PROFMAT Departamento de Matemática
Universidade Federal do Paraná
81531-990, Curitiba, PR
Brazil

# TÓPICOS DE ARITMÉTICA: QUADRADOS MÁGICOS

por

Luana Fonseca Duarte Fernandes

Preprint PROFMAT 1 (2014) 12 de novembro, 2014

Disponível via INTERNET:
http://www.mat.ufpr.br

# Tópicos de Aritmética: quadrados mágicos

*Luana Fonseca Duarte Fernandes*
Departamento de Matemática - UFPR
019081-990, Curitiba, PR
Brasil
e-mail: luanafduarte@yahoo.com.br

8 de Dezembro de 2014

**Resumo**

O presente trabalho é parte de uma coleção de atividades resolvidas, comentadas e complementares envolvendo conceitos de aritmética. Apresentamos uma proposta de material para ser utilizado em cursos extracurriculares, cujo objetivo é potencializar o interesse pelo estudo da Matemática. Por este motivo, buscamos atividades que despertem a motivação dos alunos e as descrevemos de maneira a auxiliar os professores em sua aplicação, com respostas, comentários e sugestões. A abordagem dos temas se faz com o uso recorrente de aspectos históricos, resolução de problemas, jogos e atividades recreativas.
Palavras-Chave: Aritmética - Resolução de problemas - Jogos

## 1 Introdução

O material a seguir é uma proposta de projeto para um curso de matemática extracurricular para alunos do Ensino Médio. Surgiu da percepção da necessidade de um atendimento diferenciado a alunos com algum interesse na disciplina, pois em nossas experiências podemos perceber que no dia a dia de uma sala de aula não é sempre possível dar atenção aos alunos com um maior interesse e habilidades em matemática. A consequência disso é um desperdício de possíveis talentos que são deixados a margem, em um sistema de ensino que geralmente oferece projetos extraclasse apenas de reforço escolar para sanar dificuldades, já que dificilmente temos algo no sentido de potencializar habilidades. Cabe ressaltar que a ideia não é selecionar apenas os melhores alunos para participar. O ideal é que seja aberto a todo aluno simpatizante da disciplina e que voluntariamente se inscreva no curso.

Os tópicos abordados são: quadrados mágicos e suas propriedades e a relação com a progressão aritmética. Os temas são desenvolvidos inicialmente com um pouco de história sobre o protagonista principal do assunto. Em seguida são propostas atividades, que remetem à resolução de problemas, nos quais o aluno vai gradativamente chegando às conclusões. No texto, as atividades estão com respostas e comentários. A versão do aluno, sem respostas, é encontrada no anexo. Buscamos abordar os assuntos de maneira curiosa e lúdica com a intenção de despertar uma motivação para os tópicos mais delicados do trabalho e principalmente causar uma inquietação no sentido de buscar conhecimento matemático que vá além do que a escola oferece às turmas regulares.

Em vários momentos no texto, o professor encontrará sugestões de como organizar a aplicação das atividades em sala. Porém, é importante que haja uma preparação inicial no sentido de mesclar a proposta do texto com a habilidade e experiência do aplicador. Igualmente importante é a realização de uma leitura inicial do nível de conhecimento matemático da turma. Neste sentido e caso seja necessário, deve ser pensado um pré-curso no qual serão trabalhadas as arestas identificadas.

# 2 Metodologia

Procuramos uma apresentação da matemática de forma a valorizar a construção do conhecimento, diferente da forma clássica na qual se define novos conteúdos com auxílio dos assuntos anteriores, completando com exemplos e problemas que utilizam esses saberes, segundo Brousseau (1996, pg 36) sobre a maneira de ensino clássica

> "apaga completamente a história destes saberes, isto é, a sucessão das dificuldades e das questões que provocaram o aparecimento dos conceitos fundamentais, a sua utilização para a colocação de novos problemas, a intrusão de técnicas e de questões resultantes dos progressos dos outros sectores, a rejeição de determinados pontos de vista, considerando falsos ou desadequados, e as numerosas querelas a seu respeito."

Buscamos coletar problemas e jogos que desenvolvessem o aspecto científico nos alunos, situações que envolvem habilidades de levantar hipóteses, conjecturar, intuir, testar e validar resultados, como Brousseau (1996, pg 38) descreve

> "uma boa reprodução pelo aluno de uma actividade científica exige que ele aja, formule, prove, construa modelos, linguagens, conceitos, teorias, os troque com outros, reconheça aqueles que são conformes à cultura, retire desta aqueles que lhe são úteis, etc."

A respeito da escolha da aritmética, acreditamos que há conteúdo que não estão evidenciados nos parâmetros curriculares, porém podem ser abordados e relacionados com os que lá estão. A aritmética também é importante, pois segundo Gomes, (2008, pg 160)

> "A aritmética é invocada como o primeiro exemplo sensível da necessidade dos signos: conforme Condillac, não poderíamos fazer progressos algum no conhecimento dos números, se não imaginássemos nomes para todas as idéias que formamos pela multiplicação da idéia de unidade, que ele supõe já ter recenido um nome."

Escolhemos utilizar de alguns jogos, pois estes auxiliam no desenvolvimento de habilidades de raciocínio lógico, desperta um maior interesse, pode-se analisar os erros e elaborar estratégias para vencer, de acordo com Emerique (1999, pg 188)

> "colocar o aluno diante de situações de jogo pode ser uma boa estratégia para aproximá-lo dos conteúdos culturais a serem veiculados na escola, além de poder estar promovendo o desenvolvimento de novas estruturas cognitivas"

Também de acordo com o aspecto cognitivo do jogo Paulo (1999, pg 190) diz

> "necessidade e possibilidade de construção de novos conhecimentos e procedimentos, de descobrir erros e de imaginar formas de superá-los, dentre outros desafios."

Utilizamos também a resolução de problemas, uma vez que propicia um ambiente em que o aluno é ser ativo no processo de ensino-aprendizagem e segundo Onuchic (1999, pg 204)

> "a tendência é caracterizar esse trabalho considerando os estudantes como participantes ativos, os problemas como instrumentos precisos e bem definidos e a atividade na resolução de problemas como uma coordenação complexa simuntanea de vários níveis de atividade."

# 3 O quadrado mágico

## 3.1 Um pouco de história: quadrados mágicos

Vamos utilizar a definição de que um quadrado mágico de ordem $n$ é uma matriz de $n \times n$, com $n^2$ números naturais distintos tais que a soma de cada coluna, linha e diagonal é um mesmo número, chamado de constante mágica. Há alguns textos que não fazem restrição quanto a serem números distintos, porém vamos trabalhar com a restrição. Há registros de quadrados mágicos desde aproximadamente 2200 a.C., conta-se que o Imperador chinês Yü enquanto caminhava próximo a um rio encontrou uma tartaruga, e no casco dela havia um diagrama com um padrão numérico. O primeiro quadrado mágico registrado em um livro foi no primeiro século Da-Dai Liji. Na China, os quadrados mágicos são utilizados em diversas áreas como astrologia, adivinhação, filosofia, fenômenos naturais, comportamento humano e faz parte da cultura Chinesa. Da China foi para Índia, depois para os países árabes, Europa e de lá para o Japão, também foi inserido na cultura da África Ocidental. Em algumas culturas são associados à adivinhação, à alquimia e à astrologia. Durante o século XVII um francês fez um estudo da teoria matemática para a construção dos quadrados mágicos e Adamas Kochansky estendeu o conceito para três dimensões. No século XIV os quadrados mágicos eram relacionados com probabilidade e análise. Atualmente eles estão associados a análise fatorial, combinatória, matrizes, aritmética modular e geometria.

## 3.2 Atividades

**Atividade 3.1** *Encontrando padrões.*

A atividade tem como objetivo a descoberta de padrões em quadrados mágicos $3 \times 3$ utilizando a sequência de $1 - 9$, através da observação e de alguns questionamentos.
**Descrição da atividade:** Para iniciar a atividade, uma sugestão é dividir os alunos em gupos de dois ou três, entregue uma folha com o quadrado mágico da figura e questões a seguir (modelo para o aluno no anexo). Peça aos alunos para encontrarem padrões no quadrado mágico dado utilizando as questões para auxiliá-los:

**Atividade 3.2** *Encontre padrões no quadrado:*

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

**Questão 3.2.1** *Qual a maior soma que pode ser obtida com três números diferentes com os números de* 1 *a* 9*?*

**Resposta:** 24 pois é a soma dos três maiores números 7, 8 e 9.

**Questão 3.2.2** *Qual a menor soma que pode ser obtida com três números diferentes com os números de* 1 *a* 9*?*

**Resposta:** 6, pois é a soma dos 3 menores 1, 2 e 3.

**Questão 3.2.3** *Pode ser utilizado um número mais de uma vez?*

**Resposta:** Por observação conclui-se que não.

**Questão 3.2.4** *Compare as somas dos números em linhas, colunas e diagonais. O que podemos dizer a respeito delas?*

**Resposta:** São iguais a 15.

**Questão 3.2.5** *O que podemos dizer sobre a disposição dos números pares e ímpares?*

**Resposta:** Por observação temos que os pares estão nos cantos e os ímpares estão acima, abaixo, lado esquerdo e direito do quadrado central.

**Questão 3.2.6** *Qual a soma dos cantos superior esquerdo e inferior direito? Onde mais encontramos esta soma?*

**Resposta:** $4+6 = 10$. Também encontramos este valor somando o canto superior direito com o canto inferior esquerdo, $8 + 2 = 10$.

**Questão 3.2.7** *Qual a soma de todos os números? Qual a relação desta soma com a soma das colunas, linhas ou diagonais?*

**Resposta:** $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$. A soma das colunas, linhas ou diagonais é um terço da soma de todos os números $\frac{45}{3} = 15$.
**Comentário:** Durante a atividade promova discussão para que todos percebam que 15 é uma constante mágica e que existem alguns padrões no quadrado. Depois, passe para a seguinte atividade:

**Atividade 3.3** *Construindo um quadrado mágico.*

**Descrição da atividade:** Para a atividade vamos precisar de um conjunto de cartões numerados de 1-9, um conjunto por grupo, e da folha de questões. Distribua um conjunto de fichas numeradas de 1 a 9 para cada grupo e peça para que os alunos construam um quadrado mágico (diferente do dado na atividade) com os padrões que foram observados. Lembre-os de que a soma de cada linha, coluna e diagonal deve ser 15. Antes de iniciarem, mostre que não é qualquer valor que pode ir no centro do quadrado, para isso, faça o seguinte exemplo e sugira posteriormente para fazerem o mesmo para os demais valores, até descobrirem que somente o 5 pode estar no centro do quadrado.

**Exemplo 3.1** *É possível colocarmos* 1 *no centro do quadrado?*

Se colocarmos 1 no centro do quadrado qual a soma para completar a linha central e a coluna central? A soma total deve ser 15 como já temos 1 a soma dos outros dois valores é $15 - 1 = 14$. Como podemos escrever a soma 14 com os números de 2 a 9? As possibilidades são $14 = 5 + 9$ e $14 = 6 + 8$. Se colocarmos estes valores na linha e na coluna, teremos a figura,

| | | |
|---|---|---|
| | 5 | |
| 8 | 1 | 6 |
| | 9 | |

Resta colocar quais números? $2, 3, 4$, e 7. Na primeira linha já temos 5 então os outros dois devem somar $15 - 5 = 10$, as possibilidades são: $10 = 4 + 6$, não podemos pois já usamos o 6; $10 = 2 + 8$ não podemos pois já usamos o 8; $10 = 1 + 9$ não podemos pois já usamos o 1 e o 9; restou $10 = 3 + 7$. Temos as possibilidades

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |
| | 9 | |

| | | |
|---|---|---|
| 7 | 5 | 3 |
| 8 | 1 | 6 |
| | 9 | |

No primeiro quadrado, por exemplo, a diagonal que contém o 3 e 1, temos a soma $3+1 = 4$ para completar 15 seria necessário utilizar o 11, mas não é possível. Na segunda opção temos o mesmo problema na diagonal secundária. Logo com o 1 no centro não é possível completar o quadrado. Podemos usar o argumento de que como observamos na primeira atividade a disposição dos número ímpares e pares são:

| | | |
|---|---|---|
| par | ímpar | par |
| ímpar | ímpar | ímpar |
| par | ímpar | par |

Se temos o 1 no centro vimos que a soma dos outros dois números deve ser 14, e conforme o quadrado acima temos que a coluna central e a linha central devem ser a soma de ímpares e $14 = 5 + 9$ e $14 = 6 + 8$, esta segunda opção é soma de pares, logo não podemos ter o 1 no centro.

Analogamente podemos mostrar que os valores $2, 3, 4, 6, 7, 8$ e 9 não podem estar no centro. Desta forma, somente 5 pode estar no centro.

Agora que os alunos sabem deste fato, peça para que construam um quadrado mágico diferente do dado na primeira atividade. São oito possibilidades. Os quadrados mágicos a seguir são simétricos. Por isso, é possível trabalhar também este conceito geométrico, porém não é este o nosso foco.

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 1 | 6 |
| 3 | 5 | 7 |
| 4 | 9 | 2 |

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 3 | 4 |
| 1 | 5 | 9 |
| 6 | 7 | 2 |

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 3 | 8 |
| 9 | 5 | 1 |
| 2 | 7 | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 1 | 8 |
| 7 | 5 | 3 |
| 2 | 9 | 4 |

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 7 | 2 |
| 1 | 5 | 9 |
| 8 | 3 | 4 |

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 9 | 4 |
| 7 | 5 | 3 |
| 6 | 1 | 8 |

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 7 | 6 |
| 9 | 5 | 1 |
| 4 | 3 | 8 |

**Atividade 3.4** *Generalizando quadrado mágicos de ordem* 3

**Descrição da atividade:** Depois de realizadas as primeiras atividades, pergunte se as seguintes propriedades são válidas para quaisquer sequência de nove números distintos, entregue as seguintes perguntas para os alunos e peça para resolverem:

**Questão 3.4.1** *Dado um quadrado mágico de ordem* 3, *ou seja* $3 \times 3$. *Verifique:*

| | | |
|---|---|---|
| b | c | d |
| e | a | f |
| g | h | i |

**a.** A constante mágica (valor da soma de cada linha, coluna e diagonal) é um terço da soma de todos os nove números dispostos no quadrado mágico.

**Resposta comentada:** De fato
$\begin{cases} b+c+d=k \\ e+a+f=k \\ g+h+i=k \end{cases}$ Somando temos que $a+b+c+d+e+f+g+h+i=3k$.

**b.** A constante mágica é o triplo do valor central.

**Resposta comentada:** Seja $k$ a constante mágica, temos $\begin{cases} c+a+h=k \\ e+a+f=k \\ g+a+d=k \\ b+a+i=k \end{cases}$

Somando temos $4a+b+c+d+e+f+g+h+i=4k$ como $a+b+c+d+e+f+g+h+i=3k$ então temos $3a+3k=4k$ logo $a=\frac{k}{3}$.

**c.** A soma dos elementos dos quatro cantos é quatro vezes o valor central.

**Resposta comentada:**

$$\begin{aligned} b+i+a &= k \\ g+d+a &= k \\ b+g+d+i &= 2k-2a \\ &= 2.3a-2a \\ &= 4a \end{aligned}$$

**d.** A soma dos elementos do centro de cada alinhamento periférico é igual a soma dos elementos dos quatro cantos.

**Resposta comentada:**

$$\begin{array}{rcl} a+b+c+d+e+f+g+h+i & = & 3k = 3.3a \\ (b+d+g+i)+a+c+e+h+f & = & 9a \\ 4a+a+c+e+h+f & = & 9a \\ c+e+h+f & = & 4a \end{array}$$

**e.** A soma de dois elementos extremos de um alinhamento que passe pelo centro é igual ao dobro do valor central.

**Resposta comentada:**

$$\begin{array}{rcl} a+c+h & = & k = 3a \\ c+h & = & 2a \\ e+a+f & = & k = 3a \\ e+f & = & 2a \end{array}$$

**Questão 3.4.2** *Complete os seguintes quadrados mágicos:*

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 17 | |
| | 11 | 7 |
| 12 | | |

| | | |
|---|---|---|
| | 2 | |
| | | 20 |
| 11 | 26 | |

**Resposta:** No primeiro quadrado podemos utilizar a propriedade de que a constante mágica é o triplo do valor central, logo é $3.11 = 33$ e completar o quadrado; no segundo, podemos utilizar que a soma de dois elementos extremos que passe pelo centro é igual ao dobro do valor central, então temos $2 + 26 = 28$ o valor central é 14. Assim temos a constante mágica 42.

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 17 | 10 |
| 15 | 11 | 7 |
| 12 | 5 | 16 |

| | | |
|---|---|---|
| 23 | 2 | 17 |
| 8 | 14 | 20 |
| 11 | 26 | 5 |

**Atividade 3.5** *Operações com quadrados mágicos*

**Descrição da atividade:** As próximas atividades estão relacionadas a operações com quadrados mágicos e suas propriedades, através também da investigação podemos verificar e depois validar alguns resultados. Para isto, inicie as atividades entregando aos alunos os seguintes problemas que aqui estão resolvidos.

**Questão 3.5.1** *Considere os quadrados mágicos formados por duas sequências diferentes e responda:*

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 1 | 8 |
| 7 | 5 | 3 |
| 2 | 9 | 4 |

| | | |
|---|---|---|
| 10 | 2 | 9 |
| 6 | 7 | 8 |
| 5 | 12 | 4 |

**a.** Se multiplicarmos por dois todos os elementos dos quadrados mágicos o que acontece com a constante mágica?

**Resposta comentada:** A constante mágica fica multiplicada por dois. A primeira tem como constante mágica 15 , e depois que multiplicamos por dois a constante mágica é 30. No segundo quadrado mágico, a constante é 21, e depois que multiplicamos por dois a constante mágica é 42.

| | | |
|---|---|---|
| 12 | 2 | 16 |
| 14 | 10 | 6 |
| 4 | 18 | 8 |

| | | |
|---|---|---|
| 20 | 4 | 18 |
| 12 | 14 | 16 |
| 10 | 24 | 8 |

**b.** Se somarmos dois em todos os termos dos quadrados mágicos o que acontece com cada constante mágica?

**Resposta comentada:**

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 3 | 10 |
| 9 | 7 | 5 |
| 4 | 11 | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| 12 | 4 | 11 |
| 8 | 9 | 10 |
| 7 | 14 | 6 |

Às constantes mágicas ficam adicionadas 6, a primeira fica $15 + 6 = 21$ e a segunda $21 + 6 = 27$.

**c.** Se somarmos os dois quadrados o resultado ainda é um quadrado mágico?

**Resposta comentada:**

| | | |
|---|---|---|
| 16 | 3 | 17 |
| 13 | 12 | 11 |
| 7 | 21 | 8 |

Ainda é um quadrado mágico.

**Questão 3.5.2** *Vamos generalizar as propriedades vistas na primeira atividade:*

**a.** Se multiplicarmos por uma constante $k$ todos os elementos de um quadrado mágico a constante mágica fica multiplicada por $k$.

**Resposta comentada:**

| | | |
|---|---|---|
| a | b | c |
| d | e | f |
| g | h | i |

| | | |
|---|---|---|
| ka | kb | kc |
| kd | ke | kf |
| kg | kh | ki |

A constante mágica é $S = a + b + c$ e depois de multiplicado por $k$ temos a nova constante $ka + kb + kc = k(a + b + c) = kS$.

**b.** Se somarmos uma constante $k$ em todos os elementos de um quadrado mágico então a constante mágica fica somada $3 \times k$.

**Resposta comentada:**

| | | |
|---|---|---|
| a | b | c |
| d | e | f |
| g | h | i |

| | | |
|---|---|---|
| a+k | b+k | c+k |
| d+k | e+k | f+k |
| g+k | h+k | i+k |

A constate mágica é $S = a+b+c$ depois que somamos a constante $k$ temos a constante mágica $a + k + b + k + c + k = a + b + c + 3k = S + 3k$.

**c.** Se somarmos dois quadrados mágicos, formados por sequências distintas entre si, então o resultado ainda é um quadrado mágico.

**Resposta comentada:**

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \text{a} & \text{b} & \text{c} \\ \hline \text{d} & \text{e} & \text{f} \\ \hline \text{g} & \text{h} & \text{i} \\ \hline \end{array} \quad + \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline a_1 & b_1 & c_1 \\ \hline d_1 & e_1 & f_1 \\ \hline g_1 & h_1 & i_1 \\ \hline \end{array} \quad = \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline a + a_1 & b + b_1 & c + c_1 \\ \hline d + d_1 & e + e_1 & f + f_1 \\ \hline g + g_1 & h + h_1 & i + i_1 \\ \hline \end{array}$$

Sejam $S$ e $S_1$ as constantes mágicas cada uma de um quadrado. No quadrado mágico da soma temos:

$$a + a_1 + b + b_1 + c + c_1 = (a + b + c) + (a_1 + b_1 + c_1) = S + S_1$$

analogamente para todas as linhas, colunas e diagonais do quadrado da soma, podemos então concluir que as somas são todas iguais a $S + S_1$. Logo, o quadrado formado pela soma de dois quadrados mágicos é também mágico e sua constante mágica é $S + S_1$.

**Atividade 3.6** *Progressão Aritmética e quadrados mágicos*

**Descrição da atividade:** Para podermos fazer as relações entre progressão aritmética e quadrados mágicos, peça para os alunos resolverem a questão a seguir utilizando o que vimos nas atividades anteriores. Não diga a eles que são progressões aritméticas, se algum aluno perceber não tem problema, mas a princípio não comente.

**Atividade 3.7** *Monte três quadrados mágicos com os seguintes conjuntos de números:* $(2,3,4,5,6,7,8,9,10)$, $(1,3,5,7,9,11,13,15,17)$, $(2,4,6,8,10,12,14,16,18)$.

Use as questões a seguir como um auxílio.

**Questão 3.7.1** *Qual a constante mágica para cada conjunto?*

Conjunto 1 : $\dfrac{2+3+4+5+6+7+8+9+10}{3} = 18$

Conjunto 2 : $\dfrac{1+3+5+7+9+11+13+15+17}{3} = 30$

Conjunto 3 : $\dfrac{2+4+6+8+10+12+14+16+18}{3} = 27$

**Questão 3.7.2** *Qual a relação entre os três conjuntos e o conjunto* $(1,2,3,4,5,6,7,8,9)$ *dentro do quadrado mágico?*

**Resposta:** São progressões aritméticas.

**Questão 3.7.3** *Qual a razão de cada conjunto?*

**Resposta comentada:**
Conjunto 1 : 1
Conjunto 2 : 2
Conjunto 3 : 1
Conjunto de 1 a 9 : 1

**Questão 3.7.4** *Como podemos relacionar a montagem do quadrado tradicional (com os valores de* 1 *a* 9*) com a montagem dos quadrados mágicos com os três novos conjuntos?*

**Resposta comentada:** Como forma uma progressão aritmética podemos relacionar os termos em ordem: os primeiros com os primeiros, os segundos com os segundos, e assim sucessivamente; e relacionado com a posição no quadrado mágico formado pelos números de 1 a 9 que já sabemos montar:

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 3 | 8 |
| 9 | 5 | 1 |
| 2 | 7 | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| $a_4$ | $a_3$ | $a_8$ |
| $a_9$ | $a_5$ | $a_1$ |
| $a_2$ | $a_7$ | $a_6$ |

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 4 | 9 |
| 10 | 6 | 2 |
| 3 | 8 | 7 |

| | | |
|---|---|---|
| 7 | 5 | 15 |
| 17 | 9 | 1 |
| 3 | 13 | 11 |

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 6 | 16 |
| 18 | 10 | 2 |
| 4 | 14 | 12 |

Peça para os alunos observarem qual a relação do termo central do quadrado mágico com o termo central da P.A. Agora que eles já sabem essa relação entregue os seguintes problemas:

**Questão 3.7.5** *Considere o seguinte quadrado mágico; subtraia o termo central 5 de todos os números:*

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 3 | 8 |
| 9 | 5 | 1 |
| 2 | 7 | 6 |

**Resposta:**

| | | |
|---|---|---|
| -1 | -2 | 3 |
| 4 | 0 | -4 |
| -3 | 2 | 1 |

**Questão 3.7.6** *Sabendo que temos uma P.A., como encontrar a constante mágica do quadrado formado por ela?*

**Resposta comentada:** Será a soma dos nove termos dividido por três:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$\frac{S_9}{3} = \frac{(a_1 + a_9)9}{2.3} = \frac{3(a_1 + a_9)}{2}$$

**Questão 3.7.7** *Será que a soma dos nove termos da P.A. (formada por inteiros positivos) é sempre divisível por* 3*?*

**Resposta comentada:** Sim, pois $a_1 = a_5 - 4r$ e $a_9 = a_5 + 4r$ logo

$$S_9 = \frac{(a_1 + a_9)9}{2} = \frac{(a_5 - 4r + a_5 + 4r).9}{2} = \frac{2a_5.9}{2} = 9a_5$$

que é divisível por 3.

**Questão 3.7.8** *Construa um quadrado mágico cujo termo central seja* 11.

**Resposta comentada:** Há inúmeras soluções, podemos construir uma P.A. com termo $a_5 = 11$ e escolher uma razão, por exemplo $r = 2$, assim descobrimos todos os nove termos, e dispomos no quadrado mágico como no primeiro exercício:
P.A.: $3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19$
Constante mágica: $3.a_5 = 3.11 = 33$

| | | |
|---|---|---|
| 9 | 7 | 17 |
| 19 | 11 | 3 |
| 5 | 15 | 13 |

**Questão 3.7.9** *Complete o seguinte quadrado mágico:*

| | | |
|---|---|---|
| | | 10 |
| | | |
| 40 | | 20 |

**Resposta comentada:** Como vimos, os termos simétricos, em relação ao quadrado central, são 10 e 40 e o centro é a média destes valores. Logo é $\frac{10+40}{2} = 25$ e por simetria completamos o quadrado.

| | | |
|---|---|---|
| 30 | 35 | 10 |
| 5 | 25 | 45 |
| 40 | 15 | 20 |

**Questão 3.7.10** *Construa um quadrado mágico cuja constante mágica seja* 51.

**Resposta comentada:** Há infinitas possibilidades:
Por exemplo, sabemos que a constante mágica é três vezes o termo central, logo $3a_5 = 51$. Portanto $a_5 = 17$. Escolhendo a razão igual a 2, assim descobrem-se os demais termos e completa-se o quadrado como no primeiro exercício, tem-se:
PA: $9, 11, 13, 15, 17, 21, 23, 25$.

| | | |
|---|---|---|
| 15 | 13 | 23 |
| 25 | 17 | 9 |
| 11 | 21 | 19 |

# 4 Problemas complementares

## 4.1 Problemas de quadrados mágicos

**Problema 4.1** *(Banco de questões-OBMEP-2013) O quadrado abaixo é parte de um quadrado mágico que usa os números ímpares entre* 1 *e* 17. *Descubra qual o valor de* $X$

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | |
| 5 | | 13 |
| X | | 3 |

**Problema 4.2** *(Banco de questões-OBMEP-2012) Gabriel desenha quadrados divididos em nove casas e escreve os números naturais de* 1 *a* 9, *um em cada casa. Em seguida, ele calcula a soma dos números de cada linha e de cada coluna. A figura mostra um dos quadrados do Gabriel; observe que a soma dos números da terceira linha é* $5 + 8 + 2 = 15$ *e a soma dos números da segunda coluna é* $9 + 7 + 8 = 24$. *Neste exemplo, as seis somas são* $6, 12, 15, 15, 18$ *e* 24.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6 | 9 | 3 | 18 |
| 4 | 7 | 1 | 12 |
| 5 | 8 | 2 | 15 |
| 15 | 24 | 6 | |

**a.** Gabriel preencheu um quadrado e fez apenas cinco somas: $9, 13, 14, 17$ e $18$. Qual é a soma que está faltando?

**b.** Explique por que não é possível que em um quadrado do Gabriel, todas as somas sejam números pares.

**c.** Preencha o quadrado de forma que as somas sejam 7,13,14,16,18 e 22.

**Problema 4.3** *(OBM-1998) No quadrado mágico abaixo, a soma dos números em cada linha, coluna e diagonal é sempre a mesma. Qual o valor do número $x$?*

| | | |
|---|---|---|
| 15 | | 35 |
| 50 | | |
| 25 | x | |

**Problema 4.4** *(Banco de questões-OBMEP-2010) Complete as casas em branco da tabela ao lado com frações, de tal modo que a soma dos três números de qualquer linha, qualquer coluna e das duas diagonais seja sempre a mesma.*

| | | |
|---|---|---|
| | | 3/5 |
| | 1/2 | |
| 0,4 | 0,5 | |

**Problema 4.5** *(Banco de questões-OBMEP-2010) Complete os cinco números que faltam no quadrado abaixo para que ele seja um quadrado mágico*

| | | |
|---|---|---|
| -12 | | -4 |
| | 0 | |
| 4 | | |

# 5 Referências Bibliográficas

# Referências

[1] BROUSSEAU,Guy. In: *Didática Matemáticas, direção de Jean Brun. Tradução: Maria José Figueiredo*. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996, p. 35-113.

[2] EMERIQUE, Paulo S..In: *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. Organizadora: Maria Aparecida Viggiani Bicudo*. São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 185-198.

[3] ONUCHIC, Lourdes de la R..In: *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. Organizadora: Maria Aparecida Viggiani Bicudo*. São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 199-218.

[4] GOMES, Maria Laura Magalhães.: *Quatro visões iluministas sobre a educação matemática: Diderot, D'Alembert, Condillac e Condorcet.* Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2008.

[5] Pitombeira, J. B.: *O jogo de Euclides.* Revista do Professor de Matemática (RPM), SBM, São Paulo, 1989.

[6] HEFEZ, Abramo.: *Elementos de Aritmética.* 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[7] BOYER, Carl B..: *História da matemática* 2. ed. Editora Edgard Blucher, LTDA.

[8] FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia.: *Círculos Matemáticos: A Experiência Russa. Tradução: Valéria de Magalhães Iório.* Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[9] Roque ROQUE, Tatiana.: *História da Matemática.* Editora Zahar, 2012.

[10] STEWART, Ian.: *Almanaque das Curiosidades Matemáticas.* Editora Zahar, 2008.

[11] STEWART, Ian.: *Incríveis Passatempos Matemáticos.* Editora Zahar, 2010.

[12] GARDNER, Martin.: *Divertimentos matemáticos*/ tradução de Bruno Mazza. 3.ed. São Paulo: IBRASA, 1998.

[13] Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_iicap4.pdf. Acesso em: 25/10/2014.

[14] Disponível em: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle-/123456789/515/2011_00411. _PABLO_ROBERTO_DE_SOUSA_NETO.pdf. Acesso em: 25/10/2014.

[15] Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/ espec/monografiasPdf/Monografia_Jurandir.pdf. Acesso em: 25/10/2014.

[16] Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/euclides/euclides.htm. Acesso em: 25/10/2014.

[17] Disponível em: http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-paintings-br.html. Acesso em: 25/10/2014.

[18] Disponível em: http://cmup.fc.up.pt/cmup/mcsilva/HMTP8.pdf. Acesso em: 25/10/2014.

[19] Disponível em: http://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=373. Acesso em: 25/10/2014.

[20] Disponível em: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle-/123456789/558/2011. _00462_GISELI_DUARDO_MACIANO_CAMPOS.pdf?sequence=1. Acesso em: 25/10/2014.

[21] Disponível em: http://www.uesb.br/mat/download/Trabamonografia/2013/Dinguiston.pdf. Acesso em: 25/10/2014.

[22] Disponível em: http://legauss.blogspot.com.br/2009/06/o-general-e-o-teorema-chines-dos-restos.html. Acesso em: 25/10/2014.

[23] Disponível em: http://illuminations.nctm.org/lesson.aspx?id=655. Acesso em: 25/10/2014.

[24] Disponível em: http://www.nctm.org/uploadedFiles/Lessons_and_Resources/mt2012-08-34a.pdf. Acesso em: 25/10/2014.

[25] Disponível em: http://www.nctm.org/publications/article.aspx?id=19900. Acesso em: 25/10/2014.

# Anexo

**Atividade:** Encontrem padrões no seguinte quadrado:

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

**Questão 1:** Qual a maior soma que pode ser obtida com três números diferentes com os números de 1 a 9?

**Questão 2:** Qual a menor soma que pode ser obtida com 3 números diferentes com os números de 1 a 9?

**Questão 3:** Pode ser utilizado um número mais de uma vez?

**Questão 4:** Compare as somas dos números em linhas, colunas e diagonais. O que podemos dizer a respeito delas?

**Questão 5:** O que podemos dizer sobre a disposição dos número pares e ímpares?

**Questão 6:** Qual a soma dos cantos superior esquerdo e inferior direito? Onde mais encontramos esta soma?

**Questão 7:** Qual a soma de todos os números? Qual a relação desta soma com a somas das colunas, linhas ou diagonais?

**Atividade:** Construindo um quadrado mágico.

**Questão 1:** Contrua todos os possíveis quadrados mágicos, como os número de $1-9$.

**Atividade:** Generalizando quadrado mágicos de ordem 3

**Questão 1:** Dado um quadrado mágico de ordem 3, ou seja $3 \times 3$. Verifique:

| | | |
|---|---|---|
| b | c | d |
| e | a | f |
| g | h | i |

**a.** A constante mágica (valor da soma de cada linha, coluna e diagonal) é um terço da soma de todos os nove números dispostos no quadrado mágico.

**b.** A constante mágica é o triplo do valor central.

**c.** A soma dos elementos dos quatro cantos é quatro vezes o valor central.

**d.** A soma dos elementos do centro de cada alinhamento periférico é igual a soma dos elementos dos quatro cantos.

**e.** Soma de dois elementos extremos de um alinhamento que passe pelo centro é igual ao dobro do valor central.

**Questão 2:** Complete os seguintes quadrados mágicos:

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 17 | |
| | 11 | 7 |
| 12 | | |

| | | |
|---|---|---|
| | 2 | |
| | | 20 |
| 11 | 26 | |

**Atividade:** Operações com quadrados mágicos.

**Questão 1:** Considere os quadrados mágicos, formados por duas sequências diferentes, responda:

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 1 | 8 |
| 7 | 5 | 3 |
| 2 | 9 | 4 |

| | | |
|---|---|---|
| 10 | 2 | 9 |
| 6 | 7 | 8 |
| 5 | 12 | 4 |

**a.** Se multiplicarmos por dois todos os elementos dos quadrados mágicos o que acontece com a constante mágica?

**b.** Se somarmos dois em todos os termos dos quadrados mágicos o que acontece com cada constante mágica?

**c.** Se somarmos os dois quadrados o resultado ainda é um quadrado mágico?

**Questão 2:** Vamos generalizar as propriedades vistas na primeira atividade:

| | | |
|---|---|---|
| a | b | c |
| d | e | f |
| g | h | i |

**a.** Se multiplicarmos por uma constante $k$ todos os elementos de um quadrado mágico a constante mágica fica multiplicada por $k$.

**b.** Se somarmos uma constante $k$ em todos os elementos de um quadrado mágico então a constante mágica fica somada $3 \times k$.

**c.** Se somarmos dois quadrados mágicos, formados por sequências distintas entre si, então o resultado ainda é um quadrado mágico.

**Atividade:** Progressão Aritmética e quadrados mágicos

**Questão 1:** Monte três quadrados mágicos com os seguintes conjuntos de números: $(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$, $(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17)$, $(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18)$.

**Questão 2:** Qual a constante mágica para cada conjunto:

**Questão 3:** Qual a relação entre os três conjuntos e o conjunto $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$?

**Questão 4:** Qual a razão de cada conjunto?

**Questão 5:** Como podemos relacionar a montagem do quadrado tradicional (com os valores de 1 a 9) com a montagem dos quadrados mágicos com os três novos conjuntos?

**Questão 6:** Considere o seguinte quadrado mágico, subtraia o termo central 5 de todos os números:

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 3 | 8 |
| 9 | 5 | 1 |
| 2 | 7 | 6 |

**Questão 7:** Sabendo que temos uma P.A. como encontrar a constante mágica do quadrado formado por ela?

**Questão 8:** Será que a soma dos nove termos da P.A. (formada por inteiros positivos) é sempre divisível por 3?

**Questão 9:** Construa um quadrado mágico cujo termo central seja 11.

**Questão 10:** Complete o seguinte quadrado mágico:

| | | |
|---|---|---|
| | | 10 |
| | | |
| 40 | | 20 |

**Questão 11:** Construa um quadrado mágico cuja constante mágica seja 51.