**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO**
**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**Erickson Nunes Martins**

# UMA ABORDAGEM CONSTRUTIVISTA DO TEOREMA DE TALES SOB A PESRPECTIVA DA TEORIA DE VAN HIELE

Seropédica
2014

**ERICKSON NUNES MARTINS**

UMA ABORDAGEM CONSTRUTIVISTA DO TEOREMA DE TALES SOB A PERSPECTIVA DA TEORIA DE VAN HIELE

Dissertação de Mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Luiz Martins Pereira.

Seropédica

2014

Martins, Erickson Nunes.

Uma abordagem construtivista do teorema de Tales sob a perspectiva da teoria de Van Hiele/Erickson Nunes Martins – Seropédica. RJ, 2014.

Número de páginas do trabalho f.: 84

Orientador: André Pereira.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro.

1. Construtivismo. 2. Teoria de Van Hiele. 3. Teorema de Tales

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

ERICKSON NUNES MARTINS

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre**, no Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 30/08/2014

André Luiz Martins Pereira

Doutor – UFRRJ

( Orientador)

Orlando dos Santos Pereira

Doutor - UFRRJ

Maria Darci Godinho da Silva

Doutora – UFRJ

*Este trabalho é dedicado aos meus pais, que sempre me apoiaram com muito amor em toda a minha trajetória, aos meus irmãos, que estão sempre presentes e dispostos a me confortar e incentivar a buscar o meu sonho, a mãe do meu filho, por quem tenho um enorme carinho, e a ele, meu filho, a quem espero servir como exemplo, para que possa se tornar um grande homem. A todos que de alguma forma contribuíram para que pudesse chegar até aqui.*

*Agradeço a Deus, por permitir que eu pudesse realizar um sonho. Ao meu professor orientador, André, por entender os momentos difíceis que passamos, pela paciência e solidariedade em todas as etapas do curso, seja em sala ou na orientação da dissertação. Aos meus familiares e amigos, que participam e dividem comigo os momentos bons e ruins. Muito obrigado a todos, essa conquista é nossa.*

*“A memória é uma ilha de edição.”*

Wally Salomão

## RESUMO

Este trabalho busca verificar quais são as dificuldades de aprendizagem reveladas pelos alunos do 8º e do 9º ano do Ensino Fundamental, nas atividades que envolvem o teorema de Tales. Através de uma abordagem construtivista, pretende-se direcionar e orientar o aluno para uma análise gradativa e interpretativa das ações tomadas para o entendimento e a resolução de situações-problemas que envolvam o teorema de Tales. Para tanto, buscou-se olhar o teorema de Tales sob a perspectiva da teoria de Van Hiele, cuja aprendizagem , sobretudo em geometria, se dá em níveis de compreensão, cabendo ao professor o papel de atuar apenas nos momentos em que o aluno se encontra apto, ou não, a progredir de nível, condição que a teoria de Van Hiele chama de fase de aprendizagem, e ainda, dentro desse contexto, utilizar a história da matemática como elemento motivador. A elaboração das atividades teve um enfoque na compreensão dos elementos formadores e que compõem o teorema de Tales, bem como as diversas formas que eles aparecem em nosso cotidiano e, assim, fazer uma análise interpretativa de situações-problemas em que podemos aplicar o teorema e avaliar se as habilidades e competências, necessárias ao processo de ensino-aprendizagem, foram adquiridas de maneira satisfatória.



Palavras-chaves: História da Matemática – Construtivismo – Teorema de Tales – Teoria de Van Hiele

## ABSTRACT

This paper seeks to determine which learning difficulties are revealed by the students of 8th and 9th grade of elementary school, in activities involving the theorem of Thales. Through a constructivist approach, we intend to direct and guide the student to a gradual and interpretative analysis of the actions taken to understand and solve problem situations involving the theorem of Thales. In order to achieve this aim, we thought to look at the theorem of Thales from the perspective of the Van Hiele theory, whose learning, particularly in geometry, occurs in levels of understand of teacher's role acts only at times when the student is able, or not, progressing level, condition that the theory of Van Hiele calls learning phase, and also, in this context, to use the history of mathematics as motivator. The preparation of the activities had a focus on understanding the forming elements which compose the theorem of Thales, as well as the various forms they appear in everyday life and, thus, to interpretative analysis of problem situations in which we can apply the theorem and assess whether the necessary skills and competencies to the teaching-learning process were acquired in a satisfactory manner.

Keywords: History of Mathematics - Constructivism - Theorem Tales - Van Hiele Theory

## SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

Diante das dificuldades encontradas pelos alunos em assimilar e aprender e dos professores em ensinar e aplicar as atividades envolvendo o teorema de Tales, buscaremos realizar a presente pesquisa, visando desenvolver e implementar uma estratégia a ser adotada dentro do ambiente escolar, através da utilização de recursos didáticos e abordagens práticas, a serem realizadas com alunos do 8º e do 9º ano do Ensino Fundamental da Escola Municipal Charles Dickens situada no município do Rio de Janeiro.

O desenvolvimento da pesquisa se dará a partir das dificuldades observadas no processo ensino-aprendizagem. A intenção é investigar e planejar uma nova prática didática que contribua, de maneira significativa, para a melhoria do aprendizado do aluno sobre o tema abordado, e leve o professor a refletir sobre a sua prática docente, através de uma análise crítica durante todo o processo.

A priori, utilizaremos a História da Matemática como um elemento motivador, propondo ao aluno uma reflexão crítica acerca do assunto e sua aplicabilidade. A metodologia de ensino empregada está voltada para a teoria construtivista, cuja a finalidade é incentivar o aluno a construir o seu próprio conhecimento, tendo o professor o papel de mediador do assunto. Para tanto, buscaremos utilizar uma metodologia específica de pesquisa, baseada nas experiências realizadas pelo casal Van Hiele, intitulada como teoria de Van Hiele, que encontrou uma grande utilidade e resultados eficazes, sobretudo, em geometria. Sendo assim, optou-se pela utilização da teoria de Van Hiele, ou seja, dos níveis de Van Hiele associados ao ensino-aprendizagem do teorema de Tales, visando oferecer, de forma gradativa ao aluno, a capacidade e a maturidade necessárias para o aprendizado do teorema, visto que a própria experiência e vivência em sala de aula nos possibilitam identificar as dificuldades apresentadas pelos alunos, pois muitos não conseguem reconhecer a funcionalidade e a aplicabilidade ou, ainda, dar significado ao teorema de Tales.

O tema será tratado e trabalhado em sala de aula com a utilização de atividades investigatórias, que possibilitem o aluno compreender o teorema, reconhecer as variáveis pertinentes para o entendimento, bem como identificar os elementos que compõem o teorema. Para tanto, será elaborado um relatório e coletada as informações dos alunos sobre o conhecimento do tema e será proposto um vídeo, onde relataremos o feito histórico realizado por Tales no Egito, ao medir a altura da pirâmide Quéops. Logo após, faremos as atividades de reconhecimento e entendimento do teorema junto à realização de exercícios propostos. Ao final, será realizada uma atividade de campo, na qual utilizaremos o teorema de Tales para a sua realização.

Portanto, ao término do processo resultante da realização da pesquisa, faremos uma avaliação da viabilidade da metodologia adotada, enfatizando a visão construtivista do teorema de Tales, sob a perspectiva da teoria de Van Hiele, cujo foco é estabelecer quais as contribuições que a pesquisa trouxe para a formação e elevação do nível de maturidade dos alunos e para a prática docente, no que concerne o fator ensino-aprendizagem do teorema de Tales.

# 1. CAPÍTULO 1: Teoria de Educação Matemática

## 1.1 – Educação Matemática

O campo da Educação Matemática desenvolveu-se a partir do momento em que matemáticos e educadores interagiram e viram o modo como a Matemática era ensinada nas escolas e, nesse instante, passaram a analisar a Matemática que se ensina e que se aprende na escola.

Conhecer, discutir, questionar e elaborar fazem parte de um conjunto de práticas educacionais, sobretudo em educação matemática. Logo, é papel comum aos educadores, sejam matemáticos ou não, reforçar, endossar ou afastar os elementos que permeiam o processo de ensino-aprendizagem.

Nessa etapa, permiti-se discutir como a Matemática pode fornecer instrumentos capazes de interagir com as mais diferentes situações, pois é evidente que os educadores encontrarão resistências, visto que estas, construídas e preservadas pela própria sociedade, podem estar fundadas na compreensão do conhecimento matemático como uma organização linear do pensamento, impregnado de rigor e certeza. As elaborações perpassam historicamente as representações sociais de cada grupo e contribuem por delinear práticas escolares, nortear condutas e organizar sistemas de ensino.

Os conceitos devem repetir-se a partir de diferentes enfoques, indicando o caminho para suas possíveis extensões e aplicações que o aluno terá que buscar no futuro por conta própria, quando as necessitar.

É uma tarefa para educadores e matemáticos, que deve ser encorajada e estimulada desde as primeiras séries. É preciso ir educando não só na Matemática propriamente dita, mas também no raciocínio lógico dedutivo, que é a base da Matemática, já que também é imprescindível para ordenar e assimilar toda classe de conhecimento.

A Educação Matemática é uma área de conhecimento interdisciplinar, ou seja, não deve ser pensada de forma isolada como um mistura de conhecimentos advindos da Matemática e da área de educação. De fato, podemos destacar áreas de dimensões filosóficas, históricas, políticas, psicológicas, metodológicas, culturais, entre outras aonde a Matemática se faz presente mostrando a direção para qual podemos apontar na busca de um entendimento eficiente no processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

No que diz respeito à didática, seja qual for o nível, o ensino da Matemática deve estimular a criatividade, mostrando que a Matemática é como um edifício em construção, sempre necessitando de modificações e adaptações. Dessa forma, podemos ressaltar como um marco do processo de modernização do Ensino de Matemática no Brasil as atuações de Júlio César de Mello e Souza (1895-1974) e de Euclides Roxo (1890-1950) nas décadas de 30 e 40 conforme MIORIM (1998), que se destacaram nesse período, por evidenciarem suas preocupações com o ensino da época e apresentarem propostas inovadoras.

Júlio César de Mello e Souza se reinventou em sala de aula, pois, ficou conhecido por lembrar um ator, através de uma didática própria e divertida para ensinar Matemática, representava sob o pseudônimo de Malba Tahan, nome que utilizava para assinar suas obras. Foi um professor criativo e ousado, que foi muito além do ensino teórico e expositivo que perdura até os dias de hoje.

Euclides Roxo teve participação fundamental na reforma de ensino realizada em 1931, reforma Francisco Campos, na qual propôs tratar a Matemática como uma disciplina única, integralizando a Álgebra, a Aritmética e a Geometria, com a finalidade de relacioná-las entre si. Tratou, ainda, a Geometria sob a ótica de que o ensino da geometria dedutiva deveria ser abordado antes da abordagem prática. Sob este ponto de vista, se tornou, então, o responsável pela mudança curricular na área de matemática, introduzindo ideias renovadoras que foram influenciadas pelo matemático alemão Felix Christian Klein (1945), que destacava a importância da História da Matemática para o ensino de Matemática.

> A proposta também trazia uma visão mais moderna dos conteúdos matemáticos, sugerindo a eliminação de "assuntos de interesse puramente formalístico", de "processo de cálculo desprovido de interesse didático" e introduzindo o conceito de função e noções de cálculo infinitesimal. (MIORIM, 1998)

De fato, nos dias de hoje, é bem verdade que o professor não é só um mero interlocutor do conhecimento que faz parte do conteúdo existente nos livros, ele deve estimular o aprendizado, seja qual for a maneira utilizada na abordagem de determinado assunto ou tema. Nesse caso, podemos sim tratar o professor como uma espécie de ator. Pois, ele atua segundo um texto escrito, em outro contexto, e segundo determinada tradição. A esta concepção subjaz a ideia, absolutamente correta, de que o professor necessita de liberdade e criatividade em sua ação. A relação professor-aluno-problematização deve estar em perfeita harmonia, para que na situação de ensino-aprendizagem esteja explicito a colaboração do professor nos estímulos aos alunos e na busca de saberes anteriores, com a finalidade de levá-los ao encontro de um resultado ou solução que não será dado pelo professor, mas sim pela situação de aprendizagem.

Só existe aprendizagem quando o aluno percebe que existe um problema para resolver, quer dizer, quando reconhece o novo conhecimento como meio de resposta a uma pergunta. Aqui podemos recorrer a Jean Piaget (1973), para quem o reconhecimento não é simplesmente empírico (constatações a respeito do meio) e nem pré-elaborado (estruturas inatas), mas o resultado de uma interação. O que dá sentido aos conceitos ou teorias são os problemas que eles ou elas permitem resolver, desse modo, busca-se nesse trabalho, através da compreensão e aplicação, oferecer ao educando instrumentos que o possibilitem evoluir do conhecimento anterior para a construção de outros conhecimentos, segundo a Teoria de Van Hiele (VAN HIELE,1973).

## 1.2 – Teoria Construtivista

Apontada como uma das teorias mais importantes na Educação atual, a Teoria Construtivista surgiu a partir das experiências do biólogo suíço Jean Piaget (1896-1980) que, observando crianças desde o nascimento até a adolescência, percebeu que o conhecimento se constrói na interação do sujeito com o meio em que ele vive, rompendo assim os paradigmas da educação. Adotado em escolas em todas as partes do mundo, a teoria construtivista tem sido alvo de críticas e ao mesmo tempo de elogios por vários pedagogos. A Teoria Construtivista se funde com as correntes educacionais existentes até então, que procuram determinar os processos de construção do conhecimento desde as suas formas mais elementares até os níveis superiores, desenvolvendo o conhecimento em resultados de uma interação com o meio, ou seja, transformando-o em conhecimento científico.

O construtivismo (ou psicologia genética) procura explicar o desenvolvimento cognitivo (inteligência) como um processo contínuo de adaptação do organismo ao meio, marcado por várias fases (níveis): Cada uma delas representa um estágio de equilíbrio, cada vez mais estável, entre o organismo e o meio, onde ocorrem determinados mecanismos de interação, como a assimilação e a acomodação. O conhecimento começa por uma assimilação, pela estruturação e esquematização dos dados que o indivíduo recebe do exterior. Estas estruturas e esquemas são os meios que permitem o conhecimento. Logo, o processo de conhecimento se dá na interação entre sujeito e objeto, é esta interação que Piaget chama de assimilação, isto é:

> (...) uma integração a estruturas prévias, que podem permanecer invariáveis ou são mais ou menos modificadas por esta própria integração, mas sem descontinuidade com o estado precedente, isto é, sem serem destruídas, mas simplesmente acomodando-se à nova situação. *( PIAGET,1973)*

Simplificando, o processo de assimilação é a articulação das ideias já existentes com as que estão sendo aprendidas de forma que adapta o novo conhecimento com as estruturas cognitivas existentes.

De fato, noções como proporção, quantidade, causalidade, volume e outras, surgem da própria interação do indivíduo com o meio em que vive. São estabelecidos esquemas que lhes permitem agir sobre a realidade de um modo muito mais complexo do que podia fazer com seus reflexos iniciais, e sua conduta vai enriquecendo-se constantemente. Para tanto, é fundamental propor que o aluno participe ativamente do próprio aprendizado para que a partir da sua ação, da interação e do estimulo à dúvida, e ao desenvolvimento do raciocínio, entre outros procedimentos, possa estabelecer as propriedades dos objetos e construir as características inerentes ao mundo que os rodeia.

Para Fernández (2001), é importante levar em consideração as estruturas cognitivas e a estrutura desejável do sujeito, porque um depende do outro, é necessário que o sujeito tenha desejo, pois este impulsiona o sujeito a querer aprender e este querer faz com que o sujeito tenha uma relação com o objeto de conhecimento. Para ter essa relação o sujeito precisa ter uma organização lógica, que depende dos fatores cognitivos. No lado do objeto de conhecimento, ocorre a significação simbólica que depende dos fatores emocionais. Todo sujeito tem a sua modalidade de aprendizagem e os seus meios de construir o próprio conhecimento, e isto depende de cada um para construir o seu saber.

No contexto da Educação Matemática:

> O papel inicial das ações e das experiências lógico matemáticas concretas é precisamente de preparação necessária para chegar-se ao desenvolvimento do espírito dedutivo, e isto por duas razões. A primeira é que as operações mentais ou intelectuais que intervém nestas deduções posteriores derivam justamente das ações: ações interiorizadas, e quando esta interiorização, junto com as coordenações que supõem, são suficientes, as experiências lógico matemáticas enquanto ações materiais resultam já inúteis e a dedução interior se bastará a si mesmo. A segunda razão é que a coordenação de ações e as experiências lógico matemáticas dão lugar, ao interiorizar-se , a um tipo particular de abstração que corresponde precisamente a abstração lógica e matemática. (PIAGET,1973)

Por outro lado, considerando o aspecto social da aprendizagem, é permitido aos professores demonstrarem que suas ideias sobre o aprender e o ensinar, podem ser fundamentadas na perspectiva de que não é apenas o professor que ensina, mas aprende-se com os outros envolvidos, ou seja, a aprendizagem acontece no âmbito em que se está inserido e o professor tem o papel de atuar como mediador desse processo.

Em contra partida, Vygotsky (1896-1934), professor e pesquisador que foi contemporâneo de Piaget, tendo por base o desenvolvimento do indivíduo como resultado de um processo sócio-histórico, concebeu sua teoria dando um maior enfoque no papel da linguagem e da aprendizagem na aquisição de conhecimento pela interação do sujeito com o meio. O processo de formação de conceitos retomam às relações entre pensamento e linguagem, à questão cultural no processo de construção de significados pelos indivíduos e ao papel da escola na transmissão de conhecimento.

Nesse sentido:

> O aprendizado humano pressupõe uma natureza social específica e um processo através do qual as crianças penetram na vida intelectual daquelas que as cercam. *(VYGOTSKY,1998)*

Vygotsky defende a ideia de que cada indivíduo é participante ativo e vigoroso no seu processo de desenvolvimento, e capaz de criar alternativas ou meios que lhe permitam interferir no universo criado a cada estágio de desenvolvimento, para que possa compreender o seu mundo e a si mesmo. Dessa maneira, podemos realçar e considerar que para Vygotsky a linguagem interfere de modo significativo no desenvolvimento do indivíduo, e é através dela que ocorre a reflexão e a elaboração de experiências sobre o que é social e também pessoal.

> A fala humana é, de longe, o comportamento de uso de signos mais importante ao longo do desenvolvimento da criança. Através da fala, a criança supera as limitações imediatas de seu ambiente. Ela se prepara para a atividade futura; planeja, ordena e controla o próprio comportamento e o dos outros. (VYGOTSKY, 2003)

Um conceito muito forte na teoria de Vygotsky é o da Zona de Desenvolvimento Proximical (ZDP), que destaca a distância entre a fase de desenvolvimento potencial, caracterizada pelas funções emergentes, onde a criança só pode resolver um problema com a ajuda de um adulto, e a fase de desenvolvimento real, caracterizada pelas funções autônomas, isto é, as funções internalizadas que permitem com que a criança possa realizar algo sem a colaboração de um adulto, configurando assim a interação do indivíduo com o social, pois o desenvolvimento não ocorre como um processo interno, mas é resultado da sua participação em atividades compartilhadas socialmente.

Zona de Desenvolvimento Proximical é assim definida por Vygotsky (1997):

> A distância entre o nível de desenvolvimento, determinado pela capacidade de resolver, independentemente um problema, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da resolução de um problema sob a orientação de um adulto ou em colaboração com outro companheiro capaz. (VYGOTSKY,1997)

Assim, Vygotsky enfatiza o aprendizado socialmente mediado, quer dizer, é ao longo da interação que um aprendiz mais experiente pode auxiliar um aprendiz menos avançado. Desta forma, ele explora o papel das experiências sociais e culturais do indivíduo.

Quando se trata de processo de ensino e aprendizagem, especialmente o processo de aprendizagem em geometria e sobre os objetivos do ensino da geometria, nos deparamos com vários autores que buscam uma explicação e uma definição para qual seria o processo ideal, entretanto, podemos destacar as relevantes contribuições de Piaget e Vygotsky, que:

> *“ao nos mostrarem que a inteligência é um processo e não um dom, prestaram um significativo avanço à democracia”. (GROSSI,2000)*

Sendo assim, podemos semear a ideia de que a escola é o lugar onde a intervenção pedagógica intencional desencadeia o processo ensino-aprendizagem e o professor tem o papel fundamental de interagir, interferir e provocar avanços nos alunos no processo de aprendizagem, considerando o aluno em sua totalidade e na interação com seu meio e com os outros:

> *"Porque a aprendizagem põe em ação mais do que somente inteligência"* (GROSSI,2000)

Piaget e Vygotsky, em suas teorias apontam a criança como um elemento ativo e atento, capazes de criar de maneira constante hipóteses de acordo com o ambiente que estão inseridos. Nesse caso, pode-se inferir, a partir de uma análise dos estudos realizados pelos referidos autores que, o processo educacional, em todas as partes do planeta, sofre bastante influência das teorias Piagetiana e Vygotskyana. Entretanto, entre tais teorias, podem ser apontadas diferenças na maneira de conceber o processo de desenvolvimento.

↘ Analise comparativa entre PIAGET E VYGOTSKY:

- PIAGET (1896 – 1980)

  - ✓ Para Piaget, o desenvolvimento mental se dá de forma gradual, de acordo com a faixa etária, ou seja, a maturação biológica do indivíduo. A formação dos saberes estão associados às fases de desenvolvimento sensório-motor, pré-operacional, operações concretas e operações formais.
  - ✓ O pensamento está ligado à organização de estruturas sócio-motores, à medida que o processo de desenvolvimento de cognição contribui para o desenvolvimento da linguagem.
  - ✓ A aprendizagem é uma função do desenvolvimento da criança com o social, momento em que o indivíduo realiza modificações, descobertas e conjecturas.
  - ✓ A teoria está pautada na interação do sujeito com o objeto físico

- VYGOTSKY (1896 – 1934)

  - ✓ Para Vygotsky, o desenvolvimento do ser humano se dá pelo processo de interação com o meio social, onde o ambiente social e a inter-relação dos fatores internos e externos são responsáveis pelos elos desencadeadores dos processos mentais.

- ✓ O desenvolvimento e a aprendizagem, bem como, o pensamento e a linguagem, são vistos de maneira independentes, entretanto, se complementam, ao passo em que atuam de maneira conjunta no desenvolvimento dos processos mentais. Isto é, quanto mais se aprende, mais se desenvolve.
- ✓ A teoria está pautada nas trocas entre as pessoas no ambiente social.

## 1.3 – Teoria de Van Hiele

A teoria de Van Hiele teve início a partir das teses de doutorado de Dina Van Hiele-Geldof e de seu marido, Pierre Van Hiele, na Universidade de Utrecht, Holanda, em 1957. Impulsionados por problemas e dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos alunos do curso secundário na Holanda, buscaram identificar o comportamento dos alunos através do que se chamou de nível de maturidade geométrica do aluno. Dina Van Hiele faleceu logo após concluir sua tese e Pierre Van Hiele foi quem, tempos depois, desenvolveu e disseminou a teoria em suas publicações, que teve um alcance ainda maior após as traduções para o inglês feitas em 1984, realizadas por Geddes, Fuys e Tisher.

As teses do casal Van Hiele (1957) tinham como foco principal explicar o porquê dos problemas demonstrados pelos alunos ao aprender geometria, através de um experimento educacional que relaciona a ordenação do conteúdo de geometria e as atividades de aprendizado dos alunos, ou seja, um modelo educacional.

Segundo Crowley (1994) as teses de Van Hiele tem como fundamento a teoria de que o desenvolvimento mental está ligado às mudanças cognitivas dos alunos e às experiências educacionais. Não obstante, podemos obsevar na teoria de Van Hiele algumas influências, sejam estas do cognitivismo construtivista de Piaget ou do construtivismo sócio-cultural de Vygotsky.

De fato, de acordo com Crowley (1994), o próprio Van Hiele admite ter sido influenciado pela psicologia de Piaget após apreciar alguns textos piagetianos, porém, diferenciou as duas teorias e ressaltou que a de Piaget era de desenvolvimento e não de aprendizagem. Piaget, na maioria de suas publicações, tratou do aspecto cognitivo, particularmente do desenvolvimento operatório.

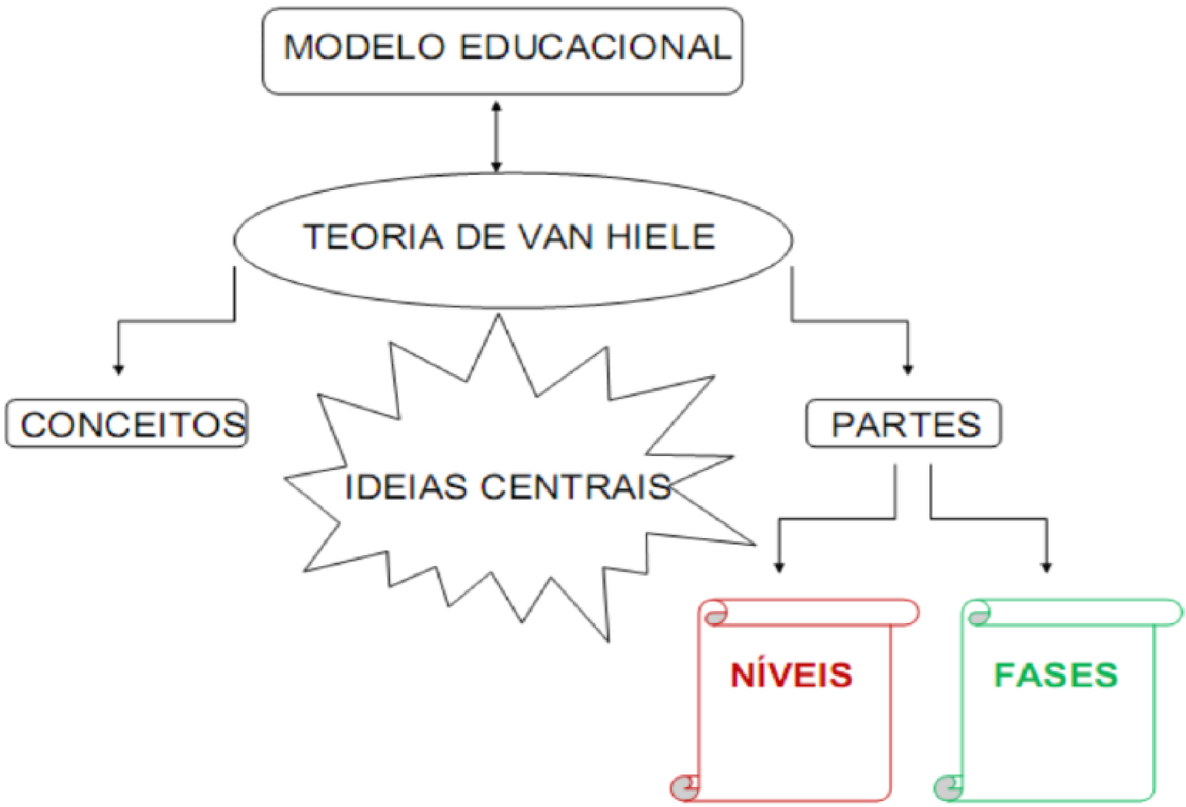
A teoria construtivista sócio-cultural de aprendizagem de Vygotsky tem como foco principal a interação social como um instrumento essencial para o desenvolvimento do conhecimento, e ainda evidencia que existem processos mentais entre as pessoas em ambiente de aprendizagem social. E isso está explicitado na teoria de Van Hiele nas fases de aprendizado, quando, de acordo com Crowley (1994), o aluno tem a oportunidade de trocar experiências e expressarem suas opiniões a respeito das observações que foram realizadas, cabendo ao professor apenas conduzir os alunos a utilizarem uma linguagem apropriada para a construção do pensamento geométrico.

Quando falamos da teoria de Van Hiele, tratamos de um modelo matemático que foi desenvolvido para suprir algumas dificuldades encontradas no processo de ensino e aprendizagem. Modelos matemáticos são utilizados em muitos setores da atividade humana, como: Matemática, Física, Astronomia e Engenharia, entre outros, e muitos problemas práticos necessitam usar modelos matemáticos na abordagem de diversas situações, como forma de representação ou simplificação de um sistema real. Isto significa dizer que um modelo deve representar um sistema e a forma como ocorrem as modificações no mesmo, tendo como ponto principal descrever matematicamente um evento do mundo real que acontece com frequência para que possa ser estudado, analisado e compreendido.

O objetivo mais importante de um modelo é permitir que ele seja entendido de forma simples ou, então, possa descrever este modelo completamente, de maneira tão precisa, ao ponto de conservar as características essenciais do mundo real, de modo que seu comportamento seja igual ou semelhante àquele do sistema modelado.

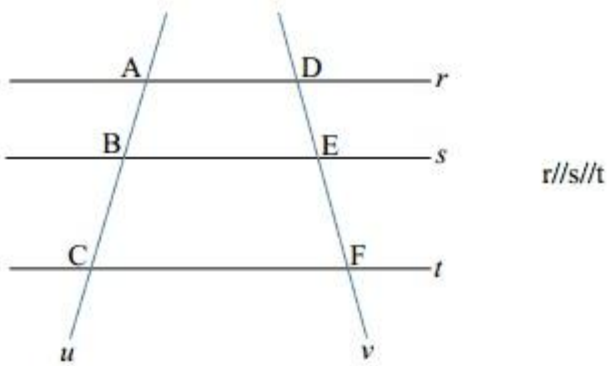
Tal qual um modelo matemático, um modelo educacional se estrutura na tentativa de alcançar melhores métodos de ensino e resultados com os alunos no que concerne o fator ensino-aprendizagem. Seguindo a mesma lógica, o modelo educacional se debruça no comportamento dos indivíduos e mergulha em diversos tipos de eventos aleatórios, internos ou externos, que contribuem para o processo de aprendizagem do aluno.

A Teoria de Van Hiele (1973), modelo educacional proposto pelo trabalho em face, pode ser estruturada da seguinte forma:




A Teoria de Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico é uma importante ferramenta utilizada na compreensão de conteúdos em geometria, que permiti investigar e saber quais as dificuldades encontradas para ensinar e aprender geometria, enriquecendo assim o ambiente de ensino e aprendizagem. Daí, podemos concluir sobre a importância de utilizar a Teoria de Van Hiele em geometria, visto que, o simples fato de saber a definição de um conceito matemático não garante a compreensão de tal conceito. Exemplo simples de tal afirmação está pautado na dificuldade dos alunos do Ensino Fundamental em compreender o Teorema de Tales, o qual será o objetivo central deste trabalho.

Teorema de Tales: *“Se duas retas transversais são cortadas por um feixe de retas paralelas, então a razão entre quaisquer dois segmentos determinados em uma das transversais é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal.”*




De fato, a maioria dos professores e autores de livros escolares, ao exercer a prática do ensino tradicional de geometria, simplesmente submete os alunos aos conteúdos prontos (definições, teoremas, demonstrações, etc.) para que eles meramente assimilem e apliquem em testes e provas. Embora tenham ensinado a um aluno e ele seja capaz de dizer tal teorema, isso não garantirá a compreensão e nem o aprendizado, pois existe a necessidade de usufruir de conceitos pré-concebidos, como por exemplo: o que são retas paralelas, transversais, razão e proporção, entre outros.

Segundo a teoria de Van Hiele (1973), a compreensão de definições formais fornecidas por livros se desenvolve apenas no Nível 3, e proporcionar tais definições aos alunos diretamente nos níveis inferiores está fadado ao fracasso. Sobre tal assunto, o matemático Hans Freudenthal (1973) também reservou fortes críticas à prática tradicional de simplesmente oferecer definições e argumentos prontos de geometria:

> A maioria das definições não é preconcebida, mas sim o toque final da atividade organizadora. Esse privilégio não deveria ser roubado da criança... O bom ensino da geometria pode significar muitas coisas: aprender a organizar um assunto e aprender o que é organizar; aprender a conceituar e o que é

> conceituar; aprender a definir e o que é uma definição. Isso significa deixar os alunos compreenderam o porquê certas organizações, conceitos e definições são melhores do que outros. (FREUDENTHAL,1973)

A teoria de Van Hiele é um modelo educativo que trata de explicar o comportamento que o aluno deve assumir em cada etapa da aprendizagem.

Além disso, ele aponta o papel que o professor deve assumir na interlocução com os alunos, na mediação e na apresentação de novos conceitos, utilizando uma linguagem de fácil compreensão e apropriada para que o desenvolvimento desejável para o aluno seja concretizado através da aprendizagem do conceito matemático.

A principal característica da teoria é a distinção de cinco diferentes níveis de pensamentos com relação ao desenvolvimento da compreensão dos alunos quando se trata de geometria, visto que a Teoria de Van Hiele pode ser proposta em qualquer área da matemática, porém, encontrou maior aplicabilidade na geometria.

Podemos destacar que, o modelo permite perceber diferentes níveis de aprendizagem geométrica ou níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, cujas características podem ser expressadas através da visualização:

- Nível (1) em que os alunos reconhecem ou reproduzem as figuras pela sua forma, ou seja, as figuras são interpretadas de forma única e os alunos julgam apenas a sua aparência.
- No Nível (2) seguinte, os alunos conseguem perceber as características e algumas propriedades da figura geométrica, e estará transcendendo outros dois.
- Níveis (3 e 4) a partir do momento em que as propriedades das figuras são ordenadas de forma lógica e as definições são construídas e concatenadas com base na percepção do necessário e do suficiente, respectivamente.
- Nível (5) quando o aluno alcança a capacidade de determinar e desenvolver sistemas baseados em axiomas distintos do usual (geometria euclidiana). É neste nível que as geometrias não – euclidianas são compreendidas.

### 1.3.1 – Níveis de Compreensão

Buscam identificar de forma seqüencial, os tipos de raciocínios e de compreensão necessários para a transposição de um nível para o outro, onde cada nível é caracterizado por relações entre os objetos de estudo e as linguagens próprias inerentes a cada um deles, permitindo deste modo que os alunos atinjam os respectivos níveis sem deixar de passar pelas estratégias dos níveis anteriores, pois não há compreensão quando a disciplina, sobre tudo a geometria, é ensinada em um nível mais elevado do que o nível atingido pelo aluno.

Segundo Van Hiele (1973), a estrutura de apresentação de cada nível pode ser descrita e definida a partir de algumas características que se destacam durante o processo.

- **NÍVEL 1: RECONHECIMENTO**
- **NÍVEL 2: ANÁLISE**
- **NÍVEL 3: CLASSIFICAÇÃO (DEDUÇÃO INFORMAL)**
- **NÍVEL 4: DEDUÇÃO FORMAL**
- **NÍVEL 5: RIGOR**

**↘ NÍVEL 1: RECONHECIMENTO**

- ✓ O aluno que se encontra nesse nível tem uma visão global das figuras, ou seja, enxergam as figuras de forma única e são capazes de atribuírem algumas características, porém irrelevantes.
- ✓ As descrições das figuras são feitas através de observações, que não diferenciam as características que reconhecem em uma figura para outra da mesma classe e o vocabulário é básico para essas descrições.

**↘ NÍVEL 2: ANÁLISE**

- ✓ Nesse momento, o aluno começa a analisar conceitos geométricos, fazendo uma análise das características das figuras.
- ✓ Percebe através da observação da figura, por suas partes e elementos, que eles estão munidos de propriedades matemáticas.
- ✓ É capaz de descrever isso de maneira informal, sem relacionar umas propriedades com as outras.

- ✓ Neste nível se dá a primeira compreensão matemática, pois, assimilam propriedades que até então eram desconhecidas, e assim fazem o reconhecimento de propriedades geométricas, porém, as utilizam de maneiras independentes.

**↘ NÍVEL 3: CLASSIFICAÇÃO (DEDUÇÃO INFORMAL)**

- ✓ É nesse nível que começa a compreensão formal do aluno.
- ✓ Ele consegue realizar inter-relações entre as propriedades de uma figura e compará-las com outra figura, isto é, reconhece que umas propriedades se deduzem de outras.
- ✓ Descreve uma figura formalmente e define corretamente conceitos.
- ✓ A partir do raciocínio dedutivo, consegue compreender o passo-a-passo de uma compreensão formal, entretanto não entende a necessidade de encadeamento entre eles.
- ✓ Pode entender uma demonstração realizada e explicada pelo professor ou pelo livro, porém não é capaz de construir por si mesmo, senão pelo processo de memorização.

**↘ NIVEL 4: DEDUÇÃO FORMAL**

- ✓ A partir de agora, o aluno entende e realiza compreensões lógicas formais, faz distinção entre postulados, teoremas e definições, além das demonstrações de vários passos e as inter-relações entre eles.
- ✓ Reconhece diferentes possibilidades ou a existência de definições equivalentes para um mesmo conceito.
- ✓ E por conseguinte, adquiri uma compreensão lógica-matemática que o torna capaz de ter uma visão global da área que está estudando.

**↘ NIVEL 5: RIGOR**

- ✓ Nesse momento atingi-se o ápice, o aluno está apto a estudar sistemas axiomáticos distintos do usual (geometria euclidiana).
- ✓ É capaz de fazer comparações entre diferentes sistemas axiomáticos.
- ✓ Nesse nível se dá a compreensão das geometrias não-euclidianas.

### 1.3.2 – Fases da Aprendizagem

São as fases da aprendizagem que orientam os professores e mostram as direções, para que eles possam auxiliar os alunos a encontrarem um nível de compreensão superior de modo mais fácil. É a fase em que o papel do professor é imprescindível como mediador, provocador e instigador das situações de aprendizagem. E de acordo com Van Hiele (1973), destacamos algumas características apresentadas na fase de aprendizagem:

- **FASE 1: INFORMAÇÃO**
- **FASE 2: ORIENTAÇÃO DIRIGÍDA**
- **FASE 3: EXPLICAÇÃO**
- **FASE 4: ORIENTAÇÃO LIVRE**
- **FASE 5: INTEGRAÇÃO**

**↘ FASE 1: INFORMAÇÃO**

- ✓ O professor e o aluno iniciam um diálogo acerca do material de estudo.
- ✓ Com a finalidade de que o professor faça uma análise do conhecimento pré concebido do aluno, pode-se dizer nível, em relação ao assunto a ser estudado.

**↘ FASE 2: ORIENTAÇÃO DIRIGÍDA**

- ✓ Nessa fase, o aluno começa a explorar e investigar o material fornecido pelo professor.
- ✓ O objetivo é que o aluno assimile, compreenda e aprenda quais são os principais conceitos e propriedades do objeto de estudo em questão.
- ✓ A escolha do material é de suma importância, portanto deve ser tratada com bastante cautela.
- ✓ Deve-se garantir atividades que proporcionem respostas específicas e objetivas.

### ↘ FASE 3: EXPLICAÇÃO

- ✓ É importante que o professor atue como observador.
- ✓ A interação e o diálogo entre os alunos sobre suas experiências são fundamentais, para que mostrem o que perceberam, quais regularidades descobriram e qual caminho utilizaram para chegar ao resultado.
- ✓ As divergências de pontos de vista são tão interessantes quanto o debate que elas propõem, pois cada aluno tem a oportunidade de expor o seu entendimento.
- ✓ É nesse momento que o professor “observador” verifica, por parte do aluno, a formulação de conclusões e/ou propriedades.

### ↘ FASE 4: ORIENTAÇÃO LIVRE

- ✓ Após um debate rico de informações, se dá início a uma nova fase, onde os alunos passam a fornecer aplicabilidade aos conhecimentos e à linguagem que adquiriram, utilizando-os em investigações diferentes das anteriormente vistas.
- ✓ Os professores devem propor problemas e/ou atividades que sejam formadas de inúmeras etapas e permitam diferentes respostas, cuja finalidade seja oferecer aos alunos experiência e autonomia.
- ✓ As atividades devem ser propostas como uma “charada” , ou seja, com pistas a serem seguidas.

### ↘ FASE 5: INTEGRAÇÃO

- ✓ Agora o professor passa a atuar como mediador oferecendo auxílio no processo de síntese, acrescentando experiências e proporcionando compreensões globais, entretanto sem levantar novas ideias ou apresentar um conceito novo, utilizando somente o conhecimento que foi acumulado. Deste modo, os alunos dispõem de uma nova gama de relações mentais, bem mais extensa que aquelas que possuía anteriormente, para que possam adquirir um novo nível de compreensão.

# 2. CAPÍTULO 2: A importância da História da Matemática como recurso para o Ensino e a Aprendizagem

## 2.1 – História da Matemática como recurso didático

Atualmente, a História da Matemática tem sido tratada com bastante relevância por professores e educadores, não só pela descoberta do conhecimento histórico, mas também, por proporcionar uma reflexão sobre o mundo que nos cerca, reservando um espaço para um discurso matemático voltado tanto para cognição do estudante quanto para relevância histórica e social do ensino da matemática, que nos permite olhar a matemática a partir da sua construção histórica e, sobretudo, olhar o ensinar e o aprender matemática.

A História da Matemática pode ser apresentada para os alunos, em sala de aula, de diversas maneiras: de forma lúdica, com problemas que agucem a curiosidade, enigmas, fonte de pesquisa e conhecimento geral, como introdução de um conteúdo ou atividades complementares de leitura, entre outras. Além disso, pode apresentar a matemática utilizando uma vasta lista de atividades diferenciadas, que vão muito além das intermináveis sequências de exercícios e memorização de métodos e fórmulas. Com a História da Matemática, cria-se a possibilidade de buscar uma nova forma de ver e entender a matemática, tornando-a mais contextualizada, agradável e criativa. Segundo D’Ambrosio (1999):

> As idéias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as idéias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber. (D’AMBRÓSIO,1999)

Fazendo uso da História da Matemática como ferramenta didática, o professor tem ao seu alcance a possibilidade de desenvolver mecanismos delineadores que despertam e estimulam o aluno frente ao conhecimento matemático. Se o aluno reconhece, em determinadas atitudes, a matemática como uma criação humana, que surgiu em virtude da busca de soluções para resolver problemas do cotidiano, então se reportará a diferentes momentos históricos, com o intuito de identificar a utilização da matemática em cada um deles e, assim, estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, visto que, a História da Matemática permite:

> Situar a Matemática como uma manifestação cultural dos povos em todos os tempos, como a linguagem, os costumes, os valores, as crenças e os hábitos, e como tal, diversificada nas suas origens e na sua evolução. (D'AMBRÓSIO, 1996)

Pesquisas desenvolvidas na área mostram que o saber matemática está intimamente ligado à motivação e interesse dos alunos e, ao utilizarmos a História da Matemática como metodologia de ensino, podemos tornar as aulas mais dinâmicas e interessantes, pois, ao fazer uso da fundamentação histórica de tal assunto matemático, o professor tem em suas mãos ferramentas para mostrar o porquê de estudar determinados conteúdos. O resgate da história dos saberes matemáticos ensinados no espaço escolar traz a construção de um olhar crítico sobre o assunto em questão, proporcionando reflexões acerca das relações entre a matemática e outras áreas do conhecimento. Nesse sentido, Miguel e Miorim (2011) destacam a importância da história no processo de ensino-aprendizagem de matemática como um estímulo à não-alienação do seu ensino, visto que:

> A forma lógica e emplumada através da qual o conteúdo matemático é normalmente exposto ao aluno não reflete o modo como esse conhecimento foi historicamente produzido. (MIGUEL e MIORIM,2011)

E nesse caso, os alunos são influenciados a perceberem essa ciência como um emaranhado de objetos sem conexão e sentido, pois os conhecimentos matemáticos ensinados na escola aparecem descontextualizados e sem funcionalidade. Desta maneira, os alunos pensam que todos os assuntos tratados em sala de aula estão em sua forma mais acabada. Por outro lado, ao colocar os alunos em contato com alguns fatos do passado com o intuito de introduzir um novo tópico matemático, proporcionamos uma dinâmica mais interessante, pois as raízes da matemática se confundem com a História da Humanidade. E segundo D'Ambrósio (1999):

> É praticamente impossível discutir a educação sem recorrer a esses fundamentos históricos e a interpretações dos mesmos. Isso é igualmente verdade ao se fazer o ensino das várias disciplinas. (D'AMBRÓSIO,1999)

E de acordo com o mesmo autor:

> Desvincular a matemática das outras atividades humanas é um dos maiores erros que se pratica particularmente na educação da matemática. Em toda a evolução da humanidade, as ideias matemáticas vêm definindo estratégia de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumento para esse fim e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para própria existência. (D'AMBRÓSIO,1999)

Sendo assim, a História da Matemática representa um recurso didático que, inserido em sala de aula, contribui para destacar o valor da Matemática e mostrar aos alunos a amplitude da disciplina, fazendo-os perceber que a Matemática vai muito além dos cálculos.

De fato, a maioria dos matemáticos e educadores concordam que a História da Matemática deve estar presente em sala de aula, entretanto, devemos analisar qual a melhor forma de utilizar este recurso, pois, de acordo com Miguel e Miorim (2005), não existe:

> uma única História da Matemática da qual se possa fazer uso e abuso e que devesse ser recortada e inserida homeopaticamente no ensino. Eles entendem que histórias podem e devem constituir pontos de referência para a problematização pedagógica da cultura escolar e, mais particularmente, da cultura matemática e da educação matemática escolar, desde que sejam devidamente constituídas com fins explicitamente pedagógicos e organicamente articulados com as demais variáveis que intervêm no processo de ensino-aprendizagem escolar da matemática.(MIGUEL E MIORIM,2005)

Nesse sentido, podemos frisar que existe a necessidade da utilização de uma metodologia que valorize a ação docente e a participação ativa dos alunos, de modo que a prática de uma dinâmica investigatória, com base na História da Matemática, seja relevante na perspectiva de que o ensino saia do concreto para o abstrato em:

> situações que favoreçam a redescoberta da matemática, tendo em vista a exploração e a investigação de situações-problema que os levem à compreensão do "quê" e do "porquê" referentes à matemática investigada. (MENDES, 2009(a))

> (...) as atividades investigatórias imprimem maior significado à matemática escolar, pois o conhecimento histórico pode estar implícito nos problemas suscitados nas atividades ou explícitos nos textos e problemas históricos resgatados de fontes primárias (textos originais, documentos ou outros artefatos

> históricos) ou secundárias (informações de livros de história da Matemática ou de livros paradidáticos). (MENDES, 2009(b))

Assim, a escolha da História da Matemática e da atividade investigatória tem por objetivo mostrar ao aluno que, por meio de experiências semelhantes às realizadas pelos matemáticos no passado, é possível reconstruir conceitos matemáticos a que temos acesso hoje.

Logo, a História da Matemática, como fonte de motivação para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática, pode se confirmar segundo a orientação e a utilização apresentada pelo professor. Nesta dissertação, por exemplo, preferimos não levar a História da Matemática para a sala de aula, mas fazer com que os alunos se sentissem dentro da história. Mas, para que isso se tornasse possível, foi necessário adaptar, pedagogicamente, o contexto para que fizesse sentido para os alunos e para que eles compreendessem as estratégias matemáticas utilizadas. Além disso, em sua contribuição no processo de ensino-aprendizagem de Matemática, podemos, também, destacar o seu caráter interdisciplinar, que oferece a oportunidade para a realização de atividades extracurriculares, procurando estabelecer uma aproximação sociocultural da Matemática e um envolvimento com outras áreas de conhecimento por intermédio da História da Matemática, visto que, as atividades transdisciplinares podem mostrar a matemática como uma criação de diferentes civilizações em diferentes tempos e contextos. Nesse caso, Mendes (2006) destaca que:

> É necessário, porém, que a escola inicie, mesmo com certo atraso, o desenvolvimento de uma prática docente centrada no uso de atividades voltadas ao ensino de matemática que tenha como fio condutor a investigação dos aspectos históricos de cada tópico a ser aprendido, buscando sempre estabelecer uma aproximação sociocultural da matemática, principalmente considerando a perspectiva transdisciplinar configurada pela história da matemática. (MENDES, 2006)

Nesse sentido é que nós apresentamos a História da Matemática como desencadeadora de atividades investigatórias sobre o Teorema de Tales. A desmistificação da Matemática é um exemplo de contribuição e potencialidade da História da Matemática. Por meio da história é possível mostrar que a Matemática não deve ser vista como um objeto estático, pronto e acabado, acessível para poucos. A esse respeito, Mendes (2006) afirma:

> A história exerce uma influência decisiva na matemática escolar, pois a mesma pode ser usada para desvendar as outras faces da matemática e com isso, mostrar que ela é um conhecimento estruturalmente humano. Desse modo, a matemática deve ser acessível a todos, à medida que as atividades matemáticas educativas desenvolvidas dentro da escola ou fora dela se mostrem de forma clara, simples e sem mistérios, buscando sempre o crescimento integral da sociedade humana. (MENDES, 2006)

De forma mais ampla, a História da Matemática como recurso didático e pedagógico pode inverter a condição dos alunos, fazendo-os deixar de ser observadores para tornarem-se alunos ativos, protagonistas da construção do conhecimento matemático.

### 2.2 – Tales sob um olhar histórico

Desde épocas mais remotas, o homem, aventureiro ávido, interessou-se pelos mistérios do universo. Não diferente de todos esses sonhadores, filósofos, pensadores ou até mesmo loucos, como alguns eram referidos, Tales de Mileto é visto como uma referência de suma importância pra a evolução da geometria.

De fato, Tales é uma figura da qual só podemos fazer referência, visto que, historicamente, é um personagem coberto de imprecisão, pois não sobreviveram nenhuma de suas obras. Sabe-se que as mais antigas referências gregas à História da Matemática são atribuídas, em boa parte, a Tales, não em forma de registros ou documentos históricos, mas em tradições ou com base em relatos. Embora se saiba muito pouco sobre a vida e as obras de Tales, de acordo com estudos de Boyer (1996), relatos históricos o colocam em face à sua genialidade, considerado-o um discípulo dos egípcios e caldeus. Tales viveu de 624 a 548 a.C, aproximadamente, e era conhecido pelos antigos como um homem de inteligência rara e como o primeiro filósofo, fato que lhe rendeu o título de Primeiro dos Sete Sábios.

A Tales também é atribuída a fundação da mais antiga escola filosófica que se conhece - a Escola Jônica. Durante a sua passagem pelo Egito e pela Babilônia, aprendeu geometria e teve contato com tabelas e instrumentos de astronomia. De posse de tamanho conhecimento, em 585 a.C, Tales assustou seus contemporâneos ao predizer um eclipse solar.

O mito ou a lenda que paira sobre o personagem de Tales vai mais além, quando, tradicionalmente é atribuído a ele algumas espécies de demonstrações de teoremas. Tal fato, de certo modo, o coloca no patamar de organizador dedutivo da geometria, motivo pelo qual passou a ser considerado o primeiro matemático verdadeiro. Tales se dedicou inteiramente às especulações filosóficas, às observações astronômicas e à matemática e de acordo com Eves (2004):

> A Matemática pôde alcançar gosto e interesse entre homens com imaginação e conhecimento científico, dentre eles, o destaque é para Tales, considerado um dos sete sábios da Grécia Arcaica, nascido em Mileto. (EVES, 2004)

Historicamente, é atribuído a Tales, o fato que relaciona o conhecimento geométrico adquirido com a possibilidade de realizar a façanha, ao voltar para o Egito, de calcular a altura da grande pirâmide Quéops, a partir da medição da sua sombra. Segundo Boyer (1996), após observações introdutórias sobre a origem da geometria no Egito, o filósofo neoplatônico Proclus (410-485) teceu o seguinte comentário sobre o primeiro livro de *Os elementos de Euclides*:

> (...) Tales primeiro foi ao Egito e de lá introduziu esse estudo na Grécia. Descobriu muitas proposições ele próprio, e instituiu seus sucessores nos princípios que regem muitas outras, seu método de ataque sendo em certos casos mais geral, em outros mais empíricos. (Heath, 1981, vol. 1)

Também, segundo Boyer (1996), Proclus mais adiante em seu comentário atribuiu a Tales mais algumas demonstrações de teoremas:

- ✓ Um ângulo inscrito num semicírculo é um ângulo reto
- ✓ Um círculo é bissectado por um diâmetro

- ✓ Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais
- ✓ Os pares de ângulos opostos formados por duas retas que se cortam são iguais
- ✓ Se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um são iguais respectivamente a dois ângulos e um lado do outro, então os triângulos são congruentes

Nesse sentido, podemos frisar que baseado em alguns relatos tradicionalmente histórico, Tales não só importou conhecimentos matemáticos do Egito para a Grécia. A ele também foram atribuídos descobertas de matemáticas específicas, relativas às paralelas, aos triângulos e às propriedades do círculo. Pode-se dizer que Tales deu a essas matemáticas uma característica que se conserva até hoje, o conceito de "demonstração ou prova". De acordo com Boyer (1996)):

> “Parece razoável supor, à luz das afirmações de Proclus, que Tales deu uma contribuição à organização racional do assunto.” (Boyer,1996)

Ainda segundo Boyer (1996), Diógenes Laertius, seguido por Plínio e Plutarco, relata que ele mediu a altura das pirâmides do Egito observando os comprimentos das sombras no momento em que a sombra de um bastão vertical é igual à sua altura.

Tal feito foi possível, pois a ideia de proporcionalidade já era conhecida por Tales e junto às suas proposições poderia realizar as medidas e calcular o que se pretendia. Segundo Eves (2004):

> “... uma origem ou motivação para o Teorema de Tales foi o próprio cálculo utilizado para a medição da altura da pirâmide de Quéops.” (Eves,2004)

Desse modo, a geometria se molda como uma ciência empírica, em que a necessidade de teorização estão voltadas para o controle das relações do homem com seu espaço circundante.

> “ O plano de Tales de Mileto é o deserto, onde a luz faz todos o desenhos possíveis.” (Serres,1981).

Para realizar a medição, Tales observou a pirâmide e lançou mão de alguns conceitos matemáticos conhecidos, como semelhança de triângulos, razão e proporção.

Figura 1: Esquematização da situação para a realização da medição

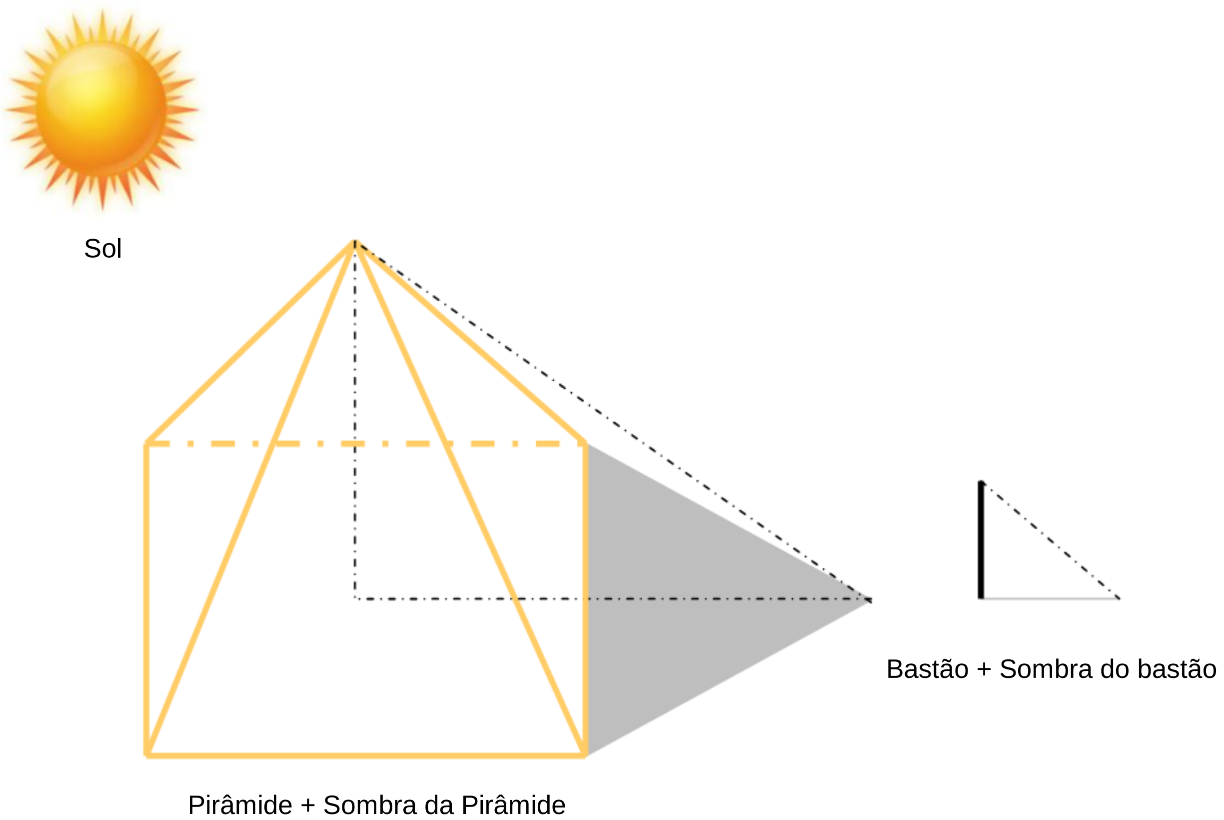



Figura 2: Representação matemática para o cálculo

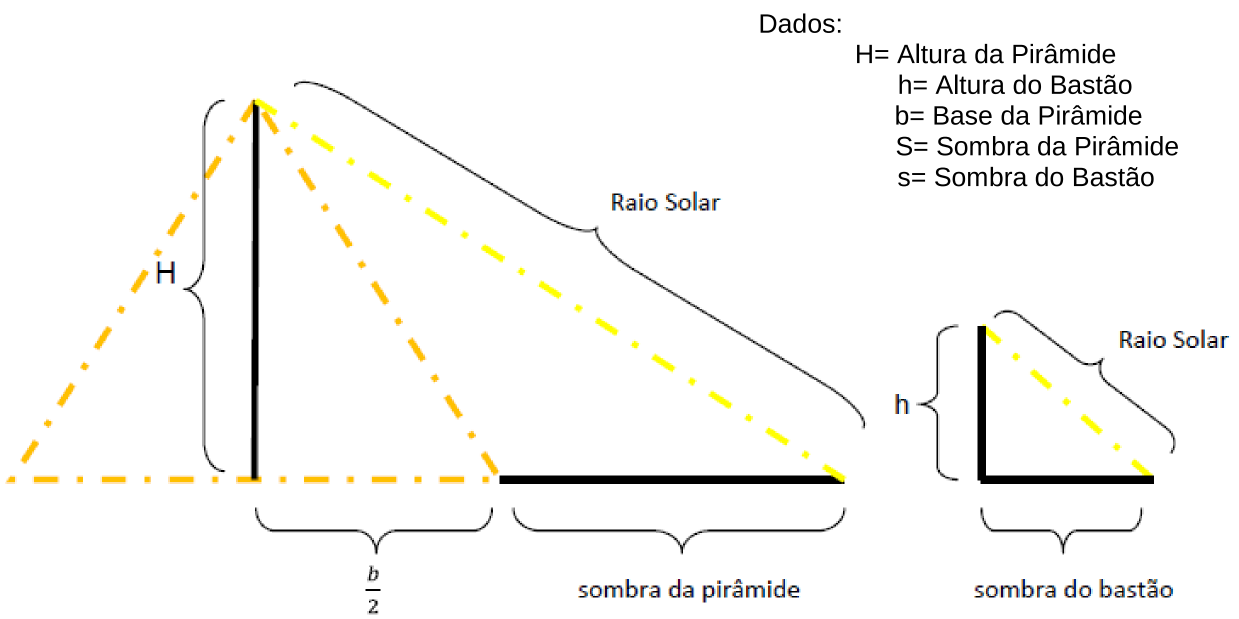
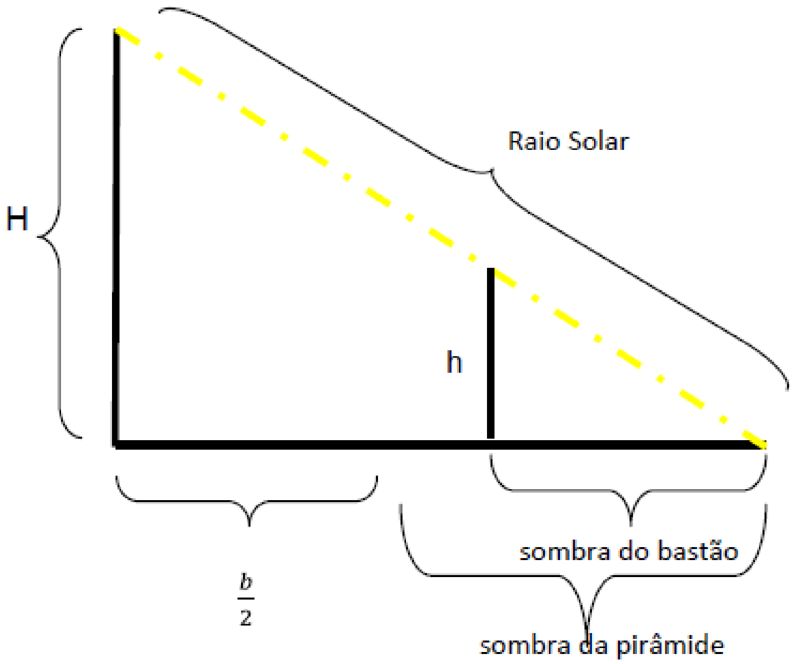


Figura 3: Representação matemática com base nas proposições demonstradas por Tales, segundo relatos históricos




A partir das ferramentas matemáticas que dispunha à época, Tales conseguiu calcular a altura da pirâmide:

$$\frac{Altura\ da\ Pirâmide}{Altura\ do\ Bastão} = \frac{\frac{(Lado\ da\ base\ quadrada\ da\ Pirâmide)}{2} + Sombra\ da\ Pirâmide}{Sombra\ do\ Bastão}$$

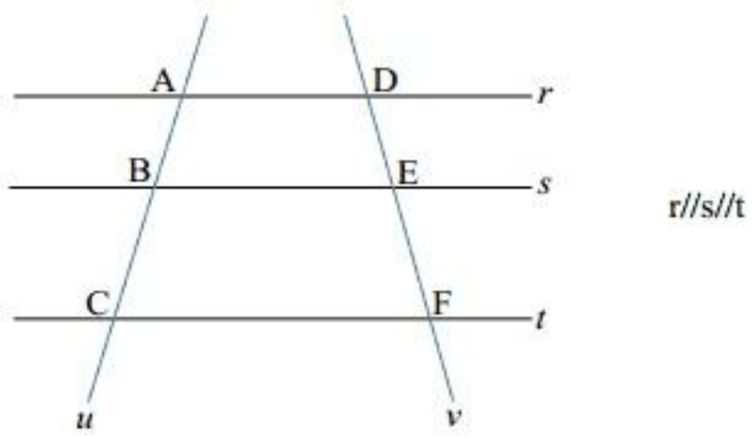
Ou seja:

$$\frac{H}{h} = \frac{\frac{b}{2} + S}{s}$$

Segundo Eves (2004), esse foi um passo fundamental para o desenvolvimento do que se conhece atualmente por Teorema de Tales.

Teorema de Tales: *"Se duas retas transversais são cortadas por um feixe de retas paralelas, então a razão entre quaisquer dois segmentos determinados em uma das transversais é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal."*

Figura 4: Representação gráfica do Teorema de Tales




Seguimentos proporcionais obtidos a partir do Teorema de Tales:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \quad \textbf{ou} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF} \quad \textbf{ou} \quad \frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$$

# 3. CAPÍTULO 3: Elaboração da Pesquisa

## 3.1 – A Escola

O local escolhido para a elaboração e aplicação deste trabalho foi a Escola Municipal Charles Dickens, que é vinculada a 9ª CRE (Coordenadoria Regional de Educação) do município do Rio de Janeiro. Está situada no Bairro de Campo Grande, e atende aos sub-bairros e às comunidades que têm acesso pelas estradas do Mendanha e da Posse.

Sendo a escola local aonde o professor pesquisador leciona, tal oportunidade foi de suma importância para a escolha, visto que, os alunos participantes são, de fato, alunos do professor e, sendo assim, foi possível a utilização do próprio espaço escolar aonde o professor vivência a sua prática docente, possibilitando a utilização do tempo e do espaço escolar para a pesquisas e para a obtenção de uma resposta da sua atuação no contexto educacional, dentro de uma nova visão, em que o professor exerce a função de orientador no processo de ensino-aprendizagem e não mais de transmissor de conhecimento.

A escola funciona em dois turnos, manhã e tarde, e atende alunos do 6º ao 9º ano do ensino fundamental, além dos alunos do projeto acelera, que possuem idades em desacordo com o ano escolar. Conta com uma estrutura física constituída por 14 (quatorze) salas de aula, 1 (um) laboratório de informática, 1 (uma) biblioteca, 1 (um) auditório, 1 (um) refeitório, 1 (uma) quadra poliesportiva, 1 (uma) sala dos professores, 1 (uma) secretaria, 1 (uma) sala de direção, entre outros ambientes necessários ao bom funcionamento.

Todas as salas possuem ventiladores, quadros brancos e aparelhos data show, para serem utilizados em aulas expositivas. Além disso, o quadro de professores é formado somente por professores concursados e não existe déficit de professores, o que possibilita o atendimento de todos os alunos, em todas as disciplinas, durante todo ano letivo.

Quadro de Professores da escola

| Disciplinas | Quantidade de Professores | Regime de Contratação |
|---|---|---|
| Matemática | 3 | Estatutário |
| Português | 3 | Estatutário |
| Ciências | 4 | Estatutário |
| História | 3 | Estatutário |
| Geografia | 2 | Estatutário |
| Espanhol | 1 | Estatutário |
| Francês | 1 | Estatutário |
| Ed. Física | 1 | Estatutário |
| Artes Visuais | 2 | Estatutário |
| Música | 1 | Estatutário |

Fonte: Quadre de Professores - Escola Municipal Charles Dickens

Podemos frisar que, a disciplina de Matemática é ofertada, em toda rede, da seguinte maneira: 4 tempos de aula por semana nas turmas de 6º e 8º ano, enquanto, para as turmas de 7º e 9º ano são ofertados 6 tempos de aula por semana.

Para a pesquisa, foram escolhidos alunos do 8º e do 9º ano, pois, de acordo com as Orientações Curriculares - Áreas Específicas - publicado no ano de 2010, através da Secretaria Municipal de Educação (SME), do município do Rio de Janeiro, o Teorema de Tales deve fazer parte do conteúdo programático do 2º bimestre do 9º ano.

Veja abaixo, o quadro das Orientações Curriculares das áreas apresentado pela Secretaria Municipal de Educação do Município do Rio de Janeiro, ano de 2013/2014, que apresenta o ano e o bimestre ideal para lecionar o tópico referente ao teorema de Tales.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Compreender as noções de juros simples e compostos e reconhecimento em situações de uso.** | Juros simples e compostos. | ▪ Resolver situações problemas que envolva porcentagem.<br><br>▪ Identificar e utilizar noções de juros simples e compostos. | | | | x | #Pesquisa, nos meios de comunicação, sobre a utilização de juros simples e compostos.<br>#Situações problemas envolvendo o uso de juros simples e compostos para cálculo de montante, a partir do capital inicial, comparando-as. |
| **Compreender o conceito de forma de uma figura geométrica e reconhecer as relações entre elementos de figuras semelhantes, na identificação das medidas que não se alteram (ângulos) e das que se modificam (dos lados, das superfícies e do perímetro) em ampliações e reduções de figuras planas, estendendo ao estudo de triângulos retângulos e de noções de trigonometria.** | Proporcionalidade.<br><br>Teorema de Tales.<br><br>Semelhança de polígonos e de triângulos.<br><br>Relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo. | ▪ Reconhecer, interpretar e resolver situações-problema em geometria, que envolvam proporcionalidade.<br><br>▪ Reconhecer o conceito de semelhança e identificar as medidas que se alteram ou não em figuras planas.<br><br>▪ Resolver problemas que envolvam semelhança de triângulos.<br><br>▪ Identificar as relações métricas nos triângulos retângulos e aplicá-las na resolução de problemas.<br><br>▪ Reconhecer e aplicar razões trigonométricas em triângulos retângulos. | x | x | x | x<br><br>x | #Atividade onde se propõe medir vários segmentos e descobrir os pares de segmentos proporcionais a uma razão dada.<br>#Em um feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais, determinar a medida de um ou mais segmentos determinados nas transversais pelas paralelas, registrando a razão de proporcionalidade.<br>#Utilizar situações que envolvam distâncias para trabalhar o Teorema de Tales em triângulos.<br># Explorar folders ou propagandas em jornal sobre a venda de apartamentos onde haja a planta baixa do imóvel e comparar as dimensões dos cômodos e do mobiliário, estabelecendo |

Fonte: RIO DE JANEIRO. Secretaria Municipal de Educação. *Orientações Curriculares:* Áreas Específicas. Rio de Janeiro, 2010.

Já o 8º ano teve sua participação definida a partir do momento em que se inferiu a ideia de que, nessa etapa escolar, os alunos já possuem conhecimento suficiente dos elementos que envolvem o Teorema de Tales, tais como, retas paralelas e transversais, que são indispensáveis para a aprendizagem. E segundo as Orientações Curriculares, o tema ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversais deve fazer parte do conteúdo programático do 2º bimestre para as turmas de 8º ano.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Compreender o conceito de forma de uma figura geométrica e reconhecer as relações entre seus elementos, a identificação das medidas relativas a eles, das superfícies e do perímetro figuras planas.** | Ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal | ▪ Ângulos adjacentes complementares e suplementares.<br>Ângulos opostos pelo vértice.<br><br>▪ Identificar ângulos congruentes e suplementares, em feixes de retas paralelas, cortadas por uma transversal.<br><br>▪ Soma de ângulos internos de um triângulo e de um quadrilátero<br><br>▪ Ângulos adjacentes complementares e suplementares.<br><br>▪ Ângulos opostos pelo vértice. | | x | x | | #Atividade para identificar em figuras, paisagens, etc., linhas paralelas e transversais.<br><br>#Observando os ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal a elas, usando um transferidor, classificar os ângulos e identificar os que são congruentes, registrando as conclusões obtidas. |
| **Analisar figuras geométricas, não só para determinar suas propriedades, mas também para identificar outras figuras geométricas que as compõem.** | Polígonos: classificação, elementos, número de diagonais e soma dos ângulos internos. | ▪ Aplicar conhecimentos sobre elementos e propriedades dos polígonos regulares, determinando suas diagonais e a soma das medidas de seus ângulos.<br><br>▪ Reconhecer polígonos regulares.<br><br>▪ Identificar triângulos e quadriláteros e suas propriedades.<br><br>• Soma de ângulos internos e externos de um triângulo e de um quadrilátero. | | | x | x | #Traçar, nos diferentes polígonos, suas diagonais e generalizar o seu cálculo através de uma igualdade algébrica.<br>#Traçando as diagonais nos polígonos, determinar a soma dos ângulos internos de cada um, generalizando e registrando a expressão matemática que serve para o seu cálculo.<br># Prolongando-se os lados dos polígonos, medir os ângulos externos e determinar a soma deles.<br>#Atividade para diferenciar polígonos regulares dos não regulares, com registro da conclusão encontrada. |

Fonte: RIO DE JANEIRO. Secretaria Municipal de Educação. *Orientações Curriculares:* Áreas Específicas. Rio de Janeiro, 2010.

## 3.2 – Dos Participantes da Pesquisa

A pesquisa contou com 25 alunos participantes, dos quais 15 alunos são do 9º ano e os outros 10 alunos são do 8º ano do Ensino Fundamental, já que a pesquisa envolve conhecimentos já adquiridos em ambos os anos. O alunos foram informados e posteriormente convidados a participar da pesquisa por meio de uma carta convite, onde constavam o pedido de aceitação, de forma colaborativa, por parte do aluno, e a autorização do responsável para que o aluno pudesse participar. Dentre as informações contidas na carta convite, estão a garantia do anonimato dos alunos participantes, além da livre participação dos alunos, que os isentam da obrigatoriedade, sendo-lhes facultada a participação, sem prejuízo algum para qualquer um dos participantes. A faixa etária dos alunos gira em torno de 14 a 16 anos, e o nível intelectual era bem variável, motivo pelo qual, trouxe bastante motivação para a realização da pesquisa, pois, o objetivo era atingir a todos de forma produtiva e satisfatória, seja, no diálogo em sala de aula, nas dúvidas ou nas observações que surgiram durante a realização das atividades.

**CARTA CONVITE**

Prezados Pais

Venho por meio dessa, convidar o(a) aluno(a) __________________ para participar do projeto de pesquisa em nível de Mestrado, realizado a partir de uma experiência com os alunos(as) do 8º e 9º ano do Ensino Fundamental de uma Escola Municipal do Rio de Janeiro (RJ), cujo título é: "Uma abordagem construtivista do Teorema de Tales sob a perspectiva da Teoria de Van Hiele".

- Objetivos da Pesquisa:

Considerar os níveis da Teoria de Van Hiele como um fator essencial no planejamento, na implementação e na avaliação das atividades para o processo de ensino-aprendizagem de Geometria Euclidiana Plana, sobretudo do Teorema de Tales, com a utilização da História da Matemática como elemento motivador.

- Da participação:

O aluno(a) participará da pesquisa como colaborador, de forma absolutamente voluntária.

Ao aluno será facultado responder as perguntas e poderão desistir de participar do projeto, a qualquer momento, sem nenhum prejuízo.

A identidade de cada aluno(a) será mantida em sigilo e serão utilizadas somente as iniciais de seus nomes.

A participação acontecerá por meio de um questionário e realização de atividades propostas.

- Para ser preenchido pelo responsável:

Eu, ____________________________________________ autorizo o aluno(a) a participar do projeto de pesquisa.

________________________________________

Assinatura do Responsável

- Para ser preenchido pelo aluno:

Eu, ____________________________________________ concordo em participar do projeto de pesquisa na condição de colaborador e de forma voluntária.

________________________________________

Assinatura do Aluno(a)

Rio de Janeiro, de 2014.

### 3.3 – Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN – Matemática)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) são parâmetros que dão suporte para às discussões, desenvolvimento e práticas do projeto pedagógico da escola, planejamento das aulas, análise de materiais didáticos e de recursos tecnológicos, que por sua vez contribuem para a formação e a atualização do professor, procurando respeitar as diferenças regionais, culturais e políticas no âmbito do nosso país, objetivando a criação, na própria escola, de condições que possibilitem aos jovens ter acesso ao conjunto de conhecimentos socialmente elaborados e reconhecidos como necessários ao exercício de cidadania.

De acordo com as orientações dos PCN (1998), os conteúdos ministrados na educação básica devem ser contextualizados e incluir os temas correlatos: ética, saúde, meio-ambiente, pluralidade cultural e orientação sexual. Por outro lado, deve se ressaltar a necessidade do pensamento crítico matemático, especialmente, a sua escrita para a formação e a continuidade do entendimento desta disciplina pelos alunos. Neste caso, podemos destacar a importância das deduções lógicas e intuitivas no Ensino Fundamental e Médio, pois segundo os PCN(1998):

> (...) Na criação desse conhecimento, contudo, interferem processos heurísitcos e intervêm a criatividade e o senso estético, do mesmo modo que em outras áreas de conhecimento. A partir das observações de casos particulares, as regularidades são desvendadas, as conjecturas e teorias matemáticas são formuladas. (PCN,1998)
>
> (...) O exercício da indução e da dedução em Matemática reveste-se de importância no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, de formular e testar hipóteses, induzir, de generalizar e de inferir dentro de determinada lógica, o que assegura um papel de relevo ao aprendizado dessa ciência em todos os níveis de ensino. (PCN,1998)

Segundo os PCN (1998), a Matemática do Ensino Fundamental que compreende o 3º ciclo ( 5ª e 6ª séries) e 4º ciclo (7ª e 8ª séries) devm ser pautadas em algumas características inerentes às idades e ao nivél de compreensão de cada aluno. No 3º ciclo, o trabalho desenvolvido deve ser estabelecido através de uma relação de confiança entre aluno/professor e aluno/aluno, transformando a aprendizagem numa experiência progressiva, interessante e formativa, estimulando a ação, a descobeta, a reflexão e a comunicação junto à realidade, para que o aluno possa nesse contexto extrair as situações-problemas para desenvolver os conteúdos e aplicar os conhecimentos construídos.

> (...) É importante destacar que as situações de aprendizagem precisam estar centradas na construção de significados, na elaboração de estratégias e na solução de problemas, em que o aluno desenvolve processos importantes como intuição, analogia, indução e dedução, e não atividades voltadas para memorização, desprovidas de compreensão ou um trabalho que privilegie uma formalização precoce de conceitos. (PCN,1998)

> (...) O estímulo à capacidade de ouvir, discutir, escrever, ler idéias matemáticas, interpretar significados, pensar de forma criativa, desenvolver o pensamento indutivo/dedutivo, é o caminho que vai possibilitar a ampliação da capacidade para abstrair elementos comuns a várias situações, para fazer conjecturas, generalizações e deduções simples como tambémpara o aprimoramento das representações, ao mesmo tempo que permitirá aos alunos irem se conscientizando da importância de comunicar suas ideias com concisão. (PCN,1998)

Já no 4º ciclo, os PCN (1998) destacam o papel da Álgebra cujas noções são exploradas por meio de generalizações e representações matemáticas, garantindo aos alunos trabalhar problemas que, lhes permitam dar significado à linguagem e às ideias matemáticas, pois, quando são propostas situações-problemas diversificadas, o aluno é capaz de reconhecer diferenes funções da Álgebra ao modelizar, generalizar e demonstrar propriedades e fórmulas, além de estabelecer relações entre grandezas. Assim, podemos frisar que a Álgebra está presente e conectada a atividades e problemas envolvendo noções e conceitos referentes aos blocos que já foram trabalhados nos ciclos anteriores, como à proporcionalidade, por exemplo, que aparece na resolução de problemas de semelhanças de figuras. Sendo assim, o aluno poderá desenvolver essa noção ao analisar a natureza da interdependência, que segundo os PCN (1998):

> (...) Assim, esse trabalho terá continuidade no quarto ciclo, uma vez que a prática da argumentação é fundamental para a compreensão das demonstrações. Mesmo que a argumentação e a demonstração empreguem frequentemente os mesmos conectivos lógicos, há exigências formais para uma demonstração em Matemática que podem não estar presentes numa argumentação. O refinamento das argumentações produzidas ocorrem gradativamente pela assimilação de princípios da lógica formal, possibilitando as demonstrações. (PCN,1998)

Em face ao exposto nos PCN (1998), destacamos a forma gradativa que se dá o desenvolvimento intelectual do aluno, no campo da aprendizagem, ao longo do 3º e do 4º ciclos e, não obstante, buscamos aproximar essas diretrizes à Teoria de Van Hiele (1973) que serviu de embasamento para a estruturação do referido trabalho. Visto que, segundo a Teoria de Van Hiele (1973), o desenvolvimento do aluno se dá em níveis de compreensão ou níveis de aprendizagem, isto é, é imprescindível para a formação do aluno passar pelos níveis de aprendizagem, sempre sob a observação do professor que identifica as fases de aprendizagem e conduz o aluno para o melhor entendimento na formalização do conhecimento. Logo, ao utilizarmos a Teoria de Van Hiele (1973) no ensino de geometria, estaremos em consonância com o que os Parâmetros Curriculares Nacionais propõem para o desenvolvimento dos alunos do 8º e 9º ano do Ensino Fundamental.

### 3.4 – Descrição das Atividades e Classificação segundo o Teorema de Van Hiele

Esta pesquisa teve como objetivo buscar a utilização da História da Matemática como fonte estimuladora do processo de ensino-aprendizagem do Teorema de Tales para as turmas de 8º e 9º anos do Ensino Fundamental, cuja metodologia pedagógicas está pautada na construção de um processo argumentativo e interpretativo, onde o aluno atinge a maturidade necessária ao seu desenvolvimento, quando tratamos do Teorema de Tales, de forma gradativa, tal qual os níveis de compreensão da Teoria de Van Hiele. Para a realização da pesquisa foi planejada uma aula de história da matemática e apresentado, ao final, um vídeo sobre a façanha de Tales ao medir a altura da pirâmide Quéops. Após a introdução da História da Matemática como argumento motivador, foram propostas atividades, presentes de diferentes maneiras no cotidiano do aluno, que pudessem caracterizar o Teorema de Tales e, assim, justificar a importância da utilização da Teoria de Van Hiele para a compreensão do Teorema de Tales e como metodologia para o ensino de Matemática, sobretudo Geometria. A pesquisa foi realizada com alunos do 8º e do 9º anos do Ensino Fundamental de uma escola pública do município do Rio de Janeiro, num somatório de 3 encontros, totalizando 4 tempos de aula de 50min cada. Nesses encontros foram coletadas as respostas de um questionário, elaborado com o fim de avaliar os conhecimentos básicos dos participantes sobre Geometria e História da Matemática. Buscou-se observar a presença das componentes intuitiva, algorítmica e formal no decorrer das atividades, a fim de beneficiar o desenvolvimento de habilidades de leitura e interpretação das atividades, comunicação, socialização, entrosamento entre os alunos e o hábito de registrar as resoluções, analisando-as como características do processo ensino-aprendizagem.

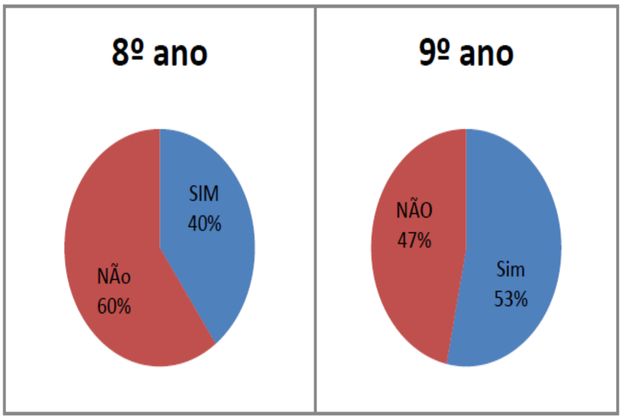
De fato, o objetivo da pesquisa foi analisar as atividades que seriam desenvolvidas no 8º e 9º anos do Ensino Fundamental, permitindo, ao término das atividades propostas, concluir que a realização da pesquisa é viável, e que a proposta de utilização da Teoria de Van Hiele favoreceu o ensino-aprendizagem do Teorema de Tales, e que houve a concepção de uma nova postura dos participantes, ao demonstrarem interesse pela História da Matemática, a partir do momento em que conhecem o Teorema de Tales, bem como a motivação desse matemático.

### 3.4.1 – Dados do Questionário

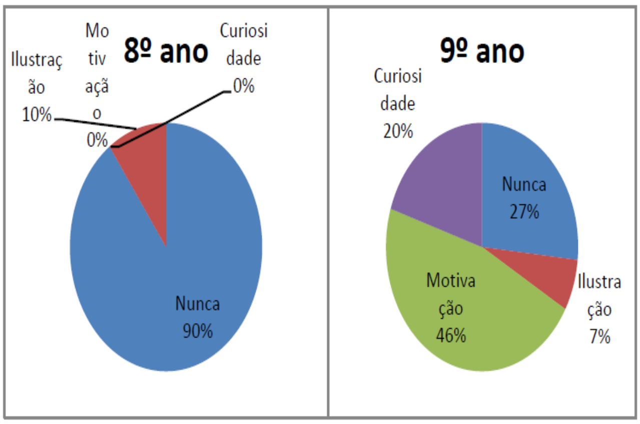
O Questionário teve como finalidade identificar os conhecimentos prévios dos alunos sobre Geometria, como as noções primitivas de ponto, reta e plano, verificar o conhecimento que tinham sobre a História da Matemática e o nível de interesse pelas aulas de Matemática.

GEOMETRIA BÁSICA

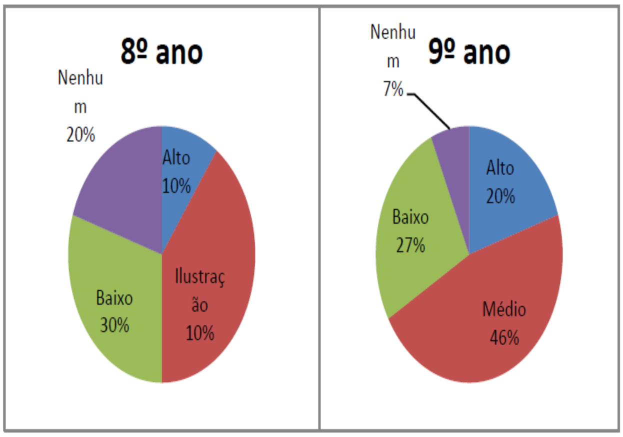
Ponto, Reta e Plano



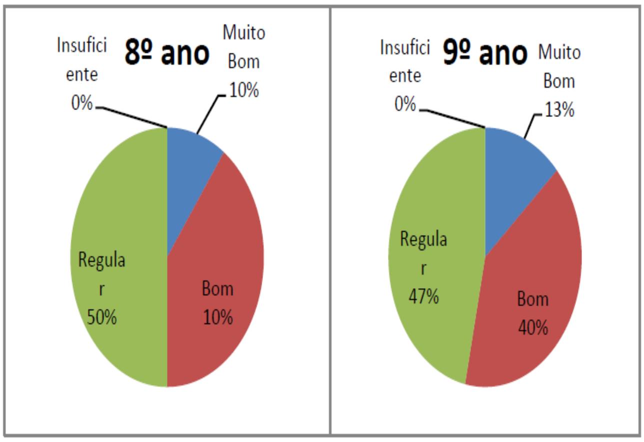

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA



NÍVEL DE INTERESSE




AUTOAVALIAÇÃO EM MATEMÁTICA




Obs.: Os gráficos estão relacionando as respostas dos alunos participantes, portanto os números fazem referência ao quantitativo de alunos.

- ✓ 8º ano: 10 alunos participantes
- ✓ 9º ano: 15 alunos participantes

A partir dos dados coletados do questionário, se pode ter uma base de quais eram as dificuldades encontradas pelos alunos e, assim, definirmos qual postura adotaríamos como referência para a elaboração das atividades propostas. Embora não seja possível identificar o aluno, as suas respostas motivaram a realização e a implementação das atividades, especialmente quanto à utilização da História da Matemática pelos professores e o conhecimento que tinham sobre conceitos básicos de Geometria, como ponto, reta e plano.

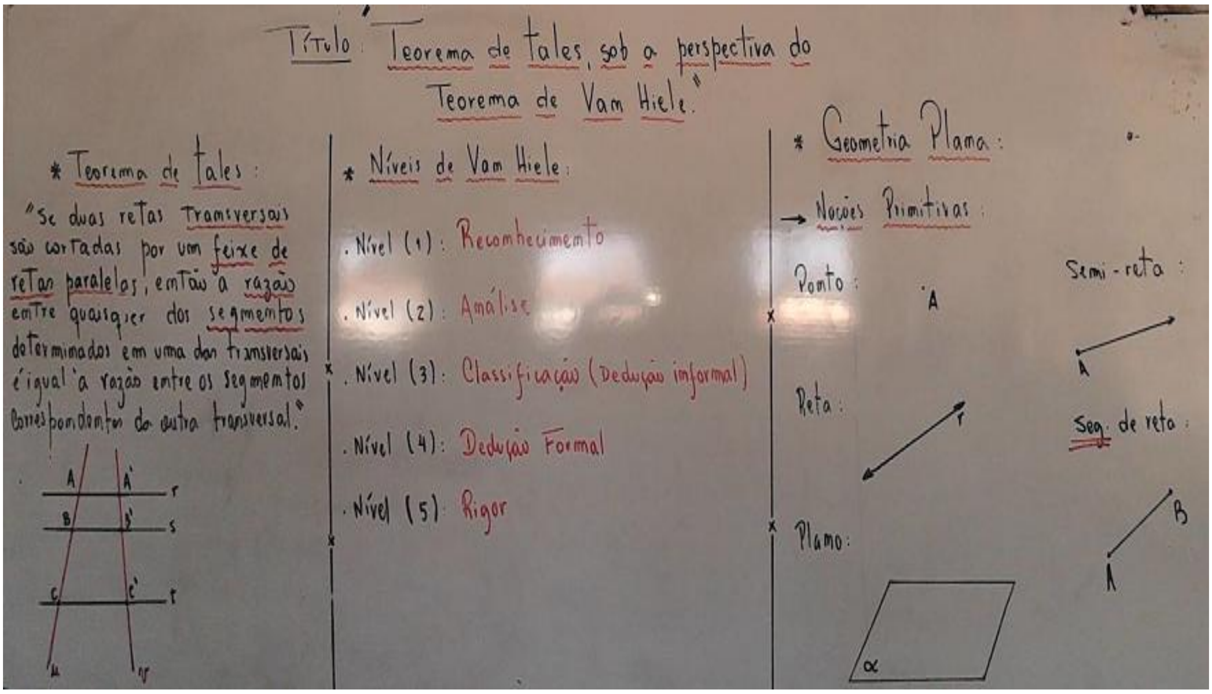
### 3.4.2 – Aula 1: História da Matemática

Após a apresentação do questionário, começamos a por em prática a pesquisa, a partir de uma aula de História da Matemática. Tal aula contava sobre a vida de Tales, suas viagens ao Egito e à Grécia, o aprendizado por ele adquirido em Matemática e Astronomia, até chegarmos a tão famosa medição da pirâmide Quéops. Um pequeno vídeo (Youtube: https://www.youtube.com/watch?v=cWkU6fGoYA8) foi apresentado ao final como resumo do que foi falado em sala. O fato interessante foi o despertar de um pequeno debate entre os alunos, cujo o professor apenas observou, e pode perceber que, de fato, aquilo aguçou a curiosidade de alguns alunos ao ponto de um deles tecer o seguinte comentário:

> " ... como um cara pode pensar nisso, se naquela época não tinha nada ?"
> (Aluno participante, 9º ano)

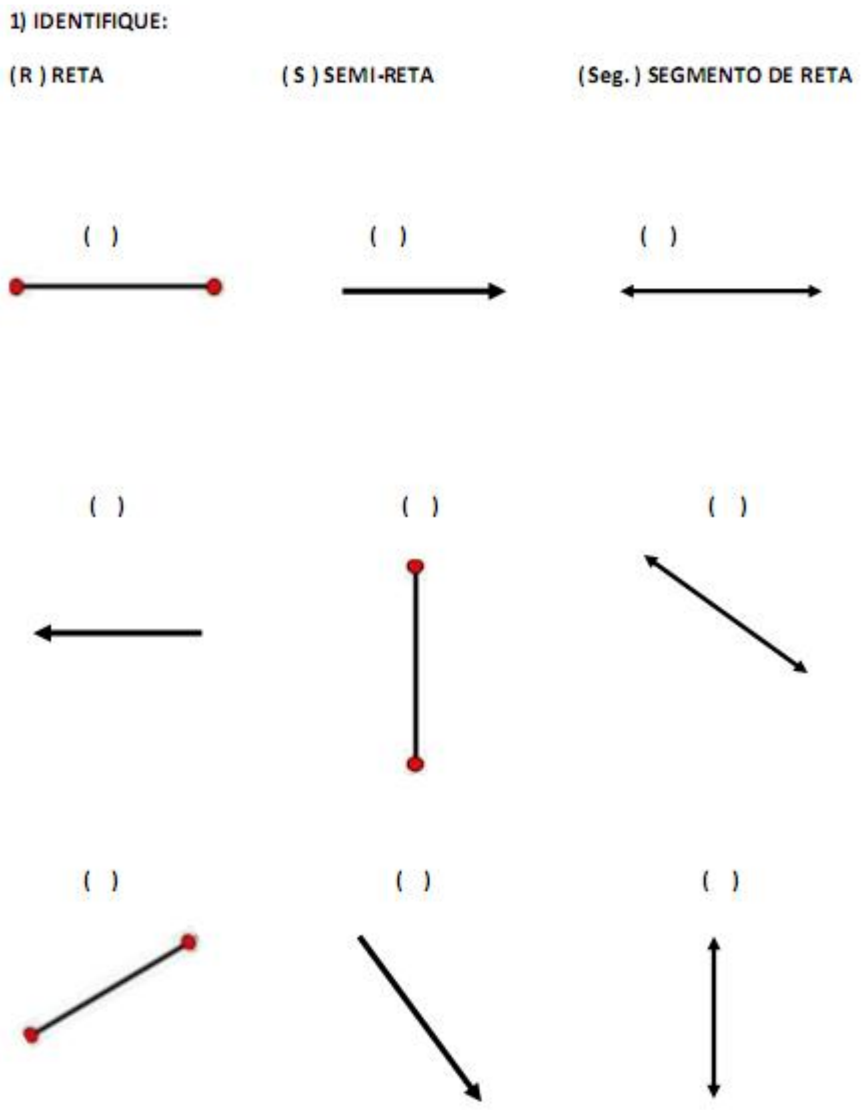
Nesse instante o professor passou a mediar o debate realçando ainda mais o questionamento feito pelo aluno, pois, se naquele tempo Tales não tinha nada, porque, hoje, que temos várias ferramentas não pensamos da mesma forma? Em fim, se a proposta era utilizar a História da Matemática como elemento motivador, já estava dado o primeiro passo.

### 3.4.3 – Aula 2: Níveis de Compreensão e Atividades 1 e 2




No segundo encontro, destacamos no quadro o enunciado do teorema de Tales, fizemos a leitura e enfatizamos que precisaríamos conhecer elementos geométricos como retas e suas posições relativas, segmentos de reta, e ter a noção algébrica de razão e proporção que foram estudados nos anos anteriores do ensino fundamental. Feito isso, buscamos tratar as informações como forma de identificar os tipos de raciocínio e de compreensão das relações entre o objeto de estudo e a linguagem inerente ao teorema de Tales. Desse modo, começamos a vislumbrar a teoria de Van Hiele, pois definimos uma gradação na compreensão da disciplina, que é intitulada como níveis de compreensão da teoria de Van Hiele, já que, para haver compreensão, a disciplina a ser ensinada não pode atingir um nível mais elevado do que o nível atingido pelo aluno.

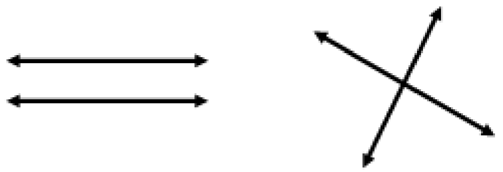
Ao apresentarmos as posições relativas das retas, descobrimos que existe uma linha tênue entre os níveis 1 e 2, pois quando apresentamos duas retas paralelas e duas retas concorrentes, apresentamos o nível 1, nível do reconhecimento, porém, a partir do momento que diferenciamos retas paralelas e concorrentes, e em diferentes situações, estamos rompendo o nível 1 e atingindo o nível 2. Visto que não vemos mais o objeto de forma única, atingimos a capacidade de realizar uma análise, que possibilita diferenciar as duas situações sob qualquer perspectiva, como realizado nas atividades propostas 1 e 2. Tanto os alunos do 8º ano, quanto os alunos do 9º ano foram capazes de identificar, entender e realizar as atividades propostas, isto é, fazer o reconhecimento e a análise, níveis 1 e 2, respectivamente.



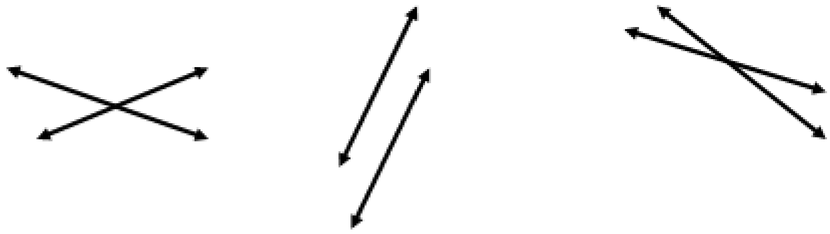
**2) INDIQUE AS POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE AS DUAS RETAS NAS OPÇÕES ABAIXO:**

**( P ) PARALELAS ( C ) CONCORRENTES**

( ) ( ) ( )

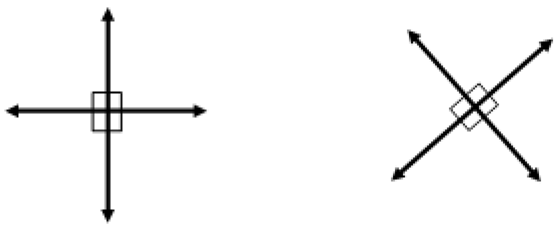


( ) ( ) ( )



**Obs.: Retas concorrentes que formam 4 ( quatro ) ângulos de $90^{\circ}$ são chamadas de Retas Concorrente Perpendiculares.**

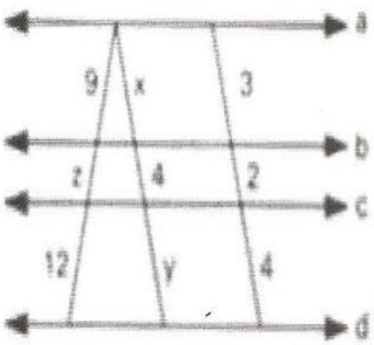
**Exs:**



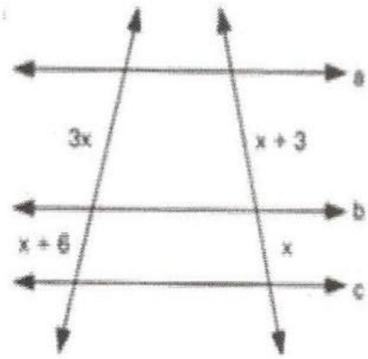
Após a realização das atividades 1 e 2, observamos que os alunos tiveram pouca dificuldade para identificar e analisar cada figura, seja em sua forma rígida ou em posições diversas da apresentada a priori. Isto é: os níveis 1 e 2 da teoria de Van Hiele são atingidos no momento em que o aluno se torna capaz de reconhecer e diferenciar cada tipo de elemento geométrico apresentado, independente da forma em que lhes foram apresentadas.

Da mesma forma que existe uma linha tênue entre os níveis 1 e 2, podemos perceber a existência dessa sutileza de limite entre os níveis 3 e 4, pois, após a compreensão dos níveis anteriores, do reconhecimento e da análise, podemos interpretar o teorema de Tales e classificar quais são os segmentos cujas razões são iguais, ou seja, adquirimos a capacidade de realizar uma dedução informal e, assim, inferir de fato a proporcionalidade ente os segmentos, dedução formal. Logo, podemos destacar que a compreensão e a capacidade de interpretação do teorema estão diretamente associados aos níveis de compreensão da teoria de Van Hiele, visto que, nesse momento, o aluno é capaz de reconhecer diferentes formas e possibilidades equivalentes para um mesmo conceito, pois adquiri uma compreensão lógica-matemática passando a ter uma visão mais global do teorema estudado. Nesse sentido, buscávamos dentro dos exercícios propostos, identificar e analisar as retas paralelas, transversais e os segmentos que então seriam proporcionais, em diferentes situações-problema. A seguir, os exercícios propostos, cujo objetivo, nessa aula, foi apenas identificar as retas paralelas, as transversais e os segmentos proporcionais.

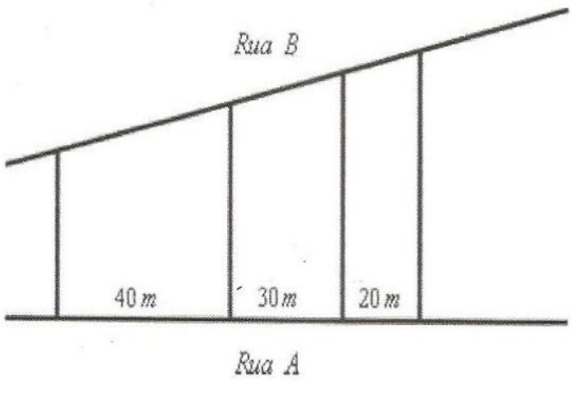
1) Na figura a seguir temos que a // b // c // d. Aplicando o Teorema de Tales determine os valores de x, z e y.



2) Sabendo que as retas a, b e c são paralelas, utilize o Teorema de Tales e determine o valor de x na figura a seguir:




3) (Fuvest–SP) Três terrenos têm frente para a rua A e para a rua B, como na figura. As divisas laterais são perpendiculares à rua A. Qual a medida de frente para a rua B de cada lote, sabendo que a frente total para essa rua tem 180m?

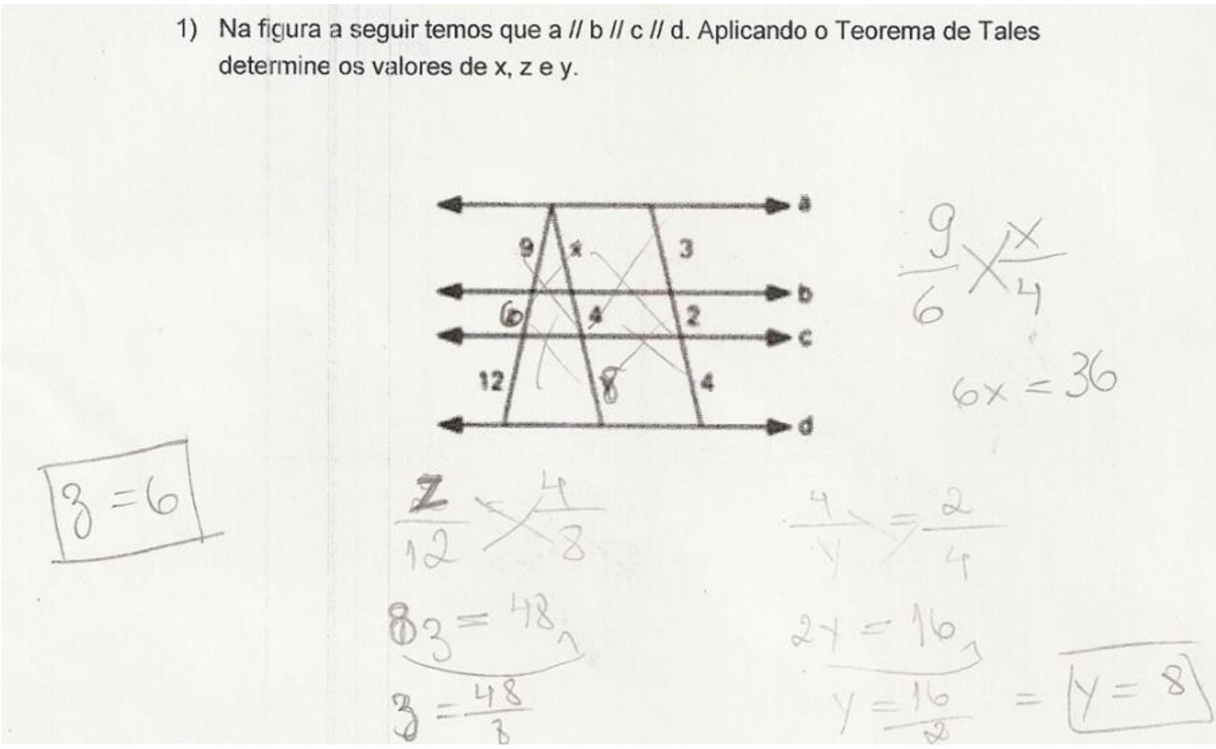



4) (Fuvest–SP) A sombra de um poste vertical, projetada pelo sol sobre um chão plano, mede 12 m. Nesse mesmo instante, a sombra, de um bastão vertical de 1 m de altura mede 0,6 m. Qual a altura do poste?

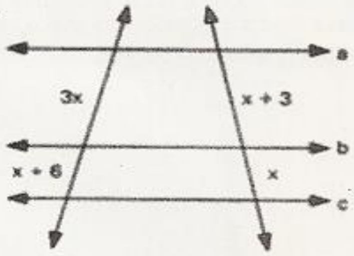
### 3.4.4 – Aula 3: Resolução dos exercícios propostos

No encontro seguinte, realizamos os exercícios propostos. Ficou claro que, em relação ao teorema de Tales e sua compreensão lógica-matemática, que os alunos não apresentavam muita dificuldade, e foi aplicada de maneira uniforme pelos alunos de 9º ano. Por outro lado, os alunos do 8º ano, apesar de entenderem o teorema de Tales, não conseguiram desenvolver o teorema e chegar ao resultado dos exercícios, porém foi possível observar que eles compreenderam a ideia de proporcionalidade em relação aos segmentos. Deste modo, podemos justificar o motivo do teorema de Tales ser estudado no 9º ano do Ensino Fundamental, momento no qual o aluno atinge a maturidade, ou seja, o nível necessário para a compreensão e o desenvolvimento do teorema de Tales, seja qual for a perspectiva em que se encontre. Por outro lado, os alunos do 8º ano, até conseguiam resolver alguns dos exercícios, porém sem estruturar a parte geométrica e articular a parte algébrica para a resolução dos exercícios, pois, em alguns casos eles percebiam a proporcionalidade entre os segmentos, isto é, o nível de compreensão desejável para o completo entendimento do teorema ainda está sendo desenvolvido.

- ✓ Exercícios propostos: Resolução do 9º ano



2) Sabendo que as retas a, b e c são paralelas, utilize o Teorema de Tales e determine o valor de x na figura a seguir:




Os valores de x são −1,5 ou 6.

$$\frac{3x}{x+6} = \frac{x+3}{x}$$

$$3x \cdot x = (x+6).(x+3)$$

$$3x^2 = x^2 + 3x + 6.x + 18$$

$$3x^2 - x^2 - 9x - 18 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-9)^2 - 4 . 2 . (-18)$$

$$\Delta = 81 + 144$$

$$\boxed{\Delta = 225.}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{(-9) \pm \sqrt{225}}{2(2)}$$

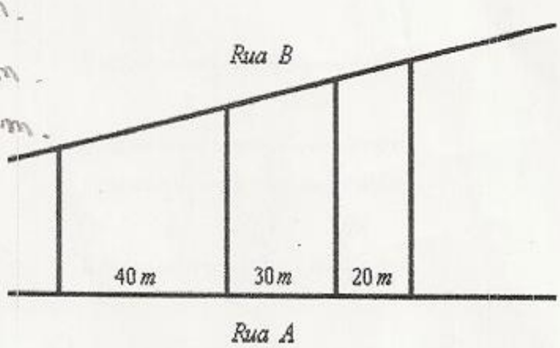
$$x = \frac{9 \pm 15}{4}$$

$$x^1 = \frac{9+15}{4} = 6$$

$$x^2 = \frac{9-15}{4} = -1,5$$

3) (Fuvest–SP) Três terrenos têm frente para a rua A e para a rua B, como na figura. As divisas laterais são perpendiculares à rua A. Qual a medida de frente para a rua B de cada lote, sabendo que a frente total para essa rua tem 180m?

medida Lote 1 = 80 m.
medida Lote 2 = 60 m.
medida Lote 3 = 40 m.

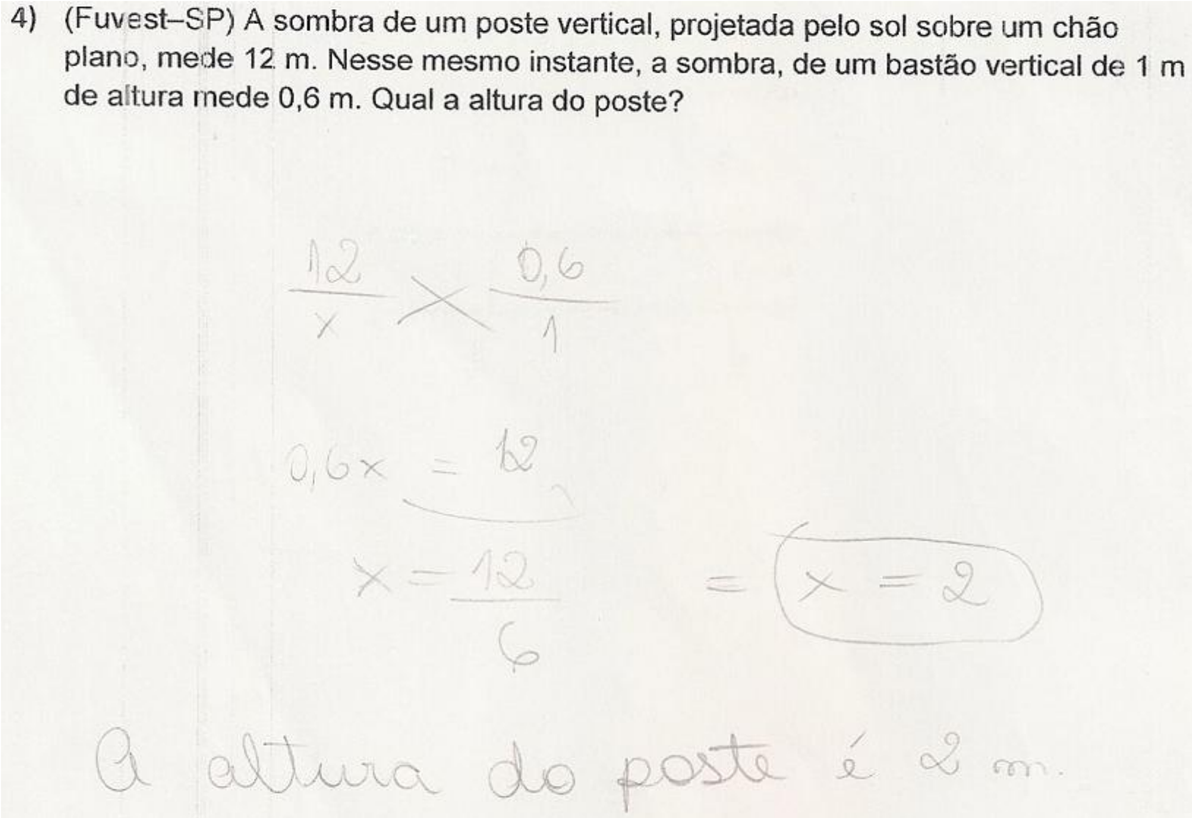



$$\frac{X}{40} = \frac{Y}{30} = \frac{Z}{20} = \frac{X+Y+Z}{40+30+20} = \frac{180}{90} = 2$$

$$\frac{X}{40} = 2 \quad x = 40 . 2 \quad X = 80$$

$$\frac{Z}{20} = 2Z = 20.2 \quad Z = 40$$

$$\frac{X}{30} = 2Y = 30.2 = Y = 60$$



4) (Fuvest–SP) A sombra de um poste vertical, projetada pelo sol sobre um chão plano, mede 12 m. Nesse mesmo instante, a sombra, de um bastão vertical de 1 m de altura mede 0,6 m. Qual a altura do poste?

$\frac{12}{x} \times \frac{0,6}{1}$

$0,6x = 12$

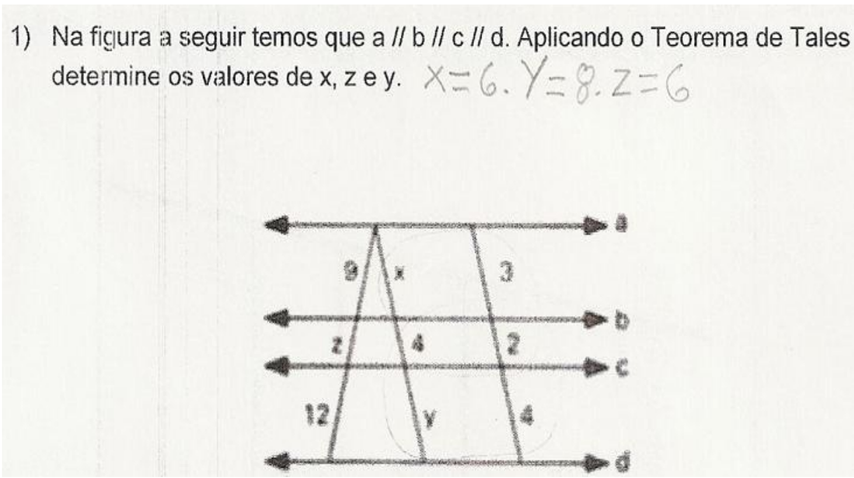
$x = \frac{12}{6} = x = 2$

A altura do poste é 2 m.

(erro de cálculo)

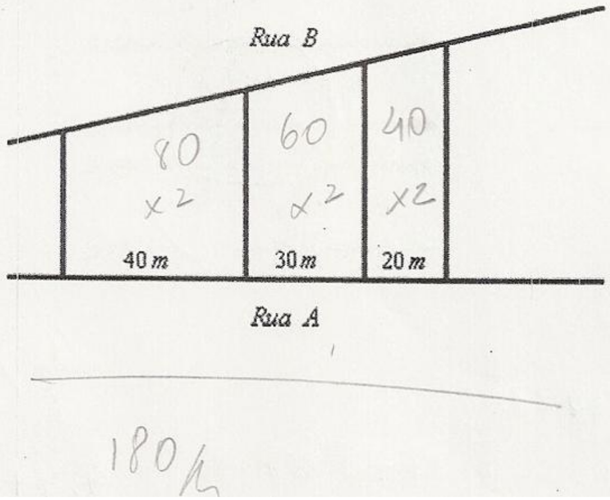
- ✓ Exercícios propostos: Resolução do 8º ano

Como já havíamos destacado, os alunos do 8º ano ainda não possuem autonomia e desenvolvimento suficiente para organizar e resolver os exercícios propostos, embora consigam perceber a proporcionalidade entre os segmentos em algumas situações de fácil resolução. Portanto, iremos destacar somente os exercícios 1 e 3, pois alguns alunos, apesar de não terem atingido o nível de compreensão ideal, encontraram subsídios suficientes no nível 3 da teoria de Van Hiele, dedução informal, e chegaram à solução do exercício através do raciocínio lógico intuitivo e dedutivo, ao realizarem as proporções existentes entre os segmentos. Vejamos:



1) Na figura a seguir temos que a // b // c // d. Aplicando o Teorema de Tales determine os valores de x, z e y. X=6. Y=8. Z=6

3) (Fuvest–SP) Três terrenos têm frente para a rua A e para a rua B, como na figura. As divisas laterais são perpendiculares à rua A. Qual a medida de frente para a rua B de cada lote, sabendo que a frente total para essa rua tem 180m?




Após a correção, a compreensão do teorema de Tales pelos alunos do 9º ano ficou evidenciada quando notamos que o aluno atinge o nível 4 da teoria de Van Hiele, ao se tornar capaz de entender e realizar as compreensões lógicas formais do teorema, reconhecendo diferentes possibilidades para um mesmo conceito ao adquirir uma compreensão lógica-matemática de um aspecto global do teorema estudado. Por outro lado, o aluno do 8º ano está limitado pelo nível 3 da teoria de Van Hiele, já que consegue reconhecer e realizar inter-relações entre as propriedades a partir do raciocínio intuitivo, entretanto não compreende a necessidade de encadeamento entre as propriedades do teorema de Tales. Logo, podemos destacar duas perguntas que surgiram no momento da correção, que nos permitem realizar as análises supracitadas.

> “... então, falou em retas paralelas que cruzam com outras é teorema de Tales ?” (Aluno participante, 8º ano)
>
> “... professor, tem alguma coisa a haver com aquele negócio de triângulo parecido?” (Aluno participante, 9º ano)
>
> “ ... semelhança de triângulos.” (Professor)

### 3.4.5 – Aula 4:Trabalho de campo

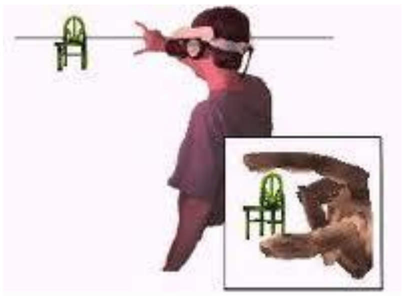
No trabalho de campo, buscamos uma aplicação prática do teorema de Tales que pudesse verificar a funcionalidade do teorema no dia-a-dia das pessoas. Então, foi sugerido um trabalho em grupo, onde os alunos participantes realizavam as medições, seguindo um roteiro esquematizado, anotavam as medidas em uma tabela e executavam as razões para então perceber se, de fato, as medidas dos seguimentos são proporcionais. Como as medições poderiam não ter tanta precisão, foi relatado aos alunos que as razões encontradas poderiam não ser iguais, porém, se tratássemos como uma estimativa, poderíamos chegar o mais próximo possível da resposta correta.

Material Utilizado para a realização do Trabalho de Campo:

- Régua (para medir a altura e a distância da imagem)
- Trena (para medir a altura e a distância do objeto)

Instruções:

OBJETO REAL X OBJETO IMAGINÁRIO



Pesquisa de Campo: A ilustração acima mostra como será realizada essa atividade nas dependências da escola.

Realização:

• A turma será dividida em 2 Grupos

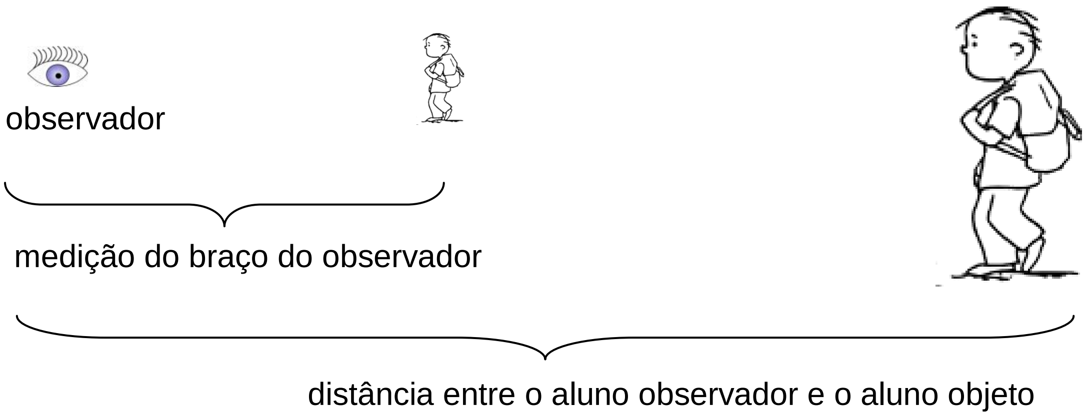
• Dois alunos se posicionam a uma certa distância um do outro, onde um deles será o observador e o outro o objeto

• O terceiro aluno realiza a medição da extensão do braço do aluno observador e entre o aluno observador e o aluno objeto

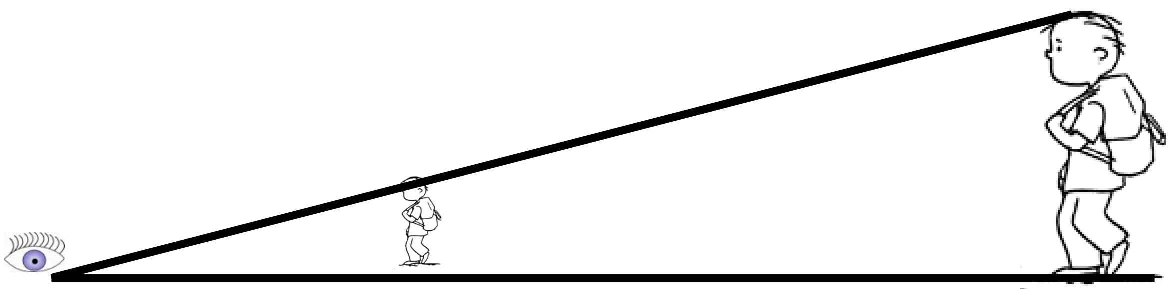
• O quarto aluno realiza a medição da imagem que o observador indica com a posição dos dedos indicador e polegar, e a medição da altura do aluno objeto

• O quinto aluno toma nota das medidas e preenche a tabela de dados para compararmos os resultados e concluirmos o exercício.

Esquematização:




Esquematização Matemática:



coleta de dados

| Medição | Objeto | Imagem | Distância observador/objeto | Distância Observador/imagem |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

Calcule as razões abaixo:

Razão:

$$\frac{Objeto}{Imagem}$$

e

$$\frac{Distância\ observador\ e\ objeto}{Distância\ observador\ e\ imagem}$$

- ✓ Grupo 1:

(Fotos do Autor)

**TABELA**

coleta de dados

| Medição | Objeto | Imagem | Distância observador/objeto | Distância Observador/imagem |
|---|---|---|---|---|
| | 1,52 | 0,10 | 9,60 | 0,64 |

Calcule as razões abaixo:

$$\frac{\textit{Objeto}}{\textit{Imagem}} = \frac{1,52}{0,10} = 15,2$$

*e*

$$\frac{\textit{Distância Observador/Objeto}}{\textit{Distância Observador/Imagem}} = \frac{9,60}{0,64} = 15,0$$

✓ Grupo 2:

(Fotos do Autor)

**TABELA**

coleta de dados

| Medição | Objeto | Imagem | Distância observador/objeto | Distância Observador/imagem |
|---|---|---|---|---|
| | 1,77m | 8 cm | 13,51 m | 60 cm |

Calcule as razões abaixo:

$$\frac{\textbf{Objeto}}{\textbf{Imagem}} \qquad \frac{177}{8} = 22,12$$

*e*

$$\frac{\textbf{Distância Observador/Objeto}}{\textbf{Distância Observador/Imagem}} \qquad \frac{13,51}{60} = 22,51$$

Realizada as medições e calculadas as razões, os alunos ficaram perplexos diante do resultado encontrado por eles. Fato curioso, foi que ao término da atividade proposta para o trabalho de campo, um aluno que pertencia a um dos grupos, cabe frisar que era do 9º ano, perguntou:

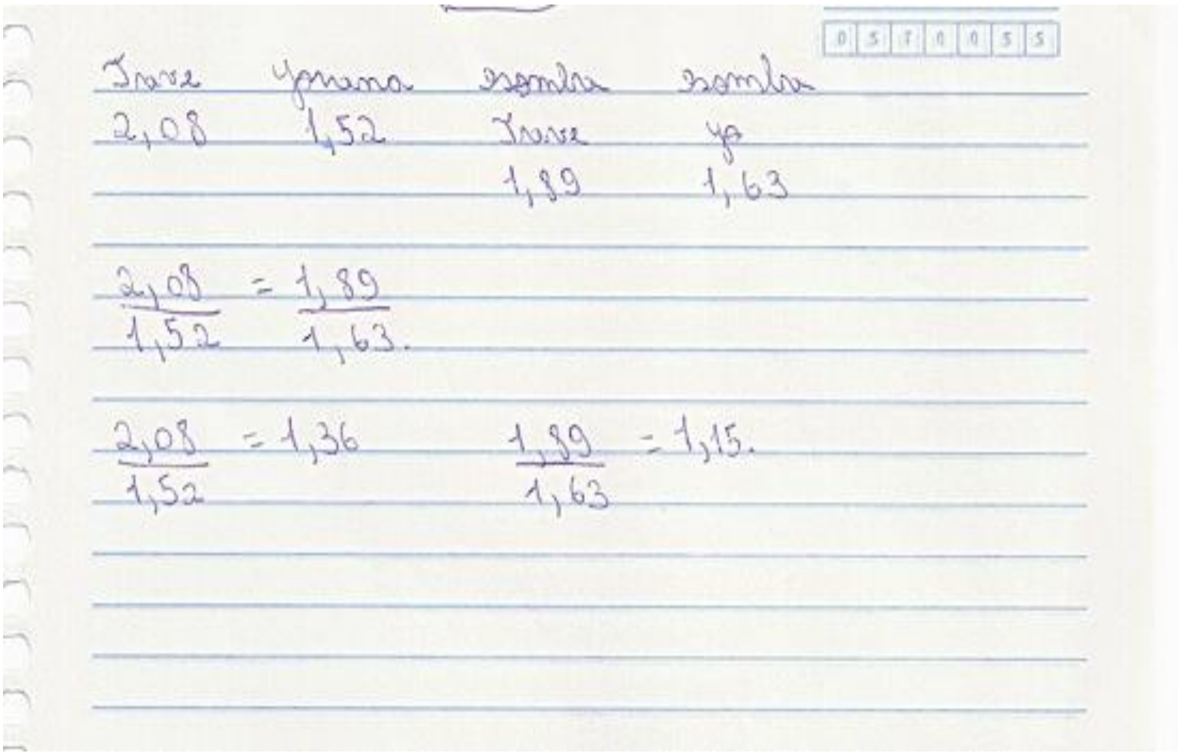
> ”Porque não fizemos o trabalho com a sombra, já que Tales fez dessa maneira?” (Aluno,9ºano)

No mesmo instante, corremos para a quadra e utilizamos a sombra da baliza de um dos gols da quadra poliesportiva. Uma aluna se posicionou ao lado da baliza, representando o bastão utilizado por Tales, os demais alunos fizeram as medições e as anotações e, logo após, se reuniram para calcular o resultado. Nesse momento, pedi para que eles esquematizassem a situação com o auxílio de uma tabela em uma folha de caderno solta, já que esse exercício não estava previsto, portanto, não tínhamos uma ficha para coletar os dados, e que fosse aplicada à ideia do Teorema de Tales.

Segue abaixo o resultado obtido:


(Foto do Autor)

Resolução dos alunos:




Em suma, tudo isso deve ser cogitado e analisado de maneira que possa contribuir e estimular o aluno em suas atividades escolares. Como vimos, não tivemos o propósito de classificar o que é melhor ou pior, e sim mostrar as contribuições que podem ser oferecidas quando dispomos da história da Matemática e da teoria de Van Hiele para a compreensão do teorema de Tales, independente do aluno tratar a atividade como fácil ou difícil.

Logo, criamos um ambiente favorável para a realização das atividades individuais ou em grupos, cuja finalidade é proporcionar o desenvolvimento de habilidades de leitura e interpretação, de resoluções, e formação do raciocínio lógico e dedutivo, pois, dessa maneira poderemos promover uma maior integração no que diz respeito ao processo de ensino-aprendizagem.

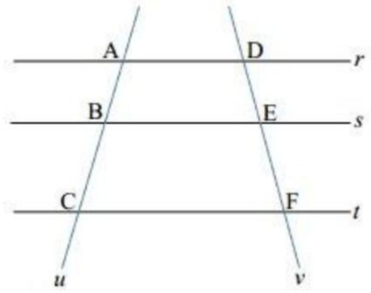
**Observação:** O NÍVEL 5, que trata do RIGOR, foi suprimido, em razão de ter sido considerado suficiente e relevante a utilização e a concentração nos quatro primeiros níveis de pensamento da Teoria de Van Hiele, por se tratar de um projeto desenvolvido para as turmas do 8º e do 9º anos do Ensino Fundamental.

# 4. Considerações Finais

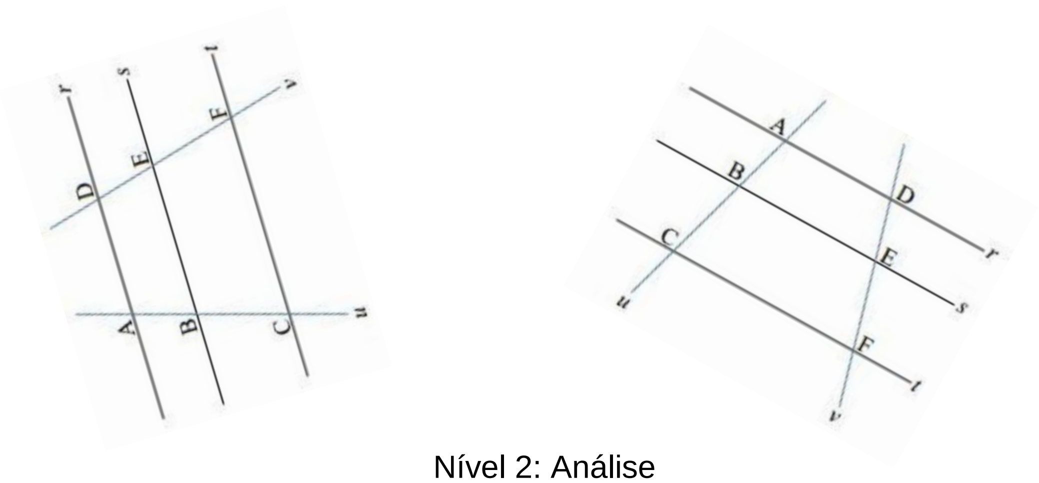
De acordo com os objetivos da pesquisa, não tivemos como pretensão comparar as turmas de 8º e 9º anos e, muito menos, mencionar que existe uma fórmula ou maneira única para a aprendizagem. Nesse sentido, buscamos mostrar que contribuições a teoria de Van Hiele traria no processo ensino-aprendizagem, para a compreensão do teorema de Tales, tendo a História da Matemática como elemento motivador. Após realizarmos uma análise conjunta de todas as variáveis que envolvem o processo, pôde-se concluir que os resultados foram bastante satisfatórios.

De fato, os Parâmetros Curriculares Nacional (PCN), estão baseados e estruturados em ciclos, e de acordo com a teoria de Van Hiele, que está dividida em níveis de compreensão, além das Orientações Curriculares da Secretaria de Educação do Município do Rio de Janeiro (SME), foi possível constatar que o processo de aprendizagem do aluno está relacionado ao grau de maturidade alcançado por ele em cada estágio da aprendizagem, à medida em que vão adquirindo novas habilidades e competências. Isso ficou claro, na prática dos exercícios realizados pelos alunos durante a pesquisa, quando constatamos que os alunos do 8º ano não realizaram as atividades de maneira correta, pois ainda não atingiram a maturidade suficiente para tal, apesar de obter um entendimento superficial do teorema. Em contra partida, os alunos do 9º ano não tiveram maiores dificuldades para o entendimento do teorema, destacando que adquiriram as habilidades e competências necessárias para atingir a maturidade esperada para a compreensão do teorema de Tales.

Como o objetivo da pesquisa é destacar as contribuições da teoria de Van Hiele, tendo a história da matemática como elemento motivador, pudemos perceber que a viabilidade se deu devido à interação dos alunos com a pesquisa, tornando a aula mais atrativa e prazerosa, afastando assim a visão assombrada da Matemática da qual os alunos insistem em ter medo. Buscamos, então, evitar a chamada decoreba, através de estímulos para que o raciocínio fosse privilegiado ante à forma comumente ensinada nas escolas. Podemos frisar que, a maior parte das vezes, o teorema, as fórmulas e os métodos de ensino são apresentados aos alunos de maneira pronta, única, o que nos permite inferir que dessa maneira, de acordo com a teoria de Van Hiele, o aluno não ultrapassa o nível de compreensão 1, pois a maneira trabalhada não transpõe o nível do reconhecimento. Desta forma, podemos dizer que, se um exercício for apresentado de maneira diferente da que foi apresentado no conteúdo, cria-se o primeiro obstáculo para o aluno, e junto ao bloqueio gerado vem o desestímulo do aluno para a aprendizagem. Vejamos:




Nível 1: Reconhecimento




Nível 2: Análise

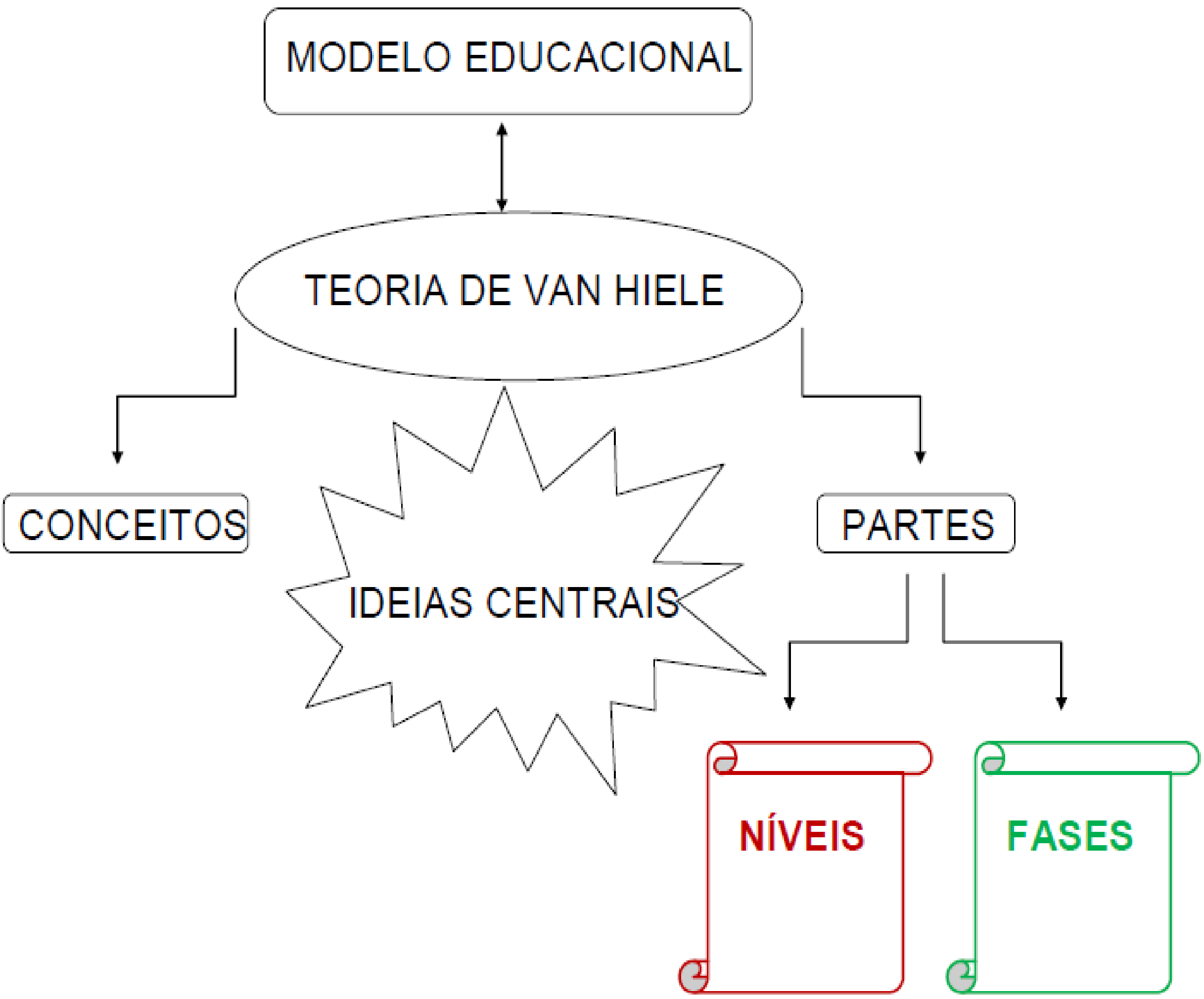
Apesar das figuras serem as mesmas, ou da mesma classe, quando o modelo de ensino adotado é o método da decoreba, ao deparar com as figuras do nível 2, o aluno não consegue abstrair e aplicar o que foi aprendido sobre o teorema no nível 1. Nesse caso, buscamos deixar claro que o objetivo não é criticar a prática docente de um ou outro professor, e sim mostrar a viabilidade da pesquisa. Geralmente, em virtude de alguns problemas enfrentados pelos docentes, que dificultam a sua prática, os alunos não são apresentados ao conteúdo programático de maneira satisfatória, o que inviabiliza o cumprimento de um currículo mínimo. Assim, os alunos são afastados de demonstrações de fórmulas e teoremas, pois são considerados tópicos que estão além do nível de compreensão dos alunos, o que de fato ocorre, já que o conhecimento é apresentado via fórmulas prontas, o que impossibilita os alunos a sairem do nível 1, e porque os alunos priorizam a memorização ao invés da compreensão, transformando a Matemática em um pesadelo. Para tanto, a teoria de Van Hiele vem contribuir para a desmistificação da Matemática, tornando o aprendizado fácil e agradável.

Um fato interessante ao fim da pesquisa foi perceber a viabilidade do projeto, como os alunos se comportaram ao aprender e compreender o teorema de Tales, e a evolução didática adquirida por parte dos alunos, que mudaram a maneira de pensar, estudar e passaram a se posicionar de maneira mais crítica com relação a cada assunto discutido em sala de aula, seja qual fosse o tema.

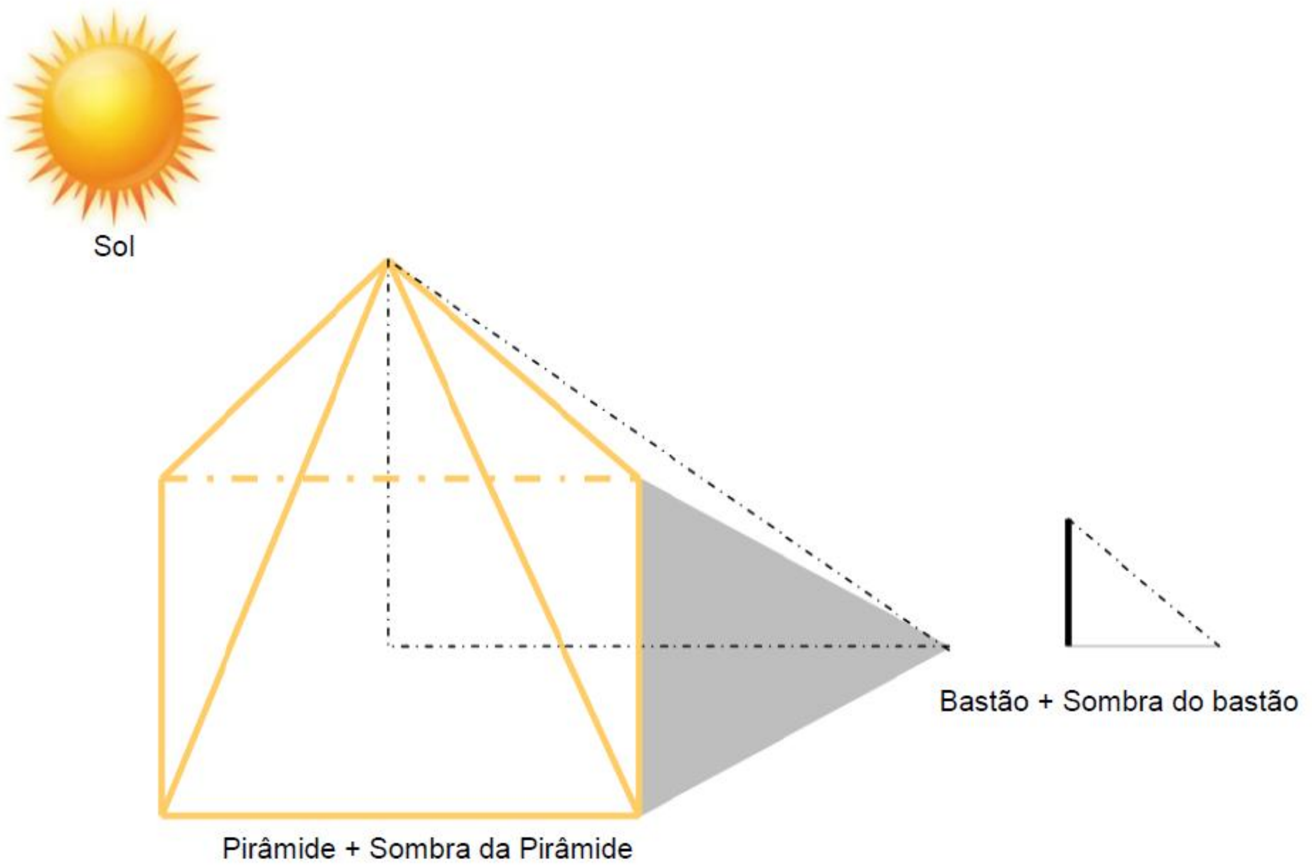
Logo, devemos estimular a consciência crítica de cada um sobre a realidade que nós vivemos, revendo as nossas práticas docentes, pois somos seres em formação contínua. Nesse caso, podemos destacar que, de acordo com a pesquisa realizada, a viabilidade da utilização da História da Matemática, associada à teoria de Van Hiele para o aprendizado do teorema de Tales, em muito contribuiu para o desenvolvimento de habilidades e competências necessárias para a obtenção de um currículo mínimo, promovendo assim uma maior integração no processo de ensino-aprendizagem.

## 5. Apêndice

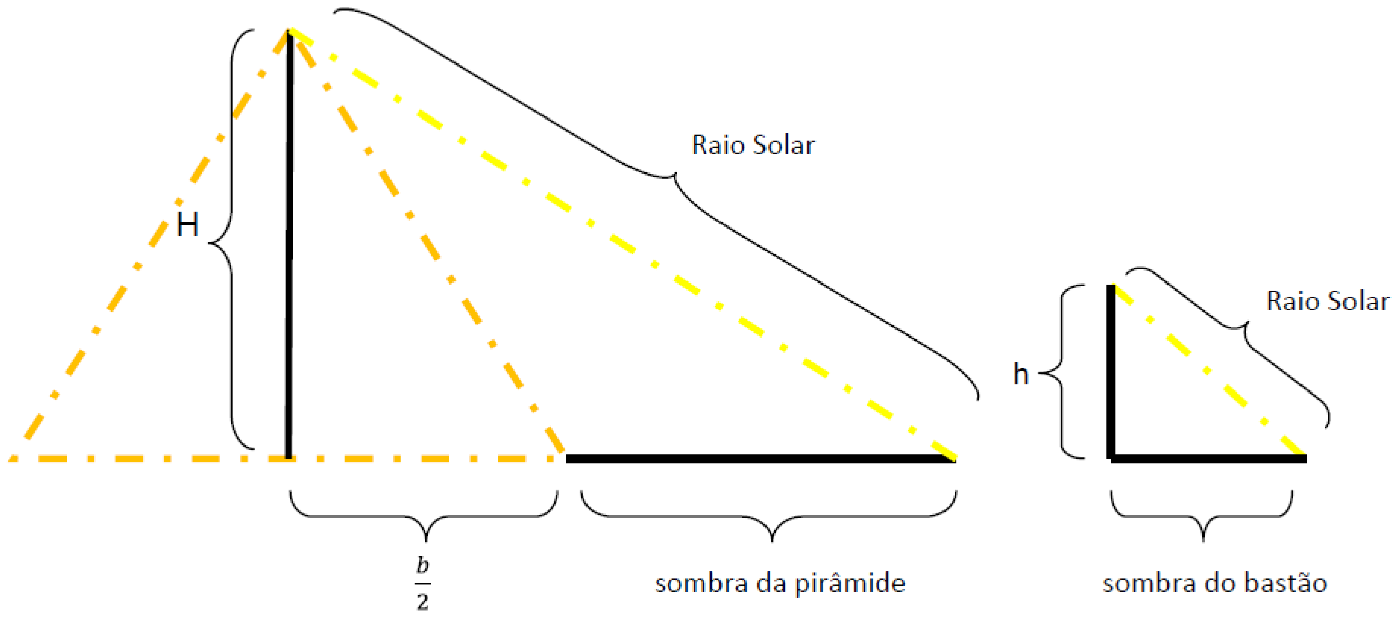
### 5.1 – Figura: Modelo Educacional



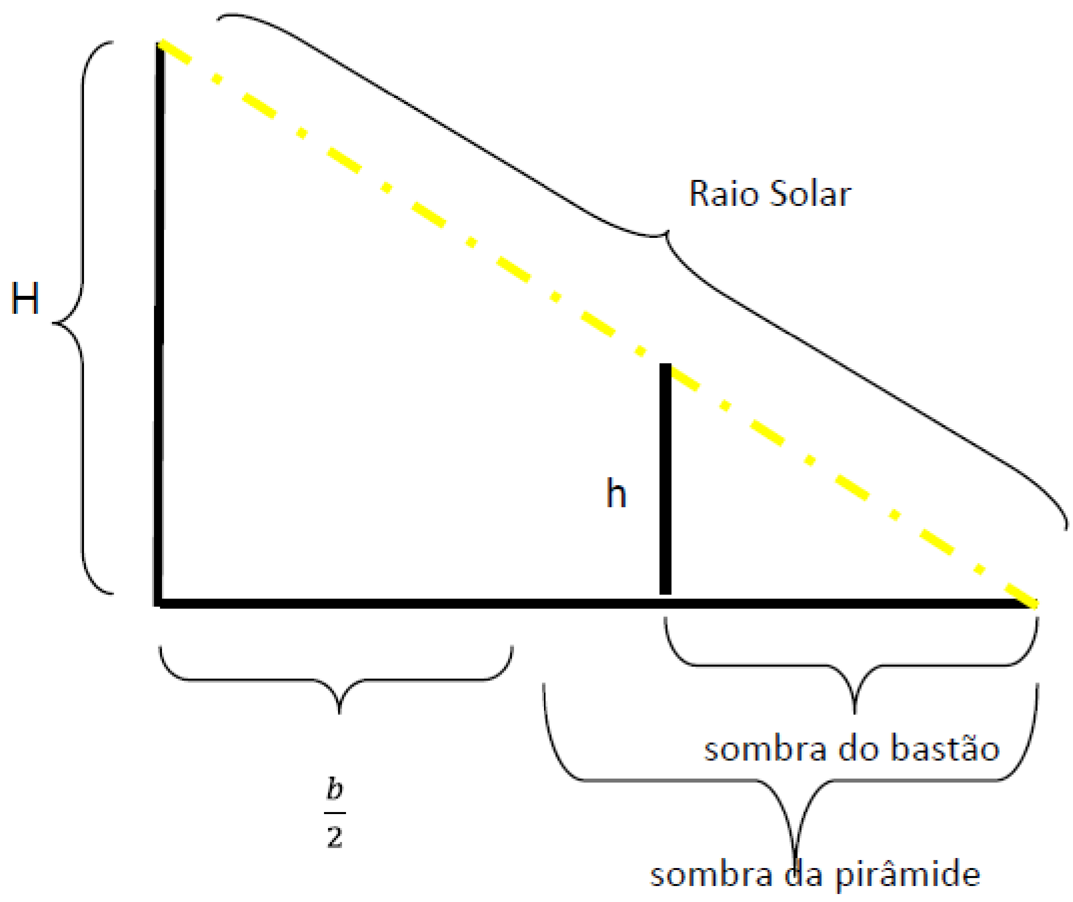
**5.2 – Figura: Esquematização da situação para realizar a medição**



**5.3 – Figura:Representação matemática para o cálculo**



**5.4 – Figura: Representação matemática com base nas proposições demonstradas por Tales, segundo relatos históricos**



## 5.5 – Carta Convite

**CARTA CONVITE**

Prezados Pais

Venho por meio dessa, convidar o(a) aluno(a) ________________ para participar do projeto de pesquisa em nível de Mestrado, realizado a partir de uma experiência com os alunos(as) do 8º e 9º ano do Ensino Fundamental de uma Escola Municipal do Rio de Janeiro (RJ), cujo título é: "Uma abordagem construtivista do Teorema de Tales sob a perspectiva da Teoria de Van Hiele".

- Objetivos da Pesquisa:

Considerar os níveis da Teoria de Van Hiele como um fator essencial no planejamento, na implementação e na avaliação das atividades para o processo de ensino-aprendizagem de Geometria Euclidiana Plana, sobretudo do Teorema de Tales, com a utilização da História da Matemática como elemento motivador.

- Da participação:

O aluno(a) participará da pesquisa como colaborador, de forma absolutamente voluntária.

Ao aluno será facultado responder as perguntas e poderão desistir de participar do projeto, a qualquer momento, sem nenhum prejuízo.

A identidade de cada aluno(a) será mantida em sigilo e serão utilizadas somente as iniciais de seus nomes.

A participação acontecerá por meio de um questionário e realização de atividades propostas.

- Para ser preenchido pelo responsável:

Eu, ________________________________________ autorizo o aluno(a) a participar do projeto de pesquisa.

________________________________________

Assinatura do Responsável

- Para ser preenchido pelo aluno:

Eu, ________________________________________ concordo em participar do projeto de pesquisa na condição de colaborador e de forma voluntária.

________________________________________

Assinatura do Aluno(a)

Rio de Janeiro, de 2014.

## 5.6 – Questionário

**QUESTIONÁRIO**

1) Qual o seu nível de interesse pela Matemática?

(a) Alto

(b) Médio

(c) Baixo

(d) Nenhum

2) Faça a tua autoavaliação na disciplina Matemática?

(a) Muito Bom

(b) Bom

(c) Regular

(d) Insuficiente

3) Você avalia a Matemática como uma disciplina:

(a) Muito Difícil

(b) Difícil

(c) Fácil

(d) Muito Fácil

Justifique:

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

4) Você avalia a Geometria como uma disciplina:

(a) Muito Difícil

(b) Difícil

(c) Fácil

(d) Muito Fácil

5) Você já ouviu falar em História da Matemática: ( ) Sim ( ) Não

6) A História da Matemática foi apresentada como?

(a) Motivação

(b) Curiosidade

(c) Ilustração

(d) Nunca ouvi sobre o assunto em sala de aula

7) Você conhece os componentes básicos da Geometria?

( ) Sim

( ) Não

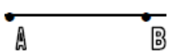
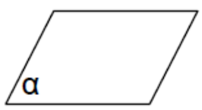
Se sim, quais são:

8) Desenhe as figuras abaixo:

Ponto (represente pela letra A maiúscula)

Reta (Infinita nas duas direções)

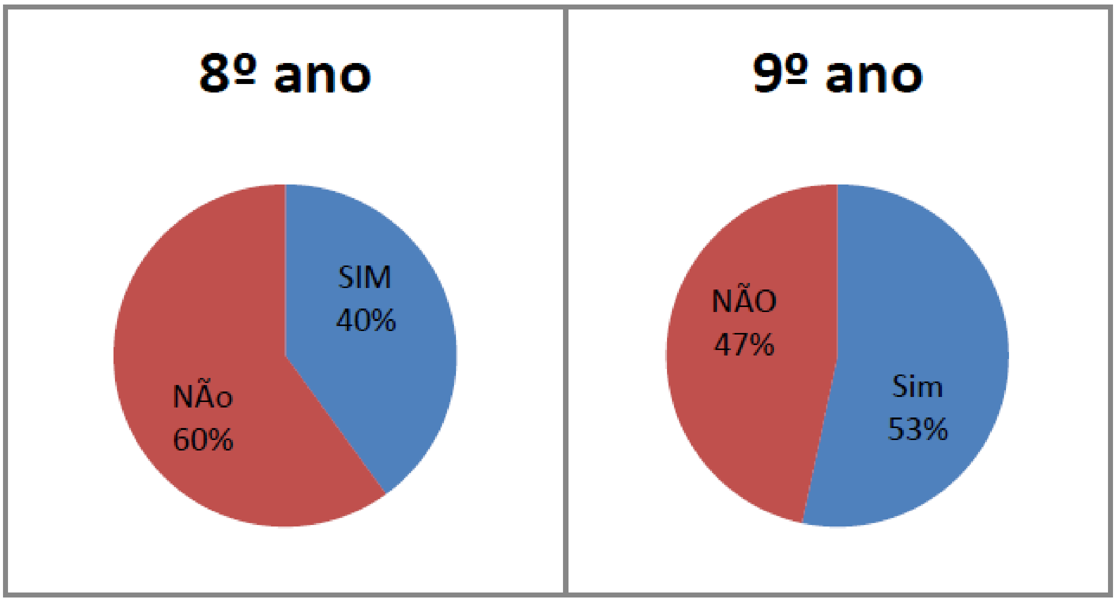
9) Correlacione:

| | | |
|---|---|---|
| ( 1 ) Segmento de Reta | ( ) |  |
| ( 2 ) Ponto | ( ) |  |
| ( 3 ) Reta | ( ) |  |
| ( 4 ) Plano | ( ) |  |
| ( 5 ) Semi-Reta | ( ) |  |

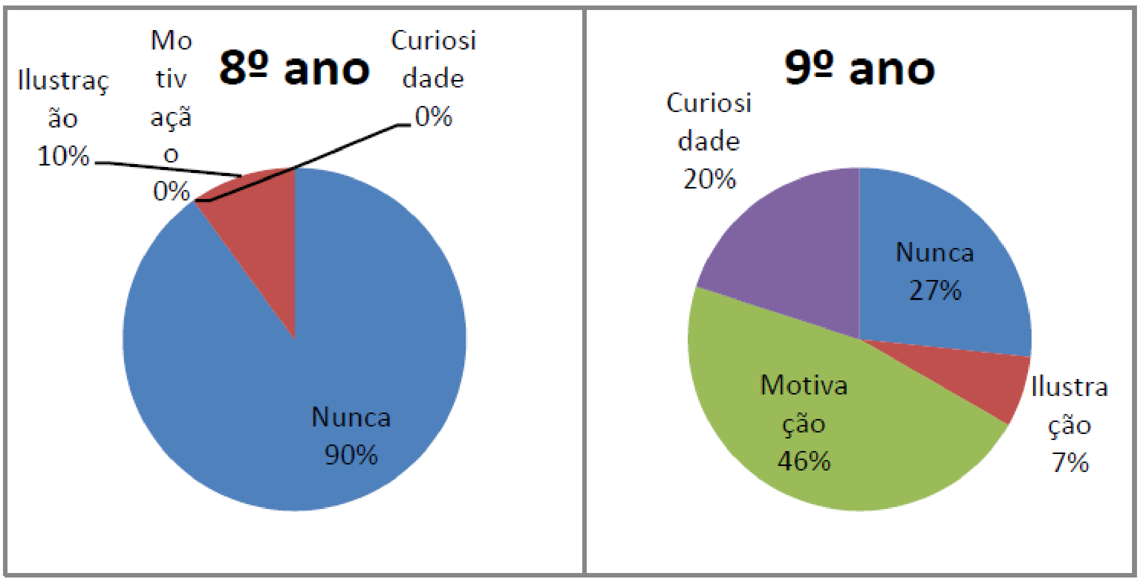
## 5.7 – Análise gráfica das respostas do questionário

GEOMETRIA BÁSICA

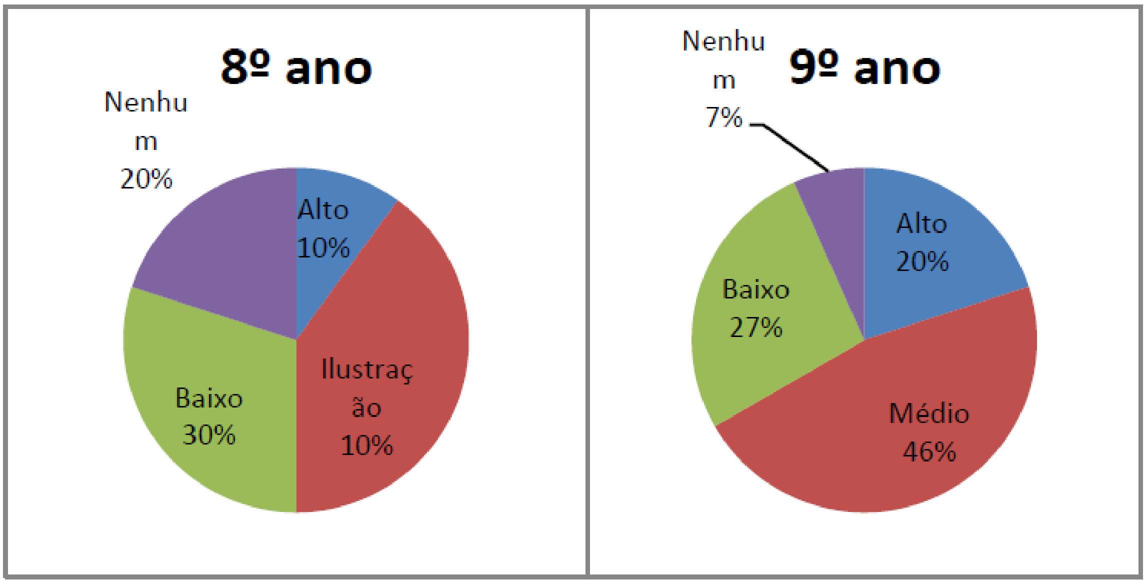
Ponto, Reta e Plano



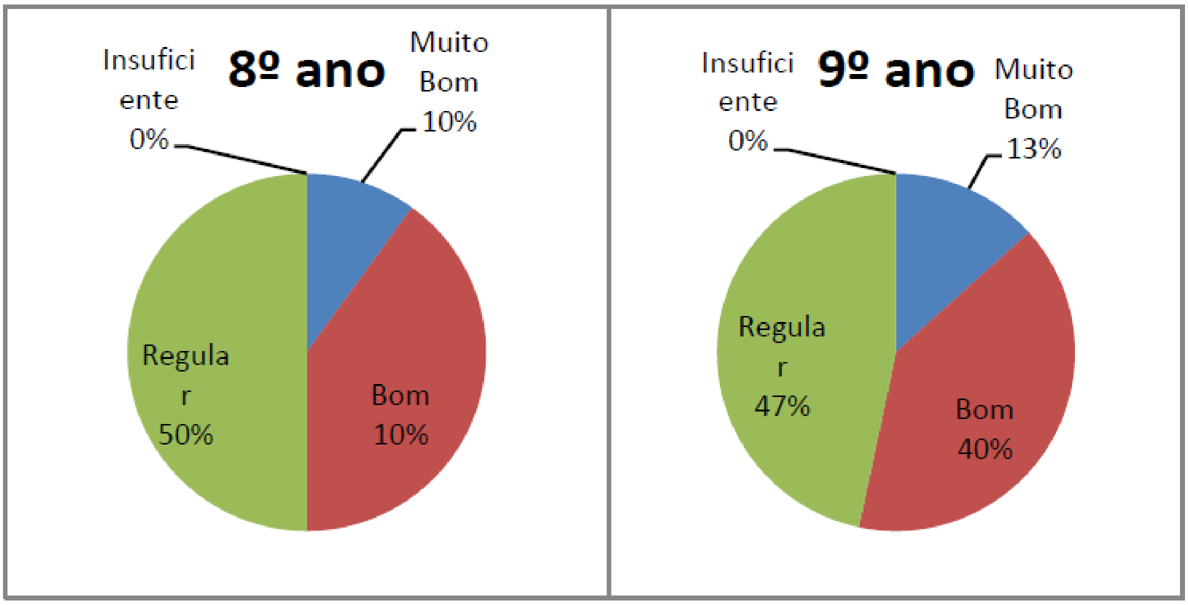

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA



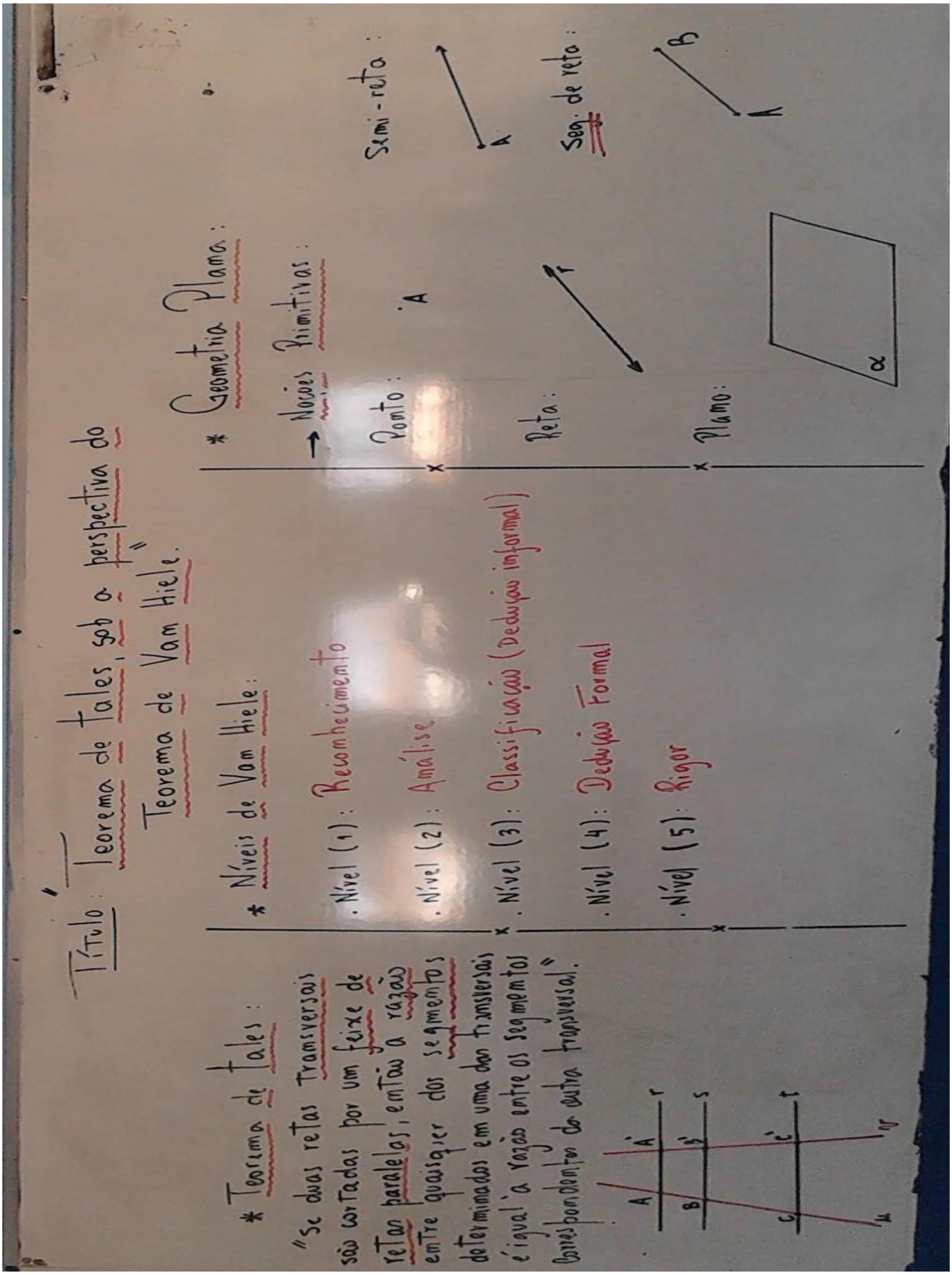
## NÍVEL DE INTERESSE




## AUTOAVALIAÇÃO EM MATEMÁTICA



## 5.8 – Aula expositiva: Teorema de Tales, Níveis de Van Hiele e Geometria Básica



## 5.9 – Atividades propostas 1 e 2

**1) IDENTIFIQUE:**

**( R ) RETA** **( S ) SEMI-RETA** **( Seg. ) SEGMENTO DE RETA**

( )

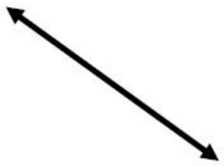
( )

( )

( )

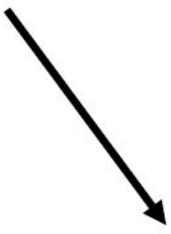
( )

( )



( )

( )

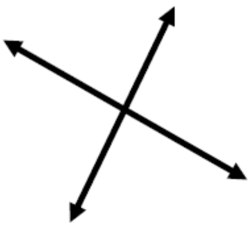


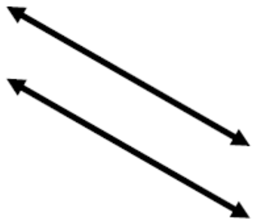
( )

**2) INDIQUE AS POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE AS DUAS RETAS NAS OPÇÕES ABAIXO:**

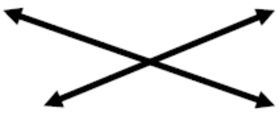
**( P ) PARALELAS ( C ) CONCORRENTES**

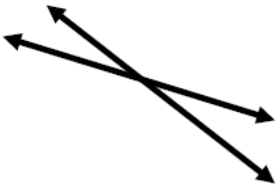
**( )** **( )** **( )**





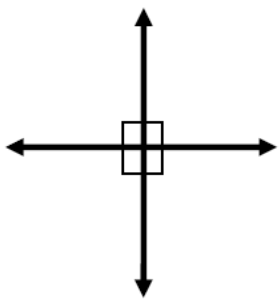
**( )** **( )** **( )**

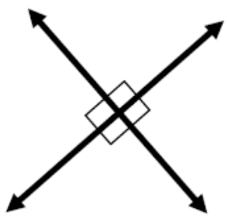




**Obs.: Retas concorrentes que formam 4 ( quatro ) ângulos de 90° são chamadas de Retas Concorrente Perpendiculares.**

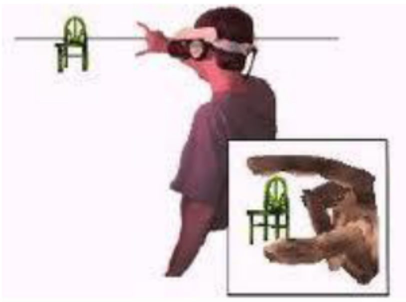
**Exs:**





## 5.10 – Trabalho de Campo: Instruções

OBJETO REAL X OBJETO IMAGINÁRIO



Pesquisa de Campo: A ilustração acima mostra como será realizada essa atividade nas dependências da escola.

Realização:

- A turma será dividida em Grupos de 5 alunos:

- Dois alunos se posicionam a uma certa distância um do outro, onde um deles será o observador e o outro o objeto

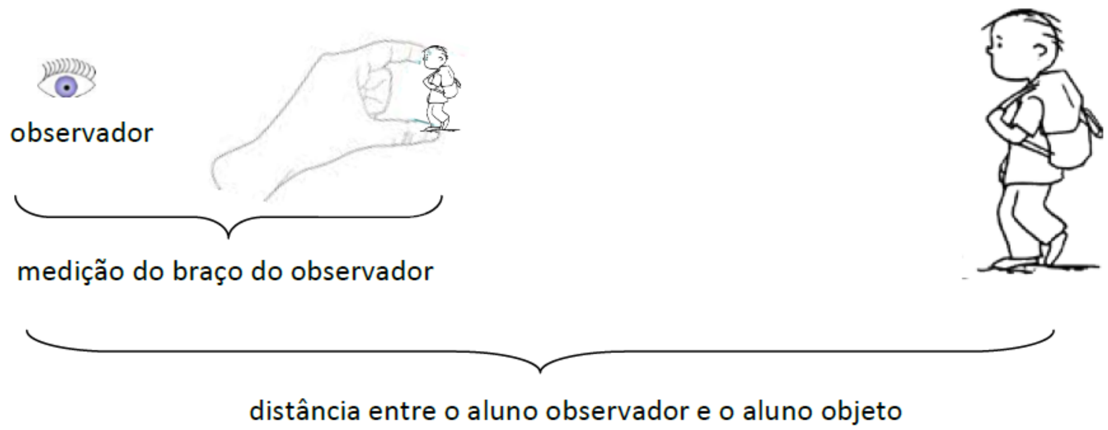
- Um terceiro aluno realiza a medição da extensão do braço do aluno observador enquanto um quarto aluno com auxílio de uma fita métrica verifica a distância entre o aluno observador e o aluno objeto

- Um quinto aluno realiza a medição da imagem que o observador indica com a posição dos dedos indicador e polegar, e a medição da altura do aluno objeto

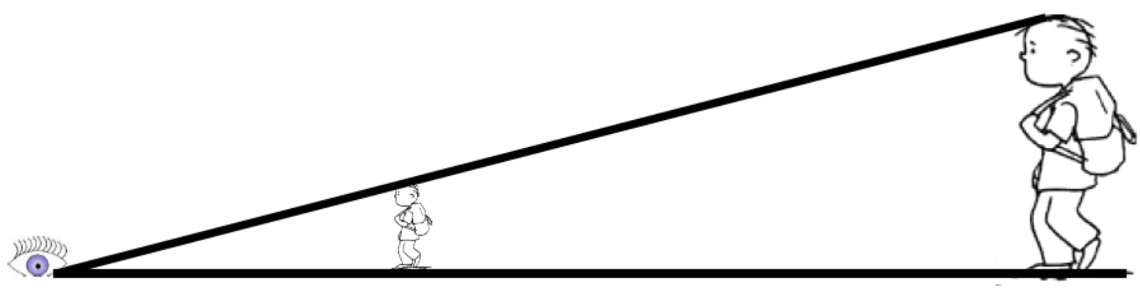
- Um sexto aluno toma nota das medidas e preenche a tabela de dados para que juntos possam comparar os resultados e concluir o exercício.

## 5.11 – Esquematização

Esquematização do Exercício:




Esquematização Matemática:



## 6. Referências Bibliográficas

[1] **BOYER**, Carl B. História da matemática. 2ª Edição. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

[2] **CROWLEY**, Mary L. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: LINDQUIST, Mary & SHULTE, Albert P. (organizadores), Aprendendo e Ensinando Geometria. São Paulo: Atual, 1994.

[3] **D'AMBROSIO**, Ubiratan. Educação matemática: da teoria à prática. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática). Campinas: Papirus, 1996.

[4] **D'AMBRÓSIO**, Ubiratan. A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática. In: BICUDO, M. A. V. (Ed.). Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

[5] **EVES**, H. Introdução à História da Matemática. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Unicamp, 2004.

[6] **FERNANDES**, A. Os Idiomas do Aprendente. São Paulo: Artmed, 2001.

[7] **FREUDENTHAL**, H. (1973). Mathematics as an educational task. Dordrecht: Reidel.

[8] **GROSSI**, E. P. (2000). Uma nova síntese sobre como acontece a aprendizagem. In: E. Grossi. *A coragem de mudar em educação.* Petrópolis: Vozes.

[9] **MENDES**, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. A história como um agente de cognição na Educação Matemática. Porto Alegre: Sulina, 2006.

[10] **MENDES**, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. Investigação Histórica no Ensino da Matemática. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2009(a).

[11] **MENDES**, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem. 2. ed. rev. e aum. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009(b).

[12] **MIGUEL**, Antonio; **MIORIN**, Maria A. História na educação matemática: propostas e desafios. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica. 2005.

[13] **MIGUEL**, Antônio; **MIORIM**, Maria Ângela. História da Matemática: propostas e desafios. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. (Coleção tendências em educação matemática).

[14] **MIORIM**, Maria Ângela. Introdução a História da Educação Matemática. São Paulo: Atual,1998.

[15] **ORIENTAÇÕES CURRICULARES**, primeiro ao nono ano do Ensino Fundamental: RIO DE JANEIRO. Secretaria Municipal de Educação. Orientações Curriculares: Áreas Específicas. Rio de Janeiro, 2013. Disponível em <http://www.rio.rj.gov.br/dlstatic/10112/4246635/4104937/MAT_Orientacoes_2013.pdf>

[16] **PIAGET**, J. A psicologia. 2. Ed. Lisboa: Livraria Bertrand, 1973.

[17] **PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAL (PCN)**, terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental: Introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF,1998. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf>

[18] **VAN HIELE**, P.M. (1973). Begrip e Inzicht. Muusses: Purmerend.

[19] **VYGOTSKY**, L. S. Aprendizagem e desenvolvimento: um processo sócio-histórico. São Paulo: Scipione,1997.

[20] **VYGOTSKY**, L. S. Pensamento e linguagem. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

[21] **VYGOTSKY**, L. S. A Formação Social da Mente. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

[22] **YOUTUBE**. Vídeo: Tales e a altura da pirâmide. Disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=cWkU6fGoYA8>