UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UEPB

Uma Proposta Para O Ensino De Trigonometria Utilizando O Software GeoGebra

WESKLEY CARNEIRO DE MEDEIROS

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira

Campina Grande - PB
Novembro/2014

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UEPB

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

por

WESKLEY CARNEIRO DE MEDEIROS †

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre.

† Bolsista CAPES

M488p Medeiros, Weskley Carneiro de.
Uma proposta para o ensino de trigonometria utilizando o software GeoGebra [manuscrito] / Weskley Carneiro de Medeiros. - 2014.
118 p. : il. color.

Digitado.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.
"Orientação: Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira, Departamento de Matemática".

1. Trigonometria. 2. Funções Trigonométricas. 3. GeoGebra. I. Título.

21. ed. CDD 516.24

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

por

WESKLEY CARNEIRO DE MEDEIROS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:

Prof[a]. Dra. Luciana Roze de Freitas - UEPB

Prof[a]. Dra. Rosana Marques da Silva - UFCG

Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira - UEPB
Orientador

Universidade Estadual da Paraíba
Centro de Ciências e Tecnologia
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Novembro/2014

Dedicatória

À minha tia Rosana *(in memorian)*, que onde estiver está torcendo por mim, e à minha filha Laís, para que lhe sirva de inspiração.

Agradecimentos

Primeiramente, ao nosso Pai Celestial, Grande Arquiteto do Universo, pois sem a sua bênção nosso trabalho seria em vão.

Ao Professor Davis, orientador e amigo, por ter aceito a difícil tarefa de orientar, desempenhada com absoluta competência.

À minha família, pelo estímulo e confiança sempre constantes.

Aos Professores do curso, pelos ricos momentos de aprendizagem e amizade.

Aos colegas de curso, pelo convívio estimulante, tanto do ponto de vista pessoal quanto intelectual.

À Professora Lúcia Couto e ao Professor Álvaro Luís, pela paciência e por nos liberar em horário de expediente para assistirmos às nossas aulas.

À Direção da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Nenzinha Cunha Lima, por todo apoio que me foi dispensado.

Aos meus Irmãos DeMolays e Maçons, por acreditarem sempre em nossa capacidade.

Aos meus amigos, pela incessante confiança.

Enfim, a todos que direta ou indiretamente contribuíram para que eu pudesse alcançar esse objetivo.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa.

Resumo

Em nosso dia-a-dia em sala de aula, temos observado que os estudantes vêem a Trigonometria como um complicado desafio, obscuro e difícil de ser compreendido. Assim, o entendimento das razões trigonométricas, tanto no triângulo retângulo quanto no ciclo trigonométrico, fica bastante comprometido. Pensando nisso e na necessidade de uma mudança nesse panorama, desenvolvemos uma proposta para o ensino da Trigonometria a partir do software de geometria dinâmica *GeoGebra*. Acreditamos que o bom uso dessa tecnologia pode realmente alcançar os objetivos que não temos conseguido obter com os métodos tradicionais, até porque traz uma motivação extra para os alunos. Utilizando um software de geometria dinâmica, o aluno pode fazer vários testes com uma só construção. Já nos métodos tradicionais, utilizando régua e compasso para a construção dos objetos geométricos, o aluno precisará fazer uma construção para cada teste. Assim, o aluno terá mais chances para compreender a natureza e as propriedades dos objetos geométricos que estiverem estudando. A partir disto, pretendemos apresentar indicações de fundamentos e de procedimentos da prática pedagógica em Trigonometria que, se utilizados, traduzem, na prática, o princípio de estarmos interessados em que os nossos alunos aprendam e se desenvolvam, tanto individual como coletivamente, resultando em avanços quanto ao aprendizado do tema em questão.

Palavras Chaves: Trigonometria. Funções Trigonométricas. GeoGebra.

Abstract

In our daily routine, it was observed that students see Trigonometry as a complicated challenge, obscure and difficult to understand. Thus, the trigonometric ratios understanding, both considering the right triangle as the trigonometric cycle is significantly compromised. Thinking about this and the need of a change in this scenario, it was developed a proposal for teaching Trigonometry based on the dynamic geometry software *GeoGebra*. We believe that the appropriated use of this technology can allow the achievement of the desired goals not reached using the traditional methods, because it brings an extra motivation for students. Using a dynamic geometry software, students can perform several tests with a single set. Already on traditional methods, using a ruler and compass for the construction of geometric objects, the student will need to do a different set for each test. Thus, students will have more opportunities to understand the nature and the studied geometric objects properties. From this, it is intended to present fundamental aspects and procedures of Trigonometry teaching practice which, if correctly used, can translate into practice the principles that are considered interesting for the students learn and development, both individually and collectively, resulting in advances in the Trigonometry learning.

Keywords: Trigonometry. Trigonometric Functions. GeoGebra.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

Com o passar dos anos e nossa vivência em sala de aula, temos percebido que a Trigonometria é um dos assuntos considerados de mais difícil absorção por parte dos nossos alunos. É certo que essa dificuldade não se restringe a esse tema. Para a maioria dos alunos, a Matemática é tida como “a disciplina mais difícil”, chegando a ser odiada por uma boa parte deles. Pensando nisso, tentamos rever a nossa prática pedagógica, tentando criar algo que possa inovar as nossas aulas e fazer com que nossos alunos consigam enxergar a Matemática como uma disciplina mais atraente e que possam aprender mais sobre o assunto estudado.

Mas como escolher o foco do nosso trabalho vendo que os alunos têm dificuldades em tantos temas diferentes referentes à Matemática?

Para a escolha do tema do nosso trabalho, levamos em consideração o fato de a Trigonometria ser um ramo da Matemática que alia conhecimentos relativos à Álgebra e à Geometria. Também suas aplicações são muito importantes para a nossa sociedade, como por exemplo para medir distâncias, comprimentos e profundidades inacessíveis. Na Física, na Geografia e na Astronomia seu uso também é imprescindível.

Tendo tudo isso em vista, buscamos desenvolver uma proposta para o ensino da Trigonometria que possa ajudar os nossos alunos a aprender e se desenvolver, tanto individual como coletivamente. Para tanto, sugerimos o uso do software de geometria dinâmica *GeoGebra*.

O termo “geometria dinâmica” surgiu para definir um novo, dinâmico e interativo método de ensinar a Geometria e suas propriedades utilizando ambientes computacionais. Existem vários softwares no mercado, porém escolhemos o GeoGebra por ser um software gratuito que alia conhecimentos de Geometria e de Álgebra, podendo ser utilizado desde a escola primária até o nível universitário, pois dá suporte para uso na geometria interativa, na álgebra, na estatística e como um software de cálculo.

O nosso trabalho está dividido em cinco capítulos.

No primeiro capítulo, faremos um breve relato sobre a história e o surgimento da Trigonometria, mostrando que foram várias as civilizações que contribuíram para o seu desenvolvimento. Em seguida, faremos uma abordagem sobre o ensino e a aprendizagem da Trigonometria. Para justificar a escolha do nosso tema, aplicamos um questionário com vários alunos de uma escola pública da nossa cidade, a maioria cursando a terceira série do Ensino Médio. Os resultados mostram que a escolha foi acertada e que temos muito trabalho a fazer. Então, falaremos um pouco sobre o uso das tecnologias no ensino de Matemática e de Trigonometria, apresentando o software GeoGebra. O uso do GeoGebra tem por objetivo ajudar os alunos a visualizar e interpretar as representações geométricas, relacionando o uso das ferramentas deste software com os conceitos dos conteúdos trigonométricos.

No segundo capítulo traremos uma breve abordagem sobre a Trigonometria no triângulo retângulo. Daremos o conceito de triângulo retângulo e definiremos as razões trigonométricas a partir do mesmo. Também calcularemos os valores das razões trigonométricas para os ângulos de 30°, 45° e 60° e mostraremos algumas de suas aplicações.

O terceiro capítulo será dedicado às funções. Apresentaremos várias de suas propriedades, tendo o cuidado de acabar com alguns "vícios de linguagem" que muitas vezes são utilizados em sala de aula.

No quarto capítulo, apresentaremos as funções trigonométricas. Partindo da função de Euler, definiremos as funções seno e cosseno como funções reais de uma variável real, também chamadas de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, e, a partir destas, as demais funções trigonométricas. Apresentaremos o conceito de radiano. Apresentaremos também a Análise de Fourier, que é uma das técnicas matemáticas mais utilizadas na prática hoje em dia.

No último capítulo, apresentaremos uma proposta de aulas baseada em uma série de atividades onde o software GeoGebra é usado como um ambiente de aprendizagem. Acreditamos que este recurso didático pode ajudar os professores do Ensino Médio a melhorar o nível de aprendizado dos seus alunos nas aulas de Trigonometria e, mais especificamente, a entender melhor as propriedades relacionadas às funções trigonométricas.

Acreditamos que este trabalho possui um caráter inovador para nós, professores do Ensino Básico, para nossos alunos e para nossa escola.

1 A Trigonometria

Neste capítulo, faremos um breve relato sobre a história e o surgimento da Trigonometria, mostrando que foram várias as civilizações que contribuíram para o seu desenvolvimento. Em seguida, faremos uma abordagem sobre o ensino e a aprendizagem da Trigonometria, apresentando em seguida o software GeoGebra, que será o aporte principal do nosso trabalho.

1.1 Um pouco de História

A Trigonometria é um ramo da Matemática que estuda as relações entre as medidas de lados e ângulos e as demais propriedades de triângulos. Para lidar com figuras geométricas planas, temos a Trigonometria Plana. Já para superfícies curvas, temos a Trigonometria Esférica e a Hiperbólica.

A Trigonometria possui muitas aplicações na Matemática e na Física, bem como aplicações práticas, como em sistemas de navegação, na Astronomia (para estimar a distância das estrelas mais próximas, por exemplo) e na Geografia (para estimar distâncias entre divisas). Seu desenvolvimento não se deve a um só homem ou uma só nação e remonta milhares de anos, tendo a contribuição de todas as grandes civilizações. Se a tomarmos como estudada hoje, teria origem no século XVII, com o desenvolvimento do simbolismo algébrico; mas se a tomarmos para significar a Geometria acoplada à Astronomia, sua origem seria no século II a.C., embora existam registros anteriores de seu uso. Segundo Eves (1997), um certo número de papiros egípcios resistiu ao desgaste do tempo por mais de 3500 anos. O mais extenso dos de natureza matemática foi comprado em 1858 numa cidade à beira do rio Nilo por um escocês chamado Henry Rhind e é por isto chamado Papiro Rhind, que hoje encontra-se no Museu de Londres.

Figura 1 – Uma parte do Papiro Rhind

Na Figura 1 podemos ver uma imagem do Papiro Rhind, retirada de Pombo (2002).

Às vezes é chamado de Papiro Ahmes, em homenagem ao escriba que o copiou por volta de 1650 a.C. Segundo o escriba, o material provém de cerca de 2000 a 1800 a.C. Este papiro possui cerca de 84 problemas, dos quais quatro utilizam o termo **seqt** de um ângulo. O significado deste termo não fica claro no papiro, porém pensa-se ser equivalente à cotangente de um ângulo, já que na construção das pirâmides os egípcios introduziram este conceito como sendo a razão entre o afastamento horizontal e a elevação vertical.

Além do uso da Trigonometria na construção das pirâmides, os egípcios introduziram a idéia do "relógio de sol", que consistia em associar sombras produzidas por uma vara vertical a sequências numéricas, relacionando então seus comprimentos com as horas do dia.

Porém, os primeiros vestígios da Trigonometria surgiram também na Babilônia. Os babilônios foram excelentes astrônomos, tanto por razões religiosas como também devido ao calendário e às épocas de plantio. Eles estudaram as fases da lua, os pontos cardeais e as estações do ano através de triângulos e desenvolveram um sistema de unidades de medidas e uma escala.

No Oriente também encontram-se vestígios de uma Trigonometria primitiva. Na China, por volta de 1110 a.C., os triângulos retângulos eram usados para medir distâncias, comprimentos e profundidades e há evidências do conhecimento das relações trigonométricas e do conceito de ângulo. Ainda na China antiga, no século III d.C., Lin Hui já aplicava o Teorema de Pitágoras.

Na Grécia, a primeira aplicação documentada da Trigonometria é de cerca de 180 a.C., quando Hipsícles, influenciado pela cultura babilônica, dividiu o zodíaco em 360 partes. O astrônomo, construtor, cartógrafo e matemático grego Hiparco de Nicéia ($190 - 126$ a. C.) é considerado o pai da Trigonometria, pois foi o primeiro a desenvolver uma tabela trigonométrica, na qual constavam valores de uma série de ângulos. Para isto, utilizou idéias pioneiras dos babilônios da divisão do círculo em 360 partes iguais e da divisão do grau em sessenta minutos de sessenta segundos.

Hiparco pertencia a Escola de Alexandria e é também considerado o fundador da Astronomia Científica. Ele utilizou sua tabela trigonométrica em seus estudos em Astronomia e conseguiu melhoramentos em constantes astronômicas importantes, como a duração do dia e do ano, por exemplo. Esta última com uma margem de erro de 6 minutos. Assim, pôde fazer previsões de eclipses, tanto do sol como da lua, com uma precisão jamais vista anteriormente. Deixou a previsão dos eclipses futuros por 600 anos. Foi ele quem criou o primeiro astrolábio, com o qual podia medir a distância de qualquer astro em relação ao horizonte. Foi ele também quem desenvolveu o sistema de localização baseado em latitude e longitude, dividindo o planeta em zonas climáticas. Além de produzir a inovadora tabela de cordas, Hiparco inventou um método para a resolução de triângulos esféricos. Inventou também uma régua graduada, com um guia e um cursor, usada para medir ângulos. Usou-a para medir o diâmetro aparente do sol e da lua e determinou as coordenadas celestes das estrelas.

Segundo Costa (2003), “o primeiro trabalho impresso em Trigonometria foi a *Tabula Directionum* de Regiomontanus[1], publicado em Nuremberg certamente antes de 1485, pois a segunda edição data deste ano em Veneza.”

A nossa palavra moderna *seno* é derivada do latim *sinus*, que significa “baía”. Isso se deve a uma tradução errônea do sânscrito *jiva*. Aryabhata, matemático indiano que viveu entre os anos de 476 e 550, usou o termo *ardha-jiva* (meia-corda), que foi abreviada para *jiva* e então transliterada pelos árabes como *jiba*. Tradutores europeus do século XII confundiram *jiba* com *jaib*, que significa baía. Isto ocorreu provavelmente porque *jiba* e *jaib* são escritas da mesma forma na escrita arábica.

Até então, a Trigonometria era baseada no estudo da relação entre um arco arbitrário e sua corda. Foi a partir de estudos sobre o cálculo do comprimento de cordas que Hiparco desenvolveu sua tabela trigonométrica. Dados um círculo e um arco nesse círculo, a corda é a linha que subtende o arco. Uma vez conhecido o valor do comprimento de uma corda, pode-se calcular o *seno* da metade do arco, pois a metade do comprimento da corda dividido pelo comprimento do raio do círculo nos dá esse valor. Consequentemente, a operação *seno* é também conhecida como “meia-corda”. Devido a essa relação, muitas das identidades trigonométricas e teoremas conhecidos hoje também eram conhecidos na antiguidade, mas na sua forma equivalente de corda.

A palavra *cosseno* surgiu apenas no século XVII como sendo o seno do complemento de um ângulo. Os conceitos de *seno* e *cosseno* eram, então, utilizados para resolver problemas relativos à Astronomia.

O conceito de *tangente* surgiu da necessidade de calcular alturas e distâncias. Na Figura 2, podemos ver que o termo *tangente* tem significado claro, pois a tangente de um ângulo α é a razão entre o segmento da *tangente* t, compreendida entre a extremidade do raio, que é um dos lados do ângulo, e o prolongamento s do outro lado do ângulo.

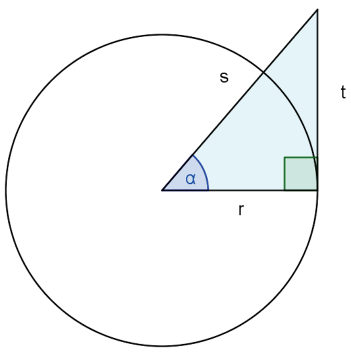


Figura 2 – Uma justificativa para os termos tangente e secante

[1] Regiomontanus, ou Johannes Muller von Kronigsberg, foi um matemático, astrólogo e astrônomo alemão que viveu entre os anos de 1436 e 1476.

Já a *secante* de um ângulo α é a razão entre a hipotenusa s do triângulo retângulo, cujos catetos são o raio r e o segmento de tangente t, e o raio r. Como o segmento de reta s corta o círculo, a denominação *secante* se justifica.

Os termos *cotangente* e *cossecante*, assim como a denominação do *cosseno*, representam a tangente e a secante do arco complemetar.

Surgiam assim as razões trigonométricas. Com a criação do Cálculo Infinitesimal e da Análise Matemática, foram definidas funções reais de variáveis reais cujos valores coincidem com as razões trigonométricas conhecidas.

O primeiro a definir estas seis relações como funções de ângulo e a entendê-las como razões foi Joachim Rhaeticus ($1514-1574$), matemático e médico austríaco, em sua obra *Canon Doctrinae Triangulorum*, em 1551, embora ele não as tenha nomeado. Ele foi o primeiro a organizar as tábuas em semiquadrantes e calculou os valores de senos, cossenos e tangentes de ângulos até 45°.

Porém, só em 1748 a Trigonometria tomou a forma como conhecemos hoje. Isso após Euler ($1707-1783$) adotar a medida do raio de um círculo como unidade e definir essas relações como funções de um número e não mais de um ângulo. Para Lima (1991), "a função de Euler (...) que possibilita encontrar $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, como função de uma variável real x, abriu para a Trigonometria as portas da Análise Matemática e de inúmeras aplicações às Ciências Físicas".

Mais à frente, apresentaremos essa tão importante função.

1.2 O ensino-aprendizagem de Trigonometria

Com o passar dos anos, temos notado que as práticas de ensino que vêm sendo utilizadas em nossas escolas de nível básico apenas apresentam aos alunos uma série de conceitos já sistematizados, fazendo com que os alunos sejam meros espectadores e tornando o professor apenas a figura da pessoa mais indicada para apresentar esses conceitos. Acreditamos, e este é o objetivo deste trabalho, que esse processo deve passar por uma mudança, de modo a permitir que o aluno seja um co-produtor do seu conhecimento.

Segundo Thompson (1992), para muitos indivíduos, a Matemática não passa de "uma disciplina com resultados precisos e procedimentos infalíveis, cujos elementos fundamentais são as operações aritméticas, procedimentos algébricos, definições e teoremas geométricos".

Sob essa visão, a Matemática é uma ciência com conteúdo fixo, pronta, acabada, onde o aluno não tem espaço para mostrar sua criatividade. E vários mitos se criaram em torno disto, como o de que a Matemática é a disciplina "mais difícil", tornando-se "odiada" pelos alunos.

Segundo os PCN (2001, p.29), "muitos acreditam que a Matemática é direcionada às pessoas mais talentosas e também que essa forma de conhecimento é produzida exclusivamente por grupos sociais ou sociedades mais desenvolvidas."

Embora saibamos que essas idéias são equivocadas, elas geram tais mitos, que se refletem enormemente na escola, já que a Matemática é uma das áreas com maiores índices de reprovação no Ensino Básico.

Mas, então, que visão devemos ter da Matemática?

Hoje, faz-se mais do que necessário que vejamos a Matemática como uma disciplina investigativa. Para Ernest (1991), o conhecimento matemático evolui da resolução de problemas provenientes da realidade ou da própria construção matemática. Seguindo esta linha, a evolução dos alunos se daria a partir da investigação e resolução de problemas, cabendo ao professor entender que a Matemática deve ser útil aos alunos, ajudando-os, de alguma forma, a entender sua realidade.

Assim, nosso grande desafio, como professores, é tentar verter esta visão da Matemática para o ensino, já que os alunos, em geral, "não vêem a Matemática como a disciplina que ela é, com espaço para a criatividade e muita emoção" (D'AMBROSIO, 1993). Cabe a nós buscarmos novas metodologias de ensino e acabar com os mitos acima citados, mostrando aos alunos o por quê e para quê estudar Matemática.

Sabemos que vários governos têm realizados esforços e investido na formação de professores, dando auxílio para que eles possam modificar suas metodologias e incorporar novas práticas de ensino. Porém, os resultados alcançados não são, ainda, os esperados.

Trazendo isto para o ensino da Trigonometria, temos observado em nosso dia-a-dia em sala de aula que os estudantes a tem como um desafio complicado, algo obscuro e difícil de compreender, o que dificulta muito a resolução de problemas. Com o passar dos anos, tem-se observado que as dificuldades começam na própria definição de triângulo retângulo. Boa parte dos alunos não consegue sequer identificar os elementos básicos do triângulo, como hipotenusa e cateto oposto ou adjacente a um dado ângulo. Com isso, o entendimento das razões trigonométricas, tanto no triângulo retângulo quanto no ciclo trigonométrico, fica bastante comprometido. Para exemplificar o que foi dito, aplicamos um questionário relativo a esses conhecimentos com 69 alunos do Ensino Médio de uma das escolas estaduais de nossa cidade, sendo 10 alunos da segunda série e 59 da terceira. As idades desses alunos são apresentadas na tabela abaixo.

Idade	16	17	18	19	20	21	23	25	28	32	42	45	Não declarou
Alunos	4	13	23	10	4	5	1	2	2	1	1	1	2

O questionário era bastante simples. Constava de apenas três questões de muito simples resolução. Nosso objetivo era justamente mostrar que nossos alunos não conseguem entender os conceitos mais simples referentes ao tema que resolvemos estudar.

Na primeira questão, perguntamos "o que é um triângulo retângulo?" Os resultados foram os seguintes:

Resultado	Deixou em Branco	Errou	Acertou
Alunos	33	33	3
Percentual	$47,8$	$47,8$	$4,4$

Na segunda questão, apresentamos um triângulo retângulo de hipotenusa c e catetos a e b, sendo o cateto a oposto ao ângulo α e o cateto b oposto ao ângulo β. A respeito deste triângulo fizemos cinco perguntas. Na primeira, perguntamos qual a hipotenusa do triângulo. Vejamos os resultados:

Resultado	Deixou em Branco	Errou	Acertou
Alunos	44	13	12
Percentual	$63,8$	$18,9$	$17,3$

A segunda pergunta pedia o cateto oposto ao ângulo α.

Resultado	Deixou em Branco	Errou	Acertou
Alunos	37	24	8
Percentual	$53,6$	$34,8$	$11,6$

Na terceira pergunta, pedimos o cateto oposto ao ângulo β. Os resultados foram os seguintes:

Resultado	Deixou em Branco	Errou	Acertou
Alunos	39	26	4
Percentual	$56,5$	$37,7$	$5,8$

Em seguida, pedimos que eles identificassem o cateto adjacente ao ângulo α. Mais uma vez a maioria deixou a questão em branco.

Resultado	Deixou em Branco	Errou	Acertou
Alunos	42	18	9
Percentual	$60,9$	$26,1$	$13,0$

Por último, pedimos que eles identificassem o cateto adjacente ao ângulo β. Os mesmos 42 alunos que deixaram a pergunta anterior em branco fizeram o mesmo nessa questão.

Resultado	Deixou em Branco	Errou	Acertou
Alunos	42	20	7
Percentual	$60,9$	29	$10,1$

A terceira questão é aquela que me parecia mais simples. Apresentamos um ciclo trigonométrico em branco e pedimos que eles identificassem o segundo quadrante. Essa foi a única questão em que a maioria não deixou em branco. “Apenas” $\frac{1}{3}$ dos alunos não a responderam.

Resultado	Deixou em Branco	Errou	Acertou
Alunos	21	39	7
Percentual	$33,3$	$56,5$	$10,1$

Vale salientar que nenhum aluno respondeu corretamente todo o questionário e que 10 alunos deixaram o questionário totalmente em branco.

Nos chamaram à atenção algumas respostas bem esdrúxulas, como por exemplo "um triângulo retângulo é um triângulo que parece uma pirâmide" ou "um triângulo retângulo é formado por três retângulos de tamanhos diferentes" ou então "um triângulo retângulo é uma fração" ou ainda "um triângulo retângulo é formado por três retas tridimensionais", mostrando que eles não tinham a mínima idéia do que estavam falando.

Com isso, fica evidenciado que há algum problema na prática pedagógica dos nossos professores da Educação Básica. Mas o que vem a ser essa prática pedagógica?

Há vários conceitos e definições para a prática pedagógica. Para Costa e Bujes (1987, p.120), "por prática pedagógica entende-se todo o movimento do professor no âmbito de sua ação específica, que envolve um gradativo processo de conscientização e de reflexão, originado das atividades do cotidiano e dos problemas aí identificados."

Baldin (1986) conceitua prática pedagógica como "...o efetivo exercício da atividade prática do professor dentro e fora de sala de aula..."

Encaremos, então, a prática pedagógica como a descrição da vivência do professor, exercida tanto no interior como fora da sala de aula.

É importante que façamos esta análise da prática pedagógica, pois é algo que se coloca constantemente diante de nós, como educadores, e a partir desta análise podemos chegar mais perto do verdadeiro significado da educação para um determinado grupo social. (ANDRé, 1988)

A partir disto, pretendemos, com este estudo, apresentar indicações de fundamentos e de procedimentos da prática pedagógica em Trigonometria que, se utilizados, traduzem na prática o princípio de estarmos interessados em que os nossos alunos aprendam e se desenvolvam, tanto individual como coletivamente. Para tanto, vamos sugerir o uso de tecnologias digitais que resultem em avanços quanto ao aprendizado do tema em questão.

1.3 O uso de tecnologias no ensino de Trigonometria

As tecnologias, em todas as suas formas, constituem um dos principais agentes de transformação da nossa sociedade. A informática, por exemplo, tem influenciado até na escrita e na leitura das pessoas. Sendo assim, surge mais um desafio para nós, como professores: incorporar esses recursos ao nosso trabalho.

Desde os tempos mais remotos, a humanidade procura métodos para automatizar a rotina dos cálculos. Como exemplo, temos o uso das mãos na contagem, as calculadoras megaláticas (há 4000 anos), os ábacos (há 2500 anos) e as réguas de cálculo (há 400 anos).

As calculadoras e os computadores hoje em dia já estão sendo bastante utilizados nas escolas, inclusive em algumas escolas públicas. O uso desses recursos pode ser bastante importante, pois relativiza a importância do cálculo mecânico, já que existem instrumentos que podem realizar tais cálculos de uma forma prática e rápida. O computador, por exemplo, é uma fonte incrível de informação e constitui um poderoso recurso para alimentar o processo de ensino e aprendizagem. Utilizando-se de alguns softwares, pode-se estimular os alunos a pensar, refletir e criar soluções para determinadas situações. Porém, devemos ter cuidado ao escolher esses softwares. A escolha deve ser feita de acordo com os objetivos que se pretende alcançar, bem como com a concepção de conhecimento que orienta o processo. (PCN, 2001, p.44)

Também é importante salientarmos que a idéia de que o computador viria a substituir o professor é totalmente insana. O seu uso, muito pelo contrário, reforça o papel do professor na preparação, condução e avaliação do processo de ensino e aprendizagem.

A utilização desse tipo de recurso no processo de ensino e aprendizagem de Matemática pode contribuir para o desenvolvimento de atividades ricas em sala de aula, deixando claro que os alunos devem ser estimulados a desenvolver suas capacidades críticas e que o professor seja valorizado na condição de que só ele pode desempenhar corretamente o papel de criar, conduzir e aperfeiçoar as situações de aprendizagem.

Para o ensino da Matemática, uma quantidade cada vez maior de softwares vêm sendo criados e postos em prática no dia-a-dia das escolas, sendo a maioria deles na área de geometria, permitindo a construção precisa de muitos objetos geométricos. Partindo disso, criou-se o termo *Geometria Dinâmica*, não para definir uma "nova Geometria", mas para definir um novo, dinâmico e interativo método de representar objetos geométricos e suas propriedades utilizando ambientes computacionais.

Para nós, o bom uso dessa tecnologia pode realmente alcançar os objetivos que não temos conseguido obter com os métodos tradicionais, até porque traz uma motivação extra para os alunos. Porém, sentimos que muitos professores têm uma certa aversão a isso, tratando o computador como um problema a mais para administrar em sala de aula. Muitas são as causas que levam a essa aversão, entre elas, a falta de formação para o uso dessa tecnologia, apoio técnico para o uso do computador, apoio pedagógico para o planejamento das aulas com esse recurso e, principalmente, o receio de sair da "zona de conforto" que é proporcionada por aulas bem planejadas e conduzidas da forma tradicional ou inovadoras, mas sem o uso de recursos computacionais, para a "zona de risco", que é uma aula em um ambiente computacional, onde o aluno pode ser levado a ser mais ativo, crítico e responsável pela sua aprendizagem, e onde o planejamento inicial da aula realizado pelo professor, muitas vezes, precisa ser refeito enquanto a aula está se desenvolvendo. (SKOVSMOSE, 2000)

Utilizando um software de geometria dinâmica, o aluno pode fazer vários testes com uma só construção. Já nos métodos tradicionais, utilizando régua e compasso para a construção dos objetos geométricos, o aluno precisará fazer uma construção para cada teste. Para nós, esta é a maior vantagem do uso da geometria dinâmica sobre os métodos tradicionais, pois realizando uma maior quantidade de testes, o aluno terá mais chances para compreender a natureza e as propriedades dos objetos geométricos que estiverem estudando.

Para o desenvolvimento do nosso trabalho, escolhemos o software GeoGebra.

O Geogebra é um software de matemática dinâmica para a aprendizagem e o ensino. Aliando conceitos de geometria e de álgebra (daí o nome GeoGebra), pode ser utilizado desde a escola primária até o nível universitário, pois dá suporte para uso na geometria interativa, tanto 2D quanto 3D, na álgebra, na estatística e como um software de cálculo.

Criado em 2001 na Universidade de Salzburgo por Markus Hohenwarter[2], o projeto tem por objetivo a utilização em sala de aula. Reúne dinamicamente aritmética, geometria, álgebra, cálculo e análise.

O software permite a criação de diversos tipos de construções geométricas utilizando elementos básicos como pontos, retas e polígonos. O melhor é que permite alterar todos esses elementos de forma dinâmica, mesmo após a construção ter sido finalizada, permitindo a observação de vários conceitos e propriedades. Permite também inserir funções, equações e coordenadas, sendo capaz de lidar com variáveis para números, pontos e vetores, possibilitando que o aluno possa visualizar ao mesmo tempo as características geométricas e algébricas de um determinado elemento.

Com o GeoGebra também é possível derivar, integrar, encontrar as raízes e os pontos extremos de uma função. Várias das figuras apresentadas em nosso trabalho foram feitas com o seu auxílio.

Dentre suas vantagens, está o fato de o GeoGebra ser escrito na linguagem Java, o que permite seu uso em diversos sistemas operacionais. E mais ainda, o GeoGebra é gratuito e pode ser encontrado na página oficial do projeto: http://www.geogebra.org.

Segundo seu criador, o "GeoGebra é uma forma de mostrar a matemática de uma maneira interativa para que os estudantes possam ter uma experiência em primeira mão da matemática" (MAYRA, 2012).

Hoje, o software encontra-se em desenvolvimento na Universidade Atlântica da Flórida e seu site oficial recebe mais de 20000 acessos por dia. Está traduzido em 70 idiomas e é usado em 190 países. Uma versão do GeoGebra para tablets já encontra-se disponível e uma versão para smartphones também já é aguardada.

[2] Austríaco, professor de Educação Matemática na Universidade de Linz, desenvolveu o GeoGebra como parte de sua dissertação de mestrado.

2 Trigonometria no triângulo retângulo

Neste capítulo, vamos apresentar uma breve abordagem sobre a Trigonometria no triângulo retângulo, relacionando alguns conceitos e relações importantes e mostrando algumas de suas aplicações.

2.1 O triângulo retângulo

Como falamos anteriormente, as dificuldades no Ensino da Trigonometria começam pela própria definição do triângulo retângulo, a qual muitos alunos desconhecem. Também os seus elementos básicos são motivos de preocupação para os nossos alunos. Façamos, então, uma breve revisão acerca desses conceitos.

Definição 2.1. *Chamamos triângulo retângulo a todo triângulo que possui um ângulo reto, ou seja, um ângulo de* 90°.

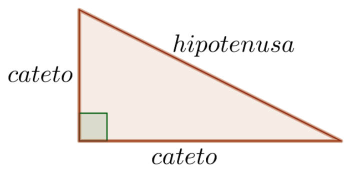


Figura 3 – Triângulo retângulo

Em um triângulo retângulo, os lados adjacentes ao ângulo reto são chamados de *catetos* e o lado oposto ao ângulo reto é chamado de *hipotenusa*, conforme a Figura 3.

2.2 Razões trigonométricas

Imaginemos a seguinte situação: uma pessoa sobe a rampa representada na Figura 4.

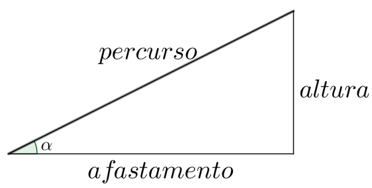


Figura 4 – Triângulo retângulo e o ângulo α

Para cada ponto do percurso, temos uma altura e um afastamento correspondentes. Observando a Figura 5, vamos calcular a razão entre a altura e o afastamento referentes aos pontos destacados do percurso.

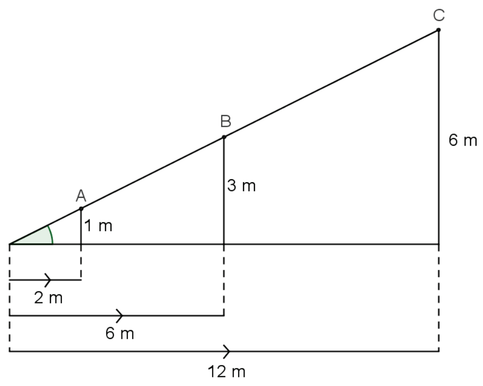


Figura 5 – Triângulo retângulo

Para o ponto A, temos: $\dfrac{altura}{afastamento} = \dfrac{1m}{2m} = \dfrac{1}{2}$.

Para o ponto B, temos: $\dfrac{altura}{afastamento} = \dfrac{3m}{6m} = \dfrac{1}{2}$.

Para o ponto C, temos: $\dfrac{altura}{afastamento} = \dfrac{6m}{12m} = \dfrac{1}{2}$.

Como podemos ver, para cada ponto do percurso de uma subida, a razão entre a altura e o afastamento é constante e não depende do tamanho do triângulo. A essa constante damos o nome de *índice de subida*. Quanto maior for o índice de subida, mais íngreme é a subida.

Agora, observemos as duas rampas da Figura 6.

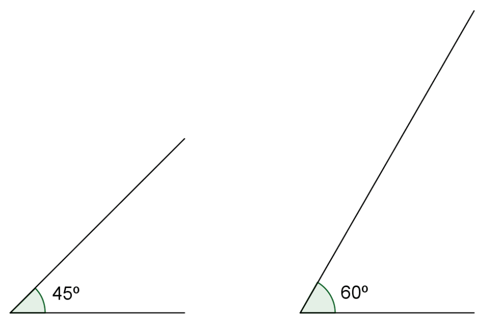


Figura 6 – Rampas de 45° e 60°

Dizemos que a segunda rampa é mais íngreme do que a primeira, pois seu *ângulo de subida* é maior.

Para relacionarmos o ângulo de subida com o índice de subida, utilizaremos a palavra *tangente*, a qual será denotada por tan. A tangente do ângulo de subida é igual ao índice de subida. Assim, no triângulo da Figura 4, temos:

$$\tan\alpha \quad = \quad \frac{\text{altura}}{\text{afastamento}}.$$

Levando em consideração os lados do triângulo retângulo, temos:

$$\tan\alpha \quad = \quad \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \alpha}.$$

Para essa mesma subida, podemos calcular a razão entre a altura e o percurso. Para associarmos essa razão ao ângulo de subida, usaremos o termo *seno*, o qual denotaremos por sen. Assim, no triângulo da Figura 4, temos:

$$\operatorname{sen}\alpha \quad = \quad \frac{\text{altura}}{\text{percurso}}$$

ou então

$$\operatorname{sen}\alpha \quad = \quad \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa do triângulo}}.$$

Ao calcularmos a razão entre o afastamento e o percurso, utilizaremos o termo *cosseno* para relacioná-la ao ângulo de subida. Esse termo será denotado por cos. Assim, para o triângulo da Figura 4, temos:

$$\cos\alpha \quad = \quad \frac{\text{afastamento}}{\text{percurso}}$$

ou então

$$\cos\alpha \quad = \quad \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa do triângulo}}.$$

Devemos enfatizar que essas razões são constantes e que não dependem das medidas dos lados do triângulo e sim do ângulo de subida. Utilizando o software GeoGebra, vamos ilustrar isso com a seguinte construção:

Construção 1

- Inicialmente, vamos marcar os vértices do triângulo. No campo *entrada*, digite, por exemplo, $(0,0), (5,0)$ e $(5,4)$. Pressione *enter* após cada um dos pontos;

- com a ferramenta "segmento", vamos construir os lados do triângulo. Para tanto, clique sobre os pontos A e B. Em seguida, sobre os pontos B e C e depois sobre os pontos A e C;

- com o botão direito do mouse, clique sobre os três lados do triângulo e selecione a opção *exibir rótulo*;

- com a ferramenta "ângulo", clique sobre os pontos C, B e A. Observe que o ângulo criado mede $90°$, comprovando que o triângulo é retângulo;

- com o botão direito do mouse, clique sobre o ângulo reto e selecione a opção *exibir rótulo*;

- com a ferramenta "ponto em objeto", clique sobre o lado AC;

- com a ferramenta "reta paralela", clique sobre o lado BC e em seguida sobre o ponto D;

- com a ferramenta "interseção de dois objetos", marque a interseção entre o lado AB e a reta paralela ao lado BC;

- com a ferramenta "segmento", clique sobre os pontos D e E, criando o segmento DE;

- com a ferramenta "segmento", clique sobre os pontos A e D, criando o segmento AD;

- com a ferramenta "segmento", clique sobre os pontos A e E, criando o segmento AE;

- com o botão direito do mouse, clique sobre a reta paralela ao lado BC e selecione a opção *exibir objeto*;

- com o botão direito do mouse, clique sobre o segmento DE e selecione a opção *renomear*. Renomeie para altura;

- com o botão direito do mouse, clique sobre o segmento AD e selecione a opção *renomear*. Renomeie para percurso;

- com o botão direito do mouse, clique sobre o segmento AE e selecione a opção *renomear*. Renomeie para afastamento;

- com a ferramenta "ângulo", clique sobre os pontos E, A e D;

- no campo entrada, digite *altura/percurso*;

- no campo entrada, digite *afastamento/percurso*;

- no campo entrada, digite *altura/afastamento*. Essas três razões criadas são, respectivamente, o seno, o cosseno e a tangente do ângulo $\angle DAE$;

- com a ferramenta "mover", arraste o ponto D sobre o lado AC. Observe que o valor das três razões permanece constante, independente da posição do ponto P;

- agora arraste o ponto C sobre o plano. Observe que a cada mudança do ângulo, as três razões mudam de valor.

Assim, ilustramos que o seno, o cosseno e a tangente são três razões que não dependem dos lados do triângulo, mas sim do ângulo em questão.

A tangente de um ângulo α também pode ser expressa por

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} &= \frac{\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}}{\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}} \\
\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} &= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \cdot \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}} \\
\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} &= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \\
\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} &= \tan\alpha.
\end{aligned}$$

Sejam α e β dois ângulos complementares em um triângulo retângulo, ou seja, $\alpha+\beta = 90°$. Temos que $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$, $\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta$ e $\tan\beta = \dfrac{1}{\tan\alpha}$.

De fato, como a soma dos ângulos internos é igual a $180°$ e α e β são ângulos complementares de um triângulo retângulo, temos $\alpha+\beta+90° = 180°$. Daí, $\alpha+\beta = 90°$.

Observando a Figura 7, podemos escrever $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{b}{c}$ e $\cos\alpha = \dfrac{a}{c}$. Por outro lado, $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{a}{c}$ e $\cos\beta = \dfrac{b}{c}$. Além disso, $\tan\alpha = \dfrac{b}{a}$ e $\tan\beta = \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{\frac{b}{a}} = \dfrac{1}{\tan\alpha}$.

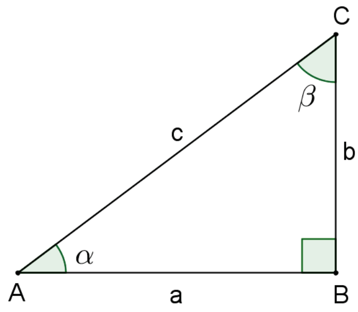


Figura 7 – $\alpha + \beta = 90°$

2.3 Alguns valores importantes

Nesta seção, vamos calcular os valores de seno, cosseno e tangente para os ângulos de 30°, 45° e 60°, chamados de “ângulos notáveis”.

Sejam $\triangle ABC$ um triângulo equilátero de lado l e AM a bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$, que é o ângulo relativo ao vértice A.

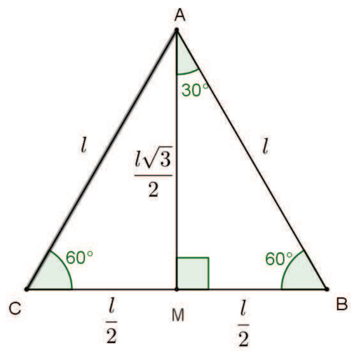


Figura 8 – Triângulo equilátero ABC de lado l

Observemos na Figura 8 que AM coincide com a altura do triângulo relativa ao ângulo $\hat{A}$, que sabemos medir $\dfrac{l\sqrt{3}}{2}$.

Considerando o triângulo $\triangle AMB$, temos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 30° &= \frac{\frac{l}{2}}{l} \\
\operatorname{sen} 30° &= \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{l} \\
\operatorname{sen} 30° &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Agora vamos calcular o $\cos 30°$:

$$
\begin{aligned}
\cos 30^\circ &= \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l}\\
\cos 30^\circ &= \frac{l\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{l}\\
\cos 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}
$$

Para a tangente, temos:

$$
\begin{aligned}
\tan 30^\circ &= \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}}\\
\tan 30^\circ &= \frac{l}{2}\cdot\frac{2}{l\sqrt{3}}\\
\tan 30^\circ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\\
\tan 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}
$$

Agora, calculemos para o ângulo de 60°:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen} 60^\circ &= \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l}\\
\operatorname{sen} 60^\circ &= \frac{l\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{l}\\
\operatorname{sen} 60^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}
$$

Para o cosseno, temos:

$$
\begin{aligned}
\cos 60^\circ &= \frac{\frac{l}{2}}{l}\\
\cos 60^\circ &= \frac{l}{2}\cdot\frac{1}{l}\\
\cos 60^\circ &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Agora, vejamos a tangente:

$$\begin{aligned}
\tan 60^\circ &= \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} \\
\tan 60^\circ &= \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{l} \\
\tan 60^\circ &= \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Observe que $\operatorname{sen} 30^\circ = \cos 60^\circ$, $\cos 30^\circ = \operatorname{sen} 60^\circ$ e $\tan 30^\circ = \dfrac{1}{\tan 60^\circ}$, já que $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$.

Consideremos um quadrado $ABCD$ de lado l, como abaixo:

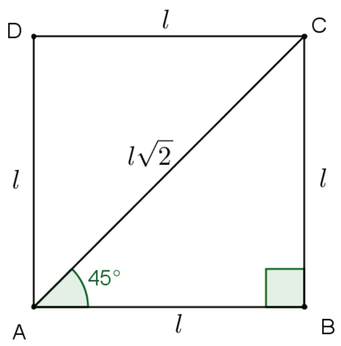


Figura 9 – Quadrado $ABCD$ de lado l

Como podemos ver na Figura 9, AC é uma diagonal do quadrado. Assim sua medida é igual a $l\sqrt{2}$. Além disso, AC é também a bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$.

Assim, temos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 45^\circ &= \frac{l}{l\sqrt{2}} \\
\operatorname{sen} 45^\circ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\operatorname{sen} 45^\circ &= \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

Temos também que:

$$\begin{aligned}
\cos 45^\circ &= \frac{l}{l\sqrt{2}} \\
\cos 45^\circ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\cos 45^\circ &= \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

Temos ainda que:

$$\begin{aligned}
\tan 45^\circ &= \frac{l}{l} \\
\tan 45^\circ &= 1.
\end{aligned}$$

2.4 Algumas aplicações

A maioria das obras literárias apresentam a origem e o desenvolvimento da Trigonometria nos problemas de cálculo de distâncias entre pontos sobre a superfície da Terra. Vejamos uma dessas situações:

Aplicação 1

Ao decolar, um avião sobe formando um ângulo de 30° com a pista horizontal. Na direção do percurso existe uma torre de transmissão de energia elétrica situada a 3 Km do aeroporto e com altura igual a 150 m. Verifique se, mantendo o trajeto, o avião pode colidir com a torre. (Fonte: TrigonoBlog (Matias (2014)))

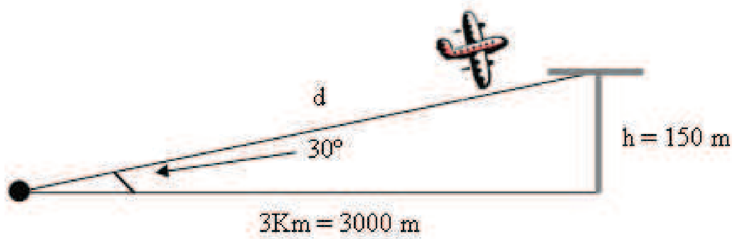


Figura 10 – Triângulo retângulo ilustrando a situação-problema

Solução: Sendo d a distância percorrida pelo avião e h' a altura do avião ao passar exatamente sobre a torre, a Figura 10 ilustra a situação dada.

Considerando o ângulo agudo de 30° como referência, vamos utilizar a tangente como sendo a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente a este ângulo. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
\tan 30^\circ &= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}\\
\frac{\sqrt{3}}{3} &= \frac{h'}{3000}\\
h' &= \frac{3000\sqrt{3}}{3}\\
h' &= 1000\sqrt{3}\text{m.}
\end{aligned}$$

Portanto, é impossível que o avião, mantendo esse trajeto, se choque contra a torre de transmissão.

Aplicação 2

Já que o Governo Federal utiliza o ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio - como uma ferramenta para avaliar a qualidade do Ensino Médio no Brasil, vejamos como as funções trigonométricas foram tratadas na única questão que versou sobre o assunto na prova do ano de 2011: Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir do ponto A, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido ele seguiu até o ponto B de modo que fosse possível ver o ponto P da praia, no entanto sob um ângulo de 2α.

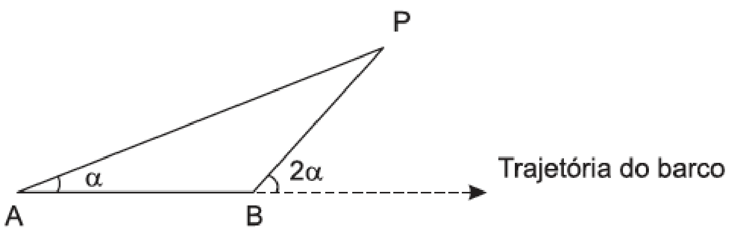


Figura 11 – Uma aplicação no ENEM

Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30^\circ$, e ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância $AB = 2000$ m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será?

Solução: De acordo com a Figura 11 e devido ao fato da soma dos ângulos internos de um triângulo ser 180°, temos que os ângulos $\widehat{PAB}$ e $\widehat{APB}$ são congruentes. Assim, o triângulo $\triangle APB$ é isósceles e $PB = AB = 2000$ m. Seja h a altura relativa ao ponto P. Como $2\alpha = 60^\circ$, temos:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen} 60^\circ &= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \\
\frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{d}{2000} \\
d &= \frac{2000\sqrt{3}}{2} \\
h &= 1000\sqrt{3}\text{m}.
\end{aligned}
$$

Temos aqui uma questão com um bom enunciado, de fácil compreensão e com uma contextualização bem interessante, adequada para o tipo de avaliação a que se destina.

Duas importantes aplicações da Trigonometria no triângulo retângulo são a *lei dos senos* e a *lei dos cossenos*, pois nos possibilitam resolver problemas em quaisquer triângulos e não apenas em triângulos retângulos.

Nas demonstrações a seguir, utilizaremos triângulos acutângulos. As demonstrações para os triângulos obtusângulos e retângulos são análogas.

Consideremos o triângulo da Figura 12 e sejam $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente, os ângulos relativos aos vértices A, B e C.

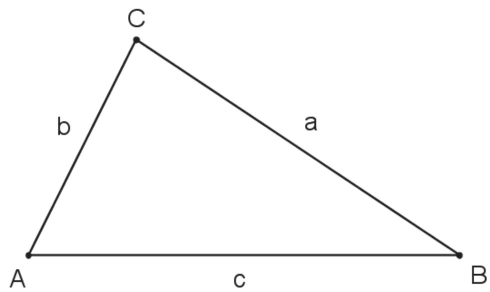


Figura 12 – Triângulo acutângulo ABC

Aplicação 3: Lei dos senos

Em qualquer triângulo, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos.

Ou seja,

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}.$$

Demonstração. No triângulo da Figura 12, consideremos as alturas relativas aos vértices A e C, conforme a Figura 13.

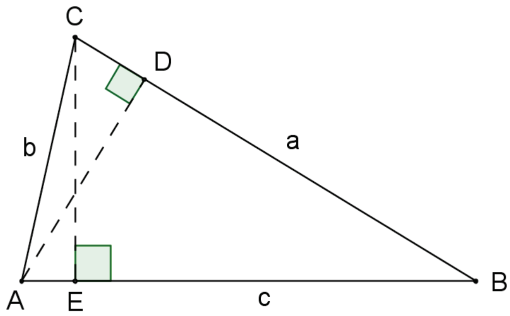


Figura 13 – Lei dos senos

No triângulo $\triangle CBE$, temos:

$$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{\overline{CE}}{a} \Rightarrow \overline{CE} = a \cdot \text{sen}\,\hat{B}. \tag{2.1}$$

No triângulo $\triangle ACE$, temos:

$$\text{sen}\,\hat{A} = \frac{\overline{CE}}{b} \Rightarrow \overline{CE} = b \cdot \text{sen}\,\hat{A}. \tag{2.2}$$

Comparando (2.1) com (2.2), segue que:

$$a \cdot \text{sen}\,\hat{B} = b \cdot \text{sen}\,\hat{A} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}}. \tag{2.3}$$

No triângulo $\triangle ABD$, temos:

$$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{\overline{AD}}{c} \Rightarrow \overline{AD} = c \cdot \text{sen}\,\hat{B}. \tag{2.4}$$

No triângulo $\triangle ACD$, temos:

$$\text{sen}\,\hat{C} = \frac{\overline{AD}}{b} \Rightarrow \overline{AD} = b \cdot \text{sen}\,\hat{C}. \tag{2.5}$$

Comparando (2.4) e (2.5), obtemos:

$$c \cdot \text{sen}\,\hat{B} = b \cdot \text{sen}\,\hat{C} \Rightarrow \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}}. \tag{2.6}$$

Comparando (2.3) e (2.6), concluímos que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}.$$

□

Aplicação 4: Lei dos cossenos

Em qualquer triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos duas vezes o produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo que eles formam.

Ou seja,

1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\hat{A}$;

2. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\hat{B}$;

3. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\hat{C}$.

Demonstração. Mostraremos apenas a segunda relação. As demonstrações das outras duas são análogas.

No triângulo da Figura 12, consideremos a altura relativa ao vértice C, conforme a Figura 14.

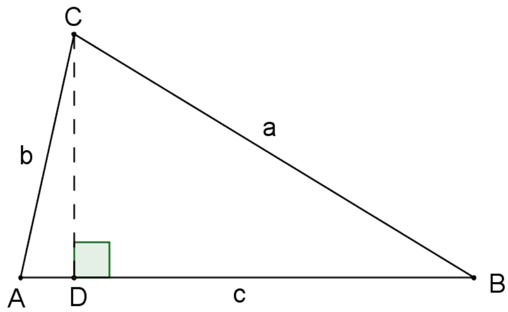


Figura 14 – Lei dos cossenos

No triângulo $\triangle BCD$, temos:

$$\cos\hat{B} = \frac{\overline{BD}}{a} \Rightarrow \overline{BD} = a \cdot \cos\hat{B}. \tag{2.7}$$

Temos também que:

$$a^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 \Rightarrow \overline{CD}^2 = a^2 - \overline{BD}^2. \tag{2.8}$$

Substituindo (2.7) em (2.8), obtemos:

$$\overline{CD}^2 = a^2 - (a \cdot \cos\hat{B})^2 \Rightarrow \overline{CD}^2 = a^2 - a^2 \cdot \cos^2\hat{B}. \tag{2.9}$$

No triângulo $\triangle ACD$, temos:

$$b^2 = \overline{CD}^2 + AD^2 \Rightarrow b^2 = \overline{CD}^2 + (c - \overline{BD})^2. \tag{2.10}$$

Substituindo (2.7) em (2.10), obtemos:

$$b^2 = \overline{CD}^2 + (c - a \cdot \cos\hat{B})^2 \Rightarrow \overline{CD}^2 = b^2 - (c^2 - 2ac \cdot \cos\hat{B} + a^2 \cdot \cos^2\hat{B}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{CD}^2 = b^2 - c^2 + 2ac \cdot \cos\hat{B} - a^2 \cdot \cos^2\hat{B}. \tag{2.11}$$

Comparando (2.9) e (2.11), concluimos que:

$$a^2 - a^2 \cdot \cos^2\hat{B} = b^2 - c^2 + 2ac \cdot \cos\hat{B} - a^2 \cdot \cos^2\hat{B} \Rightarrow a^2 = b^2 - c^2 + 2ac \cdot \cos\hat{B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\hat{B}.$$

$\square$

3 Funções

Neste capítulo, faremos uma breve revisão acerca das idéias fundamentais relacionadas ao conceito de função, importantíssimas no Ensino Médio e, particularmente, no ensino das funções trigonométricas.

3.1 Definição de função

Definição 3.1. *Sejam X e Y dois conjuntos quaisquer. Uma* ***função*** *é uma correspondência $f : X \to Y$ que, a cada elemento $x \in X$, associa um e somente um elemento $y \in Y$. Por simplicidade, usaremos o símbolo f para representar a função $f : X \to Y$. Além disso,*

- *os conjuntos X e Y são chamados* ***domínio*** *e* ***contradomínio*** *de f, respectivamente;*
- *o conjunto $f(X) = \{y \in Y; \exists x \in X, f(x) = y\} \subset Y$ é chamado* ***imagem*** *de f;*
- *dado $x \in X$, o único elemento $y = f(x) \in Y$ correspondente a x é chamado* ***imagem*** *de x por f.*

O diagrama da Figura 15 representa uma função $f : X \to Y$.

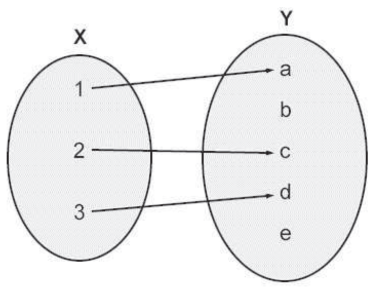


Figura 15 – Um exemplo de função

Segundo a definição 3.1, o domínio dessa função é o conjuto $X = \{1, 2, 3\}$ e o contradomínio é o conjunto $Y = \{a, b, c, d, e\}$. Já a imagem de f é o conjunto $f(X) = \{a, c, d\}$. Temos também que a é a imagem de $1 \in X$, c é a imagem de $2 \in X$ e d é a imagem de $3 \in X$.

O seguinte diagrama, na Figura 16, não pode representar uma função, já que contraria a definição 3.1 quando associa mais de um elemento de Y ao elemento $3 \in X$.

Convém aqui destacarmos um abuso de linguagem comumente utilizado pelos professores em sala de aula e pelos livros didáticos, que é utilizar termos do tipo "a função

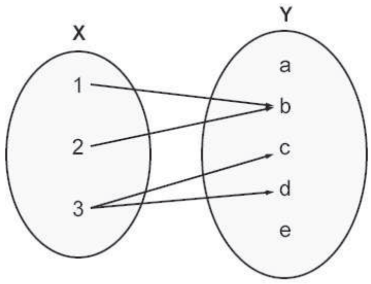


Figura 16 – Não representa uma função

$y = x + 1$" para se referir à função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a cada número real x associa o número real $x + 1$. Como acabamos de ver na definição 3.1, para que uma função esteja bem definida deve possuir três elementos fundamentais: domínio, contradomínio e lei de associação. Assim, $y = x + 1$ pode representar a lei de associação de uma função, mas não uma função. Tal abuso pode levar o aluno a desenvolver a concepção de que uma função é aquilo que possui fórmula. É importante também destacarmos que nem toda fórmula representa uma função, assim como nem toda função pode ser representada por uma fórmula. Por exemplo, sejam P o conjunto das regiões poligonais do plano e $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. A cada região poligonal do plano fazemos corresponder a sua área em $\mathbb{R}$. Essa correspondência é uma função de P em $\mathbb{R}$. Porém, não pode ser representada por uma fórmula. Da mesma forma, seja $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Esta fórmula não pode representar uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pois $f(0)$ não representa um número real.

Definição 3.2. *Consideremos uma função $f : X \to Y$.*

- *f é **injetiva** se $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$;*
- *f é **sobrejetiva** se $\forall y \in Y, \exists x \in X$ tal que $f(x) = y$;*
- *f é **bijetiva** se, e somente se, é **injetiva** e **sobrejetiva**.*

Os termos injetiva, sobrejetiva e bijetiva se popularizaram graças ao seu uso por Nicolas Bourbaki[1].

Pela definição acima, podemos ver que se uma função é injetiva, podem existir elementos do conjunto contradomínio que não perençam ao conjunto imagem da função. Da mesma forma, se uma função é sobrejetiva, então seu conjunto imagem é igual ao conjunto contradomínio. Já se a função for bijetiva, dizemos que há uma correspondência biunívoca entre seus conjuntos domínio e contradomínio.

A Figura 17 exemplifica a definição 3.2.

[1] Pseudônimo de um grupo de matemáticos, quase todos franceses, que se reuniu para escrever um tratado de Análise e acabou por reorganizar boa parte da Matemática desenvolvida até então, tomando como princípios a unidade da Matemática, as estruturas-mães (algébricas, topológicas e de ordem) e o método axiomático. (ESQUINCALHA, 2012)

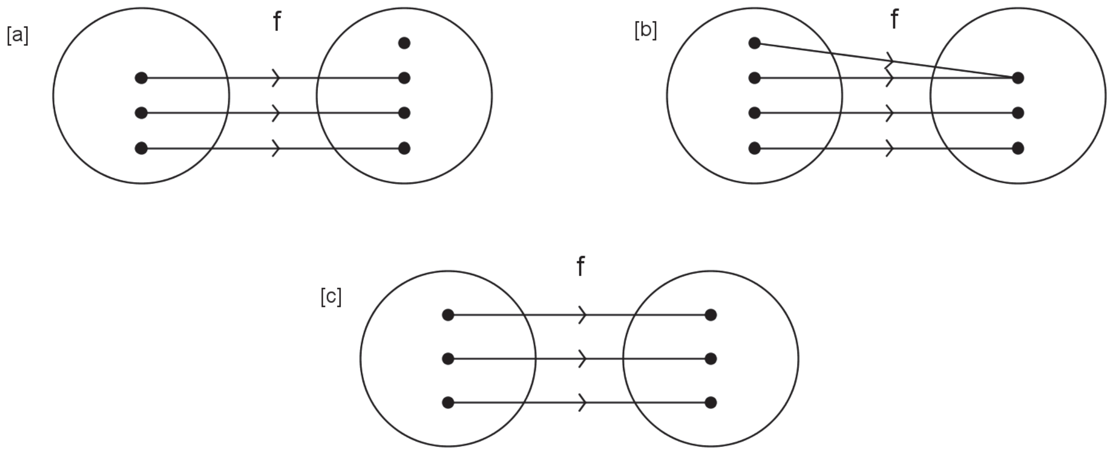


Figura 17 – Tipos de funções: [a] injetiva, [b] sobrejetiva e [c] bijetiva

3.2 O gráfico de uma função

Quando ouvimos falar em gráficos, geralmente temos a idéia de uma figura que deseja transmitir alguma informação, como por exemplo nos jornais e revistas, onde não é raro vermos resultados de pesquisas de opinião, variação de indicadores financeiros, entre outros. Em Matemática não é diferente e um de seus usos mais importantes é o gráfico de funções.

Definição 3.3. *Consideremos uma função $f : X \to Y$. O gráfico de f é o conjunto dos pontos $(x, f(x))$ tais que $x \in X$, ou seja, $\{(x, f(x)); x \in X\}$.*

Como exemplo, vejamos na Figura 18 o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3x + 2$.

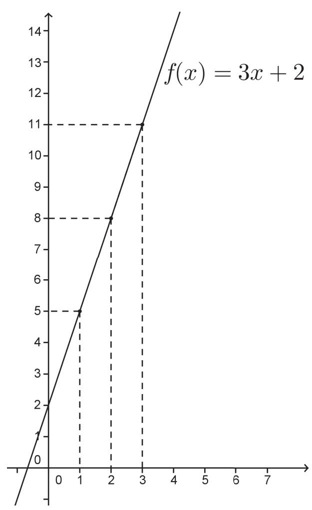


Figura 18 – Gráfico de $f(x) = 3x + 2$

Devemos lembrar que nem todo gráfico representa uma função. Pela definição 3.1, para que um gráfico represente uma função, qualquer linha vertical que tracemos não poderá intersectar o gráfico em mais de um ponto. Veja o exemplo abaixo, dado pela Figura 19.

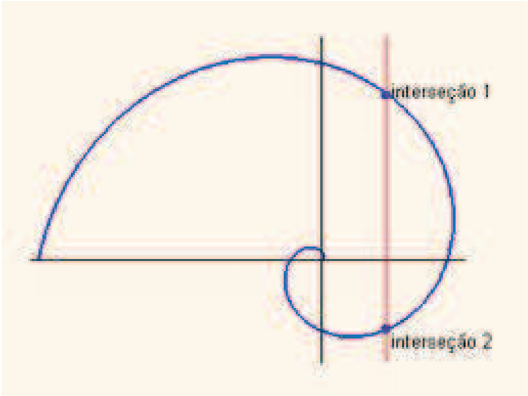


Figura 19 – Não representa o gráfico de uma função

3.3 Operações envolvendo funções

Inicialmente, vamos definir a igualdade entre duas funções.

Definição 3.4. *Sejam $f : D_f \to Y_1$ e $g : D_g \to Y_2$ duas funções. Dizemos que essas funções são iguais se:*

- *f e g possuem o mesmo domínio, ou seja, $D_f = D_g$;*
- *f e g possuem a mesma imagem para todos os elementos do domínio, ou seja, $f(x) = g(x)$, para todo $x \in D = D_f = D_g$.*

Devemos ter muito cuidado ao aplicarmos o conceito de igualdade de funções. Sempre prestamos muita atenção nas expressões analíticas das funções, mas sabemos que essa não é a única característica que as define. Por exemplo, sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$ duas funções tais que $f(x) = \dfrac{3x-6}{x-2}$ e $g(x) = 3$. Essas duas funções realizam exatamente as mesmas transformações a todos os elementos de seus domínios, só que há uma grande diferença entre elas: temos que $D_f = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 2\}$ e $D_g = \mathbb{R}$. Embora analiticamente as funções sejam praticamente iguais, já que para $x \neq 2$ temos $f(x) = \dfrac{3x-6}{x-2} = \dfrac{3(x-2)}{x-2} = 3$, elas possuem domínios diferentes e não podemos dizer que f e g são iguais. Além disso, temos $g(2) = 3$, mas f não está definida para $x = 2$, pois $2 \notin D_f$.

Agora, passemos a apresentar um pouco sobre as operações com funções, a saber, *soma, diferença, produto* e *quociente*. Para tanto, devemos definir não só as expressões analíticas, mas também o domínio de cada uma dessas novas funções. Assim temos:

Definição 3.5. *Sejam* $f : D_f \to \mathbb{R}$ *e* $g : D_g \to \mathbb{R}$ *duas funções. Temos que:*

Soma: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ *e* $D_{f+g} = D_f \cap D_g$*;*

Diferença: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ *e* $D_{f-g} = D_f \cap D_g$*;*

Produto: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ *e* $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$*;*

Quociente: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *e* $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R}; g(x) \neq 0\}$.

Resumindo, para calcularmos o domínio da soma, da diferença e do produto, basta intersectarmos os domínios das funções envolvidas em cada operação. O único caso que é relativamente diferente, e é normal que assim seja, ocorre com o quociente, onde é ainda necessário retirarmos todos os zeros da função do denominador.

Para exemplificar, vejamos um exemplo de soma e um de quociente.

Ex.: Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$ duas funções tais que $f(x) = \sqrt{2 - \dfrac{x}{2}} + 1$ e $g(x) = \dfrac{4x}{x-2}$. Tomando $D_f = \{x \in \mathbb{R}; x \leq 4\}$ e $D_g = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 2\}$, vamos definir a função $f + g : D_{f+g} \to \mathbb{R}$. Para a expressão analítica, temos:

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\
&= \sqrt{2 - \frac{x}{2}} + 1 + \frac{4x}{x-2} \\
&= \sqrt{2 - \frac{x}{2}} + \frac{5x-2}{x-2}.
\end{aligned}$$

Por definição, temos:

$$\begin{aligned}
D_{f+g} &= D_f \cap D_g \\
&= \{x \in \mathbb{R}; x \leq 4\} \cap \{x \in \mathbb{R}; x \neq 2\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}; x \leq 4 \text{ e } x \neq 2\}.
\end{aligned}$$

Agora vamos definir a função $\dfrac{f}{g} : D_{\frac{f}{g}} \to \mathbb{R}$. Temos que:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \\
&= \frac{\sqrt{2 - \frac{x}{2}} + 1}{\frac{4x}{x-2}} \\
&= \frac{(x-2)(\sqrt{2 - \frac{x}{2}} + 1)}{4x}.
\end{aligned}$$

Além disso, por definição:

$$
\begin{aligned}
D_{\frac{f}{g}} &= D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R}; g(x) \neq 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}; x \leq 4\} \cap \{x \in \mathbb{R}; x \neq 2\} \cap \{x \in \mathbb{R}; x \neq 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}; x \leq 4 \text{ e } x \neq 0 \text{ e } x \neq 2\}.
\end{aligned}
$$

3.4 Funções periódicas

Na natureza, temos inúmeros exemplos de fenômenos físicos que se repetem sem alteração cada vez que decorre um determinado intervalo de tempo. Por exemplo, os movimentos das marés, da radiação eletromagnética, da luz visível, dos pêndulos e das molas. Esses fenômenos são ditos periódicos e podem ser modelados matematicamente pelas funções definidas abaixo.

Definição 3.6. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é periódica quando existe um número real positivo P tal que $f(x) = f(x + P)$, para todo x real. O menor valor de P será chamado período de f.*

A Figura 20 mostra o gráfico de uma função periódica, obtido pela repetição de intervalos de comprimento P.

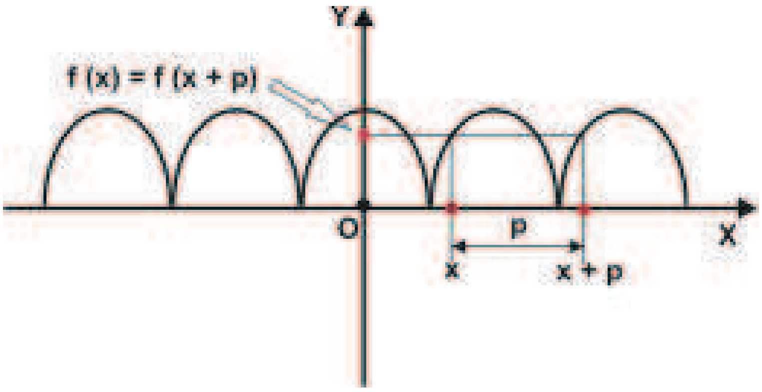


Figura 20 – Gráfico de uma função periódica de período P

O período P é o comprimento do intervalo no eixo x onde a imagem de f assume o mesmo valor.

Um exemplo de função periódica é a função *dente-de-serra*, definida como $f(x) = 0$ se $x \in \mathbb{Z}$ e $f(x + k) = k$ se $0 \leq k < 1$ e $x \in \mathbb{Z}$. Observemos o seu gráfico na Figura 21.

Notemos que o período dessa função é $P = 1$.

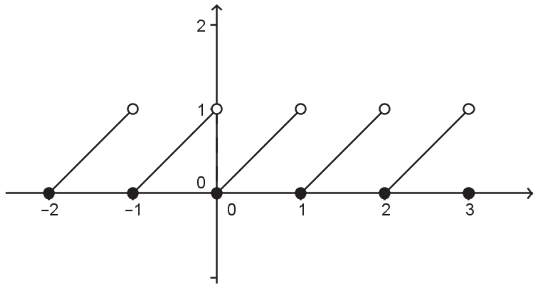


Figura 21 – Função dente-de-serra

Outro exemplo de função periódica é a função onda quadrada, definida por $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$ se $0 \leq x < 1$, $f(x) = -1$ se $-1 \leq x < 0$ e $f(x+2) = f(x)$.

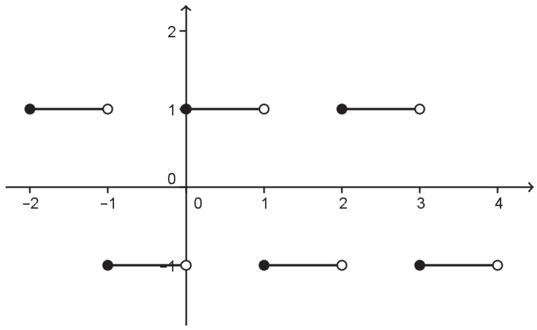


Figura 22 – Função onda quadrada

O período dessa função é $P = 2$.

No próximo capítulo, mostraremos que essas duas últimas funções podem ser escritas como somas infinitas de funções trigonométricas.

3.4.1 Propriedades

Sejam f e g duas funções periódicas de período P. Temos:

1. $f(x) + g(x)$ é também uma função periódica de período P;
2. $nf(x)$ é também uma função periódica de período P, para todo $n \in \mathbb{R}$;
3. $f(x) \cdot g(x)$ é também uma função periódica de período P;
4. $f(x+h)$ é também uma função periódica de período P, para todo h;
5. a função constante $f(x) = c$ é periódica de período P, para todo P.

Demonstração.

1. Temos $(f+g)(x+P) = f(x+P) + g(x+P) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$. Portanto, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ é uma função periódica de período P.

2. Seja $h(x) = nf(x)$. Assim, $h(x+P) = nf(x+P) = nf(x) = h(x)$. Logo, $h(x) = nf(x)$ é uma função periódica de período P, para todo $n \in \mathbb{R}$.

3. Temos que $(f \cdot g)(x+P) = f(x+P) \cdot g(x+P) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$. Portanto, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ é uma função periódica de período P.

4. Consideremos $f'(x) = f(x+h)$. Logo, $f'(x+P) = f((x+P)+h) = f((x+h)+P) = f(x+h) = f'(x)$. Com isso, temos que $f'(x) = f(x+h)$ é uma função periódica de período P, para todo $h \in \mathbb{R}$.

5. Basta notarmos que $f(x+P) = c = f(x)$, para todo $P \in \mathbb{R}$.

□

3.5 Funções pares e ímpares

Uma outra forma de classificarmos as funções é quanto a sua *paridade*, que é um conceito relacionado à simetria das funções.

Definição 3.7. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita par se $f(x) = f(-x)$, para todo x real.*

Geometricamente, dizemos que uma função é par se seu gráfico possui simetria em relação ao eixo Oy, conforme vemos na Figura 23.

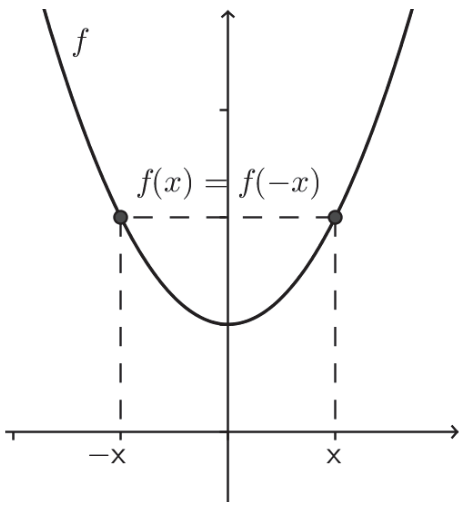


Figura 23 – Função Par

Alguns exemplos de funções pares são $f(x) = c$ (a função constante), $f(x) = |x|$ (a função modular) e $f(x) = x^n$, com n par.

Para ilustrar, vejamos os gráficos de algumas funções pares $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

Na Figura 24, temos o gráfico de $f(x) = x^2$.

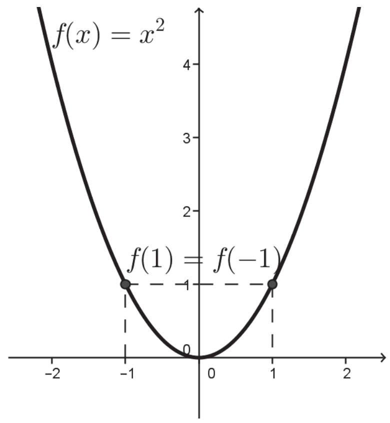


Figura 24 – $f(x) = x^2$

Na Figura 25, temos o gráfico de $f(x) = |x|$.

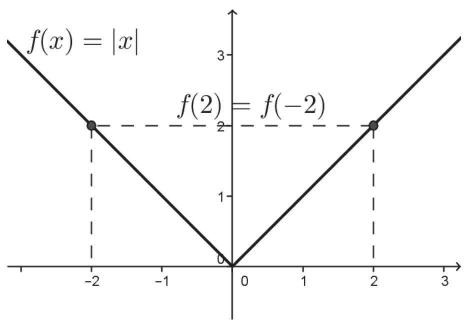


Figura 25 – $f(x) = |x|$

Na Figura 26, temos o gráfico de $f(x) = 2$.

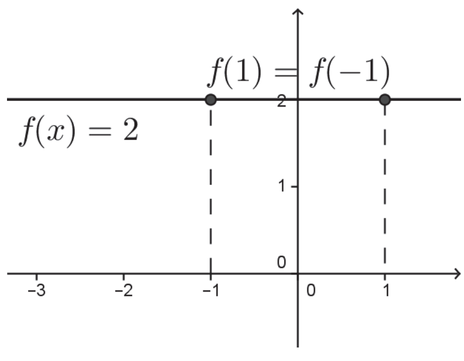


Figura 26 – $f(x) = 2$

Definição 3.8. *Uma função* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *é dita ímpar se* $f(x) = -f(-x)$*, para todo* x *real.*

Geometricamente, uma função é ímpar quando seu gráfico possui simetria em relação à origem, conforme ilustra a Figura 27.

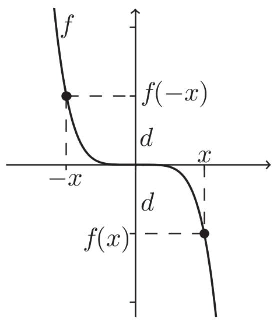


Figura 27 – Função ímpar

Alguns exemplos de funções ímpares são as funções $f(x) = x^n$, com n ímpar.

Na Figura 28, temos o gráfico de $f(x) = x$.

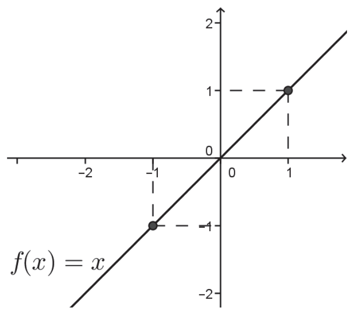


Figura 28 – f(x) = x

Na Figura 29, temos o gráfico de $f(x) = x^3$.

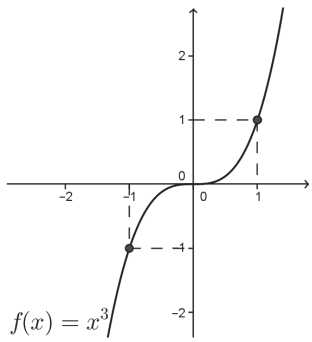


Figura 29 – $f(x) = x^3$

Devemos ainda ressaltar que existem funções que não são nem pares nem ímpares. Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3x + 1$ não é nem par nem ímpar. De fato, temos que $f(1) = 3 \cdot 1 + 1 = 3 + 1 = 4$ e $f(-1) = 3 \cdot (-1) + 1 = -3 + 1 = -2$. Logo, $f(1) \neq f(-1)$ e $f(1) \neq -f(-1)$. Na Figura 30, temos o gráfico desta função.

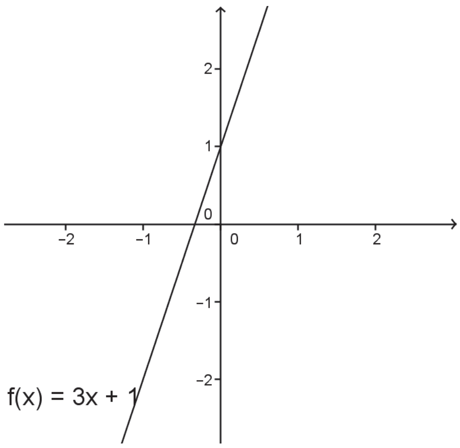


Figura 30 – $f(x) = 3x + 1$

4 Funções trigonométricas

Neste capítulo, vamos apresentar as funções trigonométricas. Partindo da função de Euler, definiremos as funções seno e cosseno como funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e, a partir destas, as demais funções trigonométricas, decorrendo daí várias relações importantes, bem como algumas propriedades, como periodicidade e paridade. Iniciaremos contextualizando a medida de um ângulo[1]. Apresentaremos também várias construções de gráficos de funções usando o software GeoGebra.

Há diversas maneiras para medirmos um ângulo, dependendo da unidade que iremos utilizar. As unidades mais usuais são o grau e o radiano. O grau é obtido pela divisão da circunferência em 360 partes iguais. O ângulo correspondente a cada uma dessas partes é um ângulo de medida $1°$.

Segundo Kennedy (1992),

> "a utilização de 360° numa revolução completa se deve principalmente aos babilônicos. A idéia de 360 partes em um cículo poderia ter resultado de uma estimativa ligeiramente errônea de 360 dias num ano. Todavia, parece provável que o sistema sexagesimal babilônico tenha precedido a divisão do círculo em 360 partes. Ainda esta razão existe como uma parte da história, mas não como uma parte da lógica ou do pensamento. Ao contrário do grau, o radiano é o resultado de estudos, principalmente, do matemático Thomas Muir e do físico James T. Thomsom que consideraram essencial a criação de uma nova unidade de medida para ângulos. Provavelmente, sua criação está ligada a simplificação de certas fórmulas matemáticas e físicas."

Vejamos inicialmente a definição de radiano como é comumente mostrada no Ensino Médio. Mais à frente mostraremos uma abordagem em torno da função de Euler.

Seja α um ângulo central que subtende um arco AB de comprimento c em um círculo de raio r, como mostra a Figura 31.

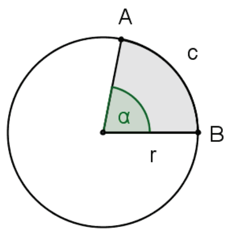


Figura 31 – O radiano

[1] Não trataremos aqui sobre a definição de ângulo, pois este não é o objetivo do nosso trabalho. Porém pode ser visto em Barbosa (2000, p.22-28)

Definição 4.1. *A medida de um arco em radianos é a razão entre o seu comprimento e o raio do círculo que o contém.*

Assim, a medida do arco AB em radianos é igual a $\frac{c}{r}$. A medida do ângulo α será igual à medida do arco AB.

Consideremos o círculo como sendo um arco de 360°. Sabemos que o seu comprimento é $c = 2\pi r$. Da definição 4.1, segue que $\frac{2\pi r}{r}$ rad $= 360°$, donde 2π rad $= 360°$. Daí, temos que π rad $= 180°$.

É comum que a unidade *rad* seja omitida nas sentenças matemáticas.

É sempre bom termos essa relação em mente, bem como saber que $\frac{\pi}{2} = 90°$, $\frac{\pi}{3} = 60°$, $\frac{\pi}{4} = 45°$ e $\frac{\pi}{6} = 30°$. Os demais arcos que utilizaremos podem ser deduzidos a partir dos que já temos.

4.1 A função de Euler

O matemático, físico, químico, astrônomo e engenheiro suiço Leonhard Euler (1707 – 1783) foi o primeiro cientista a dar importância ao conceito de função. Sua obra completa consta de mais de 870 artigos e livros e sua contribuição nas áreas da Geometria Analítica, da Trigonometria, do Cálculo e da Teoria dos Números foi enorme. Foi o matemático dominante de seu século. Com seus trabalhos, fez das funções uma parte central do Cálculo. Devemos a ele a notação $f(x)$ para denotar uma função que depende da variável x.

Em 1748, em sua obra *Introductio in analysin infinitorum*, Euler definiu função da seguinte forma: *"Uma função de uma variável é uma expressão analítica composta de uma maneira qualquer de quantidades variáveis e de números ou quantidades constantes."* (EULER, 1748, p.4)

Por "quantidade variável", ele escreveu:

> "É quantidade variável a quantidade indeterminada ou universal, que compreende absolutamente todo valor determinado. Assim, como todo valor determinado pode expressar-se em número, uma quantidade variável compreende absolutamente todos os números, não importando sua natureza. (...) Costuma-se representar tais quantidade variáveis pelas últimas letras do alfabeto, z, y, x, etc." (EULER, 1748, p.4)

Porém, Euler não definiu "expressão analítica".

Para Lima et al. (2003),

> "na definição de Euler, função é considerada apenas como uma *expressão analítica*, isto é, uma fórmula envolvendo as variáveis, números e constantes. O desenvolvimento da Matemática e da Física e a necessidade de resolver problemas cada vez mais complicados, forçou a generalização do conceito."

Segundo Rezende (2005),

> "um longo debate sobre um problema da corda vibrante envolvendo Euler, D'Alembert, Daniel Bernoulli e Lagrange acerca do significado de função provocou um novo entendimento sobre o conceito. (...) O debate durou vários anos e teve importantes consequências na evolução do conceito de função. O conceito foi estendido de modo a abranger funções definidas por expressões analíticas diferentes em diferentes intervalos e funções desenhadas à mão livre e que, possivelmente, não eram dadas por combinações de símbolos algébricos."

Em 1755, Euler dá uma nova definição para função, onde o termo "expressão analítica" já não aparece: *"se x denota uma quantidade variável, então todas as quantidades que dependem de x ou são determinadas por ele são chamadas suas funções."*

A Trigonometria tomou sua forma atual a partir da obra de Euler em 1748, quando ele adotou a medida do raio de um círculo como unidade e definiu as funções trigonométricas como funções de um número e não mais de um ângulo, criando assim a função E de Euler.

Seja C o círculo unitário de centro na origem, ou seja, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$, conforme a Figura 32.

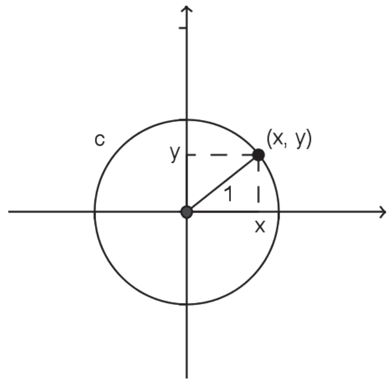


Figura 32 – Círculo unitário

Observemos que para todo $(x, y) \in C$, temos $-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$.

Definimos a *função de Euler* $E : \mathbb{R} \to C$ como sendo a relação que faz corresponder a cada número real t o ponto $E(t) = (x, y)$ do seguinte modo:

- $E(0) = (1, 0)$;
- se $t > 0$, percorremos sobre a circunferência C, a partir do ponto $(1, 0)$, um caminho de comprimento t no sentido positivo (anti-horário). Se $t < 0$, percorremos sobre a circunferência C um caminho de comprimento $|t|$ no sentido negativo (horário). O ponto final do caminho será chamado $E(t)$.

Para Lima et al. (2003), "a função de Euler pode ser imaginada como sendo o processo de enrolar a reta". Basta pensarmos na reta $\mathbb{R}$ como sendo um fio inextensível e na circunferência C como sendo um carretel, de modo que o ponto $0 \in \mathbb{R}$ coincida com o ponto $(1, 0) \in C$. Observemos a Figura 33.

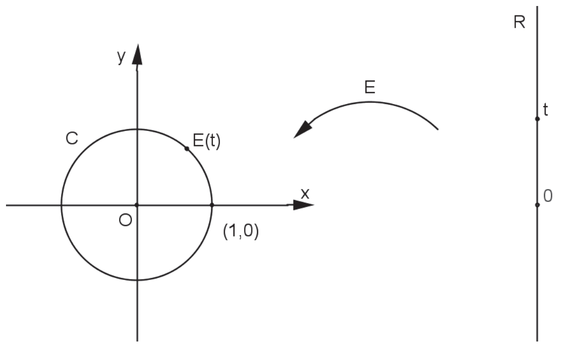


Figura 33 – Função de Euler

Para cada percurso descrito na reta $\mathbb{R}$ pelo ponto t, um percurso de igual comprimento é percorrido pelo ponto $E(t)$ sobre o círculo C, conforme ilustra a Figura 34.

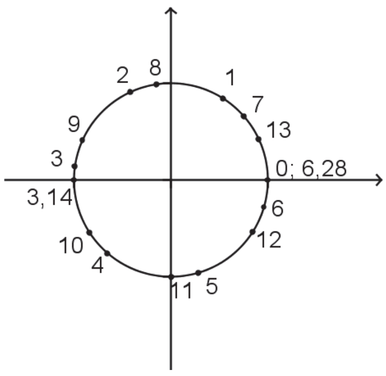


Figura 34 – A reta $\mathbb{R}$ "enrolada" no círculo unitário

Sendo $A = (1, 0)$ e $B = E(t)$, pela definição 4.1 o ângulo $\widehat{AOB}$ mede t radianos, pois o raio é unitário, como pode ser visto na Figura 35.

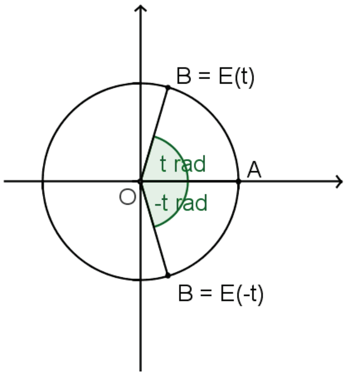


Figura 35 – O radiano no círculo unitário

Como o comprimento do círculo C é igual a 2π, quando o ponto t percorrer um percurso de comprimento 2π sobre a reta $\mathbb{R}$ o ponto $E(t)$ percorrerá uma volta completa sobre o círculo C, retornando ao ponto de partida. Assim, dado o círculo unitário da Figura 36, consideremos os pontos:

$E(0) = A, E\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = B, E(\pi) = C, E\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = D, E(2\pi) = A$ e $E\left(\dfrac{-\pi}{2}\right) = D.$

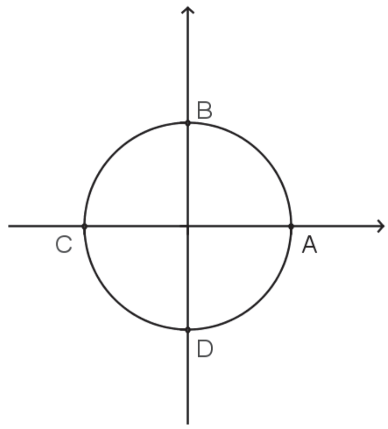


Figura 36 – Círculo Unitário

Com isso, podemos ver que a função de Euler não é uma função injetora, pois temos números reais distintos associados ao mesmo ponto do círculo unitário.

Podemos também definir uma função $G : \mathbb{R} \to C$ tal que $G(t) = E\left(\dfrac{2\pi}{360}t\right)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. A função G tem propriedades semelhantes às da função E, já que diferem apenas por um fator multiplicativo.

Se $t' = t + 360k$, com $k \in \mathbb{Z}$, temos $G(t') = G(t + 360k) = E\left(\dfrac{2\pi}{360}(t + 360k)\right) = E\left(\dfrac{2\pi t + 720k}{360}\right) = E\left(\dfrac{2\pi t}{360} + 2k\pi\right) = E\left(\dfrac{2\pi t}{360}\right) = G(t).$

Segundo Lima et al. (2003),

> "se $A = (1, 0)$, $O = (0, 0)$ e $B = G(s)$, diz-se que o ângulo $\angle AOB$ mede s *graus*. O ângulo $\angle AOB$ mede 1 grau quando $B = G(1)$, ou seja, quando o arco AB tem comprimento igual a $\dfrac{2\pi}{360}$. Noutras palavras, o ângulo de 1 grau é aquele que subtende um arco igual a $\dfrac{1}{360}$ da circunferência."

Como $2\pi\text{rad} = 360^\circ$, então $1\text{rad} = \left(\dfrac{360}{2\pi}\right)^\circ \cong 57,3^\circ$.

Para considerarmos os arcos até uma volta, devemos ter $-2\pi \leq t \leq 2\pi$. Vamos estender essa noção de medida de arco para $|t| > 2\pi$.

Seja $E(t) = P$. Percorrendo um comprimento igual a 2π, a partir do ponto P, sobre o círculo unitário, damos uma volta completa e retornamos ao ponto P. Logo, $E(t+2\pi) =$

$E(t)$. Realizando mais um percurso de comprimento 2π, damos mais uma volta completa e retornamos mais uma vez ao ponto P. Assim, $E(t+4\pi) = E(t+2\pi) = E(t)$. Em geral, temos $E(t+2k\pi) = E(t)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ e $t \in \mathbb{R}$. Com isso, mostramos que a função de Euler é periódica de período igual a 2π. Dizemos que $t+2k\pi$ são as *várias determinações de t* e que todos os arcos desse formato são *côngruos*. Por exemplo, para o arco $t = \dfrac{\pi}{4}$, temos a situação da Figura 37.

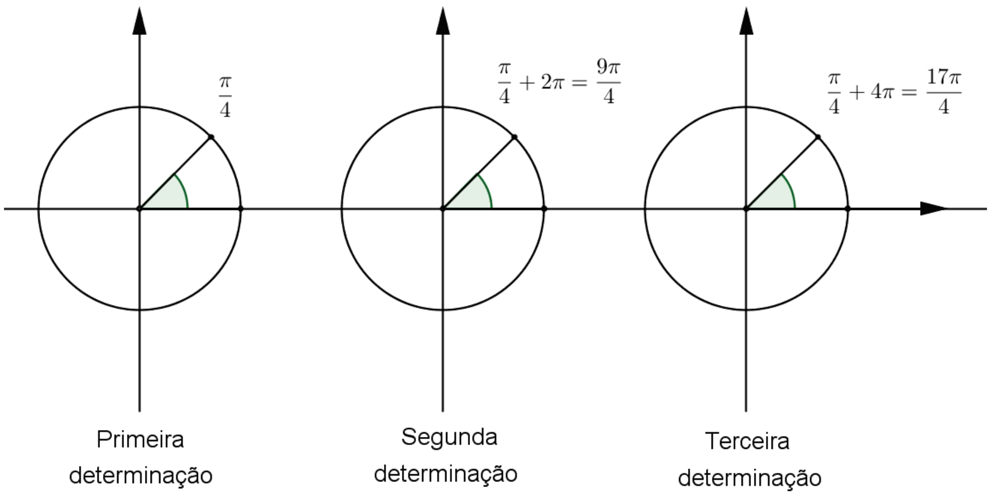


Figura 37 – Primeira, segunda e terceira determinações de $\dfrac{\pi}{4}$

Passemos agora ao estudo de algumas simetrias da função de Euler no círculo unitário. Para tanto, consideremos, sem perda de generalidade, $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ e seja $P = E(t)$.

Inicialmente, vejamos a simetria em relação ao eixo vertical, conforme a Figura 38.

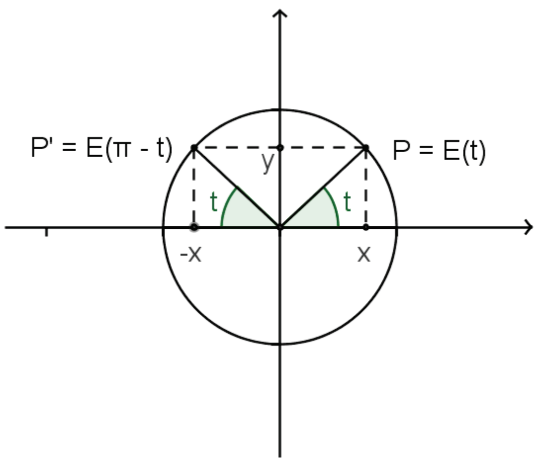


Figura 38 – Simetria da função de Euler em relação ao eixo vertical

O ponto P' é o simétrico de P em relação ao eixo vertical. Notemos que os ângulos em destaque são congruentes. Assim, se $E(t) = (x, y)$, então $E(\pi - t) = (-x, y)$.

Agora vejamos, conforme ilustra a Figura 39, a simetria em relação ao centro do círculo unitário.

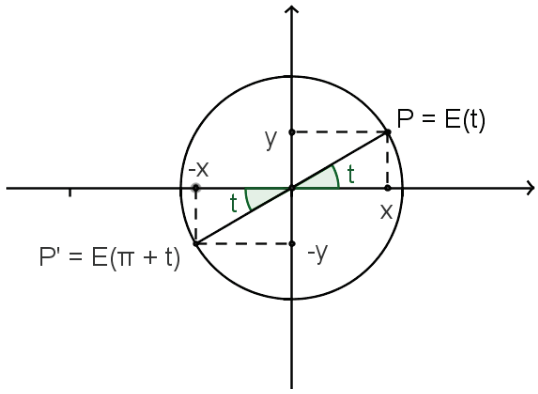


Figura 39 – Simetria da função de Euler em relação ao centro do círculo unitário

O ponto P' é o simétrico de P em relação ao centro do círculo unitário. Como os ângulos em destaque são opostos pelo vértice, eles são congruentes. Obervemos que o percurso do ponto P ao ponto P' possui comprimento igual a π. Assim, se $E(t) = (x, y)$, então $E(\pi + t) = (-x, -y)$.

Passemos ao caso da simetria em relação ao eixo horizontal, ilustrada na Figura 40.

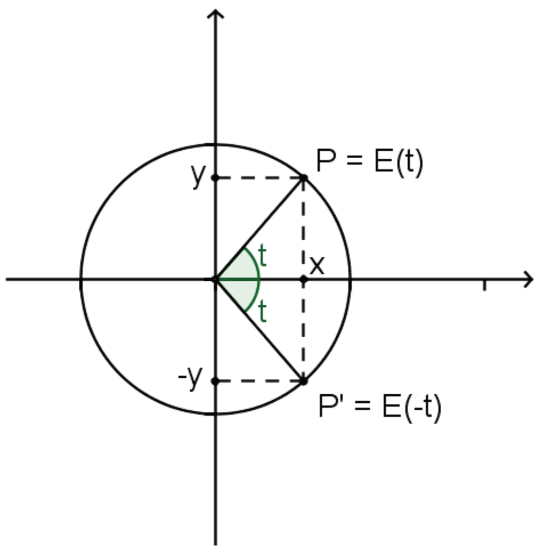


Figura 40 – Simetria da função de Euler em relação ao eixo horizontal

O ponto P' é o simétrico de P em relação ao eixo horizontal. Pela simetria dada, os pontos P e P' possuem a mesma abcissa e suas ordenadas são opostas. Assim, se $E(t) = (x, y)$, então $E(-t) = (x, -y)$.

Agora, vejamos o caso de $E\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$.

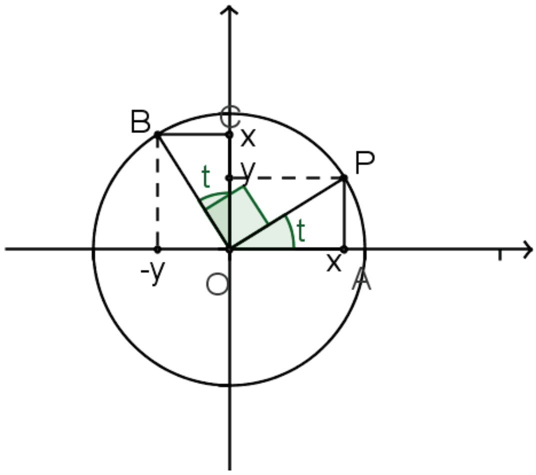


Figura 41 – $E\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$

Observe na Figura 41 que, pelo caso AAL de congruência de triângulos[2], os triângulos $\triangle AOP$ e $\triangle COB$ são congruentes. Logo, $OC = x$ e $BC = y$. Com isso, temos que $B = E\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = (-y, x)$. Portanto, se $E(t) = (x, y)$, então $E\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = (-y, x)$.

4.1.1 A abcissa e a ordenada da função de Euler

Seja $P_t = E(t)$ e consideremos que $x(P_t)$ e $y(P_t)$ são, respectivamente, a abcissa e a ordenada de P_t. Vamos definir as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(t) = x(P_t)$ e $g(t) = y(P_t)$. Como $P_t \in C$, temos que $-1 \leq x(P_t) \leq 1$ e $-1 \leq y(P_t) \leq 1$, ou seja, $-1 \leq f(t) \leq 1$ e $-1 \leq g(t) \leq 1$.

A seguir, apresentaremos duas constuções usando o software GeoGebra que geram os gráficos das funções f e g definidas acima e exibem algumas de suas propriedades.

Construção 2

- Com a ferramenta "círculo dados centro e raio", vamos construir o círculo unitário. Clique no ponto $(0, 0)$ e defina o ângulo como sendo igual a 1;
- com a ferramenta "ponto", marque o ponto $(1, 0)$;
- com a ferramenta "controle deslizante", vamos construir o intervalo de variação do nosso t, já que não é possível a visualização de toda a reta $\mathbb{R}$. Clique no local onde deseja inserir o controle deslizante e selecione a opção *número* e vamos definir um intervalo com valor mínimo -12.57 e valor máximo 12.57, com um incremento de 0.1. Clique em *aplicar*;

[2] Dados dois triângulos ABC e EFG, se $AB = EF$, $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$, então $ABC = EFG$ (BARBOSA, 2000, p.36)

- com a ferramenta "ângulo com amplitude fixa", vamos construir o nosso ângulo t. Clique no ponto B e em seguida no ponto A. Defina o ângulo igual ao controle deslizante a e escolha o sentido anti-horário. Clique em *Ok*. Com o botão direito do mouse, clique sobre o ponto criado e selecione a opção *renomear*. Renomeie para P;

- clique com o botão direito do mouse sobre o ângulo criado e selecione a opção *propriedades*. Na janela *básico* defina a legenda como t e na aba *exibir rótulo* selecione a opção *legenda*. Feche a janela;

- com a ferramenta "segmento", vamos construir o segmento AP. Clique sobre o ponto A e em seguida sobre o ponto P. Com o botão direito do mouse, clique sobre o segmento AP e selecione a opção *exibir rótulo*;

- clique na janela *opções* e selecione a aba *avançado*. Na janela *preferências - janela de visualização* clique na aba *eixo x* e no campo *unidade* selecione a opção π. Feche a janela;

- clique com o botão direito do mouse sobre o controle deslizante e selecione a opção *animar*. Esta é a função de Euler "enrolando a reta". Observe que o período é igual a 2π. Para parar a animação, clique novamente com o botão direito do mouse sobre o controle deslizante e selecione a opção *animar*;

- no campo entrada, digite $b = x(P)$. Pressione *enter*;

- no campo entrada, digite $f(t) = b$. Pressione *enter*. Esta é a função f que definimos acima;

- clique com o botão direito do mouse sobre o controle deslizante e selecione a opção *animar*. Note que $-1 \leq f(t) \leq 1$. Para parar a animação, clique novamente com o botão direito do mouse sobre o controle deslizante e selecione a opção *animar*;

- com o botão direito do mouse, clique sobre a função f e selecione a opção *exibir objeto*;

- no campo entrada, digite $D = (a, b)$. Pressione *enter*. Com o botão direito do mouse, clique sobre o ponto D e selecione a opção *habilitar rastro*. Clique com o botão direito do mouse sobre o controle deslizante e selecione a opção *animar*. Temos o ponto D percorrendo o gráfico da função f (Figura 42). Isto porque, devido ao incremento do controle deslizante, o ponto D não percorre todos os pontos do domínio da função f. Observe que f é periódica de período igual a 2π. Observe também que ela é simétrica em relação ao eixo Oy, ou seja, a função f é uma função par. Clique com o botão direito do mouse sobre o controle deslizante e selecione a opção *animar*.

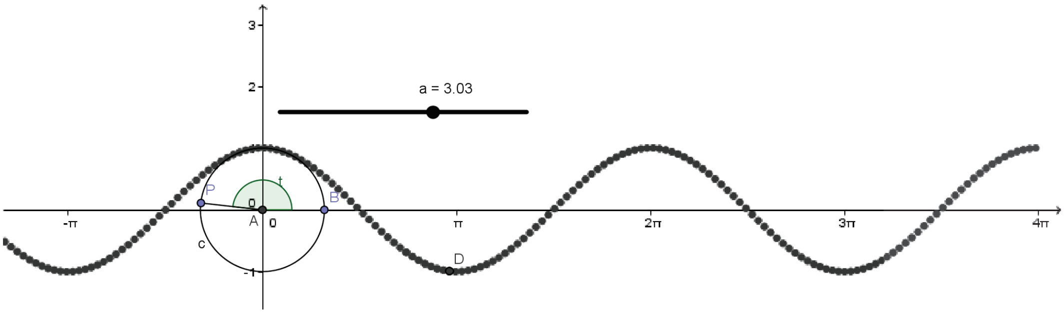


Figura 42 – Ponto D percorrendo o gráfico da função $f(t)$

Ainda com o auxílio do GeoGebra, vejamos alguns “valores notáveis” da função $f(t)$. São eles:

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(t)$	1	0	-1	0	1

Além disso,

t	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$f(t)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Construção 3

- Com a ferramenta “círculo dados centro e raio”, vamos construir o círculo unitário. Clique no ponto $(0, 0)$ e defina o ângulo como sendo igual a 1;

- com a ferramenta “ponto”, marque o ponto $(1, 0)$;

- com a ferramenta “controle deslizante”, vamos construir o intervalo de variação do nosso t, já que não é possível a visualização de toda a reta $\mathbb{R}$. Clique no local onde deseja inserir o controle deslizante e selecione a opção *número* e vamos definir um intervalo com valor mínimo -12.57 e valor máximo 12.57, com um incremento de 0.1. Clique em *aplicar*;

- com a ferramenta “ângulo com amplitude fixa”, vamos construir o nosso ângulo t. Clique no ponto B e em seguida no ponto A. Defina o ângulo igual ao controle deslizante a e escolha o sentido anti-horário. Clique em *Ok*. Com o botão direito do mouse, clique sobre o ponto criado e selecione a opção *renomear*. Renomeie para P;

- clique com o botão direito do mouse sobre o ângulo criado e selecione a opção *propriedades*. Na janela *básico* defina a legenda como t e na aba *exibir rótulo* selecione a opção *legenda*. Feche a jenela;

- com a ferramenta "segmento", vamos construir o segmento AP. Clique sobre o ponto A e em seguida sobre o ponto P. Com o botão direito do mouse, clique sobre o segmento AP e selecione a opção *exibir rótulo*;

- clique na janela *opções* e selecione a aba *avançado*. Na janela *preferências - janela de visualização* clique na aba *eixo x* e no campo *unidade* selecione a opção π. Feche a janela;

- no campo entrada, digite $b = y(P)$. Pressione *enter*;

- no campo entrada, digite $g(t) = b$. Pressione *enter*. Esta é a função g que definimos acima;

- clique com o botão direito do mouse sobre o controle deslizante e selecione a opção *animar*. Note que $-1 \leq g(t) \leq 1$. Para parar a animação, clique novamente com o botão direito do mouse sobre o controle deslizante e selecione a opção *animar*;

- com o botão direito do mouse, clique sobre a função g e selecione a opção *exibir objeto*;

- no campo entrada, digite $D = (a, b)$. Pressione *enter*. Com o botão direito do mouse, clique sobre o ponto D e selecione a opção *habilitar rastro*. Clique com o botão direito do mouse sobre o controle deslizante e selecione a opção *animar*. Temos o ponto D percorrendo o gráfico da função g (Figura 43). Observe que g é periódica de período igual a 2π. Observe também que ela é simétrica em relação à origem do sistema de coordenadas, ou seja, a função g é uma função ímpar. Para parar a animação, clique novamente com o botão direito do mouse sobre o controle deslizante e selecione a opção *animar*.

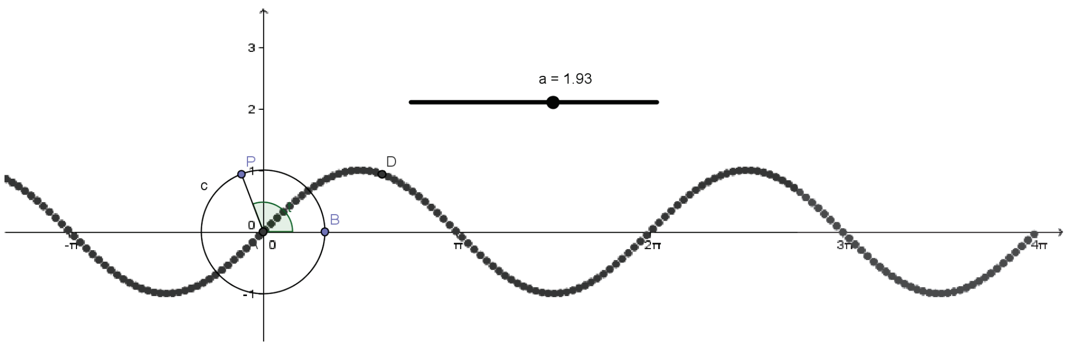


Figura 43 – Ponto D percorrendo o gráfico da função $g(t)$

Da mesma forma que fizemos para a função f, vejamos alguns valores notáveis da função $g(t)$.

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$g(t)$	0	1	0	-1	0

Além disso,

t	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$g(t)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Por definição, temos que $f(t) = x(P_t)$ e $g(t) = y(P_t)$, onde $E(t) = (x(P_t), y(P_t)) = (f(t), g(t))$. Pela simetria da função de Euler em relação ao eixo horizontal, temos que $E(-t) = (x(P_t), -y(P_t)) = (f(-t), g(-t))$. Logo, $f(t) = f(-t)$ e $g(t) = -g(-t)$. Assim, mostramos que f é uma função par e g é uma função ímpar. Podemos também observar que a função f satisfaz a definição de função par para os valores mostrados na tabela a seguir, assim como a função g satisfaz as condições para que uma função seja ímpar.

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$	$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$
$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0,5$	$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0,5$
$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,71$	$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0,71$
$\vdots$	$\vdots$

$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$	$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$
$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0,87$	$g\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -0,87$
$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,71$	$g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -0,71$
$\vdots$	$\vdots$

4.2 As funções seno e cosseno

A partir de agora, vamos definir as funções trigonométricas, onde daremos destaque ao estudo geométrico de suas propriedades, estendendo nossas interpretações ao *ciclo trigonométrico*, definido da seguinte forma:

Definição 4.2. *Chamamos ciclo trigonométrico a circunferência unitária de centro na origem* $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}; x^2 + y^2 = 1\}$, *orientada no sentido anti-horário a partir do ponto* $(1, 0)$.

O ciclo trigonométrico é dividido pelos eixos Ox e Oy em quatro partes iguais, chamadas de *quadrantes*.

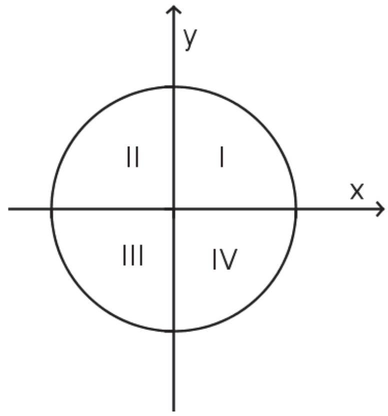


Figura 44 – O ciclo trigonométrico

Definição 4.3. *Definimos as funções* $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *como sendo, respectivamente, a ordenada e a abcissa do ponto* $E(t)$*, determinado pela função de Euler, no ciclo trigonométrico, para todo* $t \in \mathbb{R}$*. Ou seja,* $E(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$*.*

Da definição 4.3, segue que $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$, já que $(\cos t, \operatorname{sen} t) \in C$. Esta é a chamada *relação fundamental da trigonometria*.

Na seção 4.1.1, definimos duas funções f e g de modo que $E(t) = (f(t), g(t))$. Logo, podemos concluir que $f(t) = \cos t$ e $g(t) = \operatorname{sen} t$. Assim, as funções seno e cosseno guardam as mesmas propriedades de f e g. Portanto, as funções seno e cosseno são periódicas de período igual a 2π. Além disso, temos que o seno é uma função ímpar e o cosseno é uma função par.

Os gráficos das funções seno e cosseno também são os mesmos das funções g e f, respectivamente. Assim, o gráfico da função seno é o mesmo da Figura 45.

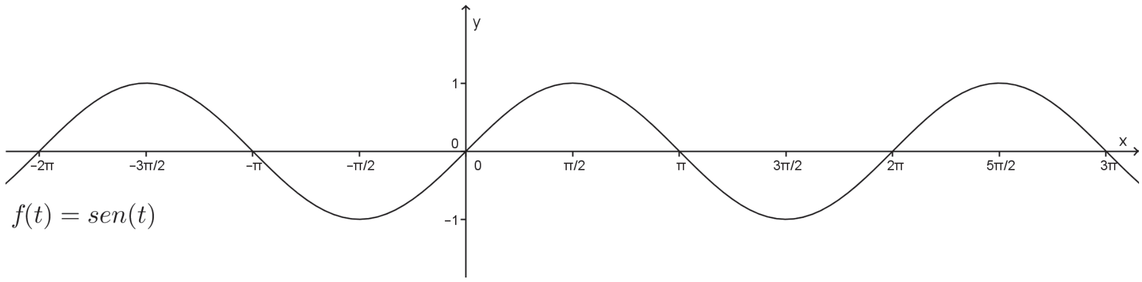


Figura 45 – O gráfico da função seno

Seus valores notáveis são os seguintes:

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\operatorname{sen} t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

Já o gráfico da função cosseno é mostrado na Figura 46.

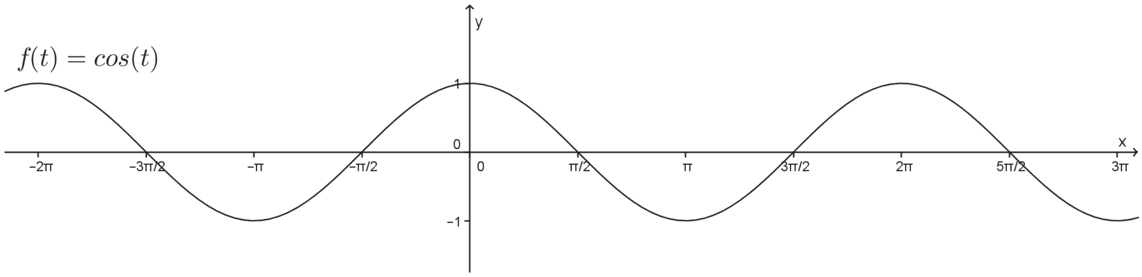


Figura 46 – O gráfico da função cosseno

Da mesma forma, a função cosseno possui os seguintes valores notáveis.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	0	-1	0	1

Nos gráficos, podemos ver que as funções seno e cosseno são contínuas em todo o seu domínio.

A função seno tem seus zeros em $t = k\pi$, para todo $k \in \mathbb{R}$. Ela é positiva em $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$ e é negativa em $(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Seu mínimo absoluto possui valor -1 e ocorre em $t = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e seu máximo absoluto é igual a 1 em $t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Ela é crescente se $t \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ e é decrescente se $t \in \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Possui pontos de inflexão em $t = k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Já a função cosseno tem seus zeros em $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, para todo $k \in \mathbb{R}$. Ela é positiva em $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ e é negativa em $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Seu mínimo absoluto possui valor -1 e ocorre em $t = \pi + 2k\pi$ e seu máximo absoluto é igual a 1 em $t = 2k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Ela é crescente se $t \in [\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$ e é decrescente se $t \in [2k\pi, \pi + 2k\pi]$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Possui pontos de inflexão em $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

A construção a seguir, realizada utilizando o software GeoGebra, ilustra as propriedades mencionadas acima no ciclo trigonométrico.

Construção 4

- Com a ferramenta "círculo dados centro e raio", vamos construir o círculo unitário. Clique no ponto $(0, 0)$ e defina o ângulo como sendo igual a 1;
- com a ferramenta "ponto", marque o ponto $(1, 0)$;
- com a ferramenta "ponto em objeto", clique sobre o ciclo em uma região pertencente ao primeiro quadrante;
- com a ferramenta "ângulo", clique sobre os pontos B, A e C, nesta ordem. Esse será o ângulo que iremos analisar. Para fins de ilustração, com a ferramenta "mover", movimente o ponto C sobre o círculo e observe a mudança nos valores do ângulo α;
- para melhorar a visualização, clique sobre o ângulo α com o botão direito do mouse e selecione a opção *exibir rótulo*. Faça o mesmo para a circunferência unitária;
- com a ferramenta "reta perpendicular", clique sobre o eixo Oy e sobre o ponto C. Em seguida, clique sobre o eixo Ox e sobre o ponto C;
- com a ferramenta "segmento", marque os segmentos AC, AD, AE, CD e CE. Clique sobre todos eles com o botão direito do mouse e selecione a opção *exibir rótulo*;
- clique sobre as retas definidas anteriormente com o botão direito do mouse e selecione a opção *exibir objeto*;
- observe que o triângulo $\triangle ACE$ é retângulo no vértice E. Aplicando a definição de seno no triângulo $\triangle ACE$, temos que $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\overline{CE}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{CE}}{1} = \overline{CE}$, pois AC é o raio unitário. Observe que $ADCE$ é um retângulo. Logo, $\overline{CE} = \overline{AD}$. Sendo assim, clique sobre o segmento AD com o botão direito do mouse e selecione a opção *renomear*. Renomeie para seno;
- da mesma forma e aplicando a definição de cosseno no triângulo $\triangle ACE$, temos que $\cos\alpha = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AE}}{1} = \overline{AE}$, pois AC é o raio unitário. Com isso, clique sobre o segmento AE com o botão direito do mouse e selecione a opção *renomear*. Renomeie para cosseno;
- para melhorar a visualização, clique com o botão direito do mouse sobre o ponto B e selecione a opção *exibir objeto*. Clique também sobre os pontos A, D e E e selecione a opção "exibir rótulo". Na aba "opções", selecione a janela *avançado*. Na aba "preferências - janela de visualização", clique nos itens *eixo x* e *eixo y* e desmarque a opção *exibir números*. Feche a janela;
- com a ferramenta "mover" você pode movimentar o ponto C e observar que para cada valor de α os valores de seno e cosseno se alteram. Você pode "testar" várias

das propriedades que já estudamos até aqui, como por exemplo os valores notáveis que calculamos na seção 2.3, e verificar a validade da relação fundamental, bem como as relações para ângulos complementares.

Não podemos deixar de notar que os valores de seno e cosseno são, respectivamente, as projeções do raio do ciclo trigonométrico sobre os eixos Oy e Ox. Devido a isso, chamamos o eixo Oy de *eixo dos senos* e o eixo Ox de *eixo dos cossenos*, conforme ilustra a Figura 47.

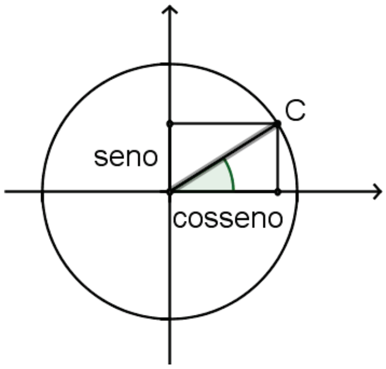


Figura 47 – Seno e cosseno no 1º quadrante

Vamos agora estender o que foi visto para o 2º quadrante. Vamos utilizar a simetria da função de Euler em relação ao eixo vertical. Como visto na Figura 38, se $E(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, então $E(\pi - t) = (-\cos t, \operatorname{sen} t)$. Assim, $\operatorname{sen}(\pi - t) = \operatorname{sen} t$ e $\cos(\pi - t) = -\cos t$.

Para estendermos ao terceiro quadrante, observe a Figura 39, que mostra a simetria da função de Euler em relação ao centro do círculo. Temos que se $E(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, então $E(\pi + t) = (-\cos t, -\operatorname{sen} t)$. Logo, $\operatorname{sen}(\pi + t) = -\operatorname{sen} t$ e $\cos(\pi + t) = -\cos t$.

Agora, vejamos o caso do quarto quadrante. Na Figura 40, temos a simetria da função de Euler em relação ao eixo Ox. Se $E(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, então $E(-t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t)$. Com isso, $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$ e $\cos(-t) = \cos t$.

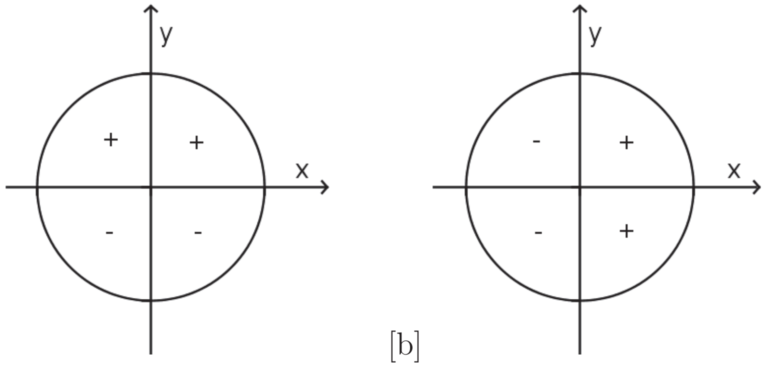
Verifiquemos no GeoGebra.

Construção 5

- Com a ferramenta “círculo dados centro e raio”, vamos construir o círculo unitário. Clique no ponto $(0, 0)$ e defina o ângulo como sendo igual a 1;
- com a ferramenta “ponto”, marque o ponto $(1, 0)$;
- com a ferramenta “ponto em objeto”, clique sobre o ciclo;
- com a ferramenta “segmento”, trace o segmento AC;

- com a ferramenta "ângulo", clique sobre os pontos B, A e C, nesta ordem;
- com a ferramenta "reta perpendicular", clique sobre o eixo Oy e sobre o ponto C. Em seguida, clique sobre o eixo Ox e sobre o ponto C;
- com a ferramenta "interseção de dois objetos", marque a interseção entre a reta b e o eixo Oy e a interseção entre a reta d e o eixo Ox;
- com a ferramenta "segmento", trace os segmentos CD e CE;
- para melhorar a visualização, clique sobre o ângulo α com o botão direito do mouse e selecione a opção *exibir rótulo*. Faça o mesmo para a circunferência unitária e para o segmentos AC, CD e CE. Clique com o mesmo botão sobre as duas retas criadas anteriormente e selecione a opção *exibir objeto*;
- como já vimos na construção anterior, o segmento AE e o segmento AD representam, respectivamente, $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$. Com a ferramenta "segmento", trace os segmentos AE e AD;
- clique com o botão direito do mouse sobre o segmento AE e selecione a opção *propriedades*. Na aba básico, clique no campo *legenda* e digite "seno". No item *exibir rótulo*, selecione a opção *legenda*. Na aba *cor*, selecione a opção *vermelho*. Feche a janela;
- clique com o botão direito do mouse sobre o segmento AD e selecione a opção *propriedades*. Na aba básico, clique no campo *legenda* e digite "cosseno". No item *exibir rótulo*, selecione a opção *legenda*. Na aba *cor*, selecione a opção *verde*. Feche a janela;
- para melhorar a visualização, clique com o botão direito do mouse sobre os pontos A, B, D e E e selecione a opção *exibir objeto*. Clique na aba "opções" e selecione a janela *avançado*. Na aba "preferências - janela de visualização", clique nos itens *eixo x* e *eixo y* e desmarque a opção *exibir números*. Feche a janela;
- já sabemos que, de acordo com a função de Euler, o $\operatorname{sen}\alpha$ e o $\cos\alpha$ são respectivamente a ordenada e a abcissa do ponto C. Então, no campo "entrada", digite seno = y(C). Em seguida, digite cosseno = x(C);
- movimente o ponto C por toda a circunferência e verifique todas as propriedades apresentadas anteriormente.

Desta forma, podemos movimentar o ponto C sobre a circunferência e ver que o seno é positivo nos dois primeiros quadrantes e negativo nos dois últimos. Podemos ver também que o cosseno é positivo no primeiro e no último quadrantes e negativo no segundo e no terceiro, conforme ilustra a Figura 48.



[a] [b]

Figura 48 – [a] Sinais do seno e [b] sinais do cosseno

Podemos ver também que o seno cresce no primeiro quadrante, decresce no segundo e no terceiro e volta a crescer no quarto quadrante. Já o cosseno é decrescente nos dois primeiros quadrantes e crescente nos dois últimos.

Vamos ver os gráficos das funções seno e cosseno a partir do ciclo trigonométrico.

Construção 6

- Com a ferramenta "círculo dados centro e raio", vamos construir o círculo unitário. Clique no ponto $(0, 0)$ e defina o ângulo como sendo igual a 1;
- com a ferramenta "ponto", marque o ponto $(1, 0)$;
- com a ferramenta "controle deslizante", selecione a opção *ângulo* e o defina no intervalo de, por exemplo, $-720°$ a $720°$, com um incremento igual a $5°$. Clique em *aplicar*;
- com a ferramenta "ângulo com amplitude fixa", clique sobre o ponto B e em seguida sobre o ponto A. Na janela que aparecer, defina o ângulo como sendo α, no sentido anti-horário;
- no campo "entrada", digite $P = (\alpha, \operatorname{sen} \alpha)$;
- clique na aba "opções" e selecione a janela *avançado*. Na aba "preferências - janela de visualização", clique no item *eixo x*. Marque o item *distância* e selecione a opção $\frac{\pi}{2}$. No item *unidade*, selecione a opção π. Feche a janela;
- com o botão direito do mouse, clique sobre o ponto P e selecione a opção *habilitar rastro*;
- com o botão direito do mouse, clique sobre o controle deslizante e selecione a opção *animar*;

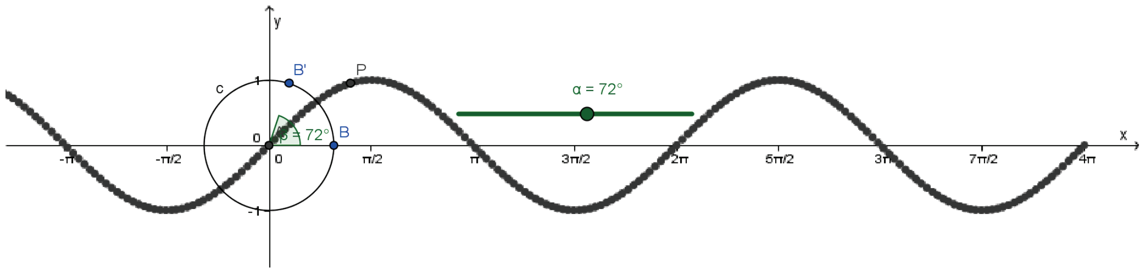


Figura 49 – Ponto P percorrendo o gráfico da função seno

Na representação da Figura 49, temos o ponto P percorrendo o gráfico da função seno. Da mesma forma, façamos para a função cosseno.

Construção 7

- Com a ferramenta "círculo dados centro e raio", vamos construir o círculo unitário. Clique no ponto $(0, 0)$ e defina o ângulo como sendo igual a 1;
- com a ferramenta "ponto", marque o ponto $(1, 0)$;
- com a ferramenta "controle deslizante", selecione a opção *ângulo* e o defina no intervalo de, por exemplo, $-720°$ a $720°$, com um incremento igual a $5°$. Clique em *aplicar*;
- com a ferramenta "ângulo com amplitude fixa", clique sobre o ponto B e em seguida sobre o ponto A. Na janela que aparecer, defina o ângulo como sendo α, no sentido anti-horário;
- no campo "entrada", digite $P = (\alpha, \cos\alpha)$;
- clique na aba "opções" e selecione a janela *avançado*. Na aba "preferências - janela de visualização", clique no item *eixo x*. Marque o item *distância* e selecione a opção $\frac{\pi}{2}$. No item *unidade*, selecione a opção π. Feche a janela;
- com o botão direito do mouse, clique sobre o ponto P e selecione a opção *habilitar rastro*;
- com o botão direito do mouse, clique sobre o controle deslizante e selecione a opção *animar*.

Na Figura 50, temos o ponto P percorrendo o gráfico da função cosseno.

Com isso, acreditamos ter mostrado que a Trigonometria no triângulo retângulo e a Trigonometria no ciclo trigonométrico não são conteúdos diferentes, desconectados, que apenas possuem um nome em comum. Acreditamos ter mostrado que um está diretamente ligado ao outro através de suas propriedades geométricas.

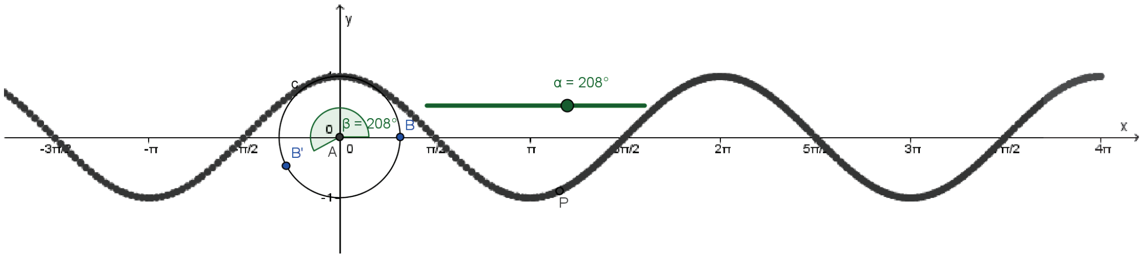


Figura 50 – Ponto P percorrendo o gráfico da função cosseno

4.2.1 Análise de Fourier

Nesta seção, apresentaremos uma introdução às séries de Fourier, ilustrando com um exemplo. Para maiores detalhes consultar Figueiredo (2012).

> "A importância das funções trigonométricas foi grandemente reforçada com a descoberta de Joseph Fourier, em 1822, de que toda função periódica (com ligeiras e naturais restrições) é uma soma (finita ou infinita) de funções do tipo $a \cdot \cos nx + b \cdot \operatorname{sen} nx$. Para que se tenha uma idéia da relevância desse fato, que deu origem à chamada Análise de Fourier, basta dizer que, segundo o banco de dados da revista *Mathematical Reviews*, o nome mais citado nos títulos de trabalhos matemáticos nos últimos 50 anos é o de Fourier." (LIMA et al., 1997, p. 209)

Jean-Baptiste Joseph Fourier foi um matemático e físico francês que viveu entre os anos de 1768 e 1830. Em 1822, em seu trabalho *Théorie Analytique de la Charleur* sobre a propagação do calor, Fourier afirmou que uma função de uma variável, contínua ou descontínua, pode ser expandida em uma série de senos de múltiplos da variável. Embora este resultado estivesse incorreto, a observação de que algumas funções descontínuas podem ser escritas como somas de séries infinitas representou um grande avanço. Este resultado foi melhorado pelos matemáticos Johann Dirichlet, François Budan de Boislaurent e Jacques Charles François Sturm, que em 1829 apresentou a versão final do que hoje é conhecido como Teorema de Fourier.

Hoje, a análise de Fourier é uma das técnicas matemáticas mais utilizadas na prática. É amplamente utilizada nas áreas mais diversas das ciências aplicadas e nas engenharias. Constitui a base do processamento de sinais, tendo assim um papel central no ramo das telecomunicações. É através dela que se retira a voz das canções para fazer karaoke, bem como a compressão de imagens no formato JPEG.

"Portanto, representações em série de Fourier de funções como uma superposição de senos e cossenos têm sido muito úteis para soluções analíticas e numéricas de equações diferenciais e para análises e tratamento de sinais" (BOLZAN, 2004).

Fourier, em sua teoria de análise de frequência, afirmou que qualquer função periódica $f(x)$ é a somatória de $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)]$. Ou seja, que qualquer função periódica pode ser expressa como uma soma de senos e cossenos.

Quando o período da função $f(x)$ for igual a 2π, teremos $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, $a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx$ e $b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(kx)dx$.

Sobre essa "igualdade", devemos notar que estamos mostrando uma relação entre uma função e uma série. Para verificar isso, teríamos que falar em convergência, que não é um dos objetivos do nosso trabalho. Então vamos assumir a igualdade sob a hipótese de que a função f seja contínua por partes.

Generalizando para o caso em que o período é igual a $2L$, temos que $a_0 = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)dx$, $a_k = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\dfrac{k\pi x}{L}\right)dx$ e $b_k = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{k\pi x}{L}\right)dx$. Note que se $L = \pi$, ou seja, se o período for igual a 2π, voltamos ao caso anterior.

Com esses novos coeficientes, temos $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos\left(\dfrac{k\pi x}{L}\right) + b_k\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{k\pi x}{L}\right)\right]$, que é a série de Fourier generalizada para o período $2L$.

É interessante observarmos que $f(x)$ pode ser vista como sendo a soma da série para cada x.

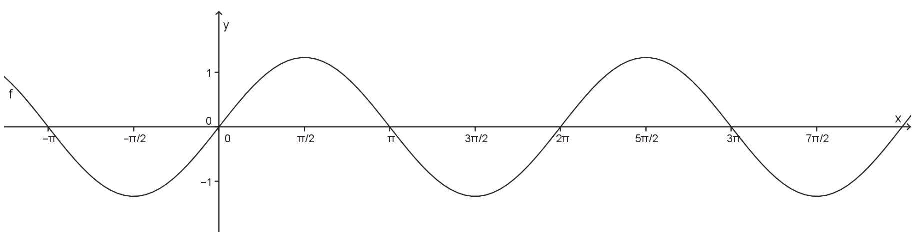
Vamos aplicar a série de Fourier para a função onda quadrada, apresentada na Figura 22.

As ondas quadradas são utilizadas nos circuitos de chaveamento digitais e em dispositivos lógicos de dois níveis, como por exemplo em sinais de clock (relógio interno de um dispositivo). Porém, podem gerar radiação eletromagnética ou pulsos de corrente, podendo causar ruídos e erros em outros circuitos próximos. São também utilizadas como base de tempo para diversos instrumentos de sopro.

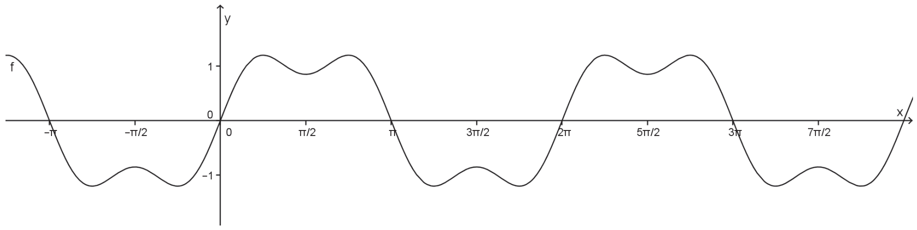
Aplicando a série de Fourier, podemos escrever a função onda quadrada como uma série infinita da forma $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{sen}[(2k-1)x]}{2k-1}$.

Ou seja, $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\left(\mathrm{sen}\,x + \dfrac{\mathrm{sen}\,3x}{3} + \dfrac{\mathrm{sen}\,5x}{5} + \dfrac{\mathrm{sen}\,7x}{7} + ...\right)$.

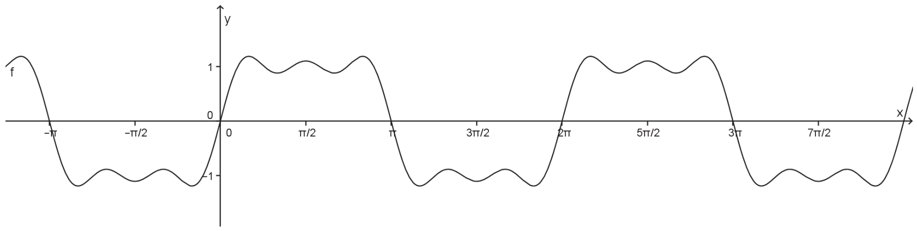
Para $k = 1$, temos:



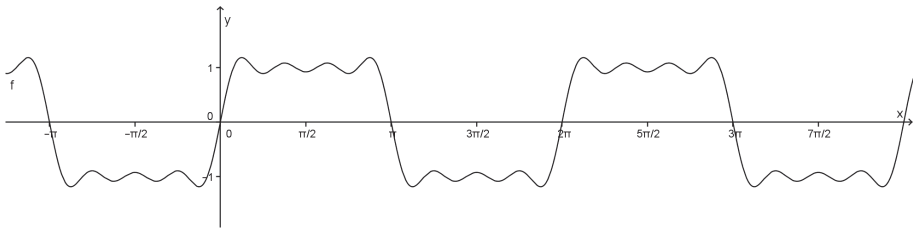
Para $k = 2$, temos:



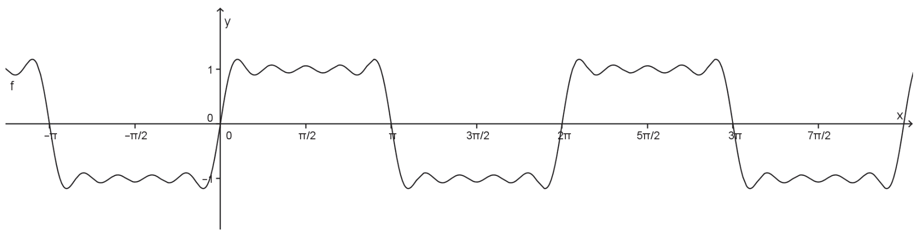
Para $k = 3$, temos:



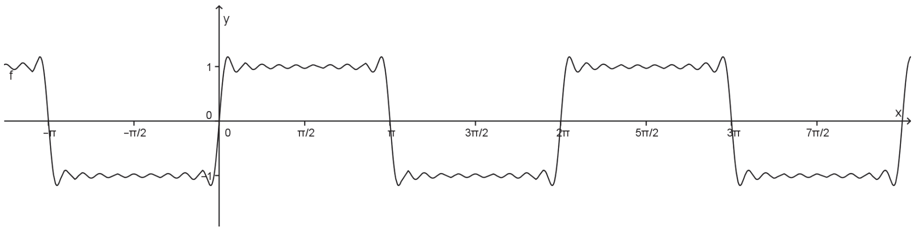
Para $k = 4$, temos:



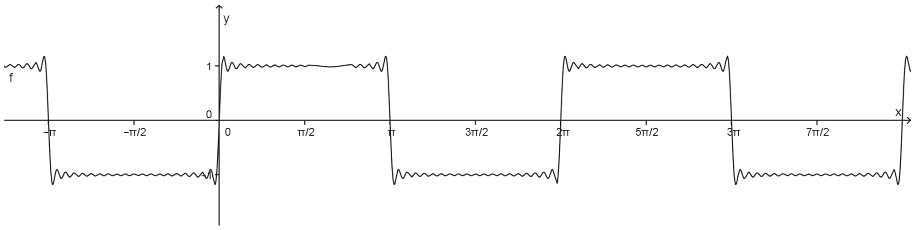
Para $k = 5$, temos:



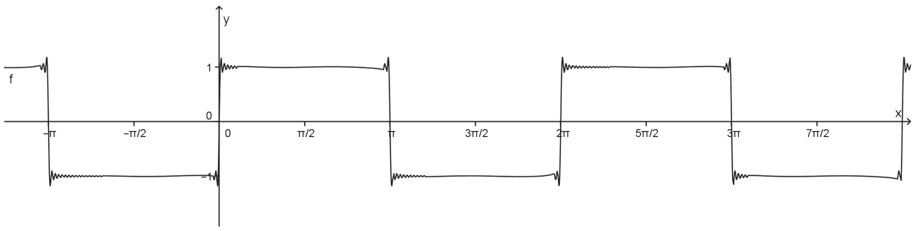
Para $k = 10$, temos:



Para $k = 20$, temos:



Para $k = 50$, temos:



Quanto maior o número de termos da nossa soma, mais a onda se aproxima da onda quadrada.

4.3 A função tangente

Como já vimos na seção 2.2, a tangente de um ângulo t é o quociente $\dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$ e pode ser denotada por $\tan t$. A *função real tangente* é definida de forma análoga, ou seja, $\tan t = \dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$, para t restrito aos números reais para os quais o denominador é diferente de zero. Logo, o conjunto $D = \left\{t \in \mathbb{R} | t \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ satisfaz as condições desejadas, já que $\cos t = 0$ se, e somente se, $t = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Assim, temos:

Definição 4.4. *Seja* $D = \left\{t \in \mathbb{R} | t \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. *Chamamos função tangente a relação* $\tan : D \to \mathbb{R}$ *tal que* $\tan t = \dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$, *para todo* $t \in D$.

A partir das propriedades das funções seno e cosseno, temos que $\tan(t+\pi) = \dfrac{\operatorname{sen}(t+\pi)}{\cos(t+\pi)} = \dfrac{-\operatorname{sen} t}{-\cos t} = \tan t$. Portanto, a função tangente é periódica de período igual a π. Temos também que $\tan(-t) = \dfrac{\operatorname{sen}(-t)}{\cos(-t)} = \dfrac{-\operatorname{sen} t}{\cos t} = -\tan t$. Com isso, podemos dizer que a função tangente é uma função ímpar.

Consideremos o ciclo trigonométrico e uma reta r paralela ao eixo Oy passando pelo ponto $(1, 0)$, conforme a Figura 51, e seja AB um arco do primeiro quadrante, com medida t.

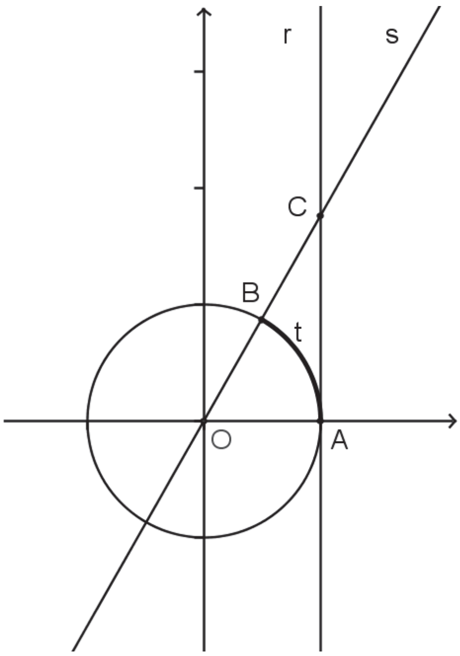


Figura 51 – A tangente no ciclo trigonométrico

Consideremos também a reta s que passa pelos pontos O e B e seja C o ponto de interseção entre esta reta e a reta r.

No triângulo $\triangle AOC$, vamos calcular a tangente de t. Temos que a medida do ângulo central $\widehat{AOB}$ é igual a medida do arco AB. Assim, $\tan t = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{AC}}{1} = \overline{AC}$. Ou seja, a tangente do arco t é a medida do segmento compreendido entre a origem dos arcos e a interseção das retas r e s, sobre a reta r. Por este motivo, a reta r é chamada de *eixo das tangentes*.

Na Figura 51, observemos que a reta s também corta o terceiro quadrante. Seja D o ponto de interseção entre a reta s e o ciclo trigonométrico no terceiro quadrante, conforme a Figura 52.

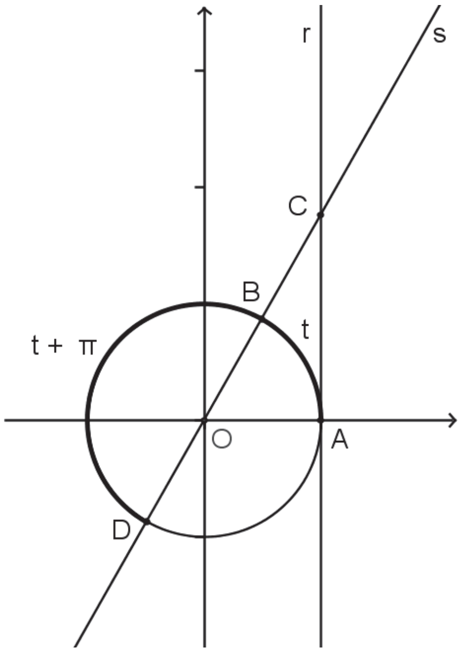


Figura 52 – A tangente no 1º e 3º quadrantes

Notemos que o arco AD possui medida igual a $t + \pi$. Notemos também que o lado OD do ângulo $\widehat{AOD}$ está contido na reta s. Temos que o ponto de interseção entre o prolongamento do segmento OD e a reta r também é o ponto C. Portanto, a medida da tangente do arco AD é igual ao comprimento do segmento AC. Ou seja, $\tan t = \tan(t+\pi)$.

Consideremos agora o arco AB no segundo quadrante e seja s a reta que passa pelos pontos O e B, conforme a Figura 53.

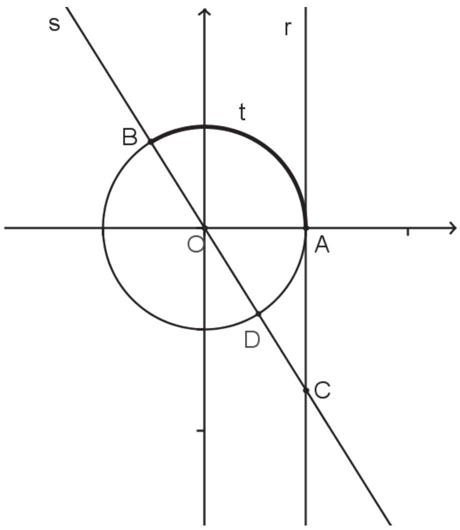


Figura 53 – A tangente no 2º e 4º quadrantes

Prolongando-se o lado OB do ângulo $\widehat{AOB}$, temos o ponto C como sendo a interseção desse prolongamento com o eixo das tangentes. Logo, a medida da tangente do arco AB

é igual ao comprimento do segmento AC. Porém, observemos que o ponto C se encontra na parte negativa do eixo das tangentes. Assim, $\tan t = -\overline{AC}$.

Observemos que a reta s corta o quarto quadrante. Seja D a interseção entre a reta s e o ciclo trigonométrico no quarto quadrante, formando o arco AD. Temos que a medida do arco AD é igual a $t+\pi$. Prolongando-se o lado OD do ângulo $\widehat{AOD}$, também temos o ponto C como sendo a interseção desse prolongamento com o eixo das tangentes. Portanto, $\tan(t+\pi) = \tan t = -\overline{AC}$.

Com isso, temos que os valores das tangentes dos arcos do primeiro e do terceiro quadrantes são positivos e os valores das tangentes dos arcos do segundo e do quarto quadrantes são negativos. Além disso, temos que os valores das tangentes de arcos simétricos em relação à origem são diametralmente iguais.

Observemos ainda que quando o valor de t aumenta no primeiro quadrante, o valor de sua tangente também aumenta, assumindo todos os valores reais. Porém, quando $t = \dfrac{\pi}{2}$, a reta s é paralela ao eixo das tangentes. Dessa forma, não há interseção entre a reta s e o eixo das tangentes. Neste caso, dizemos que não existe a tangente. O mesmo acontece para todas ao outras determinações desse arco.

No segundo quadrante, notemos que quando t aumenta a sua tangente também aumenta, chegando a zero quando $t = \pi$.

No terceiro quadrante, enquanto t aumenta, sua tangente também aumenta. Porém, quando $t = \dfrac{3\pi}{2}$, a reta s é paralela ao eixo das tangentes. Com isso, não existe a tangente do arco de medida $\dfrac{3\pi}{2}$, bem como de suas outras determinações.

No quarto quadrante, a tangente também aumenta quando t aumenta, retornando a zero quando $t = 2\pi$.

A construção a seguir ilustra, com o auxílio do GeoGebra, as propriedades da tangente enunciadas acima.

Construção 8

- Com a ferramenta “círculo dados centro e raio”, vamos construir o círculo unitário. Clique no ponto $(0,0)$ e defina o ângulo como sendo igual a 1;
- com a ferramenta “ponto”, marque o ponto $(1,0)$;
- com a ferramenta “reta paralela”, clique no eixo Oy e no ponto B;
- com a ferramenta “ponto em objeto”, clique sobre o ciclo trigonométrico no primeiro quadrante;
- com a ferramenta “ângulo”, clique sobre o ponto B, em seguida sobre o ponto A e em seguida sobre o ponto C;
- com a ferramenta “reta”, clique sobre os pontos A e C;

- com a ferramenta "interseção de dois objetos", marque a interseção entre as retas a e b;

- com a ferramenta "interseção de dois objetos", marque a interseção entre a reta b e o ciclo trigonométrico no terceiro quadrante;

- com a ferramenta "ângulo", clique sobre o ponto B, em seguida sobre o ponto A e em seguida sobre o ponto E. Observe que $\beta = \alpha + 180°$;

- para melhorar a visualização, clique com o botão direito do mouse sobre o ciclo trigonométrico e sobre os ângulos α e β e selecione a opção *exibir rótulo*. Os valores desses ângulos podem ser acompanhados na janela de álgebra. Na aba "opções", selecione a janela *avançado*. Na aba "preferências - janela de visualização", clique nos itens *eixo x* e *eixo y* e desmarque a opção *exibir números*. Feche a janela;

- no campo "entrada", digite $d = \operatorname{sen}(\alpha)/\cos(\alpha)$. Pela definição 4.4, este é o valor da tangente de α;

- no campo "entrada", digite $e = \operatorname{sen}(\beta)/\cos(\beta)$. Este é o valor da tangente de β;

- com a ferramenta "mover", desloque o ponto C sobre todo o ciclo trigonométrico e verifique que $\tan\alpha = \tan\beta$;

- no campo "entrada", digite $f = BD$ e verifique que $BD = |\tan\alpha| = |\tan\beta|$.

Nesta construção também podemos verificar os sinais da tangente, conforme ilustra a Figura 54.

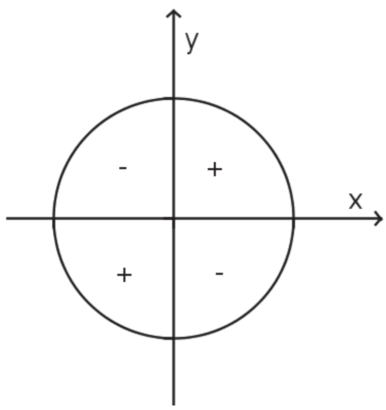


Figura 54 – Sinais da tangente

Agora, apresentamos na Figura 55 o gráfico da função tangente.

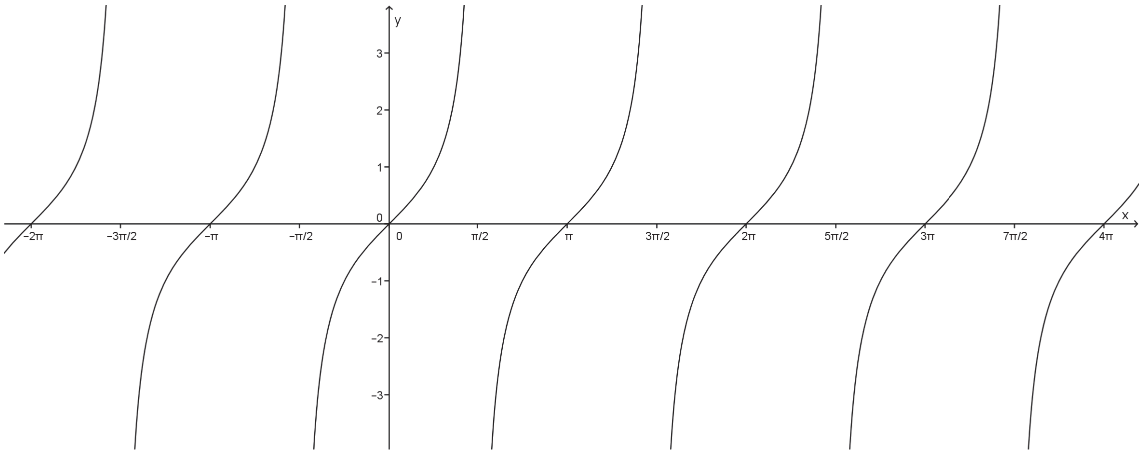


Figura 55 – Gráfico da função tangente

Partindo do ciclo trigonométrico, vejamos uma construção para a geração do gráfico da função tangente no Geogebra.

Construção 9

- Com a ferramenta "círculo dados centro e raio", vamos construir o círculo unitário. Clique no ponto $(0, 0)$ e defina o ângulo como sendo igual a 1;
- com a ferramenta "ponto", marque o ponto $(1, 0)$;
- com a ferramenta "reta paralela", clique no eixo Oy e no ponto B;
- com a ferramenta "controle deslizante", selecione a opção *ângulo* e o defina no intervalo de, por exemplo, $-720°$ a $720°$, com um incremento igual a $0.1°$e velocidade igual a 0.1. Clique em *aplicar*;
- com a ferramenta "ângulo com amplitude fixa", clique sobre o ponto B e em seguida sobre o ponto A. Na janela que aparecer, defina o ângulo como sendo α, no sentido anti-horário;
- com a ferramenta "reta", clique sobre os pontos A e B';
- com a ferramenta "interseção de dois objetos", marque a interseção entre as retas a e b;
- no campo "entrada", digite $P = (\alpha, \tan \alpha)$;
- clique na aba "opções" e selecione a janela *avançado*. Na aba "preferências - janela de visualização", clique no item *eixo x*. Marque o item *distância* e selecione a opção $\frac{\pi}{2}$. No item *unidade*, selecione a opção π. Feche a janela;

- com o botão direito do mouse, clique sobre o ponto P e selecione a opção *habilitar rastro*;

- com o botão direito do mouse, clique sobre o controle deslizante e selecione a opção *animar*. Observe que $y(C) = y(P)$, comprovando que $\tan\alpha = BC$.

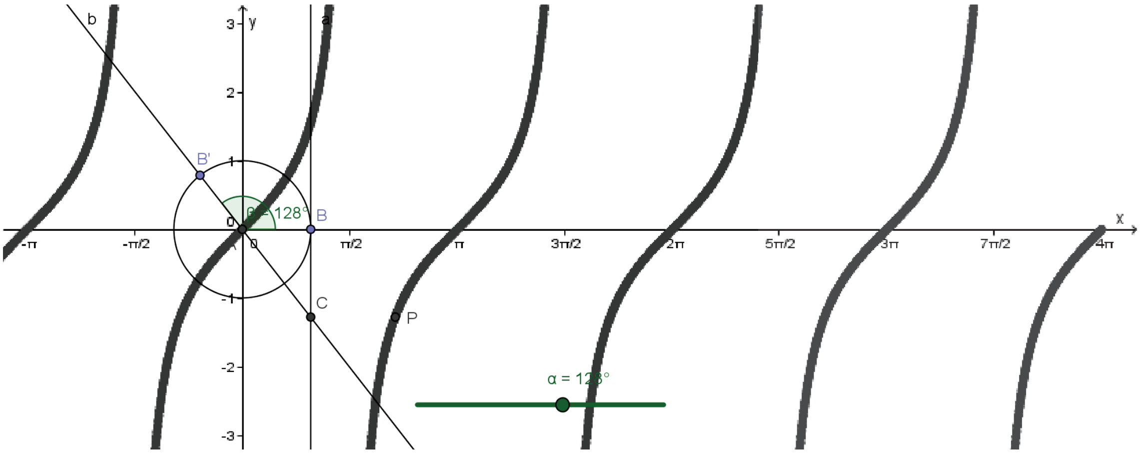


Figura 56 – Ponto P percorrendo o gráfico da função tangente

No gráfico da Figura 56, podemos ver que a função tangente tem seus zeros em $t = k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Ela é positiva em $\left(k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$ e é negativa em $\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi\right)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Não possui mínimos ou máximos. Ela é crescente se $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Possui pontos de inflexão em $t = k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Suas assíntotas verticais são as retas de equação $t = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Assim como fizemos para as funções seno e cosseno, vejamos alguns valores notáveis da função tangente.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\tan t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$	0

4.4 A função cotangente

Seja um arco qualquer de medida t. Como dissemos na seção 1.1, a *cotangente* do arco t representa a tangente do arco complemetar ao arco t. Seja t' o arco complementar do arco t. Na seção 2.2, mostramos que $\tan t' = \dfrac{1}{\tan t}$. Assim, segue que $\cot t = \dfrac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$.

Para definirmos a *função cotangente* como um quociente, devemos notar que seu domínio se restringe aos números reais para os quais $\operatorname{sen} t \neq 0$. Desse modo, temos o conjunto $D = \{t \in \mathbb{R} | t \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ satisfazendo as condições desejadas, já que $\operatorname{sen} t = 0$ se, e somente se, $t = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, temos:

Definição 4.5. *Seja* $D = \{t \in \mathbb{R} | t \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. *Chamamos função cotangente a relação* $\cot : D \to \mathbb{R}$ *tal que* $\cot t = \dfrac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$, *para todo* $t \in D$.

A partir das propriedades estudadas das funções seno e cosseno, temos que $\cot(t+\pi) = \dfrac{\cos(t+\pi)}{\operatorname{sen}(t+\pi)} = \dfrac{-\cos t}{-\operatorname{sen} t} = \cot t$. Portanto, a função cotangente é periódica de período igual a π. Temos também que $\cot(-t) = \dfrac{\cos(-t)}{\operatorname{sen}(-t)} = \dfrac{\cos t}{-\operatorname{sen} t} = -\cot t$. Com isso, podemos dizer que a função cotangente é uma função ímpar.

Consideremos o ciclo trigonométrico e uma reta r paralela ao eixo Ox passando pelo ponto $(0, 1)$. Sejam AB um arco do primeiro quadrante, com medida t, e BD o arco complementar ao arco AB no primeiro quadrante, com medida t'.

Consideremos também a reta s que passa pelos pelos pontos O e B e seja C o ponto de interseção entre esta reta e a reta r, conforme a Figura 57.

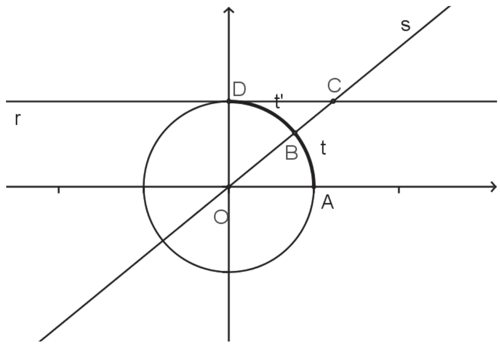


Figura 57 – A cotangente no ciclo trigonométrico

No triângulo $\triangle DOC$, vamos calcular a tangente de t'. Temos que $\tan t' = \dfrac{\overline{DC}}{\overline{OD}} = \dfrac{\overline{DC}}{1} = \overline{DC}$. Porém, já sabemos que $\tan t' = \cot t$. Logo, $\cot t = \overline{DC}$. Por este motivo, a reta r é chamada de *eixo das cotangentes*.

Na Figura 57, observe que a reta s também corta o terceiro quadrante.

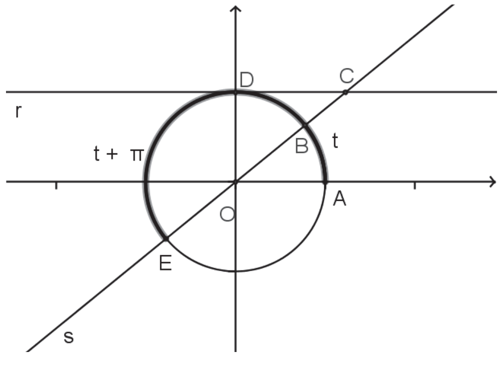


Figura 58 – A cotangente no 1º e 3º quadrantes

Seja E o ponto de interseção entre a reta s e o ciclo trigonométrico no terceiro quadrante, conforme a Figura 58.

Notemos que o arco AE possui medida igual a $t + \pi$. Notemos também que o lado OE do ângulo $\widehat{AOE}$ está contido na reta s. Temos que o ponto de interseção entre o prolongamento do segmento OE e a reta r também é o ponto C. Portanto, a medida da cotangente do arco AE é igual ao comprimento do segmento DC. Ou seja, $\cot t = \cot(t + \pi)$.

Consideremos agora o arco AB no segundo quadrante e seja s a reta que passa pelos pontos O e B, como ilustra a Figura 59.

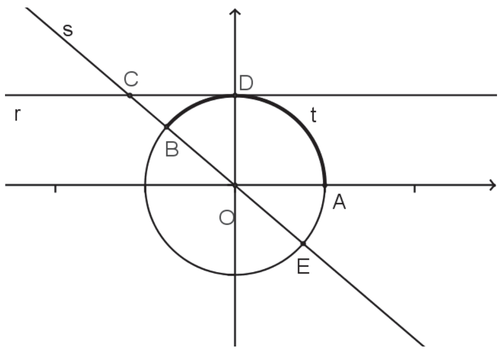


Figura 59 – A cotangente no 2º e 4º quadrantes

Prolongando-se o lado OB do ângulo $\widehat{AOB}$, temos o ponto C como sendo a interseção desse prolongamento com o eixo das cotangentes. Logo, a medida da cotangente do arco AB é igual ao comprimento do segmento DC. Porém, observemos que o ponto C se encontra na parte negativa do eixo das cotangentes. Assim, $\cot t = -\overline{DC}$.

Observemos que a reta s corta o quarto quadrante. Seja E a interseção entre a reta s e o ciclo trigonométrico no quarto quadrante, formando o arco AE. Temos que a medida do arco AE é igual a $t + \pi$. Prolongando-se o lado OE do ângulo $\widehat{AOE}$, também temos o ponto C como sendo a interseção desse prolongamento com o eixo das cotangentes. Portanto, $\cot(t + \pi) = \cot t = -\overline{DC}$.

Com isso, temos que os valores das cotangentes dos arcos do primeiro e do terceiro quadrantes são positivos e os valores das cotangentes dos arcos do segundo e do quarto quadrantes são negativos, assim como as tangentes. Além disso, temos que os valores das cotangentes de arcos simétricos em relação à origem são diametralmente iguais.

Notemos que quando $t = 0$, a reta s é paralela ao eixo das cotangentes. Dessa forma, não há interseção entre a reta s e o eixo das cotangentes. Neste caso, dizemos que não existe a cotangente. O mesmo acontece para todas as outras determinações desse arco.

Percebamos ainda que à medida que o valor de t aumenta no primeiro quadrante, o valor de sua cotangente diminui, assumindo todos os valores reais, chegando a zero quando $t = \dfrac{\pi}{2}$. O mesmo acontece no segundo quadrante. Porém, quando $t = \pi$, a reta s

é paralela ao eixo das cotangentes. Com isso, não existe a cotangente do arco de medida π, bem como de suas outras determinações.

No terceiro quadrante acontece o mesmo, chegando a cotangente a zero quando $t = \dfrac{3\pi}{2}$. E o mesmo acontece no quarto quadrante, sendo que quando $t = 2\pi$, a reta s é paralela ao eixo das cotangentes. Assim, não existe a cotangente do arco de medida 2π, bem como de suas outras determinações.

A construção a seguir ilustra, com o auxílio do GeoGebra, as propriedades da cotangente enunciadas acima.

Construção 10

- Com a ferramenta "círculo dados centro e raio", vamos construir o círculo unitário. Clique no ponto $(0, 0)$ e defina o ângulo como sendo igual a 1;
- com a ferramenta "ponto", marque o ponto $(1, 0)$ e $(0, 1)$;
- com a ferramenta "reta paralela", clique no eixo Ox e no ponto C;
- com a ferramenta "ponto em objeto", clique sobre o ciclo trigonométrico no primeiro quadrante;
- com a ferramenta "ângulo", clique sobre o ponto B, em seguida sobre o ponto A e em seguida sobre o ponto D;
- com a ferramenta "reta", clique sobre os pontos A e D;
- com a ferramenta "interseção de dois objetos", marque a interseção entre as retas a e b;
- com a ferramenta "interseção de dois objetos", marque a interseção entre a reta b e o ciclo trigonométrico no terceiro quadrante;
- com a ferramenta "ângulo", clique sobre o ponto B, em seguida sobre o ponto A e em seguida sobre o ponto F. Observe que $\beta = \alpha + 180°$;
- para melhorar a visualização, clique com o botão direito do mouse sobre o ciclo trigonométrico e sobre os ângulos α e β e selecione a opção *exibir rótulo*. Os valores desses ângulos podem ser acompanhados na janela de álgebra. Na aba "opções", selecione a janela *avançado*. Na aba "preferências - janela de visualização", clique nos itens *eixo x* e *eixo y* e desmarque a opção *exibir números*. Feche a janela;
- no campo "entrada", digite $d = \cos(\alpha)/\operatorname{sen}(\alpha)$. Pela definição 4.5, este é o valor da cotangente de α;
- no campo "entrada", digite $e = \cos(\beta)/\operatorname{sen}(\beta)$. Este é o valor da cotangente de β;

- com a ferramenta "mover", desloque o ponto D sobre todo o ciclo trigonométrico e verifique que $\cot\alpha = \cot\beta$;
- no campo "entrada", digite $f = CE$ e verifique que $CE = |\cot\alpha| = |\cot\beta|$.

Nesta construção também podemos verificar os sinais da cotangente, conforme a Figura 60.

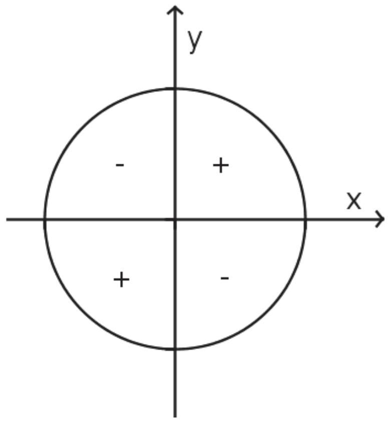


Figura 60 – Sinais da cotangente

Agora, podemos apresentar, na Figura 61, o gráfico da função cotangente.

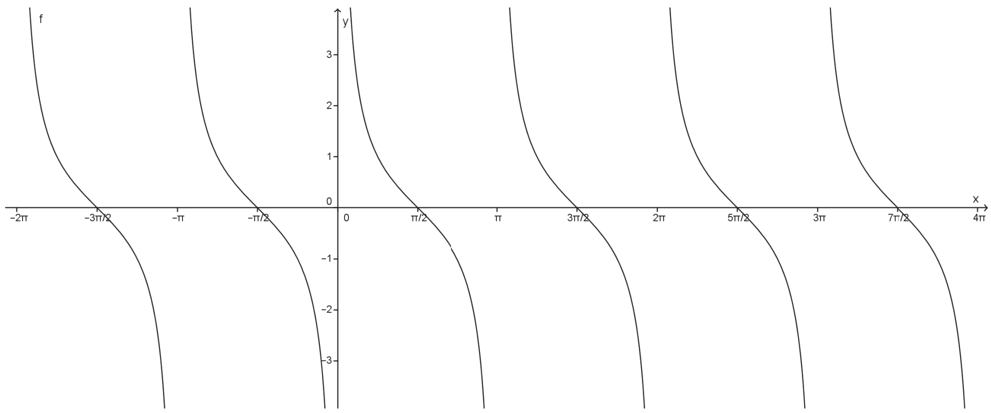


Figura 61 – Gráfico da função cotangente

Partindo do ciclo trigonométrico, vejamos a construção do gráfico da função cotangente no Geogebra.

Construção 11

- Com a ferramenta "círculo dados centro e raio", vamos construir o círculo unitário. Clique no ponto $(0, 0)$ e defina o ângulo como sendo igual a 1;
- com a ferramenta "ponto", marque os pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$;

- com a ferramenta "reta paralela", clique no eixo Ox e no ponto C;

- com a ferramenta "controle deslizante", selecione a opção *ângulo* e o defina no intervalo de, por exemplo, $-720°$ a $720°$, com um incremento igual a $0.1°$e velocidade igual a 0.1. Clique em *aplicar*;

- com a ferramenta "ângulo com amplitude fixa", clique sobre o ponto B e em seguida sobre o ponto A. Na janela que aparecer, defina o ângulo como sendo α, no sentido anti-horário;

- com a ferramenta "reta", clique sobre os pontos A e B';

- com a ferramenta "interseção de dois objetos", marque a interseção entre as retas a e b;

- no campo "entrada", digite $P = (\alpha, \cot(\alpha))$;

- clique na aba "opções" e selecione a janela *avançado*. Na aba "preferências - janela de visualização", clique no item *eixo x*. Marque o item *distância* e selecione a opção $\dfrac{\pi}{2}$. No item *unidade*, selecione a opção π. Clique no item *rótulo* e selecione a opção x. Na aba *eixo y*, clique no item *rótulo* e selecione a opção y. Feche a janela;

- com o botão direito do mouse, clique sobre o ponto P e selecione a opção *habilitar rastro*;

- com o botão direito do mouse, clique sobre o controle deslizante e selecione a opção *animar*. Observe que $x(D) = y(P)$, comprovando que $\cot\alpha = DC$. Observe a Figura 62.

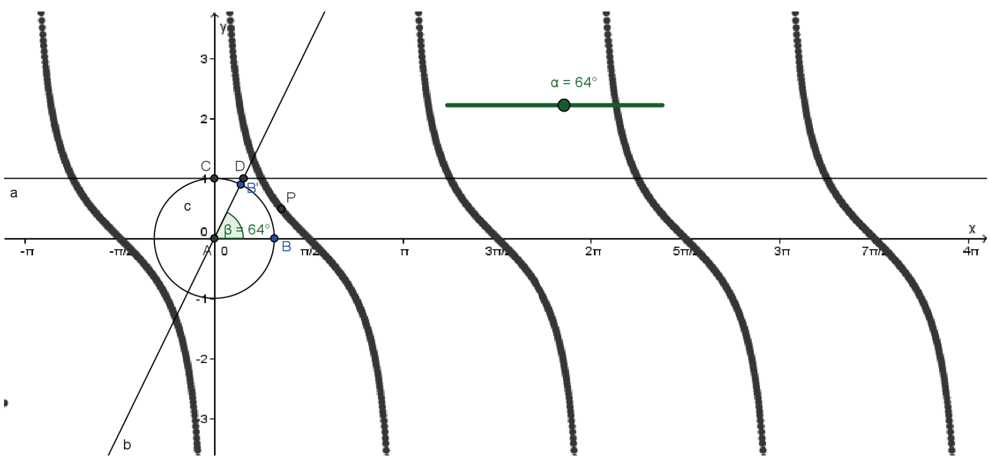


Figura 62 – Ponto P percorrendo o gráfico da função cotangente

4.5 As funções secante e cossecante

Consideremos um arco AB de medida t pertencente ao primeiro quadrante do ciclo trigonométrico e a reta tangente ao ciclo no ponto B e sejam C e D os pontos de interseção dessa reta com os eixos Ox e Oy, respectivamente, conforme a Figura 63.

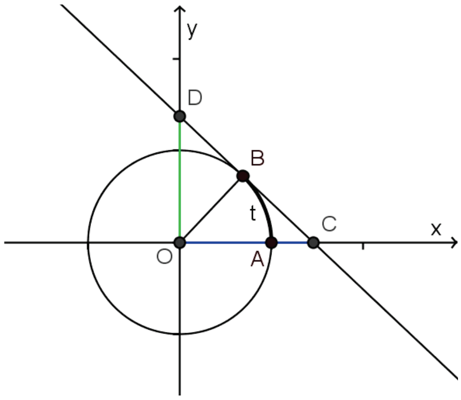


Figura 63 – Definição de secante e cossecante

Definimos $\sec t = \overline{OC}$ e $\csc t = \overline{OD}$.

No triângulo $\triangle BOC$, retângulo no vértice B, temos que $\widehat{BOC} = t$. Assim, $\cos t = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \dfrac{1}{\overline{OC}} = \dfrac{1}{\sec t}$. Daí, segue que

$$\sec t = \frac{1}{\cos t}.$$

Observemos que $\widehat{BCO} = 90^\circ - t$. Observemos também que $\widehat{BOD} = 90^\circ - t$, ou seja, $\widehat{BCO} = \widehat{BOD}$. E como o triângulo $\triangle BOD$ também é retângulo no vértice B, temos que os triângulos $\triangle BOC$ e $\triangle BOD$ são semelhantes. Logo, $\widehat{BDO} = t$.

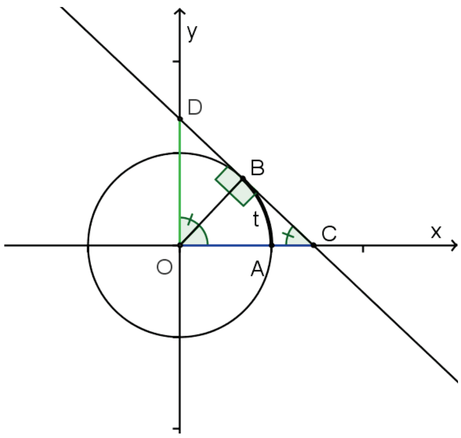


Figura 64 – Secante e cossecante no ciclo trigonométrico

No triângulo $\triangle BOD$, temos que $\operatorname{sen} t = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OD}} = \dfrac{1}{\overline{OD}} = \dfrac{1}{\csc t}$. Daí, segue que

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t}.$$

Partindo disso, podemos definir as funções secante e cossecante.

Definição 4.6. *Seja* $D = \left\{t \in \mathbb{R} | t \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$*. Chamamos função secante a relação* $\sec : D \to \mathbb{R}$ *tal que* $\sec t = \dfrac{1}{\cos t}$*, para todo* $t \in D$*.*

Definição 4.7. *Seja* $D = \{t \in \mathbb{R} | t \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$*. Chamamos função cossecante a relação* $\csc : D \to \mathbb{R}$ *tal que* $\csc t = \dfrac{1}{\operatorname{sen} t}$*, para todo* $t \in D$*.*

Vejamos estas definições em uma construção no GeoGebra.

Construção 12

- Com a ferramenta "círculo dados centro e raio", vamos construir o círculo unitário. Clique no ponto $(0,0)$ e defina o ângulo como sendo igual a 1;
- com a ferramenta "ponto", marque o ponto $(1,0)$;
- com a ferramenta "ponto em objeto", clique sobre o ciclo trigonométrico no primeiro quadrante;
- com a ferramenta "reta tangente", clique sobre o ponto C e em seguida sobre o ciclo trigonométrico;
- com a ferramenta "reta", clique sobre os pontos A e C;
- com a ferramenta "ângulo", clique sobre o ponto B, em seguida sobre o ponto A e em seguida sobre o ponto C;
- com a ferramenta "interseção de dois objetos", marque a interseção entre a reta a e o eixo Ox. Em seguida, marque a interseção entre a reta a e o eixo Oy. Por conseguinte, marque a interseção entre a reta b e o ciclo trigonométrico no terceiro quadrante;
- com a ferramenta "ângulo", clique sobre o ponto B, em seguida sobre o ponto A e em seguida sobre o ponto F;

- pelas definições vistas em sala de aula, temos $\sec\alpha = \overline{AD}$ e $\csc\alpha = \overline{AE}$. Então, com a ferramenta "segmento", clique sobre os pontos A e D e, em seguida, sobre os pontos A e E;
- para melhorar a visualização, clique com o botão direito do mouse sobre o ciclo trigonométrico, sobre os ângulos α e β e sobre os segmentos AD e AE e, para todos eles, selecione a opção *exibir rótulo*. Na aba "opções", selecione a janela *avançado*. Na aba "preferências - janela de visualização", clique nos itens *eixo x* e *eixo y* e desmarque a opção *exibir números*. Feche a janela;
- no campo "entrada", digite $f = 1/\cos(\alpha)$. Pela definição 4.6, este é o valor da secante de α;
- no campo "entrada", digite $g = 1/\cos(\beta)$. Este é o valor da secante de β;
- com a ferramenta "mover", desloque o ponto C sobre todo o ciclo trigonométrico e verifique que $\sec\alpha = -\sec\beta$;
- no campo "entrada", digite $h = 1/\operatorname{sen}(\alpha)$. Pela definição 4.7, este é o valor da cossecante de α;
- no campo "entrada", digite $i = 1/\operatorname{sen}(\beta)$. Este é o valor da cossecante de β;
- com a ferramenta "mover", desloque o ponto C sobre todo o ciclo trigonométrico e verifique que $\csc\alpha = -\csc\beta$.

Assim temos:

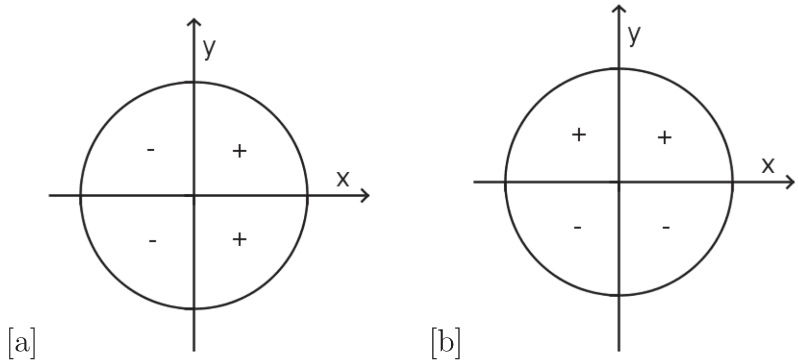


Figura 65 – [a] Sinais da secante e [b] sinais da cossecante

Na Figura 66 apresentamos o gráfico da função secante.

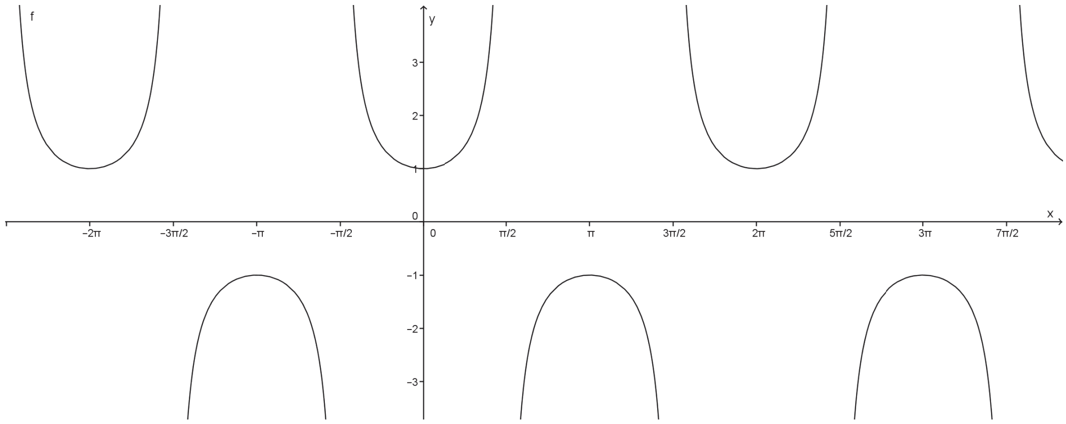


Figura 66 – Gráfico da função secante

Agora, vejamos o gráfico da função cossecante na Figura 67.

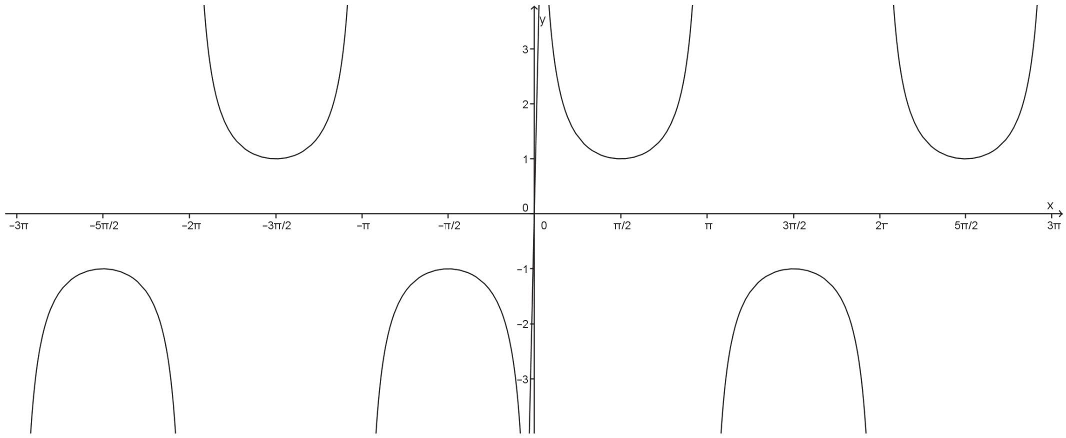


Figura 67 – Gráfico da função cossecante

5 Uma proposta para o Ensino Médio

Apresentaremos agora uma proposta de aulas baseada em uma série de atividades no GeoGebra. Acreditamos que esta proposta pode ajudar os professores do Ensino Médio a melhorar o nível de aprendizado dos seus alunos nas aulas de Trigonometria e, mais especificamente, a entender melhor as propriedades relacionadas às funções trigonométricas.

O uso do GeoGebra tem por objetivo ajudar os alunos a visualizar e interpretar as representações geométricas, relacionando o uso das ferramentas deste software com os conceitos dos conteúdos trigonométricos.

Não pretendemos que estas atividades sejam o único recurso utilizado nas aulas de Trigonometria, mas que sirvam de suporte para essa aprendizagem.

Atividade 1

Como este provavelmente será o primeiro contato da maioria dos alunos (senão de todos) com o software GeoGebra, um dos objetivos desta atividade é que os alunos conheçam e aprendam a utilizar as ferramentas do software para a resolução de exercícios. Pretendemos também que eles possam entender claramente as instruções que são dadas para a elaboração da atividade.

Os objetivos principais desta atividade são mostrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° e verificar se os alunos sabem o que é um triângulo retângulo.

1. Com a ferramenta "polígono", crie um triângulo qualquer. Para tanto, clique sobre três pontos quaisquer do plano cartesiano e em seguida clique novamente sobre o ponto A.

2. Com a ferramenta "ângulo", meça os três ângulos do triângulo criado no item anterior. Para isso, clique sobre os pontos B, A e C. Em seguida, clique sobre os pontos C, B e A. Posteriormente, clique sobre os pontos A, C e B.

3. Com a ferramenta "mover", arraste o ponto A pelo plano e note as mudanças nos valores das medidas dos ângulos internos e dos lados do triângulo.

4. Agora responda: Quais os valores dos lados do triângulo?

5. Quais os valores dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$?

6. Qual a soma dos ângulos internos de um triângulo?

7. Este triângulo é um triângulo retângulo? Por quê?

Atividade 2

Os objetivos desta atividade são construir um triângulo retângulo, identificar a sua hipotenusa e os seus catetos e relacionar os lados do triângulo com os seus ângulos agudos.

1. Construa um triângulo retângulo. Para tanto, utilize a ferramenta "ponto" e marque dois pontos no plano cartesiano. Com a ferramenta "segmento", clique sobre os pontos A e B, criando o segmento AB. Com a ferramenta "ângulo com amplitude fixa", clique sobre o ponto A e em seguida sobre o ponto B. Na janela que aparecer, defina o ângulo como sendo de $90°$. Observe a criação do ponto A'. Com a ferramenta "segmento", clique sobre os pontos B e A' e em seguida sobre os pontos A e A'.
2. Com a ferramenta "ângulo", meça os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{A}'$ do triângulo criado. Para isso, clique sobre os pontos A', A e B. Em seguida, clique sobre os pontos B, A' e A.
3. Com a ferramenta "mover", arraste o ponto A sobre o plano e observe que, embora as medidas dos lados estejam variando, o triângulo continua sendo retângulo.
4. Agora responda: Quais as medidas dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{A}'$?
5. Os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{A}'$ são agudos ou obtusos? Isso sempre irá ocorrer? Porquê?
6. Qual a medida da hipotenusa deste triângulo?
7. Quais as medidas dos catetos do triângulo?
8. Qual a medida do cateto oposto ao ângulo $\hat{A}$?
9. Qual a medida do cateto oposto ao ângulo $\hat{A}'$?
10. Qual a medida do cateto adjacente ao ângulo $\hat{A}$?
11. Qual a medida do cateto adjacente ao ângulo $\hat{A}'$?
12. As observações feitas valem para qualquer triângulo retângulo ou apenas para o caso estudado?

Atividade 3

Os objetivos desta atividade são calcular as razões trigonométricas a partir das fórmulas já estudadas anteriormente e verificar que elas não dependem das medidas dos lados do triângulo, mas sim da medida do ângulo.

1. No campo "entrada", digite, por exemplo, $A = (2, 1)$, $B = (6, 1)$ e $C = (6, 6)$.

2. Com a ferramenta "segmento", construa o triângulo $\triangle ABC$.
3. Com a ferramenta "ângulo", construa os três ângulos do triângulo e verifique que o triângulo é retângulo em $\hat{B}$.
4. Com o botão direito do mouse, clique sobre a lado AB e selecione a opção "exibir rótulo". Faça o mesmo para os outros lados do triângulo.
5. Com a ferramenta "ponto em objeto", marque um ponto sobre o lado AC do triângulo.
6. Com a ferramenta "reta paralela", clique sobre o ponto D e sobre o lado BC.
7. Com a ferramenta "interseção de dois objetos", marque a interseção entre a reta d e o lado AB.
8. Com o botão direito do mouse, clique sobre a reta d e selecione a opção "exibir objeto".
9. Com a ferramenta "segmento", marque os segmentos AD, DE e AE.
10. Com o botão direito do mouse, clique sobre o segmento AE e selecione a opção "renomear". Renomeie para *afastamento*. Renomeie também os segmentos DE e AD para *altura* e *percurso*, respectivamente.
11. Mova o ponto D para sobre o ponto C e, com o auxílio da calculadora, calcule as seguintes razões: $\frac{altura}{afastamento}$, $\frac{altura}{percurso}$ e $\frac{afastamento}{percurso}$.
12. Mova o ponto D para um ponto qualquer entre os pontos A e C.
13. Calcule novamente as razões do item 11.
14. Mova o ponto D para um outro ponto qualquer entre os pontos A e C.
15. Calcule novamente as razões do item 11.
16. Responda: O que você conclui sobre os valores das razões que acabou de calcular?
17. De acordo com as fórmulas estudadas anteriormente em sala de aula, a que razões trigonométricas correspondem as razões estudadas nesta atividade?
18. Para comprovar o que você respondeu no item 16, façamos o seguinte: no campo "entrada", digite *seno = altura / percurso*. Agora, digite *cosseno = afastamento / percurso*. Por fim, digite *tangente = altura / afastamento*.
19. Mova aleatoriamente o ponto D sobre o lado AC e observe na *janela de álgebra* os valores de seno, cosseno e tangente.

20. Responda: Os valores de seno, cosseno e tangente dependem das medidas dos lados do triângulo?

21. No campo "entrada", digite $A = (1, 1)$ e responda: O que acontece com os ângulos do triângulo?

22. O que acontece com os valores de seno, cosseno e tangente?

23. No campo "entrada", digite $A = (0, 1)$ e responda: O que acontece com os ângulos do triângulo?

24. O que acontece com os valores de seno, cosseno e tangente?

25. Os valores de seno, cosseno e tangente dependem da medida do ângulo $\hat{A}$?

Atividade 4

O objetivo desta atividade é verificar a validade da relação $\tan \hat{A} = \dfrac{\operatorname{sen} \hat{A}}{\cos \hat{A}}$. Verificaremos também que se $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são complementares, então $\operatorname{sen} \hat{A} = \cos \hat{B}$, $\cos \hat{A} = \operatorname{sen} \hat{B}$ e $\tan \hat{B} = \dfrac{1}{\tan \hat{A}}$.

1. Construa um triângulo retângulo com vértices nos pontos $A = (1, 1)$, $B = (5, 1)$ e $C = (5, 3)$.

2. Com a ferramenta "ângulo", meça os ângulos do triângulo.

3. Agora responda: Quais os valores dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$?

4. $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são complementares?

5. Quais os valores dos lados AB, AC e BC?

6. Calcule $\operatorname{sen} \hat{A}$, $\operatorname{sen} \hat{C}$, $\cos \hat{A}$, $\cos \hat{C}$, $\tan \hat{A}$ e $\tan \hat{C}$.

7. Compare os valores de $\operatorname{sen} \hat{A}$ e $\cos \hat{C}$.

8. Compare os valores de $\operatorname{sen} \hat{C}$ e $\cos \hat{A}$.

9. Verifique que $\tan \hat{C} = \dfrac{1}{\tan \hat{A}}$.

10. Verifique que $\tan \hat{A} = \dfrac{\operatorname{sen} \hat{A}}{\cos \hat{A}}$.

11. No campo "entrada", digite $C =$ *(5, 4)* e refaça os itens 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10.

12. As observações feitas valem para qualquer triângulo retângulo ou apenas para o casos estudados?

Atividade 5

Na aplicação do questionário que encontra-se no Apêndice em sala de aula, pudemos comprovar a falta de vivência dos alunos com o ciclo trigonométrico. Por isso, o objetivo desta atividade é construir o ciclo trigonométrico, aprendendo a identificar os seus quadrantes.

1. Com a ferramenta "círculo dados centro e raio", clique sobre o ponto $(0,0)$ e digite 1 na janela que solicita a medida do raio. Este é o círculo de raio unitário centrado no ponto $A = (0,0)$, ao qual chamamos *ciclo trigonométrico*. Qual é a sua equação cartesiana?

2. Com a ferramenta "interseção de dois objetos", marque os pontos de interseção entre o ciclo trigonométrico e os eixos coordenados, denominando-os de $B = (1,0)$, $C = (0,1)$, $D = (-1,0)$ e $E = (0,-1)$.

3. Agora vamos identificar os quadrantes do ciclo trigonométrico. Para tanto, selecione a ferramenta "texto". Clique sobre o 1º quadrante. Na janela que aparecer, digite *QI*. Clique em "Ok". Em seguida, clique sobre o 2º quadrante. Na janela que aparecer, digite *QII*. Clique em "Ok". Para o 3º quadrante, digite *QIII* e para o 4º, digite IV.

4. Com a ferramenta "mover", você pode ajustar melhor as caixas de texto dentro do ciclo trigonométrico.

5. Com a ferramenta "ponto em objeto", marque um ponto qualquer sobre o ciclo trigonométrico, o qual será denominado F.

6. Construa o segmento OF.

7. Com a ferramenta "ângulo", clique sobre os pontos B, A e F, nesta ordem, criando o ângulo $\widehat{BAF}$.

8. Mova o ponto F indistintamente sobre o ciclo e observe o valor do ângulo $\widehat{BAF}$.

9. Agora responda: Os ângulos do 1º quadrante variam de quanto a quanto?

10. Os ângulos do 2º quadrante variam de quanto a quanto?

11. Os ângulos do 3º quadrante variam de quanto a quanto?

12. Os ângulos do 4º quadrante variam de quanto a quanto?

13. Se o ângulo $\widehat{BAF}$ mede $240°$, a que quadrante pertence o ponto F?

14. Se o ângulo $\widehat{BAF}$ mede $303°$, a que quadrante pertence o ponto F?

Atividade 6

Esta atividade tem por objetivo fazer com que os alunos entendam a noção de "ângulo negativo", associando ângulos com medidas negativas aos pontos do plano cartesiano.

1. Com a ferramenta "círculo dados centro e raio", clique sobre o ponto $(0, 0)$ e digite 1 na janela que solicita a medida do raio. Este é o círculo de raio unitário centrado no ponto $A = (0, 0)$.

2. Clique na ferramenta "controle deslizante". Selecione a opção *ângulo*, com nome α. Selecione o intervalo de $-360°$ a $360°$, com incremento de $5°$.

3. No campo "entrada", digite $B = (1, 0)$.

4. Com a ferramenta "ângulo com amplitude fixa", clique sobre o ponto B e em seguida sobre o ponto A. No campo *ângulo*, digite α. Clique em *Ok*. Observe que foi criado o ângulo β.

5. Clique sobre o controle deslizante com o botão direito do mouse e selecione a opção "animar". Observe na janela de álgebra a correspondência entre os ângulos α e β.

6. Agora responda: A que quadrante pertence o ângulo $\alpha = 115°$?

7. A que quadrante pertence o ângulo $\alpha = 225°$?

8. A que quadrante pertence o ângulo $\alpha = -15°$?

9. A que quadrante pertence o ângulo $\alpha = -120°$?

10. A que quadrante pertence o ângulo $\alpha = -225°$?

Atividade 7

Como a função de Euler é um conteúdo praticamente inexistente nos planos de curso da disciplina de Matemática em nossas Escolas de Ensino Médio, o objetivo desta atividade é apresentar a função de Euler aos nossos alunos.

1. Com a ferramenta "círculo dados centro e raio", clique sobre o ponto $(0, 0)$ e digite 1 na janela que solicita a medida do raio. Este é o círculo de raio unitário centrado no ponto $A = (0, 0)$.

2. Com a ferramenta "controle deslizante", construa o intervalo de variação do arco t. Para isso, clique no local onde deseja inserir o controle deslizante e selecione a opção *número*. Defina um intervalo com valor mínimo -12.57 e valor máximo 12.57, com um incremento de 0.1. Clique em *aplicar*.

3. No campo "entrada", digite $B = (1, 0)$.

4. Com a ferramenta "ângulo com amplitude fixa", clique sobre o ponto B e em seguida sobre o ponto A, construindo o arco t. Defina o ângulo igual ao controle deslizante a e escolha o sentido anti-horário. Clique em *Ok*. Observe que foi criado o ponto B'.

5. Renomeie o ponto B' para P.

6. Clique com o botão direito do mouse sobre o ângulo criado e selecione a opção *propriedades*. Na janela *básico* defina a legenda como t e na aba *exibir rótulo* selecione a opção *legenda*. Feche a janela.

7. Construa o segmento AP. Com o botão direito do mouse, clique sobre o segmento AP e selecione a opção *exibir rótulo*.

8. Clique na janela *opções* e selecione a aba *avançado*. Na janela *preferências - janela de visualização* clique na aba *eixo x* e no campo *unidade* selecione a opção π. Feche a janela.

9. Clique com o botão direito do mouse sobre o controle deslizante e selecione a opção *animar*. Esta é a função de Euler "enrolando a reta".

10. Agora responda: Qual o valor do raio $\overline{AP}$ do ciclo trigonométrico?

11. Qual o período da função de Euler?

12. Quais os valores máximo e mínimo da coordenada x(P)?

13. Quais os valores máximo e mínimo da coordenada y(P)?

Atividade 8

Partindo da definição da função de Euler, esta atividade tem por objetivo estudar a função de Euler, verificando as propriedades de suas coordenadas. Acreditamos que esta é uma atividade adequada para a introdução dessa função.

1. Refaça a construção da atividade anterior.

2. No campo entrada, digite $f(t) = x(P)$. Pressione *enter*.

3. Anime o controle deslizante e observe o que acontece com a função f.

4. Pare a animação.

5. Com o botão direito do mouse, clique sobre a função f e selecione a opção *exibir objeto*.

6. No campo entrada, digite $D = (a, x(P))$. Pressione *enter*. Com o botão direito do mouse, clique sobre o ponto D e selecione a opção *habilitar rastro*. Anime novamente o controle deslizante. Assim, temos uma idéia do gráfico da função f.

7. Agora responda: Quais os valores máximo e mínimo da função f?

8. Qual o período da função f?

9. Complete a tabela abaixo:

t	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$f(t)$								

10. Quais os valores de $f(-30°)$, $f(-45°)$ e $f(-60°)$?

11. A função f é uma função par ou ímpar?

12. No campo entrada, digite $g(t) = y(P)$. Pressione *enter*.

13. Anime o controle deslizante e observe o que acontece com a função g.

14. Pare a animação.

15. Com o botão direito do mouse, clique sobre a função g e selecione a opção *exibir objeto*.

16. No campo entrada, digite $D = (a, y(P))$. Anime novamente o controle deslizante. Assim, temos uma idéia do gráfico da função g.

17. Agora responda: Quais os valores máximo e mínimo da função g?

18. Qual o período da função g?

19. Complete a tabela abaixo:

t	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$g(t)$								

20. Quais os valores de $g(-30°)$, $g(-45°)$ e $g(-60°)$?

21. A função g é uma função par ou ímpar?

Atividade 9

Partindo da definição da função de Euler, esta atividade tem por objetivo estudar as simetrias do ciclo trigonométrico.

1. Com a ferramenta “círculo dados centro e raio”, clique sobre o ponto $(0, 0)$ e digite 1 na janela que solicita a medida do raio. Este é o círculo de raio unitário centrado no ponto $A = (0, 0)$.

2. No campo “entrada”, digite $B = (1, 0)$.

3. Com a ferramenta “ponto em objeto”, marque um ponto sobre o ciclo trigonométrico pertencente ao 1º quadrante, o qual será denominado C.

4. Com a ferramenta “reta paralela”, trace uma reta paralela ao eixo Ox passando pelo ponto C.

5. Com a ferramenta “interseção de dois objetos”, marque o outro ponto de interseção entre a reta a e o ciclo trigonométrico, o qual será denominado D. O que podemos dizer sobre os pontos C e D? Movimente o ponto C sobre todo o ciclo e verifique se a propriedade é conservada.

6. Com a ferramenta “reta paralela”, trace uma reta paralela ao eixo Oy passando pelo ponto C.

7. Com a ferramenta “interseção de dois objetos”, marque o outro ponto de interseção entre a reta b e o ciclo trigonométrico. Este ponto será denominado E. O que podemos dizer a respeito dos pontos C e E? Movimente o ponto C sobre todo o ciclo e verifique se a propriedade é conservada.

8. Com a ferramenta “reta”, trace uma reta passando pelo ponto C e pelo ponto A. Para tanto, clique sobre esses dois pontos.

9. Com a ferramenta “interseção de dois objetos”, marque o outro ponto de interseção entre a reta d e o ciclo trigonométrico. Este ponto será denominado F. O que podemos dizer a respeito dos pontos C e F? Movimente o ponto C sobre todo o ciclo e verifique se a propriedade é conservada.

10. Com a ferramenta “ângulo”, construa o ângulo $\widehat{BAC}$. Por definição, sua medida é igual à medida do arco BC.

11. Com a ferramenta “ângulo”, construa o ângulo $\widehat{BAD}$. Por definição, sua medida é igual à medida do arco BD.

12. Com a ferramenta “ângulo”, construa o ângulo $\widehat{BAE}$. Por definição, sua medida é igual à medida do arco BE.

13. Com a ferramenta “ângulo”, construa o ângulo $\widehat{BAF}$. Por definição, sua medida é igual à medida do arco BF.

14. Agora responda: Quais as coordenadas do ponto C?

15. Qual a medida do ângulo $\widehat{BAC}$?

16. Sendo E a função de Euler, qual é o ponto determinado por $E(BC)$?

17. Quais as coordenadas do ponto D?

18. Qual a medida do ângulo $\widehat{BAD}$?

19. Qual é o ponto determinado por $E(BD)$?

20. Quais as coordenadas do ponto E?

21. Qual a medida do ângulo $\widehat{BAE}$?

22. Qual é o ponto determinado por $E(BE)$?

23. Quais as coordenadas do ponto F?

24. Qual a medida do ângulo $\widehat{BAF}$?

25. Qual é o ponto determinado por $E(BF)$?

26. Mova o ponto C para um outro ponto do 1º quadrante.

27. Agora responda: Quais as coordenadas do ponto C?

28. Qual a medida do ângulo $\widehat{BAC}$?

29. Quais as coordenadas do ponto D?

30. Qual a medida do ângulo $\widehat{BAD}$?

31. Quais as coordenadas do ponto E?

32. Qual a medida do ângulo $\widehat{BAE}$?

33. Quais as coordenadas do ponto F?

34. Qual a medida do ângulo $\widehat{BAF}$?

35. Observe que se $C = (x, y)$, então seu simétrico em relação ao eixo Oy é o ponto $D = (-x, y)$. Note que $\widehat{BAD} = 180° - \widehat{BAC}$.

36. Observe também que se $C = (x, y)$, então seu simétrico em relação ao eixo Ox é o ponto $E = (x, -y)$. Veja que $\widehat{BAE} = 360° - \widehat{BAC}$.

37. Da mesma forma, se $C = (x, y)$, então seu simétrico em relação à origem do sistema de coordenadas é o ponto $F = (-x, -y)$. Veja que $\widehat{BAF} = 180° + \widehat{BAC}$.

Atividade 10

Partindo das definições das funções seno e cosseno a partir da função de Euler, esta atividade tem por objetivo estudar as propriedades das funções seno e cosseno no ciclo trigonométrico.

1. Com a ferramenta "círculo dados centro e raio", clique sobre o ponto $(0,0)$ e digite 1 na janela que solicita a medida do raio. Este é o círculo de raio unitário centrado no ponto $A = (0,0)$.

2. No campo "entrada", digite $B = (1,0)$.

3. Com a ferramenta "ponto em objeto", marque um ponto do ciclo trigonométrico pertencente ao primeiro quadrante, o qual será denominado C.

4. Construa o segmento AC.

5. Com a ferramenta "ângulo", clique sobre os pontos B, A e C, nesta ordem.

6. Com a ferramenta "mover", movimente o ponto C sobre o círculo e observe a mudança nos valores do ângulo α. Não esqueça de retornar o ponto C ao primeiro quadrante.

7. Com a ferramenta "reta perpendicular", clique sobre o eixo Oy e sobre o ponto C. Em seguida, clique sobre o eixo Ox e sobre o ponto C.

8. Com a ferramenta "interseção de dois objetos", obtenha os pontos de interseções entre a reta b e o eixo Oy e entre a reta d e o eixo Ox. Esses pontos serão denominados D e E.

9. Construa os segmentos AD, AE, CD e CE.

10. Para melhorar a visualização, clique sobre o ângulo α e sobre os segmentos AC, AD, AE, CD e CE com o botão direito do mouse e selecione a opção *exibir rótulo*. Faça o mesmo para a circunferência unitária. Clique também sobre as retas definidas anteriormente e selecione a opção *exibir objeto*. Você também pode utilizar a ferramenta "ampliar" para melhor observar a janela de visualização.

11. Com a ferramenta "ângulo", construa o ângulo $\widehat{CEA}$. O que podemos dizer a respeito do triângulo $\triangle ACE$?

12. Clique com o botão direito do mouse sobre o ângulo β e selecione a opção *exibir rótulo*.

13. Aplique a definição de seno para o triângulo retângulo $\triangle ACE$ e calcule $\operatorname{sen}\alpha$. Qual a relação entre o valor calculado para $\operatorname{sen}\alpha$ e $\overline{CE}$?

14. Observe que $ADCE$ é um retângulo. Logo, $\overline{CE} = \overline{AD}$. Sendo assim, clique sobre o segmento AD com o botão direito do mouse e selecione a opção *propriedades*. No campo "legenda", digite *seno*. No campo "exibir rótulo", selecione a opção *legenda*. Feche a janela.

15. Agora, aplique a definição de cosseno no triângulo $\triangle ACE$ e calcule $\cos\alpha$. Qual a relação entre o valor calculado para $\operatorname{sen}\alpha$ e $\overline{AE}$?

16. Clique sobre o segmento AE com o botão direito do mouse e selecione a opção *propriedades*. No campo "legenda", digite *cosseno*. No campo "exibir rótulo", selecione a opção *legenda*. Feche a janela.

17. Para melhorar a visualização, clique com o botão direito do mouse sobre o ângulo β e selecione a opção *exibir objeto*. Clique também sobre os pontos A, D e E e selecione a opção "exibir rótulo". Na aba "opções", selecione a janela *avançado*. Na aba "preferências - janela de visualização", clique nos itens *eixo* x e *eixo* y e desmarque a opção *exibir números*. Feche a janela.

18. Clique com o botão direito do mouse sobre os segmentos nomeados de seno e cosseno e selecione a opção *propriedades*. Na aba *cor*, selecione, por exemplo, as cores verde e azul, respectivamente.

19. Com a ferramenta "mover" você pode movimentar o ponto C e observar que para cada valor de α os valores de seno e cosseno se alteram.

20. Agora responda: Quais os valores de $\operatorname{sen} 30°$ e $\cos 30°$?

21. Quais os valores de $\operatorname{sen} 45°$ e $\cos 45°$?

22. Quais os valores de $\operatorname{sen} 60°$ e $\cos 60°$?

23. Determine o valor de $\operatorname{sen}^2 30° + \cos^2 30°$ apenas observando a construção realizada.

24. Determine o valor de $\operatorname{sen}^2 45° + \cos^2 45°$ apenas observando a construção realizada.

25. Determine o valor de $\operatorname{sen}^2 60° + \cos^2 60°$ apenas observando a construção realizada.

26. Compare os valores de $\operatorname{sen} 30°$ e $\cos 60°$.

27. Compare os valores de $\cos 30°$ e $\operatorname{sen} 60°$.

Atividade 11

O objetivo desta atividade é estender os conceitos vistos até a última atividade para os demais quadrantes do ciclo trigonométrico, visualizando as simetrias do seno e do cosseno e observando a variação de seus sinais.

1. Refaça a construção da atividade anterior.
2. Observe que os valores de seno e cosseno do ângulo α correspondem respectivamente aos valores da ordenada e da abcissa do ponto C.
3. No campo "entrada", digite $seno = y(C)$.
4. Com a ferramenta "mover", arraste o ponto C sobre todo o ciclo trigonométrico.
5. Agora responda: No primeiro quadrante, o seno é positivo ou negativo?
6. No segundo quadrante, o seno é positivo ou negativo?
7. No terceiro quadrante, o seno é positivo ou negativo?
8. No quarto quadrante, o seno é positivo ou negativo?
9. No campo "entrada", digite $cosseno = x(C)$.
10. Com a ferramenta "mover", arraste o ponto C sobre todo o ciclo trigonométrico.
11. Agora responda: No primeiro quadrante, o cosseno é positivo ou negativo?
12. No segundo quadrante, o cosseno é positivo ou negativo?
13. No terceiro quadrante, o cosseno é positivo ou negativo?
14. No quarto quadrante, o cosseno é positivo ou negativo?
15. Clique com o botão direito do mouse sobre as retas b e d e selecione a opção *exibir objeto*.
16. Com a ferramenta "reta", clique sobre os pontos A e C, criando a reta i.
17. Com a ferramenta "interseção de dois objetos", marque a interseção das retas b, d e i com o ciclo trigonométrico.
18. Crie os segmentos DF, EG e AH. Em seguida, clique sobre eles com o botão direito do mouse e selecione a opção *exibir rótulo*.
19. Clique com o botão direito do mouse sobre as retas b, d e i e selecione a opção *exibir objeto*. Como já foi visto na atividade 9, F, G e H são os pontos simétricos do ponto C em relação aos eixos coordenados e à origem do sistema.
20. Com a ferramenta "ângulo", construa os ângulos $\widehat{BAF}$, $\widehat{BAH}$ e $\widehat{BAG}$.
21. Agora responda: Qual o valor do ângulo $\widehat{BAC}$?
22. Quais os valores de $\text{sen}(\widehat{BAC})$ e $\cos(\widehat{BAC})$?

23. Qual o valor do ângulo $\widehat{BAF}$? Comprove que $\widehat{BAF} = 180° - \widehat{BAC}$.

24. Quais os valores de $\operatorname{sen}(\widehat{BAF})$ e $\cos(\widehat{BAF})$?

25. Conclua que $\operatorname{sen}(\widehat{BAF}) = \operatorname{sen}(\widehat{BAC})$ e que $\cos(\widehat{BAF}) = -\cos(\widehat{BAC})$.

26. Qual o valor do ângulo $\widehat{BAH}$? Comprove que $\widehat{BAH} = 180° + \widehat{BAC}$.

27. Quais os valores de $\operatorname{sen}(\widehat{BAH})$ e $\cos(\widehat{BAH})$?

28. Conclua que $\operatorname{sen}(\widehat{BAH}) = -\operatorname{sen}(\widehat{BAC})$ e que $\cos(\widehat{BAH}) = -\cos(\widehat{BAC})$.

29. Qual o valor do ângulo $\widehat{BAG}$? Comprove que $\widehat{BAG} = 360° - \widehat{BAC}$.

30. Quais os valores de $\operatorname{sen}(\widehat{BAG})$ e $\cos(\widehat{BAG})$?

31. Conclua que $\operatorname{sen}(\widehat{BAG}) = -\operatorname{sen}(\widehat{BAC})$ e que $\cos(\widehat{BAG}) = \cos(\widehat{BAC})$.

32. Complete as tabelas abaixo.

t	0°	90°	180°	270°	360°
$\operatorname{sen} t$					
$\cos t$					

t	30°	45°	60°	120°	135°	150°	210°	225°	240°	300°	315°	330°
$\operatorname{sen} t$												
$\cos t$												

Atividade 12

Esta atividade tem por objetivo apresentar o gráfico da função seno e estudar, a partir daí, algumas de suas propriedades.

1. Com a ferramenta "círculo dados centro e raio", clique sobre o ponto $(0, 0)$ e digite 1 na janela que solicita a medida do raio. Este é o círculo de raio unitário centrado no ponto $A = (0, 0)$.

2. No campo "entrada", digite $B = (1, 0)$.

3. Com a ferramenta "controle deslizante", selecione a opção *ângulo* e o defina no intervalo de $-720°$ a $720°$, com um incremento igual a $5°$. Clique na aba "animação" e no campo *repetir* selecione a opção "crescente". Clique em *aplicar*.

4. Com a ferramenta "ângulo com amplitude fixa", clique sobre o ponto B e em seguida sobre o ponto A. Na janela que aparecer, defina o ângulo como sendo α, no sentido anti-horário.

5. No campo "entrada", digite $P = (\alpha, \text{sen}(\alpha))$.
6. Clique na aba "opções" e selecione a janela *avançado*. Na aba "preferências - janela de visualização", clique no item *eixo x*. Marque o item *distância* e selecione a opção $\dfrac{\pi}{2}$. No item *unidade*, selecione a opção π. Feche a janela.
7. Com o botão direito do mouse, clique sobre o ponto P e selecione a opção *habilitar rastro*.
8. Com o botão direito do mouse, clique sobre o controle deslizante e selecione a opção *animar*.
9. O gráfico obtido pelo rastro do ponto P é o gráfico da função seno? Explique.
10. Para ver o gráfico da função seno, vá ao campo "entrada" e digite *sen(x)*.
11. Agora responda: No primeiro quadrante, a função seno é crescente ou decrescente?
12. No segundo quadrante, a função seno é crescente ou decrescente?
13. No terceiro quadrante, a função seno é crescente ou decrescente?
14. No quarto quadrante, a função seno é crescente ou decrescente?
15. Qual o período da função seno?
16. Quais os zeros da função seno?
17. Qual o valor máximo da função seno?
18. Qual o valor mínimo da função seno?
19. Quais os intervalos em que a função seno é positiva?
20. Quais os intervalos em que a função seno é negativa?
21. Qual o domínio da função seno?
22. Qual a imagem da função seno?

Atividade 13

Esta atividade tem por objetivo apresentar o gráfico da função cosseno e estudar, a partir daí, algumas de suas propriedades.

1. Com a ferramenta "círculo dados centro e raio", clique sobre o ponto $(0, 0)$ e digite 1 na janela que solicita a medida do raio. Este é o círculo de raio unitário centrado no ponto $A = (0, 0)$.

2. No campo “entrada”, digite $B = (1, 0)$.

3. Com a ferramenta “controle deslizante”, selecione a opção *ângulo* e o defina no intervalo de $-720°$ a $720°$, com um incremento igual a $5°$. Clique na aba “animação” e no campo *repetir* selecione a opção “crescente”. Clique em *aplicar*.

4. Com a ferramenta “ângulo com amplitude fixa”, clique sobre o ponto B e em seguida sobre o ponto A. Na janela que aparecer, defina o ângulo como sendo α, no sentido anti-horário.

5. No campo “entrada”, digite $P = (\alpha, \cos(\alpha))$.

6. Clique na aba “opções” e selecione a janela *avançado*. Na aba “preferências - janela de visualização”, clique no item *eixo x*. Marque o item *distância* e selecione a opção $\frac{\pi}{2}$. No item *unidade*, selecione a opção π. Feche a janela.

7. Com o botão direito do mouse, clique sobre o ponto P e selecione a opção *habilitar rastro*.

8. Com o botão direito do mouse, clique sobre o controle deslizante e selecione a opção *animar*.

9. Para ver o gráfico da função cosseno, vá ao campo “entrada” e digite *cos(x)*.

10. Os gráficos obtidos nos itens 7 e 8 representam a mesma função? Explique.

11. Agora responda: No primeiro quadrante, a função cosseno é crescente ou decrescente?

12. No segundo quadrante, a função cosseno é crescente ou decrescente?

13. No terceiro quadrante, a função cosseno é crescente ou decrescente?

14. No quarto quadrante, a função cosseno é crescente ou decrescente?

15. Qual o período da função cosseno?

16. Quais os zeros da função cosseno?

17. Qual o valor máximo da função cosseno?

18. Qual o valor mínimo da função cosseno?

19. Quais os intervalos em que a função cosseno é positiva?

20. Quais os intervalos em que a função cosseno é negativa?

21. Qual o domínio da função cosseno?

22. Qual a imagem da função cosseno?

Atividade 14

Esta atividade tem por objetivo apresentar a função tangente e estudar algumas de suas propriedades.

1. Com a ferramenta "círculo dados centro e raio", clique sobre o ponto $(0, 0)$ e digite 1 na janela que solicita a medida do raio. Este é o círculo de raio unitário centrado no ponto $A = (0, 0)$.
2. No campo "entrada", digite $B = (1, 0)$.
3. Com a ferramenta "reta paralela", clique sobre o eixo Oy e, em seguida, sobre o ponto B. Este é o eixo das tangentes.
4. Crie um ponto no primeiro quadrante do ciclo trigonométrico.
5. Trace a reta que passa pelos pontos A e C.
6. Construa o ângulo $\widehat{BAC}$.
7. Marque a interseção entre as retas a e b.
8. Observe que o triângulo $\triangle ABD$ é retângulo no vértice B.
9. Construa o segmento BD.
10. No triângulo $\triangle ABD$ calcule a $\tan \alpha$. Conclua que $\tan \alpha = \overline{BD}$.
11. Clique com o botão direito do mouse sobre o segmento BD e selecione a opção *propriedades*. Na aba "básico", defina a legenda como *tangente* e no item *exibir rótulo* selecione a opção *legenda*. Na aba "cor", selecione, por exemplo, a cor verde. Feche a janela.
12. Observe que a reta b também corta o ciclo trigonométrico no terceiro quadrante. Marque esta interseção.
13. Construa o ângulo $\widehat{BAE}$.
14. Conforme você já sabe, $\widehat{BAE} = 180° + \widehat{BAC}$. Confirme isso.
15. Observe que $\tan(\widehat{BAE}) = \tan(\widehat{BAC})$.
16. Mova o ponto C para o segundo quadrante e observe que $\tan(\widehat{BAE}) = \tan(\widehat{BAC})$. Porém, veja que, agora, o ponto D se encontra na parte negativa do eixo das tangentes.

17. No campo "entrada", digite *tangente = y(D)*.

18. Movendo o ponto C pelo ciclo trigonométrico, complete as tabelas abaixo.

t	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\tan t$					

t	$30°$	$45°$	$60°$	$120°$	$135°$	$150°$	$210°$	$225°$	$240°$	$300°$	$315°$	$330°$
$\tan t$												

Atividade 15

Esta atividade tem por objetivo apresentar o gráfico da função tangente e estudar, a partir daí, algumas de suas propriedades.

1. Com a ferramenta "círculo dados centro e raio", clique sobre o ponto $(0,0)$ e digite 1 na janela que solicita a medida do raio. Este é o círculo de raio unitário centrado no ponto $A = (0,0)$.

2. No campo "entrada", digite $B = (1,0)$.

3. Com a ferramenta "controle deslizante", selecione a opção *ângulo* e o defina no intervalo de $-720°$ a $720°$, com um incremento igual a $0.1°$. Clique na aba "animação" e no campo *repetir* selecione a opção "crescente". Clique em *aplicar*.

4. Com a ferramenta "ângulo com amplitude fixa", clique sobre o ponto B e em seguida sobre o ponto A. Na janela que aparecer, defina o ângulo como sendo α, no sentido anti-horário.

5. No campo "entrada", digite $P = (\alpha, \tan(\alpha))$.

6. Clique na aba "opções" e selecione a janela *avançado*. Na aba "preferências - janela de visualização", clique no item *eixo x*. Marque o item *distância* e selecione a opção $\frac{\pi}{2}$. No item *unidade*, selecione a opção π. Feche a janela.

7. Com o botão direito do mouse, clique sobre o ponto P e selecione a opção *habilitar rastro*.

8. Com o botão direito do mouse, clique sobre o controle deslizante e selecione a opção *animar*.

9. O gráfico obtido pelo rastro do ponto P é o gráfico da função tangente? Explique.

10. Para ver o gráfico da função tangente, vá ao campo "entrada" e digite *tan(x)*.

11. Agora responda: No primeiro quadrante, a função tangente é crescente ou decrescente?

12. No segundo quadrante, a função tangente é crescente ou decrescente?

13. No terceiro quadrante, a função tangente é crescente ou decrescente?

14. No quarto quadrante, a função tangente é crescente ou decrescente?

15. Qual o período da função tangente?

16. Quais os zeros da função tangente?

17. Qual o valor máximo da função tangente?

18. Qual o valor mínimo da função tangente?

19. Quais os intervalos em que a função tangente é positiva?

20. Quais os intervalos em que a função tangente é negativa?

21. A função tangente possui assíntotas? Verticais ou horizontais? Em que pontos?

22. Qual o domínio da função tangente?

23. Qual a imagem da função tangente?

Atividade 16

Esta atividade tem por objetivo apresentar e estudar a função cotangente e algumas de suas propriedades.

1. Com a ferramenta "círculo dados centro e raio", clique sobre o ponto $(0,0)$ e digite 1 na janela que solicita a medida do raio. Este é o círculo de raio unitário centrado no ponto $A = (0,0)$.

2. No campo "entrada", digite $B = (1,0)$.

3. Marque o ponto $C = (0,1)$.

4. Com a ferramenta "reta paralela", clique sobre o eixo Ox e, em seguida, sobre o ponto C. Este é o eixo das cotangentes.

5. Crie um ponto no primeiro quadrante do ciclo trigonométrico.

6. Trace a reta que passa pelos pontos A e D.

7. Construa o ângulo $\widehat{BAD}$.

8. Marque a interseção entre as retas a e b.

9. Observe que o triângulo $\triangle ACE$ é retângulo no vértice C.

10. Construa o segmento CE.

11. Conforme foi visto em sala de aula, $\cot(\widehat{BAD}) = \tan(\widehat{EAC})$. Assim, no triângulo $\triangle ACE$ calcule a $\tan(\widehat{EAC})$. Conclua que $\cot\alpha = \overline{CE}$.

12. Clique com o botão direito do mouse sobre o segmento CE e selecione a opção *propriedades*. Na aba "básico", defina a legenda como *cotangente* e no item *exibir rótulo* selecione a opção *legenda*. Na aba "cor", selecione, por exemplo, a cor verde. Feche a janela.

13. Observe que a reta b também corta o ciclo trigonométrico no terceiro quadrante. Marque esta interseção.

14. Construa o ângulo $\widehat{BAF}$.

15. Conforme você já sabe, $\widehat{BAF} = 180° + \widehat{BAD}$. Confirme isso.

16. Observe que $\cot(\widehat{BAF}) = \cot(\widehat{BAD})$.

17. Para melhorar a visualização, clique com o botão direito do mouse sobre o ciclo trigonométrico e sobre os ângulos α e β e selecione a opção *exibir rótulo*.

18. Mova o ponto D para o segundo quadrante e observe que $\cot(\widehat{BAF}) = \cot(\widehat{BAD})$. Porém, veja que, agora, o ponto E se encontra na parte negativa do eixo das cotangentes.

19. No campo "entrada", digite *cotangente = x(E)*.

20. Movendo o ponto D pelo ciclo trigonométrico, complete as tabelas abaixo.

t	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\cot t$					

t	$30°$	$45°$	$60°$	$120°$	$135°$	$150°$	$210°$	$225°$	$240°$	$300°$	$315°$	$330°$
$\cot t$												

Atividade 17

Esta atividade tem por objetivo apresentar e estudar o gráfico da função cotangente.

1. Com a ferramenta "círculo dados centro e raio", clique sobre o ponto $(0, 0)$ e digite 1 na janela que solicita a medida do raio. Este é o círculo de raio unitário centrado no ponto $A = (0, 0)$.

2. No campo "entrada", digite $B = (1, 0)$.

3. Com a ferramenta "controle deslizante", selecione a opção *ângulo* e o defina no intervalo de $-720°$ a $720°$, com um incremento igual a $0.1°$. Clique na aba "animação" e no campo *repetir* selecione a opção "crescente". Clique em *aplicar*.

4. Com a ferramenta "ângulo com amplitude fixa", clique sobre o ponto B e em seguida sobre o ponto A. Na janela que aparecer, defina o ângulo como sendo α, no sentido anti-horário.

5. No campo "entrada", digite $P = (\alpha, \cot(\alpha))$.

6. Clique na aba "opções" e selecione a janela *avançado*. Na aba "preferências - janela de visualização", clique no item *eixo x*. Marque o item *distância* e selecione a opção $\frac{\pi}{2}$. No item *unidade*, selecione a opção π. Clique no item *rótulo* e selecione a opção x. Na aba *eixo y*, clique no item *rótulo* e selecione a opção y. Feche a janela.

7. Com o botão direito do mouse, clique sobre o ponto P e selecione a opção *habilitar rastro*.

8. Com o botão direito do mouse, clique sobre o controle deslizante e selecione a opção *animar*.

9. O gráfico obtido pelo rastro do ponto P é o gráfico da função cotangente? Explique.

10. Para ver o gráfico da função cotangente, vá ao campo "entrada" e digite *cot(x)*.

11. Agora responda: No primeiro quadrante, a função cotangente é crescente ou decrescente?

12. No segundo quadrante, a função cotangente é crescente ou decrescente?

13. No terceiro quadrante, a função cotangente é crescente ou decrescente?

14. No quarto quadrante, a função cotangente é crescente ou decrescente?

15. Qual o período da função cotangente?

16. Quais os zeros da função cotangente?

17. Qual o valor máximo da função cotangente?

18. Qual o valor mínimo da função cotangente?

19. Quais os intervalos em que a função cotangente é positiva?

20. Quais os intervalos em que a função cotangente é negativa?

21. A função cotangente possui assíntotas? Verticais ou horizontais? Em que pontos?

22. Qual o domínio da função cotangente?

23. Qual a imagem da função cotangente?

Atividade 18

Esta atividade tem por objetivo apresentar e estudar a função secante e algumas de suas propriedades.

1. Com a ferramenta "círculo dados centro e raio", clique sobre o ponto $(0,0)$ e digite 1 na janela que solicita a medida do raio. Este é o círculo de raio unitário centrado no ponto $A=(0,0)$.

2. No campo "entrada", digite $B=(1,0)$.

3. Crie um ponto no primeiro quadrante do ciclo trigonométrico.

4. Com a ferramenta "reta tangente", clique sobre o ponto C e, em seguida, sobre o ciclo trigonométrico.

5. Trace a reta que passa pelos pontos A e C.

6. Construa o ângulo $\widehat{BAC}$.

7. Marque as interseções entre a reta a e os eixos Ox e Oy, respectivamente, e a interseção entre a reta b e o terceiro quadrante do ciclo trigonométrico.

8. Construa os segmentos AD e AE.

9. Conforme foi visto em sala de aula, $\sec(\widehat{BAC})=\overline{AD}$ e $\csc(\widehat{BAC})=\overline{AE}$. Clique com o botão direito do mouse sobre o segmento AD e selecione a opção *propriedades*. Na aba "básico", defina a legenda como *secante* e no item *exibir rótulo* selecione a opção *legenda*. Na aba "cor", selecione, por exemplo, a cor verde. Feche a janela. Clique com o botão direito do mouse sobre o segmento AE e selecione a opção *propriedades*. Na aba "básico", defina a legenda como *cossecante* e no item *exibir rótulo* selecione a opção *legenda*. Na aba "cor", selecione, por exemplo, a cor vermelho. Feche a janela.

10. Para melhorar a visualização, clique com o botão direito do mouse sobre o ciclo trigonométrico, sobre os segmentos AD e AE e sobre o ângulo α e selecione a opção *exibir rótulo*.

11. No campo "entrada", digite *secante = x(D)*.

12. Movendo o ponto C pelo ciclo trigonométrico, complete as tabelas abaixo.

t	0°	90°	180°	270°	360°
$\sec t$					

t	30°	45°	60°	120°	135°	150°	210°	225°	240°	300°	315°	330°
$\sec t$												

13. No campo "entrada", digite *cossecante = y(E)*.

14. Movendo o ponto C pelo ciclo trigonométrico, complete as tabelas abaixo.

t	0°	90°	180°	270°	360°
$\csc t$					

t	30°	45°	60°	120°	135°	150°	210°	225°	240°	300°	315°	330°
$\csc t$												

Atividade 19

Esta atividade tem por objetivo apresentar e estudar o gráfico da função secante.

1. Com a ferramenta "círculo dados centro e raio", clique sobre o ponto $(0, 0)$ e digite 1 na janela que solicita a medida do raio. Este é o círculo de raio unitário centrado no ponto $A = (0, 0)$.

2. No campo "entrada", digite $B = (1, 0)$.

3. Com a ferramenta "controle deslizante", selecione a opção *ângulo* e o defina no intervalo de $-720°$ a $720°$, com um incremento igual a $0.1°$. Clique na aba "animação" e no campo *repetir* selecione a opção "crescente". Clique em *aplicar*.

4. Com a ferramenta "ângulo com amplitude fixa", clique sobre o ponto B e em seguida sobre o ponto A. Na janela que aparecer, defina o ângulo como sendo α, no sentido anti-horário.

5. No campo "entrada", digite $P = (\alpha, \sec(\alpha))$.

6. Clique na aba “opções” e selecione a janela *avançado.* Na aba “preferências - janela de visualização”, clique no item *eixo x.* Marque o item *distância* e selecione a opção $\frac{\pi}{2}$. No item *unidade*, selecione a opção π. Clique no item *rótulo* e selecione a opção x. Na aba *eixo y*, clique no item *rótulo* e selecione a opção y. Feche a janela.

7. Com o botão direito do mouse, clique sobre o ponto P e selecione a opção *habilitar rastro.*

8. Com o botão direito do mouse, clique sobre o controle deslizante e selecione a opção *animar.*

9. O gráfico obtido pelo rastro do ponto P é o gráfico da função secante? Explique.

10. Para ver o gráfico da função secante, vá ao campo “entrada” e digite *sec(x).*

11. Agora responda: No primeiro quadrante, a função secante é crescente ou decrescente?

12. No segundo quadrante, a função secante é crescente ou decrescente?

13. No terceiro quadrante, a função secante é crescente ou decrescente?

14. No quarto quadrante, a função secante é crescente ou decrescente?

15. Qual o período da função secante?

16. Quais os zeros da função secante?

17. Qual o valor máximo da função secante?

18. Qual o valor mínimo da função secante?

19. Quais os intervalos em que a função secante é positiva?

20. Quais os intervalos em que a função secante é negativa?

21. A função secante possui assíntotas? Verticais ou horizontais? Em que pontos?

22. Qual o domínio da função secante?

23. Qual a imagem da função secante?

Atividade 20

Esta atividade tem por objetivo apresentar e estudar o gráfico da função cossecante.

1. Com a ferramenta "círculo dados centro e raio", clique sobre o ponto $(0, 0)$ e digite 1 na janela que solicita a medida do raio. Este é o círculo de raio unitário centrado no ponto $A = (0, 0)$.

2. No campo "entrada", digite $B = (1, 0)$.

3. Com a ferramenta "controle deslizante", selecione a opção *ângulo* e o defina no intervalo de $-720°$ a $720°$, com um incremento igual a $0.1°$. Clique na aba "animação" e no campo *repetir* selecione a opção "crescente". Clique em *aplicar*.

4. Com a ferramenta "ângulo com amplitude fixa", clique sobre o ponto B e em seguida sobre o ponto A. Na janela que aparecer, defina o ângulo como sendo α, no sentido anti-horário.

5. No campo "entrada", digite $P = (\alpha, \text{cosec}(\alpha))$.

6. Clique na aba "opções" e selecione a janela *avançado*. Na aba "preferências - janela de visualização", clique no item *eixo x*. Marque o item *distância* e selecione a opção $\frac{\pi}{2}$. No item *unidade*, selecione a opção π. Clique no item *rótulo* e selecione a opção x. Na aba *eixo y*, clique no item *rótulo* e selecione a opção y. Feche a janela.

7. Com o botão direito do mouse, clique sobre o ponto P e selecione a opção *habilitar rastro*.

8. Com o botão direito do mouse, clique sobre o controle deslizante e selecione a opção *animar*.

9. O gráfico obtido pelo rastro do ponto P é o gráfico da função cossecante? Explique.

10. Para ver o gráfico da função cossecante, vá ao campo "entrada" e digite *cosec(x)*.

11. Agora responda: No primeiro quadrante, a função cossecante é crescente ou decrescente?

12. No segundo quadrante, a função cossecante é crescente ou decrescente?

13. No terceiro quadrante, a função cossecante é crescente ou decrescente?

14. No quarto quadrante, a função cossecante é crescente ou decrescente?

15. Qual o período da função cossecante?

16. Quais os zeros da função cossecante?

17. Qual o valor máximo da função cossecante?

18. Qual o valor mínimo da função cossecante?

19. Quais os intervalos em que a função cossecante é positiva?

20. Quais os intervalos em que a função cossecante é negativa?

21. A função cossecante possui assíntotas? Verticais ou horizontais? Em que pontos?

22. Qual o domínio da função cossecante?

23. Qual a imagem da função cossecante?

Considerações finais

Após a aplicação do questionário apresentado no Apêndice com alunos do Ensino Médio de uma das Escolas Estaduais de nossa cidade, ficou evidente que existem grandes problemas no processo de ensino e aprendizagem da Trigonometria. Passamos então a desenvolver esta proposta para que pudéssemos contribuir de alguma forma com a melhoria desse processo.

Hoje em dia, inúmeras são as pesquisas realizadas em Educação Matemática sobre a utilização de recursos tecnológicos no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Alguns Governos também têm envidado esforços para que essas pesquisas possam ser colocadas em prática. Pensando nisso, escolhemos o software *GeoGebra* como recurso didático para auxiliar no desenvolvimento da nossa proposta. Devemos ressaltar que não foi nosso propósito discutir a formação de professores para a adoção desses recursos em sala de aula, mas sim a sugestão de atividades que pudessem estimular os alunos e fazer com que eles sejam parte ativa do processo de ensino e aprendizagem.

Nossa proposta foi desenvolvida e testada no Laboratório de Informática de nossa Escola, com a utilização de um aparelho datashow e dos computadores do laboratório. Estamos aplicando a proposta em uma turma de segundo ano da modalidade EJA (Ensino de Jovens e Adultos) e em três turmas de terceiro ano, sendo uma da modalidade EJA e duas da modalidade de ensino regular.

Iniciamos a aplicação de nossa proposta em sala de aula falando um pouco sobre a história da Trigonometria, discutindo seu surgimento e desenvolvimento e mostrando sua importância e aplicações no dia-a-dia. A maioria dos alunos mostrou bastante interesse no tema, sobretudo quando mostrávamos imagens de aplicações da Trigonometria retiradas da internet para ilustrar o que estávamos falando. Porém, alguns alunos ainda mostraram uma certa resistência quanto ao estudo da História da Matemática. Comentários do tipo "virou professor de História?" foram comuns nas primeiras aulas em todas as turmas. Isso nos fez lembrar a importância de passar sempre um pouco da História da Matemática para nossos alunos. Infelizmente, essa é uma prática muito pouco utilizada em nossas escolas de Ensino Médio. Todos os nossos alunos afirmaram nunca terem assistido à uma aula sobre essa temática. Fica a sugestão para que possamos utilizar mais esse ramo da Matemática em nosso cotidiano.

A segunda fase do desenvolvimento da nossa proposta foi a apresentação do GeoGebra para os alunos. Iniciamos discutindo um pouco sobre o uso de tecnologias em sala de aula e sobre como as tecnologias influenciam em suas vidas diárias. Muitos afirmaram ser muito boa a nossa iniciativa, pois era algo novo e diferente para eles, fazendo com que se prendessem mais ao assunto. Apresentamos inicialmente o GeoGebra através do uso do aparelho datashow. Em seguida, solicitamos que todos abrissem o programa em seus computadores. Os computadores da escola são munidos do Linux Educacional e já possuiam o GeoGebra instalado. Porém, tivemos dificuldades devidas à versão do GeoGebra instalada nos computadores da escola ser um pouco obsoleta. Até o nosso Professor Orientador sugerir a utilização do GeoGebra em nosso trabalho, nunca tínhamos usado o referido software. Assim, aprendemos a utilizar a versão mais recente existente no mercado. A versão dos computadores da escola possui menos ferramentas do que a versão que utilizávamos até então. Tivemos que nos adaptar, mas não representou um grande problema. Já na primeira aula, pudemos notar quais dos alunos nos dariam “um pouco mais de trabalho”, pois não tinham tanta afinidade com o uso do computador. Por sorte, todos já sabiam utilizar as ferramentas básicas dos computadores, sobretudo pela experiência deles com os sites de relacionamento, o que nos favoreceu bastante.

Em seguida, passamos a aplicar a nossa proposta introduzindo os conceitos que desenvolvemos em nosso trabalho. Até o momento, posso garantir que conseguimos alcançar boa parte dos nossos objetivos. Os alunos se afeiçoaram bastante ao novo método. Sentimos que estão mais motivados, pois diminuiram os atrasos deles no início das aulas e o número de faltas tem sido cada vez menor. Quando não é possível utilizar o laboratório, temos elaborado alguns exercícios em sala de aula e avaliado passo a passo o andamento do nosso projeto.

Para concluir, gostaríamos de explicitar a nossa felicidade por estar desenvolvendo essa proposta em sala de aula. Com certeza estamos fazendo algo de novo, tanto para nós quanto para nossos alunos, e estamos contribuindo para a melhora do processo de ensino e aprendizagem em nossa Escola.

Referências

ANDRé, M. E. D. A. Teorias da resistência e a prática educativa. *Educação e Sociedade*, n. 31, p. 91–6, Dezembro 1988.

BALDIN, N. Formação teórica e prática pedagógica do professor de história. *Educação e Sociedade*, n. 25, p. 96–109, Dezembro 1986.

BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. 4ª. ed. Rio de Janeiro: Siciedade Brasileira de Matemática, 2000. (Coleção do Professor de Matemática).

BOLZAN, M. J. A. Análise da transformada em ondeletas aplicada em sinal geofísico. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 26, n. 1, p. 37–41, 2004.

COSTA, M. V.; BUJES, M. I. Prática pedagógica e pesquisas articuladas para a melhoria da qualidade de ensino superior. *Educação e Sociedade*, n. 28, p. 117–31, Dezembro 1987.

COSTA, N. M. L. da. A história da trigonometria. *Educação Matemática em Revista - Revista da SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática) - Ano 10*, p. 60–9, Março 2003.

D'AMBROSIO, B. S. Formação de professores de matemática para o século xxi: O grande desafio. *Pro-Posições*, Pro-Posições, v. 4, n. 1, p. 35–41, Março 1993.

ERNEST, P. *The Philosophy of Mathematics Education*. [S.l.]: Routledge Falmer, 1991.

ESQUINCALHA, A. da C. Nicolas bourbaki e o movimento matemática moderna. *Revista de Educação, Ciências e Matemática*, v. 2, n. 3, p. 28–37, set/dez 2012.

EULER, L. *Introducción al análisis de los infinitos*. Sevilla: SAEM, 1748. 2000.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. 2. ed. Campinas: [s.n.], 1997. Tradução de Hygino H. Domingues.

FIGUEIREDO, D. G. de. *Análise de Fourier e EDP*. 4. ed. [S.l.]: IMPA, 2012. Coleção Projeto Euclides.

KENNEDY, E. S. *História da Trigonometria*. São Paulo: Atual, 1992. Traduzido por Hygino H. Domingues.

LIMA, E. L. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias*. Rio de Janeiro: IMPA, Vitae, 1991.

LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1997. (Coleção do Professor de Matemática, v. 1).

LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2003. (Coleção do Professor de Matemática, v. 2).

MATIAS, N. *A Trigonometria e a Aviação*. 2014. Acessado em 03/08/2014. Disponível em: <http://trigonoblog.blogspot.com.br/2014/07/a-trigonometria-e-aviacao.html>.

MAYRA, C. *Propuesta: Capacitación Docente en el uso del GeoGebra como Herramienta Didáctica en la Enseñanza de las Matemáticas*. Dissertação (Mestrado) — Universidad de Los Andes, Trujillo, Enero 2012.

PCN. *Parâmetros Curriculares Nacionais. Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental. Matemática.* Brasília, 2001. 2ª impressão.

POMBO, O. *História do Papiro de Rhind*. 2002. Acessado em 24/11/2014. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/opombo/seminario/rhind/inicio.htm>.

REZENDE, L. B. W. Um breve histórico do conceito de função. *Caderno Dá Licença*, v. 6, p. 65–75, 2005. Instituto de Matemática. Universidade Federal Fluminense. Niterói.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. *Bolema, ano 13*, n. 14, p. 66–91, 2000.

THOMPSON, A. G. Handbook of research on mathematics teaching and learning. In: ______. New York: Grouws, D. A., 1992. cap. Teacher's beliefs and conceptions: a synthesis of research, p. 127–46.

Apêndice

Questionário aplicado com alunos do Ensino Médio

Série:

Idade:

1) O que é um triângulo retângulo?

2) No triângulo abaixo, determine:

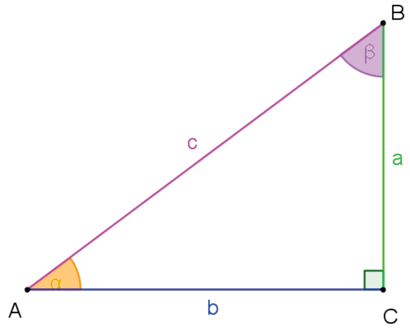
a) a hipotenusa.

b) o cateto oposto ao ângulo α.

c) o cateto oposto ao ângulo β.

d) o cateto adjacente ao ângulo α.

e) o cateto adjacente ao ângulo β.



3) No ciclo abaixo, identifique o 2º quadrante.