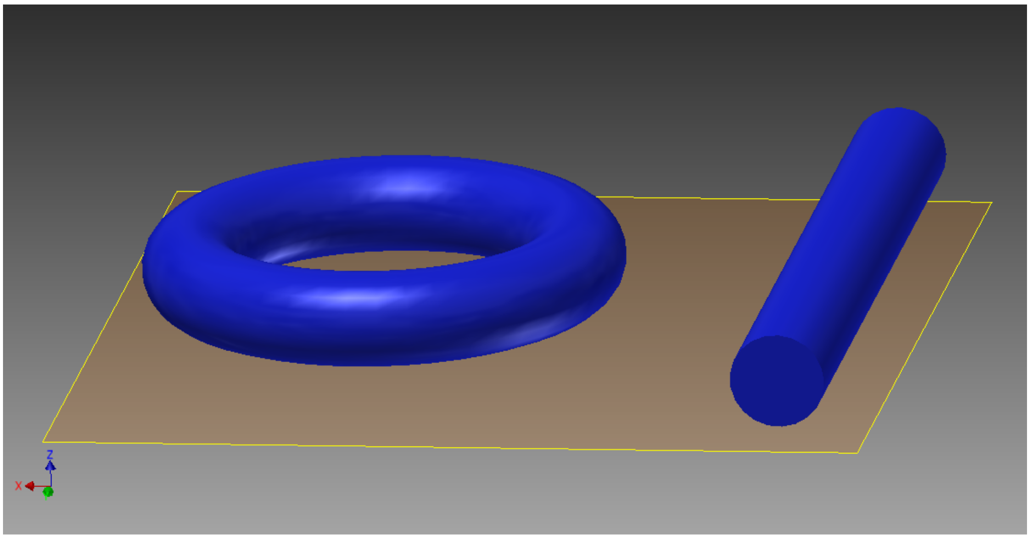

Figura 13: Toro e cilindro apoiados sobre um mesmo plano

Utilizaremos para realizar essa demonstração, o Princípio de Cavalieri. Precisamos demonstrar que todo plano paralelo ao plano horizontal, determina nesses dois sólidos seções com mesma área. Considere a figura 14, onde apresentamos o toro e o cilindro sendo seccionados por um plano horizontal, a uma distância h, dos centros do círculos que geram o toro e o cilindro. No toro, obtemos uma seção que é uma coroa circular, de raio interno r e raio externo R, já no cilindro, obtemos uma seção retangular de largura l e comprimento $2\pi b$.

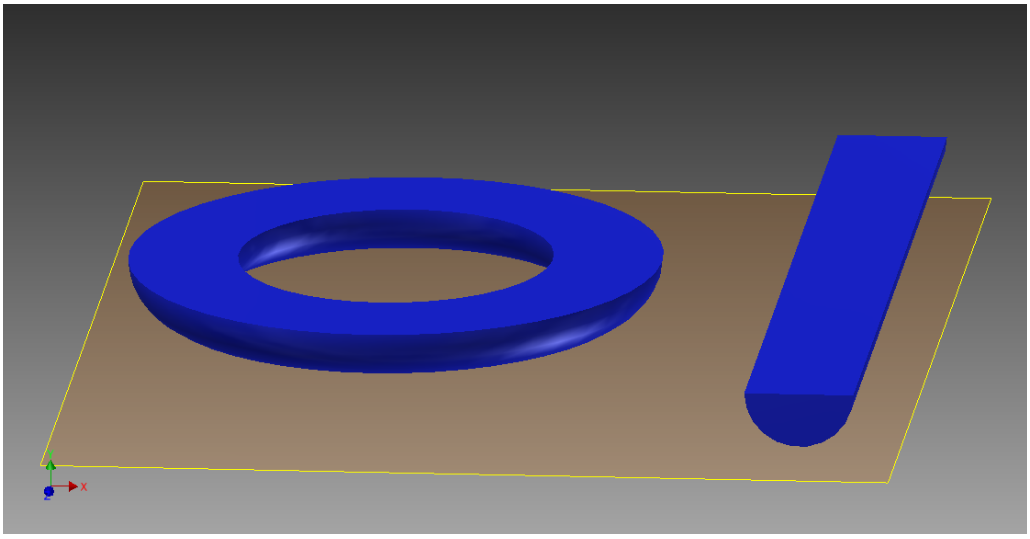

Figura 14: Toro e cilindro seccionados por um plano paralelo ao plano horizontal

Considere a figura 15, onde apresentamos seções obtidas nesses sólidos, por um plano perpendicular ao plano horizontal, que contém o eixo do toro e é perpendicular ao eixo do cilindro.

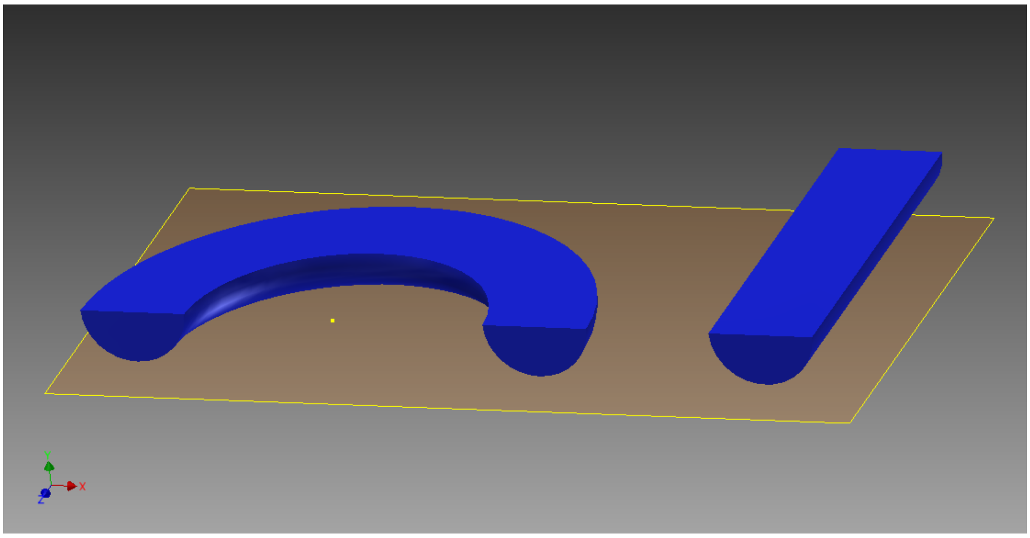

Figura 15: Seções por um plano vertical

5.5.3 Áreas das Seções Horizontais no Toro

Inicialmente, iremos trabalhar com as áreas das seções obtidas no toro. Vamos expressar os raios R e r, da coroa circular, em função do raio a do círculo que deu origem a esse sólido, da distância b do eixo do toro ao centro do círculo e da distância h da seção ao centro do círculo. Para isso considere a figura 16, que irá auxiliá-lo nesse processo.

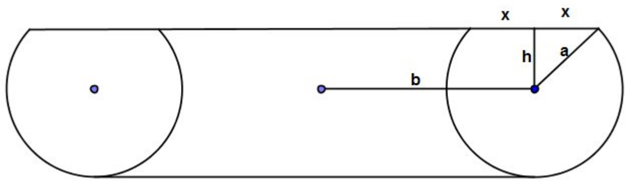

Figura 16: Vista frontal da seção do toro representado na figura 15

Observe que o raio r interno da coroa circular pode ser expresso por r=b-x, já o raio externo R, será dado por R=b+x. Escreva o valor de x, em função de a e h. Determine as expressões para r e R e escreva a fórmula que nos permite calcular a área dessa seção.

5.5.4 Seções Horizontais no Cilindro

Agora vamos trabalhar com as seções horizontais obtidas no cilindro. Considere a seção obtida por um plano horizontal que dista h, do centro do círculo da base desse sólido. Sabemos que essa seção é um retângulo com largura l e comprimento $2\pi b$.

Iremos expressar a largura l do retângulo, em função do raio da base a do cilindro e da distância h da seção, ao centro da base desse cilindro. Para isso observe a figura 17:

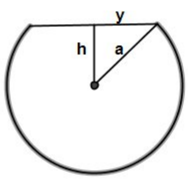

Figura 17: Vista frontal da seção do cilindro representado na figura 15

Pela figura 17, temos que $l = 2y$. Expresse y em função de a e de h. Determine, então, a largura l da seção horizontal, no cilindro e escreva a expressão que nos permite calcular a área dessa seção.

5.5.5 O Volume do Toro

Com base nas fórmulas que você encontrou para a área das seções horizontais no toro e no cilindro, responda os itens a seguir:

a) Podemos afirmar que o volume do toro é igual ao volume desse cilindro? Justifique.

b) Determine a fórmula que nos permite calcular o volume desse toro.

5.6 FURANDO UMA ESFERA

5.6.1 Trabalhando a Intuição

Nesta seção, apresentaremos um cálculo de volume surpreendente, e bem interessante. A situação a seguir será explorada no decorrer dessa atividade.

Considere uma esfera maciça de raio R, com centro no ponto C, feita com um tipo de aço qualquer. Com uma furadeira, façamos nessa esfera um buraco cilíndrico de raio r e cujo eixo seja um diâmetro da esfera. Com esse processo obtemos um novo sólido que tem um volume diferente da esfera original, o qual denominaremos de sólido S. Suponha que você queira calcular o volume desse novo sólido. Converse com seus colegas, faça desenhos, se necessário, e responda o item seguinte, apresentando justificativa.

- O volume desse sólido pode ser obtido subtraindo-se do volume da esfera original o volume do cilindro?

A que conclusão você chegou? Caso ainda tenha alguma dúvida, abra o arquivo o ESFERACOMFURO.ggb, utilize a ferramenta *Girar Janela de Visualização 3D*, observe esse sólido sob vários ângulos e tire suas conclusões.

5.6.2 Altura do Furo Cilíndrico

Você deve ter percebido que esse volume não será determinado da maneira descrita anteriormente. Então, fica a pergunta: como calcular o volume desse sólido utilizando os conhecimentos que foram desenvolvidos ao longo dessas atividades? Novamente o Princípio de Cavalieri nos possibilitará responder a essa indagação.

Vamos então, ao trabalho.

- Determine a altura do cilindro, em função do raio da sua base r e do raio da esfera R. Na figura 18, apresentamos uma seção do sólido S obtida pela interseção desse sólido com um plano que contém seu eixo.

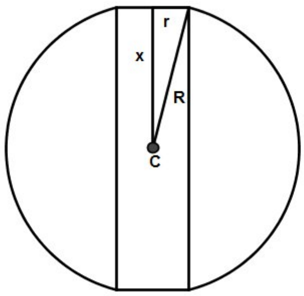

Figura 18: Seção do sólido S

5.6.3 Seções no Sólido S

Para encontrar o volume desse sólido devemos considerar uma outra esfera cujo raio é igual a metade da altura do cilindro. Considere esses sólidos, apoiados em um plano horizontal (ver figura 19):

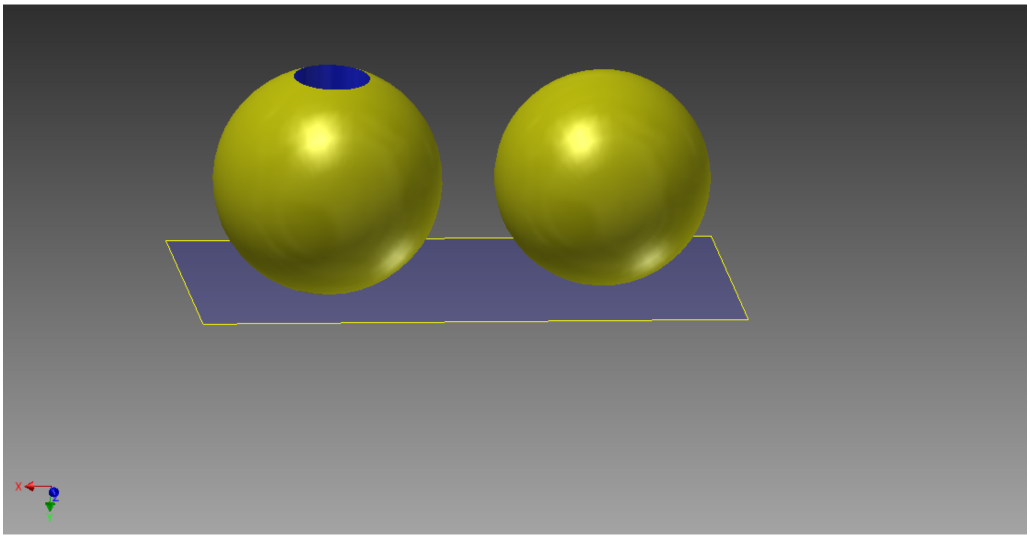

Figura 19: Sólido S e esfera

Consideremos um plano paralelo ao plano horizontal, a uma distância z, dos centros desses dois sólidos. Esse plano determinará em S uma coroa circular de raio interno r (raio do cilindro) e raio externo R_1 (ver figura 20). Já na esfera maciça, a seção será um círculo de raio R_2. Vamos trabalhar com as áreas dessas seções.

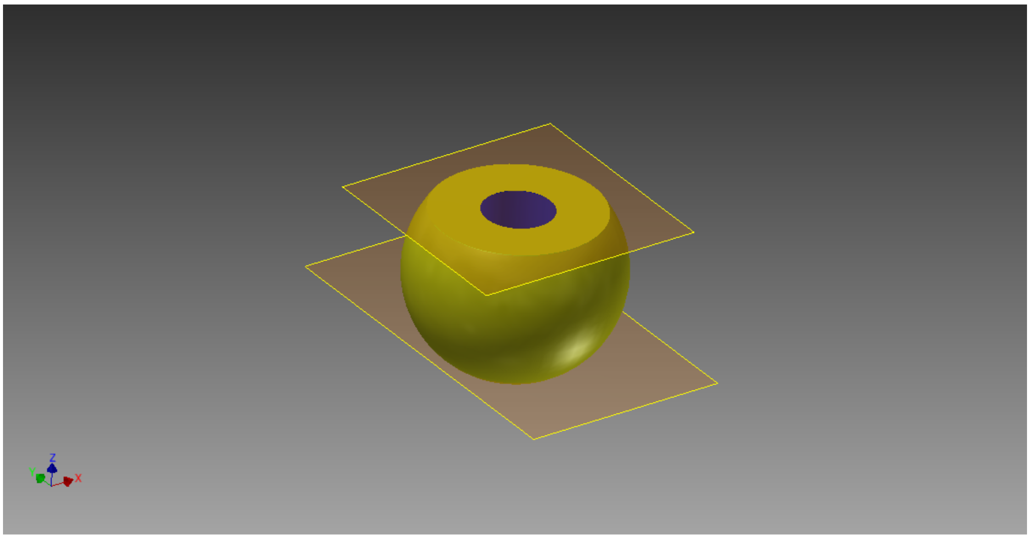

Figura 20: Seção do sólido S obtida por um plano horizontal

Inicialmente, consideraremos as seções obtidas no sólido S.

Expresse o raio externo R_1, da coroa circular, em função da distância z dessa seção, em relação ao centro C do sólido e do raio R da esfera original. Para facilitar essa tarefa, considere a figura 21.

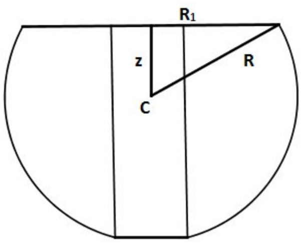

Figura 21: Vista frontal de uma seção do sólido da figura 20, obtida pela interseção desse sólido, com um plano vertical que contém seu eixo

Agora responda o item seguinte:

- Considerando a expressão que você encontrou para R_1, determine a área da seção em formato de coroa circular.

5.6.4 Seções na Esfera

Considere a esfera cujo diâmetro é igual à altura do cilindro. O plano paralelo ao plano horizontal que dista z, do centro dessa esfera, determina nesse sólido uma seção circular de raio R_2. Escreva a expressão de R_2, em função de z e do raio dessa esfera (metade da altura do furo cilíndrico do sólido S). Determine a expressão para a área dessa seção.

5.6.5 O Volume do Sólido S

Com base nos resultados obtidos nos itens anteriores responda:

- Esses dois sólidos possuem o mesmo volume? Justifique.
- Qual é a fórmula que nos permite determinar o volume do sólido S?

5.7 UM SÓLIDO BEM DIFERENTE

Considere a seguinte situação: dois cilindros retos de raio R e altura h, sendo $h > 2R$, maciços, se interseccionam de tal maneira que seus eixos são perpendiculares. Dá para imaginar qual é o formato do sólido obtido nessa interseção? Converse com seus colegas e tentem desenhar esse sólido.

Imaginar ou desenhar esse sólido não são tarefas das mais fáceis. Iremos ajudá-lo na visualização dessa situação. Na figura 22, apresentamos dois cilindros que se interseccionam perpendicularmente.

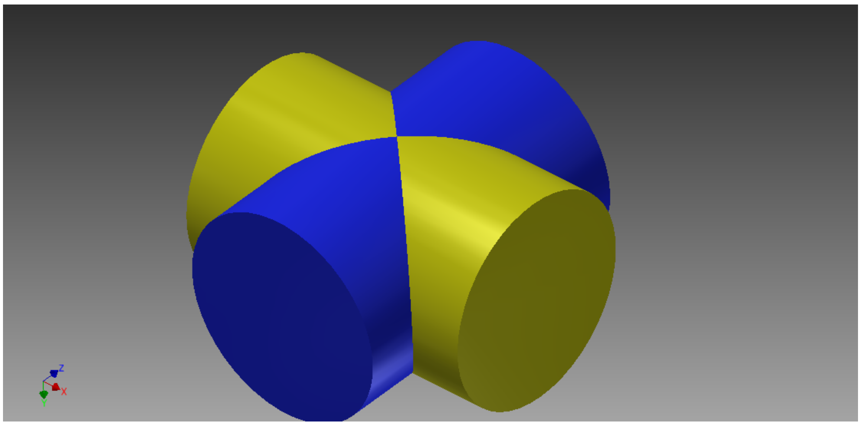

Figura 22: Cilindros perpendiculares

O sólido obtido nessa interseção está representado na figura 23. No decorrer dessa atividade iremos denominá-lo de sólido S_1.

Esse sólido é bem diferente dos quais já estudamos. A princípio parece-nos impossível calcular o seu volume utilizando os conhecimentos até aqui desenvolvidos. Para o

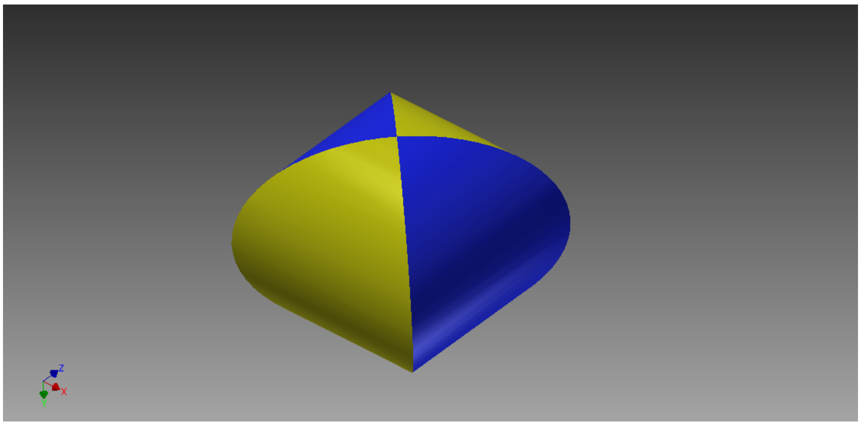

Figura 23: Sólido S_1

cálculo desse volume, de maneira geral, os matemáticos utilizam o Cálculo Integral, que normalmente é ensinado no Nível Superior. Nossa proposta é apresentar uma maneira de realizar esse cálculo utilizando o Princípio de Cavalieri.

Dando prosseguimento à essa atividade, abra o arquivo INTERSECAODEDOISCILINDROS.ggb. Com a ferramenta *Girar Janela de Visualização 3D*, gire a figura e procure visualizar o sólido que é formado na interseção desses dois cilindros. Discuta com seus colegas e com o professor sobre as simetrias que esse sólido apresenta.

Após essas reflexões iniciais, pense na seguinte situação:

- O sólido formado nessa interseção possui volume maior do que o de uma esfera de raio R? Para obter a resposta, sugerimos que pense na possibilidade de existir um formato de esfera (com raio R igual aos raios dos cilindros), no interior desse sólido. Discuta essa situação com seus colegas e com o professor.

Novamente, no arquivo INTERSECAODEDOISCILINDROS.ggb, na *Janela de Álgebra*, torne o objeto *Sphere* visível. Gire a figura e verifique uma esfera no interior do sólido S_1 (Podemos dizer que nessa interseção há pelo menos uma esfera de raio igual ao raio dos cilindros, sendo coincidentes os centros desses dois sólidos). Podemos concluir que o volume de S_1 é maior que o volume da esfera. Antes de passar para o próximo exercício responda os itens a seguir:

- Qual é a altura de S_1?
- O formato da curvatura do sólido S_1 coincide com o formato da curvatura da esfera de raio R? Procure visualizar pontos onde a superfície da esfera coincida com a

superfície de S_1.

- O volume desse sólido é maior, menor ou igual ao volume de um cubo com arestas iguais a *2R*? Justifique.

Antes de passar para a próxima atividade, torne oculto o objeto *Sphere*.

5.7.1 O Sólido S_2

Considere o sólido obtido da seguinte maneira: de um cubo maciço de aresta *2R* (igual ao diâmetro dos cilindros que dão origem ao sólido S_1), retire duas pirâmides de bases quadradas tais que os seus vértices coincidam com o centro do cubo e suas bases são faces opostas desse cubo. O volume de S_2 você já sabe calcular. Vamos provar que S_1 e S_2 têm o mesmo volume, utilizando o Princípio de Cavalieri.

Observe esse sólido na figura 24.

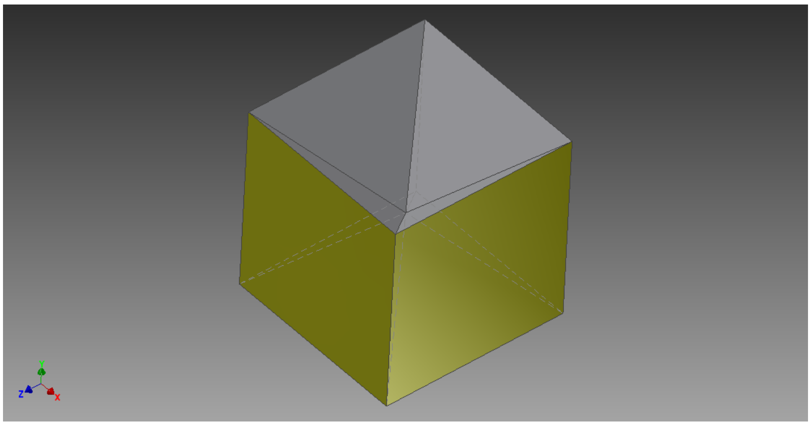

Figura 24: Sólido S_2

5.7.2 Condições Para Aplicação do Princípio de Cavalieri

Considere os sólidos S_1 e S_2, apoiados em um plano horizontal. Precisamos verificar que planos paralelos ao plano horizontal determinam nesses dois sólidos seções que possuem áreas iguais.

5.7.3 Seções no Sólido S_1

Vamos pensar em planos horizontais fatiando esse sólido. Qual é o formato das seções obtidas? Converse com seus colegas de classe e com o professor.

Para uma melhor visualização, no arquivo INTERSECAODEDOISCILINDROS.ggb, torne o objeto *Plane3D* visível. Observe que um plano irá seccionar o sólido S_1. Arraste o *controle deslizante h* e observe as seções que são formadas na interseção do plano com esse sólido (gire o sólido para facilitar a visualização). Essas seções são quadradas. Precisamos determinar a área de cada uma dessas seções, em função da distância da mesma em relação ao centro do sólido S_1 e, em relação ao raio R dos cilindros.

Na figura 25, o sólido S_1 foi seccionado por um plano horizontal, a uma distância z do seu centro.

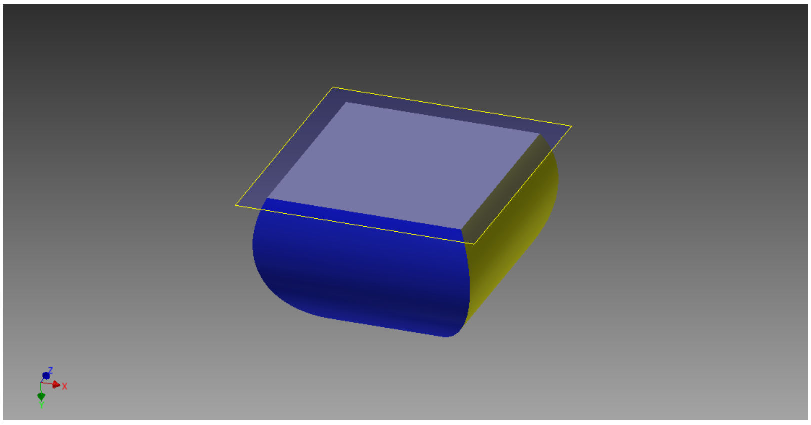

Figura 25: Seção no sólido S_1 por um plano horizontal

Denominaremos o lado do quadrado dessa seção por L. Vamos escrever L em função de z (distância dessa seção ao centro do sólido) e de R (raio dos cilindros que deram origem ao sólido). Para isso considere as figuras 26 e 27.

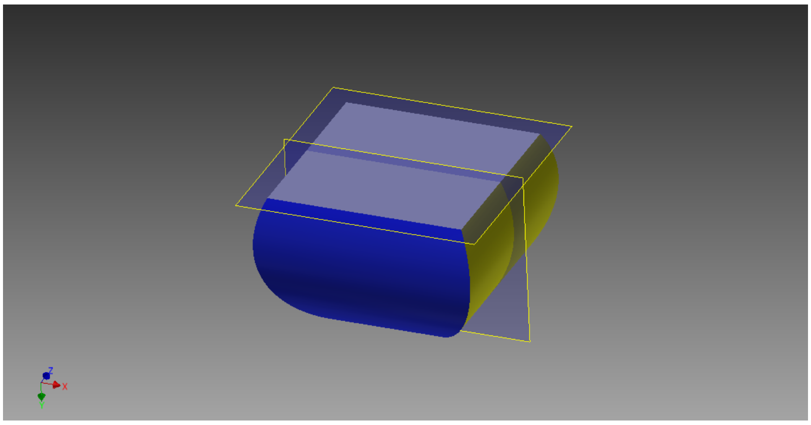

Figura 26: Plano vertical que contém o eixo do sólido da figura 25. Esse sólido ficará dividido ao meio

Para a realização dos cálculos, considere a figura 28, onde apresentamos a vista frontal

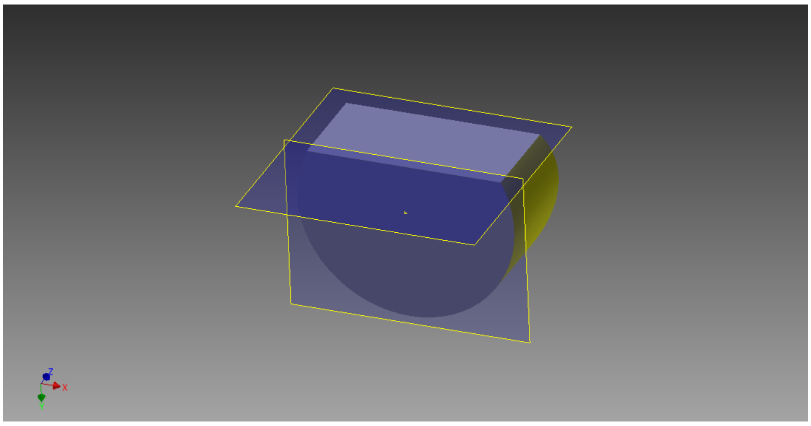

Figura 27: Seção obtida pelo plano vertical que contém o eixo desse sólido

do sólido representado na figura 27.

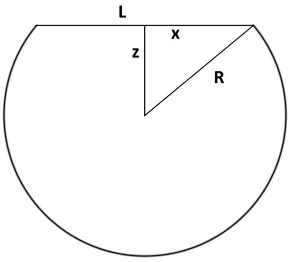

Figura 28: Vista frontal

Nessa figura podemos considerar um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede R e catetos sendo x e z. Observe que L, o lado do quadrado é dado por $L = 2x$. Determine o valor de x em função de z e R e depois, determine a fórmula que expressa a área desse quadrado.

5.7.4 Seções no Sólido S_2

Abra o arquivo SECOESNOS2.ggb, arraste o *controle deslizante h* e verifique as seções que são obtidas no sólido S_2. Responda os itens seguintes:

- Como podemos calcular a área de cada uma dessas seções?
- Qual é a altura do sólido S_2? Justifique.
- Qual é a altura de cada um dos buracos em forma de pirâmide que foram feitos no cubo maciço? Justifique.

- Considere que S_1 e S_2 estão colocados um ao lado do outro. O plano que dista z dos centros desses dois sólidos determina em S_2 uma seção que possui mesma área da seção obtida em S_1. Você já determinou a fórmula para o cálculo da área das seções quadradas no sólido S_1. Agora, determine a fórmula para o cálculo das áreas na seções obtidas no sólido S_2 e compare os resultados. O que você poderá dizer em relação aos volumes desses dois sólidos?

- Determine a fórmula que nos permite calcular o volume do sólido S_1.

6 COMENTÁRIOS SOBRE AS ATIVIDADES

Neste capítulo, apresentamos alguns comentários que se referem às atividades propostas. Para cada atividade descrevemos os seus objetivos, materiais necessários para sua realização, tempo previsto, pré-requisitos e algumas dificuldades que fazem parte do seu contexto. Apresentamos também algumas recomendações metodológicas para a orientação do professor. Essas recomendações devem ser entendidas como sugestões e não como regras definitivas. Acreditamos que, ao desenvolver esse trabalho com os alunos, o professor deverá ter o bom senso e, caso seja necessário poderá fazer as adaptações de acordo com os alunos, com os quais está trabalhando, ou até mesmo em relação à estrutura física da escola.

6.1 ATIVIDADE 1: UTILIZANDO UMA BALANÇA PARA DETERMINAR O VOLUME DE ALGUNS SÓLIDOS

6.1.1 Objetivos

Nessa atividade, consideramos que já é do conhecimento dos alunos a maneira de se calcular o volume de blocos retangulares. Foi feito um breve comentário sobre esse assunto, somente com o intuito de retomar algumas ideias. Ao término da atividade, esperamos que os alunos tenham ampliado seus conceitos em relação ao volume de sólidos, densidade, massa específica, cálculo de volumes, utilização de balanças e que percebam a necessidade de aprenderem métodos de cálculo indireto de volumes.

6.1.2 Materiais Necessários

Para a realização dessa atividade serão necessários os seguintes materiais e recursos:

- Uma balança de precisão, com graduação de pelo menos 1 g.
- Réguas graduadas.
- Livros de Física e/ou Química (que contenham as definições de massa específica de um material e densidade de um corpo) , computadores com acesso à internet.
- Kits contendo sólidos maciços, fabricados com um mesmo tipo de aço, sendo que cada kit deverá conter: um cubo com 1 cm de aresta, um bloco retangular de dimensões 2 cm x 3cm x 5 cm, um cilindro com raio da base igual a 3 cm e altura com 4 cm, um cone circular com raio da base de 3 cm por 4 cm de altura e uma esfera com raio de 2 cm.
- Lápis, borracha e papel.

6.1.3 Tempo Previsto

O tempo previsto para a realização dessa atividade é de uma aula (aproximadamente 50 min).

6.1.4 Pré-requisitos

Para o desenvolvimento dessa atividade, os alunos deverão ter conhecimentos sobre razão, proporção, cálculos com números decimais e cálculo de volumes de blocos retangulares.

6.1.5 Recomendações Metodológicas

Para a realização desse trabalho, sugerimos que os alunos sejam divididos em grupos. A definição da quantidade de alunos por grupo, deixamos a critério do professor, já que isso depende do número de kits disponíveis. O professor deverá entregar a cada grupo, uma cópia da atividade e um kit.

Os alunos deverão ler toda a atividade e responder os itens propostos. Apresentamos textos claros e roteiros que permitem os alunos terem uma percepção lógica dos conhecimentos desenvolvidos. Os conceitos de densidade e massa específica deverão ser discutidos pelo professor com os alunos, após a pesquisa realizada por eles. Em relação ao cálculo de volume utilizando o conceito de densidade, sugerimos que o professor verifique se os grupos o realizou de maneira satisfatória, e caso algum grupo não tenha conseguido, o professor poderá pedir para que alguém de outro grupo explique as ideias para o restante da turma. Caso seja necessário, o professor deverá explicar esses conceitos para os alunos.

É importante que seja discutido, com os alunos, a necessidade de métodos indiretos de se calcular o volume de sólidos geométricos, o que poderá ser feito com o auxílio dos exercícios finais da atividade.

6.1.6 Algumas Dificuldades

Os kits poderão ser adquiridos em oficinas de usinagem mecânica. Talvez apareça alguma dificuldade, devido à disponibilidade financeira da escola para adquiri-los, por isso deixamos a critério do professor a escolha da quantidade de alunos por grupo, já que esse número dependerá da quantidade de kits disponíveis.

Em um dos exercícios pedimos para que os alunos calculem o volume de um bloco retangular, utilizando as suas dimensões, e no final, pedimos para que eles verifiquem que o volume obtido nesse cálculo é o mesmo que o obtido pelo método exposto na atividade. Queremos salientar que os sólidos utilizados são feitos de aço e sabemos que na fabricação dos mesmos, por normas técnicas, são aceitas tolerâncias nas suas dimensões, o que pode implicar em alguma diferença no resultado dessas duas maneiras de determinar o volume desse bloco retangular. Caso haja essa diferença, pedimos que o professor procure explicar aos alunos, possíveis fatores que influenciaram no resultado: homogeneidade do aço, dimensões, procedimentos incorretos. Acreditamos que essa atividade, apesar das possíveis dificuldades, acrescentam para o desenvolvimento matemático e também de conceitos físicos que fazem parte do nosso contexto diário.

6.2 ATIVIDADE 2: INTRODUZINDO O PRINCÍPIO DE CAVALIERI

6.2.1 Objetivos

Nessa atividade queremos despertar a intuição dos alunos para que eles possam perceber a validade do Princípio de Cavalieri (queremos que eles aceitem o princípio como axioma). Para isso, desenvolvemos uma atividade com material concreto (sólidos de aço fatiados e a balança). Essa atividade foi baseada e adaptada de [12]. Esperamos que eles percebam que se dois sólidos têm mesma altura, e que as áreas de seções correspondentes têm razão constante, então, os volumes desses sólidos apresentam essa mesma razão. Os sólidos constituídos por folhas de papel também ajudarão no desenvolvimento dessa intuição. Com o auxílio do software de Geometria Dinâmica *GeoGebra 5.0 JOGL1 Beta*, esperamos que os alunos desenvolvam a ideia de que os sólidos são constituído por infinitas seções paralelas (Cavalieri as chamava de indivisíveis), o que poderá facilitar no entendimento de como deve ser feita a aplicação desse princípio. Como aplicação, apresentamos um exemplo resolvido, como é feito em livros didáticos (a única atividade onde os alunos não irão demonstrar a fórmula). Com esse exemplo, os alunos irão ver a dedução da fórmula para o cálculo do volume de um prisma qualquer, e esperamos que eles percebam que a aplicação do princípio se baseia no cálculo de áreas. Em seguida, propomos uma atividade para que eles demonstrem a fórmula do volume de um cilindro reto. Finalmente, pedimos para que os alunos percebam e justifiquem o fato de que o volume de um cilindro oblíquo é obtido pela mesma fórmula do volume de um cilindro reto, utilizando novamente o Princípio de Cavalieri.

6.2.2 Materiais Necessários

Para a realização dessa atividade serão necessários os seguintes materiais e recursos:

- Uma balança de precisão com graduação de pelo menos 1 g.
- Réguas graduadas
- Compassos.
- Três sólidos com mesma altura: Uma pirâmide A de base quadrada, uma pirâmide B, também de base quadrada, cuja área da base seja o dobro da área da base da pirâmide A e um cone com área da base igual à área da base da pirâmide A. Esses três sólidos deverão ser fabricados com um mesmo tipo de aço e deverão ser serrados em fatias obtidas a partir de alturas iguais, em relação à suas respectivas bases. A quantidade de fatias fica a critério do professor.
- Computadores que possuem o software *Geogebra 5.0 JOGL1 Beta 3D.*
- O arquivo eletrônico PRINCIPIODECAVALIERI.ggb.

6.2.3 Tempo Previsto

O tempo previsto para a realização dessa atividade é de duas aulas (cada uma com duração de aproximadamente 50 min). Na primeira aula, sugerimos que seja feita a atividade com os sólidos de aço e na segunda aula, o restante da atividade (a partir dos sólidos formados por papéis empilhados).

6.2.4 Pré-requisitos

Os alunos deverão conhecer as definições e classificações de cones e pirâmides. Deverão ter conhecimento sobre o cálculo de áreas de quadrados e círculos.

6.2.5 Recomendações Metodológicas

Essa atividade deverá ser realizada em grupos. Sugerimos que a quantidade de grupos seja definida pela quantidade de fatias em que foram serrados os sólidos. Parte das recomendações metodológicas está exposta no início do próprio texto da atividade.

Todas as etapas deverão ter acompanhamento por parte do professor, principalmente no cálculo de áreas das seções. O professor deverá apresentar aos alunos um método para determinar o centro de um círculo, o qual foi descrito na atividade. Ao longo desses cálculos faz-se necessário que o professor verifique se os alunos estão encontrando as razões corretas entre as áreas das seções. Essas atividades iniciais, com sólidos de aço, deverão ser desenvolvidas em uma aula.

Na aula seguinte, o professor deverá entregar a cada grupo, material impresso (a partir dos sólidos feitos de papel). Os alunos deverão ler o material e tentar responder às questões propostas. Sugerimos que o professor, caso julgue necessário, apresente outros exemplos que trabalham a intuição em relação ao Princípio de Cavalieri. Sugerimos por exemplo: dois sólidos diferentes formados por pilhas de CD's (com a mesma quantidade de CD's). Após o desenvolvimento dessa intuição, o professor poderá explicar aos alunos, uma aplicação do Princípio de Cavalieri, utilizando o exemplo que apresentamos na atividade. Deverá ficar claro para eles que, aplicar o Princípio de Cavalieri, basicamente é comparar áreas de seções em sólidos.

Ao aplicar o Princípio de Cavalieri, no cálculo do volume de um cilindro, esperamos que os alunos percebam que o volume desse sólido também será dado pela fórmula $V =$ *(área da base).(altura)*. O professor deverá instigá-los a perceber que no caso do cilindro, essa fórmula poderá ser reescrita como: $V = \pi.r^2.h$, onde r é o raio da base do cilindro e h sua altura.

6.2.6 Algumas Dificuldades

Os sólidos deverão ser obtidos em indústrias de usinagem e deverão ser fabricados e fatiados com o máximo de precisão possível. Os alunos podem apresentar dificuldades em relação à determinação das áreas circulares, e por isso, o professor deverá acompanhar os grupos e levá-los a concluir de maneira correta as relações entre as áreas das fatias dos sólidos. Pelo fato de ser uma atividade mais experimental, e que dependa por exemplo da homogeneidade do aço, acreditamos que o professor deverá conversar com os alunos sobre possíveis diferenças nas conclusões, mas que no final, eles percebam a relação entre os volumes dos três sólidos (Esses problemas, possivelmente já tenham sido discutidos na atividade anterior).

6.3 ATIVIDADE 3: CÁLCULO DO VOLUME DE UMA PIRÂMIDE QUALQUER

6.3.1 Objetivos

Após a realização dessa atividade, esperamos que os alunos aprendam a fórmula para o cálculo do volume de uma pirâmide qualquer e de um cone. Podemos dizer que um grande diferencial dessa atividade em relação ao que é apresentado em livros didáticos é a utilização do software de Geometria Dinâmica *GeoGebra 5.0 JOGL1 Beta 3D*. Devido as diversas dificuldades que os alunos apresentam na visualização de objetos em três dimensões, criamos animações que permitem a eles uma melhor visualização das situações. Nos livros didáticos, as figuras são estáticas e acreditamos que a demonstração do cálculo do volume de uma pirâmide triangular pela decomposição de um prisma, fica mais suave e interessante quando os alunos têm a oportunidade de verificar sob vários ângulos, o sólido em questão. Nessa atividade, o aluno irá construir alguns segmentos e interagir com o software. O exercício em que o aluno irá demonstrar que pirâmides com bases de áreas iguais e mesma altura, têm volumes iguais, apresenta uma animação em que o próprio aluno deverá arrastar o controle deslizante e verificar que as seções obtidas nas duas pirâmides, têm áreas iguais para qualquer plano paralelo ao plano da base. Depois irão fazer a demonstração desse fato utilizando as propriedades apresentadas. Em relação a essas propriedades que foram somente citadas na atividade, apresentamos uma demonstração na subseção 6.3.5 (Recomendações metodológicas).

6.3.2 Materiais Necessários

Para a realização dessa atividade serão necessários os seguintes materiais e recursos:

- Computadores que possuam o software *GeoGebra 5.0 JOGL1 Beta 3D*.
- Os arquivos eletrônicos: PIRAMIDESMESMOVOLUME.ggb e PRISMATRIANGULAR.ggb

6.3.3 Tempo Previsto

O tempo previsto para a realização dessa atividade é de aproximadamente uma aula (50 min). Caso o professor opte em apresentar as demonstrações apresentadas na subseção 6.3.5, esse tempo irá aumentar para duas aulas.

6.3.4 Pré-requisitos

Nessa atividade, os alunos irão aplicar conhecimentos de geometria plana como: figuras planas semelhantes, razão entre as áreas de polígonos semelhantes, teorema de Thales, cálculo de áreas de círculos, teorema de Pitágoras e paralelismo. Também terão que utilizar conhecimentos das propriedades dos prismas e o volume de um prisma triangular.

6.3.5 Recomendações Metodológicas

Essa sequência de atividades deverá preferencialmente, ser resolvida, individualmente pelos alunos. Caso seja necessário, o professor poderá organizar os alunos em grupos, ficando a critério do professor a escolha da quantidade de alunos por grupo. Em relação a utilização do Software Geogebra, acreditamos que o professor deverá dar algumas instruções aos alunos, mas as atividades propostas não exigem conhecimentos aprofundados sobre esse software. Esse software será utilizado para realizar algumas construções básicas além de manipulações das figuras.

Cada aluno ou grupo deverá receber o material referente à atividade, impresso, ou até mesmo por meio eletrônico. O professor deverá acompanhar de perto as conclusões dos alunos e após o término da aula, deverá discutir com eles sobre as conclusões que chegaram.

Deverá ficar claro para esses alunos que o volume de uma pirâmide qualquer, será dado por um terço do produto da área da sua base pela altura. Os alunos deverão perceber que essa relação também vale para os cones, mas que podemos nesse caso, escrevê-la através da fórmula $V = \frac{\pi.r^2.h}{3}$

Apresentamos a seguir uma possibilidade de demonstração das duas propriedades que enunciamos no início desta atividade (páginas 34 e 35), sobre pirâmides. Como sequência metodológica, acreditamos que o professor, caso venha a realizar essa demonstração, deverá fazê-la na aula anterior a realização dessa atividade. Inicialmente, demonstramos qual é a razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes, depois estendemos para o caso de polígonos convexos semelhantes, e finalmente, demonstramos as propriedades enunciadas, em relação às pirâmides.

Teorema 6.1. A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Demonstração. Sejam T_1 e T_2, dois triângulos semelhantes. Veja a figura 29.

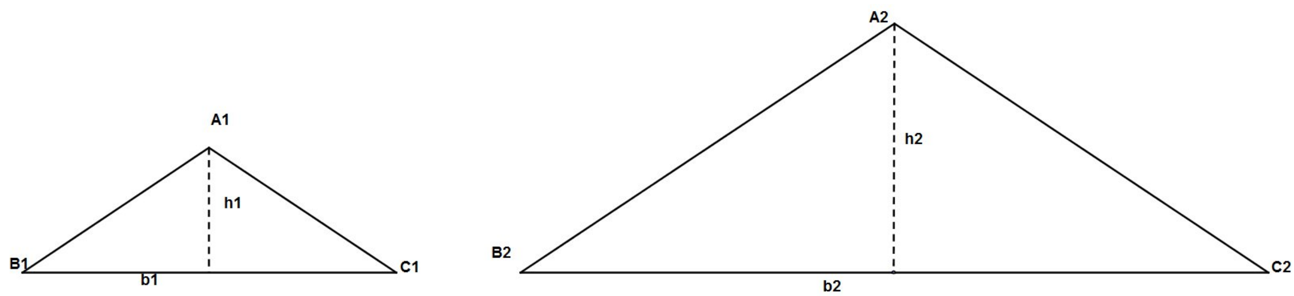

Figura 29: Triângulos semelhantes

Seja S(T_1)=S_1(Área do triângulo T_1) e S(T_2)=S_2 (Área do triângulo T_2).

Sabendo que $T_1 \sim T_2$, podemos escrever que a razão entre as bases desses triângulos e a razão entre suas respectivas alturas é igual a uma constante k.

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{h_1}{h_2} = k$$

A razão entre as áreas desses triângulos pode ser escrita como:

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{b_1 h_1}{2}}{\frac{b_2 h_2}{2}}$. Considerando que $b_1 = k.b_2$ e $h_1 = k.h_2$, teremos que:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{k.b_2.k.h_2}{2}}{\frac{b_2h_2}{2}}, \text{ logo } \frac{S_1}{S_2} = k^2$$

□

Essa demonstração foi adaptada de [10].

Teorema 6.2. A razão entre as áreas de dois polígonos convexos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Demonstração. Sejam dois polígonos convexos e semelhantes que possuem n lados. Cada um desses dois polígonos pode ser dividido em *(n-2)* triângulos (ver figura 30).

Seja a Área do polígono $A_1A_2....A_{n-1}A_n = S_1$ e a Área do polígono $B_1B_2....B_{n-1}B_n = S_2$.

Considere cada um dos triângulos em que foram divididos esses polígonos e denomine t_1 = área $\triangle A_1A_2A_3$, t_2 = área $\triangle A_1A_3A_4$, ..., t_{n-2} = área $\triangle A_1A_{n-1}A_n$ e T_1 = área $\triangle B_1B_2B_3$, T_2 = área $\triangle B_1B_3B_4$, ... ,T_{n-2} = área $\triangle B_1B_{n-1}B_n$.

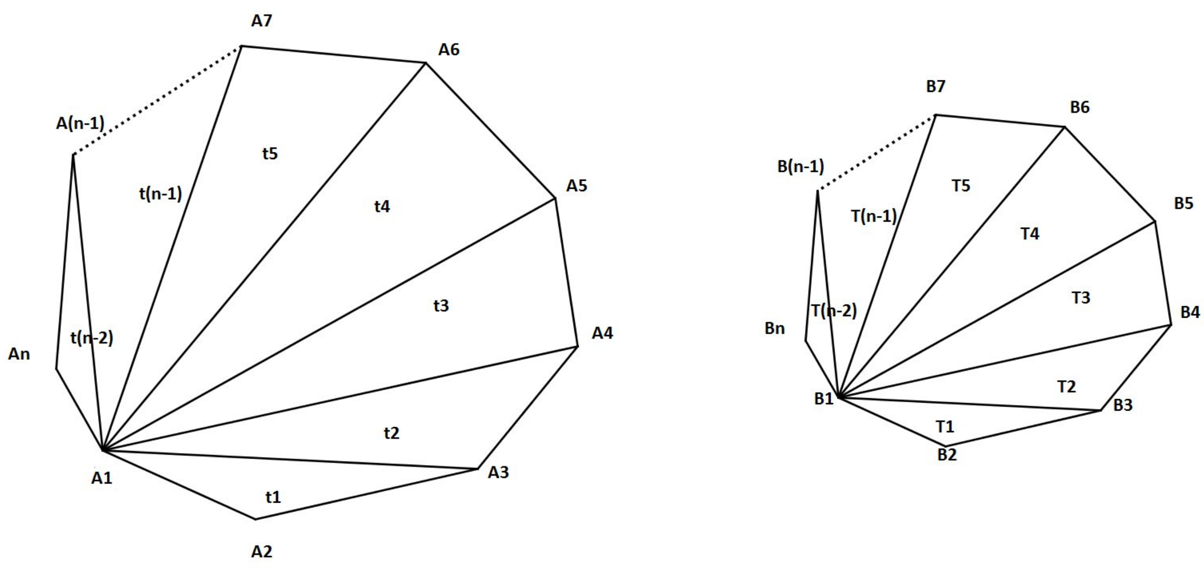

Figura 30: Polígonos semelhantes com n lados

Então podemos escrever:

$S_1 = t_1 + t_2 + ... + t_{n-2}$ e $S_2 = T_1 + T_2 + ... + T_{n-2}$.

Pela hipótese temos que:

$A_1A_2....A_{n-1}A_n \sim B_1B_2....B_{n-1}B_n$, do que decorre que $\triangle A_1A_2A_3 \sim \triangle B_1B_2B_3$; $\triangle A_1A_3A_4 \sim \triangle B_1B_3B_4$ .... e $\triangle A_1A_{n-1}A_n \sim \triangle B_1B_{n-1}B_n$.

Pelo teorema 6.1 podemos escrever que:

$\frac{t_i}{T_i} = k^2 \Leftrightarrow t_i = k^2.T_i$, para i=*1,2,3,4,.....,n-2*.

Considere a razão:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{t_1 + t_2 + ... + t_{n-2}}{T_1 + T_2 + ... + T_{n-2}}$$

Podemos reescrevê-la como:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{k^2.T_1 + k^2.T_2 + ... + k^2.T_{n-2}}{T_1 + T_2 + ... + T_{n-2}}, \text{ logo } \frac{S_1}{S_2} = k^2$$

□

Essa demonstração foi adaptada de [4].

Seções Paralelas à Base de Uma Pirâmide

Teorema 6.3. Consideremos uma pirâmide de altura H, cuja base é o polígono $A_1A_2A_3....A_n$ e vértice V. Um plano paralelo ao plano da base a uma distância h do vértice V, determina nessa pirâmide uma seção que é o polígono $B_1B_2B_3....B_n$. Obtemos assim uma nova pirâmide $VB_1B_2B_3....B_n$ (Veja a figura 31):

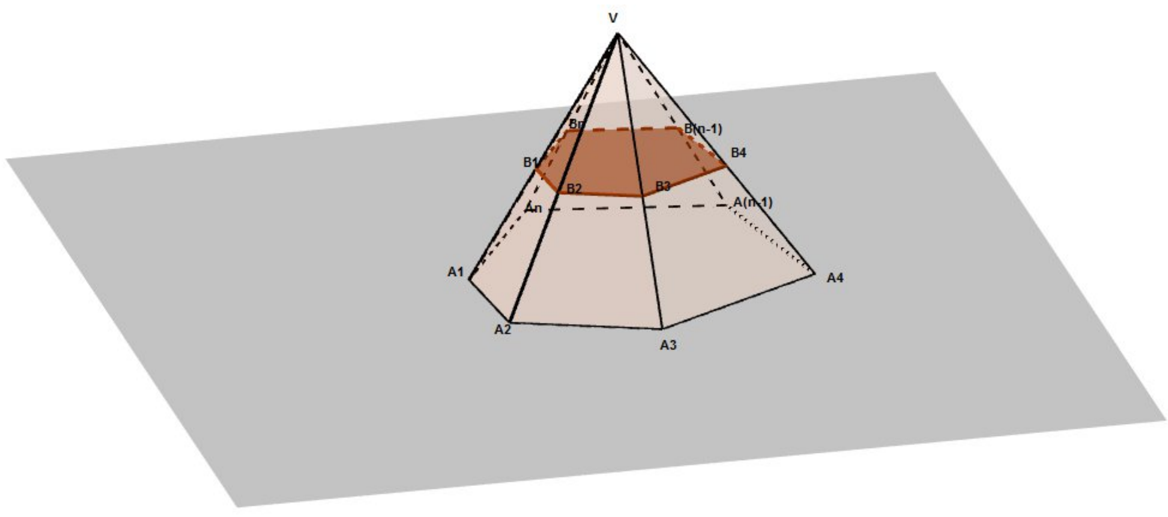

Figura 31: Pirâmide seccionada por um plano a uma distância h do seu vértice V

Dessa situação, vamos considerar os seguintes fatos que serão demonstrados, em seguida:

1. A seção obtida e a base dessa pirâmide são semelhantes com razão de semelhança igual a $\frac{h}{H}$.
2. A razão entre a área da seção e a área da base é igual ao quadrado dessa razão de semelhança.

Demonstração. ***Inicialmente demonstraremos que a seção e a base são semelhantes.***

Temos que os ângulos correspondentes dos polígonos da seção $B_1B_2B_3....B_n$ e da base $A_1A_2A_3....A_n$ são congruentes, pois têm lados respectivamente paralelos.

Devemos agora, mostrar que a razão entre os lados correspondentes desses polígonos é constante. Considere por exemplo a face VA_1A_2. O segmento $\overline{B_1B_2}$ é paralelo ao segmento $\overline{A_1A_2}$, então temos que $\triangle$ V$A_1A_2 \sim \triangle\ VB_1B_2$. Dessa semelhança temos:

$$\frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{\overline{VB_1}}{\overline{VA_1}} = \frac{\overline{VB_2}}{\overline{VA_2}} = k \text{ (constante).}$$

Aplicando o mesmo raciocínio nas outras faces da pirâmide, concluiremos que as arestas correspondentes dessas pirâmides têm razão de semelhança igual a k. Como os lados dos polígonos da seção e da face têm mesma razão e eles possuem ângulos correspondentes congruentes, podemos afirmar que $A_1A_2A_3....A_n \sim B_1B_2B_3....B_n$.

Agora nos resta demonstrar que a razão de semelhança entre esses dois polígonos é igual a $\boldsymbol{\frac{h}{H}}$. Vamos verificar que as arestas laterais e a altura ficam divididas na mesma razão.

Veja a figura 32:

Temos que $\overline{B_1h'}$ e $\overline{A_1H'}$ são paralelos, pois são obtidos pela interseção de planos paralelos com um terceiro plano, logo $\triangle VB_1h' \sim \triangle VA_1H'$.

Logo, $\frac{\overline{VB_1}}{\overline{VA_1}} = \frac{h}{H}$.

Podemos verificar tal fato para todas as arestas correspondentes das pirâmides, logo a razão entre os lados correspondentes dos polígonos $A_1A_2A_3....A_n$ e $B_1B_2B_3....B_n$ é igual a $\frac{h}{H}$. Com base no teorema 6.2 concluiremos que a razão entre as áreas desses dois polígonos é igual a $(\frac{h}{H})^2$. $\square$

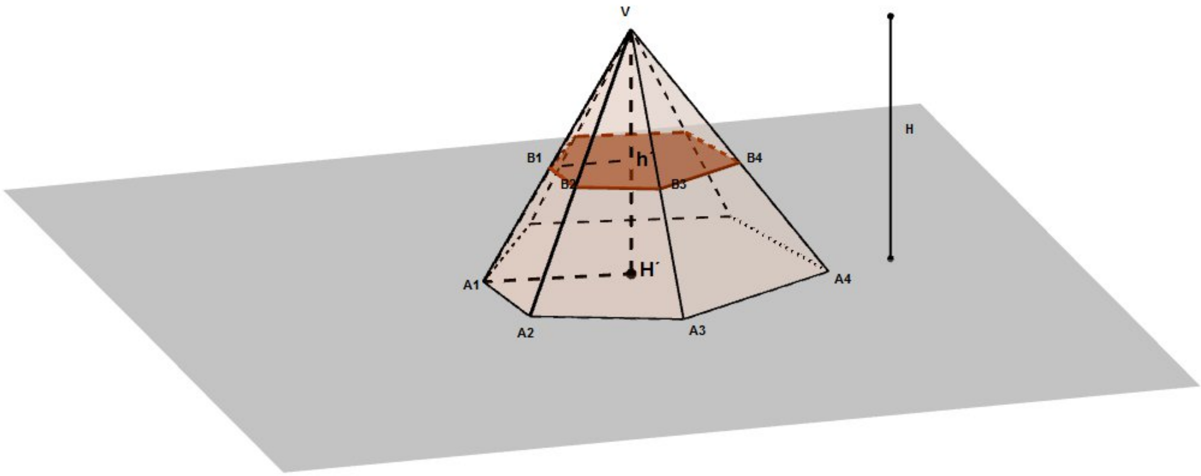

Figura 32: Seção obtida em uma pirâmide de altura H (segmento $\overline{VH'}$) , por um plano paralelo ao plano da base e que dista h do vértice V

Sobre a propriedade dos cones, não demonstramos, haja visto que a demonstração é consideravelmente simples e pode ser facilmente encontrada em livros destinados ao Ensino Médio.

Para uma leitura interessante sobre esses tópicos sugerimos [9].

6.3.6 Algumas Dificuldades

A quantidade de computadores disponíveis para a realização dessa atividade, pode ser um dificultador, sugerimos que o professor faça a adaptação, organizando os alunos em grupos, de acordo com as necessidades apresentadas. O material deverá ser entregue impresso, aos alunos. Caso não seja possível tirar xerox colorido, o material poderá ser utilizado por meio de arquivo eletrônico.

6.4 ATIVIDADE 4: O VOLUME DA ESFERA

6.4.1 Objetivos

Com essa atividade, os alunos irão trabalhar mais uma aplicação do Princípio de Cavalieri. Esperamos que eles demonstrem a fórmula que nos permite calcular o volume de uma esfera. Devido às dificuldades de visualização de objetos 3D, por parte dos alunos, utilizamos animações, novamente com o Geogebra, que substitui, de forma muito eficiente, a utilização de materiais concretos. Os livros didáticos destinados ao Ensino

Médio apresentam essa demonstração pronta para os alunos, e em muitos casos, o aluno faz uma breve leitura dessa demonstração, preocupado somente em decorar a fórmula. Nessa atividade, os alunos serão sujeitos ativos na construção do conhecimento, sendo levados a deduzir fórmulas, fazendo a interpretação de textos e atividades propostas. As animações de objetos tridimensionais permitirão, aos alunos, uma melhor visualização das situações. Acreditamos que essa atividade irá contribuir muito para o desenvolvimento do raciocínio espacial desses alunos.

6.4.2 Materiais Necessários

Para a realização dessa atividade serão necessários:

- Computadores que tenham instalados o software *GeoGebra 5.0 JOGL1 Beta 3D.*
- Os arquivos eletrônicos: ESFERA.ggb e ESFERASECILINDROCOMCONES.ggb.

6.4.3 Tempo Previsto

Uma aula de 50 min é o tempo estimado para a realização dessa atividade.

6.4.4 Pré-requisitos

Nessa atividade, os alunos irão aplicar conhecimentos de geometria plana, como: cálculo de área de um círculo, de uma coroa circular, propriedades dos triângulos isósceles, teorema de Pitágoras e conhecimentos sobre o cálculo dos volumes de cilindros e cones.

6.4.5 Recomendações Metodológicas

Essa atividade deverá ser realizada individualmente, pelos alunos. Deverá ser desenvolvida em uma sala de informática (caso não haja um computador por aluno, o professor poderá colocar os alunos em duplas, ou até mesmo em grupos). Cada aluno deverá receber uma cópia impressa ou por meio eletrônico da atividade. Como primeiro exercício, o aluno irá visualizar através do software Geogebra, uma esfera, sendo seccionada por um plano horizontal. Ele poderá fazer a animação do sólido e perceber que as seções obtidas na esfera pelo plano são circulares e que suas áreas dependem da distância em que o plano se encontra do seu centro. Após essa visualização pedimos ao aluno, que escreva a área da seção circular, em função do raio da esfera e da distância da seção ao centro da mesma.

Em seguida, apresentamos o sólido que será utilizado para se determinar o volume da esfera. Com uma animação tridimensional, os alunos irão perceber o formato das seções obtidas por planos horizontais nesse sólido. Em seguida os alunos são levados a concluir que, essas seções têm áreas iguais às seções correspondentes que são obtidas na esfera, e com isso, concluirão que a esfera e esse sólido têm o mesmo volume, permitindo assim que eles encontrem a fórmula para o volume de uma esfera $V = \dfrac{4.\pi.R^3}{3}$.

Alguns resultados que deverão ser encontrados pelos alunos.

Na esfera de raio *R*:

- O raio da seção $r = \sqrt{R^2 - h^2}$
- Área da seção circular $A = \pi.(R^2 - h^2)$

No sólido S

- As áreas das seções nesse sólido serão iguais às áreas das seções correspondentes na esfera.

6.4.6 Algumas Dificuldades

De maneira geral, os alunos apresentam dificuldades na visualização do sólido S. Esperamos que as animações e figuras criadas nessa atividade facilitem essa visualização. O professor deverá reforçar o que realmente representa o sólido S.

Alguns alunos poderão apresentar dificuldades para verificar que no sólido S, o raio menor da coroa circular da seção é igual a distância h do plano ao centro desse sólido. Sugerimos que o professor faça intervenções esclarecendo essas situações aos alunos.

6.5 ATIVIDADE 5: UM CÁLCULO DE VOLUME INTERESSANTE

6.5.1 Objetivos

Os livros didáticos, destinados aos alunos do Ensino Médio, trazem como exemplos resolvidos o cálculo de volume de prismas, cilindros, cones, esferas e pirâmides. Com essa atividade, pretendemos apresentar aos alunos, um sólido diferente do que aparece em livros didáticos e que fornece um belo exemplo de aplicação do Princípio de Cavalieri. Através de um roteiro o aluno será levado a deduzir a fórmula para o cálculo do volume desse sólido. Acreditamos que essa atividade irá ajudar os alunos no desenvolvimento do seu raciocínio espacial. As figuras apresentadas irão ajudá-los na visualização e demonstração do volume do toro. Elas foram criadas com o auxílio do software Geogebra e do software Autodesk Inventor Professional - 2013 (Versão para estudante) ver [15]. Lembramos que essa atividade foi elaborada e adaptada do exercício 23 (páginas 114 e 115) de [9]. Fizemos uma adaptação dessa atividade criando um roteiro que permitirá ao aluno do Ensino Médio realizá-la de maneira satisfatória.

6.5.2 Materiais Necessários

Para a realização dessa atividade, não será necessário nenhum tipo de material específico, além de lápis, borracha e papel.

6.5.3 Tempo Previsto

Essa atividade poderá ser realizada em uma aula, com duração de 50 min.

6.5.4 Pré-requisitos

Nessa atividade os alunos irão aplicar conhecimentos de geometria plana como: cálculo de área de uma coroa circular, área de um retângulo, teorema de Pitágoras e conhecimentos sobre o cálculo de volumes de cilindros.

6.5.5 Recomendações Metodológicas

Essa atividade deverá ser realizada individualmente, pelos alunos, ou até mesmo em duplas. O professor deverá entregar aos alunos as folhas contendo os exercícios. Eles deverão fazer a leitura completa da atividade, antes mesmo de possíveis intervenções por parte do professor.

Inicialmente, os alunos irão visualizar o que é um toro e como podemos obter esse sólido. Depois, através de um roteiro, irão verificar que as áreas das seções do toro e do cilindro na horizontal, obtidas por planos horizontais são iguais. Utilizando o Princípio de Cavalieri, os alunos irão concluir que os volumes desses dois sólidos são iguais, ou seja, a fórmula para o cálculo do volume do toro será igual à fórmula para o cálculo do volume do cilindro considerado.

Sugerimos que a cada etapa dessa atividade, o professor procure conversar com a turma, verificando as conclusões de cada aluno e, caso seja necessário, o professor deverá fazer intervenções.

Seguem alguns resultados que deverão ser obtidos pelos alunos:

No toro:

- O valor de x, em função de a e h.

$$x = \sqrt{a^2 - h^2}$$

- O raio interno r e o raio externo R da coroa circular (seção horizontal no toro).

$$r = b - \sqrt{a^2 - h^2} \text{ e } R = b + \sqrt{a^2 - h^2}$$

- A área da coroa circular.

$$A_c = 4.\pi.b.\sqrt{a^2 - h^2}$$

No cilindro:

- O valor de y, em função de a e h .

$$y = \sqrt{a^2 - h^2}$$

- A área do retângulo (seção horizontal no cilindro)

$$A_r = 4.\pi.b.\sqrt{a^2 - h^2}$$

- ***O volume do toro*** $V = 2.\pi^2.a^2.b$

6.5.6 Algumas Dificuldades

Acreditamos, que de maneira geral, os alunos podem apresentar dificuldades ao escrever as áreas das seções do toro e do cilindro, em função das outras dimensões consideradas nesses sólidos (ver proposta de atividade), pensando nisso, construímos um roteiro e figuras que poderão auxiliá-los nessa tarefa.

6.6 ATIVIDADE 6: FURANDO UMA ESFERA

6.6.1 Objetivos

Com essa atividade esperamos que os alunos apliquem seus conhecimentos sobre o Princípio de Cavalieri. Através de uma situação diferente do que aparecem nos livros didáticos, destinados ao Ensino Médio, levamos os alunos a trabalhar novamente com conceitos elementares de geometria plana, e também estimulamos o desenvolvimento do raciocínio espacial deles. Esperamos que eles percebam que nessa situação, uma análise precipitada pode levá-los ao cálculo errôneo do volume do sólido em questão (o volume da esfera com furo cilíndrico não é calculado retirando-se da esfera o volume de um cilindro). Queremos também, oportunizar aos estudantes, situações em que irão trabalhar, com vistas e seções de objetos, contribuindo para o enriquecimento e desenvolvimento da abstração que, de maneira geral, a Matemática nos exige.

6.6.2 Materiais Necessários

Para a realização dessa atividade serão necessários computadores que tenham instalados o software GeoGebra 5.0 JOGL1 Beta 3D e arquivo ESFERACOMFURO.ggb.

6.6.3 Tempo Previsto

Acreditamos que uma aula de 50 min é tempo suficiente para a realização dessa atividade.

6.6.4 Pré-requisitos

Nessa atividade, os alunos irão aplicar conhecimentos de geometria plana como: cálculo de área de um círculo, de uma coroa circular, teorema de Pitágoras, conhecimentos sobre o cálculo do volume de uma esfera, Princípio de Cavalieri, vistas e seções de objetos.

6.6.5 Recomendações Metodológicas

Essa atividade deverá ser realizada, individualmente, pelos alunos. Cada aluno deverá receber uma cópia da atividade impressa ou por meio eletrônico. Apresentamos um roteiro com conceitos e propostas para que o aluno construa conhecimentos, no decorrer da aula.

Como primeiro exercício o professor deverá apresentar para a turma a situação que será trabalhada na atividade. Os alunos deverão discutir sobre ela e observar que o volume do sólido não será obtido simplesmente pela subtração do volume de um cilindro da esfera. O arquivo ESFERACOMFURO.ggb, deverá ser aberto pelos alunos, que irão perceber que além do furo cilíndrico foram retiradas duas calotas esféricas (o cálculo do volume de calotas esféricas não é do conhecimento desses alunos). Após essas reflexões iniciais, sugerimos que o professor proponha aos alunos o exercício em que eles irão determinar a altura do furo cilíndrico em função do seu raio r e do raio R da esfera original. Nesse ponto, será necessário que haja um acompanhamento por parte do professor para que ele verifique e faça intervenções de tal maneira que os alunos encontrem, como resposta, a expressão para a altura do cilindro ($h = 2.\sqrt{R^2 - r^2}$).

Na sequência dessa atividade, os alunos irão verificar que, o sólido S tem volume igual à uma esfera cujo diâmetro é igual à altura do furo cilíndrico. Eles deverão demonstrar que as áreas das seções planas, no sólido S são iguais às áreas das seções na esfera obtidas por planos horizontais. Nessa parte da atividade, o professor deverá conferir as expressões que os alunos encontraram para o cálculo das áreas dessas seções. O valor das áreas das seções nos dois sólidos, em função do raio R da esfera original, da distância z da seção ao centro do sólido S e do raio r, do furo cilíndrico é dado por $A_s = A_e = \pi.(R^2 - z^2 - r^2)$. Finalmente, os alunos irão calcular o volume desse sólido aplicando o Princípio de Cavalieri. Uma expressão possível para esse volume é $V = \dfrac{4.\pi.(\sqrt{R^2 - r^2})^3}{3}$, que pode ser escrita como $V = \dfrac{4.\pi.(R^2 - r^2).\sqrt{R^2 - r^2}}{3}$. O professor poderá, ao final da atividade, dizer que esse cálculo de volume também poderia ter sido feito da seguinte maneira: do volume da esfera original subtraímos os volumes das duas calotas esféricas e o volume do cilindro. Nesse caso, deverá ser utilizado um cálculo de volume para o qual os alunos não conhecem a fórmula. Sugerimos como leitura para o professor [7], onde os autores deduzem a fórmula do volume de uma calota esférica, utilizando o Princípio de Cavalieri.

6.6.6 Algumas Dificuldades

De maneira geral, os alunos apresentam dificuldades na visualização desses sólidos, o que procuramos amenizar e ajudá-los nesse sentido, com figuras que são apresentadas seguidas de roteiros e propostas. Acreditamos que o professor deverá intervir nas situações que envolvem as relações das áreas.

6.7 ATIVIDADE 7: UM SÓLIDO BEM DIFERENTE

6.7.1 Objetivos

Gostaríamos de dizer que essa atividade representa algo bem diferenciado, em relação ao que é proposto em materiais destinados ao Ensino Médio e que trabalham o Princípio de Cavalieri, na dedução de fórmulas para o cálculo de volumes de sólidos geométricos. Proporcionamos aos alunos uma situação que os levará a perceber mais uma aplicação do Princípio de Cavalieri. Esse volume, a Nível Superior, é calculado através da aplicação do Cálculo Integral, mas a nível de Ensino Médio, além de apresentar um desafio para os alunos, acreditamos que eles irão desenvolver ainda mais o raciocínio espacial e também poderá ajudar, futuramente, àqueles que irão aprender o cálculo de volumes, através do Cálculo Integral. Com essa atividade, eles irão trabalhar com vários conceitos e propriedades das geometrias espacial e plana.

6.7.2 Materiais Necessários

Para a realização dessa atividade serão necessários computadores que tenham instalados o software *GeoGebra 5.0 JOGL1 Beta 3D.*

O arquivos eletrônicos:

- INTERSECAODEDOISCILINDROS.ggb
- SECOESNOS2.ggb

6.7.3 Tempo Previsto

O tempo previsto para sua realização é de uma aula (50 min).

6.7.4 Pré-requisitos

Nessa atividade, os alunos irão aplicar conhecimentos de geometria plana como: cálculo de área de quadrados, ângulos retos, semelhança de figuras planas, teorema de Pitágoras. Irão também utilizar conceitos e fórmulas em relação ao cálculo do volume de cubos, pirâmides, definições e conceitos, em relação a cilindros e esferas. Será explorada a ideia de simetria, em sólidos geométricos.

6.7.5 Recomendações Metodológicas

Essa atividade deverá ser resolvida, individualmente pelos alunos, mas caso o professor considere necessário, ele poderá organizar os alunos em grupos. Cada aluno ou grupo deverá receber uma cópia da atividade, impressa ou em arquivo eletrônico. Sugerimos que o professor trabalhe com esses alunos, em uma sala de informática.

Como em outras atividades, desenvolvemos essa com base em roteiros, explicações, ilustrações e utilização do software *GeoGebra 5.0 JOGL1 Beta 3D*, também criamos ilustrações com o software *Autodesk Inventor Professional 2013 - versão para estudante*. O professor deverá utilizá-la como roteiro para os alunos, e fazer as adaptações que julgar necessárias, de acordo com as necessidades da turma.

Inicialmente, deverá ser apresentada aos alunos a situação que será explorada, no decorrer da atividade. As figuras e o arquivo INTERSECAODEDOISCILINDROS.ggb serão importantes para essa primeira visualização. Sobre o sólido que denominamos S_1, esperamos que os alunos percebam algumas das simetrias que ele apresenta. Os alunos deverão verificar que S_1 tem altura, largura e comprimento, iguais a *2R*. Após essas discussões iniciais, que deverão ter a intervenção por parte do professor, sugerimos um exercício com perguntas para que os alunos percebam que, no interior desse sólido, podemos considerar um formato de esfera com o mesmo centro dele e com raio R. O arquivo INTERSECAODEDOISCILINDROS.ggb irá auxiliar os alunos nessa percepção. Com isso, os estudantes irão concluir que S_1 tem volume maior que o volume da esfera. Eles deverão perceber também que o volume desse sólido é menor que o volume de um cubo com arestas iguais a *2R*.

O professor deverá discutir com a turma o fato de que as seções planas, obtidas por planos horizontais no sólido S_1 são quadradas. Como argumento, acreditamos que o professor poderá utilizar o fato de que esse sólido foi obtido pela interseção de dois cilindros perpendiculares. Podemos pensar, por exemplo, em uma seção horizontal que contenha o eixo de um dos cilindros (essa seção é retangular), ao considerarmos o outro cilindro com sua seção (também horizontal e que contém o eixo do cilindro), eles perceberão que nessa interseção, a seção obtida será um quadrado e com esse raciocínio irão perceber que as outras seções paralelas a essa, também são quadradas. O arquivo INTERSECAODEDOISCILINDROS.ggb servirá como auxílio na visualização dessa situação. Os alunos deverão escrever as áreas dessas seções, em função do raio R dos cilindros, da distância z da seção ao centro do cilindro. A expressão que deverá ser encontrada para as áreas dessas seções é A $= 4.(R^2 - z^2)$.

O sólido S_2 será utilizado para demonstrar a fórmula do volume de S_1. O arquivo SECOESNOS2.ggb é uma animação, que permitirá aos alunos uma melhor visualização das seções obtidas nesse sólido, por planos horizontais. Os alunos terão que expressar as áreas dessas seções, em função de R e da distância z da seção em relação ao centro de S_2.

Sugerimos que, o professor chame a atenção dos alunos para o fato de que as áreas dessas seções podem ser obtidas da seguinte maneira: da área de um quadrado de lado $2R$, subtraímos a área de um quadrado que é a seção obtida nas pirâmides (furos feitos no cubo), pelo plano horizontal. A área desse quadrado menor, poderá ser obtida facilmente pela relação de semelhança existente entre ele e a base da pirâmide.

Aplicando o Princípio de Cavalieri, eles concluirão que o volume de S_1 é igual ao volume de S_2.

O volume do sólido S_1 será dado por $V = \dfrac{16.R^3}{3}$

6.7.6 Algumas Dificuldades

De maneira geral, os alunos apresentam dificuldades na visualização desses sólidos, o que procuramos amenizar e ajudá-los nesse sentido, com figuras que são apresentadas, seguidas de roteiros e propostas de exercícios. Animações realizadas com o Geogebra irão contribuir também, com essa visualização. Uma outra dificuldade que os alunos poderão enfrentar é perceber que podemos relacionar o lado L do quadrado, de uma seção horizontal, obtida no sólido S_1 com o raio R do cilindro e a distância z da seção ao centro do sólido. O professor deverá despertar a atenção dos alunos para o fato de que nesse caso, o formato esférico, considerado no interior desse sólido, coincide com o formato do sólido S_1, em alguns pontos. Essa situação pode ser percebida com o auxílio das figuras 33 e 34, que poderão ser apresentadas aos alunos caso o professor julgue necessário. Observe que a seção obtida é circular, pois coincide com o círculo máximo da esfera.

Uma outra situação que gostaríamos de destacar é que, algum aluno, pode querer saber sobre quais sólidos seriam obtidos nessa interseção, no caso das alturas dos cilindros serem menores do que ou iguais a seus diâmetros $h \leq 2R$.

Caso $h = 2R$, o sólido terá o mesmo formato do sólido trabalhado nessa atividade.

No caso em que $h < 2R$, apresentamos o sólido na figura 35. Observe que esse sólido, além de superfícies curvas, apresenta um formato de bloco retangular.

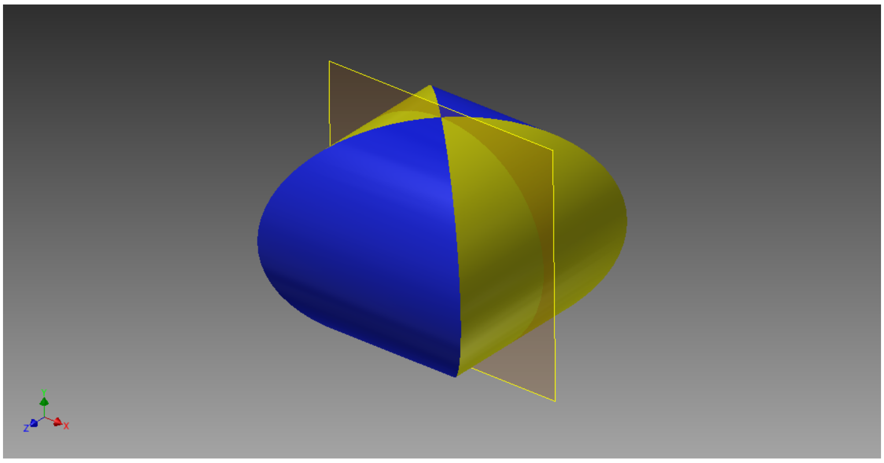

Figura 33: Plano vertical que passa pelo centro do sólido S_1

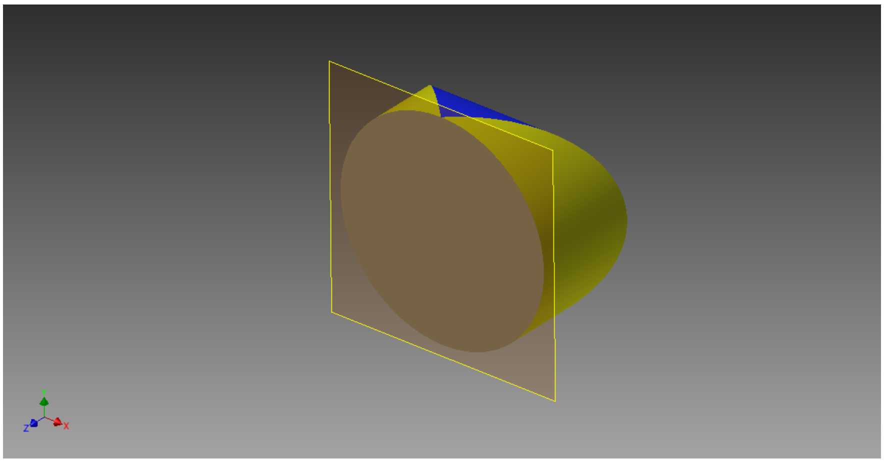

Figura 34: Seção obtida no sólido S_1, pelo plano vertical (figura 33), que contém seu eixo

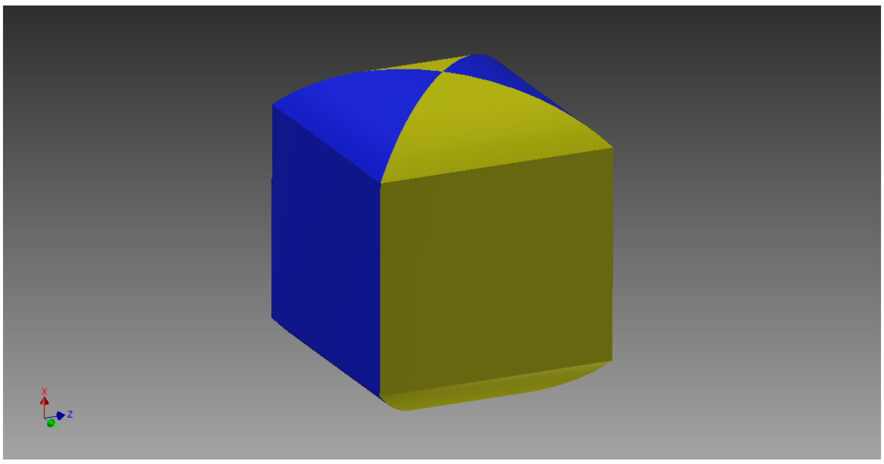

Figura 35: Sólido obtido na interseção de dois cilindros perpendiculares

CONCLUSÃO

Inicialmente, a necessidade da realização desse trabalho, com enfoque em sala de aula nos trouxe vários questionamentos: para qual nível de ensino as atividades serão criadas? Qual conteúdo abordar? Como criar situações que melhorem a questão do ensino aprendizagem do conteúdo proposto? Como fazer algo diferente que estimule nossos alunos a buscarem o conhecimento possibilitando uma maior significação na aprendizagem? Diante dessas e outras indagações decidimos trabalhar com o cálculo de volumes de sólidos geométricos utilizando o Princípio de Cavalieri, no Ensino Médio.

Sabemos que esse conteúdo apresenta algumas dificuldades e desafios para os nossos alunos, tornando-o difícil de ser ensinado. A visualização dos sólidos e a dedução das fórmulas para o cálculo de volumes é importante para o desenvolvimento de competências relacionadas ao raciocínio espacial e também para a vida prática de muitos profissionais.

Decidimos utilizar softwares para a criação de figuras e animações porque acreditamos que o uso de computadores, em sala de aula, estimula os alunos a aprender, além de facilitar o desenvolvimento do conteúdo. O uso da informática, nos permite propor alguns desafios que seriam bastante difíceis, sem o auxílio dessa ferramenta. Como exemplo, podemos citar o cálculo do volume do sólido formado na interseção de dois cilindros perpendiculares. Essa situação, além de trabalhar o conteúdo de geometria espacial, apresenta desafios que permitem aos alunos a retomada de conceitos e ideias da geometria plana. Acreditamos também, que no caso do cálculo do volume de uma pirâmide triangular, a partir da decomposição de um prisma reto, o uso de animações e construções por parte dos alunos pode facilitar o desenvolvimento do raciocínio e o entendimento da dedução da fórmula.

Ao propormos o cálculo de volumes de outros sólidos além dos tradicionais (pirâmides, cones, esferas e cilindros), buscamos proporcionar tanto para os alunos quanto para os professores, situações diferenciadas do que é encontrado em livros didáticos destinados ao Ensino Médio. Esperamos que os alunos percebam a importância do Princípio de Cavalieri, e que, ao deduzir as fórmulas para o cálculo de volumes de sólidos, possam perceber a articulação lógica entre diferentes ideias e conceitos, permitindo-os que alcancem uma maior significação na aprendizagem.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (ver [2]), nos diz que a Matemática do Ensino Médio tem um valor formativo, mas que também desempenha um papel instrumental, pois serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em atividades humanas. Pensando nas especificidades da Matemática e nas competências que devem ser desenvolvidas nos alunos, nesse nível de ensino, acreditamos que este trabalho pode contribuir e apontar em direção a esses objetivos.

Não é nossa pretensão querer substituir os livros didáticos por atividades como as que são apresentadas neste trabalho, queremos contudo, contribuir com situações que possam facilitar o desenvolvimento do conteúdo proposto, para que nossos alunos possam aprender e que tenham segurança e autonomia para buscar novos conhecimentos.

Gostaríamos também dizer que com este trabalho, os alunos irão desenvolver as fórmulas para o cálculo de volumes, mas faz-se necessário que o professor apresente aos alunos exercícios de aplicações dessas fórmulas, como é feito em livros didáticos. Esperamos que o processo de dedução das fórmulas, através de abstrações, conjecturas e outras especificidades, possa trazer para nossos alunos, uma maior maturidade e segurança em relação à aplicação das mesmas.

Finalmente, esperamos que esse trabalho seja utilizado por outros professores, sendo aplicado e desenvolvido com os alunos. Em um futuro bem próximo, acreditamos que já poderemos dizer sobre a real significação que os alunos deram ao conteúdo desenvolvido, a partir da utilização das atividades que foram propostas.

REFERÊNCIAS

[1] BOYER, C. B. **História da matemática**. Revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide - 2ª ed. - São Paulo : Blücher, 1996.

[2] BRASIL. MEC. SEF. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília, 1998.

[3] CARRIÃO, P. C.; ASSUNÇÃO R. B. **Uma queixa de Gauss: É essencial usar limites para calcular volumes?** - IV Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática , UEM, Maringá , 2003.

[4] DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana : exercícios resolvidos, exercícios propostos com resposta, testes de vestibular com resposta** - 7 ed. - São Paulo: Atual, 1993.

[5] EVES, H. **História da geometria**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.(Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula; v.3).

[6] EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Trad. H.H. Domingues. Campinas: Ed. Unicamp, Campinas, 1995.

[7] FREIRIA, A. A.; FREIRIA, A. C. **O volume das cacimbas** - RPM 56 - 1º quadrimestre de 2005 - páginas 10 - 14.

[8] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A matemática do ensino médio - volume 2** - 6. ed. - Rio de Janeiro: SBM 2006.

[9] LIMA, E. L. **Medida e forma em geometria** - 4.ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[10] MORGADO, A.C.; WAGNER, E.; JORGE, M. **Geometria II: métrica plana** - Rio de Janeiro: F.C. Araújo da Silva, 2002. 296 p.

[11] PATERLINI, R. R. **Os "Teoremas"de Cavalieri**. Revista do Professor de Matemática no. 72, 2o quadrimestre de 2010, págs. 43-47. Versão ampliada com as demonstrações dos teoremas. www.dm.ufscar.br/ ptlini/. (Acesso em 18/02/2013).

[12] PEIXOTO, L. DE L. **Projeto Interdisciplinar: A construção do Pensamento sobre o Princípio de Cavalieri através da Lei da Alavanca**. FAMAT em Revista, Número 01, Dezembro de 2003 . Páginas 89 a 92.

[13] PINTO, A. **A teoria dos indivisíveis: Uma contribuição do padre Bonaventura Cavalieri**. Dissertação. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo PUC- SP. São Paulo. 2008.

[14] PITOMBEIRA, J. B.; ROQUE, T. M. **Tópicos de História da Matemática** - Rio de Janeiro : SBM, 2012 .(Coleção PROFMAT).

[15] **SOFTWARE AUTODESK INVENTOR PROFESSIONAL 2013 - VERSÃO PARA ESTUDANTE**. Disponível em: www.autodesk.com.br - Acessado em 12/01/2013.

[16] **SOFTWARE GEOGEBRA 5.0 JOGL1 BETA 3D - VERSÃO EXPERIMENTAL**. Disponível em: www.geogebra.org - Acessado em 10/01/2013.